Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 4

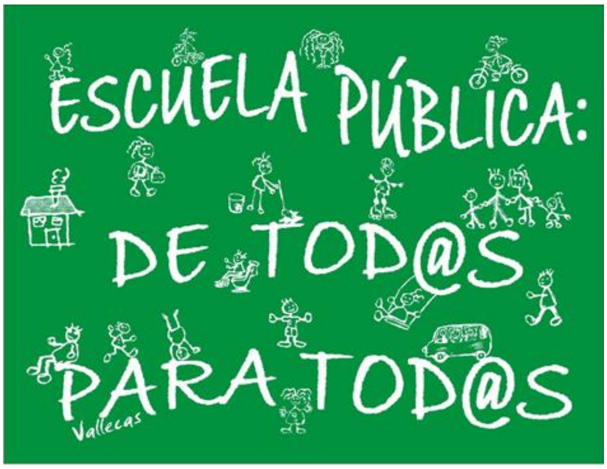
Ecuaciones y sistemas

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

9- "Álgebra" del libro MATEMÁTICAS 2º de ESO (Autora: Raquel Caro)

5- "Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales" de 3ºA de ESO (Autora: Raquel Hernández)



ÍNDICE

1. IGUALDADES: IDENTIDADES Y ECUACIONES

Una **igualdad** es una expresión matemática en la que aparece el signo igual (=).

Hay tres tipos de igualdades:

Identidad numérica es una igualdad cierta entre números como 3 + 4 + 2 = 7 + 2

Identidad algebraica es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que demos a las letras.

- ***Ejemplos:*** $3x^2 - x = x(3x-1)$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ecuación es una igualdad algebraica que solamente se verifica para algunos valores determinados de las letras que en ella intervienen y que se llaman **incógnitas**.

- ***Ejemplo:*** $x^2 - 9 = 0$ es una ecuación que sólo es cierta para $x = -3$ y para $x = 3$;
- ***Ejemplo:*** $x + y = 10$ es una ecuación con dos incógnitas que se verifica para infinitas parejas de valores de x y de y, como por ejemplo: ($x = 1$, $y = 9$); ($x = 2$, $y = 8$); ($x = -1$, $y = 11$)...;

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones algebraicas) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Las **soluciones** o **raíces de una ecuación** son los valores que sustituyendo a las letras en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es hallar todas las soluciones numéricas de la misma.

Comprobar una solución consiste en sustituir en la ecuación las incógnitas por los valores obtenidos y ver si la igualdad resultante es cierta, es decir, si el valor numérico de los dos miembros es el mismo.

Hay ecuaciones tan sencillas que podemos resolverlas “a ojo” o tanteando.

Ejemplo → La ecuación $x + 4 = 9$ tiene como solución evidente $x = 5$.

Ejemplo → La ecuación $2x = 14$ tiene como solución evidente $x = 7$.

Ejemplo → La ecuación $2^x = 8$ tiene como solución $x = 3$.

Para resolver ecuaciones más complejas aplicaremos lo estudiado en el tema anterior para simplificar expresiones algebraicas y veremos técnicas para resolver algunos tipos concretos de ecuaciones.

1.2. Ecuaciones equivalentes. Criterios de equivalencia de ecuaciones

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones, es decir, dos ecuaciones son equivalentes si toda solución de la primera lo es de la segunda y recíprocamente. Para expresar que dos ecuaciones son equivalente usamos el símbolo $\Leftrightarrow$

Ejemplo → $3x-7=11 \Leftrightarrow 3x=18$ puesto que la solución de las dos ecuaciones es $x = 6$.

Ejemplo → $3x+\frac{x}{2}=14 \Leftrightarrow 7x=28$ puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 4$.

En el proceso de resolver ecuaciones se pasa de una ecuación a otra que sea equivalente y más sencilla. Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades que nos dicen qué tipo de transformaciones podemos hacer con una ecuación para pasar a otra equivalente.

Criterios de equivalencia de ecuaciones:

. Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente: $A=B \Leftrightarrow A+S=B+S$

. Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad distinta de cero, se obtiene una ecuación equivalente: $A=B \Leftrightarrow mA=mB \quad (m\neq 0)$

Estas dos propiedades son el fundamento de las transformaciones que hacemos con una ecuación para pasar a otra equivalente más sencilla y que llamamos *transposición de términos* de un miembro de la ecuación a otro.

Ejemplo de uso de la propiedad de la suma o resta para resolver una ecuación:

- Para resolver la ecuación $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$, sumamos $-\frac{2}{3}$ (o restamos $\frac{2}{3}$, que es lo mismo) a los dos miembros para **despejar la incógnita** (conseguir que x esté sola en un miembro) y haciendo las operaciones del segundo miembro obtenemos la solución. En la práctica no suelen escribirse los dos sumandos opuestos, $+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$, ya que su suma es 0, y, usando el lenguaje de transposición de términos, se dice que se aplica la regla de pasar términos (sumandos) de un miembro al otro cambiando su signo.

$$x+\frac{2}{3}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow$$
$$x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

La solución es $x=\frac{1}{6}$

Ejemplos de uso de la propiedad de la multiplicación o división para resolver una ecuación:

- Para resolver la ecuación $3x=4$, dividimos los dos miembros entre 3 para despejar la incógnita. Usando el lenguaje de transposición de términos, no escribimos el primer paso y decimos que pasamos el factor 3, que multiplica en el primer miembro, dividiendo al otro miembro.

$$3x=4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{4}{3}$$

La solución es $x=\frac{4}{3}$

- Para resolver la ecuación $\frac{x}{6}=7$, multiplicamos los dos miembros por 6. Usando el lenguaje de transposición de términos, decimos que pasamos el factor 6, que divide en el primer miembro, multiplicando al otro miembro.

$$\frac{x}{6}=7 \Leftrightarrow \cancel{6}\cdot\frac{x}{\cancel{6}}=6\cdot 7$$

La solución es $x=42$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación $3x + 9 = x – 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.*

1) Pasamos a un miembro los términos con x y al otro los términos numéricos para pasar a la ecuación equivalente $3x – x = – 5 – 9$.

2) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = –14$.

3) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-14}{2}$ de donde la solución es $x = –7$.

4) Podemos comprobar este valor de x en la ecuación inicial: $3 \cdot (–7) + 9 = (–7) – 5$ es una igualdad cierta porque el valor de los dos miembros es -12.

- *Resuelve la ecuación $6 – x = 2x – 3$.*

1) Transponemos términos de un miembro a otro: $6 + 3 = 2x + x$.

2) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

3) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$. La solución de la ecuación es $x = 3$.

4) Comprobamos que, en efecto, es la solución de la ecuación inicial $6 – x = 2x – 3$: $6 – 3 = 3$; $2 \cdot 3 – 3 = 3$.

Actividades propuestas

1. Comprueba que $x = -1$ es solución de la ecuación $\frac{2-x}{5} + \frac{2x-3}{4} = \frac{x-12}{20}$.

2. Verifica si es cierto que $x = 5$ es solución de la ecuación $\frac{5x-1}{6} = \frac{1}{3}(4+x)+1$.

3. Comprueba si alguno de los valores que se dan en cada caso son, o no, solución de la ecuación:

a) Ecuación $\sqrt{5x+9} = 7$; valores: $x = 7$, $x = 8$.

b) Ecuación $2^{x+1} = 64$; valores: $x = 5$, $x = 6$.

c) Ecuación $x^4 - 6 = 10$; valores: $x = -2$, $x = 2$.

4. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución:

a) $x + 3 = 2$ b) $x – 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$.

5. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x – 6 = x + 10$.

a) $x – 10 = 5$ b) $16 – x = 3x – 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $2x – 5 = 4x – 7$ b) $x – 12 = 7x + 6$ c) $x + 9 = 3x – 3$
d) $5x – x + 7 = 2x + 15$ e) $4x + 2 = 14$ f) $3x – 4 = x + 18$
g) $3x – 5 = 2x – 5$ h) $3x – 4 + x = 8$.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación de primer grado** es aquella en la que solo aparecen expresiones algebraicas de grado 1, de forma que después de simplificarlas y aplicar los criterios de equivalencia se transforman en una ecuación equivalente de la forma $ax = b$ (cuya solución es $x = b/a$ si $a \neq 0$)

Veamos con un ejemplo los pasos que conviene dar para resolver una ecuación de primer grado :

	Ecuación: $6-\frac{3(x+5)}{12}=\frac{2(11-x)}{9}+\frac{x+1}{6}$
1º **Quitar paréntesis**, si los hay, y pasar a una ecuación equivalente sin paréntesis	$6-\frac{3x+15}{12}=\frac{22-2x}{9}+\frac{x+1}{6}$
2º **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores. Conviene hacer las multiplicaciones en dos pasos, escribiendo los paréntesis adecuados en el primer paso.	$36\cdot 6-36\cdot\frac{3x+15}{12}=36\cdot\frac{22-2x}{9}+36\cdot\frac{x+1}{6}$ $\Leftrightarrow$ $216-3\cdot(3x+15)=4\cdot(22-2x)+6(x+1)$ $\Leftrightarrow 216-9x-45=88-8x+6x+6$
3º **Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro**, cambiando el signo de los términos que cambien de miembro y después simplificar cada miembro.	$-9x+8x-6x=88+6-216+45$ $\Leftrightarrow\ -7x=-77$
4º **Despejar la incógnita**.	$x=\frac{-77}{-7}=11$ ***Solución:*** x = 11.

Al resolver una ecuación de primero grado, podemos obtener una solución o podemos llegar a una de las siguientes expresiones “especiales”: 0·x = 0 ó 0·x = a. Veamos cómo interpretarlas:

- $0\cdot x=0$ significa que cualquier número es solución, ya que cualquier número multiplicado por cero da cero. Se trata de una identidad. La ecuación tiene infinitas soluciones.
- $0\cdot x=a$, con $a\neq 0$ significa que no hay solución, puesto que no existe ningún número que al multiplicarlo por cero dé un número distinto de cero. La ecuación no tiene solución.

Ejemplo → $3(x-2)+2x=5(x-1)-1 \Leftrightarrow 3x-6+2x=5x-5-1 \Leftrightarrow 5x-5x=-6+6 \Leftrightarrow 0x=0$

Cualquier número real x verifica la ecuación inicial, que es una identidad.

Ejemplo → $3(x-2)+2x=5(x-1)+6 \Leftrightarrow 3x-6+2x=5x-5+6 \Leftrightarrow 5x-5x=1+6 \Leftrightarrow 0x=7$

No existe ningún número real x que verifique la igualdad inicial.

Actividades propuestas

7. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $1-3(2x-1)=16$ b) $5+3(2-x)=3-x$ c) $\frac{1}{7}x-11=13-x$ d) $\frac{3x}{5}-\frac{9}{5}=2x+1$

e) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=3$ f) $x-\frac{4}{5}=\frac{2x}{3}-1$ g) $\frac{1}{4}\left(3x+\frac{5}{2}\right)=2x$ h) $\frac{1}{2}(2x-3)-x=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$

3. ECUACIONES DE 2º GRADO

3.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplos → $3x^2 - 7x + 1 = 0$; $-2x^2 + 5x + -2 = 0$; $x^2 - 9x - 11 = 0$; $-2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0$.

3.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a la que tiene valores distintos de cero para a, b y c.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Actividad resuelta

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Primero debemos saber los valores de a, b y c: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$.

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

Podemos comprobar cada una de las soluciones sustituyendo el valor en la ecuación inicial:

$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$.

3.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo → La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.

Ejemplo → La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas pueden resolverse usando la fórmula general, pero es mejor seguir otros procedimientos más sencillos, dependiendo del tipo:

Si el coeficiente b = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente c = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero. Por tanto, o bien $x = 0$, o bien $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Ejemplo → En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la b.

Para resolverla despejamos x^2: $2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$.

Una vez que llegamos aquí, razonamos que x puede ser cualquiera de las dos raíces cuadradas de 9, la positiva, 3, o la negativa, –3: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3.

Podemos comprobar cada solución: $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$ y $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$.

Ejemplo → En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones:

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$.

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:*

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las soluciones son 4 y –4.

Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$. Las dos posibilidades de que el producto dé 0 son: $x = 0$ y $x + 7 = 0$

Las dos soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = -7$.

Actividades propuestas

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

3.4. Ecuaciones de segundo grado más complejas

En ocasiones será necesario transformar la ecuación inicial en otra equivalente en la forma estándar y a la que podamos aplicar la fórmula para obtener las soluciones, si es completa, o aplicar alguno de los procedimientos indicados para resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas. Para ello tendremos que quitar paréntesis (si los hay), quitar denominadores (si los hay), pasar todos los términos al primer miembro y agrupar términos del mismo grado

Ejemplo → *Resolver la ecuación:*	$\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(x+2)(x-2)}{4} = (x-1)(x+2) + \dfrac{3}{4}$
1º **Quitar paréntesis**, si los hay, y pasar a una ecuación equivalente sin paréntesis	$\dfrac{x^2-2x+1}{2} - \dfrac{x^2-4}{4} = x^2 + x - 2 + \dfrac{3}{4}$
2º **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.	$\Leftrightarrow 2(x^2-2x+1)-(x^2-4) = 4x^2+4x-8+3$ $\Leftrightarrow 2x^2-4x+2-x^2+4 = 4x^2+4x-5$
3º **Pasar todos los términos a un miembro**, cambiando el signo de los términos que cambien de miembro y simplificar los términos del mismo grado.	$-3x^2-8x+11=0 \Leftrightarrow 3x^2+8x-11=0$
4º **Aplicar la fórmula para obtener las soluciones**.	$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64+132}}{6} = \dfrac{-8 \pm 14}{6}$ Dos soluciones $x = 1$ y $x = -11/3$

Actividades propuestas

10. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $(2x-1)^2 = 25$ b) $x^2 - \dfrac{9}{10}x + \dfrac{1}{5} = 0$

c) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x}{3} = x - \dfrac{1}{6}$ d) $\left(3x - \dfrac{1}{2}\right)\left(3x + \dfrac{1}{2}\right) - 2x = 8x^2 - 1$

3.5. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, $\Delta = b^2 - 4ac$

El número de soluciones posibles de una ecuación de 2º grado depende del signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Ejemplos → *a) La ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene como discriminante:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1.

(*Comprobación:* $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

b) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real, $x = 1$.

c) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

11. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

3.6. Descomposición factorial de un polinomio de 2º grado

Para descomponer un polinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ como producto de factores de primer grado, hallamos sus raíces usando la fórmula que nos da las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Como la ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna según que el discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, sea positivo, cero o negativo, hay tres casos posibles en cuanto a la descomposición del polinomio como producto de factores de primer grado:

-Si el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos raíces r_1 y r_2, entonces la descomposición como producto de factores de primer grado es $\boxed{P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$

-Si el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una única raíz r, entonces la descomposición como producto de factores de primer grado es $\boxed{P(x) = a(x - r)^2}$ (en este caso se dice que *r* es una raíz doble).

-Si el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene ninguna raíz real, entonces es **irreducible**, es decir, no se puede descomponer como producto de factores de menor grado.

Ejemplo → *Para descomponer el polinomio* $P(x) = 2x^2 - 7x + 6$,

Aplicamos la fórmula para hallar las raíces:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4}$$

y llegamos a la conclusión de que el polinomio tiene dos raíces: $r_1 = 2$ y $r_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la descomposición del polinomio como producto de factores irreducibles es

$\boxed{P(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)}$. También podemos escribir la descomposición $P(x) = (2x - 3)(x - 2)$

Ejemplo → *Para descomponer el polinomio* $P(x) = x^2 - 12x + 36$,

Aplicamos la fórmula para hallar las raíces:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2}$$

y llegamos a la conclusión de que el polinomio tiene solamente un raíz, $r = 6$. Por lo tanto, la descomposición del polinomio como producto de factores irreducibles es

$$\boxed{P(x) = (x-6)^2}$$

Se dice que 6 es una raíz doble del polinomio porque aparece dos veces en la descomposición.

Ejemplo → *Podemos comprobar que el polinomio* $P(x) = x^2 - 6x + 13$ *no puede descomponerse como producto de factores de menor grado*, viendo que no tiene raíces reales:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

La raíz cuadrada de –16 no es un número real.

Actividades propuestas

12. Escribe la descomposición factorial de los polinomios que no sean irreducibles:

a) $x^2 + x + 4$ **b)** $x^2 - 6x + 9$ **c)** $10x^2 - 3x - 1$ **d)** $2x^2 - 8x + 8$

e) $x^2 - 6x - 7$ **f)** $x^2 - 3x + 5$ **g)** $7x^2 + 5x$ **h)** $2x^2 - 50x$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Concepto de ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad del tipo $ax+by=c$, donde a, b y c son números reales. Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores, uno para cada incógnita, que hacen cierta la igualdad. Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Ejemplo→ $2x+3y=6$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

El par de valores (x = 0 , y = 2) es una solución de la ecuación porque 2·0 + 3·2 = 6

También son soluciones (x = 3, y = 0); (x = –3, y = 4); (x = 1, y = 4/3).Cada solución de una ecuación lineal con dos incógnitas puede interpretarse como un punto del plano dado por sus coordenadas (x, y). Las infinitas soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas son los puntos de una recta, que puede representarse en un sistema de ejes cartesianos.

Para obtener soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra:

Ejemplo→ $2x+3y=6 \quad \Leftrightarrow \quad 3y=6-2x \quad \Leftrightarrow y=\dfrac{6-2x}{3}$

Dando valores a x obtenemos la tabla de valores, en la que cada columna es una solución de la ecuación (un punto de la recta que representa dicha ecuación).

x	0	3	-3	1	-6
y	2	0	4	4/3	6

4.2. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Donde a, b, a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplos→ Son sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 2x+5y=7 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 5x+2y=7 \\ x-y=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x+2y=3 \\ 7x-3y=4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 4y+2=3x \\ 7x-3=5y \end{cases}$$

Contraejemplos→ **No** es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy+5y=7 \\ 4x-8xy=9 \end{cases}$ porque tiene términos en xy.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2+5y=7 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

4.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano y una solución del sistema, si existe, es punto que pertenece a ambas rectas.

Según la posición relativa de las dos rectas que forman el sistema, o lo que es equivalente, según el número de soluciones, un sistema puede ser:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución porque las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones porque las rectas son **COINCIDENTES** (son la misma recta)**.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución porque las rectas son **PARALELAS.**

Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

4.4. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular el valor de la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo → Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos x de la segunda ecuación: $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$ y lo sustituimos en la primera:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x: $x=3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot 1=1$. *Solución:* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

13. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

4.5. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular el valor de la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo→ Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x: $x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$ *Solución:* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

4.6. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando dos ecuaciones equivalentes a las del sistema. Para ello, si es necesario, se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de x o y sean números opuestos.

Ejemplo→ Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por –2 para que los coeficientes de la x sean opuestos y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x:

$2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$ *Solución:* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

4.7. Sistemas sin solución (incompatibles)

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias, por lo que es imposible que las dos igualdades sean ciertas para los mismos valores de las incógnitas. Son sistemas incompatibles.

Ejemplo→ En el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$, el primer miembro de la segunda ecuación, $4x + 6y$ es el doble de $2x + 3y$, el primer miembro de la otra ecuación, por lo que debería ser igual al doble de 7 y no a 9.

Veamos lo que ocurre si intentamos resolver un sistema como éste por cualquiera de los métodos explicados en los apartados anteriores, por ejemplo, por reducción:

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por –2 : $\begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$

Y sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro: $0x + 0y = -5$

Como al multiplicar cualquier número x ó y por 0 da cero, la ecuación obtenida no tiene ninguna solución, es una igualdad falsa sin incógnitas, $0 = -5$.

Cuando en el proceso de resolución de un sistema llegamos a una igualdad del tipo cero igual a un número distinto de cero, es porque el sistema es incompatible, no tiene solución.

4.8. Sistemas con infinitas soluciones (indeterminados)

Hay sistemas cuyas dos ecuaciones dicen lo mismo porque son equivalentes. Se llaman sistemas compatibles indeterminados porque tienen infinitas soluciones (las soluciones de cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes).

Ejemplo→ En el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$, tanto el primer miembro de la segunda ecuación, $4x$ + 6, como el segundo miembro, 14, son el doble de los respectivos miembros de la otra ecuación, $2x + 3y$, 7. Las dos ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones, por lo que las soluciones del sistema son las de cualquiera de las ecuaciones.

Veamos lo que ocurre si intentamos resolver un sistema como éste por cualquiera de los métodos explicados en los apartados anteriores, por ejemplo, por reducción:

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por –2 : $\begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$

Y sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro: $0x + 0y = 0$

Como al multiplicar cualquier número x o y por 0 da cero, la ecuación obtenida se verifica para cualesquiera valores de las incógnitas, es una identidad, $0 = 0$, por lo que el sistema está formado en realidad por una sola ecuación:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x + 3y = 7$$

Para expresar las infinitas soluciones de esta ecuación, se elige una de las incógnitas como parámetro (una forma de decir que esta incógnita puede tomar cualquier valor real λ) y se despeja la otra incógnita en la ecuación:

$$y = \lambda \Rightarrow \quad 2x + 3\lambda = 7 \;\Rightarrow\; 2x = 7 - 3\lambda \;\Rightarrow x = \frac{7 - 3\lambda}{2}$$ Soluciones: $$\begin{cases} x = \dfrac{7 - 3\lambda}{2} \\ y = \lambda \; (\,cualquier\ número\,) \end{cases}$$

Cada vez que en la expresión anterior demos un valor concreto al parámetro λ, obtenemos una solución concreta de las infinitas que tiene el sistema, por ejemplo, para λ = 1 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, para λ = –1 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$, para λ = 0 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 7/2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Cuando en el proceso de resolución de un sistema llegamos a una igualdad del tipo cero igual a cero, es porque el sistema es compatible indeterminado. Para expresar las infinitas soluciones de cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes del sistema se elige una de las incógnitas como parámetro y se despeja la otra incógnita.

Actividades propuestas

16. Clasifica cada sistema como “compatible determinado”, “compatible indeterminado” o “incompatible” y resuelve los sistemas que sean compatibles:

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 4 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Para resolver problemas por medio de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema.

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate: ¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento aprendido.

Quita los paréntesis: $x + x + 1 = 9$.

Pon en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los términos numéricos: $x + x = 9 – 1$.

Opera: $2x = 8$

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

- *En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?*

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 – x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado: $x + 2(34 – x) = 54$.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia. Resuelve la ecuación.

Quita paréntesis: $x + 68 – 2x = 54$.

Deja en el primer miembro los términos con x y pasa al segundo miembro los términos numéricos:

$x – 2x = 54 – 68$.

Opera: $– x = – 14$

Para despejar la x divide los dos miembros por $–1$: $x = – 14/– 1 = 14$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay $34 – 14 = 20$ habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues $14 + 2·20 = 54$.

- *Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm. ¿Qué longitud debe tener cada lado?*

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x – 5$

Paso 2: Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x – 5) = 55$

Paso 3: Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x – 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor en cm.

Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x – 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, $10 + 20 + 25 = 55$, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?

1.- Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando. 2.-Número buscado = x.

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico: $5x + 6 = x^2$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- ***Comprobación***: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

17. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata?

18. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

19. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

20. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6°.

21. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

22. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

23. Un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un 7 lápices y 1 bolígrafo y he pagado en total 5,50 €, ¿cuál es el precio de bolígrafo?

24. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

25. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

26. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

27. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

28. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

5.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

- *Se quieren mezclar dos tipos de café, uno de calidad superior que cuesta 13 €/kg, y otro de calidad inferior que cuesta 8 €/kg, para conseguir 20 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de café son necesarios?*

1.- Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son los kilogramos de cada tipo de café que se toman para hacer la mezcla

2.- Kilogramos de café de 13 €/kg = x Kilogramos de café de 8 €/kg = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La mezcla de las dos cantidades de café debe pesar 20 kg: $x + y = 20$

El coste total de la mezcla debe ser 200 € (20 kg · 10 €/kg) : $13x + 8y = 200$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 13x + 8y = 200 \end{cases} \xrightarrow{\text{despejamos x}} y = 20 - x$$

$$\xrightarrow{\text{sustituimos}} 13x + 8(20 - x) = 200 \Leftrightarrow 13x + 160 - 8x = 200 \Leftrightarrow 5x = 40 \Leftrightarrow x = 8$$

$$\xrightarrow{\text{hallamos el valor de y}} y = 20 - 8 = 12$$

Solución: Se necesitan 8 kg de café superior y 12 kg de café inferior.

5.- ***Comprobación***: En efecto, 8 kg de café de 13 €/kg cuestan 104 €, y 12 kg de café de 8 €/kg cuestan 96 €, con lo que la cantidad total de mezcla es 8 + 12 = 20 kg, el coste total de la mezcla es:

104 + 96 = 200 € y el coste por kilogramo es 200 € / 20 kg = 10 €/kg

Actividades propuestas

29. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

30. Eduardo ha pagado 6,60€ por tres kilos de naranjas y dos de manzanas. En la misma frutería, Ana ha pagado 3,90€ por dos kilos de naranjas y uno de manzanas. ¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

31. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\dfrac{x^2-1}{2} - \dfrac{x+1}{3} = 10$ b) $\dfrac{x^2-3}{3} + \dfrac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\dfrac{x^2+1}{5} + \dfrac{2x+6}{10} = 2$

d) $\dfrac{1-x^2}{2} + \dfrac{3x-1}{3} = \dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{2x^2-8}{5} - \dfrac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\dfrac{2x+3x^2}{5} - \dfrac{3x-6}{10} = \dfrac{3}{5}$

3. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

4. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas por el método que prefieras:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

8. Resuelve los siguientes sistemas por el método que te parezca más adecuado

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

10. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

11. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

12. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

13. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13. años. ¿Qué edad tiene Mario?

14. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

15. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

16. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

17. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

18. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

19. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

20. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

21. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

22. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

23. Un tren sale de una estación a 90 km/h. Media hora más tarde sale otro tren más rápido en la misma dirección a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar al primer tren?

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 – 1) + 2(x^2 – 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = –3$ c) $x = 1$ y $x = –2/3$ d) $x = 2$ y $x = –6/5$.

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x – 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = –13$ b) $x = 13$ y $x = –12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = –12$ y $x = –11$.

3. Las soluciones de la ecuación $3x^2 –14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$.

4. Las soluciones de la ecuación $(x – 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$.

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) – x(2 – x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$.

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 8x - 4y = 28 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan.

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución.

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = –1$ d) $x = 5$ e $y = 1$.

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos.

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 16 años b) 17 años c) 20 años d) 18 años

Soluciones: 1d 2b 3d 4a 5c 6c 7d 8c 9a 10c

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1) Para x= -1 los dos miembros de la ecuación valen lo mismo, -13/20
(2) Sí, x=5 es solución porque el valor de las expresiones algebraicas de ambos miembros para x=5 es el mismo, 4
(3a) 7 no es solución; 8 sí es solución (3b) 5 sí es solución, 6 no es solución (3c) -2 y 2 son soluciones
(4a) x = -1 (4b) x = 5 (4c) x = 5 (4d) x = 2 (5) Son equivalentes las ecuaciones c, d y e
(6a) x = 1; (6b) x = 1; y = 1 (6c) x = 2; y = -1; (6d) x=4 (6e) x=3 (6f) x=11 (6g) x=0 (6h) x=3
(7a) x = -2 (7b) x= 4 (7c) x=21 (7d) x= -2 (7e) x=4 (7f) x= -3/5 (7g) x= ½ (7h) x= -3
(8a) 2 y 5 son las soluciones (8b) -4 y 3 son las soluciones (8c) 1 y 2 son las soluciones (8d) -2 y 6 son las soluciones
(9a) -6 y 0 son las soluciones (9b) -3 y 3 son las soluciones (9c) -5 y 5 son las soluciones
(9d) -1/2 y 0 son las soluciones (9e) -3/2 y 3/2 son las soluciones (9f) 0 y 2 son las soluciones
(10a) -2 y 3 son las soluciones (10b) 2/5 y ½ son las soluciones (10c) -1 y -1/3 (10d) ½ y 3/2 son las soluciones
(11a) Ninguna solución (11b) Una solución (11c) Dos soluciones (11d) Ninguna solución
(12a) irreducible (12b) $(x-3)^2$ (12c) $10\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ (12d) $2(x-2)^2$
(12e) (x+1)(x-7) (12f) irreducible (12g) $7x\left(x+\frac{5}{7}\right)$ (12h) 2x(x-25)
(13a) x= -1, y= -1 (13b) x= 2 , y= -1 (13c) x= 2 , y= 2
(14a) x= 1 , y= -1 (14b) x= -2, y= 3 (14c) x=1 ,y=1 (15a) x= 2 , y= -2 (15b) x= 19/7 , y= -27/7 (15c) x= 3 , y= -2
(16a) Incompatible (16b) Compatible determinado: x= 3, y= 2 (16c) Compatible indeterminado: x= λ , y= 5 – λ
(17) 20, 21 y 22 (18) 5€ (19) 17,6 cm (20) 24° (21) 3,5 horas
(22) 12 monedas de 10 céntimos y 4 monedas de 20 céntimos. (23) 1,65 € (24) 6 crías (25) 4800 litros
(26) Dos soluciones: el número -5 y el número 8 (27) Dos soluciones: los números 10, 11, 12 y los números -12, -11 y -10
(28) Dos soluciones: el número 5 y el número -17/3 (29) 49,5 y 73,5 (30) 1,50 € (31) Alberto tiene 24 años y María 8 años

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1a) Dos soluciones: x=-4 y x=-2 (1b) Dos soluciones: x= -2 y x=3 (1c) Dos soluciones: x=0 y x=10
(1d) Dos soluciones: x=-1/2 y x=1 (1e) Dos soluciones: x = -10 y x =1 (1f) Dos soluciones: x = -1/2 y x =1
(1g) Dos soluciones: x = -1 y x =0 (1h) Dos soluciones: x = -14 y x =12 (1i) Dos soluciones: x = 1 y x =7/10
(2a) Dos soluciones: x = -13/3 y x =5 (2b) Dos soluciones: x = - 27/10 y x =3 (2c) Dos soluciones: x = -3 y x =2
(2d) Dos soluciones: x = 0 y x =2 (2e) Dos soluciones: x = 1/4 y x =3 (2f) Dos soluciones: x = -1/6 y x =0
(3a) Dos soluciones: x = 2 y x =6 (3b) Dos soluciones: x = -1 y x =3 (3c) Dos soluciones: x = 3 y x =9
(3d) Dos soluciones: x = -4 y x =1 (3e) Dos soluciones: x = -7 y x =2 (3f) Dos soluciones: x = -6 y x =4
(4a) Dos soluciones: x = -4 y x =1 (4b) Dos soluciones: x = -2 y x =2/7 (4c) No tiene solución
(4d)No tiene solución (4e) Dos soluciones: $x=\frac{2-\sqrt{76}}{12}$ y $x=\frac{2+\sqrt{76}}{12}$ (4f) Dos soluciones: $x=\frac{-8-\sqrt{184}}{10}$ y $x=\frac{-8+\sqrt{184}}{10}$
(5a) x = 3 , y = 2 (5b) x = 1 , y = 1 (5c) x = 2 , y = -1
(6a) x = - 2 , y = 3 (6b) x = 1 , y = 4 (6c) x = 1 , y = 1
(7a) x = 2 , y = 1 (7b) x = 5 , y = -2 (7c) x = 1 , y = 1
(8a) x = 4 , y = 3 (8b) x = 1 , y = 0 (8c) x = 2 , y = 1
(9a) x = 1 , y = 4 (9b) x = -1 , y = 2 (9c) x = 1 , y = 1
(10) 8=4·2 (11) Dos soluciones: 5 ó -17/3 (12) El asno lleva 5 sacos y el mulo 7 (13) Dos soluciones : 8 ó -5
(14) Dos soluciones: 10, 11, 12 ó -12, -11, -10 (15) 21 años (16) 12 y -7
(17) En cada bandeja debe poner 0,5 kg de mazapanes y 0,5 kg de polvorones. Necesitará 12,5 kg de cada producto.
(18) 15 y 5 (19) Pedro tiene 30 años y Raquel 15 años. (20) El bocadillo cuesta 2€ y el refresco 1€
(21) 17 vacas y 33 pollos (22) 54 m de largo y 32 m de ancho. (23) 13 monedas de 2€ y 27 monedas de 1€
(24) 24 chicos y 8 chicas (25) 2,25 horas