MATEMÁTICAS

CURIOSIDADES Y REVISTA

4º de ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

ÍNDICE

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8
I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

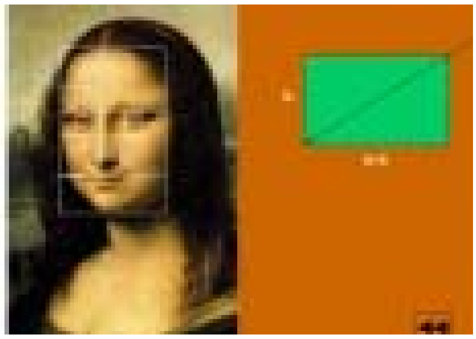
Textos Marea Verde

NÚMEROS REALES

Resumen

Ya conoces los números naturales, los números enteros y los números racionales. En este capítulo vamos a estudiar los números reales que están formados por los números racionales y los irracionales. Por tanto, con algunos números reales irracionales ya te habías encontrado, con $\sqrt{2}$, con π…

El número de oro en la Gioconda

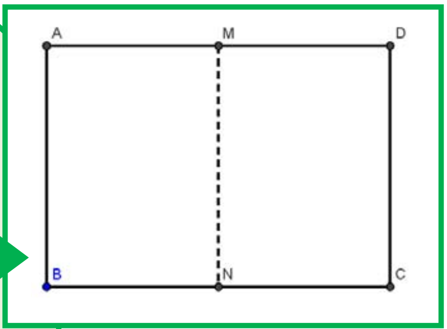


Pero hay muchos, muchos más. Hay muchos más números irracionales que racionales. Y te preguntarás, ¿cómo puede decir eso si son infinitos? Resulta que hay infinitos más grandes que otros. Al infinito de los números naturales se le denomina "*infinito numerable*". Resulta que el de los números enteros y de los números racionales también es "*infinito numerable*", pero el de los números reales ya no es numerable, es mucho mayor, se le denomina "l*a potencia del continuo*".

Una de sus propiedades más importantes es su relación con los puntos de una recta, por lo que aprenderemos a representarlos en la recta "real" en la que no dejan "*agujeros*".

Folios y $\sqrt{2}$

Ya sabemos que un cuadrado de lado L tiene una diagonal que vale $\sqrt{2}$ L , veamos algo más:



La imagen representa un folio con la norma DIN 476 que es la más utilizada a nivel mundial.

Esta norma especifica que un folio DIN A0 tiene una superficie de 1 m^2 y que al partirlo por la mitad obtendremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semejante al anterior. Partiendo el A1 en 2 iguales obtenemos el DIN A2 , después el DIN A3 y el DIN A4 que es el más usado. Todos son semejantes a los anteriores.

¿Qué significa ser semejante?

Pues que $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 luego

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Por lo tanto en los folios DIN 476:

la razón entre el largo y ancho es $\sqrt{2}$.

No queda aquí la cosa, fíjate que al partir el folio en 2 partes iguales el nuevo folio tiene el lado mayor que coincide con el lado menor del original: AB es ahora el lado mayor y antes era el menor, como AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que la razón de semejanza es $\sqrt{2}$. Es decir, para pasar de un folio A0 a otro A1 dividimos sus lados entre $\sqrt{2}$. Lo mismo para los siguientes.

Calculemos las dimensiones:

Para el A0 tenemos que el área es AD · AB = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx$$ 1,189 m;

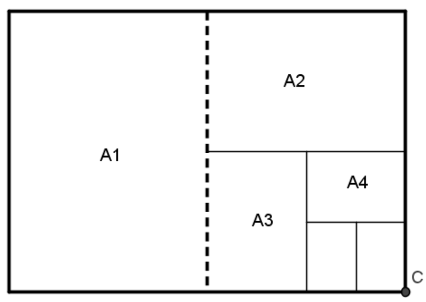
AB = $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx$ 0,841 m. Para obtener las medidas del A4 dividiremos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Largo = $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx$ 0,297 m =29,7 cm

Ancho= Largo/$\sqrt{2} \approx$ 0,210 m = 21,0 cm

Una tabla

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2



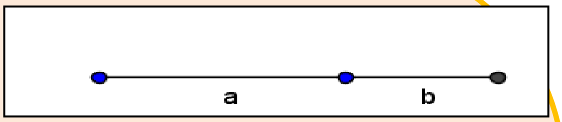
Cuestiones:

1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos dos valores equivocados ☺)
2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

4

El número de oro

Dividimos un segmento en dos partes de forma que si dividimos la longitud del segmento total entre la parte mayor debe de dar lo mismo que al dividir la parte mayor entre la parte menor.
Tenemos que (*a*+*b*)/a = *a*/*b*.



El número de Oro (o Razón Aúrea) llamado Φ (fi) es precisamente el valor de esa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Ya tenemos dos curiosidades:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

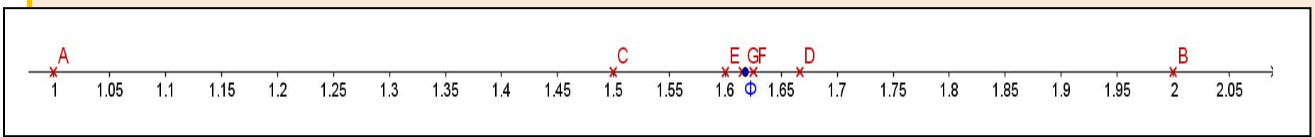
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Donde F_n es el *n*-ésimo Número de Fibonacci. Estos números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … donde cada término a partir del tercero se obtiene sumando los dos anteriores.
Más relaciones entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci:
a) Si vamos dividiendo un número de la sucesión entre su anterior obtenemos: 1/1 =1; 2/1 =2; 3/2 =1,5; 5/3 =1,666…; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625



Como puede verse, nos acercamos rápidamente al valor del número de Oro, primero por debajo, después por arriba, por debajo, … alternativamente.
b) Formula de Binet:
Para calcular un número de Fibonacci, por ejemplo el que ocupa el lugar 20 hay que calcular los 19 anteriores.
Esto no tiene que ser necesariamente así, pues Binet dedujo esta fórmula, que para el autor es una de las más bonitas de las matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

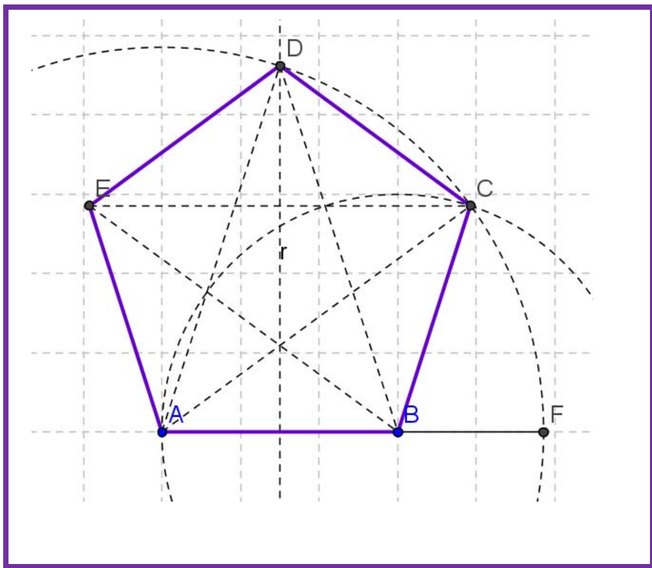
Si por ejemplo sustituimos *n* por 20 obtenemos F_{20} = 6765.
Realmente podemos prescindir del 2º término del numerador, para *n* > 3 se hace mucho más pequeño que el primero. Por ejemplo, para *n* = 6, si hacemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenemos 8,0249 que redondeado es 8, el valor

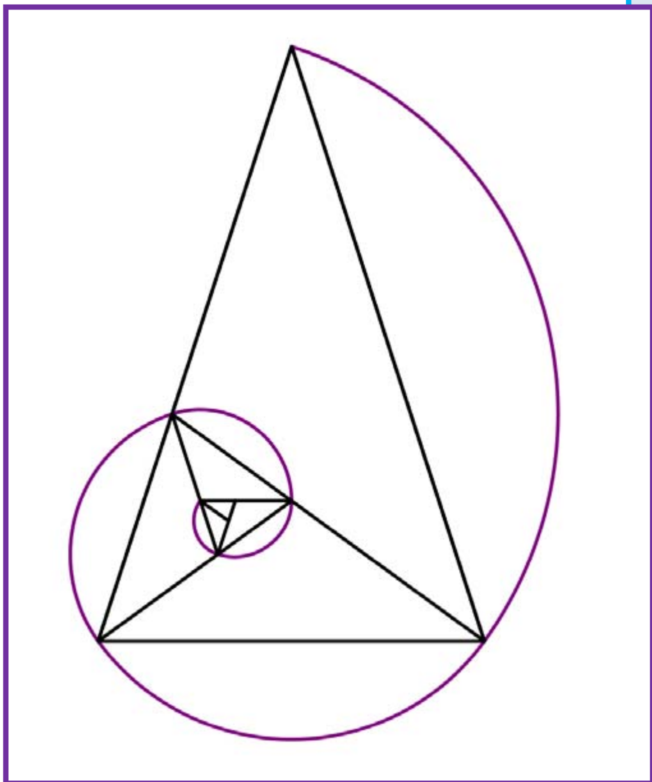
Actividades:

a) Calcula F_{31} y F_{30} con la fórmula de Binet.

b) Haz el cociente y mira si es una buena aproximación del Número de Oro.

El pentágono regular y el Número de Oro.





En un pentágono regular la razón entre una diagonal y el lado es Φ . Como sabemos construir Φ , la construcción de un pentágono regula es muy sencilla:

Si AB va a ser un lado de nuestro pentágono, construimos el punto F alineado con A y B que cumpla AF/AB igual a Fi (se indica cómo hacerlo en el texto).

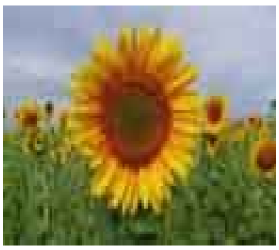
Entonces, AB será el lado y AF la medida de la diagonal.

Trazamos la mediatriz de AB y una circunferencia de centro A y radio AF. Se cortan en D que es un vértice del pentágono.

Trazamos ahora una circunferencia con centro B y radio AB, se corta con la anterior en C que es otro vértice del pentágono. Sólo queda hallar E que es muy fácil.

El pentágono regular con sus diagonales se conoce como "Pentagrama Místico" y parece ser que volvía loquitos a los pitagóricos, en él el número de Oro aparece de forma desmesurada.

Del Pentagrama hemos sacado este triángulo, llamado Triángulo Áureo que permite obtener más triángulos áureos haciendo la bisectriz en uno de los ángulos iguales y formar esta espiral. Esta espiral es parecida a la Espiral Áurea, a la de Fibonacci y a la espiral logarítmica que es la



LA PROPORCIÓN CORDOBESA EN LA MEZQUITA DE CÓRDOBA

Buscando edificios y monumentos situados en España sobre los que se aplique la proporción cordobesa, analizamos la **Mezquita de Córdoba**:

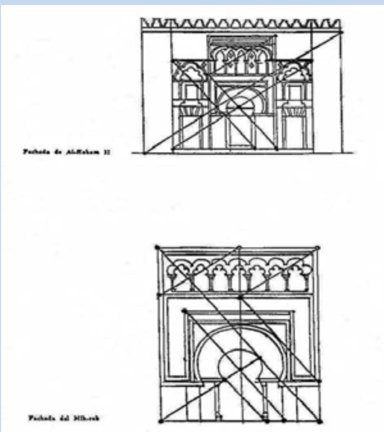
Se encontró por vez primera en la Mezquita de Córdoba. Pero a geometría de la **puerta de AL-Hakam II**, la **fachada del Mihrab**, la **planta** de la Mezquita y la **arcada** interior, se someten en su estructura a la proporción cordobesa.

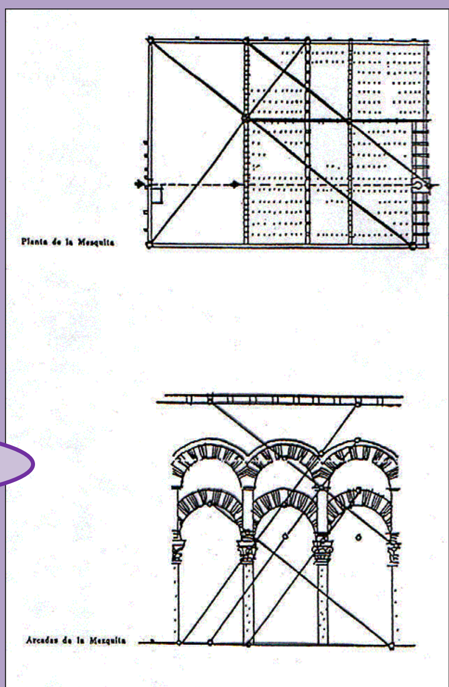
Algunas muestras de la arquitectura de la Mezquita, crecedera, modular y prefabricada, basada en la composición con rectángulos cordobeses.

Ver más en "Proporción cordobesa"

Bóveda cordobesa en el ante-Mihrab

Puerta de Alhaken II

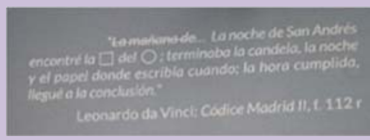


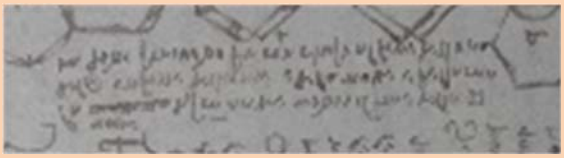


Planta y arcada interior

La cuadratura del círculo en Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci escribió: “*En la noche de san Andrés encontré la solución final de la cuadratura del círculo cuando ya se terminaba la vela, la noche y el papel en el que escribía, al filo del amanecer*”.





Leer la escritura de Leonardo es difícil. Pero puedes usar un espejo para intentarlo, ahora que sabes lo que dice.

Si te pica la curiosidad igual también te atreves a intentar comprender el razonamiento de Leonardo. Ya ves, usa círculos, exágonos... También sabes que esa demostración no es correcta pues el número π es un número irracional.

Felipe II fue un mecenas de las artes y las ciencias, fundando la Real Academia de Matemáticas, convirtiendo al Monasterio del Escorial en un centro científico. La Biblioteca Nacional posee dos códices de Leonardo, que se llaman “Códice Madrid I” y “Códice Madrid II”, que tienen interesantes aportaciones de Leonardo, como esta curiosidad de la cuadratura del círculo.

Otras aportaciones que se encuentran en dichos códices son:

Poliedro de 72 caras

El ajedrez

Cuenta la leyenda que cuando el inventor del ajedrez le mostró este juego al rey Shirham de la India, éste se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle todo lo que quisiera.

El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla del juego, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla.

Al rey le pareció una petición modesta, pero… como se puede comprobar ese número de granos dan poco más de 15 billones de toneladas métricas lo que corresponde a la producción mundial de trigo de 21.685 años.

¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!

¡Te gusta hacer magia!

Puedes hacer este juego con tus amigos. Para hacerlo necesitas papel y lápiz, o mejor, una calculadora, o todavía mejor, una hoja de cálculo.

Escribe en una columna los números del 1 al 20. Al lado del 1 escribe el número que te diga tu amigo o amiga, de una, dos o tres cifras (376). Al lado del 2 escribe también otro número inventado de 1, 2 o 3 cifras (712). Al lado del 3, la suma de los dos números anteriores (1088). Al lado del 4, lo mismo, la suma de los dos números anteriores (ahora los de al lado del 2 y del 4), y así hasta llegar a la casilla 20.

Ahora divide el número de al lado del 20 (3948456) entre el número de al lado del 19 (2440280), y ¡magia!, puedes adivinar el resultado. ¡Se aproxima al número de oro!

1,618…

¿Por qué? ¿Sabes algo de la sucesión de Fibonacci? Búscalo en Internet.

Haz una hoja de cálculo como la del margen.

E6

	A	B	C	D	E
1	¡Te gusta hacer magia!				
2					
3	1	376			
4	2	712			
5	3	1088			
6	4	1800			
7	5	2888			
8	6	4688			
9	7	7576			
10	8	12264			
11	9	19840			
12	10	32104			
13	11	51944			
14	12	84048			
15	13	135992			
16	14	220040			
17	15	356032			
18	16	576072			
19	17	932104			
20	18	1508176			
21	19	2440280			
22	20	3948456			
23					
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	1,61803
25					

POTENCIAS Y RAÍCES

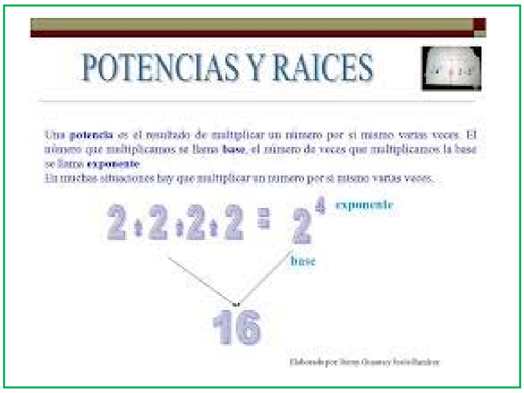
Resumen

En este capítulo vamos a estudiar las potencias de exponente natural y entero con sus propiedades.

Aprenderemos a operar con las potencias aplicando sus propiedades.

Estudiaremos las potencias de exponente racional, que son los radicales, sus propiedades y así como las operaciones que podemos realizar con ellos.

Nos detendremos en la racionalización, que es una operación muy utilizada en matemáticas que la necesitaremos para operar con radicales.



En el final del capítulo estudiaremos la notación científica, las propiedades para poder operar con este tipo de notación y aprenderemos a operar con esta notación.

POTENCIAS DE 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incluidas entre los productos curiosos:

$$11 \times 11 = 121$$

$$11 \times 11 \times 11 = 1331$$

$$11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641$$

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son elevados al cuadrado:

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

Vale la pena observar que el número de nueves de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.

NÚMEROS GRANDES

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podemos tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abundancia, como son **las gotas del mar** (1×10^{25} gotas), **los granos de arena en todas las playas del mundo** ($5{,}1 \times 10^{23}$ granos) o el **número de estrellas de todo el Universo conocido** (3×10^{23} estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del universo (1×10^{80}) si queremos obtener un número más grande.

Si queremos hallar un número más grande **"Googol**", acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que significa el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los **números primos de la forma de Mersenne** (números de la forma $2^n–1$), que han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras. En 1952, un número primo de Mersenne era $(2^{17})–1$, con 6 dígitos, y ese mismo año, las computadoras probaron que el número $(2^{521})–1$ es también primo, y que dicho número posee 157 dígitos, siendo este mucho más grande que un Googol No todos los números de la forma $2^n–1$ son primos, ya en 1536 Hudalricus Regius demostró que $2^{11}–1 = 2047$ no lo era primo pues es el producto de 23 por 89. Hoy se ha encontrado que $2^{74207281}–1$ es primo y, por ahora, es el más grande de esa forma encontrado.

10^100

Googol (10^{100})

10, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000

PROPORCIONALIDAD

Resumen

En la vida cotidiana es interesante saber manejar la proporcionalidad, por ejemplo para calcular el descuento de unas rebajas, o el interés que se debe pagar por un préstamo. En multitud de ocasiones debemos efectuar repartos proporcionales, directos o inversos: premios de lotería, herencias, mezclas, aleaciones…

El tanto por ciento y el interés es un concepto que aparece constantemente en los medios de comunicación y en nuestra propia economía. En este capítulo haremos una primera aproximación a la denominada "*economía financiera*".

La proporcionalidad es una realidad con la que convivimos a nuestro alrededor. Para comprenderla y utilizarla correctamente, necesitamos conocer sus reglas. Reconoceremos la proporcionalidad directa o inversa, simple y compuesta, y realizaremos ejercicios y problemas de aplicación.

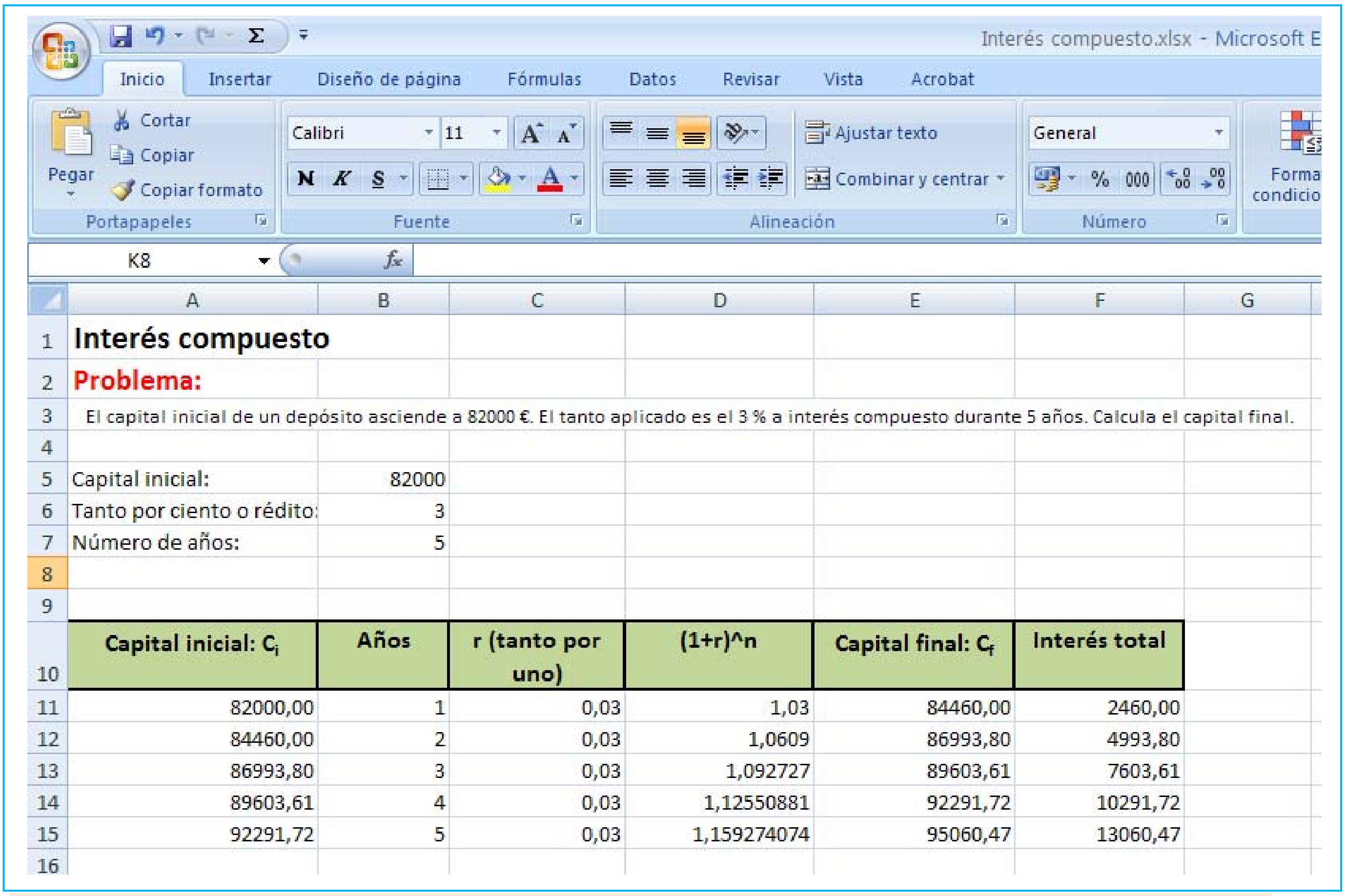
Confecciona tu propia hoja de cálculo

Vamos a resolver el problema "El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final" confeccionando una hoja de cálculo.

Abre Excel o cualquier otra hoja de cálculo. Verás que las hojas están formadas por cuadrículas, con letras en la horizontal y números en la vertical. Así cada cuadrícula de la hoja se puede designar por una letra y un número: A1, B7, …

Vamos a dejar las primeras 9 filas para poner títulos, anotaciones…

En la fila 10 vamos a escribir los títulos de las casillas. En la casilla A10 escribe: Capital inicial. En la B10: Años. En la C10: Tanto por uno. En la D10: $(1 + r)^n$. En la E10: capital final. En la F10: Interés



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Interés compuesto**						
2	**Problema:**						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

total.

En la fila 11 comenzamos los cálculos. En A11 anotamos 82000, que es el capital inicial.

En B11, escribimos 1, pues estamos en el año primero; en B12, escribimos 2, y seleccionando las casillas B11 y B12 arrastramos hasta B15, pues nos piden 5 años.

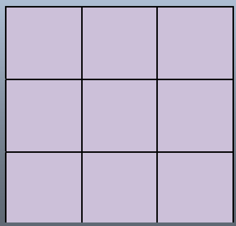
Como se ha puesto el capital al 3 %, el tanto por uno es 0,03, cantidad que copiamos en C11 y arrastramos hasta C15.

Para calcular $(1 + r)^n$, podemos hacerlo usando la función POTENCIA. Para ello escribimos un signo = en la casilla D11 y buscamos la función POTENCIA, en número escribiremos 1+C11 y en exponente B11. Te habrá quedado: =POTENCIA(1+C11;B11). Ahora, lo señalas y lo arrastras hasta D15.

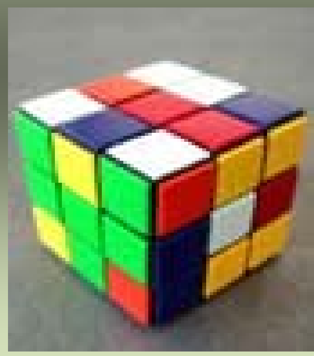
Para calcular $C \cdot (1 + r)^n$, en la columna E, sólo tenemos que multiplicar A11*D11. Queremos dejar invariante el capital inicial, para decírselo a Excel, que no nos lo cambie, escribimos: =A11*D11 y arrastramos hasta la fila E15.

Proporcionalidad en áreas y volúmenes

Al aumentar el lado de un cuadrado al doble, su superficie queda multiplicada por 4. Al multiplicar por 3 el lado, el área se multiplica por 9.



Al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen queda multiplicado por 8. Al multiplicar por 3 el lado, el volumen se multiplica por 27.



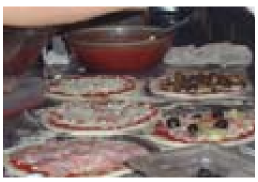
En general, si hacemos un cambio de escala de factor de proporcionalidad k, el área tiene un factor de proporcionalidad k^2, y el volumen k^3.

Utiliza esta observación para resolver los siguientes problemas:

La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

Ayuda: k^3 = 8 000 000/1 luego k = 200. Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá 300/200 = 1,5 m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!



1. En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
2. Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
3. En un día frio un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frio?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS.

Resumen

En Babilonia ya utilizan el Álgebra, pero los egipcios y los griegos la trataban utilizando la Geometría. Los árabes recogieron el saber antiguo de Oriente y Occidente y trajeron el Álgebra a Europa. La palabra "*álgebra*" en árabe significa "*restaurar*" y en el Quijote aparecen algebristas que restauraban los huesos rotos. En el siglo XIII, *Fibonacci*, (Leonardo de Pisa) viajó y contactó con matemáticos árabes e hindúes. Su libro, *Liber abaci*, puede ser considerado el primer libro de Álgebra europeo. En el Renacimiento italiano ya hubo grandes algebristas que se ocupaban, principalmente, de la resolución de ecuaciones.

Luego, el punto de vista cambió. El *Álgebra Moderna* se ocupa de las estructuras algebraicas, que viene a ser el encontrar las propiedades comunes que puedan tener distintos conjuntos, como por ejemplo, encontrar similitudes entre los números enteros, que ya conoces, y los polinomios que vamos a trabajar en este capítulo.

Hoy los ordenadores son capaces de trabajar con expresiones algebraicas.

En multitud de situaciones el ser humano se ve obligado a cuantificar, a manejar cantidades, datos, números, ya sea para explicar algo ocurrido en el pasado, algún hecho que esté sucediendo en la actualidad, o para predecir o pronosticar el comportamiento de determinado fenómeno en el futuro. Pese a la dificultad que puedan encerrar esas justificaciones, algunas herramientas son de carácter sencillo, como las operaciones usuales de suma, resta, producto y división. En ocasiones hay que manejar datos aún no conocidos, por lo que aparecen indeterminadas o variables. La mezcla de números reales y las citadas cuatro operaciones básicas nos lleva a las expresiones algebraicas y, dentro de ellas, destacan unas expresiones concretas por su abundante uso y simplicidad de exposición, los polinomios.

Numerosos actos que podemos encuadrar dentro de "**trucos de magia**" pueden ser analizados, o "destripados", mediante un uso adecuado de las Matemáticas, en particular a partir de expresiones algebraicas.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 10
iii. Que al resultado anterior le sume 32
iv. Que multiplique por 100 lo obtenido
v. Qué le sume 800
vi. Que divida entre 1000 la última cantidad
vii. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
viii. ¡Tiene un 4! ¡Magia!

En los ejercicios 1 y 2 tienes otros ejemplos de esto.

ALGORITMOS

La regla de Ruffini es un ejemplo de *algoritmo*. Un *algoritmo* es una relación ordenada y precisa de operaciones, o acciones, que se han de realizar sobre los datos inicialmente disponibles con la finalidad de resolver un problema o alcanzar nueva información. Otros algoritmos:
- el de la división de dos números enteros, que nos proporciona su cociente y su resto.
- el de Euclides, por el que obtenemos el máximo común divisor de dos enteros positivos.
- el de la raíz cuadrada, que ofrece la raíz cuadrada de un número.
- el que origina la letra de un DNI o NIF.

Los algoritmos son un pilar básico en el funcionamiento de cualquier ordenador o computadora.

COEFICIENTES BINOMIALES

Cuando expandimos el binomio $(a+b)^n$ aparece un polinomio tal que todos sus monomios son del mismo grado, grado n. La parte literal de cada uno de ellos es muy fácil de escribir, no así, en principio, cada uno de los coeficientes. Sin embargo, gracias a un triángulo numérico podemos conocer los coeficientes que corresponden a cada exponente n: el ***triángulo de Tartaglia*** o ***de Pascal***. Es un triángulo numérico con muchas propiedades y utilidades. Apuntemos una propiedad: cada una de sus líneas comienza y concluye con el dígito 1, el resto de números es igual a la suma de los dos números que se encuentran sobre él.

n = 0	1									
n = 1	1	1								
n = 2	1	2	1							
n = 3	1	3	3	1						
n = 4	1	4	6	4	1					
n = 5	1	5	10	10	5	1				
n = 6	1	6	15	20	15	6	1			
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Por ejemplo, el desarrollo para el exponente $n=5$ sería

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es **2**!

Analiza cómo tu, el mago, has podido conocer el resultado.

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Demostró dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Trabajó en estructuras algebraicas y en la actualidad el calificativo ***noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra: anillos *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espacios topológicos *noetherianos*, etc.

Cuando intentó dar clases en la Universidad de *Göttingen* el reglamento indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que *Noether* no pudo acceder a la docencia universitaria. Se cuenta, como anécdota, que *Hilbert* dijo en un Consejo de dicha Universidad:

> *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establec*
> *baños"*

De ella dijo Albert Einstein:

> *"En el reino de Álgebra en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que se ha demostrado que tienen una importancia enorme... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales para conseguir una penetración más profunda en las leyes de*

ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

Resumen

Ya sabes resolver muchas ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y utilizarlo para resolver gran número de problemas de lo más variado. En este capítulo vamos a repasar la resolución de ecuaciones que ya conoces, de primer grado, de segundo… y aprenderemos a resolver algunas nuevas ecuaciones y a utilizar lo aprendido para resolver problemas de la vida cotidiana por medio de las ecuaciones.

Repasaremos también los sistemas de ecuaciones lineales, cómo se resuelven por diferentes métodos y su aplicación para resolver problemas que nos rodean, pero utilizaremos esos métodos para resolver algunos sistemas nuevos que no sean lineales.

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado.

En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado.

Para imponer que la ecuación $ax + b = 0$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números naturales debe ampliarse con los números negativos.

Para imponer que la ecuación $ax = b$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números enteros debe ampliarse con los números fraccionarios.

Para imponer que la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, recuerda $x^2 = 2$, tenga solución, el conjunto numérico debe ampliarse con los números irracionales.

Pero la ecuación $x^2 + 1 = 0$, todavía no tiene solución en el conjunto numérico de los números reales. El próximo curso se ampliará el dominio a los números complejos.

En este capítulo repasaremos la solución de ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales, que ya conoces, y ampliaremos con ecuaciones y sistemas nuevos.

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Completamos cuadrados

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Hallamos la raíz cuadrada

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Downarrow$ Despejamos la x

$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

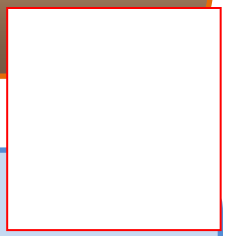
$\Downarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.



$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$ que es el número de oro, otro número irracional

$x^2 = -1$

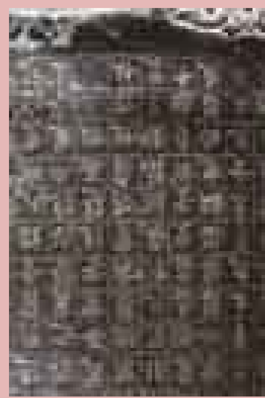
La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números a + b·i se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces como $ax + b = 0$. Ya los **egipcios** en el papiro del *Rhid* (1650 aC) y en el de *Moscú* (1850 aC) resuelven algunos problemas que se podrían considerar de ecuaciones, como por ejemplo: "*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*".

En **Mesopotamia** y **Babilonia** ya se sabían resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado.
Un problema que aparece en una tablilla es: "*La cuarta parte de la anchura más una longitud es igual a 7 manos. Y longitud más anchura es igual a 10 manos*". En este problema "longitud" y "anchura" son incógnitas no relacionadas con estas medidas.

En China en el siglo III a C se editó "*El arte matemático*" donde utilizaban el ábaco y se resolvían ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas.
Uno de los problemas resueltos puede considerarse como la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método matricial.



En Grecia, en el siglo III Diofanto de Alejandría publicó "*Aritmética*" trabajó con ecuaciones y utilizó la primera letra de la palabra griega "*arithmos*" que significa número, para representar a la incógnita.

En su tumba aparece este problema:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto. Es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años".

En el siglo VII los **hindúes** conocían procedimientos algebraicos y trabajaban con eficacia los números.

En el siglo IX el matemático musulmán **Al-Jwarizmi** trabajó sobre procedimientos algebraicos.

En 1489 se inventaron los símbolos + y –.
En 1525 el símbolo de la raíz cuadrada.
En 1557 el símbolo **=**.
En 1591 François Viète representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.
En 1637 René Descartes inventó la geometría analítica con la notación que hoy usamos de x, y z… para las incógnitas y *a, b, c*… para las constantes.

El número de oro está en todas partes

¿Conoces un número irracional cuya parte decimal sea igual a la de su cuadrado?

Para encontrarlo debemos resolver la ecuación: $x^2 = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a 1, entonces:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1{,}618033988749\ldots \\ -0{,}618033988749\ldots \end{cases}$$

¡El número de oro!

¿Conoces un número cuya parte decimal sea igual a la de su inverso?

Planteamos de nuevo la ecuación: $1/x = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a –1, entonces:

$$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

¡Tenemos la misma ecuación de antes! ¡La solución vuelve a ser el número de oro!

¡El número de oro, Φ, está en todas partes! Ya lo habíamos encontrado en pintura, arquitectura, esculturas, y en la propia naturaleza. Ahora lo encontramos en las ecuaciones.

El brócoli es un conocido ejemplo de fractal. Cada uno de sus trocitos es similar al completo, con un cambio de escala. También está relacionado con el número de oro y la sucesión de *Fibonacci*. Si contamos las espirales que se forman son dos número sucesivos de la sucesión de *Fibonacci*, hacia la derecha son 8 y hacia la izquierda son 13. Recuerda la sucesión es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….

¿Sabrías calcular $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$? Hay infinitas raíces cuadradas encadenadas. Como si a infinito le sumo 1 no varía, una forma de encontrar su valor es volver a sustituir x en la igualdad: $x = \sqrt{1+x}$ y resolver la ecuación:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

¿Sabrías calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$? Es una fracción continua. Hay infinitas fracciones encadenadas. Para calcularla de nuevo sustituimos x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ y resolvemos la ecuación: $x^2 = x + 1$ que ya sabemos que su solución positiva es Φ.

Problemas

Algunos problemas de ingenio que se resuelven, (o no) por ecuaciones o sistemas.

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

La invitación

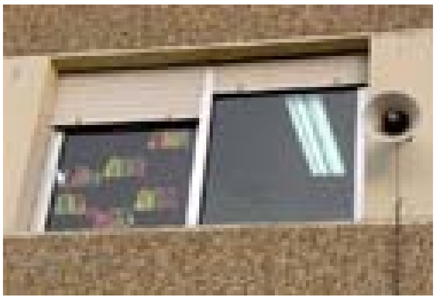
Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

INECUACIONES

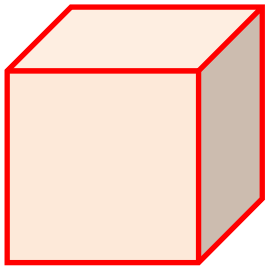
Resumen

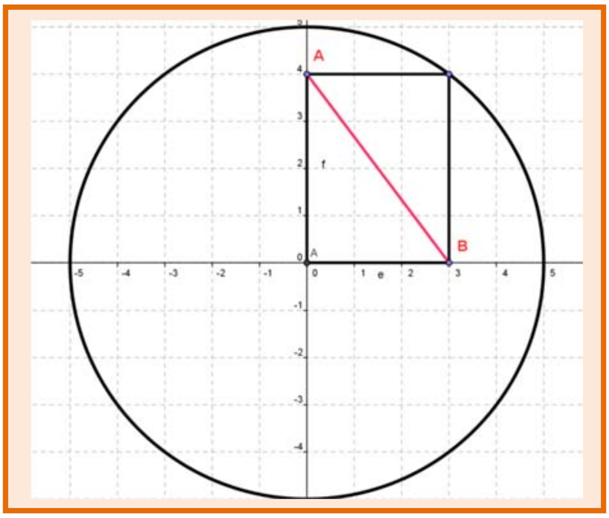
En muchas ocasiones vas a encontrarte con inecuaciones. Si trabajas con intervalos dirás $a < x < b$, por ejemplo. En otras ocasiones tu problema será que algo debe ser menor que una cierta cantidad. Imagina que queremos construir una ventana en la pared de una habitación de 4 metros de larga y 2,3 metros de alta. Es imposible que la ventana tenga unas dimensiones mayores que las de la pared. Para complicarlo un poco, imagina ahora que la longitud total de los perfiles con los que vamos a construir la ventana es de 10 metros. Si la ventana es rectangular y llamamos x a la longitud de la base e y a la de la altura, por ahora sabemos que $x \leq 4$, $y \leq 2,3$, $2x + 2y \leq 10$. Por ahora hay muchas soluciones que resuelven el problema. Pero el arquitecto desea que la ventana tenga la mayor luz posible. Tú ya sabes que el área máxima la consigues con un cuadrado, pero… esta solución no te sirve porque el lado debería medir 2,5 metros y nos saldríamos de la pared. Debemos jugar con esas desigualdades para dar una solución al problema.



¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?





Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Estos chistes son de la Exposición “*Ríete con las mates*” del grupo de innovación educativa *Pensamiento Matemático* de la Universidad Politécnica de Madrid.

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de *x*, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow$

$x \geq 4$.

¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

Observa que hemos dividido la desigualdad por $(x-4)$ que para unos valores de x es positiva y no cambia el sentido de la desigualdad, pero para otros es negativa y sí cambia.

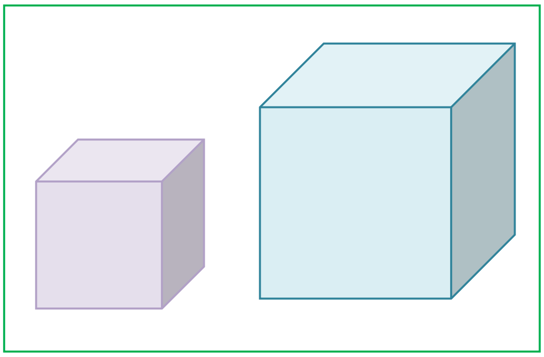
Programación lineal

La **programación lineal** se basa en sistemas de inecuaciones y se utiliza en microeconomía, en administración de empresas para minimizar los gastos y maximizar los beneficios, en asignación de recursos, en planificación de campañas de publicidad, para solucionar problemas de transporte…

SEMEJANZA

Resumen

Uno de los problemas *históricos* de la Matemática es el de la **duplicación de un cubo**. En Atenas se desarrolló una tremenda peste que asolaba a la población. Incluso su gobernante, Pericles murió en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo este dijo que se terminaría con la peste si se construía un altar que fuese doble del que había (que tenía forma de cubo).

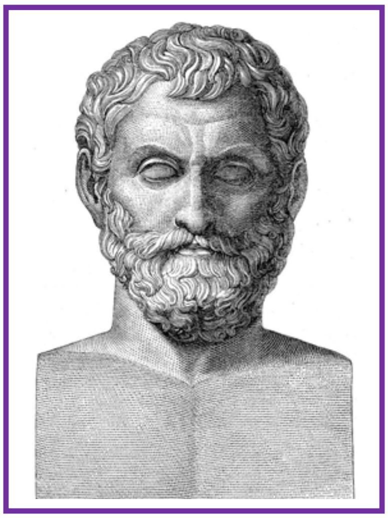


No se logró dar con la solución. Se debe buscar la razón de proporcionalidad entre los lados para que el volumen sea doble. La peste se terminó, pero el problema se quedó sin resolver durante siglos, pero tú vas a saber solucionarlo cuando estudies este capítulo.

También vamos a estudiar el teorema de Tales y su aplicación a reconocer cuando dos triángulos son semejantes. Son los criterios de semejanza de triángulos.

Utilizando la semejanza de triángulos demostraremos dos teoremas, el teorema de la altura y el del cateto.

Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.)



Sobre la vida de Tales se sabe muy poco. Los antiguos opinaban que era excepcionalmente inteligente siendo considerado uno de los Siete Sabios de Grecia, y que había viajado y conocido los saberes de Egipto y Babilonia.

Pero no existe ningún documento que certifique nada sobre su vida, y es probable que no dejara obra escrita a su muerte. Eudemo de Rodas escribió una historia de las Matemáticas, que se perdió, pero alguien hizo un resumen de una parte, que también se perdió, y en el siglo V d.C. Proclo incluyó parte de dicho resumen en un comentario sobre los elementos de Euclides. ¡Eso es lo que sabemos sobre Tales y la Matemática!

Hay muchas leyendas sobre su vida como que:

- Se hizo rico alquilando unas almazaras durante un año en que la cosecha de aceituna fue abundante
- Fue mercader de sal
- Fue observador de las estrellas. Un día, por mirar las estrellas se cayó a un pozo, y cuando se reían de ello dijo que quería conocer las cosas del cielo, pero que lo que estaba a sus pies se le escapaba.
- Fue un hombre de estado
- Dirigió una escuela de náutica

Sobre matemáticas se le atribuyen diversos teoremas, aunque algunos ya eran conocidos por los babilonios, pero quizás él utilizó un razonamiento deductivo. Por ejemplo, se dice que demostró:

- Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto
- Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales
- Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
- Dos triángulos con dos ángulos iguales y un lado igual, son iguales
- Los ángulos opuesto por el vértice son iguales

¿A qué todos estos teoremas ya te los sabías tú?

Además de decirse de él que:

- predijo un eclipse,
- construyó un canal para desviar las aguas de un río para que lo cruzara un ejército

y también se dice que utilizó la semejanza de triángulos para

- calcular la altura de la pirámide de Keops,
- la distancia de un barco a la playa

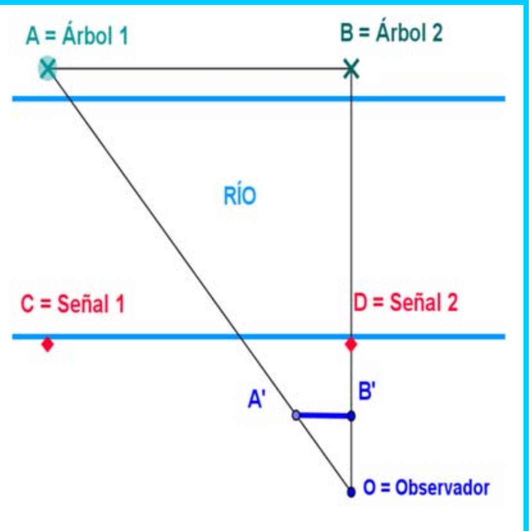
¿Sabrías tu resolver esos dos últimos problemas?

Algunos problemas

- Calcula la altura de la Pirámide de Keops sabiendo que su sombra mide 175,93 metros y que al mismo tiempo la sombra de un bastón de altura un metro, mide 1,2 metros.

- Calcula la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 15 metros y que al mismo tiempo la sombra de un palo de altura un metro, mide 1,5 metros.

- Unos exploradores encuentran un río y quieren construir una pasarela para cruzarlo, pero, ¿cómo conocer la anchura del río, si no podemos ir a la otra orilla? ¡Piensa! ¡Piensa! Seguro que se te ocurren muchas buenas ideas, mejores que la que te vamos a comentar a continuación.
- Buscas en la orilla opuesta dos árboles, (o dos rocas, o …), *A* y *B*. Colocándote en tu orilla perpendicular a ellos, marcas dos señales, (Señal 1 y Señal 2), y mides así la distancia entre esos dos árboles. Ahora midiendo ángulos dibujas dos triángulos semejantes. Uno, en tu orilla, lo puedes medir, y por semejanza de triángulos calculas los lados del otro.



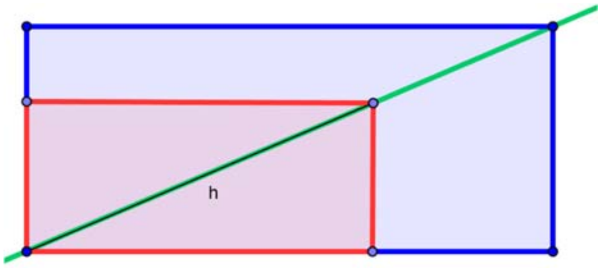
Imagina que la distancia *CD* es de 10 metros, que *A'B'* mide 2 metros y que *OB'* = 2,5 m. ¿Cuánto mide *OB*? Si *OD* mide 5 metros, ¿cuánto mide la anchura de río?

¡Piensa! ¡Piensa!

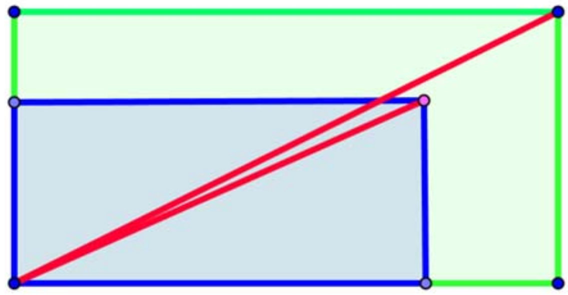
¿Cómo podrías conocer a qué distancia de la costa está un barco?

Rectángulos semejantes

Para saber si dos rectángulos son semejantes se colocan uno sobre el otro, con dos lados comunes, y si tienen la misma diagonal, son semejantes



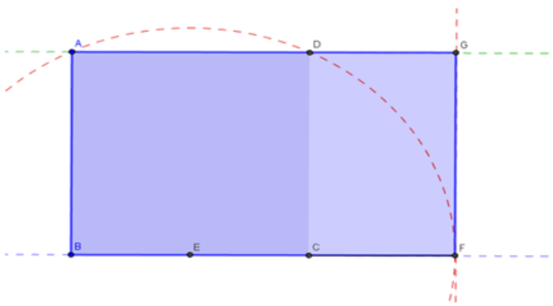
Rectángulos semejantes



No son semejantes

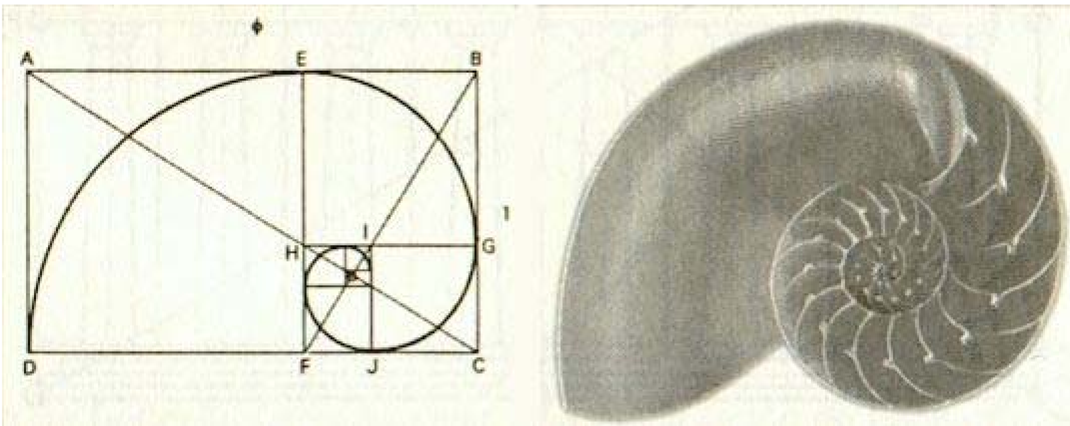
Rectángulo áureo

Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea. Todos los rectángulos áureos son semejantes.



Si a un rectángulo áureo se le quita (o añade) un cuadrado, se obtiene un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

Puedes construir una espiral con rectángulos áureos cómo indica la figura



TRIGONOMETRÍA

Resumen

Etimológicamente *trigonometría* significa *medición de triángulos*. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Tablilla babilónica.

Fuente Wikipedia

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que es imposible obtener por medición directa.

En este capítulo estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

¿NUESTROS SENTIDOS NOS ENGAÑAN?

La foto muestra un tramo de carretera hacia el horizonte. Todas las líneas son rectas, la fotografía no engaña, pero nuestros sentidos, sí. Según nuestra percepción, estas líneas se cortan en el punto del horizonte, aunque nosotros, cuando estamos en esa situación, sabemos que no es así. Entonces, ¿por qué lo vemos así? Por dos razones: porque la luz viaja en línea recta y porque nuestra percepción visual se basa en los ángulos, lo que hace que la anchura de la carretera disminuya con la distancia.

Pero ahora, que conoces las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo, sabrás razonar si los objetos disminuyen su tamaño de forma inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentran.

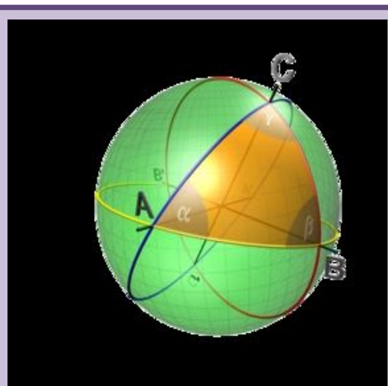
¿Sabías que…?

El teorema de los senos se utilizó en el siglo XIX para medir de forma precisa el meridiano de París y así poder definir el metro.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

La trigonometría esférica estudia los triángulos que se forman sobre una superficie esférica

- **En la trigonometría esférica la distancia más corta entre dos puntos no es una recta, sino un arco.**
- **Los ángulos de un triángulo esférico suman más de 180º**
- **Es la base de la navegación y la astronomía. Curioso, ¿no?**



GEOMETRÍA DEL ESPACIO. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

Resumen

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. Su nombre significa "*medida de la Tierra*". Medir es calcular longitudes, áreas y volúmenes. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

Tales, Pitágoras y muy posteriormente Euclides son matemáticos griegos a los que debemos el estudio de la Geometría deductiva. Anteriormente egipcios y babilonios utilizaron la Geometría para resolver problemas concretos, como volver a poner lindes a las tierras después de las inundaciones del Nilo. Pero en Grecia se utilizó el razonamiento lógico para deducir las propiedades.

Euclides

Euclides intentó recoger el conocimiento que existía y escribió *Los Elementos* que consta de 13 libros o capítulos, de los que los seis primeros tratan de Geometría Plana, y el último de Geometría en el espacio. En este libro define conceptos, tan difíciles de definir como punto o recta, y enuncia los cinco axiomas (de Euclides) de los que parte como verdades no demostrables, y a partir de ellos demuestra el resto de las propiedades o teoremas. Estos axiomas son:

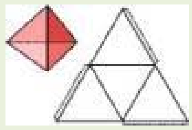
1. Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada.
3. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto, se puede trazar una única recta paralela a la recta por dicho punto.

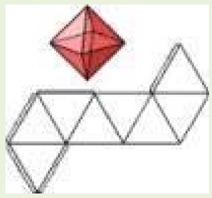
Nos movemos en el espacio de dimensión tres, caminamos sobre una esfera (que por ser grande, consideramos plana), las casas son casi siempre ortoedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

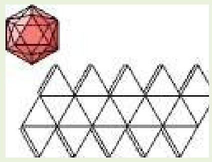
Muchas plantas distribuyen sus hojas buscando el máximo de iluminación y sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

Problemas, problemas, problemas…







1. Deltaedros

En la trama de triángulos dibuja todos los diamantes-dos posibles, todos los diamantes-tres posibles y todos los diamantes-cuatro posibles. ¿Con cuáles puedo construir un cuerpo en el espacio? A estos cuerpos de caras triangulares vamos a llamarlos **DELTAEDROS**. Investiga y construye todos los deltaedros posibles. ¿Cuántos hay?.

(Podemos restringir la búsqueda a deltaedros convexos)

¿Cuáles son también poliedros regulares? ¿Qué orden tienen sus vértices?

¿Hay deltaedros con menos de cuatro caras? ¿Hay deltaedros convexos con un número impar de caras? ¿Hay deltaedros con más de veinte caras?

Haz un cuadro con los resultados obtenidos: Nº caras, Nº vértices, Nº aristas, Nº vértices de orden tres, de orden cuatro, de orden cinco, descripción de los posibles deltaedros: bipirámides, esquinas, bandas...

2. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

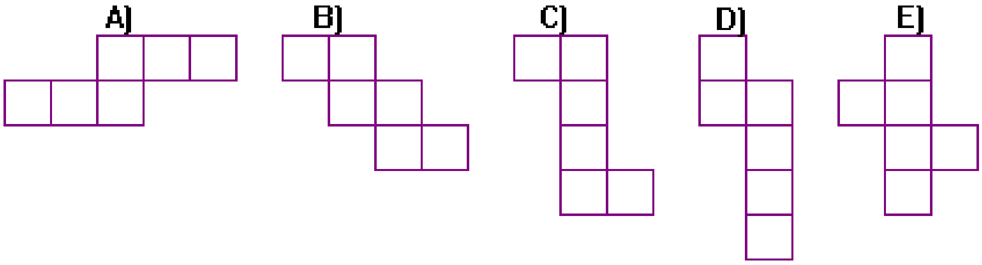
3. Construye figuras de cartulina que mediante un solo corte se puedan dividir en cuatro trozos iguales.

4. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la Tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

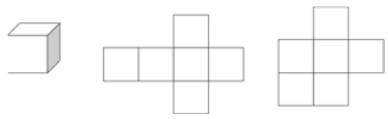
Para empezar hazlo más fácil. Piensa en la Tierra como una manzana que tiene un radio de 3 cm.

5. ¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

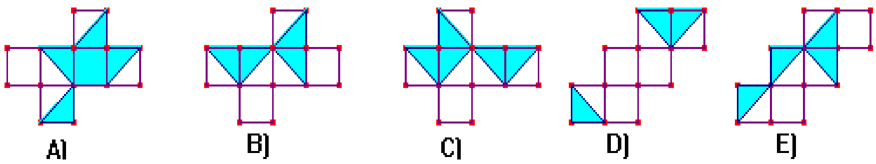
6. ¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



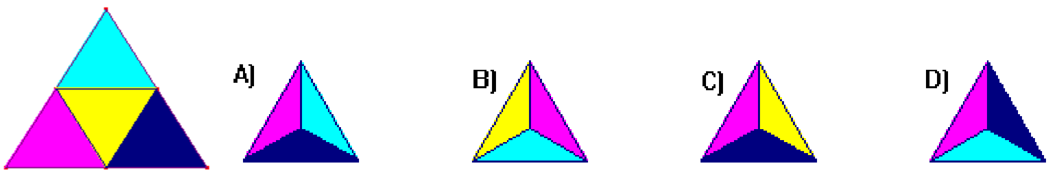
7. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo

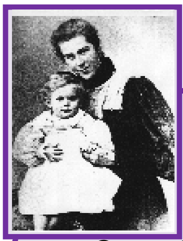


8. A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



9. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



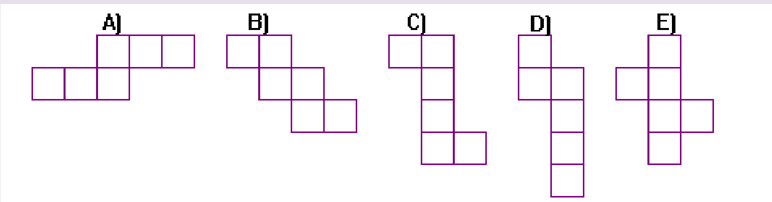


Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

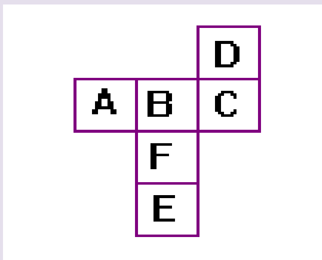
Grace Chisholm Young nació el 15 de marzo de 1868, cerca de Londres, Inglaterra, durante el reinado de la reina Victoria. Para hacernos una idea sobre el estado de la educación en esa época recordemos que hacia 1881, el 20 % de la población de Inglaterra todavía no sabía escribir su nombre. Era la más pequeña de cuatro hermanos (tres supervivientes) y también la más consentida. Sólo le enseñaban lo que quería aprender y en este sentido su educación fue un tanto informal. Le gustaba el cálculo mental y la música. Sin embargo fue una preparación suficiente para, a los 17 años, pasar los exámenes de *Cambridge* (*Cambridge Senior Examination*). Estudió Matemáticas pero para doctorarse fue a *Göttingen* donde se doctoró en 1895. En 1896 se casó con *William Young* con el que tuvo seis hijos. Ocupó mucho de su tiempo en la educación de sus hijos.

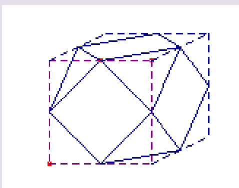
Escribió libros y muchos artículos. Escribió ***Primer libro de Geometría*** En él *Grace* escribía que la geometría en dimensión tres recibía, en primaria y en secundaria, mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque *"en cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional"*, pues consideraba que la geometría tridimensional era más natural. Pero admitía, sin embargo, muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente. *Grace* opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y construidos. Opinaba que esa era la forma en que el alumnado debía familiarizarse con las propiedades de estas figuras y que utilizándolas, con su ayuda, podía visualizar los teoremas de la geometría tridimensional.

¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?

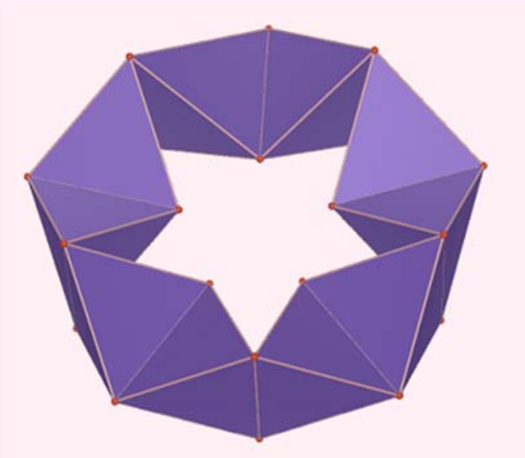




Haz el desarrollo

ANILLO DE TETRAEDROD

Un anillo de tetraedros o caleidociclo es un anillo tridimensional compuesto por tetraedros unidos por sus aristas. Pueden girar sobre sí mismos en torno a su centro infinitas veces sin romperse ni deformarse.



Aquí puedes ver una plantilla para construirlo:

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Resumen

Uno de los conceptos más importantes que aparecen en las Matemáticas es la idea de *función*. Intuitivamente, una función es cualquier proceso por el que se transforma un número en otro. Más formalmente, una función f es una correspondencia que a un número x le asigna un único número y, tal que $y = f(x)$.

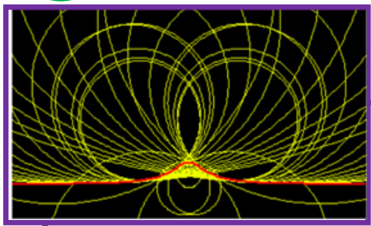
No es difícil encontrar ejemplos de funciones. El espacio recorrido en función del tiempo, el peso de una persona en función de su altura, lo que pagamos de teléfono en función de los minutos que hablamos.

La Ciencia utiliza modelos, y muchos modelos se consiguen ajustando una función a una tabla de valores. Por ejemplo, en este momento estamos ajustando unas parábolas a la relación entre la duración del desarrollo en días y la temperatura de los diferentes estadios de la cochinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que es una plaga que ataca a los cítricos produciendo desde la muerte del árbol a su desvalorización comercial, y de sus enemigos naturales, como los del género *Aphytis*, que bajo ciertas condiciones pueden llegar a regular las poblaciones de tal forma que no hagan falta utilizar otras medidas adicionales de control como insecticidas.

Una vez conseguida una función que se ajuste a una tabla de valores se puede pronosticar lo que va a ocurrir o dar valores que no se conocían previamente.

Ajustar modelos mediante funciones que sirvan en las situaciones más variadas es una de sus aplicaciones más importantes.

En este capítulo aprenderemos cómo tratar de manera rigurosa la idea intuitiva de función y cómo estudiar las funciones. Veremos cómo describir sus características y estudiaremos la manera de hacer un modelo matemático de algunas situaciones de la vida real que nos ayude a tomar mejores decisiones. Prácticamente cualquier situación real puede ser estudiada con ayuda de funciones. Tenemos pues mucho campo…



María Gaetana Agnesi

Foto de M. G. Agnesi. RSM

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venús lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco volúmenes.

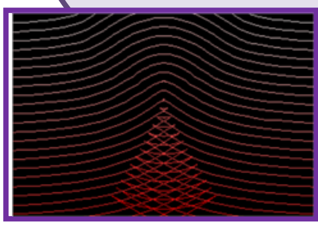
Nació en Milán en el siglo XVIII y fue una niña dotada, que con nueve años hablaba siete idiomas.

Su padre tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor y les proporcionó a todos una buena formación, incluso científica. Le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.

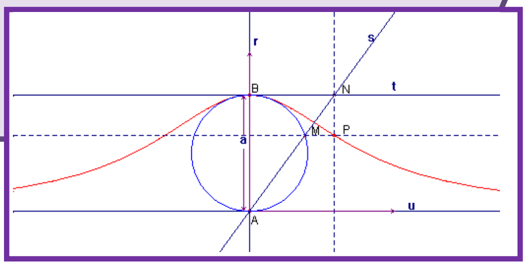
Parece ser que María era sonámbula, y en ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio. A la mañana siguiente, al despertar, veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

Su libro, que escribió para que sus hermanos pudieran estudiar, se convirtió en una obra importante, donde trataba las Matemáticas más actuales de su época de forma clara, y tuvo una acogida espectacular. Fue traducido a muchos idiomas y se utilizó como libro de texto en muchas universidades.

Pero… Pero su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus *Instituzioni Analitiche,* trabajara con la "curva de Agnesi" o curva sinusoidal versa, "versiera" que se tradujo al inglés, por un error del traductor, John Colson, como la "bruja de Agnesi" confundiendo el término "versiera" por "aversiera" que significa bruja, hechicera, ("witch").



$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$



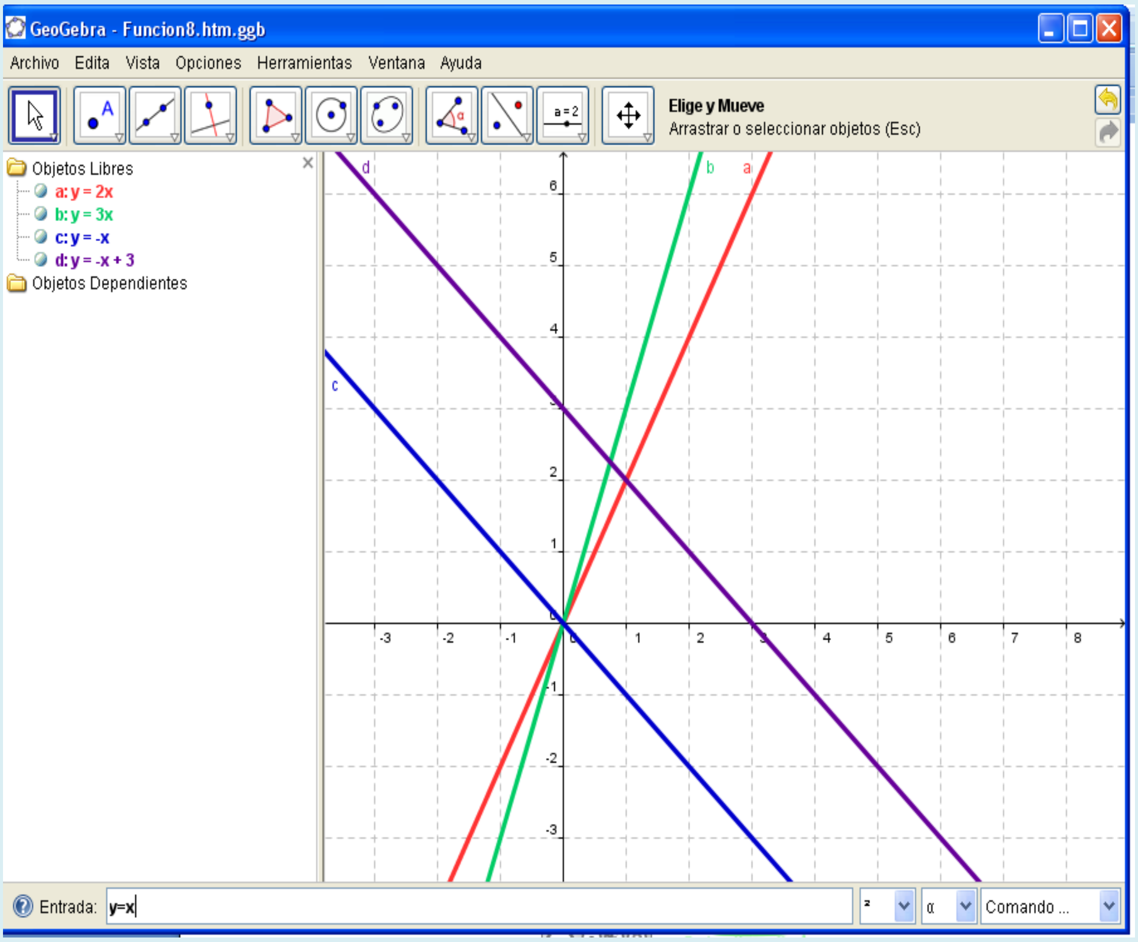
Utiliza el ordenador

Puedes utilizar el ordenador para dibujar funciones. Para ello necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Geogebra*…

Unos son más sencillos de utilizar que otros, pero utilizando la ayuda, pronto dominarás cualquiera de ellos.

Muchas de las gráficas que has visto en este capítulo los han utilizado.

Por ejemplo, utilizando *Geogebra*, podemos dibujar rectas:



Dice el premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"La enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan "leyes de la naturaleza", y mucho menos que el ser humano sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las Matemáticas para la formulación de leyes de la Física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos".

Las funciones se han utilizado para hacer modelos matemáticos de las situaciones reales más diversas. Antes de la época de los ordenadores las funciones que solían utilizarse eran las funciones lineales (que ya conoces pero que estudiarás detenidamente en el próximo capítulo). Se *linealizaban* los fenómenos. Al usar otras funciones, como por ejemplo parábolas pueden complicarse mucho las cosas. Incluso puede aparecer el caos.

¿Sabes qué es el caos?

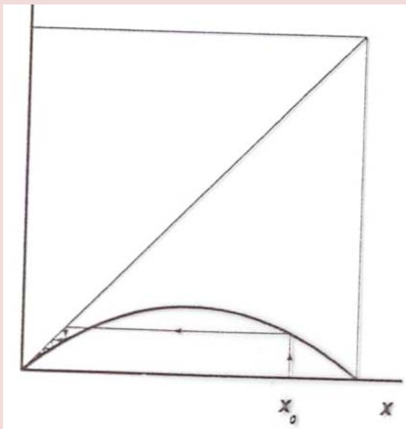
Vamos a estudiar un ejemplo en el que aparece el caos: La **ecuación logística**. Es un modelo matemático propuesto por P. F. Verhulst en 1845 para el estudio de la dinámica de una población. Explica el crecimiento de una especie que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Se consideran valores x entre 0 y 1 de la población.

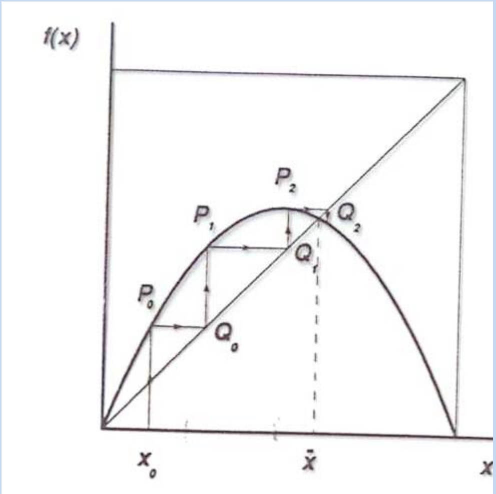
$$y = r(x(1 - x))$$

Si nos quedamos con el primer término, $y = rx$ sería un modelo lineal, y nos indica el crecimiento de la población, pero tiene un término de segundo grado que hace que sea un polinomio de segundo grado. Si en algún momento $y = x$ la población se mantendrá siempre estable para ese valor. Por ejemplo, si $x = 0$ entonces $y = 0$, y siempre habrá una población de tamaño 0. Estos valores que hacen que $y = x$ se denominan **puntos fijos**.

El comportamiento es distinto según los valores que tome r. Por ejemplo, para $r < 1$, se extingue la especie.

Dibujamos la parábola para $r = 0,9$. Imaginamos que en el instante inicial hay una población x_0. Buscamos, cortando verticalmente a la parábola, el valor de y. Para transformarlo en el nuevo x, cortamos a la diagonal del primer cuadrante. Observa que la población cada vez es menor y que va hacia la extinción. Observa con cuidado ese proceso de ir cortando a la parábola y a la diagonal, para volver a cortar a la parábola y así sucesivamente.





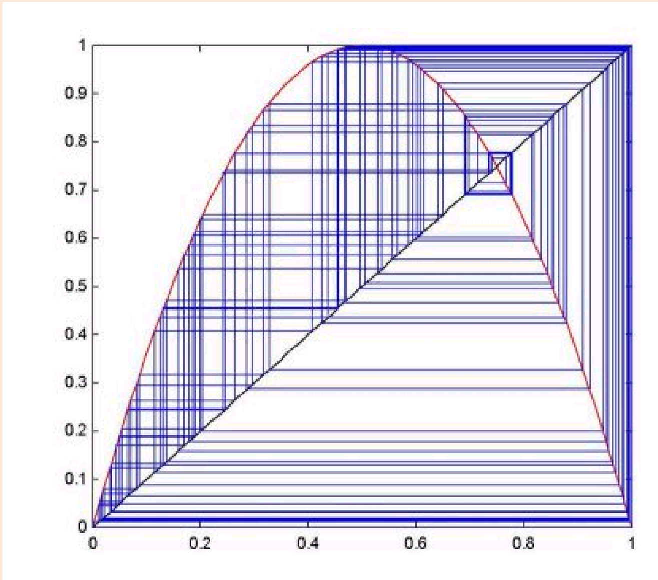
Para valores de r comprendidos entre 1 y 3: $1 < r < 3$, entonces la población se estabiliza, tiende a un punto fijo.

Hemos dibujado la parábola para $r = 2,5$, e igual que antes partimos de un valor inicial cualquiera, en este caso x_0, que se convierte en $y = P_0$. Ese valor lo tomamos como abscisa: $x = Q_0$, y calculamos el nuevo valor de $y = P_1$… Observa cómo la población se estabiliza hacia el valor de intersección de la parábola con la diagonal.

Para valores entre 3 y 3,56994546 las cosas empiezan a complicarse, hasta que …

Para r mayor o igual a 3,56994546 tenemos sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, tenemos **caos**.

No sabemos qué puede ocurrir. La población fluctúa constantemente. Y ese comportamiento tan errático es debido a ¡una función polinómica de segundo grado!



El término **caótico** va a indicar que puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.

El meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizó el término de **efecto mariposa** para explicar por qué el tiempo atmosférico no es predecible a largo plazo, es decir para explicar que existía una dependencia sensible a las condiciones iniciales: *"El **aleteo de una mariposa** en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?"*

¿Lo habías oído?

Este es un ejemplo de caos dibujado con el ordenador. Hay 5 órbitas bien definidas, pero un punto de la frontera entre órbitas no sabemos en cuál terminará.

FUNCIONES POLINÓMICAS Y DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

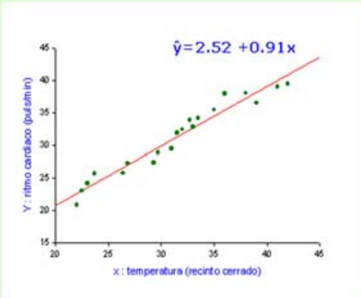
Resumen

En nuestra vida diaria hacemos uso continuamente de las relaciones de proporcionalidad, como cuando vamos a comprar cualquier producto al supermercado, o si queremos comparar dos tarifas de luz distintas para saber cuál nos conviene elegir. En estos casos, la representación gráfica nos facilita la toma de decisiones. El lanzamiento de objetos a ciertas distancias, como lanzar un papel a la basura, llenar el vaso de agua o dar un salto: la trayectoria que describe es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

En este capítulo estudiaremos las propiedades más importantes de las *relaciones de proporcionalidad directa e inversa* y las *funciones polinómicas*, así como sus elementos y representaciones gráficas en el plano cartesiano.

Comprender estas funciones es muy útil para la ciencia, ya que se utilizan para comparar datos y para saber si esos datos tienen alguna relación lineal (los datos se comportan como una recta) o de otro tipo (polinómica, exponencial,…).

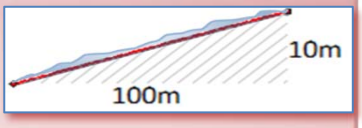
Al estudio de estos datos y sus curvas se dedica la estadística mediante *el análisis de regresión*. Con la aproximación de datos a rectas o curvas conocidas, se realizan estudios y predicciones, de ahí su importancia para la vida real.



Ejemplo de Recta de

¿Conoces esta señal?

Seguramente la has visto en alguna carretera, pero ¿qué indica? Mide la pendiente de la carretera con respecto a la horizontal y significa que la pendiente es del 10 %, es decir, $\frac{10}{100}$. Quiere decir que subimos 10 metros de altura mientras que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet el perfil del *L'Angliru* y comprueba la pendiente de sus rampas.

Arquímedes y el rayo de calor

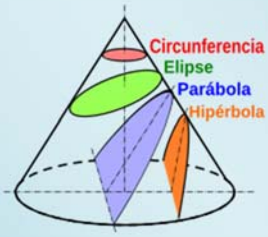
Arquímedes es uno de los personajes que más han aportado a la ciencia en la historia. Este ingeniero, físico, inventor, astrónomo y matemático nació en Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) y es el responsable muchos teoremas e invenciones que seguramente habrás oído, como el famoso principio de Arquímedes, o el tornillo de Arquímedes utilizado en las cadenas de producción de muchas empresas.

Cuando los romanos atacaron Siracusa, cuenta la leyenda que Arquímedes construyó un sistema que concentraba los rayos de sol en un rayo de calor que provocó el incendio de los barcos enemigos. Este sistema estaba compuesto por espejos (o escudos bien pulidos) colocados de tal forma que dibujasen una superficie parabólica.

¿Mito o realidad? No se sabe, pero en la actualidad, este sistema es la base del funcionamiento de los hornos solares.

Apolonio de Pergue

Hemos estado hablando de parábolas e hipérbolas, pero, ¿de dónde vienen esas palabras y formas? El nombre de estas curvas se lo debemos a Apolonio de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que estudió este tipo de funciones en su obra *Las Cónicas*. Las curvas surgen de los cortes de un cono: dependiendo el ángulo de corte, obtenemos unas curvas u otras. Es como cortar una barra de pan.



FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Resumen

Entre las diversas funciones hay algunas que tienen una importancia especial, o la han tenido históricamente. En estos dos capítulos te mostramos tres tipos muy importantes.

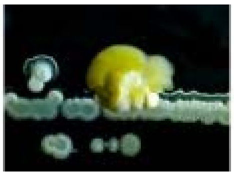
Términos como *crecimiento exponencial* o *curva sinusoidal* derivan de este tipo de funciones.

Tienen unas propiedades importantísimas en el análisis matemático, ingeniería, medicina, ciencias sociales, etc. En este capítulo aprenderás el cálculo de logaritmos y las propiedades de las funciones exponenciales y circulares y de sus gráficas.

El término *logaritmo* fue acuñado en 1614 por el matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes de la invención de las calculadoras electrónicas, los logaritmos también fueron imprescindibles para el cálculo de potencias de números no enteros.

Las funciones trigonométricas son muy conocidas y constituyen uno de los ejemplos más populares de funciones periódicas. Ellas u otras funciones relacionadas se encuentran por doquier en la naturaleza y se utilizan en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten sus propiedades, como por ejemplo la forma de una onda, también llamada *sinusoide*, que debe este nombre a la función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston



Las poblaciones crecen exponencialmente

En los modelos que se utilizan para estudiar las poblaciones se utiliza la función exponencial. Se supone que una población de una cierta especie crece exponencialmente mientras tenga alimento suficiente y no existan depredadores. Llega un momento en el que la población ha llenado el territorio (la Tierra es finita) y entonces cambia la función que se utiliza, estabilizándose el crecimiento.

Esto permite estudiar el crecimiento de las bacterias que se reproducen por fisión binaria, o el crecimiento de las células del feto, o la población de conejos cuando llegaron a Australia... Malthus afirmó que si la población humana crecía de forma exponencial y la producción de alimentos crecía de forma lineal habría graves hambrunas.

Logaritmos

No hace tanto tiempo no existían las calculadoras. Para calcular logaritmos se usaban "tablas". Había unas tablas de logaritmos que eran un libro con un lomo de unos tres dedos de ancho. Se usaban en problemas de Astronomía en los que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolverlos y se usaban números con muchas cifras decimales (más de 10). ¡Imaginas lo que es multiplicar o dividir números con esas cifras decimales! Resultaba muy conveniente transformar las multiplicaciones e sumas y las divisiones en restas. Esta misma idea la que llevó a John Napier (o Neper) a inventar l logaritmos.

No todo lo puedes calcular con calculadora.

Utiliza tu calculadora para calcular 45^{79}. Verás que da *error*. Pero si usas logaritmos puedes calcularlo fácilmente.

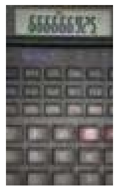
$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130{,}6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0{,}6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0{,}6037886} = 4{,}016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4{,}016 \cdot 10^{130}.$$



Decrecimiento exponencial

Muchos fenómenos se modelan con funciones exponenciales de base menor que 1, como

- La desintegración de átomos de una sustancia radiactiva.
- La intensidad luminosa de un haz de luz
- La probabilidad de supervivencia de ciertas especies que no tienen genéticamente determinado el envejecimiento celular

Carbono 14

El carbono 14 es un isótopo radiactivo con un periodo de semi-desintegración (vida media) de 5568 años, muy utilizado para datar restos orgánicos. Las plantas, por fotosíntesis, y los animales por ingestión incorporan el carbono en la misma proporción que existe en la atmósfera, y al morir el ser vivo empieza el proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

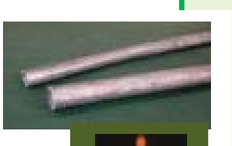
Conocemos muy bien muchas anécdotas de la vida de Sophia (o Sonia como a ella le gustaba que la llamaran), una mujer matemática con teoremas con su nombre, porque escribió su biografía en un precioso libro llamado “*Una infancia en Rusia*”

Cuando Sophia tenía 14 años, su familia recibió la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro sobre esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un *seno*, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía. De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Sonia le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y le comentó al padre de Sonia que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en las Matemáticas.

Fourier y el concepto de función

El concepto de función ha tardado mucho en ser comprendido incluso por los matemáticos, sólo dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer.

Fue *Joseph Fourier* en su obra *“La teoría analítica del calor”* el motor para la profundización del concepto de función. Fourier vivió durante la Revolución Francesa y participó en la expedición de Napoleón a Egipto. Era muy friolero y por ese motivo le interesaba la propagación del calor. En su obra afirma que “toda” función podía escribirse como una suma infinita de funciones seno y coseno.



Antoni Zygmund escribió *“Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por matemáticos trabajando sobre series trigonométricas”*. Añade que esa obra de Fourier fue el catalizador para fijar el concepto de función, la definición de integral, profundizar en la Teoría de Conjuntos y actualmente con la Teoría de Funciones Generalizadas o Distribuciones.

ESTADÍSTICA

Resumen

La Estadística se utiliza en la Ciencia. También para hacer **sondeos de opinión**, como la aceptación por el público de un programa de televisión, o las encuestas sobre la intención de voto a un partido político. Se usan técnicas estadísticas en los procesos de fabricación, es el **control de calidad**. Para hacer previsiones y programas el tráfico, o las necesidades de energía de un país. Cuando se analiza un fenómeno observable aparecen una serie de resultados que han de ser tratados convenientemente, de manera que se puedan comprender mejor tanto los resultados como la característica objeto de estudio correspondiente a dicho fenómeno. Para este fin se utiliza la Estadística.

La Estadística se ocupa de interpretar gran número de datos. El Instituto Nacional de Estadística recoge estudios de todo tipo sobre la población española. Entra en Internet escribiendo INE y tendrás un montón de información a tu alcance sobre: a) Entorno físico y medio ambiente; b) Demografía y población; c) Sociedad; d) Economía…

En un estudio estadístico confluyen distintas partes de la Estadística, la Teoría de Muestras que indica sobre la forma de seleccionar una muestra para que sea representativa de la población, la Estadística Descriptiva que utiliza tablas, gráficos y parámetros estadísticos como la media y la desviación típica para describir los datos, y la Inferencia Estadística que utiliza la Teoría de Probabilidades para obtener conclusiones.

Como sabrás, en tiempo de Jesucristo ya el emperador Augusto hizo censos para conocer la población del Imperio Romano.

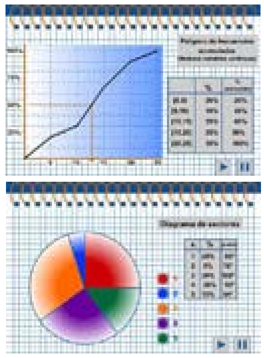
En este capítulo aprenderemos a reconocer y clasificar distintos tipos de variables estadísticas, construir tablas de frecuencias y gráficos estadísticos para distintos tipos de variables estadísticas y determinar e interpretar medidas de centralización, posición y dispersión.

Estadística

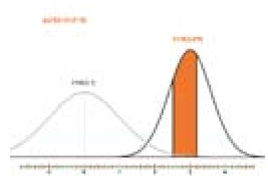
El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

¿UTILIZAMOS LA ESTADÍSTICA POR ENCIMA DE NUESTRAS POSIBILIDADES?

En las últimas décadas el uso de datos estadísticos es una de las principales maneras con las que se presenta información de cualquier tipo, provenga su fuente de los medios de comunicación, a través de mensajes publicitarios o relacionada con trabajos de investigación. Actualmente consumir información se convierte, en muchas ocasiones, entrar en un mundo de números, porcentajes, gráficos, probabilidades, mapas y otros conceptos básicos de esta disciplina que cuesta entender.



"TENGO MIS RESULTADOS HACE TIEMPO, PERO NO SÉ CÓMO LLEGAR A ELLOS"



Esta expresiva frase de Gauss -descubridor de la campana que lleva su nombre, y que alude a la distribución normal cuando la cantidad de datos es bastante grande-, es aplicable a muchas de las informaciones erróneas que vemos a diario. Tienen los datos pero no saben cómo llegar al núcleo de su interpretación. Muchas veces cuando un medio de comunicación quiere impresionar mediante un titular sobre la gravedad de una situación que afecta a toda la población, hace uso de números absolutos en lugar de porcentajes.

EL PAÍS

PORTADA | INTERNACIONAL | POLÍT

POLÍTICA

MONCLOA FERRAZ GÉNOVA + PARTIDOS CONGRESO OPINIÓN SUCESOS BL

ESTÁ PASANDO | El órdago soberanista catalán | La imputación de la Infanta | Baltasar Garzón

OPERACIÓN RETORNO

40 muertos en carretera en Semana Santa

- Los principales atascos de la jornada se concentran en la zona centro
- Consulta el estado de las carreteras

EL PAÍS | Madrid | 9 ABR 2012 - 09:47 CET 52

Por ejemplo: Cuando leemos el titular qué duda cabe que todos pensamos que 40 muertos son muchos muertos sean por accidente de tráfico o por otra causa. La argucia está bien pensada para llamar la *atención* del lector, pero informativamente hablando esta presentación de los hechos utilizando números sin compararlos con otros números se merece *"un suspenso"*. Los datos estadísticos no "hablan por sí mismos". Un dato siempre hay que relacionarlo con otros datos para comprender la variabilidad que ha experimentado el caso que estamos analizando. Si la noticia se hubiera acompañado con las estadísticas de muertes por accidente de tráfico de los últimos años en periodos vacacionales de cuatro días, rápidamente el lector se daría cuenta de que no es para alarmarse más que otras veces ya que el número de muertos ni ha subido ni ha bajado, es más o menos el mismo que en cualquier otro puente similar en días. O sea, este "impactante" titular apoyado en datos numéricos, en realidad *ni siquiera es noticia*…

Florence Nightingale (1820- 1910)

Nació el 12 de mayo de 1820, en su honor, **día internacional de la enfermería**, en Florencia, cuando sus padres aún estaban de viaje de novios, de ahí su nombre, Florence.

Su familia pertenecía a la clase alta inglesa, por lo que recibió una esmerada formación. Se esperaba de ella que hiciera un buen matrimonio, pero no quiso, quería ser enfermera. La profesión de enfermera no estaba bien vista pues entonces se las consideraba meras limpiadoras.

Con la oposición de su familia logró formarse como enfermera con conocimientos en medicina.

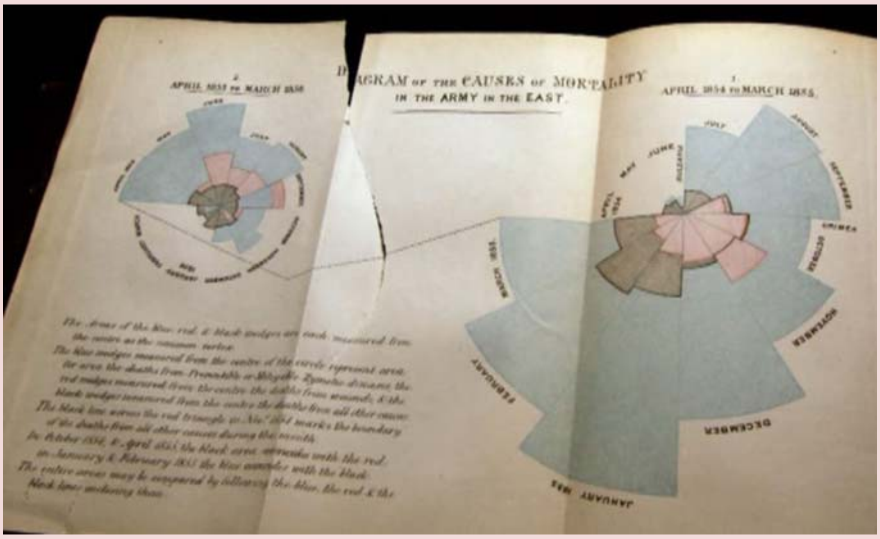
Su contribución más famosa fue en la Guerra de Crimea donde se trasladó con un grupo de 38 enfermeras en noviembre de 1854. Se encontraron con que los soldados heridos recibían tratamientos totalmente inadecuados por parte del sobrecargado equipo médico, mientras que la oficialidad era indiferente a esta situación. La guerra, que se estaba ganando militarmente, se perdía por el

Al hacer su informe con **diagramas estadísticos** logró que descendiera la mortalidad, en Crimea y en otros campamentos militares.

Desde entonces la Estadística se utiliza en estudios sociales. Simplemente ordenar los datos adecuadamente proporciona gran información.

Fue una heroína. Fue una heroína. Se han hecho películas con su vida, se han escrito libros, se han publicado sellos en gran número

Diagrama de la Rosa o del área polar



Todo lo anotaba. Los datos de mortalidad a su vuelta a Inglaterra, los representó en este diagrama y otros parecidos.
Cada mes está indicado por un sector.
El área del sector es proporcional al número de fallecidos.
El color informa sobre la causa de la muerte: azul, muerte por enfermedades prevenibles, rosa: muerte por heridas, oscuro, otras causas.

COMBINATORIA

Resumen

Saber contar es algo importante en Matemáticas. Ya Arquímedes en su libro "*Arenario*" se preguntaba cómo contar el número de granos de arena que había en la Tierra.

En este capítulo vamos a aprender técnicas que nos permitan contar. Vamos a aprender a reconocer las permutaciones, las variaciones y las combinaciones; y a utilizar los números combinatorios en distintas situaciones, como para desarrollar un binomio elevado a una potencia.

Estas técnicas de contar las utilizaremos en otras partes de las Matemáticas como en *Probabilidad* para contar el número de *casos posibles* o el número de *casos favorables*.

En el año 1494 aparece la primera obra impresa que tiene cuestiones sobre Combinatoria. Es "*Summa*" escrita por Luca Pacioli. (¿Te acuerdas del Número de Oro?). Uno de los problemas que plantea es el de calcular el número de formas distintas en que *n* personas pueden sentarse en una mesa redonda. Problema que ya hemos resuelto en el apartado 4.2.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro "*Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*", uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?

A				
				B

Un gato se encuentra en A y un ratón en B. El gato avanza de centro de casilla en centro de casilla moviéndose hacia la derecha o hacia abajo, nunca retrocede. ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer el gato para cazar al ratón?

"Por esta razón de independencia, el amor al estudio es de todas las pasiones la que más contribuye a nuestra felicidad".

Mme. de Châtelet

AZAR Y PROBABILIDAD

Resumen

Todos los días utilizamos conceptos probabilísticos informalmente: decidimos si llevarnos abrigo o no cuando salimos por la mañana de casa, jugamos a juegos de azar o de estrategia, leemos estadísticas y sondeos o nos preguntamos si hoy lloverá. Sin embargo nuestra intuición probabilística no está muy desarrollada. En este capítulo introducimos algunas reglas probabilísticas formales y mostramos como se puede utilizar la combinatoria o los diagramas de árbol para calcular probabilidades. En realidad, el único secreto consiste en ser capaces de contar bien. Con estos conocimientos no dejaremos que otros manipulen estadísticas. El conocimiento nos dará la clave para tomar decisiones propias.

También mostraremos algunos ejemplos que pueden parecer contrarios a nuestra intuición. Hay hechos que, haciendo las cuentas, resultan mucho más probables de lo que nos parece a simple vista. Conocerlos nos ayudará a distinguir otros casos similares.

La Teoría de la Probabilidad tuvo sus inicios muy ligados a los juegos de azar, y es sorprendente que con ese inicio haya resultado de tanta utilidad en la Ciencia. Se preguntaban qué es más probable al tirar dos dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10. Analizando juegos como éste fue avanzando la Ciencia.

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Pascal y Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1655) mantuvieron una interesante correspondencia durante el año 1654 que se podrían considerar el inicio de la Teoría de la Probabilidad a pesar de tratarse de problemas de juegos y apuestas. Son problemas propuestos por el Caballero de la Mérè que no era matemático.

Uno es éste:

Un jugador apuesta una bolsa de monedas a que saca al menos un 6 en 8 lanzamientos de un dado. Ha tirado ya el dado 3 veces sin sacar ningún 6, y decide dejar el juego, ¿qué parte de la bolsa le correspondería?

Tú sabes resolverlo. Haz un diagrama en árbol, y calcula en primer lugar la probabilidad que tiene el jugador de ganar y la de que tiene de perder en un principio.

Cada tirada es un suceso independiente (no depende de lo que se haya obtenido en las anteriores, así que según Fermat si el jugador renuncia a una jugada tiene derecho a 1/6 de la bolsa.

Si renuncia a 2 lanzamientos entonces debe ser indemnizado con 1/6 + 5/36.

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tú ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 < 0{,}5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.