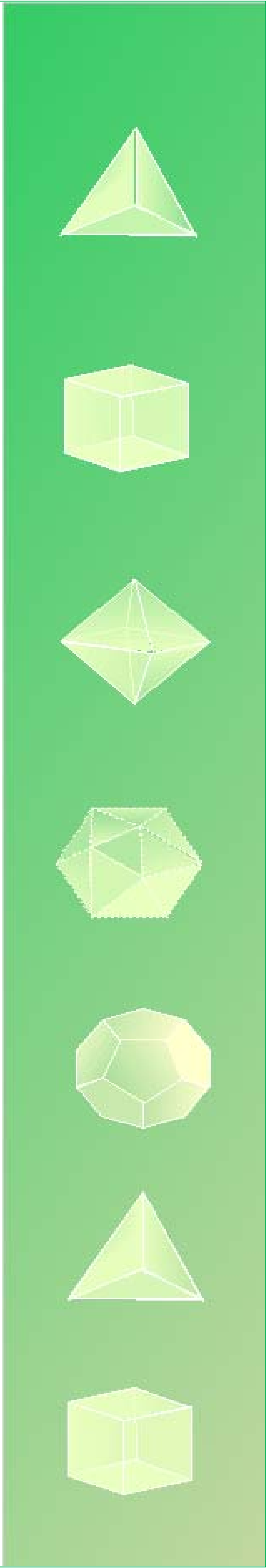


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Galicia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Paula Orta y Mª Dolores Vázquez Torrón
Revisor Luis Carlos Vidal Del Campo

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = AX$. **b)** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Problema A.2: (3 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad, mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable. **c)** Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

Problema A.3: (3 puntos)

Se pide: **a)** Calcular el ángulo del intervalo [0°, 90°] que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. **b)** Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ **c)** Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto a π .

Problema A.4: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$ **b)** Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

Problema B.2: (3 puntos)

Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide: **a)** Calcular los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

Problema B.3: (3 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_2 : 2x+3y=0$ y $\pi_1 : mx-y+2=0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi : -x+z=0$.

Problema B.4: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25ºC y desviación típica 4ºC. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día está comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = AX$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución:

a) $A - X = AX;\ A = AX + X;\ A = (A+I)\,X$

$(A + I)^{-1}A = (A + I)^{-1}\,(A + I)\,X \quad \Rightarrow \quad X = (A + I)^{-1}\,A$

$$\boldsymbol{X = (A + I)^{-1}A}$$

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A+I=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^{-1}=\dfrac{[Ad(A+I)]^t}{|A+I|}$

Hacemos las cuentas:

$|A+I|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4+1=5 \qquad Ad(A+I)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Ad(A+I)]^t=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

La matriz buscada es:

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad, mediante derivación.

b) Si $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$, di qué relación tiene que existir entre los parámetros *a* y *b* para que *f* sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que *f* sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta *x* = 4 y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$

Solución:

a) Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \qquad \int \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C \Rightarrow \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$$

Derivando:

$$\left[x(\ln x - 1) + C\right]' = \ln x - 1 + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

Demostrado

b)

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases} \qquad f \quad continua \quad en \quad x=e \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to e} f(x) = f(e)$$

$$\left.\begin{aligned} & f(e) = \ln e = 1 \\ & \lim_{x\to e^-} \ln x = \ln e = 1 \\ & \lim_{x\to e^+} ax + b = a\cdot e + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \quad es \quad continua \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot e + b = 1$$

$$f'(e^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h+e)-f(e)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\ln(h+e)-1}{h} \underset{\frac{0}{0}IND(L'hôpital)}{=} \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{h+e}}{1} = \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h+e} = \frac{1}{e} \qquad f \quad es \quad derivable \quad \Leftrightarrow \quad f'(e^-) = f'(e^+)$$

$$f'(e^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h+e)-f(e)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{a(h+e)+b-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{ah+ae+b-1}{h} \underset{a\cdot e+b=1}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{ah}{h} = a \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{e} \quad y \quad b = 0$$

Para que *f* sea continua debe verificarse que $a\cdot e + b = 1$, y para que sea derivable, $a = 1/e$ y $b = 0$.

c)

$$A = \left|\int_1^e \ln x dx\right| + \left|\int_e^4 \frac{x}{e}dx\right| = \left|x(\ln x - 1)\right]_1^e\Big| + \left|\frac{1}{e}\cdot\frac{x^2}{2}\right|_e^4 = \left|e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1)\right| + \left|\frac{8}{e} - \frac{e}{2}\right| = 1 + \frac{16-e^2}{2e} = \frac{2e+16-e^2}{2e} \approx 2.5839u^2$$

Área es aproximadamente igual a 2.58 u^2.

Problema A.3:

Se pide: **a)** Calcular el ángulo del intervalo [0°, 90°] que forman los vectores $\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1, -3, 0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

c) Calcular la distancia del punto Q(1, 1, 1) al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto a π .

Solución:

a) Sea α el ángulo pedido.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}+0=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{1}=1$$

Por tanto, $\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^o$

El ángulo mide **60°**

b) $r:\begin{cases} x-y+2z=1\rightarrow\vec{u}=(1,-1,2) \\ y-z=0\rightarrow\vec{v}=(0,1,-1) \end{cases}$

Por ser el plano perpendicular a la recta, el vector director de r es un vector normal del plano.

$$\vec{n}=\vec{d_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \qquad \vec{n}=(-1,1,1)$$

$$\pi:(-1,1,1)\cdot(x-1,y+3,z)=0$$

$-x+1+y+3+z=0\Rightarrow\pi:-x+y+z+4=0$ Plano pedido.

El plano es: $-x+y+z+4=0$

c) **Distancia** del punto Q al plano: $$d(Q,\pi)=\frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2.8866u$$

Simétrico de Q respecto del plano: Para calcular el simétrico Q', primero calculo la proyección de Q sobre el plano. Para ello calculo la ecuación de una recta s que pase por Q y sea perpendicular al plano dado.

$$por \quad ser \quad s\perp\pi \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d_s}=\vec{n}=(-1,1,1)$$

$$s:\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases} \qquad \Pr oy=s\cap\pi$$ - (1 – t) + 1 + t + 1 + t + 4 = 0; –1 + t + 1 + t + 1 + t + 4 = 0; 3t + 5 = 0

$$\Rightarrow t=-\frac{5}{3} \qquad \Rightarrow \Pr oy=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

El simétrico de Q respecto del plano es el simétrico de Q respecto de la proyección.

$$\frac{x+1}{2}=\frac{8}{3};x+1=\frac{16}{3};x=\frac{13}{3}$$
$$\frac{y+1}{2}=-\frac{2}{3};y+1=-\frac{4}{3};y=-\frac{7}{3}$$
$$\frac{z+1}{2}=-\frac{2}{3};z+1=-\frac{4}{3};z=-\frac{7}{3}$$

Simétrico de Q respecto de π. $\Rightarrow Q'=\left(\frac{13}{3},-\frac{7}{3},-\frac{7}{3}\right)$

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcula las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tanga rosas o solamente tenga camelias.

b) En un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

Solución:

a) Sean los sucesos C = "tener camelias" y R = "tener rosas"

$P(C)=0.4 \qquad P(R)=0.35 \qquad P(C\cap R)=0.21$

Probabilidad de que tenga camelias o rosas:

$$P(C\cup R)=P(C)+P(R)-P(C\cap R)\Rightarrow P(C\cup R)=0.4+0.35-0.21\Rightarrow P(C\cup R)=0.54$$

Probabilidad de que no tenga ni camelias ni rosas:

$$P(\overline{C}\cap\overline{R})\underbrace{=}_{Morgan}P(\overline{C\cup R})=1-P(C\cup R)=1-0.54=0.46$$

Probabilidad de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas: $P(C/R)=\dfrac{P(C\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0.21}{0.35}=0.6$

Probabilidad de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias: $P(R/C)=\dfrac{P(C\cap R)}{P(C)}=\dfrac{0.21}{0.4}=0.525$

Probabilidad de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias:

$$P[(R\cap\overline{C})\cup P(C\cap\overline{R})]=P(R\cap\overline{C})+P(C\cap\overline{R})=P(R)-P(R\cap C)+P(C)-P(R\cap C)=$$

$$=P(R)+P(C)-2P(R\cap C)=0.35+0.4-2\cdot 0.21=0.33$$

b) "Éxito" = nacer en enero. $P(Enero)=\dfrac{1}{12}$ La variable sigue una distribución Binomial $B\left(50,\dfrac{1}{12}\right)$

$$P(por\quad lo\quad menos\quad 2)=P(x\geq 2)=1-[P(x=0)+P(x=1)]=1-\left[\binom{50}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^{50}+\binom{50}{1}\right.\Big($$

$$=1-(0.0129+0.0586)=0.9285$$

Es una probabilidad muy alta, del **0.9285.**

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

Solución:

a) Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2-2(3-m)-6m+2(3-m)=2m^2-6+2m-6m+6-2m=2m^2-6m$$

$$2m^2-6m=0 \Leftrightarrow 2m(m-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases} \qquad Si \quad m\neq 0 \quad y \quad m\neq 3 \quad \Rightarrow \quad r(A)=3=r(\overline{A})$$

- Si $m = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18+18=0 \Rightarrow r(\overline{A})=2$$

- Si $m = 3$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9\neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18-18-54=-54\neq 0 \Rightarrow r(\overline{A})=3$$

DISCUSIÓN:

- $Si \quad m\neq 0 \quad y \quad m\neq 3 \quad \Rightarrow \quad r(A)=r(\overline{A})=3=n^o\,incógnitas \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Compatible \quad Determinado\left(\exists!\,Solución\right)$
- $Si \quad m=0 \quad \Rightarrow \quad r(A)=r(\overline{A})=2<n^o\,incógnitas \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Compatible \quad Indeterminado \quad (\infty soluciones)$
- $Si \quad m=3 \quad \Rightarrow \quad r(A)\neq r(\overline{A}) \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Incompatible \quad (No \quad tiene \quad solución)$

b)

- m **= 0** Por el apartado anterior, sabemos que es un sistema compatible indeterminado. Busco las infinitas soluciones con el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} z = -2 \\ 2x - 6 = y \end{aligned}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 6 \qquad con \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$

- m **= 4** Por el apartado anterior, sabemos que es un sistema compatible determinado. Busco la solución por Cramer.

$$|A| = 2 \cdot 16 - 24 = 8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{6 + 18 - 72 - 24}{8} = \frac{-72}{8} = -9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-48 + 36 + 12}{8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{8} = \frac{48 + 12 - 12}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Solución: (x, y, z) = (–9, 0, 6)

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide: **a)** Calcular los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$

Solución:

a) $$\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) \underbrace{=}_{\infty\cdot 0\, IND} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty} IND(L'Hopital)} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty} IND(L'Hopital)} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x}) = +\infty$$

b)
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}\left(2x - x^2\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(2x - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada:

$$\begin{array}{l} f' < 0 \forall x \in (-\infty,0)\cup(2,+\infty) \\ f' > 0 \forall x \in (0,2) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} f \ \ crece \ \ en \ \ (0,2) \\ f \ \ decrece \ \ en \ \ (-\infty,0)\cup(2,+\infty) \end{cases} \quad \begin{array}{l} f \ \ tiene \ \ un \ \ mínimo \ \ en \ \ (0,0) \\ f \ \ tiene \ \ un \ \ máximo \ \ en \ \ \left(2,\frac{4}{e^2}\right) \end{array}$$

$$f''(x) = -e^{-x}\left(2x - x^2\right) + e^{-x}\left(2-2x\right) = e^{-x}\left(2 - 2x - 2x + x^2\right) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2} = 2\pm\sqrt{2}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 2) + e^{-x}(2x-4) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 2 + 2x - 4) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$$

$$\begin{cases} f'''(2-\sqrt{2}) \neq 0 \\ f'''(2+\sqrt{2}) \neq 0 \end{cases}$$ Por lo que f tiene puntos de inflexión en:

$$\left(2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})\right) = \left(2-\sqrt{2}, \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$$ y $$\left(2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})\right) = \left(2+\sqrt{2}, \frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$$

c) $\int x^2e^{-x}dx$ La resuelvo por partes:

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -\int -e^{-x}dx = -e^{-x}$$

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \qquad \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}$$

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C$$

Problema B.3:

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

$\pi : -x + z = 0$

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0, 0, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 0).

c) Calcula el punto simétrico del punto P(1, 2, 3) con respecto al plano .

Solución:

a) $\begin{cases} \pi_1 : mx - y + 2 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 \qquad 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$

$Si \quad m \neq -\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2 = r(\overline{A}) \quad \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Por tanto, los planos se cortan en una recta.

$Si \quad m = -\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 1$

$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$Sistema Incompatible. Por tanto, los planos son paralelos.

b) A(0,0,0), B(1,0,1), C(0,1,0) $\qquad \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \qquad \overrightarrow{AC} = (0,1,0)$

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} \Rightarrow \vec{n} = (-1,0,1)$ vector normal del plano.

El plano buscado. $\qquad (-1,0,1)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow \pi : -x + z = 0$

c) Primero calculo la proyección de P sobre el plano, para ello calculo la ecuación de la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π .

$\overrightarrow{d_r} = \vec{n} = (-1,0,1)$

$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ - (1 – t) + 3 + t = 0; -1 + t + 3 + t = 0; 2t + 2 = 0; t = -1

$\mathrm{Proy} = H = r \cap \pi = (2,2,2)$

Entonces, el simétrico buscado será el simétrico de P respecto a H.

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{2} = 2 \Rightarrow x = 3 \\ \dfrac{2+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \\ \dfrac{3+z}{2} = 2 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

***P'*(3, 2, 1)** es el simétrico buscado.

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25ºC y desviación típica 4ºC. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día está comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

a) $P(B)=0.8 \qquad P(A\cap B)=0.2 \qquad P(A\cup B)=3P(A)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

3$P(A)$ = $P(A)$ + 0.8 – 0.2; 2$P(A)$ = 0.6;

$P(A)$ = **0.3**

b) $N(25^0C, 4^0C)$

$$P\left(21\le x\le 27.2\right)=P\left(\frac{21-25}{4}\le z\le\frac{27.2-25}{4}\right)=P\left(-1\le z\le 0.55\right)=$$

$$=P\left(z\le 0.55\right)-P\left(z\le -1\right)=P\left(z\le 0.55\right)-\left[1-P\left(z\le 1\right)\right]=0.7088-1+0.8413=0.5501$$

La probabilidad pedida es **0.5501**

n = 31; p = 0.5501; np = 17.0531;

Por tanto, se espera que la temperatura permanezca dentro de ese rango **17 días**.

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

XUNTA DE GALICIA · CiUG · USC	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (2 puntos)

a) Despeja X de la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema A.2: (3 puntos)

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0, 0)$ y el punto $P(1, 3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1, 3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Problema A.3: (3 puntos)

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

Problema A.4: (2 puntos)

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm.

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

XUNTA DE GALICIA / CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (2 puntos)

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

Problema B.2: (3 puntos)

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

Problema B.3: (3puntos)

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$ calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y. $\pi_2: x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0^0, 90^0]$ que forman

Problema B.4: (2puntos)

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), y P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque un gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2 100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

a) Despeja X de la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $XA + B = C \Rightarrow XA = C - B. \Rightarrow XAA^{-1} = (C-B)A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = (C - B)A^{-1} \Rightarrow$

$$X = (C - B)A^{-1}$$

b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0 \quad \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 7/5 & -3/5 \\ 7/5 & -3/5 \end{pmatrix}}$$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0, 0)$ y el punto $P(1, 3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1, 3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

a) $Dom\ f(x) = \{x \in R\ /\ x > 0\} = (0, \infty)$

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

$$f'(x) = 2xlnx + x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x\ lnx + x = 0 \Rightarrow x(2\ lnx + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin domf(x) \\ 2lnx + 1 = 0 \Rightarrow lnx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

decreciente $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

creciente $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\ \infty\right)$

$f''(x) = 2\ lnx + 3$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0 \Rightarrow$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{e}}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}}\right)$

b) Calculamos los puntos necesarios para la representación de la parábola: $y = 4 - x^2$
Puntos de corte con eje OX ($y = 0$): serán $(-2, 0)$ y $(2, 0)$
Puntos de corte con eje OY ($x = 0$): $(0, 4)$
Vértice: $x_v = 0 \Rightarrow y_v = 4 \Rightarrow$ vértice $(0, 4)$.

Calculamos la recta tangente a la parábola en el punto $P(1, 3)$, para ello calculamos su pendiente:

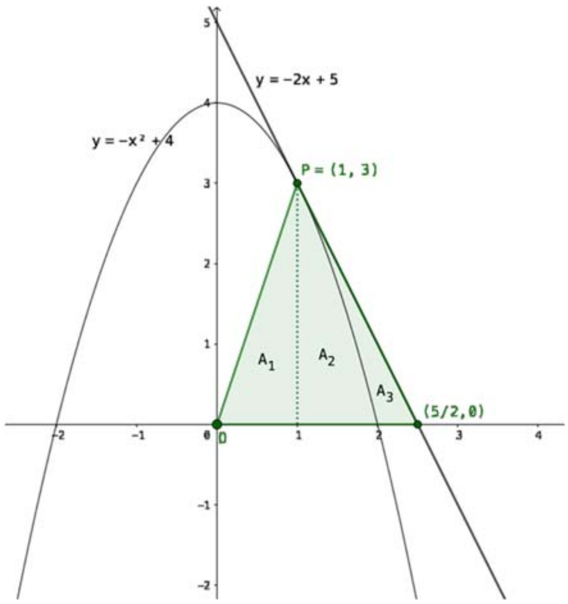
$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2$ pendiente de la tangente en $P(1, 3)$.

La recta tangente a la parábola en ese punto será $y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow$ $y = -2x + 5$.

El tercer vértice será el punto de intersección de la recta tangente $y = -2x + 5$ con el eje OX: $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Hacemos la representación gráfica de la situación

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo



Dividimos la primera región en 2 zonas $A_1 y A_2$ para calcular su área

$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} u^2$

$$A_2 = \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{5}{3} u^2$$

Área de la 1ª región: $A1 + A2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \boldsymbol{\frac{19}{6} u^2}$

El área de la 2º región puede calcularse como el área de triángulo menos el área de la 1ª región

Área de la 2ª región: $A_3 = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \boldsymbol{\frac{7}{12} u^2}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

Solución:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

Consideramos la matriz de coeficientes M y la matriz ampliada M^* y estudiamos los rangos

$M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $M^* \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Rango de M es mayor o igual a 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Para $m = 1$, $rang\ M = 1$, $Rang\ M^* = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ planos paralelos

Para $m = -1$, $rang\ M = 1$, $rang\ M^* = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ planos paralelos

Para $M \neq \pm 1$. $rang\ M = rang\ M^* = 2$ planos secantes

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

Método 1. Tres puntos están alineados si el rango de los vectores determinados por ellos es uno.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2-k, 0)$ $\overrightarrow{AC} = (8, 1-k, m-1)$

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 2-k & 0 \\ 8 & 1-k & m-1 \end{pmatrix}$$

Todos los menores de orden 2 tienen que ser 0 para que $rang\ V = 1$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2-k \\ 8 & 1-k \end{vmatrix} = -1(1-k) - 8(2-k) = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{9}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & m-1 \end{vmatrix} = -1(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1$$

Si $m = 1$ y $k = 17/9$, $\begin{vmatrix} 2-k & 0 \\ 1-k & m-1 \end{vmatrix} = 0$

Para $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{k} = \mathbf{17/9}$ los tres puntos están alineados

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Método 2. Calculamos la ecuación de la recta que contiene a dos de ellos y el tercero tiene que pertenecer a dicha recta dicha para que estén alineados.

$A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$

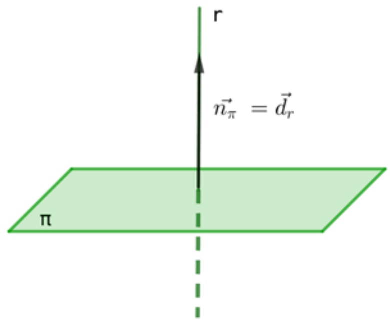
Recta que contienen a A y B. $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2-k} = \frac{z-1}{0}$

Para que estén alineados C Tiene que ser un punto de r $\frac{8+1}{-1} = \frac{1-2}{2-k} = \frac{m-1}{0} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 9(2-k) = 1 \Longrightarrow k = 17/9 \\ 0 = -1(m-1) \Longrightarrow m = 1 \end{cases}$$

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos P (-1,2,1) y Q(8,1,1) y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto R(1,1,1).

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 9\lambda} \\ \boldsymbol{y = 2 - \lambda} \\ \boldsymbol{z = 1} \end{cases}$$



Por ser perpendiculares el plano y la recta, el vector director de esta coincide con el vector normal al plano

$\overrightarrow{d_r} = (9,-1,0)$ $\vec{n}_\pi = (9,-1,0)$ $\Longrightarrow \pi: 9x - y + 0z + D = 0$

$R(1,1,1) \in \pi \Rightarrow 9 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 8$

El plano pedido es $\boldsymbol{\pi: 9x - y + 0z + 8 = 0}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

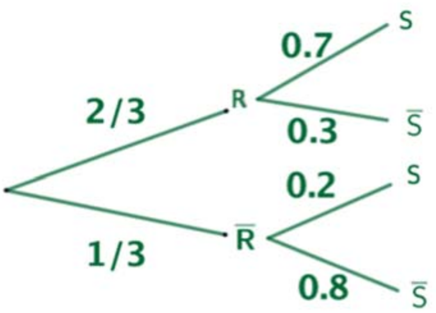
a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm.

Solución:

a) Sean los sucesos R: regar el rosal, $P(R) = 2/3$. $P(S/R) = 0.7$. $P(S/\bar{R}) = 0.2$, S: sobrevive el rosal.

$$P(S)=P(S/R)\cdot P(R) + P(S/\bar{R})\cdot P(\bar{R}) = 0.7\cdot 2/3 + 0.2\cdot 1/3 = 8/15 = 0.53.$$



$$P(\bar{R}/S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2 \cdot 1/3}{8/15} = \frac{1}{6} = 0.125$$

La probabilidad de que el chico no haya regado el rosal teniendo en cuenta que al final de la semana el rosal haya sobrevivido es **0.125**

b) X grosor se las piezas

$X \equiv N(8, 0.01)$. $\Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \equiv N(0,1)$

$$P(7.98 \le X \le 8.021) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.021-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2.1) = P(z \le 2.1) - P(Z \le -2) =$$

$$= P(z \le 2.1) - (1 - P(Z \le 2)) = 0.9821 - 1 + 0.9772 = 0.9593$$

La probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm es de **0.9593.**

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

a) Discute según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$

Solución:

a) Sean A matriz de coeficientes, A^* matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; rang\ A \geq 2$$

$$|A| = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0\,, m = -2$$

$$m \neq 0 \;\; m \neq -2\; rang\ A = 3$$

$m = 0$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; rangA^* = 2.$ EL resto de los menores de orden 3 valen 0. (∃ menores de orden 2 ≠ 0)

$m = -2$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; rangA^* = 3$

$m \neq 0 \;\; m \neq 2\; rang\ A = \; rangA^* = 3 = nº\ incógnitas \Rightarrow sistema\ compatible\ determinado$

$m = 0 \quad rang\ A = \; rangA^* = 2 < nº\ de\ incógnitas \;\Rightarrow sistema\ compatible\ indeterminado$

$m = -2 \quad rang\ A = 2,\; rangA^* = 3 \;\Rightarrow sistema\ incompatible$

b) Resolver para $m = 0$ (Compatible indeterminado)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2z = -2 \Rightarrow z = 1 \\ y = y \\ x = -3z + y \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} z = 1 \\ y = y \\ x = -3 + y \end{matrix} \quad \text{Solución:} \quad \begin{matrix} z = 1 \\ y = \lambda \\ x = -3 + \lambda \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Resolver para $m = 2$ (Compatible determinado) Observando el tipo de ecuaciones es más fácil resolverlo por Gauss que por Cramer

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad z = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,, \quad 2y - 2z = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2},\; x = 2 + y - 3z \Rightarrow x = 0$$

Solución: $\boldsymbol{x = 0, y = -\frac{1}{2}\,, z = \frac{1}{2}}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

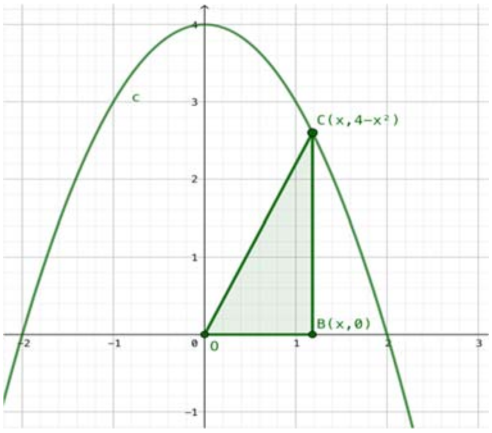
Problema B.2:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

Solución:

a) Representamos la situación:



Calculamos los puntos necesarios para la representación de la parábola: $y = 4 - x^2$

Puntos de corte con eje OX ($y = 0$): serán $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

Puntos de corte con eje OY ($x = 0$): $(0, 4)$

Vértice: $x_v = 0 \Rightarrow y_v = 4 \Rightarrow$ vértice $(0, 4)$

$A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2} = \frac{4x-x^3}{2}$ función a maximizar

$A'(x) = \frac{4-3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

La solución negativa no es válida por tratarse de una longitud.

$$A''(x) = -3x \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \Rightarrow$$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ $y = 4 - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 8/3$ valores que maximizan el área

$$\textit{Catetos: } \overline{OB} = \sqrt{4/3}\ u. \quad \overline{BC} = \frac{8}{3} u.$$

$$\textit{Hipotenusa (Pitágoras): } \overline{OC} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{19}}{3}\ u.$$

b) Teorema de Bolzano

Sea una función f continua en el intervalo cerrado. $[a, b]$ que toma valores de signo contrario en los extremos ($f(a) \cdot f(b) < 0$) entonces existe al menos un $c \in (a, b) / f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:

Existe al menos un $c \in (a, b)\ /\ f'(c) = 0$

Problema B.3:

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$ calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y $\pi_2: x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0^0, 90^0]$ que forman

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r que tiene vector director $\vec{d} = (1, -2, 3)$ y pasa por el punto $A(2, -1, 0)$

$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ sustituimos en la ecuación del plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$

$$3(2 + \lambda) + 2(-1 - 2\lambda) - 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituimos este valor en la recta r $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{cases}$

El punto de corte de la recta y el plano es $\boldsymbol{P(3, -3, 3)}$

Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores

Punto: $A(2, -1, 0)$ (por estar la recta en el plano)

$\vec{v} = (1, -2, 3)$ (vector director de la recta)

$\vec{w} = (3, 2, -1)$ (vector perpendicular al plano π)

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4x + 10y + 8z + 18 = 0$$

$\boldsymbol{\pi': -4x + 10y + 8z + 18 = 0}$ plano perpendicular a π que contiene a r

b) Posición relativa de dos planos. Tenemos que estudiar el rango de la matriz de coeficientes M y el de la matriz ampliada M^*

$\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$rang\ M = rang\ M^* = 2 \Rightarrow$ planos secantes

Los vectores normales de los planos son: $\overrightarrow{n_{\pi_1}} = (2, -5, 4)$ $\overrightarrow{n_{\pi_2}} = (1, 0, 0)$

$$\cos(\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2) = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|(2,-5,4)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{1^2+0+0}} = \frac{2}{\sqrt{45}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\widehat{\pi_1 \pi_2} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) = \boldsymbol{72.65^0}$$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A)=0.2$, $P(B) = 0.4$ y $(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), y P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque un gol desde el punto de penalti es p = 0.7. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2 100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes

Solución:

a) $P(A) = 0.2$ $\quad$ $P(\bar{A}) = 0.8$

$P(B) = 0.4$ $\quad$ $P(\bar{B}) = 0.6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 \Rightarrow$ $P(A \cap B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$

Aplicando las leyes de Morgan $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$

Para estudiar la independencia de sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \neq P(A) \Rightarrow \text{el suceso A y el suceso B son dependientes}$$

b) X marcar un gol de penalti, $p = 0.7$

$X \equiv B(n, p) = B(5, 0.7)$ $\quad P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$ (para $n = 5$ no sería necesario utilizar la distribución binomial)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 0.00243 \text{ probabilidad de que no marque ningún gol.}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - 0.00243 - 0.02835 = 0.96922$$

$$P(X \geq 2) = \mathbf{0.96922} \rightarrow \text{probabilidad de acertar por lo menos 2}$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} 0.7^5 0.3^0 = \mathbf{0.16807} \rightarrow \text{probabilidad de acertar cinco}$$

$n = 2100$, $p = 0.7$, $q = 1 - p = 0.3$, $np = 1470 > 5$, $nq = 630 > 5$, aproximamos la binomial por una normal

$$X \equiv B(n, p) = B(2100, 0.7) \rightarrow X' \equiv B(np, \sqrt{npq}) = B(1470.21) \longrightarrow Z = \frac{X' - 1470}{21} \equiv N(0, 1)$$

$$P(X \geq 1450) \underset{\uparrow}{=} P(X' \geq 1449.5) = P\left(Z \geq \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P(Z \geq -0.9762) = P(Z \leq 0.98) = 0.8365$$

La probabilidad de que marque por lo menos 1 450 penaltis, lanzando 2 100 veces, es de:

0.8365 → 83.65%