MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Aragón

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

Problema A.2:

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1, 1,2), B: (2, 2, 2) y C:(−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo “×” representa el producto vectorial.

Problema A.3:

a) *(1.5 puntos)* Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), (a, 0), (0, b) y (a, b), donde a > 0 y b > 0 y además el punto (a, b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) *(1 punto)* Determine

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) *(1.5 puntos)* Determine el valor de la constante k para que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

Problema A.4:

Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0.75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) (*0.75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (*1.5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1.5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Problema B.2:

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P: (2, 1, 2) y la recta r: (1, 0, 0) + t (−1, 1 ,1).

b) (*0.5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(2,1,-3)$determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Problema B.3:

Considere la función: $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

a) (*1.5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1.5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

Problema B.4:

La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0.75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

a) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k = 1$.

Solución

a) Si $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$ $\quad Det\ A = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = k^3 + 3k^2 + 2k$

$$Det\ A = k(k+1)(k+2) = 0 \Leftrightarrow \quad k = 0\,, k = -1 \ o \ k = -2.$$

- Si $k \neq 0\,, k \neq -1 \ y \ k \neq -2$ existe un menor de orden 3 (máximo posible) distinto de 0 que es $Det\ A \Rightarrow$ rango A = 3
- Si $k = 0$

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.
- Si $k = -1$

  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.
- Si $k = -2$

  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

Si $\boldsymbol{k \neq 0,\ k \neq -1}$ y $\boldsymbol{k \neq -2}$	$\boldsymbol{rg(A) = 3}$
Si $\boldsymbol{k = 0,\ k = -1}$ y $\boldsymbol{k = -2}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$

b) Para $k = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ A es regular ya que $Det\ A = 6$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} \frac{9}{6} & 0 & \frac{-3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{\frac{1}{6}} & \boldsymbol{\frac{-1}{2}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{1}{3}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\frac{-1}{2}} & \boldsymbol{\frac{-1}{6}} & \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

a) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A: (1, 1, 2), B: (2, 2, 2) y C: (−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

Solución

a) La recta r_{AB} que pasa por A y B está determinada por pasar por A (1, 1, 1) y ser paralela al vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$. Sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=2 \end{cases}$$

A, B, C están alineados $\Leftrightarrow$ $C\in r_{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\exists_1 \alpha \in R\ /\ -1=1+\alpha \quad a=1+\alpha \quad b=2$

Luego A, B, C están alineados $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{a=-1;\ b=2}$ para que los tres puntos estén alineados

b) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{0}$

Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el vector $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \end{vmatrix}=0\,\vec{\imath}+0\,\vec{\jmath}+0\vec{k}=\vec{0}.$$

$$\boldsymbol{(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=0\vec{\imath}+0\,\vec{\jmath}+0\vec{k}=\vec{0}}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

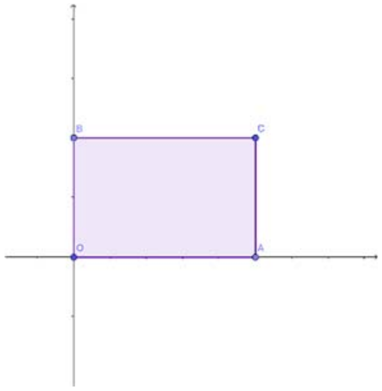
Problema A.3:

a) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), (a, 0), (0, b) y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$ y además el punto (a, b), está situado en la curva de ecuación: $y = \frac{1}{x^2} + 9$. De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) Determine: $\int \frac{1}{9-x^2} dx$

c) Determine el valor de la constante k para que $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1} = 2$

Solución



a) $(a, b) \in$ curva $y = \frac{1}{x^2} + 9 \Rightarrow b = \frac{1}{a^2} + 9$

Área = $A = a\,b = a\left(\frac{1}{a^2} + 9\right) = \frac{1+9a^2}{a}$ es una función continua y derivable en su dominio R- $\{0\}$, luego podemos encontrar sus extremos relativos a partir de los valores que anulan su derivada

$$A' = \frac{9a^2 - 1}{a^2} \qquad A'' = \frac{2}{a^3}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 9a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$

$A''\left(\frac{1}{3}\right) = 54 > 0 \Rightarrow$ En $a = \frac{1}{3}$; b = (1/9) + 9 = 82/9.

A tiene un mínimo relativo que nos da el área mínima pedida.

El área mínima es ***A* = 18 u²**, en $\boldsymbol{a = \frac{1}{3}}$; ***b* = 82/9**.

b) $9 - x^2$ tiene dos raíces reales 3 y -3 por lo que $\frac{1}{9-x^2}$ se descompone en fracciones simples como $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

$$I = \int \frac{1}{9-x^2}dx = \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{x+3}dx = ALn|x-3| + BLn|x+3| + C$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A - 3B}{x^2-9} = \frac{-1}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \quad B = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{I} = \int \frac{1}{9-x^2}dx = -\frac{1}{6}Ln|x-3| + \frac{1}{6}Ln|x+3| + C = \boldsymbol{Ln\sqrt[6]{\left|\frac{x+3}{x-3}\right|} + C}$$

c) Debemos encontrar una indeterminación inicial $\frac{0}{0}$ en el cálculo de $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}$ para que el límite pueda ser 2 $\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^3 + x^2 + kx + 3) = 5 + k = 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{k = -5}$$

Comprobemos el resultado

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

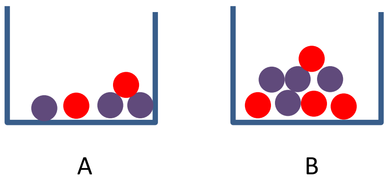
Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

- **a)** Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?
- **b)** Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Solución



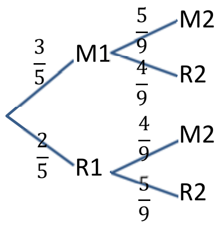
a) Sean los sucesos:

$M1$ = "La primera bola extraída es morada"

$R1$ = "La primera bola extraída es roja"

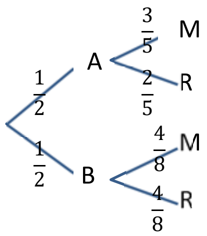
$M2$ = "La segunda bola extraída es morada"

$R2$ = "La segunda bola extraída es roja"



$$P(M2) = P(M2/M1)\cdot P(M1) + P(M2/R1)\cdot P(R1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9} = \frac{23}{45}.$$

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea morada es $\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{45}}$.



b) Sean los sucesos

A = "La urna elegida es A"

B = "La urna elegida es B"

M = "La bola extraída es morada"

R = "La bola extraída es roja"

$$\boldsymbol{P(A/R) = \frac{P(R/A)\cdot P(A)}{P(R/A)\cdot P(A) + P(R/B)\cdot P(B)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}}$$

La probabilidad de que esa bola sea de la caja A es $\boldsymbol{P(A/R) = \frac{4}{9}}$.

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

a) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución

a) x = número de deportistas esquí alpino

y = número de deportistas esquí nórdico

z = número de deportistas escalada.

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z=60 \\ x=y+z-16 \\ x+z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -2 & -76 \\ 0 & -4 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

S es equivalente al sistema triangular

$$S' \equiv \begin{cases} x+y+z=60 \\ -2y-2z=-76 \\ -4y=-60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=60-15-23=22 \\ z=38-15=23 \\ y=15 \end{cases}$$

La solución es: 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada

$$b)\ \Delta_a = \begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{2^a\ columna \\ suma\ de \\ dos\ vectores}} \begin{vmatrix} a & a & a-c \\ 2a & 3a & 4a-2c \\ 3a & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ 2a & 2b & 4a-2c \\ 3a & 3b & 10a-3c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ primera\ y 2^a\ columnas \\ son\ proporcionales}} =$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a-c \\ 2a & 3a & 4a-2c \\ 3a & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{3^a\ columna \\ suma\ de \\ dos\ vectores}} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 3a & 4a \\ 3a & 6a & 10a \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & -c \\ 2a & 3a & -2c \\ 3a & 6a & -3c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ primera\ y 3^a\ columnas \\ son\ proporcionales}} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 3a & 4a \\ 3a & 6a & 10a \end{vmatrix} =$$

$$= a.a.a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F2'=F2-2F1 \\ F3'=F3-3F1}} a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F3''=F3'-3F2} a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^3$$

El valor del determinante para $a = -2$ es $\Delta_{-2} = (-2)^3 = \mathbf{-8}$.

Problema B.2:

a) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2, 1, 2) y la recta r:(1, 0, 0) + t (−1, 1, 1).

b) Dados los vectores $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(2,1,-3)$ determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Solución

a) El plano π pasa por $P(2,1,2)$ contiene a $r \equiv y = (1,0,0) + t(-1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \pi \Rightarrow A(1,0,0) \in \pi \ \ y\ \vec{v}(-1,1,1) \text{ es una dirección contenida en el plano} \\ P, A \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (1,1,2) \text{ es una dirección contenida en el plano} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La ecuación del plano es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi \equiv x + 3y - 2z - 1 = 0$$

El plano determinado por el punto P(2, 1, 2) y la recta r: (1, 0, 0) + t (−1, 1, 1) es $\boldsymbol{x+3y-2z-1=0}$.

b) El área del triángulo que determinan los vectores $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(2,1,-3)$ es la mitad del módulo de su producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6,\ 3, -3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Área\ \Delta_{\vec{u}\vec{v}} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54}\ \text{u}^2 = \frac{3}{2}\sqrt{6}\ \text{u}^2.$$

El área del triángulo, que tiene por lados esos dos vectores, es: $\boldsymbol{Área\ \Delta_{\vec{u}\vec{v}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}\ \text{u}^2}$.

Problema B.3:

Considere la función: $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

a) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) Determine la integral $\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

Solución

a) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ $\quad Dom\, f = \Re - \{-1\}$

- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La recta $x = -1$ es una asíntota vertical

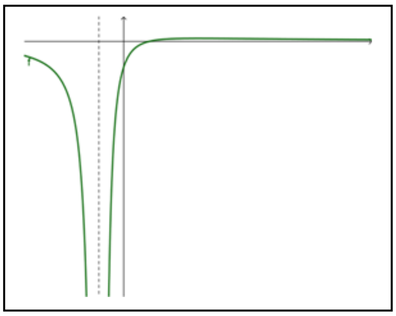
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-\infty}{\infty} = 0$ $\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal

- Dado que hay asíntotas horizontales, no hay oblicuas.

Las asíntotas son: $\boldsymbol{x = -1}$, que es una asíntota vertical, e $\boldsymbol{y = 0}$, que es una asíntota horizontal.

b) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ $\quad \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)^3}$



$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$. En (3, 1/8) f tiene un máximo relativo.

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, \infty)$	
-	$\nexists$	+	0	-	SIGNO f'
Decreciente	$\nexists$	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	MONOTONÍA DE f

c) $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ se descompone en fracciones simples como $\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ ya que su denominador tiene una raíz real doble.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{-2}{(x+1)^2} dx = \left[Ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_1^3 =$$

$$= \left[Ln|x+1| + 2\frac{1}{x+1} \right]_1^3 = \boldsymbol{Ln2} - \frac{1}{2}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0.75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.
A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

Solución:

El experimento aleatorio "una *persona escribe un mensaje de Twitter y se observa si comete o no faltas de ortografía al escribir un mensaje de Twitter"* es una prueba de Bernoulli.

Sea *"éxito" = "la persona no comete faltas de ortografía al escribir un mensaje de Twitter"* $p = 0.75$

Se repite 20 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de veces que la persona no comete faltas de ortografía al escribir un mensaje al escribir un mensaje de Twitter",* es una variable binomial

$$X = B(20, 0.75) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{20}{k} \cdot 0.75^k \cdot 0.25^{n-k}$$

a) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} = \frac{20!}{10!10!} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} = 184756 \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} \sim 0.0099.$

$$\boldsymbol{P(X = 10) \sim 0.0099}.$$

b) $P(X = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0.75^{20} \cdot 0.25^{0} = \frac{20!}{20!0!} \cdot 0.75^{20} \sim 0.0032.$

$$\boldsymbol{P(X = 20) \sim 0.0032}.$$

c) Si 18 o más mensajes de Twitter de los 20, tienen faltas de ortografía, entonces el número de mensajes que no contienen faltas es menor o igual a 2:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{20}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.75^1 \cdot 0.25^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{18} =$$

$$= \frac{20!}{0!\,20!} \cdot 0.25^{20} + \frac{20!}{1!\,19!} \cdot 0.75^1 \cdot 0.25^{19} + \frac{20!}{2!\,18!} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{18} \sim$$

$$\sim 9 \cdot 10^{-13} + 5.45 \cdot 10^{-11} + 1.55 \cdot 10^{-9} \sim 1.6 \cdot 10^{-9}$$

$$\boldsymbol{P(X \le 2) = 1.6 \cdot 10^{-9}}.$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

c) (*1.5 puntos*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}.$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

d) (*1.5 puntos*) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

Problema A.2:

c) (*0.75 puntos*) Determine el volumen determinado por los siguientes vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

d) (*0.75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Problema A.3:

d) *(1 punto)* Determine el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x} \right)$$

e) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ k - x & si\ x = 1 \end{cases}$$ sea continua *en x = 1*

f) *(2 puntos)* La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los puntos $A: (0,1)$, $B: (2,1)$, $C: (0,5)$ y $D: (2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Problema A.4:

Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

c) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

d) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

e) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (*1.5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1.5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

Problema B.2:

(*1.5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1, 3, -1)$.

Problema B.3:

a) (*1.5 puntos*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua si $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1.5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1.5 puntos*) Determine , si existen los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Problema B.4:

Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0.75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0.75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRORDINARIA DE SEPTIEMBRE

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases} .$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Resuelva el sistema cuando k = 1.

Solución:

a) $S \equiv \begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$ Las matrices de coeficientes A y ampliada $A : B$ del sistema S son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{pmatrix} \qquad A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -k & 2 \end{vmatrix} = k(2-k);\ |A| = 0 \Leftrightarrow k(2-k) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ó } k = 2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$ $|A|$es un menor de orden 3 no nulo, tanto de A como de $A{:}B \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = Rango $A : B$ = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow$ S es compatible determinado.
- Si $k = 0$ $|A| = 0 \Rightarrow$ Rango $A \neq 3$ y el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = 2
  $A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ El menor de $A : B$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A : B =3; Rango $A \neq$ Rango $A : B$ $\Rightarrow$ S es incompatible
- Si $k = 2$ $|A| = 0 \Rightarrow$ Rango $A \neq 3$ y el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = 2
  $A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ El menor de $A : B$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango $A : B$ = 3; Rango $A \neq$ Rango $A : B$ $\Rightarrow$ S es incompatible.

Si $k \neq 0$, y $k \neq 2$	**Compatible determinado**
Si $k = 0$	**Incompatible**
Si $k = 2$	**Incompatible**

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible determinado con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es entonces un sistema de Cramer

$$A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1\,,\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1\,,\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\boldsymbol{x = 1, y = -1, z = -2}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

a) Determine el volumen determinado por los siguientes vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

b) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Solución:

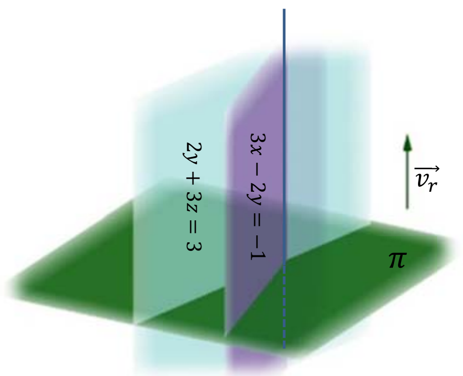
a) Si $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,\ 2, -1)$$

El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

Volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *es* **6 u³**



b) El vector director de *r*, $\vec{v_r}$,es perpendicular al plano buscado

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -9,\ 6) \quad \text{paralelo a } (2,3,-2)$$

$\pi \equiv 2x + 3y - 2z + D = 0$ y el punto $P(1,3,2) \in \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.1 + 3.3 - 2.2 + D = 0 \ \Rightarrow D = -7$

Luego el plano, que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta, tiene por ecuación:

$$\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 3y - 2z - 7 = 0}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

a) Determine el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) Determine el valor de la constante k para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} & si\ x\neq 1\\ k-x & si\ x=1\end{cases}$$ sea continua *en x = 1*

c) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los puntos $A:(0,1)$, $B:(2,1)$, $C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\ln\left((1+x)^2\right)}{x\ln((1+x)^2)}\right)=\frac{0}{0}\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}{\ln\left((1+x)^2\right)+x\ \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2}{1+x}}{\ln((1+x)^2)+\ \frac{2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2(1+x)-2}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln\left((1+x)^2\right)+\ 2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x)\ln((1+x)^2)+2x}=\frac{0}{0}\underset{L'Hôpital}{=}$$

$$\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+(1+x)\ \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+2+2}=\frac{2}{\ln 1+2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}}.$$

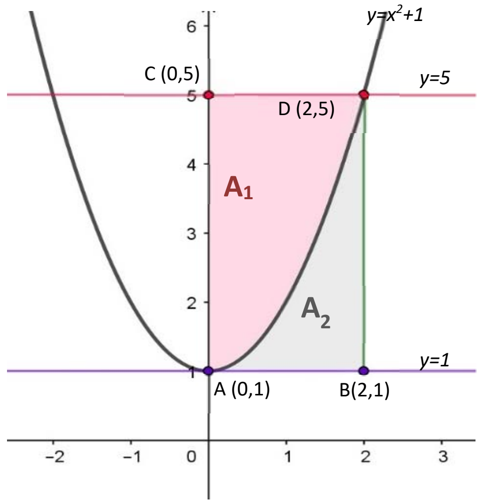
b) $f(x)$ continua en $x=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^3+x^2+x+1)=4=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

$$f(1)=k-1$$

$f(x)$ continua en $x=1\Rightarrow k-1=4\Rightarrow k=5.$

Para que la función sea continua en x = 1, debe ser $\boldsymbol{k}$**= 5**.



c) Llamemos A_1 al área del recinto ACD, determinado por la recta de ecuación $y=5$ y la parábola de ecuación $y=x^2+1$. Y sea A_2 el área del recinto ADB, determinado por la misma parábola y la recta $y=1$

$$A_1=\int_0^2 5dx-\int_0^2(x^2+1)dx=\left[5x-\frac{x^3}{3}-x\right]_0^2=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\ u^2}.$$

$$A_2=\int_0^2(x^2+1)dx-\int_0^2 1dx=\left[\frac{x^3}{3}+x-x\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}\ u^2}.$$

Problema A.4:

Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40 % prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60 % pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

a) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) Se elige un individuo al azar y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Solución:

Nombramos los sucesos

A_1 = "La persona prefiere el mes de julio para ir de vacaciones" $P(A_1) = 0.4$

A_2 = "La persona prefiere el mes de agosto para ir de vacaciones" $P(A_2) = 0.3$

A_2 = "La persona prefiere el mes de septiembre para ir de vacaciones" $P(A_3) = 0.3$

B = "La persona pasa sus vacaciones en un hotel"

$$P(B/A_1) = 0.6 \qquad P(B/A_2) = 0.4 \qquad P(B/A_3) = 0.65$$

a) Deben suceder a la vez A_2 y B. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$P(B \cap A_2) = P(B/A_2) \cdot P(A_2) = 0.4 \cdot\ 0.3 = 0.12$

$$\boldsymbol{P(B \cap A_2) = 0.12.}$$

b) Obtendremos la probabilidad de B utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) =$$

$= 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.65 \cdot 0.3 = 0.555.$

$$\boldsymbol{P(B) =} 0.555.$$

c) Ha sucedido B^C $\quad P\left({}^{A_2}/_{B^c}\right) = \frac{P(A_2 \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A_2) - P(A_2 \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.3 - 0.12}{1 - 0.555} \sim 0.404$

$$\boldsymbol{P\left({}^{A_2}/_{B^c}\right) \sim 0.404}.$$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

a) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2$

$$Det\ A = m^2 - 3m + 2 = 0 \iff m = 1\ o\ m = 2$$

- Si $m \neq 1\ y\ m \neq 2$ existe un menor de orden 3 (máximo posible) distinto de 0 que es $Det\ A \Rightarrow$ rango A = 3
- Si $m = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

- Si $m = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

Si $m \neq 1\ y\ m \neq 2$	**$\Rightarrow$ rango A = 3**
Si $m = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2**
Si $m = 2$	**$\Rightarrow$ rango A = 2.**

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Det\ A = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{6}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Problema B.2:

Determine la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r:\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1, 3, -1)$.

Solución:

Si el plano π buscado contiene a la recta $r \Rightarrow \pi$ pertenece al haz de planos determinado por los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4y + 3z - 5 = 0$.

Dado que ninguno de los planos que definen r contiene al punto $A(1, 3, -1) \Rightarrow$

$$\exists \alpha \in \Re / \quad \pi \equiv 3x + y + 1 + \alpha(4y + 3z - 5) = 0$$

$$A \in \pi \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 + 1 + \alpha(4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 5) = 0 \Rightarrow 7 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{7}{4}$$

$$\pi \equiv 3x + y + 1 - \frac{7}{4}(4y + 3z - 5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + y + 1 - \frac{28}{4}y - \frac{21}{4}z + \frac{35}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 12x - 24y - 21z + 39 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \mathbf{4x - 8y - 7z + 13 = 0}.$$

Problema B.3:

a) Considere la función: $f(x)=\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$. Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua si $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) Determine $\int x(\ln(x))^2dx$

c) Determine, si existen los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$

Solución:

a) $y=2x-1$ asíntota oblicua de $f(x)$si $x\to\infty\Rightarrow m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ $\quad\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}-2x\right)=-1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2+x+3-2x^3-4x}{x^2+2}\right)=-1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx^2-3x+3}{x^2+2}\right)=k=-1$

Luego $\boldsymbol{k=-1}$

b) Sea $I=\int x(\ln(x))^2dx$. Utilizaremos el método de integración por partes

$$\left.\begin{array}{ll} u=(ln(x))^2 & du=\frac{2ln(x)}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} & dv=xdx\end{array}\right\}\ I=\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\int\frac{2x^2ln(x)}{2x}dx==\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\underbrace{\int xln(x)dx}_{I_1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_1=ln\,(x) & du_1=\frac{1}{x}dx \\ v_1=\frac{x^2}{2} & dv_1=xdx\end{array}\right\}\ I=\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\left(\frac{x^2}{2}ln(x)-\int\frac{x^2}{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\frac{x^2}{2}ln(x)+\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\frac{x^2}{2}ln(x)+\frac{x^2}{4}+C.$$

$$I=\int x(\ln(x))^2dx=\boldsymbol{\frac{x^2}{2}(ln(x))^2-\frac{x^2}{2}ln(x)+\frac{x^2}{4}+C.}$$

c) $f(x)=\frac{1}{x}+ln(x)$ $\quad f$ es continua y derivable n veces en $(0,\infty)$

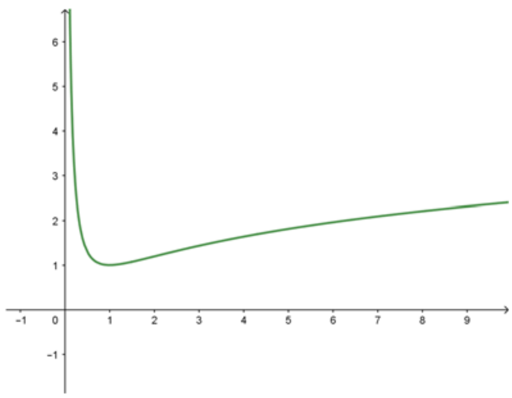
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$ si $x\in(0,\infty)$ $\qquad f''(x)=\frac{x^2-2x(x-1)}{x^4}=\frac{2-x}{x^3}$ si $x\in(0,\infty)$

$f'(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\qquad f''(1)=1>0$.

Luego en el punto $(1,f(1))=(1,1)$ la función tiene un mínimo relativo.

$f''(x)=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2$

$(0,2)$	2	$(2,\infty)$	
+	0	-	SIGNO f''
Cóncava hacia arriba $\cup$	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo $\cap$	CURVATURA DE f



Luego en el punto $(2,f(2))=\left(\boldsymbol{2,\frac{1}{2}+ln2}\right)$ la función tiene un punto de inflexión.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución:

El experimento aleatorio "una *persona juega a la ruleta y se observa si gana"* es una prueba de Bernoulli.

Sea "*éxito" = "la persona gana"* $p = \frac{12}{25}$

Se repite *n* veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de veces que la persona gana",* es una variable binomial

$$X = B\left(n, \frac{12}{25}\right) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{12}{25}\right)^k \left(\frac{13}{25}\right)^{n-k}$$

a) En este caso $X = B\left(100, \frac{12}{25}\right)$ y la probabilidad de que gane exactamente 10 veces:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} \cdot \left(\frac{12}{25}\right)^{10} \cdot \left(\frac{13}{25}\right)^{90} = \frac{100!}{10!.90!} \cdot \frac{12^{10}13^{90}}{25^{100}} \approx 1.7 \cdot 10^{13} \cdot 1.8 \cdot 10^{-29} \approx 3.10^{-16}$$

$$\boldsymbol{P(X = 10) \approx 3.10^{-16}.}$$

b) $P(90 \le X \le 110) = \sum_{k=90}^{110} \binom{n}{k}\left(\frac{12}{25}\right)^k \left(\frac{13}{25}\right)^{n-k}$ suma de veinte sumandos.

Como $n > 30, np = 96 > 5, nq = 104 > 5$, podemos aplicar el teorema de Moivre - Laplace y obtener esta probabilidad aproximando X a la variable normal $X' = N(np, \sqrt{npq})$, (la aproximación es buena ya que $npq = 200.\frac{12}{25}.\frac{13}{25} = 49.92 > 9$)

$$X' = N(np, \sqrt{npq}) = N\left(200 \cdot \frac{12}{25}, \sqrt{49.92}\right) = N(96, \ 7.1)$$

$$P(90 \le X \le 110) = P(89.5 < X' < 110.5) = P\left(\frac{89.5-96}{7.1} < \frac{X'-96}{7.1} < \frac{110.5-96}{7.1}\right) = P(-0.915 < Z < 2.04);$$

$$P(-0.917 < Z < 2.04) = P(Z < 2.04) - P(Z < -0.915) = P(Z < 2.04) - \big(1 - P(Z < 0.915)\big) =$$

$$= 0.9793 - 1 + 0.8186 = 0.7979.$$

$$\boldsymbol{P(90 \le X \le 110) = 0.7979}$$