Módulo de Matemáticas Académicas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 1

Números racionales y números irracionales

Los números reales

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en la opción de **enseñanzas académicas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

1- Números racionales del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autor: Paco Moya)

2- Potencias y raíces del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

1- Números reales del libro MATEMÁTICAS 4ºB de ESO (Autor: Paco Moya)

2- Potencias y raíces del libro MATEMÁTICAS 4ºB de ESO (Autor: José Antonio Encabo)

ÍNDICE

1. NÚMEROS RACIONALES

1.1. Definición

Los **números racionales** son todos aquellos números que pueden expresarse mediante una fracción de números enteros.

Es decir, el número r es **racional** si $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, con a, b números enteros y $\mathrm{b} \neq 0$.

El nombre "racional" viene de "**razón**", que en matemáticas significa división o cociente.

El conjunto de todos los números racionales se representa por $\mathbf{Q}$.

Un número racional tiene infinitas representaciones en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ son infinitas fracciones que representan al mismo número racional, se llaman "**equivalentes**" puesto que tienen igual valor numérico. Si hacemos las divisiones en el ejemplo todas valen $0{,}333\ldots$ que es su expresión decimal.

Los números "*enteros*" son racionales puesto que se pueden expresar mediante una fracción, por ejemplo $-2 = \frac{-8}{4}$, es decir $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (el conjunto $\mathbf{Z}$ está incluido en el conjunto $\mathbf{Q}$)

Todo número racional tiene un representante que es su **fracción irreducible**, aquella que tiene los números más pequeños posibles en el numerador y el denominador. A esta fracción se llega a partir de cualquier otra dividiendo el numerador y denominador por el mismo número. Si se quiere hacer en un solo paso se dividirá entre el Máximo Común Divisor (M.C.D.) del numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ donde hemos dividido primero entre 10 y después entre 2, pero podíamos haber dividido entre 20 directamente ya que 20 es el MCD(60, 80). Por tanto $3/4$ es la fracción irreducible y por ello la que representa al número racional que tiene otras muchas formas de fracción como $60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36$ ... y por expresión decimal $0{,}75$

1.2. Los tres significados de una fracción

1. **Una fracción es una parte de la unidad**. Un todo se toma como unidad que se divide en partes iguales. La fracción expresa cuántas de esas partes iguales se toman.

Ejemplo→ $\frac{2}{5}$ de un segmento indica un trozo del segmento obtenido dividiéndolo en 5 partes iguales y tomando 2 de esas partes.

2. **Una fracción es el cociente indicado de dos números**. Para transformar la fracción en un número decimal, se divide el numerador entre el denominador

Ejemplo→ $\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4$

Una fracción es un operador que transforma una cantidad dada. Para calcular la fracción de un número, se divide el número por el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador. También se puede hacer multiplicando primero el número por el numerador y dividiendo el resultado por el denominador. Otra forma equivalente de obtener la fracción de un número es transformar la fracción en número decimal y multiplicar el resultado por el número.

Ejemplo→ $\frac{2}{5}$ de 10 mm son 4 mm porque 10:5·2 = 2·2 = 4, o también 10·2:5 = 20:5 = 4, o también 2:5·10 = 0,4·10 = 4.

1.3. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones (todas las condiciones son equivalentes):

- Al hacer la división obtenemos la misma **expresión decimal**.

Ejemplo: 4 : 5 = 8 : 10 = 0,8 luego $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$ son equivalentes y puede escribirse $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

- Los **productos cruzados son iguales**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$

Es fácil de demostrar, multiplicamos a ambos lados del igual por b y por d: $\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d$, como b : b = 1 y d : d = 1 nos queda a·d = c·b.

Ejemplo: $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ puesto que 12 · 4 = 8 · 6 = 48.

- **Al simplificar las fracciones se llega a la misma fracción irreducible.**

Si A = B y C = B a la fuerza A = C

Ejemplo: $\frac{80}{60}=\frac{4}{3}$; $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$; luego $\frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

- **Se puede pasar de una fracción a otra multiplicando (o dividiendo) el numerador y el denominador por un mismo número.**

Ejemplo: $\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ pues basta multiplicar el numerador y el denominador de la primera por 4 para obtener la segunda. En general: $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}}$

Actividades propuestas 1

1. Coloca los numeradores y denominadores que faltan para que las fracciones de cada apartado sean equivalentes y comprueba la igualdad de los productos cruzados:

a) $\frac{24}{30}=\frac{\ }{5}$ b) $\frac{40}{56}=\frac{\ }{7}$ c) $\frac{48}{60}=\frac{\ }{50}$ d) $\frac{15}{50}=\frac{3}{\ }$ e) $\frac{35}{49}=\frac{5}{\ }$

2. Simplifica las siguientes fracciones hasta obtener la fracción irreducible equivalente:

a) $\frac{6}{24}=$ b) $\frac{8}{28}=$ c) $\frac{560}{3360}=$

1.4. Reducción a común denominador

Con objeto de comparar dos o más fracciones (ver cuál es mayor) y también para poder sumarlas o restarlas es importante obtener fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplo : Queremos saber si 5/6 es mayor que 6/7 sin hacer la división. Buscamos un múltiplo común de 6 y de 7 (si es el mínimo común múltiplo mejor, pero no es imprescindible), 42 es múltiplo de 6 y de 7. Lo escribimos como nuevo denominador para las 2 fracciones: $\frac{5}{6}=\frac{}{42}$; $\frac{6}{7}=\frac{}{42}$. Ahora calculamos los nuevos numeradores: como el 6 lo hemos multiplicado por 7 para llegar a 42 pues el 5 lo multiplicamos también por 7 para obtener una fracción equivalente: $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$; en la segunda fracción hemos multiplicado el denominador por 6 y tenemos que hacer lo mismo con el numerador: $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}$.

Ahora está claro cuál de las dos fracciones es mayor: $\frac{6}{7}>\frac{5}{6}$

Para obtener fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con el **mismo denominador** buscamos un múltiplo común de b y d (el mejor es el m.c.m.), m, y multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por el cociente de la división de m entre el denominador correspondiente:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m} \text{ y } \frac{c}{d}=\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$$

1.5. Ordenación de fracciones

Para ordenar una serie de fracciones existen varios procedimientos:

i) Hacer las divisiones y comparar las expresiones decimales.

Este procedimiento es el más fácil pero no el más rápido (salvo que tengas calculadora).

Ejemplo: Nos piden que ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Hacemos las divisiones que dan respectivamente: 1,0526…; 1,05; –1,0526…; –1,05; 0,9666… y 0,9655… Mirando los números decimales sabemos que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recuerda→ **los números negativos son siempre menores que los positivos y además entre números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto (–4 < –3).**

Tienes que tener claro que **si** a **y** b **son positivos y** $a>b\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

ii) Reducir a común denominador y comparar los numeradores:

Ejemplo: Para ordenar de mayor a menor las fracciones: $\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$

Primero buscamos un número que sea múltiplo de 6, de 8, de 4 y de 3 (si es el mínimo común múltiplo mejor que mejor). Encontramos el 24 que es múltiplo de todos ellos. Lo ponemos como nuevo denominador de todas las fracciones y calculamos los nuevos numeradores para que las fracciones sean equivalentes:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4}=\frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3}=\frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1}=\frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24}=\frac{-48}{24}$$

24:6 = 4 luego el 6 hay que multiplicarlo por 4 para llegar a 24, lo mismo hacemos con el 5, 5·4 = 20 es el nuevo numerador. Así con las demás.

Después comparamos los numeradores y como 21 > 20 > -48 > –54 > –56, el orden de las fracciones es: $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>-2>\frac{-9}{4}>\frac{-7}{3}$

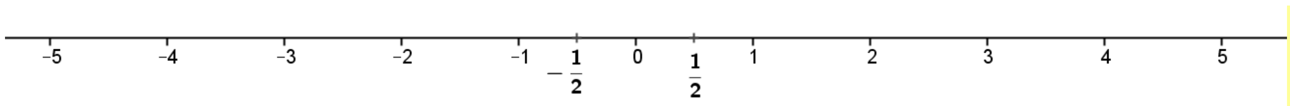
Actividades propuestas 2

1. Reduce las fracciones de cada apartado a un común denominador y ordénalas después de menor a mayor separando una de otra con el símbolo < :

   a) $\frac{4}{5},\frac{1}{3},\frac{7}{15}$ b) $\frac{5}{6},\frac{3}{4},\frac{7}{12}$ c) $\frac{5}{9},\frac{7}{18},\frac{7}{12}$

2. Calcula el valor decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba la ordenación.

1.6. Representación en la recta numérica



Ésta es la recta numérica, en ella todo número real tiene un lugar exacto.

Recuerda que

- Para dibujarla sólo se pueden tomar dos decisiones: donde colocamos el 0 y donde colocamos el 1, es decir, dónde está el origen y cuál es el tamaño de la unidad.
- Las unidades han de ser siempre del mismo tamaño.
- Los números positivos van a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda.
- El 0 no es ni positivo ni negativo.
- La recta numérica no tiene ni principio ni fin, sólo podemos dibujar una "pequeña" parte.
- Dos números ***a***, ***b*** siempre se pueden comparar y se cumple que ***a* < *b* si *a* está a la izquierda de *b*** y viceversa (cuanto más a la izquierda esté un número menor es)

Ejemplos: 1 < 3; –1 < 1; –4 < –2; –1 < –1/2

Todo número racional tiene una posición predeterminada en la recta numérica. Las infinitas fracciones equivalentes que forman un número racional están representadas en el mismo punto de la recta. Así que 1/2 y 2/4, que son el mismo número están en el mismo punto.

Veamos como representar las fracciones de forma exacta según el tipo de fracción.

Fracción propia, fracción impropia y forma mixta

Fracción propia: Se dice de una fracción ***a/b*** donde ***a* < *b*,** es decir, el numerador es menor que el denominador. **La expresión decimal de una fracción propia es, en valor absoluto, menor que 1**.

Ejemplos: 4/5 y 99/100 son fracciones propias, 4/5 = 4:5 =0,8 y 99/100=99:100=0,99

Fracción impropia: Se dice de una fracción a/b donde a > b, numerador mayor que el denominador. La expresión decimal de una fracción propia es, en valor absoluto, un número mayor que 1

Ejemplos: 15/4 y -37/27 son fracciones impropias, 15/4 = 3,75 y -37/27 = -1,37037037…

Número mixto: Las fracciones impropias pueden escribirse como la suma de un número entero y de una fracción propia.

Ejemplo: $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, *ésta última es la forma mixta.*

En España no es frecuente, pero en el mundo anglosajón suele escribirse $1\frac{4}{5}$ *que significa lo mismo.*

Ejemplo de paso de una fracción impropia a número mixto: $\frac{77}{6}$ es impropia pues 77 > 6, para escribirla en forma mixta hacemos la división entera 77 : 6, es decir, sin decimales, ya que lo que nos interesa es el cociente, que es 12, y el resto, que es 5. Por lo tanto $\frac{77}{6}=12+\frac{5}{6}$ **El cociente es la parte entera, el resto es el numerador de la fracción propia y el divisor es el denominador.**

Es importante que lo intentes hacer de cabeza (cuando sea razonable), por ejemplo, para pasar a forma mixta la fracción impropia 47/6, buscamos el múltiplo de 6 más cercano a 47 por abajo, éste es 7 · 6 = 42, por tanto: 47/6 = 7 + 5/6 puesto que de 42 a 47 van 5. Piénsalo, si nos comemos 47/6 de pizza, nos hemos comido 7 pizzas enteras y además 5/6 de pizza.

Si la fracción es negativa procedemos de la siguiente forma: $\frac{-19}{5}=-\left(3+\frac{4}{5}\right)=-3-\frac{4}{5}$.

a) Representación de una fracción propia:

Ejemplo: *Para representar la fracción 5/6, como el valor está entre 0 y 1, dividimos la primera unidad en 6 partes iguales y tomamos 5.*

En la figura se indica cómo hacerlo de forma exacta usando el ***Teorema de Tales***. Trazamos una recta oblicua cualquiera que pase por 0 y sobre ella marcamos con el compás 6 puntos a igual distancia entre sí (la que sea, pero igual). Unimos el último punto con el 1 y trazamos paralelas a ese segmento que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua (las líneas discontinuas). Estas rectas paralelas dividen el intervalo [0, 1] en 6 partes iguales. Fíjate que para dividir en 6 partes iguales sólo hay que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, siempre uno menos.

Si la fracción es negativa se hace igual pero en el intervalo [–1, 0]. En la figura hemos representado –5/8, hemos dividido el intervalo [–1, 0] en 8 partes iguales y hemos contado 5 empezando en 0.

Si queremos representar una fracción propia positiva, ***a/b***, **se divide la primera unidad en "*b*" partes iguales y se cuentan "*a*" divisiones a partir de 0.** En caso de ser **negativa** se hace igual pero contando desde 0 hacia la **izquierda**.

b) Representación de una fracción impropia:

Ejemplos:

Para representar 13/6 lo primero es escribirla en su forma mixta, 13/6=2+1/6, ahora es fácil representarla, nos vamos al 2, la unidad que va del 2 al 3 la dividimos en 6 partes iguales y tomamos 1.

Para 11/8=1+3/8, nos vamos a la unidad que va del 1 al 2 la dividimos en 8 partes iguales y tomamos 3.

Si la fracción es negativa, como $\frac{-12}{7}$, pasamos a forma mixta $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, nos vamos a la unidad que va del –1 al –2, la dividimos en 7 partes iguales y contamos 5 hacia la izquierda empezando en –1.

Para representar $\frac{-11}{4}$, como $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$ nos vamos a la unidad que va de –2 a –3, dividimos en 4 partes iguales y tomamos 3, contando hacia la izquierda y empezando en –2 .

Actividades propuestas 3

1. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

2. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

3. Representa en la recta numérica las fracciones : $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

4. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

5. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos A, B, C, D y E, expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos A, B y E.

1.7. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Debes tener presente que sólo pueden sumarse o restarse cosas “iguales”. No podemos sumar metros con segundos, ni euros con litros. De la misma forma no pueden sumarse tercios con quintos, ni cuartos con medios. Es decir, no se puede hacer la suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ así tal cual, ya que los sextos y los cuartos son de distinto tamaño. Para poder hacer la suma, antes es necesario hallar fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos que tengan el mismo denominador.

Veamos el ejemplo: Un múltiplo de 6 y 4 es 12. Escribimos 12 como nuevo denominador y hallamos los numeradores para que las fracciones sean equivalentes:

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$ (los doceavos ya sí se pueden sumar, y el resultado son doceavos)

Otro ejemplo: $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{130}{60}-\frac{306}{60}+\frac{40}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Hallamos un múltiplo de 6, de 10 y de 12 (60 es el mínimo común múltiplo), se escribe como denominador común y hacemos 60 : 6 = 10, luego el 13 lo multiplicamos por 10, 60:10 = 6 luego el 51 lo multiplicamos por 6, etc.

Cuando todas las fracciones tienen igual denominador, se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Si es posible se simplifica la fracción resultante.

En general, se define la suma de dos fracciones con la fórmula $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$

Ejemplo: $\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9678}{59985}=\frac{3226}{19995}$

Producto de fracciones

Para multiplicar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí para determinar, respectivamente, el numerador y el denominador de la fracción producto: $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$

Ejemplo: $\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$

Vamos a explicar la razón de que las fracciones se multiplican así con un ejemplo: $\frac{2}{5}.\frac{3}{4}$ significa hallar 2/5 de 3/4. Imagina que la unidad, o el todo, es el rectángulo de la imagen. Para representar los ¾ del rectángulo hay que dividirlo en 4 partes iguales y coger 3 (las 3 franjas inferiores de la figura). Ahora debemos hacer 2/5 de lo que nos ha quedado, esas 3 franjas las dividimos en 5 partes iguales y tomamos 2. Como puede verse nos quedan 6 partes iguales de las 20 totales, por eso $\frac{2}{5}.\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$

A veces conviene hacer la multiplicación con inteligencia, como en el siguiente ejemplo

Antes de multiplicar nos fijamos en que el 17 se puede simplificar (¿para qué vamos a multiplicar por 17 y luego dividir por 17?) y después simplificamos el 5 puesto que 15=3·5.

Haz tú $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ (esperamos que llegues al resultado correcto ya simplificado que es 1/6) ☺

Conviene simplificar los cálculos siempre que se pueda, pero presta atención para hacerlo correctamente y no hacer barbaridades como las siguientes:

La igualdad anterior es **absolutamente falsa** (10/12 = 5/6 es el resultado correcto y no 3/5).

La igualdad anterior también **es una barbaridad** (17/33 es el resultado correcto y no 5/9)

Fracción inversa

La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ pues se cumple que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, que es la definición de inverso.

Ejemplos: La inversa de 3/4 es 4/3 y la inversa de 2 es 1/2.

División de fracciones

Para dividir la fracción $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda:

$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$ (se ponen los productos cruzados, a·d en el numerador y b·c en el denominador).

Ejemplo: $\frac{6}{10}:\frac{12}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot3\cdot3\cdot5}{2\cdot5\cdot2\cdot2\cdot3}=\frac{3}{4}$ También puedes multiplicar y luego simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Presta atención a los siguientes casos particulares:

- Dividir entre 1/*a* es lo mismo que multiplicar por *a*.

Ejemplo: Dividir entre una décima es multiplicar por 10 ya que $a:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=\frac{10a}{1}=10a$

- Dividir entre un número es como multiplicar por su inverso: $a:2=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$

- ***Torres de fracciones:*** No te asustes si tienes que hacer algo como esto $\frac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, es muy fácil, es lo mismo que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot3\cdot5}{5\cdot4}=\frac{9}{4}$, no olvides que "__" es lo mismo que ":"

Potencias

Significado de una potencia de exponente entero positivo:

Dado a, un número cualquiera, y n, un número natural, la potencia a^n es el producto del número a por sí mismo n veces : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots a}_{n \text{ factores}}$

Ejemplo → $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

Propiedades de las potencias:

a) El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ejemplo → $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes: $a^n : a^m = a^{n-m}$

Ejemplo → $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

c) La potencia de una potencia es igual a la potencia cuyo exponente es el producto de los exponentes: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo → $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Ejemplo → $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) El cociente de potencias de distinta base y el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el cociente de las bases y cuyo exponente es el mismo: $a^n/b^n = (a/b)^n$

Ejemplo → $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Por definición ***$a^0=1$ para cualquier número $a\neq0$*** y ***$a^1=a$***

La razón de la primera definición es la aplicación de la propiedad b) al caso en el que las dos potencias que tienen la misma base tengan también el mismo exponente:

$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, pero evidentemente tiene que ser $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Significado de una potencia de exponente negativo: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ por definición

Con el siguiente ejemplo entenderás la razón de la anterior definición:

$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a\cdot a} = \frac{1}{a^2}$, pero aplicando la propiedad b) $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$

Cuando la base de la potencia es una fracción la definición anterior conduce al siguiente resultado:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ya que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Operaciones combinadas. Prioridad de las operaciones

Recuerda→ Para hacer varias operaciones combinadas hay que seguir el siguiente orden, respetando la prioridad de una operaciones sobre otras:

1º Se hacen las operaciones de los paréntesis, empezando por los más interiores.

2º Las potencias y las raíces

3º Las multiplicaciones y divisiones.

4º Las sumas y restas.

Si hay varias operaciones con igual prioridad se harán de izquierda a derecha.

Ejemplo→Calcula paso a paso y simplifica: $\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$

Primero hacemos el paréntesis de más adentro y la multiplicación del segundo paréntesis que tiene prioridad sobre la resta:

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{11\cdot 7\cdot 2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{77}{30}$$

Actividades propuestas 4

1. Realiza las operaciones y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $3-\frac{7}{9}+\frac{4}{6}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)$ c) $2-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}:\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{2}{9}$

2. Opera y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\left(\frac{-1}{3}\right)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$ c) $\left(\frac{-1}{7}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$

3. Opera y expresa el resultado simplificado como única potencia de exponente positivo:

a) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{-8}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^6$ c) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$

1.8. Expresión decimal y fraccionaria de un número racional

Paso de expresión como fracción a expresión decimal

Toda fracción tiene una expresión decimal que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador (***a/b = a:b***) ***La expresión decimal de una fracción es exacta o periódica.***

Ejemplos: $\frac{3}{25}=0{,}12;\quad \frac{68}{99}=0{,}686868...;\quad \frac{91}{80}=1{,}1375;\quad \frac{177}{90}=1{,}9666...$

Como puedes observar unas veces la expresión decimal es exacta (puesto que el resto de la división sale 0) y otras veces sale periódica, infinitos decimales entre los que se repite un bloque de cifras que se denomina **periodo**.

¿Cuándo sale exacta y cuándo periódica? **Si en el denominador de una fracción irreducible aparecen factores primos distintos de 2 y de 5 la expresión decimal será periódica, mientras que si solamente aparecen como factores primos 2 y 5 la expresión decimal será exacta.**

Hallar la fracción generatriz de una expresión decimal exacta o periódica

Los números decimales exactos o periódicos pueden expresarse como una fracción de enteros.

-*Paso de decimal exacto a fracción*

Es muy fácil, mira los ejemplos de la derecha.

Se pone en el numerador el número sin la coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene. Después se simplifica la fracción.

$$1{,}175 = \frac{1175}{1000} = \frac{47}{40}$$

$$20{,}68 = \frac{2068}{100} = \frac{517}{25}$$

$$3{,}1416 = \frac{31416}{10000} = \frac{3927}{1250}$$

-*Paso de decimal periódico a fracción*

Ejemplo: Nos piden expresar el número 7,3252525... en forma de fracción de enteros.

Lo primero que hacemos es ponerle un nombre, por ejemplo N = 7,3252525…, lo segundo es conseguir dos números con la misma parte decimal.

El anteperiodo tiene 1 cifra y el periodo 2. Para conseguir la misma parte decimal multiplicamos por 1000 y la coma se va hasta después del primer periodo, si multiplicamos por 10 la coma se va hasta delante del primer periodo.

Ya tenemos dos números con la misma parte decimal, si los restamos ésta desaparece y podemos despejar N. Fíjate que la resta se hace en los dos miembros a la vez.

En general, para hallar la expresión como fracción de un número periódico, multiplicamos el número por la potencia de 10 necesaria para llevarnos la coma al final del primer periodo, luego lo multiplicamos otra vez para que la coma quede al principio del primer periodo, restamos las dos expresiones con el mismo período y despejamos el número.

Otro ejemplo: N = 15,25636363…

¿Cómo conseguir dos números con la parte decimal ,636363…?

Pues lo más fácil es 10000 N = 152563,6363… y 100 N = 1525,6363…

Restamos: 9900 N = 151038 ➔ $N = \dfrac{151038}{9900} = \dfrac{75519}{4950} = \dfrac{8391}{550}$

Otro ejemplo: N = 4,545454…

$$\begin{array}{r} 100\,N = 454{,}5454\ldots \\ N = 4{,}5454\ldots \\ \hline 99\,N = 450 \end{array} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{450}{99} = \frac{50}{11}$$

Puedes comprobar que 50:11=4,545454….

Más ejemplos:

N	10N –	1N =	9N	
1,333…	13,333… –	1,333… =	12	N = 12/9
N	100N –	10N =	90N	
5,6777…	567,77… –	56,77… =	511	N = 511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8,65888 …	8658,88… –	865,88… =	7793	N = 7793/900

Observa que siempre el entero que queda en la fracción resultante tiene tantas cifras 9 como cifras tenía el periodo, y tantas cifras 0 como cifras tenía el anteperiodo.

Actividades propuestas 5

2. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,4142 b) 0,125 c) 6,66

3. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,41424142… b) 0,125125… c) 6,666…

4. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,041424142… b) 0,7125125… c) 6,7666…

5. Pasa a fracción cada número decimal y calcula:

A. 0,333… + 0,666…

B. 0,888… · 2,5

C. 0,65 : 0,656565…

1.9. Problemas con fracciones

Vamos a recordar algunos conceptos esenciales en la resolución de problemas con fracciones:

a) Fracción de un número:

Para hallar una fracción $\frac{a}{b}$ de un número c, se multiplica la fracción por el número $\frac{a}{b}\cdot c$

Ejemplo→ Para hallar las tres cuartas partes de 120.

Traducimos: hallar $\frac{3}{4}$ de 120. Este "de" se traduce en matemáticas por un "por", luego:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120 = \frac{3}{4}\cdot 120 = \frac{3\cdot 120}{4} = 3\cdot 30 = 90$$

b) Fracción de una fracción:

Ejemplo→ $\frac{10}{6}\text{ de }\frac{4}{15} = \frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$

Ejemplo→ *Halla las dos quintas partes de las diez doceavas partes de 360.*

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360 = \frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12} = \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}\cdot 60}{\cancel{5}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{6}} = 120$$

c) Problema inverso (hallar el total sabiendo el valor de una fracción)

Ejemplo→ *Me dicen que las tres cuartas partes de un número valen 66. ¿Qué número es?*

Está claro que un cuarto será 66 : 3 = 22 y los 4 cuartos son 22·4 = 88.
Los dos pasos del razonamiento anterior equivalen a multiplicar 66 por la fracción inversa de $\frac{3}{4}$, $66\cdot\frac{4}{3}=88$

$$\frac{a}{b}\cdot x = c \Leftrightarrow x = c\cdot\frac{b}{a}$$

Actividades propuestas 6

6. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.

7. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

EJEMPLOS RESUELTOS DE PROBLEMAS CON FRACCIONES

i) *¿Cuántos litros hay en* 80 *botellas de* 3 *cuartos de litro cada una?*

Puedes ponerte un ejemplo con números más fáciles para tener claro qué operación debes hacer.

Si tengo 10 botellas cada una de 2 litros, está claro que tenemos 20 litros; ¿qué operación hemos hecho?, multiplicar, pues lo mismo hacemos con los números del problema:

$$80\,\text{botellas}\cdot\frac{3}{4}\frac{\text{litros}}{\text{botella}} = 80\cdot\frac{3}{4}\text{litros} = 60\,\text{litros}$$

(Observa que botellas se simplifican con botellas y las unidades finales son litros).

ii) *¿Cuántas botellas de* 3 *octavos de litro necesito para envasar* 900 *litros?*

Nuevamente ponemos un ejemplo con números más sencillos: si quiero envasar 10 litros en botellas de 2 litros, está claro que necesito 5 botellas (10 : 2). Hacemos lo mismo con los datos:

$$900\,\text{litros} : \frac{3}{8}\frac{\text{litros}}{\text{botella}} = 900\,\text{litros}\cdot\frac{8}{3}\frac{\text{botellas}}{\text{litro}} = 900\cdot\frac{8}{3}\text{botellas} = 2400\,\text{botellas}$$

(Fíjate que litros se simplifica con litros y que las botellas que dividen en el denominador pasan multiplicando en el numerador, por lo que unidad del resultado es “botellas”)

iii) *Ana gana cierto dinero al mes, se gasta el 2/5 partes de lo que gana en pagar la letra del piso, 3/4* ***de lo que le queda*** *en facturas y le sobran* 90 € *para comer. ¿Cuánto gana y cuánto gasta en el piso y en facturas?*

Si a una cantidad le quitamos sus 2/5 quedan 3/5 de ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5=3/5)

En facturas gasta $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$ del sueldo. De los 3/5 que tenía restamos los 9/20 gastados para calcular la fracción de sueldo que queda: $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12}{20}-\frac{9}{20}=\frac{3}{20}$

Esos 3/20 de sueldo nos dicen que son 90 €. Por lo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

La cantidad total son los 20/20 luego 30 · 20 = <u>600 € es el dinero que Ana gana al mes</u>.

Conviene comprobar la solución del problema:

2/5 de 600 € = 240 € se gasta en la letra.

600 – 240 = 360 € quedan después de pagar la letra.

3/5 de 360 = 270 € se gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € le quedan para comer. ¡Correcto!

También puedes hacer los razonamientos ayudándote de un gráfico:

Hacemos un rectángulo de 5 x 4 cuadrados que son los denominadores. De las 5 franjas verticales iguales quitamos 2 que es lo que se gasta en la letra del piso. Lo que queda está dividido en 4 partes iguales y quitamos 3 que es lo que se gasta en facturas. Nos quedan 3 cuadraditos que son los 90 € de la comida. Luego un cuadradito es 90 : 3 = 30 €.

Lo que gana es 30 · 20 = 600 €.

En la letra se gasta **30 · 8 = 240 €** y en facturas **30 · 9 = 270 €**.

iv) *A Juan le descuentan la quinta parte de su sueldo bruto en concepto de IRPF y la sexta parte del mismo para la Seguridad Social. Si cobra 600 € netos, ¿cuál es su sueldo bruto?*

Sumamos las dos fracciones puesto que se refieren a la misma cantidad: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{11}{30}$

que es la parte que hay que descontar del sueldo bruto para obtener el neto:

$1-\frac{11}{30}=\frac{30}{30}-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ del sueldo bruto es el sueldo neto, y nos dicen que son 600 €.

Para calcular el sueldo bruto multiplicamos esta cantidad final por la fracción inversa de 19/30:

$600\cdot\frac{30}{19}\approx 947{,}37\,€$ es el sueldo bruto.

Comprobación: 1/5 de 947,37 = 189,47 € paga de IRPF

1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la S.S.

947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que es el sueldo neto. ¡Bien!

(Podría haber habido un pequeño desfase de algún céntimo debido a las aproximaciones)

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN 1

1. Ordena de **mayor a menor**: $\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$

2. Representa en la recta numérica: $\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0{,}125$

3. Opera paso a paso y simplifica: $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$

4. Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.

5. Una botella tiene llenas sus siete octavas partes; si contiene 840 cm^3, ¿cuánto le cabe llena?

6. Opera y expresa el resultado en forma de fracción irreducible: $\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$

7. Simplifica las siguientes fracciones, halla su valor decimal y di cuáles tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica : $\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{150}$

8. Pasa a fracción y simplifica: (a) 2,225 (b) 2,2252525... (c) $\dfrac{0{,}125}{0{,}125125125...}$

9. Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.

a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?

b) Si su volumen actual es de 1200 cm^3, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?

10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que **le queda** la cuarta parte se va destinado a impuestos y por último del resto que **le queda** las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aun tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Soluciones:

(1) $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>\frac{-5}{6}>\frac{-7}{8}>\frac{-5}{4}$. (2)

(3) 7/2 (4) 180 (5) 960 cm^3 (6) 25/4

7) Expresiones exactas $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}=0{,}05$ y $\frac{42}{150}=\frac{7}{25}=0{,}28$. Expresión periódica $\frac{5}{180}=\frac{1}{36}=0{,}02777...$

8) (a) $\frac{89}{40}$ (b) $\frac{2203}{990}$ (c) $\frac{999}{1000}=0{,}999$

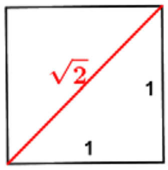
9) a) 4 semanas. b) 506,25 cm^3.

10) Cobraba 1200 €. Ahora cobra 1000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

2-NÚMEROS IRRACIONALES

El descubrimiento de los números irracionales fue una conmoción para los matemáticos griegos del siglo VI a. C. porque contradecía su concepción filosófica y hacía que su sueño de expresar la armonía del universo por medio de relaciones entre números enteros resultara imposible de alcanzar. El mismo Pitágoras descubrió el número irracional cuando menos se lo esperaba, cuando estudiaba el triángulo rectángulo isósceles o, dicho de otra forma, analizando la diagonal del cuadrado.

Pitágoras fue el primero en enunciar y demostrar la ley general que todo el mundo conoce como **teorema de Pitágoras** y que dice que en cualquier triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados (catetos).



Si los lados de los dos catetos son iguales a 1, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a 2, al ser $1^2+1^2=2$, y la hipotenusa, por lo tanto, es igual a la raíz cuadrada de 2, o $\sqrt{2}$ en notación moderna ($\sqrt{2}$ es el número cuyo cuadrado es 2). Pero es fácil demostrar que no existe ningún número entero ni tampoco fraccionario que multiplicado por sí mismo dé exactamente 2. Hoy escribimos que $\sqrt{2}=1{,}4142135624...$, y añadimos los puntos suspensivos para indicar que el número de decimales es infinito sin que haya periodicidad que nos permita llegar al final de la operación. Estos números recibieron el nombre de "irracionales" por ser inexpresables como razón de números enteros y escapar al razonamiento. Pero a pesar de ello, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de lado 1 está ahí y tiene una longitud tan real como la de los catetos, aunque esta medida solamente se puede expresar con decimales de manera aproximada, nunca de manera exacta.

Llamamos n**úmeros irracionales** a aquellos números reales que ***no pueden expresarse mediante una fracción de números enteros.*** El conjunto de los números irracionales se representa por I.
La expresión decimal de un número irracional es infinita no periódica.

Todas las raíces cuadradas de números que no sean cuadrados perfectos son número irracionales.

Ejemplos: son irracionales $\sqrt{3}=1{,}73205080...$, $\sqrt{5}=2{,}23606797...$, $\sqrt{10}=3{,}16227766...$

En general, s**i** p **es un número entero y** $\sqrt[n]{p}$ **no es un número entero (es decir,** p **no es una potencia n-ésima), entonces** $\sqrt[n]{p}$ **es irracional**

Ejemplos :son irracionales $\sqrt[3]{2}=1{,}2599210...$, $\sqrt[4]{1000}=5{,}62341325...$, $\sqrt[5]{-2}=-1{,}14869835...$

Otro número irracional famoso es **π** (**el número que resulta de dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro**).

Demostrar que el número π es irracional no es tan sencillo como en el caso de $\sqrt{2}$ y hasta el siglo XVIII se seguían calculando decimales intentando hallar un periodo que no existe. La demostración fue realizada por Lambert (matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán) en 1766.

Actividades propuestas 7

Indica a qué conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) pertenecen los siguientes números:

(a) – 3, 52 (b) $\sqrt{4}$ (c) $\sqrt[3]{-7}$ (d) 0,333... (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{-3}{11}$

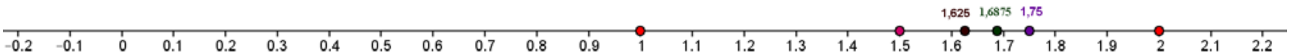
3. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

3.1. Definición y representación de los números reales en la recta real

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se llama **conjunto de los números reales** y se representa por **R** ($\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$, el símbolo $\cup$ significa unión de conjuntos)

Los números reales se pueden representar sobre una recta, de forma que a cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Esta segunda parte, es la propiedad de completitud de los números reales y la que los distingue de los números racionales (que no llenan la recta). Por esta equivalencia entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales llamamos **recta real** a una recta en la que representamos los números reales.

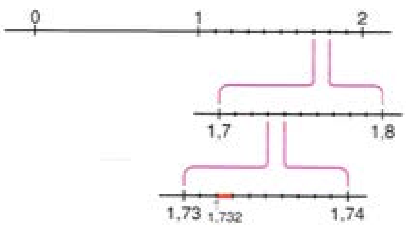
Recuerda que para representar números en una recta se elige un punto cualquiera de la misma que representa el número 0 y una longitud unidad (o lo que es lo mismo, un punto a la derecha de 0 que representa el número 1)



Otra propiedad de los números reales, que también tienen los racionales y los irracionales, es la *densidad,* es decir que entre dos números reales cualesquiera hay infinitos números. Esta propiedad se puede demostrar fácilmente, ya que si a y b son dos números con a<b, es evidente que el número $\frac{a+b}{2}$ está en el **punto medio** entre ellos. Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos los puntos que representan a los números reales 1 y 2 es el punto que representa al número real $\frac{1+2}{2}=1{,}5$. Podemos dividir de la misma manera el segmento de extremos 1,5 y 2 para obtener el punto medio $\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$. Podríamos volver a dividir el segmento de extremos 1,5 y 1,75 para obtener el punto medio 1,625, y así indefinidamente, porque entre dos números reales cualesquiera hay infinitos números reales.

Ya vimos cómo representar los números racionales en la recta real.

Para representar algunos números irracionales de forma exacta en la recta real se usan construcciones geométricas basadas en el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para representar $\sqrt{10}$ se dibuja un triángulo rectángulo de base 3 unidades y de altura 1 unidad porque la hipotenusa de este triángulo mide exactamente $\sqrt{10}$ unidades. Solamente hay que llevar con el compás un segmento de esta longitud sobre la recta real con el extremo izquierdo en 0 y el extremo derecho representará el número real $\sqrt{10}$



Pero, en general, será suficiente con una representación aproximada a partir del valor decimal aproximado del número real (con la precisión que cada situación requiera).

Por ejemplo, para representar el número real $\sqrt{3}=1{,}7320508...$ podemos situarlo de forma aproximada entre 1,7 y 1,8, o con una representación más fina, entre 1,73 y 1,74, o con una representación aún más fina, entre 1, 732 y 1,733, etc.

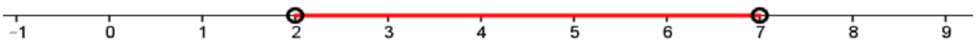
3.2. Intervalos en la recta real

Hay una notación especial para referirse a los infinitos números reales que hay entre dos números. Para referirnos al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**.

Ejemplo→ Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por $(2,\ 7)$ y se lee "intervalo abierto de extremos 2 y 7". A él pertenecen infinitos números como $2{,}001$; π; $3{,}5$; $\sqrt{20}$; 5; $6{,}999$; $\ldots$ pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos. También conviene familiarizarse con la expresión de estos conjuntos usando desigualdades: $(2, 7) = \{x \in R \,/\, 2 < x < 7\}$.

Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la x para denotar a un número y el símbolo $\in$ (pertenece) para indicar que es real (pertenece al conjunto de los números reales, R), la barra / significa "tal que" (en ocasiones se usa, con el mismo significado, otros símbolos como la barra vertical, | , dos puntos, **:,** o punto y coma, ;) y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que lo de arriba se lee: *el intervalo abierto de extremos 2 y 7 es el conjunto de números reales tales que son mayores que 2 y menores que 7.*

Para la representación gráfica del intervalo abierto (2, 7) en la recta real se ponen pequeños círculos sin rellenar en los extremos y se resalta la zona intermedia. En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: "( )", o corchetes al revés: "] [".



El concepto de **intervalo cerrado** es similar pero ahora sí pertenecen los extremos al conjunto.

Ejemplo→El intervalo de los números mayores o iguales que −2 pero menores o iguales que 5. Ahora el −2 y el 5 sí entran, lo que se indica poniendo corchetes $[-2,\ 5] = \{x \in R \,/\, -2 \le x \le 5\}$

Fíjate que en la definición del conjunto con desigualdades ahora ponemos ≤ que significa "menor o igual". La representación gráfica es similar pero marcando con círculos rellenos los extremos.

Usando paréntesis y corchetes, con el significado indicado de incluir o excluir los extremos, se pueden definir intervalos abiertos por un extremo y cerrados por otro.

Ejemplo→ Los números superiores a 600 pero que no excedan de 1000 son el intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha $(600, 1000] = \{x \in R \,/\, 600 < x \le 1000\}$

Una **semirrecta** es un tipo especial de intervalo no acotado por uno de sus extremos, por lo que se utilizan los símbolos $+\infty$, para indicar que el intervalo no está acotado por la derecha y $-\infty$, para indicar que el intervalo no está acotado por la izquierda.

Ejemplos→ El conjunto de los números reales positivos es el intervalo $(0, +\infty) = \{x \in R \,/\, x > 0\}$

El conjunto de los números reales no mayores que 5 es el intervalo $(-\infty, 5] = \{x \in R \,/\, x \le 5\}$

$(0,\ +\infty)$

$(-\infty,\ 5]$


El extremo no acotado siempre se pone abierto (con paréntesis). El conjunto de los números reales es el único intervalo no acotado ni superior ni inferiormente: $R = (-\infty, +\infty)$

Actividades propuestas 8

1. Expresa como intervalo, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa en la recta real:
   a) Números reales inferiores o iguales a 18.
   b) Números cuyo cubo sea superior a 8.
   c) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
   d) Números cuyo cuadrado sea menor que 4.
2. Da tres números racionales y tres números irracionales que estén en el intervalo (3, 4) y representa de manera aproximada los números en la recta real.

3.3. Aproximaciones y errores

Aunque en la asignatura de matemáticas se prefiera expresar y manejar los números reales con su expresión simbólica exacta (2/3 en lugar de un valor decimal aproximado como 0,667 o π en lugar 3,1416), en ocasiones es necesario hacer aproximaciones por motivos prácticos.

La mejor aproximación de un número decimal, la que debes hacer cuando hagas operaciones con la calculadora y el resultado en pantalla tenga demasiadas cifras decimales para escribirlas todas, es el **redondeo**. Para redondear un número a un orden determinado de cifras decimales debes fijarte en la primera cifra suprimida: si ésta es mayor o igual que 5 la última cifra decimal del número aproximado debe aumentarse en una unidad mientras que si es inferior a 5 mantiene su valor.

Por ejemplo, para aproximar el número $\pi = 3{,}14159265...$ (infinitas cifras decimales),

el redondeo a décimas es $\pi = 3{,}1$, el redondeo a centésimas es $\pi = 3{,}14$,

el redondeo a milésimas es $\pi = 3{,}142$, el redondeo a diezmilésimas es $\pi = 3{,}1416$, etc.

Se define el **Error Absoluto** (EA) de una aproximación como EA=|valor real − valor aproximado| (Las barras significan "valor absoluto")

Por ejemplo, si aproximamos $\pi = 3{,}1416$ cometemos un error de unas 7 millonésimas:

$$\text{EA} = |\pi - 3{,}1416| = |3{,}14159265... - 3{,}1416| = |-0{,}0000073...| \approx 0{,}0000073$$

Aún sin conocer con exactitud el valor exacto, siempre se puede poner una cota (un valor máximo) al error absoluto sólo teniendo en cuenta el orden de aproximación, así, si hemos redondeado en las diezmilésimas (como en el ejemplo) siempre podemos afirmar que EA ≤0,00005, es decir, menor o igual que media unidad del valor de la cifra de redondeo o 5 unidades de la siguiente (5 cienmilésimas), que es lo mismo.

Se define el **Error Relativo** (ER) de una aproximación como $\text{ER} = \dfrac{\text{EA}}{|\text{valor real}|}$

El cociente suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo. En general, el error absoluto, como el relativo, es desconocido, pero puede acotarse y será tanto menor cuantas más cifras significativas se tomen en la aproximación.

Actividades propuestas 9

1. Da el redondeo de $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210...$ a milésimas y acota el error absoluto.
2. Redondea $\sqrt[5]{-2} = -1{,}14869835...$ a millonésimas y acota el error absoluto.
3. Da el valor decimal aproximado de 2/3 con 4 cifras significativas.

4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

4.1. Expresiones en notación científica

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$a \cdot 10^n$ siendo $1 \leq$ Parte Entera de $a \leq 9$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes de valor absoluto mayor que 1, y si es negativo para expresar números pequeños de valor absoluto menor que 1

Ejemplos→ $2{,}48 \cdot 10^{14} = 248000000000000$, $3420000000000 = 3{,}42 \cdot 10^{12}$ (números grandes)

$7{,}561 \cdot 10^{-18} = 0{,}000000000000000007561$ $0{,}000000000057 = 5{,}7 \cdot 10^{-11}$ (números pequeños)

La edad estimada de la Tierra es aproximadamente $4 \cdot 10^9$ años (4000000000 años)

La longitud de un virus es aproximadamente $6{,}2 \cdot 10^{-8}$ metros (0,000000062 m)

Cuando la calculadora da un resultado que tiene más cifras que los dígitos que entran en pantalla lo expresa en notación científica. Por ejemplo, da como valor de la potencia 2^{64} el resultado aproximado $1{,}844674407 \cdot 10^{19}$ (el valor exacto es $2^{64} = 18446744073709551616$)

La ventaja de la notación científica es que las cifras se dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Para designar algunos órdenes de magnitud (grandes o pequeños) se usan los siguientes prefijos:

giga	mega	kilo	hecto	deca	deci	centi	mili	micro	nano
10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

4.2. Operaciones en notación científica

Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica aprovechando las propiedades de las potencias, se multiplican o dividen las partes decimales entre sí y las potencias de base 10 entre sí usando la regla correspondiente ($10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$, $10^a : 10^b = 10^{a-b}$). Si es necesario para expresar el resultado en notación científica se multiplica o divide el factor decimal por la potencia de 10 necesaria para dejar en la parte entera una sola cifra distinta de cero y se divide o multiplica por lo mismo la potencia de 10.

Ejemplos→ $(5{,}24 \cdot 10^6) \cdot (6{,}3 \cdot 10^8) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

$$\frac{4{,}81 \cdot 10^6}{6{,}5 \cdot 10^{-8}} = \frac{4{,}81}{6{,}5} \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}74 \cdot 10^{14} = 7{,}4 \cdot 10^{13}$$

Para sumar y restar conviene preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y así poder sacar factor común.

$$5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5{,}83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 =$$
$$6862{,}83 \cdot 10^9 = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$$

Actividades propuestas 10

1. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0{,}000257 + 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3{,}5 \cdot 10^6 + 8{,}5 \cdot 10^5$

2. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(1{,}3 \cdot 10^{5}) \cdot (6{,}1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4{,}7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^{6}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-4})$

3. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-8}) : (1{,}5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{2}) : (6{,}25 \cdot 10^{-7})$

4. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

5. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

5. RADICALES

5.1. Definición de raíz enésima de un número

La **raíz enésima** de un número a es un número x tal que al elevarlo a n, da como resultado a.

$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a}$ (n es el *índice* de la raíz, a es el *radicando* y x es la *raíz enésima* de a)

La radicación de índice n es la operación inversa de la potenciación de exponente n

Ejemplos→ $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3=64$; $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5= -32$

Atención→ Como dos números opuestos x y —x tienen el mismo cuadrado, todo número positivo tiene dos raíces cuadradas con el mismo valor absoluto, una positiva y otra negativa, pero con el símbolo radical se designa solamente la positiva. Así, por ejemplo, escribimos $\sqrt{9} = 3$ y cuando damos las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ escribimos $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Lo mismo ocurre con todas las raíces de índice par (cuartas, sextas, etc.)

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. **Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos**. Sin embargo $\sqrt[3]{-1}$ sí existe, pues $(-1)^3=(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

5.2. Radicales como potencias de exponente fraccionario. Propiedades.

Se define $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. La razón de esta definición es que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$, y por lo mismo:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplos→ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; $2^{\frac{-3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

Podemos **operar** con radicales traduciéndolos a potencias de exponente fraccionario y utilizando las propiedades de las potencias (que valen para todo tipo de exponentes)

Recuerda→ $\mathbf{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$ $\mathbf{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$ $\mathbf{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$ $\mathbf{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$ $\mathbf{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$

Ejemplos→ $\sqrt[3]{64 \cdot 27} = \left(2^6 \cdot 3^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2^2 \cdot 3 = 12$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}=\frac{\left(2^5\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(3^5\right)^{\frac{1}{5}}}=\frac{2}{3}$$

Pero es conveniente saber operar con los radicales, y para ello es necesario aprender y aplicar las siguientes propiedades:

a) **Si multiplicamos el índice de una raíz n por un número $p\neq 0$, y a la vez elevamos el radicando a ese número p el valor de la raíz no varía:** $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n\cdot p]{a^p}$

Demostración: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{p}{n\cdot p}}=\sqrt[n\cdot p]{a^p}$

Esta propiedad sirve para **simplificar radicales** cuando el índice de la raíz y el exponente del radicando tienen un divisor común, dividiendo entre el máximo común divisor de ambos.

Ejemplo→ $\sqrt[6]{25}=\sqrt[3\cdot 2]{5^2}=\sqrt[3]{5}$

También sirve para pasar varios radicales con distintos índices a radicales equivalentes con el mismo índice (elegiremos preferentemente el mínimo común múltiplo).

Ejemplo→ Para expresar $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{5}$ con el mismo índice: $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}$ y $\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}$

b) **Para multiplicar raíces del mismo índice se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

Demostración: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

Para multiplicar raíces con distintos índices previamente hay que pasarlas a raíces del mismo índice usando la propiedad a)

Ejemplo→ Para multiplicar $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{5}$: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{5^2\cdot 5^3}=\sqrt[6]{5^5}$

c) **Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz de índice común:** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b\neq 0)$

Demostración: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Para dividir raíces con distintos índices previamente hay que pasarlas a raíces del mismo índice.

Ejemplo→ Para dividir $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt{5}$: $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{5^3}}=\sqrt[6]{\frac{5^2}{5^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{5}}$

d) **Para elevar un radical a una potencia se eleva el radicando a dicha potencia:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$

Demostración: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p=a^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a^p}$ ***Ejemplo→*** $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

e) **La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

Demostración: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ ***Ejemplo→*** $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$

5.3. Introducir y extraer factores en un radicando

Para introducir un factor dentro de un radical, se eleva el factor al mismo exponente que el índice y se introduce como factor en el radicando (se deduce de las propiedades anteriores)

Ejemplo→ $2\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$.

Se puede extraer un factor de un radical si su exponente es múltiplo del índice de la raíz y sale multiplicando a la raíz con el exponente que resulta de dividir el exponente que tenía dentro de la raíz entre el índice.

Ejemplos→ $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=2\cdot\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{108}=\sqrt{3^3\cdot 2^2}=\sqrt{3\cdot 3^2\cdot 2^2}=3\cdot 2\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

5.4. Suma y resta de radicales

Debes tener muy claro que la raíz de una suma no es igual a la suma de las raíces y que lo mismo pasa con la resta: $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, en cambio $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

Solamente se pueden simplificar expresiones en las que haya sumas o restas de raíces si los radicales tienen exactamente el mismo índice y el mismo radicando, y en este caso lo que se hace es sacar factor común a dicho radical y sumar o restar los factores correspondientes. Por esta razón cuando hay que simplificar sumas o restas con radicales se comienza por descomponer los radicandos en factores primos y simplificar los radicales extrayendo todos los factores posibles fuera de la raíz.

Ejemplo→ $\sqrt{1250}-\sqrt{18}+\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 5^4}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}=5^2\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}=(25-3+2)\cdot\sqrt{2}=24\sqrt{2}$.

Puedes comprobar con la calculadora que la expresión inicial tiene el mismo valor decimal que la expresión final simplificada: $\sqrt{1250}-\sqrt{18}+\sqrt{8}=33{,}9411255$ y $24\sqrt{2}=33{,}9411255$

5.5. Racionalización de radicales

Racionalizar una fracción es dar otra equivalente que no tenga radicales en el denominador. Para ello, se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada.

Cuando en el denominador de la fracción solo hay factores, se multiplica y divide la fracción por un mismo número para conseguir completar en el denominador una potencia del mismo exponente que el índice de la raíz.

Ejemplo→ $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$.

Cuando en la fracción aparecen en el denominador un binomio con raíces cuadradas (suma o resta), se multiplica y se divide por un factor que proporcione una diferencia de cuadrados, este factor es el conjugado del denominador (el conjugado de una suma es la resta y viceversa)

Ejemplo→ $\frac{6}{\sqrt{3}-5}=\frac{6\cdot(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3}-5)\cdot(\sqrt{3}+5)}=\frac{6\cdot(\sqrt{3}+5)}{(\sqrt{3})^2-5^2}=\frac{6\cdot(\sqrt{3}+5)}{3-25}=\frac{6\cdot(\sqrt{3}+5)}{-22}=\frac{-3\cdot(\sqrt{3}+5)}{11}$

Actividades propuestas 11

1. Calcula el valor de las siguientes expresiones con radicales factorizando previamente los radicandos: a) $\sqrt{484}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{8000}$ d) $\sqrt[4]{1296}$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias: a) $25^{0,5}$ b) $32^{\frac{3}{5}}$ c) $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

3. Expresa en forma de radical las siguientes potencias y sitúa cada número irracional en un intervalo que tenga por extremos números enteros consecutivos:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $(-5)^{\frac{2}{5}}$ d) $(-2)^{\frac{3}{5}}$

4. Pasa los radicales a potencias de exponente fraccionario y simplifica: a) $\sqrt[4]{3^{12}}$ b) $\sqrt[10]{9^5}$

5. Opera, simplifica y expresa el resultado con una sola raíz: $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}}$

(Con la calculadora halla el valor decimal redondeado a millonésimas de la expresión anterior y de la expresión que hayas obtenido como resultado para comprobar que es el mismo)

6. Opera y simplifica todo lo posible las siguientes operaciones con radicales. Como comprobación calcula el valor decimal aproximado redondeado a milésimas de la expresión inicial y de la expresión final simplificada:

a) $3\sqrt{8}+5\sqrt{2}-4\sqrt{128}+10\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{250}$

7. En cada uno de los siguientes apartados racionaliza la fracción y después, con la calculadora y como comprobación, obtén el valor decimal aproximado redondeado a milésimas de la expresión inicial y de la expresión racionalizada.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{6}{2+\sqrt{7}}$ e) $\dfrac{6}{\sqrt[7]{2^3}}$

8. Introduce factores en la raíces y da el resultado con un solo radical: $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{2}}}$

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN 2

1. El número −0,3333333… **no** es un número: a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. El número 0,63636363…. se escribe en forma de fracción: a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

3. El número $8^{-4/3}$ vale: a) un dieciseisavo b)dos c) Un cuarto d) Un medio

4. El resultado de racionalizar la fracción $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ es a) 2 b) $2\sqrt{5}$ c) $\dfrac{100}{5}$ d) 20

5. Al simplificar $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{32})$ se obtiene: a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

6. El resultado de $\left(16^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{4}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)$ es: a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

7. El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a) $(-\infty,-2)$ b) $(-\infty,-2]$ c) $(-2,+\infty)$ d) $\left]-\infty,-2\right[$

8. $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a : a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d)2

9. La expresión correcta en notación científica del resultado de la operación $(4,8\cdot 10^{9}):(6\cdot 10^{15})$ es: a) 0,000008 b) $486\cdot 10^{24}$ c) $0,8\cdot 10^{-6}$ d) $8\cdot 10^{-7}$

10. El resultado de $0,000078 + 2,4\cdot 10^{-5}$ es : a) $3,6\cdot 10^{-10}$ b) $1,8912\cdot 10^{-10}$ c) $1,02\cdot 10^{-4}$ d) $18,72\cdot 10^{-5}$

Soluciones:	1c	2b	3a	4b	5c	6c	7b	8c	9d	10c

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula: (a) 3/5 de 550 litros (b) 7/4 de 100 euros.
2. ¿Qué fracción de día son :

   (a) 8 horas; (b) 30 horas ;(c) un cuarto de hora; (d) 5 minutos ;(e) 1 segundo
3. Representa en la recta real los números $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{3}{6}$
4. Representa en la recta real los números: 0,03; 0,15; 0,20; -0,025
5. Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$
6. A continuación tienes un cuadrado mágico; es decir, la suma de todas las líneas, tanto horizontales como verticales o diagonales, es siempre la misma. Esta suma se llama el "número mágico" del cuadrado. Realiza las operaciones de cada casilla y escribe el resultado, totalmente simplificado, en la casilla correspondiente del cuadrado de la derecha. Después calcula el número mágico del cuadrado y averigua el valor de los números A, B,C y D.

$\frac{1}{2}$	$\frac{22}{3}+1-\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}:\frac{2}{3}$	$\frac{21}{4}+\frac{3}{4}$
$\frac{3+7\cdot 6}{6}$	A	$1+\frac{42}{12}$	B
C	$-\left(\frac{3}{2}-4\right)$	$\frac{51}{6}-\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$
$\frac{60}{15}$	$-\left(1-\frac{13}{2}\right)$	D	$\frac{15}{2}-\frac{6}{6}$

¿Cuál es el número mágico?

Comprueba que la suma de las diagonales también es el número mágico.

$\frac{1}{2}$			

7. Realiza las operaciones indicadas y simplifica el resultado, que debe ser una fracción irreducible:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}$ c) $\frac{1}{28}:\frac{3}{14}$ d) $\frac{1}{104}\cdot\frac{26}{3}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$

f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}:\frac{9}{8}-\left[2-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\right]$ g) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}:\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]$ h) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{2}{9}$

i) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ j) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

8. Una mezcla de 720 gramos de pintura tiene 3/8 de color magenta, 1/4 de amarillo y el resto de blanco. ¿Qué fracción de la mezcla es el color blanco?¿Cuántos gramos de cada color se han usado para hacer la mezcla?

9. Escribe las expresiones decimales de lo siguientes números racionales dados en forma de fracción: a) $\frac{26}{4} =$ b) $\frac{19}{5} =$ c) $\frac{2}{3} =$ d) $\frac{3}{7} =$

10. Escribe los siguientes números racionales en forma de fracción irreducible de números enteros: a) $3{,}4$ b) $0{,}21$ c) $5{,}\widehat{3} = 5{,}333...$ d) $0{,}0\overset{\frown}{51} = 0{,}0515151...$

11. Justifica cuáles de las siguientes raíces son números racionales y cuáles son números irracionales. Da el valor entero exacto de las que sean números racionales (ejemplo: $\sqrt[3]{-64} = -4$)y ordena las que sean números irracionales entre dos números enteros consecutivos (ejemplo: $4 < \sqrt{21} < 5$): a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[7]{-1}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{85}$

12. Demuestra que 0,999… = 1 hallando la fracción generatriz. ¿Cuánto vale *n*,999…?

13. Un cazo tiene una capacidad de 2/5 de litro. Calcula cuántos cazos se necesitan para llenar una olla de 4 litros.

14. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?

15. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?

16. Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas se reduce en un quinto su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción un cuarto del peso ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?

17. En un depósito lleno de agua había 3000 litros. Un día se gastó 1/6 del depósito y al día siguiente se consumieron 1250 litros ¿qué fracción del depósito quedó?

18. Rubén tiene 124,96 euros, que son los 2/3 del precio de una bicicleta que quiere comprar ¿Cuánto cuesta la bicicleta?

19. En una prueba atlética, que tenía dos partes, son eliminados en la primera prueba la cuarta parte de los participantes y, en la segunda, la quinta parte de los que seguían. Llegaron al final de la prueba 744 atletas. ¿Cuántos se presentaron?

20. Los reyes de una dinastía tuvieron 4 nombres diferentes. La tercera parte de los reyes utilizó el primer nombre; la cuarta parte de los reyes llevó el segundo nombre; la sexta parte, el tercero; y el cuarto nombre lo usaron 6 reyes. ¿Qué fracción de los reyes de la dinastía usó el cuarto nombre?. ¿Cuántos reyes había en la dinastía?

21. Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.
b) Longitud del virus de la gripe: 2,2 nm (nm significa nanometros)
c) Radio del protón: 0, 000 000 000 05 m

22. Realiza las operaciones y da el resultado en notación científica:

a) $(2{,}5 \cdot 10^{8}) \cdot (4 \cdot 10^{3})$ b) $(3 \cdot 10^{8}) : (6 \cdot 10^{-2})$ c) $\frac{2 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{6}}{4 \cdot 10^{6} + 10^{5}}$

23. Representa en la recta real y expresa con desigualdades los siguientes intervalos:

a) (-2, 0) b) [½ , 3] c) [4, 5) d) (6, +∞) e) (–∞, -3]

24. Señala a qué conjuntos numéricos (**N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**) pertenecen los siguientes números:

a = 6,7 b = $\sqrt[3]{-4}$ c = 6,666... d= $\sqrt{-9}$ e = $\sqrt{36}$ f = $\sqrt[3]{-8}$

(Fíjate que uno de los números no pertenece a ninguno de los conjuntos).

Sitúa cada uno de los números reales en un intervalo que tenga por extremos dos números enteros consecutivos y después ordena todos los números reales de menor a mayor.

25. Otro número irracional famoso es el número phi, $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803398...$, que también se conoce con los nombres de **número de oro**, razón áurea, proporción armónica y divina proporción. El número ϕ aparece con frecuencia en la naturaleza y en el arte.

Da el valor aproximado del número ϕ redondeado a décimas, a centésimas, a milésimas y a millonésimas, acotando en cada caso el error absoluto de la aproximación.

26. Simplifica los radicales: a) $\sqrt[15]{2^{12}}$ b) $\sqrt[4]{9}$ c) $\sqrt[6]{25}$

27. Opera y simplifica para dar el resultado con solamente un radical: $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}}$

Como comprobación calcula el valor decimal aproximado redondeado a milésimas de la expresión inicial y de la expresión final simplificada (usa la calculadora)

28. Extrae factores de los radicales, saca factor común y expresa el resultado con solamente un radical:

a) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{112}$

b) $2\sqrt{8}+4\sqrt{72}-7\sqrt{18}$

Como comprobación calcula el valor decimal aproximado redondeado a milésimas de la expresión inicial y de la expresión final simplificada (usa la calculadora).

29. En cada uno de los siguientes apartados racionaliza la fracción multiplicando numerador y denominador por el factor adecuado:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$

Como comprobación calcula el valor decimal aproximado redondeado a millonésimas de la expresión inicial y de la expresión final simplificada (usa la calculadora).

30. En cada uno de los siguientes apartados racionaliza la fracción multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Como comprobación calcula el valor decimal aproximado redondeado a milésimas de la expresión inicial y de la expresión final simplificada (usa la calculadora).

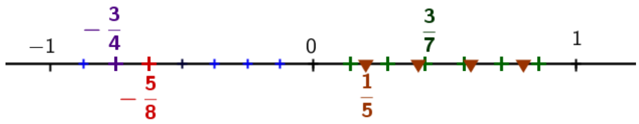
SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 1

1. a) 4 b) 5 c) 40 d) 10 e) 7
2. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{6}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 2

1. a) $\frac{1}{3}=\frac{5}{15} < \frac{7}{15} < \frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ b) $\frac{7}{12} < \frac{3}{4}=\frac{9}{12} < \frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ c) $\frac{7}{18}=\frac{14}{36} < \frac{5}{9}=\frac{20}{36} < \frac{7}{12}=\frac{21}{36}$
2. a) $\frac{1}{3}=0{,}333...< \frac{7}{15}=0{,}4666...< \frac{4}{5}=0{,}8$ b) $\frac{7}{12}=0{,}58333...< \frac{3}{4}=0{,}75< \frac{5}{6}=0{,}8333...$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 3

1. $\frac{50}{7}=7+\frac{1}{7}$; $\frac{25}{11}=2+\frac{3}{11}$; $\frac{101}{6}=16+\frac{5}{6}$
2. $\frac{-30}{7}=-4-\frac{2}{7}$; $\frac{-50}{13}=-3-\frac{11}{13}$; $\frac{-100}{21}=-4-\frac{16}{21}$
3. 

4. $a=\frac{23}{8}=2+\frac{7}{8}$; $b=\frac{-23}{8}=-2-\frac{7}{8}$ $c=\frac{180}{50}=3+\frac{3}{5}$ $d=\frac{-26}{6}=-4-\frac{1}{3}$

5. $A=-2-\frac{2}{9}=\frac{-20}{9}$; $B=-1-\frac{3}{4}=\frac{-7}{4}$; $C=\frac{-3}{4}$; $D=\frac{3}{5}$ $E=2+\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 4

1. a) $\frac{32}{9}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{11}{45}$
2. a) $\frac{1}{81}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 49 d) $\frac{1}{24}$
3. a) $\left(\frac{-4}{3}\right)^3$ b) $\left(\frac{10}{7}\right)^6$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 5

1. a) 7071/5000 b) 1/8 c) 333/50
2. a) 14141/9999 b) 125/999 c) 20/3
3. a) 52066/49995 b) 3559/4995 c) 203/30
4. A. 1/3 + 2/3 = 1 B. 8/9 · 5/2 = 20 /9 = 2,222... C. (65 /100):(65/99)= 99/100= 0,99

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 6

1. 7,2
2. 120

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 7

1. (a) $\mathbf{Q}$ (b) $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$ (c) $\mathbf{I}$ (d) $\mathbf{Q}$ (e) $\mathbf{I}$ (f) $\mathbf{Q}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 8

1. a) (−∞, 18] b) (2, +∞) c) [100, 1000) d) (-2, 2)

2. Respuesta abierta, por ejemplo, 3,1 ; 3,2 ; 3,5 ; π ; $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 9

1. 1,260 con EA<0,0005
2. -1,148698 con EA<0,0000005
3. 0,6667

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 10

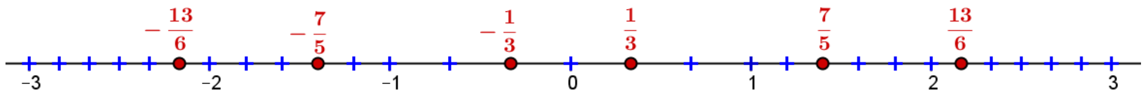
1. a) $2{,}71\cdot 10^{-4}$ b) $1{,}9735\cdot 10^{8}$
2. a) $7{,}93\cdot 10^{2}$ b) $35{,}25\cdot 10^{-6}$
3. a) $2\cdot 10^{-5}$ b) $2{,}6\cdot 10^{4}$
4. $2{,}5\cdot 10^{13}$ glóbulos rojos
5. respuesta abierta según la edad de cada uno

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 11

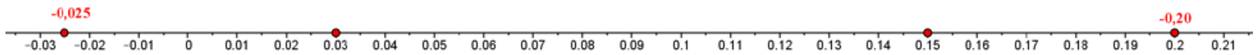
1. a) 22 b) – 4 c) 20 d) 6
2. a) 5 b) 8 c) 343
3. a) $\sqrt{7}\in(2,3)$ b) $\sqrt[3]{49}\in(3,4)$ c) $\sqrt[5]{25}\in(1,2)$ d) $\sqrt[5]{-8}\in(-2,-1)$
4. a) 27 b) 3
5. $\sqrt[6]{18}\approx 1{,}618870$
6. a) $29\sqrt{2}\approx 41{,}012$ b) $-19\sqrt[3]{2}\approx -23{,}938$
7. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}598$ c) $-5-5\sqrt{2}\approx -12{,}071$ d) $2\sqrt{7}-4\approx 1{,}292$ e) $3\sqrt[7]{16}\approx 4{,}458$
8. $\sqrt[12]{3200}$

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. (a) 330 litros (b) 175 €
2. (a) 1/3 (b) 5/4 (c) 1/96 (d) 1/ 288 (e) 1/86400



3.



4.

5. $\frac{8}{9}=\frac{320}{360}$, $\frac{4}{5}=\frac{288}{360}$, $\frac{38}{45}=\frac{304}{360}$, $\frac{77}{90}=\frac{308}{360}$, $\frac{-9}{8}=\frac{-405}{360}$; $\frac{-9}{8}<\frac{-8}{9}<\frac{4}{5}<\frac{38}{45}<\frac{77}{90}<\frac{8}{9}$
6. El número mágico es 7
7. a) 2/3 ; b) 79/476 ; c) 1/6 ; d) 1/12 ; e) 1/24 ; f) -79/36 ; g) 11/42 ; h) -11/45 ; i) 25/4 ; j) 47/8
8. 3/8 de la mezcla; 270 g de magenta, 180 g de amarillo y 720 g de blanco
9. a) 6,5 ; b) 3,8 ; c) $0,\overline{6}=0{,}666\ldots$; d) $0,\overline{428571}=0{,}428571428571428571\ldots$
10. a) 17/5 ; b) 21/100 ; c) 16/3 ; d) 17/330
11. a) 7, racional ; b) -1, racional ; c) irracional $2<\sqrt[3]{9}<3$; d) irracional $9<\sqrt{85}<10$
12. n,999... es lo mismo que n+1
13. 10 cazos
14. 32 botes

15. 48 botellas

16. 12 kg

17. 5/12

18. 187,44 €

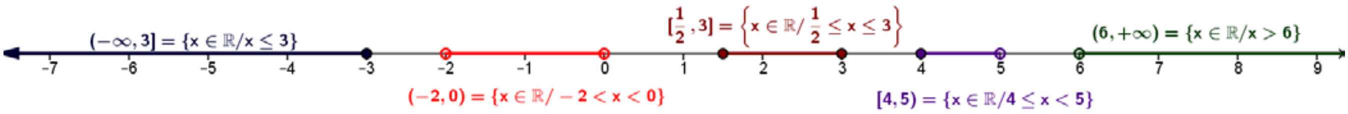
19. 1240 atletas.

20. 24 reyes

21. a) $1{,}5\cdot10^{8}$; b) $2{,}2\cdot10^{-9}$; c) $5\cdot10^{-11}$

22. a) 10^{12} ; b) $5\cdot10^{9}$; c) $-2\cdot10^{-1}$

23.



24. $\mathbf{a}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{a}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{a}\in(6,7)$; $\mathbf{b}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{b}\in(-2,-1)$; $\mathbf{c}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{c}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{c}\in(6,7)$; **d** no es real;

$\mathbf{e}\in\mathbf{N}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{Z}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{e}\in[6,7]$ $\mathbf{f}\in\mathbf{Z}$; $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{f}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{f}\in[-3,-2]$; $f<b<e<c<a$

25. Redondeo a décimas 1,6 con EA<0,02; a centésimas 1,62 con EA<0,002, a milésimas 1,618 con EA<0,0001 y a millonésimas 1,618034 con EA<0,0000001

26. a) $\sqrt[5]{2^4}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt[3]{5}$

27. $\sqrt[6]{18}$

28. a) $\sqrt{7}\approx2{,}645751$; b) $7\sqrt{2}\approx9{,}899495$

29. a) $2\sqrt{3}\approx3{,}464102$; b) $2\sqrt[3]{2}\approx2{,}519842$

30. a) $\sqrt{7}+2\approx4{,}646$; b) $\dfrac{5-\sqrt{15}}{2}\approx0{,}564$