MATEMÁTICAS II

EBAU 2019

Comunidad autónoma de

Extremadura

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CONVOCATORIA ORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & + & az & = 1 \\ ax & + & y & - & z & = 2 \\ 5x & + & 3y & + & z & = 2a \end{array}\right\}$$

2. Sean los puntos $A = (0, 0, 2)$, $B = (2, 0, 1)$, $C = (0, 2, 1)$ y $D = (-2, 2, -1)$.

a) Halle la ecuación del plano Π determinado por los puntos A, B y C. **(0,75 puntos)**

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

3. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

4. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**

b) Sea chico, sabiendo que utilica Facebook. **(1 punto)**

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tenga inversa. **(1 punto)**

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

2. Dados los puntos $A = (1, 0, 2)$ y $B = (3, -2, -2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$. **(2 puntos)**

4. Resuelve la integral **(2 puntos)**

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx.$$

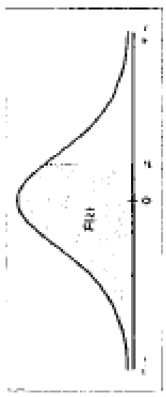
5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**

b) ¿A partir de qué altura están e 33 % de los habitantes más altos? **(1 punto)**

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \leq z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3,1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3,2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3,3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3,4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3,5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3,6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3,9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Discute en función del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1 \\ ax+\ \ y-\ \ z=2 \\ 5x+3y+\ \ z=2a \end{array}\right\}$$

Solución:

Denotamos por $A=\begin{pmatrix}3&2&a\\a&1&-1\\5&3&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&a&1\\a&1&-1&2\\5&3&1&2a\end{array}\right)$

Como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes en función de $\boldsymbol{a}$ para hacer el estudio.

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&a\\a&1&-1\\5&3&1\end{vmatrix}=3a^2-7a+2$$

Vamos a calcular para qué valores de $\boldsymbol{a}$ el determinante anterior es igual a 0:

$$3a^2-7a+2=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \\ \\ a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Por tanto, deducimos que:

- Si $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{2}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{a}\neq\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ ⇒ Rg(A) = Rg(A*) = 3 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.
- Si $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$, la matriz A*, asociada al sistema quedaría:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&1\\2&1&-1&2\\5&3&1&4\end{array}\right)$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, y $|A|=0$.

Veamos cual es el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos, solo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es:

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\2&1&2\\5&3&4\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Luego Rg(A) $=\mathbf{2}\neq\mathbf{3}=$ Rg(A*) ⇒ Sistema incompatible.

- Si $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}$, la matriz A*, asociada al sistema quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 & 2\frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 1\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}=\frac{7}{3}\neq 0$ y $|A|=0$.

Veamos cuánto vale el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos, solo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 5 & 3 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{4}{9}\neq 0.$$

Luego Rg(A) $=\mathbf{2}\neq\mathbf{3}=$ Rg(A*) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a\neq 2, a\neq 1/3$	$\boldsymbol{rg(A)=rg(A*)=3}$	**Sistema compatible determinado**
Si $a=2, a=1/3$	$\boldsymbol{rg(A)=2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*)=3}$	**Sistema incompatible**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

Sean los puntos A = (0, 0, 2), B = (2, 0, 1), C = (0, 2, 1) y D = (–2, 2, –1).

a) Halle la ecuación del plano Π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D.

Solución:

a) Tomamos el punto A(0, 0, 2) y los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ = (2, 0, –1) y $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ = (0, 2, –1).

$$\begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;\;\; 4z - 8 + 2y + 2y = 0$$

$$\Pi = 2y + 2y + 4z - 8 = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 4 = 0.$$

El plano Π determinado por los puntos A, B y C tiene la ecuación: $\boldsymbol{x + y + 2z - 4 = 0}$.

b) Sustituimos D en Π:

$$-2 + 2 - 2 - 4 = -6 \neq 0 \text{ luego } \mathrm{D} \notin \Pi.$$

También se puede calcular el determinante formado por los tres vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ y comprobar que su valor es distinto de 0.

Los cuatro puntos **no** son coplanarios.

c) Escribimos, por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$.

$$\overrightarrow{BC} = (-2,2,0)\,;\; \overrightarrow{BD} = (-4,2,-2)$$

Y el área del triángulo es: $\quad área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right|$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4i - 4k + 8k - 4j = -4i - 4j + 4k$$

Por tanto, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-4, -4, 4)$.

Y, por último, tenemos que el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,u^2$$

Área = $\boldsymbol{2\sqrt{3}\,u^2}$

Problema A.3:

Demuestre que la ecuación:

$$\boldsymbol{sen(x^2) = x - 1}$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución.

Solución:

Hacemos $sen(x^2) - x + 1 = 0$.

Queremos demostrar que esta ecuación tiene solución, o lo que es lo mismo, que:

$$f(x) = sen(x^2) - x + 1$$

toma el valor 0 para algún número real x.

Según el **Teorema de Bolzano**, si una función $f(x)$ está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos a y b, entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que se anula la función.

Buscamos valores de x que hagan $f(x)$ positiva y negativa:

- $x = 0$, $\quad f(0) = sen(0) - 0 + 1 = 1$
- $x = \sqrt{\pi}$, $\quad f(\sqrt{\pi}) = sen\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^2\right) - \sqrt{\pi} + 1 = 0 - \sqrt{\pi} + 1 = 1 - \sqrt{\pi} < 0$

Consideramos f definida en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$, f es continua en $[0, \sqrt{\pi}]$, pues es resta de una función trigonométrica y una función polinómica, que son funciones continuas, y $f(0)\cdot f(\sqrt{\pi}) < 0$, por el Teorema de Bolzano $\exists\, c \in (0, \sqrt{\pi})$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $sen(c^2) - c + 1 = 0$. Por tanto, $sen(c^2) = c - 1$.

Problema A.4:

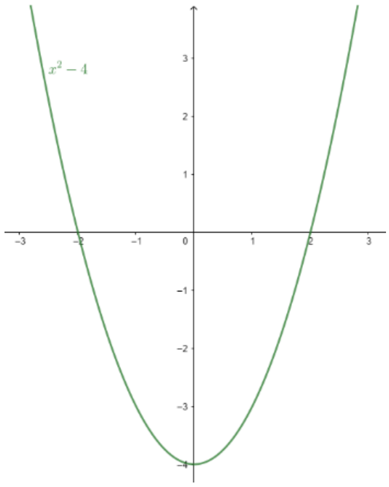
Sean las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$ y $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2}$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$.

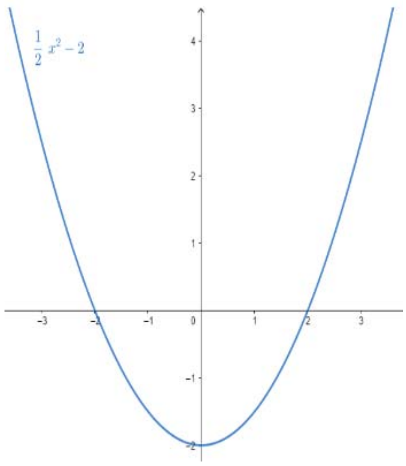
b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

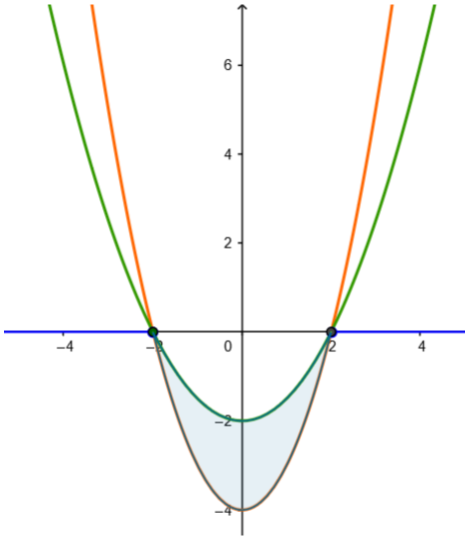
a) $\mathrm{f(x) = x^2 - 4}$ es una parábola. Como el coeficiente de x^2 es positivo, es cóncava. Las coordenadas del vértice son $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$, y $f(0) = -4$, es decir $V = (0, -4)$.
(También podemos calcularlas a partir de la derivada de la función $f'(x) = 2x = 0$, luego $x = 0$ es un mínimo.)
Los cortes con el eje X son: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$.



$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ es semejante a la anterior. Su vértice tiene coordenadas (0, –2) y los cortes con el eje X se calculan resolviendo la ecuación: $\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$, luego los cortes con los ejes son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.



Las representamos en los mismos ejes:



b) Área: $\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)-(x^2-4)\right]dx=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+2x\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}u^2.$

Área = $\boldsymbol{\frac{16}{3}u^2}$

Problema A.5:

En una clase hay 12 chicas y 8 chicos, 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook.

b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook.

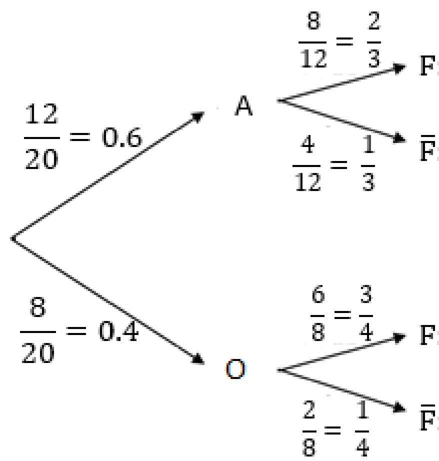
Solución:

Sean los sucesos:

A: Ser chica — F: Utiliza Facebook

O: Ser chico — $\overline{\text{F}}$: No utiliza Facebook

Construimos un diagrama en árbol y, a continuación, responderemos las cuestiones:



a) $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) = 0.6 \cdot \frac{2}{3} = 0.4.$

b)

La probabilidad de escoger una chica que utiliza Facebook es de 0.4.

c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(O/F) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{P(O) \cdot P(F/O)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.7} \cong 0.428$$

Calculamos la $P(F)$ mediante el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(F) = P(A \cap F) + P(O \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(O) \cdot P(F/O) = 0.6 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{3}{4} = 0.7.$$

La probabilidad de que al escoger a una persona que utiliza Facebook, esta sea un chico, es de 0.428.

CONVOCATORIA ORDINARIA

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tenga inversa.

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\boldsymbol{\lambda = 1}$.

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz A, a continuación, lo igualamos a 0 para obtener los valores de λ para los que dicha matriz no tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3 - \lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda = 2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}, \text{ y } \lambda = -1$$

Por tanto, para todo valor de $\boldsymbol{\lambda \neq \frac{3}{2}}$ **y** $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$ **la matriz A tiene inversa.**

b) Sustituimos en la matriz A el parámetro λ por 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz inversa de A, calculamos su determinante a partir de la expresión obtenida en el apartado anterior; obtenemos también la matriz traspuesta de A y su adjunta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1^2 - 1 - 3 = -2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} Adj(\mathrm{A}^t) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Por tanto, la inversa de la matriz A es:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.2:

Dados los puntos A = (1, 0, 2) y B = (3, –2, –2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ que pasa por su punto medio.

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -4)$.

Sea M el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$. Obtenemos M:

$M = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow M = (2,\ -1, 0)$.

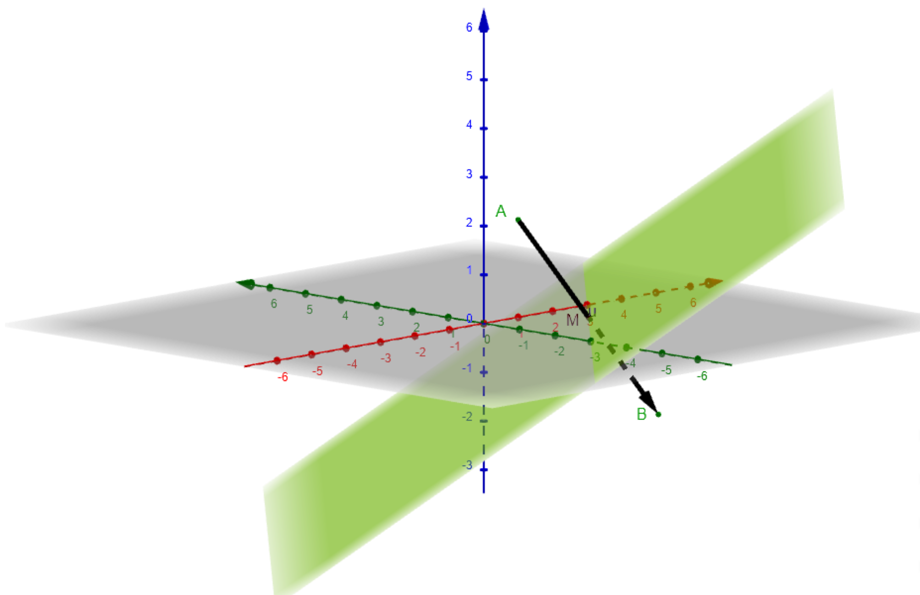
Designamos por Π al plano pedido, con vector normal $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio M.

$$2(x-2) - 2(y+1) - 4(z-0) = 0 \Rightarrow 2x - 4 - 2y - 2 - 4z = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 4z - 6 = 0.$$

Simplificando, la ecuación del plano Π es:

$$\Pi \equiv \boldsymbol{x - y - 2z - 3 = 0}$$

En la siguiente figura se representa en verde el plano solución:



Problema B.3:

Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 e^x}$.

Solución:

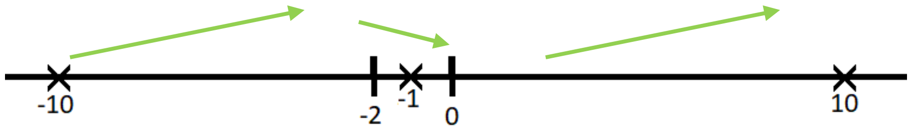
Para estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 e^x$, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

Igualamos esta derivada a 0 para obtener los valores críticos:

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$$

Representamos esos valores en la recta real, y estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo:



$f'(-10) > 0$ $f'(-1) < 0$ $f'(10) > 0$

Por tanto,

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

Problema B.4:

Resuelve la integral:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$$

Solución:

Descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-3=0 \Leftrightarrow x=1, \qquad x=-3$$

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualamos numeradores y tenemos que:

$$5x+3=A(x+3)+B(x-1)$$

Damos valores a x (las raíces del denominador)

- $x = 1;\ 8=4A \Rightarrow A=2$
- $x = -3;\ -12=-4B \Rightarrow B=3$

Sustituyendo:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx=\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{3}{x+3}dx=2ln|x-1|+3ln|x+3|+k$$
$$=ln|x-1|^2+ln|x+3|^3+k=ln(|x-1|^2\cdot|x+3|^3)+k$$

$$\boldsymbol{\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx=2ln|x-1|+3ln|x+3|+k}$$

Problema B.5:

Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica de 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm?

b) ¿A partir de qué altura están el 33 % de los habitantes más altos?

Solución:

Sea X la variable "Estatura de la población". Tenemos que $X \sim N(170, 10)$

a) $P(170 \leq x \leq 185) = \text{tipificando}$

$$= P\left(\frac{170-170}{10} \leq Z \leq \frac{185-170}{10}\right) = P(0 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0)$$

$$= 0.9332 - 0.5 = 0.4332$$

Por tanto, el **43.32 %** de la población mide entre 170 cm y 185 cm.

b) Buscamos el valor k tal que $P(x \geq k) = 0.33$. (Buscamos la altura a partir de la cual el 33 % de la población son los habitantes más altos).

Como $P(x \geq k) = 0.33$ tenemos que $P(x \leq k) = 0.67$

Tipificando:

$P(x \leq k) = 0.67 \Rightarrow \; P\left(Z \leq \frac{k-170}{10}\right) = 0.67$. Buscamos el valor 0.67 dentro de la tabla y obtenemos que corresponde al valor 0.44.

Por tanto:

$$\frac{k-170}{10} = 0.44 \Rightarrow k = 174.4$$

El **33 %** de la población mide 174.4 cm o más.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos **opciones A y B** de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **(2 puntos)**

2. Sean las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

(a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**

(b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0\,, \\ e^{x} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

(b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$. **(0,5 puntos)**

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

(a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

(b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. Un persona utiliza Whatsapp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los Whatsapp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % de amigos.

(a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo. **(1 punto)**

(b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través del Whatsapp. **(1 punto)**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II | Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos **opciones A y B**, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1. Discuta, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & + & y & & & = & a+1 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

2. Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$, y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.

(a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r. **(1 punto)**

(b) Calcule la distancia entre las rectas r y s. **(1 punto)**

3. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

(a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

(b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior. **(0,5 puntos)**

4. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función **(2 puntos)**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}.$$

5. Se estima que el 40 % de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

(a) la probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**

(b) la probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**

(c) la media y la destivación típica de la distribución. **(0,5 puntos)**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1:

Dadas las matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Vamos a calcular la matriz inversa de la matriz A. Comenzamos obteniendo el valor de su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Obtenemos también la matriz traspuesta de A y su adjunta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(\mathrm{A}^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $A^2 - 3A + 3I$:

$$A^2 - 3A + 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que efectivamente es el mismo resultado que A^{-1}.

$$\boldsymbol{A^{-1} = A^2 - 3A + 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

Sean las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden.

b) Halle dos vectores de r y s. Calcule el área del triángulo que formen.

Solución:

a) r: Hacemos $y = \lambda$, $r: \begin{cases} \mathrm{x} = 1 + \lambda \\ \mathrm{y} = \lambda \\ \mathrm{z} = 1 \end{cases}$, de donde:

$\vec{V_r}$ = (1, 1, 0) y $\vec{V_s}$ = (1, 0, 1) son los vectores directores de las rectas r y s,

P_r (1, 0, 1) y P_s = (1, 0, 0) son puntos de las rectas r y s.

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 0, -1), \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, los tres vectores son independientes lo que implica que las rectas se cruzan.

b) Para calcular el área del triángulo utilizamos la fórmula: $\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\vec{V_r} \times \vec{V_s}\right|$

$$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - k - j$$

$$\vec{V_r} \times \vec{V_s} = (1, -1, -1)$$

Por tanto, el área del triángulo es: $\frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, u^2$.

Área = $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\, u^2}$

Problema A.3:

Sea la función $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{-x}} & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{e^{x}} & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Estudie si existe un extremo relativo de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x = 0}$.

Solución:

a) Para valores de $x < 0$ y $x > 0$, f es continua por ser funciones exponenciales, que son continuas.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

1. $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x} = e^0 = 1 \end{cases}$.

   Como los límites laterales existen y son iguales a 1, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
3. Como $f(0) = 1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, f es continua en $x = 0$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

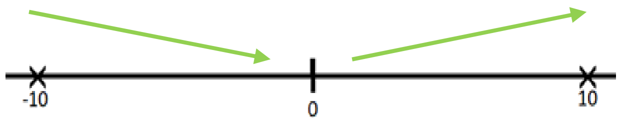
$f'_{-}(0) = -e^{-0} = -1$

$f'_{+}(0) = e^0 = 1$

Como las derivadas por la izquierda y por la derecha de la función en "0" son distintas, f no es derivable en $x = 0$.

La función es continua y no es derivable en x = 0.

b) Veamos si existe un extremo relativo, para lo que estudiamos el signo de la derivada:



$f'(-10) = -e^{-10} < 0 \qquad f'(10) = e^{10} > 0$

Aunque f no es derivable en $x = 0$, f tiene un mínimo relativo en (0, 1), ya que antes de 0 es decreciente, y después es creciente.

$(0, 1)$ es un mínimo relativo.

Problema A.4:

Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = x}$.

a) Represente la región plana encerrada por $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$.

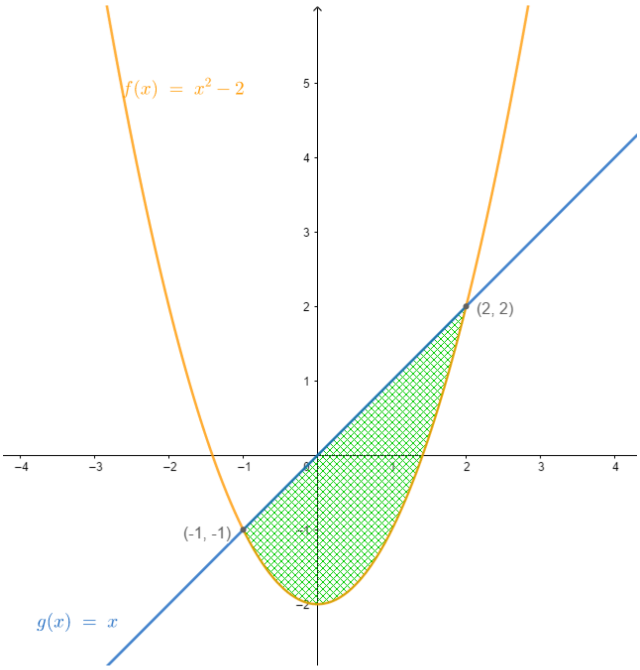
b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x) = x^2 - 2$ es una parábola cóncava (U) con mínimo en el punto (0, –2).
$g(x) = x$ es una recta. Es la bisectriz del 1er y 3er cuadrante.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \to (2,2) \\ x = -1 \to (-1,-1) \end{cases}$$



b) Área: $\int_{-1}^{2} [x - (x^2 - 2)]dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\Big|_{-1}^{2} = 4.5u^2$.

Área = $4.5u^2$

Problema A.5:

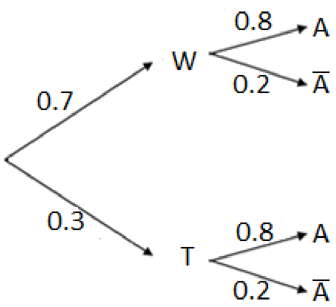
Una persona utiliza WhatsApp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los WhatsApp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % son de amigos.

a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo.

b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través de WhatsApp.

Solución:

Comenzamos construyendo un diagrama en árbol con los datos del enunciado y, a continuación, responderemos las cuestiones:



W: Utilización de WhatsApp

T: Utilización de Telegram

A: Mensaje de amigos

$\bar{A}$: Mensaje de trabajo

a) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(\bar{A}) = P(W \cap \bar{A}) + P(T \cap \bar{A}) = P(W) \cdot P(\bar{A}/W) + P(T) \cdot P(\bar{A}/T) =$

$= 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.14 + 0.06 = 0.2 \to$ 20 %

Por tanto, la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo es del **0.20**.

b) Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(W/\bar{A}) = \frac{P(W \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(W) \cdot P(\bar{A}/W)}{P(\bar{A})} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.2} = 0.8 \to 80\ \%$$

Por tanto, la probabilidad de que al recibir un mensaje de trabajo este haya sido enviado por WhatsApp es del **0.80**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Discuta, en función del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{2x + y - az} &= \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{x + y} \qquad &= \boldsymbol{a + 1} \\ \boldsymbol{(a+1)x + y -} \quad \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{2} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Denotamos la matriz de los coeficientes por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada por

$$A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes en función de $\boldsymbol{a}$ para hacer el estudio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - a + a^2 + a + 1 = a^2 - 1$$

Vamos a calcular para qué valores de $\boldsymbol{a}$ el determinante anterior es igual a 0: $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} a = 1 \\ a \\ a = -1 \end{array} \right.$

Por tanto, deducimos que:

- Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ ***o*** $\boldsymbol{a \neq -1} \Rightarrow$ *Rg(A)* = *Rg(A*)* = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}$, la matriz A^*, asociada al sistema quedaría: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{1} \neq \boldsymbol{0}$, y $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$.

  Sea $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas con los elementos iguales, (o dos columnas proporcionales). Luego *Rg(A)*= $\boldsymbol{2}$ = *Rg(A*)* $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{-1}$, la matriz A^*, asociada al sistema quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  Ya sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es 2, calculamos el de la ampliada

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 = 4 \neq 0.$$

  Luego *Rg(A)*= $\boldsymbol{2} \neq \boldsymbol{3}$ = *Rg(A*)* $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a \neq 1, a \neq -1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A*) = 3}$	**Sistema compatible determinado**
Si $a = 1$,	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*) = 2}$	**Sistema compatible indeterminado**
Si $a \neq -1$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*) = 3}$	**Sistema incompatible**

Problema B.2:

Sean $\boldsymbol{r}$ la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{A} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ y $\boldsymbol{B} = (\mathbf{0}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ y $\boldsymbol{s}$ la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{C} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$.

a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r: \begin{cases} A = (0,0,-1) \\ B = (0,-2,-1) \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} C = (-1,2,0) \\ D = (1,0,-1) \end{cases}$$

Tomamos como vectores directores del plano los determinados por los puntos de las rectas ($\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$) y tomamos un punto de s para que el plano contenga a dicha recta.

$$\overrightarrow{AB} = (0,-2,0)\ ;\ \overrightarrow{CD} = (2,-2,-1)$$

Punto $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ (también podría utilizarse el punto C)

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

De donde: $2x - 2 + 4z + 4 = 0 \Rightarrow 2x + 4z + 2 = 0$.

Simplificando: $\Pi \equiv x + 2z + 1 = 0$.

El plano Π que contiene a s y es paralelo a r es $\Pi \equiv \mathbf{x + 2z + 1 = 0}$.

a) La fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan viene dada por la siguiente expresión:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s}\right|}$$

Donde $\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}$ es el vector director de $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{P_r}$ es un punto de $\boldsymbol{r}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{V_s}}$ es el vector director de $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{P_s}$ es un punto de s

$$\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{AB} = (0,-2,0)\ , P_r = D = (1,0,-1)\ ;\ \overrightarrow{V_s} = \overrightarrow{CD} = (2,-2,-1)\ , P_s = A = (0,0,-1)$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,0,0)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ \left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right]\right| = |-2| = 2$$

$$\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} = (2,0,4)$$

$$\left|\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{5}}{5}u}$$

Problema B.3:

Sea la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Represente la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ utilizando el apartado anterior.

Solución:

a) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: buscamos los valores de $\boldsymbol{x}$ para los que el denominador es igual a 0.

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \;,\; x = -1$$

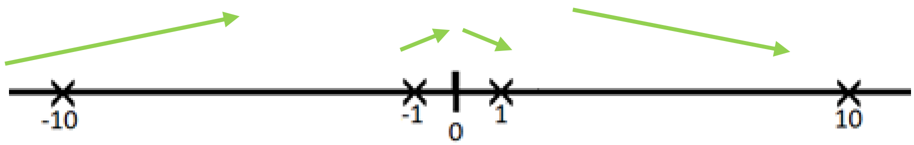
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2-1} = 1, y = 1$

Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow\; -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Como el denominador de la función derivada es un cuadrado, el signo lo da el numerador. Por tanto:



- Creciente: $(-\infty, -\mathbf{1}) \cup (-\mathbf{1}, \mathbf{0})$
- Decreciente: $(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, \infty)$

Por tanto, hay un máximo relativo en $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

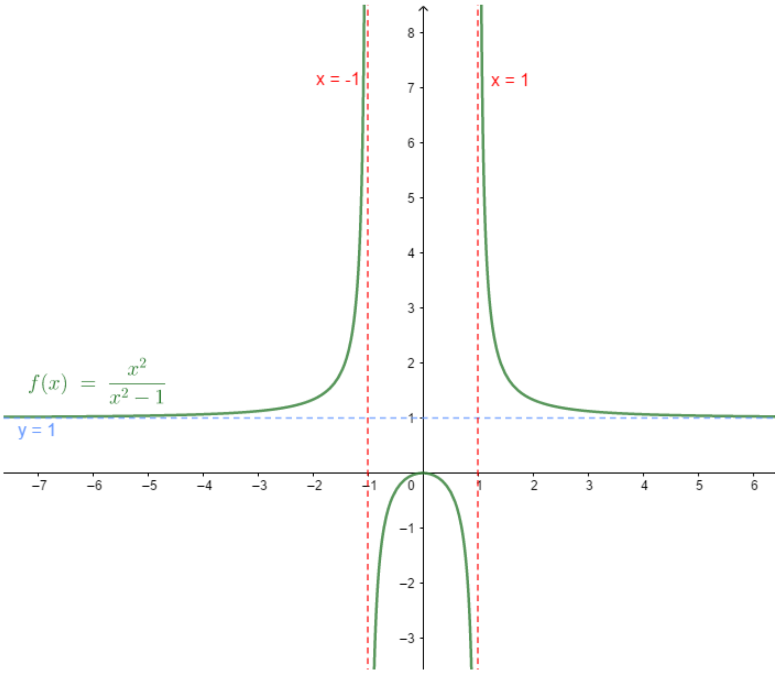
b) Estudiamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

- $x = -1$, $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty \end{matrix}$; $x = 1$, $\begin{matrix} \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty \end{matrix}$
- $y = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0^+$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota horizontal.

La gráfica de la función es:



Problema B.4:

Calcule una primitiva $\boldsymbol{F(x)}$ de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}}$$

Solución:

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow\ x=1, \qquad x=-1$$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Igualamos numeradores y tenemos que:

$$x-3=A(x+1)+B(x-1)$$

Damos valores a x (las raíces del denominador)

- $x=1;\ -2=2A\Rightarrow A=-1$
- $x=-1;\ -4=-2B\Rightarrow B=2$

Sustituyendo:

$$\int\frac{x-3}{x^2-1}dx=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=-ln|x-1|+2ln|x+1|+k$$

$$=-ln|x-1|+ln|x+1|^2+k=ln\frac{|x+1|^2}{|x-1|}+k$$

$$\boldsymbol{\int\frac{x-3}{x^2-1}dx=-ln|x-1|+2ln|x+1|+k}$$

Problema B.5:

Se estima que el 40 % de los alumnos que empiezan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

a) La probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero.

b) La probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

Designemos por X a la variable "Obtener el grado de ingeniería".

Se sabe que $P(X) = 0.4$.

Se eligen al azar a 5 alumnos.

Tenemos una distribución Binomial de parámetros *n* = 5, *p* = 0.4, *q* = 1 – *p* = 0.6.

Es decir, $X \sim B(5, 0.4)$; $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

a) Nos piden $P(x = 5) = \binom{5}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^0 = 0.01024 \rightarrow$ 1.024 %

Luego la probabilidad de que al escoger 5 alumnos/as al azar todos/as obtengan el grado es del **0.01024**.

b) Se nos pide $P(x \le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) =$

$$\binom{5}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^5 + \binom{5}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^4 + \binom{5}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.07776 + 0.2592 + 0.3456 =$$

$$= 0.68256 \rightarrow 68.256\ \%.$$

Por tanto, la probabilidad de que al elegir 5 alumnas/os al azar consigan el grado como máximo 2 es del **0.68256.**

c) Media: $\mu = n \cdot p$; $\mu = 5 \cdot 0.4 = 2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{1.2} \cong 1.095$

La media de la distribución es **2** y la desviación típica es **1.095**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo