

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de Cataluña



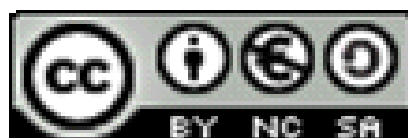
LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Colaborador: Jesús Caballero Vallés

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

[2 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1 punt]

- b) Resoleu el sistema per al cas $k = -1$.

[1 punt]

3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

- b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla

d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.
- a) Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]
- b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]
5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.
- a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]
- b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.
[1 punt]
6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.
- a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemàtiques

Sèrie 4

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2 . Sabem que el preu de la fusta és de $7,5 \text{ €/m}$ per als costats horitzontals i de $12,5 \text{ €/m}$ per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?

[2 punts]

2. Sigui la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r .

[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al

pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1 punt]

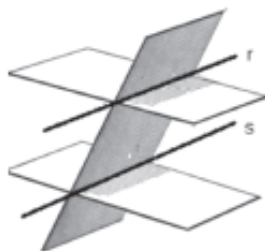
b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]
- b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1 punt]
5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.
- a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.
[1 punt]
- b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:
[1 punt]



6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.
- a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
[1 punt]
- b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f .
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 1

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Problema A.1:

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

Las páginas de un libro deben tener, cada una, 600 cm^2 de superficie, con márgenes de 2 cm en la parte superior, 3 cm en la inferior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que hagan la superficie impresa lo más grande posible.

Solución

Sean x y y las dimensiones horizontal y vertical de la página total (en cm). Por tanto, la parte impresa tiene $(y - 2 - 3)(x - 2 - 2)$ y eso es lo que hay que maximizar:

$$\begin{cases} \text{Max}(x - 4)(y - 5) \\ xy = 600 \end{cases}$$

Despejando y tenemos $y = 600/x$ de donde la función a maximizar es $f(x) = (x - 4)(600/x - 5)$

Operando un poco es:

$$f(x) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - \frac{2400}{x} - 5x$$

Derivamos e igualamos a 0

$$0 = f'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

o, lo que es lo mismo $x^2 = 2400/5 = 480$

$$x = \pm\sqrt{480} \approx \pm 21.91$$

Obviamente solo vale la solución positiva.

Dando valores a los lados: $f'(20) = 1 > 0$ y $f'(30) = -5 + 24/9 < 0$ por lo que crece en $(0, 21.91)$ y decrece en $(21.91, +\infty)$. Así pues, el valor encontrado es un máximo en el intervalo $(0, +\infty)$ que es la única parte donde tiene sentido el problema.

Despejando $y = 600/21.91 = 27.39$

La parte impresa debe tener 21.91 cm de ancho y 27.39 cm de largo.

Problema A.2:

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = -1$.

[1 punt]

Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k .

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b) Resuelve el sistema para $k = -1$

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0.

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (7k^2 + 14 + 27) - (6k^2 + 21 + 21) = k^2 - 1$$

Es claro que las soluciones son 1 y -1 .

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $k \notin \{-1, 1\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss: Haciendo operaciones por filas:

$(F'_2 = F_2 - F_1 \text{ y } F'_3 = F_3 - 3F_1)$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3 = F'_3 - F'_2$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada de rango 3, con lo que el sistema es incompatible. O dicho de otra forma tenemos la ecuación $0z = -2$, incompatible.

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como $0z = 0 = -2$. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones por filas ($F'_2 = F_2 - F_1$ y $F'_3 = F_3 - 3F_1$) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3 = F'_3 - F'_2$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que la matriz de coeficientes tiene rango 2 igual que la ampliada pero menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k \notin \{-1, 1\}$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $k = 1$ el sistema es incompatible.
- Si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Apartado b)

Podemos aprovechar mucho del apartado a). Ya hemos visto que el sistema es compatible e

indeterminado y que es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En forma de sistema es $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$ pues la última ecuación es superflua.

Pasamos la z al otro lado y resolvemos:

$$y = \frac{-1-z}{-2} = \frac{z+1}{2}; x = -1 - 2z - 3\frac{z+1}{2} = \frac{-5-7z}{2}$$

La solución es $\left(\frac{-5-7z}{2}, \frac{z+1}{2}, z\right)$ o bien, haciendo $z = \lambda$: $\left(\frac{-5-7\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda\right)$.

La solución del sistema en el caso $k = -1$ es $\left(-\frac{5+7\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda\right): \lambda \in \mathbb{R}$

Problema A.3:

3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron.

Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla

d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Un dron se encuentra en el punto $P = (2, -3, 1)$ y queremos dirigirlo en línea recta al punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que ha de seguir el dron. ¿Qué distancia ha recorrido cuando llega al plano?

b) Calcula las coordenadas del punto del plano donde llega el dron

Solució:**Apartado a)**

La recta que sigue el dron es perpendicular al plano y pasa por el punto $P = (2, -3, 1)$, el vector normal al plano es $(3, 0, 4)$ de modo que la recta en forma vectorial es $(2, -3, 1) + \lambda(3, 0, 4)$

En forma paramétrica es simplemente ponerla en forma de sistema:

$$\text{La recta que sigue el dron es } \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -3 \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Podríamos calcular la distancia con la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Pero no merece la pena, puesto que en el apartado b) nos piden el punto.

Apartado b)

El punto de corte es la solución de:

$$\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -3 \\ z = 1 + 4\lambda \\ 3x + 4z + 15 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la última ecuación tenemos

$$3(2 + 3\lambda) + 4(1 + 4\lambda) + 15 = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$25 + 25\lambda = 1 \text{ que da } \lambda = -1, x = -1, y = -3 \text{ y } z = -3$$

Esa es la solución del apartado b).

El punto del plano donde llega el dron es $(-1, -3, -3)$.

Apartado a) de nuevo:

La distancia entre ese punto y P es la que recorre el dron:

$$\sqrt{[2 - (-1)]^2 + [-3 - (-3)]^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

El dron recorre 5 unidades

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?

[1 punt]

b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta

informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció.

Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos

enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.

[1 punt]

Considera la función $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x}$

a) Calcula el dominio y estudie la continuidad. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Podemos deducir lo mismo para el intervalo $(0, 2)$? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de la función.

Solució: Apartado a)

Es un cociente de polinomios, que son funciones continuas. El único punto donde puede fallar el dominio es el que anula el denominador. Dicho punto es evidentemente $x = 1$. Calculemos pues los límites laterales:

$$f(1^-) = 1/0^- = -\infty, f(1^+) = 1/0^+ = +\infty$$

Puesto que ambos salen infinito (de distinto signo, aunque no es necesario) hay una discontinuidad de salto infinito, también llamada asíntota vertical.

La función es continua en todos los reales excepto en $x = 1$ donde tiene una discontinuidad de salto infinito. Tiene una asíntota vertical, la recta $x = 1$

Apartado b)

El **Teorema de Bolzano** asegura que, si una función **continua** cambia de signo en los extremos de un intervalo, entonces contiene un cero en el interior de dicho intervalo.

Como la función es continua en $(-2, 0)$ sí podemos asegurar que contiene un cero en este intervalo.

Sin embargo, eso requiere que la función sea continua en todo el intervalo. Y no lo es en $x = 1$

Como la función no es continua en $(0, 2)$ no podemos asegurar que contenga un cero en este intervalo.

Si calculamos $f(-1) = \frac{2(-1)^3 - 5(-1) + 4}{1 - (-1)} = 7/2 > 0$. Por tanto, en el intervalo $(-2, -1)$ hay cambio de signo, de modo que:

Podemos asegurar que la función contiene un cero en $(-2, -1)$.

Problema A.5:

5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.

[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.

[1 punt]

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$ donde I es la matriz identidad y 0 la matriz nula, todas ellas de orden 2.

b) Utilizando la igualdad anterior, encuentra una expresión general para calcular la inversa de la matriz M y calcula con ella la inversa de M cuando $a = \sqrt{2}$

Solució**Apartado a)**

Hacemos la cuenta en función de a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si igualamos a 0, queda una única ecuación $a^2 - 2 = 0$.

La igualdad se cumple sí y solo sí $a = \sqrt{2}$ o $a = -\sqrt{2}$

Apartado b)

Si es $M^2 - M - 2I = 0$ y queremos calcular la inversa, debemos poner esta ecuación como $M \cdot B = I$ para alguna matriz B que será la inversa.

Operando

$$M^2 - M - 2I = 0 \rightarrow M^2 - M = 2I \rightarrow M \left(\frac{M - I}{2} \right) = I$$

La fórmula de la inversa es $\frac{M-I}{2}$

El problema no deja claro si hay que sustituirla en todos los casos o solo en el $a = \sqrt{2}$. De modo que sustituiremos en general y luego particularizaremos:

$$\frac{M-I}{2} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & a/2 \\ a/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La fórmula de la inversa es $\frac{M-I}{2} = \begin{pmatrix} 0 & a/2 \\ a/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

En el caso $a = \sqrt{2}$ sería:

La matriz inversa para $a = \sqrt{2}$ es $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Problema A.6:

6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses.

Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

[1 punt]

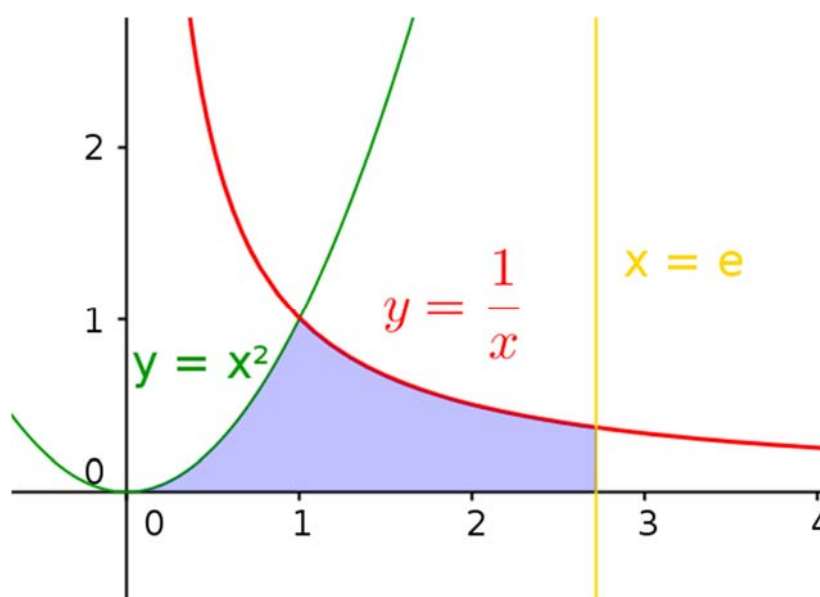
Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, así como la recta $x = e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por las gráficas y el eje de abscisas. Calcula las coordenadas del punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solució**Apartado a)**

La función $y = f(x)$ es una parábola. El vértice de la parábola está en el punto $(0, 0)$ y las ramas son hacia arriba. La función $\frac{1}{x}$ es conocida, la función de proporcionalidad inversa y la recta $x = e$ es vertical. Podemos dibujar directamente:



El punto de corte de las dos funciones es la solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

Se obtiene por igualación:

$$x^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones:

El único punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$ es el punto **(1, 1)**

Apartado b)

Como se ve en la gráfica, si x está entre 0 y 1 el límite superior es $y = x^2$, en tanto que entre 1 y e es $y = 1/x$.

De ahí que el área sea

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [\ln(x)]_1^e = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + (1 - 0) = \frac{4}{3}.$$

Es costumbre poner unidades cuadradas, pero eso supone que las unidades y escalas de los ejes son idénticas.

El área entre las curvas y la recta es $\frac{4}{3} u^2$

SÈRIE 4

CONVOCATORIA
ORDINARIA DE
JUNIO

Problema B.1:

Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2 . Sabem que el preu de la fusta és de $7,5 \text{ €/m}$ per als costats horitzontals i de $12,5 \text{ €/m}$ per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

Queremos construir un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Sabemos que el precio de la madera es de 7.5 € para los lados horizontales y de 12.5 € para los verticales. Determine las dimensiones que ha de tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuánto es dicho coste mínimo?

Solución

Sean x e y las dimensiones horizontal y vertical del marco (en cm). Por tanto, el coste del marco es:

$$2 \cdot 7.5x + 2 \cdot 12.5y = 15x + 25y$$

(hay dos lados de cada). Eso es lo que hay que maximizar.

$$\begin{cases} \text{Max}(15x + 25y) \\ xy = 2 \end{cases}$$

Despejando y tenemos $y = \frac{2}{x}$ de donde la función a maximizar es $15x + \frac{25 \cdot 2}{x}$

Derivamos e igualamos a 0

$f'(x) = 15 - \frac{50}{x^2} = 0$ o, lo que es lo mismo $x^2 = \frac{50}{15} \approx 3.33$ de donde:

$$x = \pm\sqrt{3.3} = \pm\sqrt{\frac{10}{3}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{3} \approx \pm 1.83$$

Obviamente solo vale la solución positiva.

Dando valores a los lados $f'(1) = -35 < 0$ y $f'(2) = 2.5 > 0$ por lo que decrece en $(0, 1.83)$ y crece en $(1.83, +\infty)$. Así pues, $x = 1.83 = \frac{\sqrt{30}}{3}$ es un mínimo en $(0, +\infty)$ que es la única región donde tiene sentido el problema.

Despejando $y = 2/1.83 = \frac{\sqrt{30}}{5} \approx 1.09$

Las dimensiones del marco deben ser $\frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1.83 \text{ m}$ en horizontal y $\frac{\sqrt{30}}{5} \approx 1.09 \text{ m}$ en vertical

Para calcular el coste basta sustituir. $15 \cdot 1.83 + 25 \cdot 1.09 = 54.7 \text{ €}$

El marco más barato cuesta 54.7 €

Nota: los cálculos se han hecho redondeando. Con más decimales los resultados son respectivamente 1.83, 1.10 y 54.77.

Problema B.2:

2. Siguin la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r .

[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π .

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Sean la recta $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - z = 3$.

a) Calcula la ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta r .

b) Calcula los puntos de r que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π .

Nota: se puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) a un plano de ecuación $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ con la fórmula $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Solució:**Apartado a)**

Necesitamos en primer lugar calcular el punto de corte de la recta y el plano. Para ello, lo más sencillo es resolver el sistema que forman.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

Sustituyendo en la última, $2 - z = 3$ da $z = -1$ en tanto $y - (-1) = 1$ da $y = 0$.

La recta es perpendicular al plano y pasa por el punto $(2, 0, -1)$. El vector normal al plano es $(1, 0, -1)$ de modo que la recta en forma vectorial es $(2, 0, -1) + \lambda(1, 0, -1)$

En forma paramétrica es simplemente ponerla en forma de sistema:

$$\text{La recta es } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Apartado b)

El plano es $\pi: x - z - 3 = 0$, de modo que hay que sustituir $\frac{|x_0 - z_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|x_0 - z_0 - 3|}{\sqrt{2}}$. Eso nos da otro sistema con las ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \\ \frac{|x - z - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \end{cases}$$

Sustituyendo x en la tercera:

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ |2 - z - 3| = 4 \end{cases} \text{ es decir } \begin{cases} y - z = 1 \\ |-z - 1| = 4 \end{cases}$$

La x es siempre 2.

Hay dos posibilidades para z , con $+$ y con $-$

1. $-z - 1 = 4$ que da $z = -5$. Sustituyendo en la segunda es $y - (-5) = 1$, $y = -4$.
2. $-(-z - 1) = 4$ que da $z = 3$. Sustituyendo en la segunda es $y = 4$.

Los dos puntos a distancia $\sqrt{8}$ son $(2, -4, -5)$ y $(2, 4, 3)$.

Problema B.3:

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

c) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1 punt]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

b) Resuelve el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0.

$$0 = \begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2 + 5) - (a + 7) = a^2 - a - 2$$

$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$. Las soluciones son 2 y -1.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

$$\text{Si } a = -1, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss: Haciendo operaciones por filas ($F'_2 = F_2 + F_1$) tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3 = F'_3 - 6F'_2$ queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada, rango 3, con lo que el sistema es incompatible.

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como $0 = -20$. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

Si $a = -1$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Haciendo operaciones por filas ($F'_2 = 2F_2 - F_1$) tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3 = 3F'_3 + F'_2$ queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que la matriz de coeficientes tiene rango 2 igual que la ampliada pero menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $a = -1$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado.

Apartado b)

Podemos aprovechar mucho del apartado a). Ya hemos visto que el sistema es compatible e indeterminado y que es equivalente a $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que dividiendo la segunda por -3 es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En forma de sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

pues la última ecuación es superflua.

Pasamos la z al otro lado y resolvemos: $y = -2 - z$

$$2x + 7(-2 - z) + 5z = 0 \rightarrow 2x = 2z + 14 \rightarrow x = z + 7$$

La solución es $(z + 7, -2 - z, z)$ o bien, haciendo $z = \lambda$, $(\lambda + 7, -2 - \lambda, \lambda)$

La solución del sistema en el caso $a = 2$ es $(\lambda + 7, -2 - \lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Problema B.4:

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.

[1 punt]

b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1 punt]

Considera la función $f(x)$ que depende de dos parámetros reales n y m . Se define como:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m, & x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula los valores n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:**Apartado a)**

Se trata de una función definida a trozos, pero los trozos son funciones continuas, ya que o son funciones polinómicas o función exponencial. Lo único que hay que estudiar son los puntos donde cambia la definición. Si es continua allí, es continua en todos los reales.

Calculamos los límites laterales:

En primer lugar, en el 0.

$$f(0^-) = e^0 = 1, f(0) = e^0 = 1 \text{ y } f(0^+) = \frac{0^2}{4} + n = n.$$

Coinciden si y solamente si $n = 1$. Esa es la condición sobre n .

Veamos ahora el 2. Sustituimos ya n por 1.

$$f(2^-) = \frac{2^2}{4} + 1 = 2, f(2) = \frac{2^2}{4} + 1 = 2, f(2^+) = \frac{3(2)}{2} + m = m + 3$$

Coinciden si y solamente si $m + 3 = 2$ o, lo que es lo mismo, $m = -1$

La función es continua en todos los reales si y solamente si $n = 1$ y $m = -1$

Apartado b)

Tenemos que dibujar la región. La parte negativa no nos interesa.

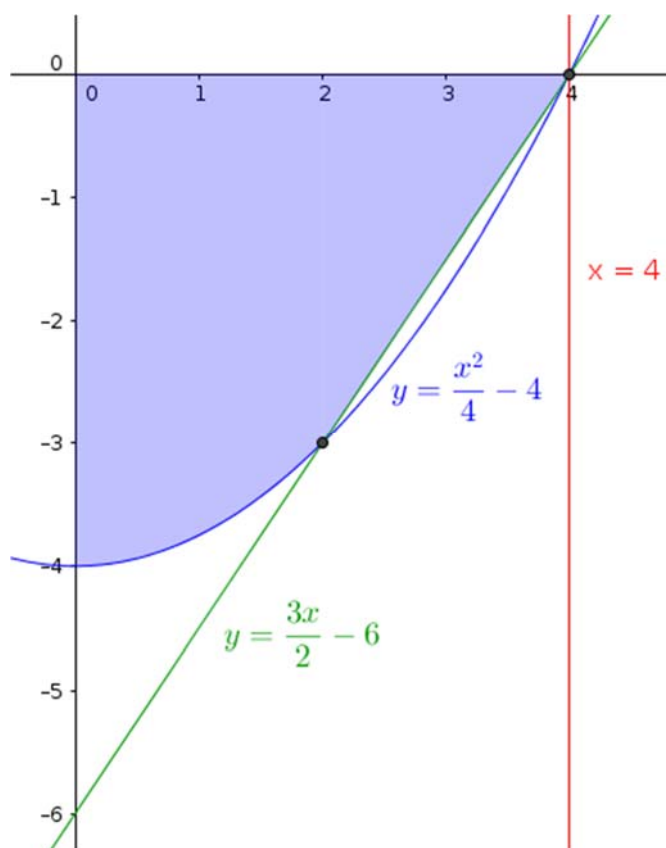
El tramo entre $x = 0$ y $x = 2$ es $y = \frac{x^2}{4} - 4$, una parábola con ramas hacia arriba. El vértice está en $x = 0$. Basta dar el vértice y otro punto, por ejemplo, el 2. $f(0^+) = -4$, $f(2) = -3$.

El tramo entre $x = 2$ y $x = 4$ es una recta, $y = \frac{3x}{2} - 6$. Bastan dos valores, por ejemplo, el 2 y el 4.

$$f(2^+) = -3, f(4) = 0.$$

Obsérvese que esa función es continua en 2. No hay contradicción con el apartado anterior, no es continua en 0.

Tenemos pues el siguiente dibujo:



El área es la integral $\int_0^4 |f(x)| dx = \int_0^2 \left| \frac{x^2}{4} - 4 \right| dx + \int_2^4 \left| \frac{3x}{2} - 6 \right| dx$

Las dos funciones dentro del valor absoluto son negativas de modo que es

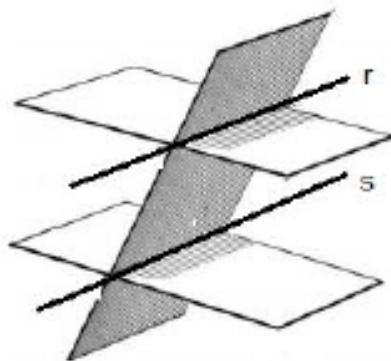
$$\begin{aligned} \int_0^2 4 - \frac{x^2}{4} dx + \int_2^4 6 - \frac{3x}{2} dx &= \left[4x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 + \left[6x - \frac{3x^2}{4} \right]_2^4 \\ &= \left(8 - \frac{8}{12} \right) - (0 - 0) + (24 - 12) - (12 - 3) = 11 - \frac{2}{3} = \frac{31}{3} \end{aligned}$$

Es costumbre poner unidades cuadradas, si bien eso presupone que las unidades y la escala de ambos ejes coinciden.

El área es $31/3 \text{ u}^2$.

Problema B.5:

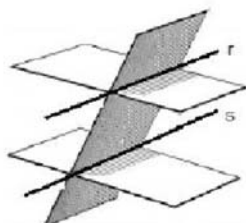
5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.
- Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.
[1 punt]
 - Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:



[1 punt]

Considera los planos $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$ donde a es un parámetro real.

- Estudia para qué valores del parámetro los tres planos se cortan en un punto.
- Comprueba que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la imagen siguiente.

**Solución:****Apartado a)**

Aunque expresado en términos geométricos, el problema consiste esencialmente en discutir un sistema.

Poniendo juntas las tres ecuaciones de los planos tenemos:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 5 \\ x + ay + z = 1 \\ 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a + 1 & a + 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0. Restamos a la primera fila la segunda en el proceso.

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) - (a+1) = (a-1)(a+1)$$

Es claro que las soluciones son 1 y -1.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión. Y resulta que no nos piden seguir.

Si $a \notin \{-1, 1\}$ el sistema es compatible y determinado. Pero ser compatible determinado significa tener una única solución, es decir cortarse en un único punto.

Así pues:

Si $a \notin \{-1, 1\}$ los planos se cortan en un único punto.

Apartado b)

La imagen representa los planos cortándose dos a dos en dos rectas paralelas. Volvamos al sistema sustituyendo a por uno.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Se ve más claro dividiendo la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Los dos últimos planos son paralelos. Pero ninguno es paralelo al primero. Así pues, tomando cada una de las dos últimas ecuaciones con la primera tenemos dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ que son paralelas.}$$

Podemos comprobar que efectivamente lo son calculando sus vectores directores. Para ello damos puntos:

- Dos puntos de r son $(4, 1, -4)$ y $(4, 0, -3)$ que dan un vector $(0, -1, 1)$
- Dos puntos de s son $(5, -1, -4)$ y $(5, 0, -5)$ que dan un vector $(0, 1, -1)$

El segundo es múltiplo del otro luego los vectores son paralelos y por tanto las rectas también.

Así pues:

Los planos se cortan en $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ que son paralelas.

Problema B.6:

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.
- a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
[1 punt]
- b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f .
[1 punt]

Sabemos que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene derivada segunda $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

- a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.
- b) Sabiendo además que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .

Solució**Apartado a)**

Si $f''(x) = 6x$, igualando a 0 obtenemos $x = 0$. Ese es un posible punto de inflexión. Falta ver que cambia de signo.

$f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$ por lo que cambia de signo. Eso significa que efectivamente $x = 0$ es un punto de inflexión.

La función tiene su único **punto de inflexión** en el punto de abscisa $x = 0$.

Como hemos visto el signo de la segunda derivada, sabemos que:

La función tiene curvatura positiva (forma de U, llamada también convexidad vista desde abajo o concavidad vista desde arriba) en $(0, +\infty)$ y curvatura negativa (forma de $\cap$, llamada también convexidad vista desde arriba o concavidad vista desde abajo) en $(-\infty, 0)$.

Si $f''(x) = 6x$, $f'(x) = \int f''(x)dx = 3x^2 + M$ con M la constante de integración. Si la tangente es horizontal en 1 es que $f'(1) = 0$ de donde $3 + M = 0$, que da $M = -3$

De ahí deducimos que $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 6 > 0$ la función tiene un **mínimo** relativo en $x = 1$.

Apartado b)

Tenemos ya la expresión de la derivada, es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Por otra parte, si integramos obtenemos:

$$f(x) = \int f'(x) = \int 3x^2 - 3dx = x^3 - 3x + N \text{ siendo } N \text{ constante de integración.}$$

Ahora bien, la fórmula de la recta tangente en el punto de abscisa a viene dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Cuando a es 1, tenemos $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Sabemos por el apartado anterior que $f'(1) = 0$ y ahora nos dicen que la tangente es $y = 5$. Por tanto $f(1) = 5$.

Llevándolo a la expresión de la función tenemos:

$$5 = (1)^3 - 3(1) + N \text{ que da } N = 7. \text{ Solo falta sustituir:}$$

La expresión completa de la función es $f(x) = x^3 - 3x + 7$

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
 - a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.
[1 punt]
 - b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
[1 punt]

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
[1 punt]
- b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a .
[1 punt]

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]
- b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
[1 punt]
 - b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
[1 punt]
5. Siguin P , Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX , OY i OZ , respectivament.
- a) Calculeu els punts P , Q i R , i el perímetre del triangle de vèrtexs P , Q i R .
[1 punt]
 - b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P , Q i R .
[1 punt]
- NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, en què $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.
6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- a) Calculeu el domini de la funció f , els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f .
[1 punt]
 - b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f , les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 5

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

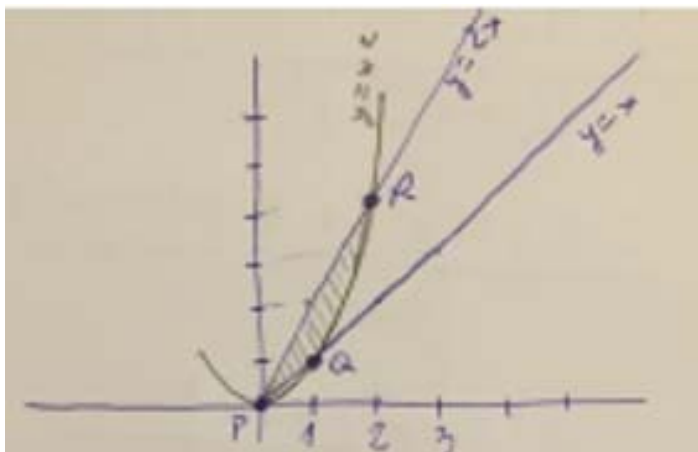
1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
- a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió limitada per le gràfiques.
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
[1 punt]

Solución:

- a) Nos piden calcular los puntos de intersección. Las dos rectas únicamente se cortan en $(0, 0)$.

La parábola y la recta: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x = x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 = x(x - 1)$ se cortan en $(0, 0)$ y en $(1, 1)$.

La parábola y la recta: $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow 2x = x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0 = x(x - 2)$ se cortan en $(0, 0)$ y en $(2, 4)$.



- b) El área pedida será la limitada entre la curva y la parábola: $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$, restándole la limitada entre la curva y la parábola: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^2 (2x - x^2) dx - \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6} u^2 \end{aligned}$$

$$\text{Àrea} = \frac{7}{6} u^2$$

Problema A.2:

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.

[1 punt]

b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a .

[1 punt]

Solució:

a) Para que la matriz sea invertible debe ser su determinante distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - (4a(a-1) + 3a) = -2a - a(a-1) = a(-2-a+1) \\ = a(-a-1) = 0$$

El determinante es distinto de cero si a es distinto de 0 o es distinto de -1 .

La matriz es invertible si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$.

b) Discutir la posición relativa de los planos es discutir el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x + (a-1)z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ 4x + 3ay + z = 3 \end{cases}$$

El sistema tiene como matriz de los coeficientes, la matriz anterior, luego ya sabemos que su determinante es distinto de cero si a es distinto de 0 o es distinto de -1 , por lo que entonces su rango es 3, el mismo que el rango de la matriz ampliada, por lo que el sistema es compatible determinado i, y los tres planos se cortan en un único punto.

Si $a = 0$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de matriz ampliada, 3, luego el sistema es incompatible, y los tres planos no tienen ningún punto de intersección común. Pero no son paralelos pues sus vectores ortogonales no son linealmente dependientes, luego los planos se cortan dos a dos.

Si $a = -1$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{array} \right| = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{array} \right| = 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de matriz ampliada también es 2 luego el sistema es compatible indeterminado, y los tres planos se cortan en una recta.

Problema A.3:

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

Solución:

a) Calculamos los productos pedidos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -6+6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & -1+3 \\ 4-12 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Nos piden justificar que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas, da la matriz nula, entonces el determinante de todas las matrices debe ser cero.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Sea el producto la matriz nula: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Suponemos que el determinante de una de las matrices, por ejemplo, la matriz A, fuera distinto de cero, entonces existiría la matriz inversa de A. Multiplicamos por ella:

$$A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B$$

Entonces la otra matriz sería la matriz nula. Lo que contradice la hipótesis de que las matrices son no nulas.

Por tanto, debe ser cero el determinante de ambas matrices.

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.

[1 punt]

Solució:

- a) Para determinar la ecuación de una recta debemos conocer un punto y la pendiente. Como nos dicen que la recta es horizontal, ya sabemos su pendiente, 0.

Buscamos el punto de la función con tangente horizontal, calculando la derivada primera e igualando a cero:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(0) + 0(x - 0) = 1$$

$$y = 1$$

- b) La pendiente coincide con la derivada, luego debemos buscar los máximos de: $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Calculamos la derivada de la función derivada y la igualamos a cero:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow f''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) - (-2x)4x}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \rightarrow 6x^2 - 2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Queremos conocer ahora cuál o cuáles de esos valores corresponden a valores máximos de $f'(x)$

Volvemos a derivar:

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \rightarrow f'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - (6x^2 - 2)3(1+x^2)^2 2x}{(1+x^2)^6}$$

Y calculamos su signo en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. El denominador es siempre positivo. $(1+x^2)^3$ es siempre positivo.

$(6x^2 - 2)$ en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ vale cero.

Luego $f'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ nos daría un mínimo de la pendiente, y $f'''(\frac{-1}{\sqrt{3}}) < 0$ un máximo.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

La pendiente es máxima en: $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$

Problema A.5:

5. Siguen P , Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX , OY i OZ , respectivament.

a) Calculeu els punts P , Q i R , i el perímetre del triangle de vèrtexs P , Q i R .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P , Q i R .

[1 punt]

Nota: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2} \|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial del vectors v i w .

Solución:

a) Hallamos los puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$P = (4, 0, 0); 4y = 4; Q = (0, 1, 0); 2z = 4; R = (0, 0, 2)$$

Hallamos los vectores de vértices dichos puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0) - (4, 0, 0) = (-4, 1, 0); \overrightarrow{PR} = R - P = (-4, 0, 2); \overrightarrow{QR} = R - Q = (0, -1, 2)$$

Hallamos los módulos de dichos vectores:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}; |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}; |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

El perímetro del triángulo es la suma de los módulos:

$$\text{Perímetro} = |\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} \cong 4.123 + 4.472 + 2.235 = 8.831$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} \cong \mathbf{8.83 \, u}$$

b) Como ya conocemos los vectores podemos calcular el área con la expresión:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2i + 8j + 4k| = |i + 4j + 2k| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21} \\ &\cong 4.58 \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \sqrt{21} \cong \mathbf{4.58 \, u^2}$$

Problema A.6:

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f , els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f , les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.

[1 punt]

Solució:

a) Nos dan la funció: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

La funció logaritmo está definida en $(0, +\infty)$, el denominador sólo no está definido en 0, luego el dominio de la función es $(0, +\infty)$.

Puntos de intersección con los ejes coordenados: Para $x = 0$ no está definida la función.

$$y = 0 = \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow \ln(x) = 0 \rightarrow x = 1; (1, 0)$$

Crecimiento y decrecimiento: Calculamos el signo de la derivada:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

El denominador es siempre positivo. $1 - \ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = 1 \rightarrow x = e$.

Para $0 < x < e \rightarrow 1 - \ln(x) > 0$, y la función es creciente.

Para $x > e \rightarrow 1 - \ln(x) < 0$, y la función es decreciente.

$Dom f = (0, +\infty)$; El único punto de corte con los ejes es $(1, 0)$;

La función es creciente en $0 < x < e$ y decreciente en $x > e$.

b) El área pedida será la limitada por la función dada entre 1 y e .

$$\text{Área} = \int_1^e \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}u^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}u^2$$