UNIDAD DIDÁCTICA 8

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

Funciones Polinómicas y funciones definidas a trozos

Educación de adultos

Ana María Zarco García

Unidad didáctica 8: Funciones polinómicas y funciones definidas a trozos

1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- *Cuando viajamos a velocidad constante, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales*

Tiempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espacio (*s*)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

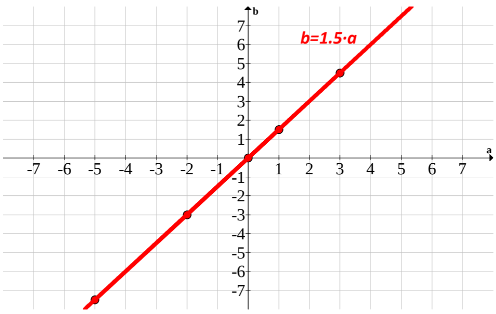
Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b=k\cdot a$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:*

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



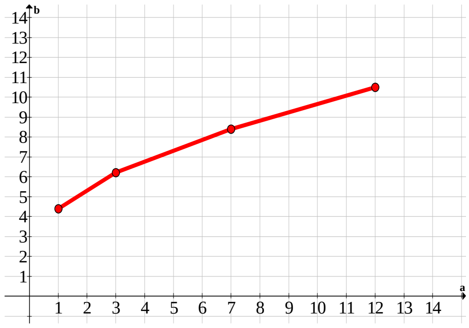
Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$k=\frac{-7{,}5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1{,}5}{1}=\frac{4{,}5}{3}=1{,}5.$ La relación se define así:

$b=1{,}5\cdot a.$

- *La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebé los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decide si son magnitudes directamente proporcionales.*

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

Actividades propuestas

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:

a) 71 litros para producir una manzana.

b) 10.850 litros para producir unos vaqueros.

c) 4.000 litros para producir una camiseta.

3. La tabla siguiente corresponde a los datos de la altura en cm de un niño según el número de meses. Representa los puntos e indica si la magnitud número de meses y altura son magnitudes directamente proporcionales.

Meses (x)	2	4	12	24	36
Altura (y) en cm	58	64	76	87	96

1.2. Función lineal. Rectas de la forma y = m · x

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado de la forma $y = m \cdot x$. Su representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen.

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Ejemplo:

- Las proporciones se representan como rectas de la forma $b = k \cdot a$
  - donde k es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
  - a y b son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.

x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4

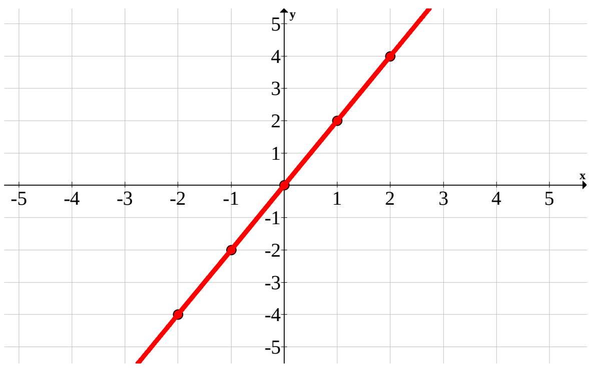
- La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m\, x$.
- Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa, …

Actividades resueltas

- *Representa la recta $y = 2 \cdot x$.*

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

  Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x. Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e y es la variable dependiente (depende del valor de la x).



***Nota:** para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.*

Las rectas $y = m\, x$ tienen los siguientes componentes:

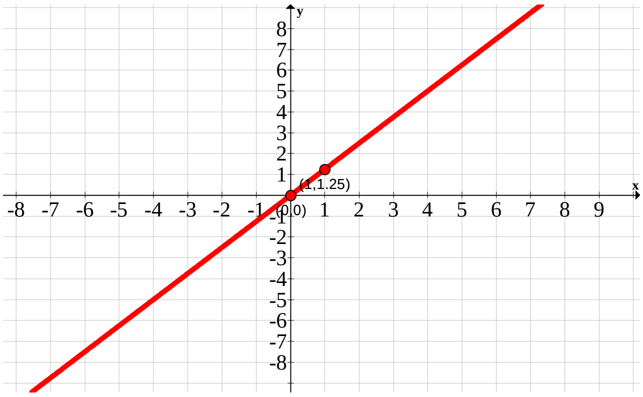
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- *Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal* $y = 1,25 \cdot x$



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

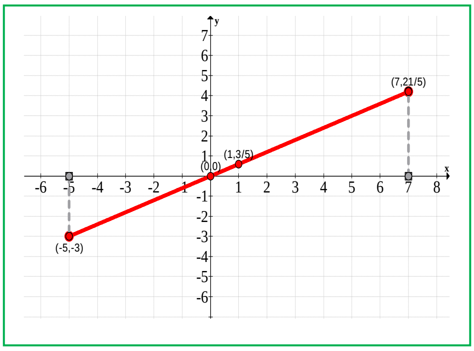
Si no se considera ningún intervalo, la recta no tiene máximos ni mínimos absolutos y relativos.

Para ver la simetría, tomamos la función $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$

Es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- *Estudia la función* $y = \frac{3}{5} \cdot x$ *en el intervalo* [–5, 7].



El dominio es todo el intervalo [–5, 7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$, simétrica respecto al origen.

En los extremos del intervalo, existen mínimo (–5, –3) y máximo (7,21/5).

Actividades propuestas

4. Halla el dominio, máximos y mínimos y la simetría de las siguientes rectas:

a) $y = 4 \cdot x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y = 2,65 \cdot x$

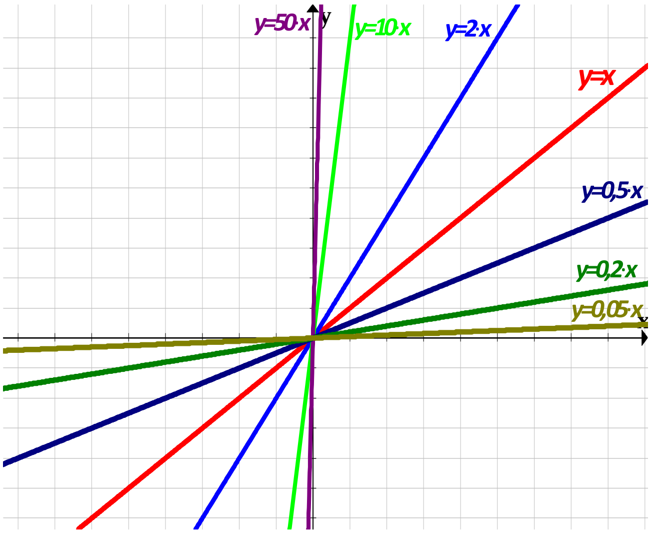
d) $y = -\frac{1}{2}x$ e) $y = -\frac{5}{2}x$ f) $y = -5x$

1.3. Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

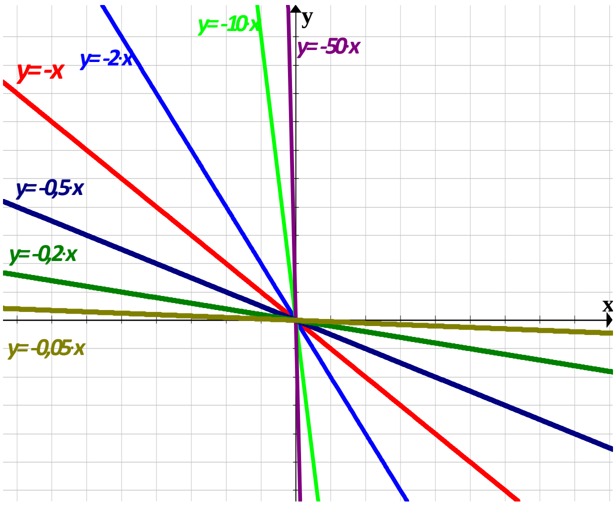
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad k.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y = x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x .
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m.

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m>0$, la recta es creciente.
- Si $m<0$, la recta es decreciente.

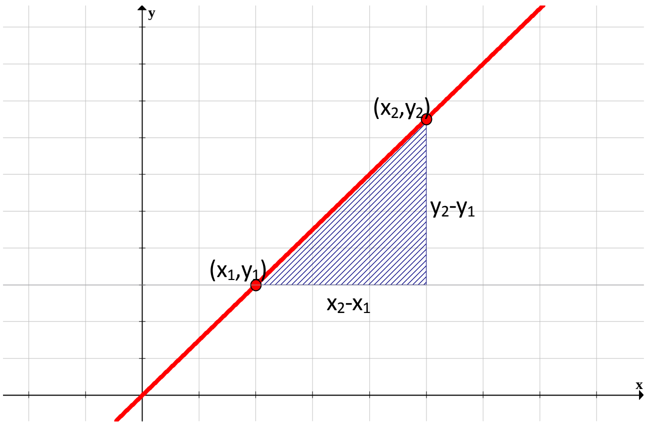
La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x .

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

- Si $m>0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m<0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



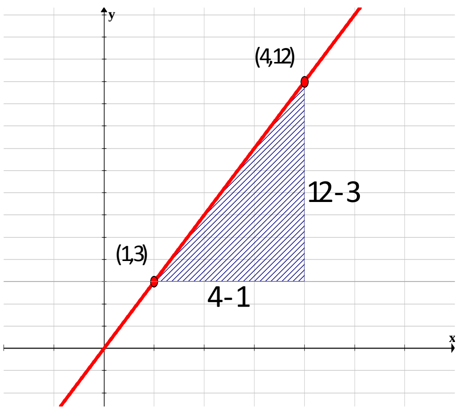
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

es decir,

$$m=\frac{\textit{lo que sube}}{\textit{lo que avanza}}$$

Ejemplo:

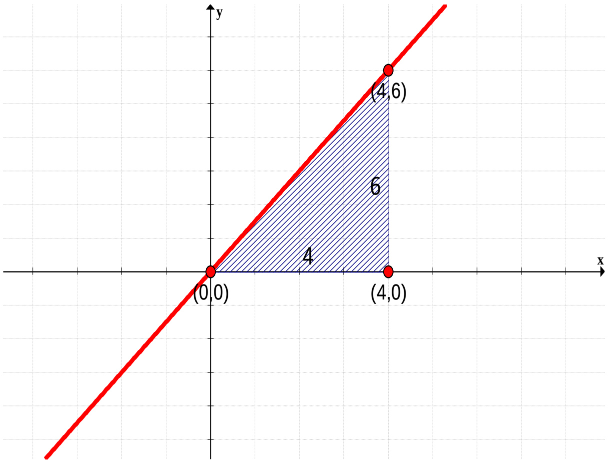


La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m=\frac{12-3}{4-1}=\frac{9}{3}=3$$

Actividades resueltas

Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0, 0) y el (4, 6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

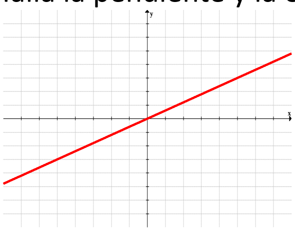
$$m = \frac{6}{4} = 1,5$$
$$y = 1,5 \cdot x$$

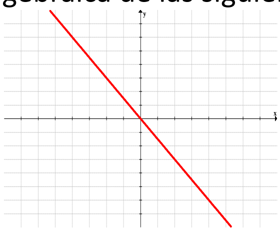
En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

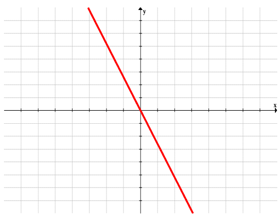
Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

Actividades propuestas

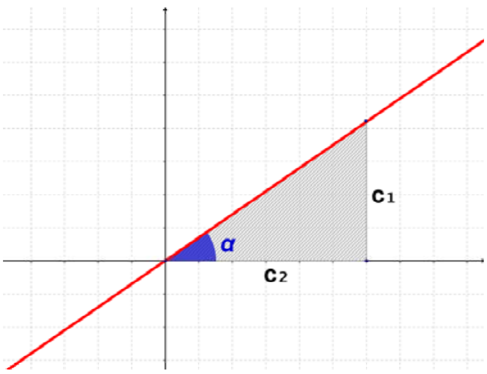
5. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

a) 

b) 

c) 

Otra expresión de la pendiente



Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos, o lo que es lo mismo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.

La tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo es el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo (el cateto que forma parte del ángulo).

$$\tan\alpha = \frac{C_{opuesto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = \tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la horizontal con la recta (ángulo en el sentido contrario a las agujas del reloj).

1.4. Rectas de la forma y = m · x + n

Ahora, consideremos un movimiento rectilíneo y uniforme. En este tipo de movimiento la trayectoria es una línea recta y la velocidad es constante. Supongamos que previamente se ha recorrido una distancia.

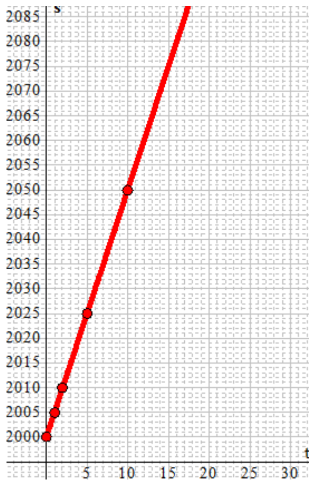
Actividades resueltas

- *Representa la gráfica s-t del movimiento rectilíneo uniforme que lleva un ciclista que se ha trasladado 2 km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.*

- En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda: *s*= 2000+5*t* .

Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:

Tiempo (*t*)	Espacio (*s*)
0	2000
1	2005
2	2010
5	2025
10	2050



Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar la gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2.000 posiciones en el eje y.

La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5 \cdot x + 2.000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2.000 es el espacio inicial s_0.

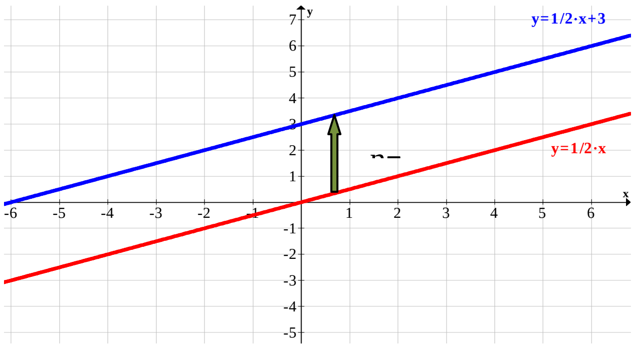
La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ejemplo:

- *Comparemos la recta* $y = 1/2 \cdot x$ *con la recta* $y = 1/2 \cdot x + 3$



Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos m = 1/2. Son dos rectas paralelas.

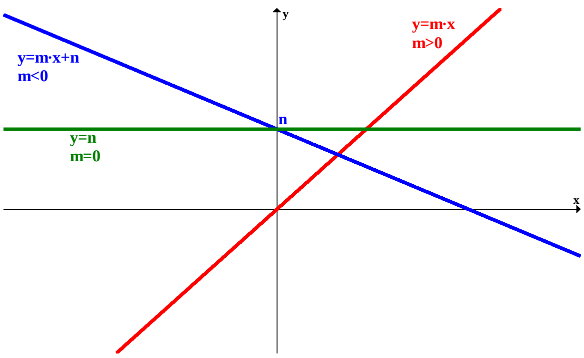
La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

Las funciones polinómicas de primer grado, o afines, se describen algebraicamente de la forma $y=m\cdot x+n$ y sus gráficas son rectas que pasan por el punto (0, n).

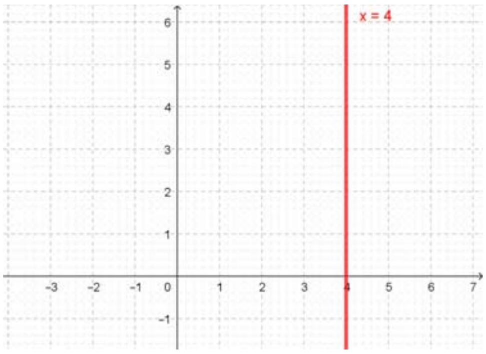
Además de la variable independiente x, la variable dependiente y, y la pendiente m, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y=m\cdot x+n$ es paralela a la recta $y = m \cdot x$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m>0$, la función es **creciente**.
- Si $m<0$, la función es **decreciente**.
- Si $m=0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y=n$.



Observa que no todas las rectas corresponden con la gráfica de una función. Este es el caso de las rectas verticales.



Actividades propuestas

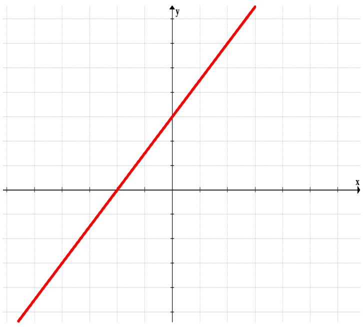
6. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cdot x + 4$ b) $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c) $2x + \cdot 4y = 5$

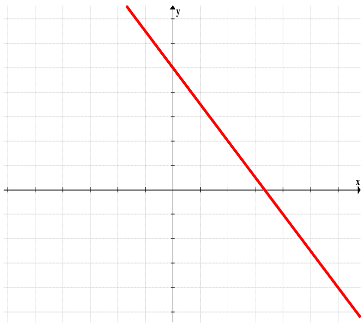
d) $y = 5$ e) $y = 0$ f) $y = -3$

7. Halla la expresión de las siguientes rectas:

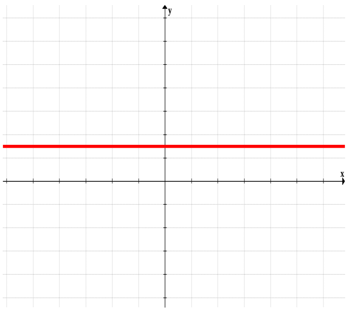
a)



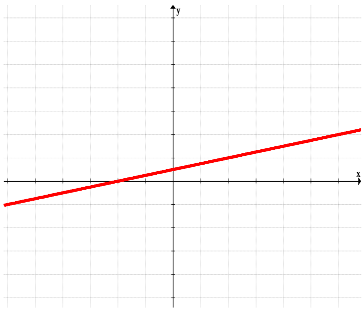
b)



c)



d)



2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. Funciones polinómicas de segundo grado. Parábola $y = a \cdot x^2$

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Se representan mediante **parábolas.**

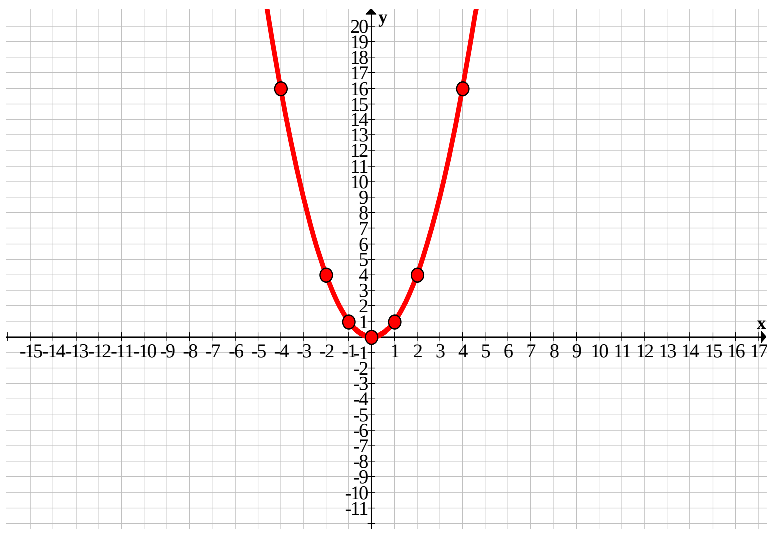
Ejemplo:

- La representación de la situación 2 es una parábola.
- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

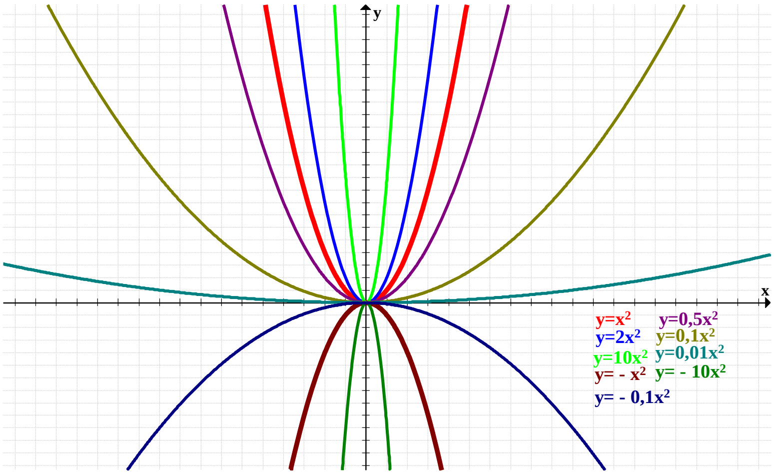
- El dominio es toda la recta real. El recorrido son los reales positivos y el cero.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a=1$, y sabemos que si $a=-1$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a:



- Si $a > 0$:
  - al aumentar a, la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
- Si $a < 0$:
  - al aumentar a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
  - al disminuir a, la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $y=a\cdot x^2$, tienen las siguientes características:

- Son **continuas** en todo el dominio-
- El dominio es toda la recta real.
- Si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido son los reales positivos y el cero, y tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- Si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo, el recorrido son los reales negativos y el cero, y tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

A este punto se le llama **vértice** de la parábola

- Son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

Actividades propuestas

8. A partir de la parábola $y=x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y=\frac{5}{3}x^2$ b) $y=-3x^2$ c) $y=-\frac{15}{3}x^2$

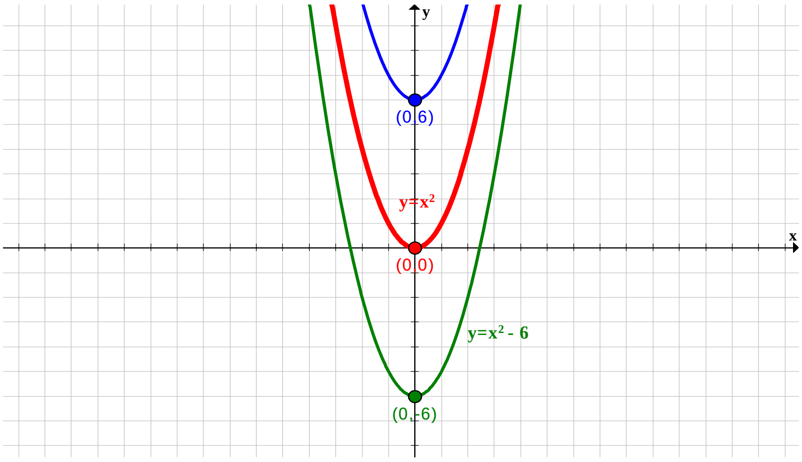
d) $y=4,12x^2$ e) $y=-\frac{6}{10}x^2$ f) $y=\frac{7}{8}x^2$

2.3. Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y=x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y: $y = x^2 + k$.

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y=x^2+6$ y $y=x^2-6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

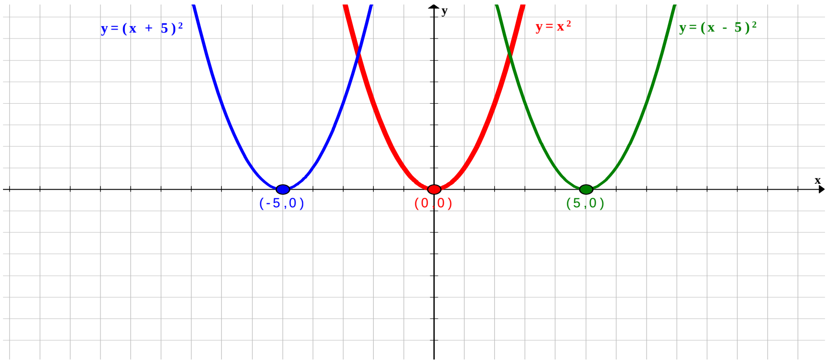
Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=x^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, k).

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje *x*: $y = (x - q)^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda. Comparemos las parábolas $y=(x+5)^2$ y $y=(x-5)^2$ con la plantilla:

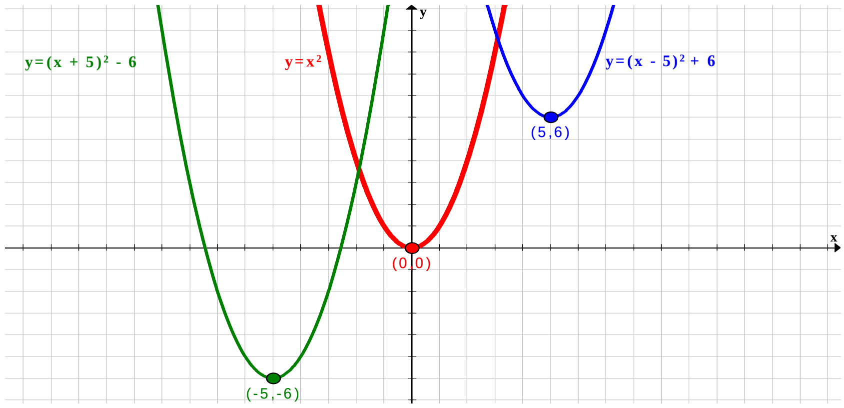


En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades en el eje x hacia la derecha si $q > 0$ y hacia la izquierda si $q < 0$.
El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q, 0)$.

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $y = (x - q)^2 + k$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.
Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.
Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia la derecha si } q>0 \\ \text{hacia la izquierda si } q>0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia arriba si } k>0 \\ \text{hacia abajo si } k<0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, k).

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$*

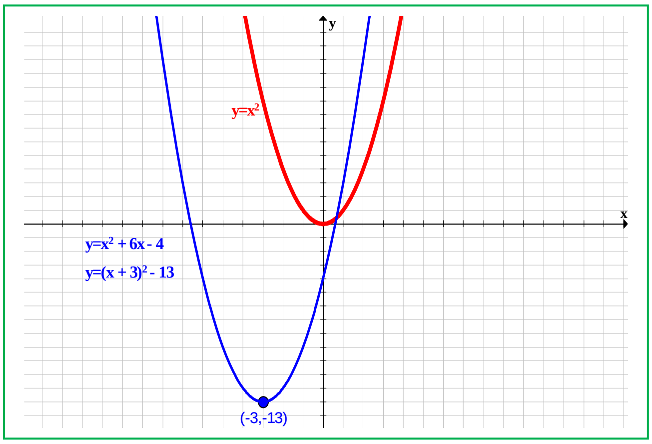
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

  $$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece x^2 + 6x. Ahora tenemos que ajustar el resto:

  $$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Ejemplo:

- *En el caso anterior, $y=x^2+6\cdot x-4$, el vértice está en el punto (–3, –13).*

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

Actividades propuestas

9. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a) $y=(x+4)^2-5$ b) $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c) $y=x^2-5$

d) $y=x^2-6x+16$ e) $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f) $y=-x^2+12x-26$

g) $y=x^2-10x+17$ h) $y=-x^2+2x-4$ i) $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

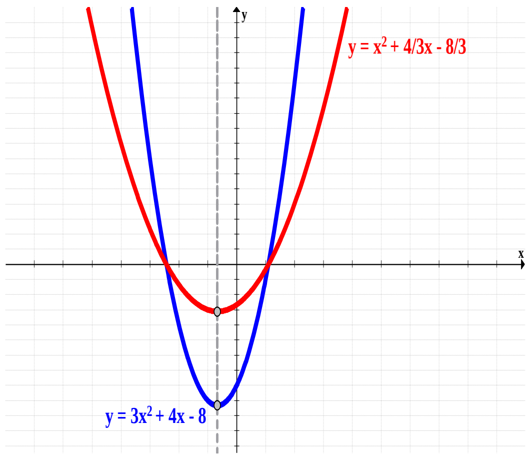
Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y=x^2+rx+s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y=-x^2+rx+s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y=a\cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=y=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$$

Actividades resueltas



- *Representa la parábola* $y=3x^2+4x-8$*:*

  Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

  $$y=3x^2+4x-8=3\cdot(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3})$$

  y la comparamos con $x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

  $$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=(x+\frac{4}{6})^2-\frac{20}{9}.$$

  Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

  En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se puede ver en el punto 2.1.

En general, la representación de la función cuadrática $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se puede aproximar representando la parábola $y=x^2+rx+s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a>0$
- hacia abajo si $a<0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

Coeficiente a:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y=x^2+rx+s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$. (En este caso a es igual a 1). La parábola en el caso general es:

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, es decir, $r=\frac{b}{a}$, entonces la abscisa del vértice es $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta x = 0.

Cuando $x=0$, la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto (0, c).

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

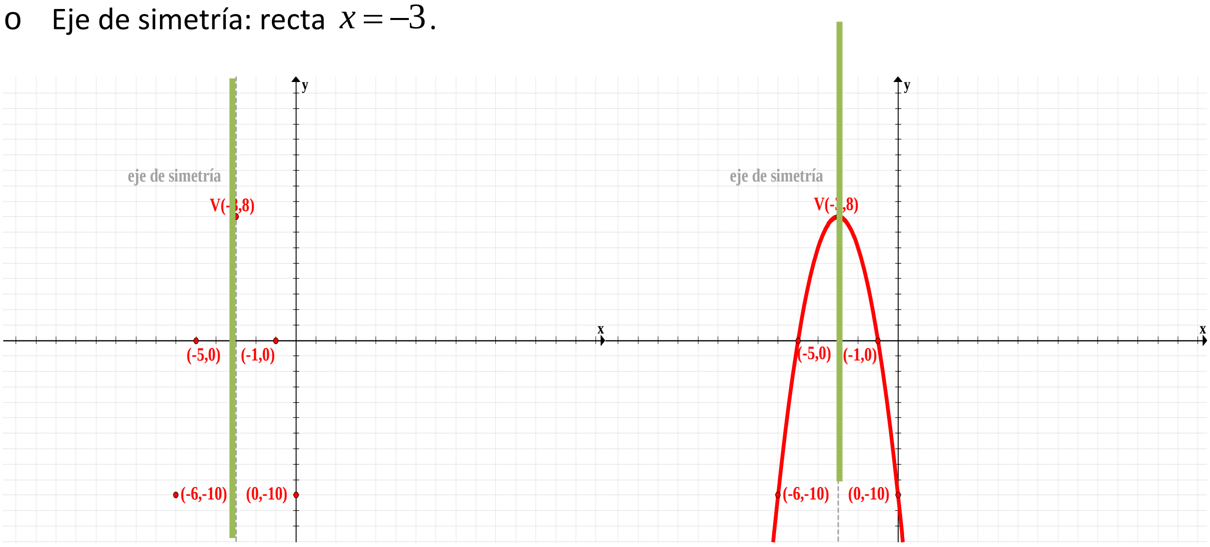
El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y=-2x^2-12x-10$
  - $a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{12}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3,8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

    La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.
  - Eje de simetría: recta $x=-3$.



Actividades propuestas

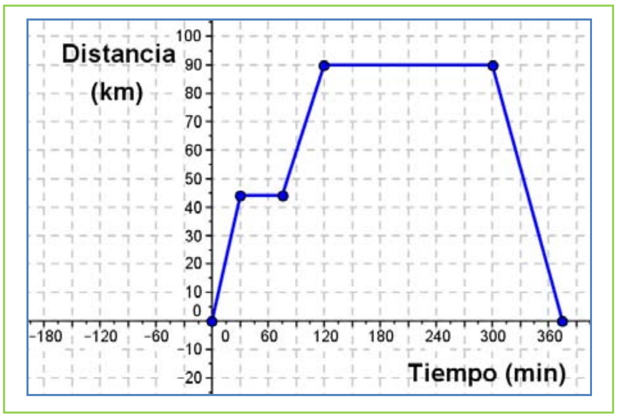
10. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a) $y=2x^2+4x-6$	b) $y=6x^2-24x$	c) $y=-2x^2+4x-2$
d) $y=2x^2+5x-12$	e) $y=3x^2+6x-9$	f) $y=-2x^2+7x+3$
g) $y=7x^2+21x-28$	h) $y=5x^2-9x+4$	i) $y=-4x^2-4x-1$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:

Actividades resueltas



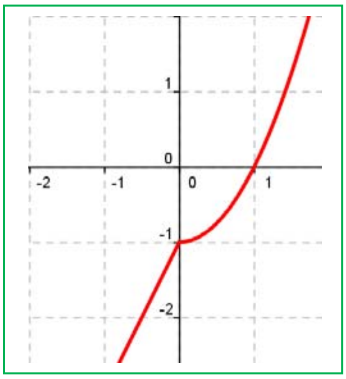
- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de Personas Adultas de nivel II a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*

Este tipo de función se denomina **función definida a trozos** pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: (0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30 \\ 45 & si\ 30<x\le 75 \\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120 \\ 90 & si\ 120<x\le 300 \\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360 \end{cases}$$

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x^2-1 & si\ x\ge 0 \end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

11. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x-1 & si\ x>0 \end{cases}$.

12. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x<0 \\ 2x+2 & si\ x>0 \end{cases}$.

13. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<1 \\ x+3 & si\ x>1 \end{cases}$.

4. APLICACIONES A CONTEXTOS Y SITUACIONES REALES

Interpretación de prospectos. Cantidad de paracetamol. Interpolación

Tenemos paracetamol para niños con una concentración de 100 mg/ml. El prospecto nos indica que la dosis recomendada es de 15 mg por kg de peso del niño cada 6 horas.

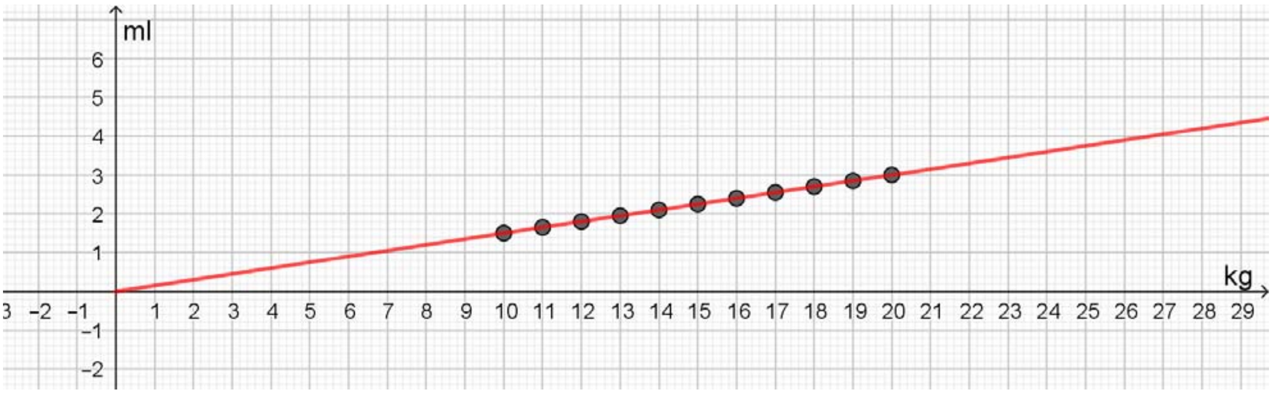
Llamamos a la variable kilogramos del niño y consideramos la función $f(x)$ que es la cantidad en *ml* de paracetamol que tenemos que administrar.

Como $15x$ es el número de mg y en 1 ml de nuestro frasco hay 100 mg entonces tenemos que administrar $\frac{15x}{100}\,ml$. Por lo tanto, la función viene dada por $f(x) = 0{,}15x$.

kg	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ml	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85	3

Con la función definida a partir de la expresión $f(x) = 0{,}15x$ podemos calcular fácilmente la cantidad de mililitros exactamente para cualquier peso.

Por ejemplo, para un niño de 12,7 kg, la cantidad de mililitros es $f(12{,}7) = 1{,}905$ cada 6 horas.



Interpretación de prospectos. Cantidad de ibuprofeno. Interpolación

Leemos en el prospecto de una cierta marca de ibuprofeno para niños que viene en un frasco con concentración de 40 mg/ml que la dosis administrada de ibuprofeno depende de la edad y del peso del niño. Para niños de 3 meses hasta 12 años, la dosis diaria recomendada es de 20 a 30 mg por cada kg de peso, repartida en tres o cuatro tomas.

Llamamos x a la variable kg de peso del niño. Consideramos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que determinan las cantidades en ml mínima y máxima que deben administrarse **en total al día**.

Si se hace cada 6 horas, es decir, 4 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 4.

Si se hace cada 8 horas, es decir, 3 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 3.

Por lo tanto, $f(x) = \frac{20x}{40}$, $g(x) = \frac{30x}{40}$.

Simplificando, $f(x) = 0{,}5x$, $g(x) = 0{,}75\,x$

Para 14,5 kg la dosis oscila entre $f(14{,}5)$ y $g(14{,}5)$, es decir entre 7,25 ml y 10,875 ml.

Al día

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)*	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
máximo	*g(x)*	7,5	8,25	9	9,75	10,5	11,25	12	12,75	13,5	14,25	15

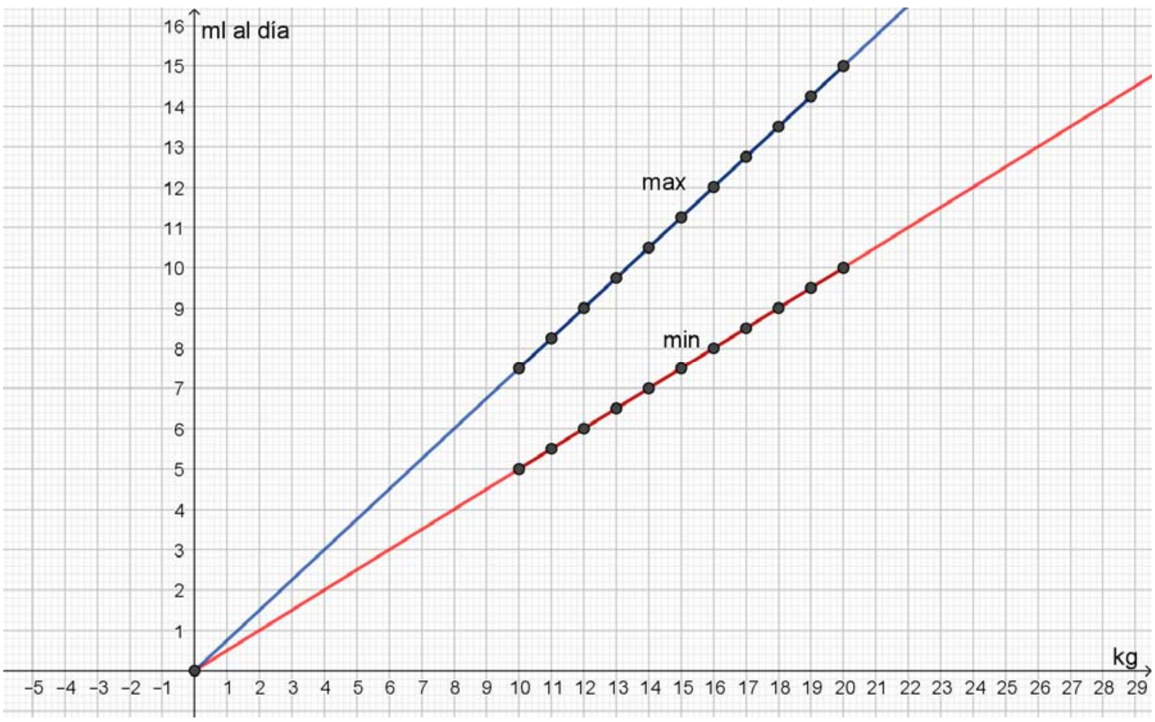
En 3 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)/3*	1,67	1,83	2,00	2,17	2,33	2,50	2,67	2,83	3,00	3,17	3,33
máximo	*g(x)/3*	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5

En 4 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)/4*	1,25	1,38	1,50	1,63	1,75	1,88	2,00	2,13	2,25	2,38	2,50
máximo	*g(x)/4*	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,81	3,00	3,19	3,38	3,56	3,75

Gráficas para la cantidad de ml en un día



Actividad propuesta

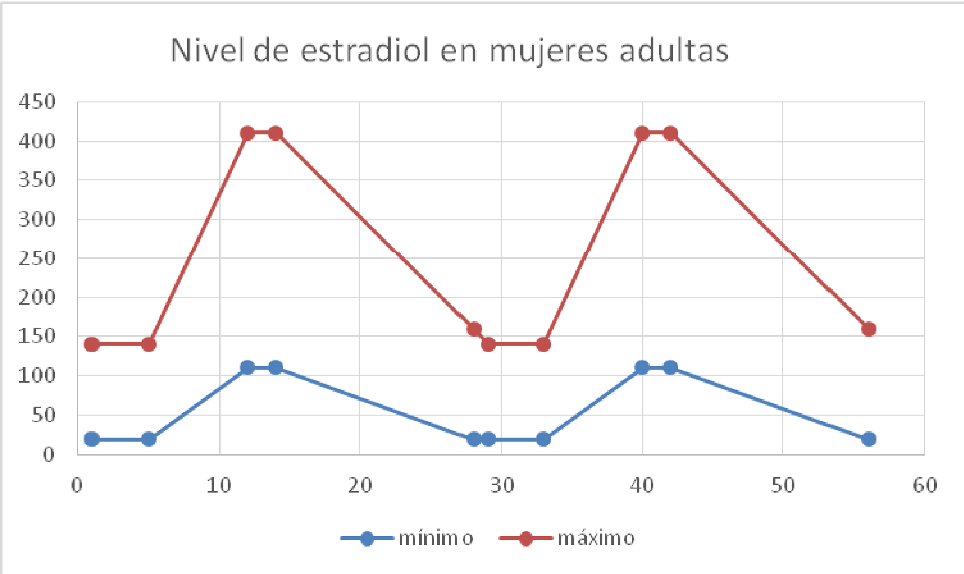
14. A) Si la concentración del frasco de ibuprofeno es de 20 mg/ml y mi niño pesa 16 kg, ¿cuántos ml tendré que administrarle cada 6 horas?

B) Determina la expresión de la función cantidad de ml cada 6 horas en función del peso de un niño.

Gráfica del nivel de estradiol en mujeres adultas

Este es un ejemplo de función periódica. El periodo en este caso es 28 días.

En el eje horizontal se han representado los días y en el vertical los picogramos/mililitro en sangre.



	1	5	12	14	28	29	33	40	42	56
mínimo	19	19	110	110	19	19	19	110	110	19
máximo	140	140	410	410	160	140	140	410	410	160

En hembras adultas -
Fase Folicular - 19 a 140 pg/ml
Momentos antes de la ovulación - 110 a 410 pg/mL
Fase Luteal - 19 a 160 pg/ml
Después de la menopausia - Menos de 35 pg/ml

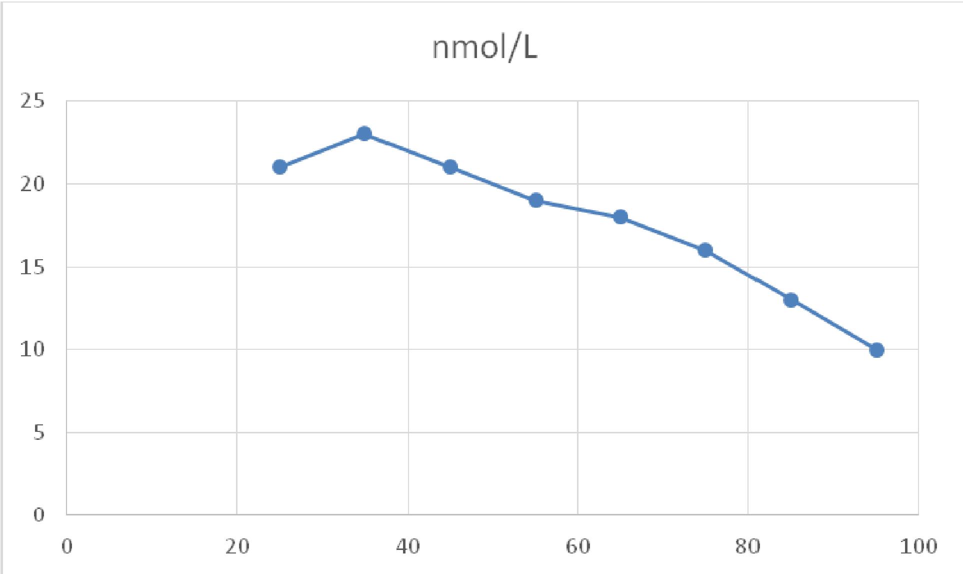
Actividad propuesta

15. De acuerdo con el gráfico, ¿en qué intervalos la función nivel de estradiol es creciente.

¿En qué intervalo es convexa?

¿En qué días se alcanzan los valores mínimos?

Nivel de Testosterona en el hombre en función de la edad



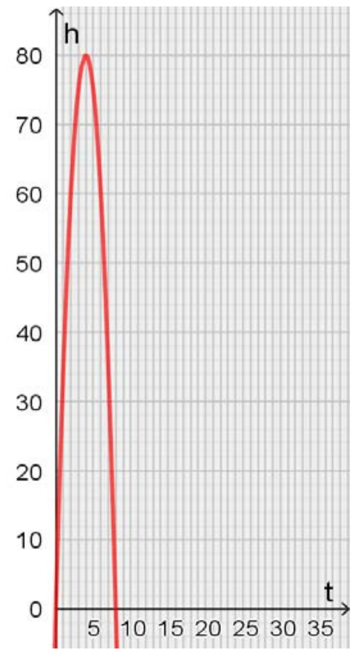
EDAD-nml/L

La tabla muestra los rangos referenciales para la testosterona libre en hombres, de acuerdo a su edad.

edad en años	25	35	45	55	65	75	85	95
nmol/L	21	23	21	19	18	16	13	10
ng/dL	606	663	606	548	519	461	375	288

Actividad propuesta

16. De acuerdo con el gráfico anterior sobre la testosterona, ¿a qué edad se alcanza la máxima concentración de testosterona? ¿En qué intervalo la función es decreciente?



Lanzamiento vertical

Supongamos que se lanza hacia arriba desde el suelo un objeto con una velocidad inicial . Nos proponemos encontrar expresiones matemáticas que determinen las posiciones y velocidades en cada segundo transcurrido, tomando .

Tomamos el sentido positivo hacia arriba y como origen de coordenadas el punto de lanzamiento. Como se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) con aceleración negativa, las ecuaciones del movimiento son:

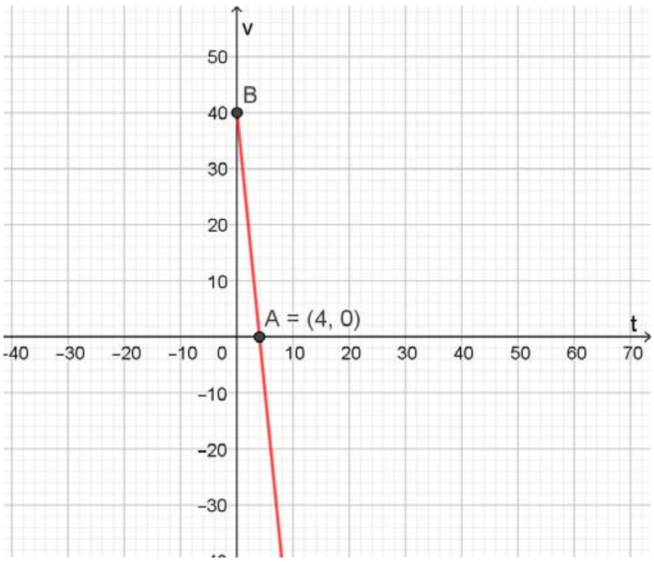
$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$h = v_0 \cdot t - (1/2) g \cdot t^2$$

Supongamos que la velocidad inicial es de 40 m/s . En este caso, tenemos:

$$v = 40 - 10 \cdot t; \; h = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

La gráfica de la velocidad dependiendo del tiempo es una recta mientras que la gráfica de la altura dependiendo del tiempo es una parábola.



Actividad propuesta

17. Calcula el vértice de la parábola correspondiente a un lanzamiento vertical. ¿Qué relación tiene con la altura este punto? Observa la gráfica anterior v-t. ¿Cuánto vale la pendiente de la recta? ¿Cuánto vale la ordenada en el origen? ¿Qué relación existe entre la pendiente y el tipo de movimiento?

La energía cinética.

La energía cinética que tiene un cuerpo viene dada por la fórmula $Ec = (1/2) \cdot m \cdot v^2$.

Para un cuerpo de masa 10 kg que va a una velocidad de x m/s, la Ec es de $(1/2) \cdot 10 \cdot x^2$ Julios.

Podemos escribir la función $f(x) = 5\, x^2$.

Observa que en este fenómeno físico no puedes aplicar reglas de tres simples ya que la energía no es directamente proporcional a la velocidad sino al cuadrado de la velocidad.

Actividad propuesta

18. Encuentra la función que determina la energía cinética de un cuerpo de masa 12 kg. Representa esta función y calcula la energía cinética para una velocidad de 8 m/s.

La energía mecánica.

La energía mecánica de un cuerpo es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

$$Ep = m \cdot g \cdot h$$

$$Ec = (1/2) \cdot m \cdot v^2$$

El principio de conservación de la energía mecánica establece que la energía mecánica de un cuerpo en el que sólo interviene su peso se conserva.

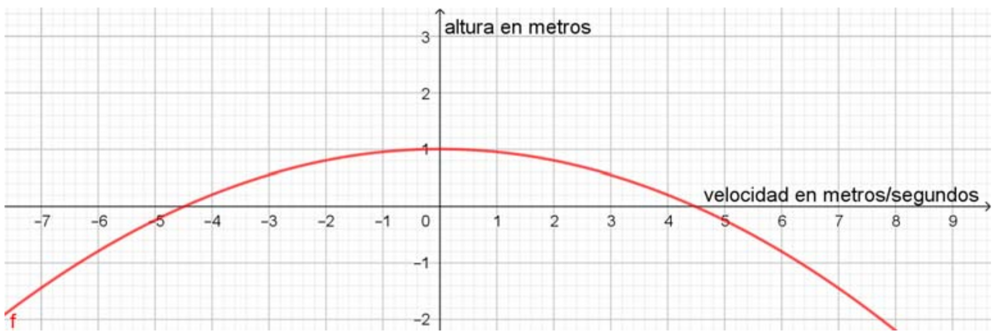
Supongamos que la energía mecánica de un cuerpo es constante igual a 1000 Julios y tiene una masa de 100 kg. Suponiendo que la aceleración de la gravedad es de $10 m/s^2$, la altura $f(x)$ en función de la velocidad x viene dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{20}x^2$.

¿A qué velocidad va cuando se encuentra en el suelo?

Las abscisas de los puntos de corte con el eje OX corresponden a las velocidades donde la altura es igual a cero.

Resolvemos la ecuación $1 - \frac{1}{20}x^2 = 0$. Las soluciones son: $x_1 = -\sqrt{20}$, $x_2 = \sqrt{20}$.

El signo significa que las velocidades tienen sentido opuesto. Por ejemplo, si se trata de un lanzamiento de un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad, cuando vuelve a caer al suelo lo hace con la misma velocidad, pero el sentido es el contrario.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla y escribe su ecuación. Describe qué tipo de relación es.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa las rectas: a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.
3. Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales:
   a) $y = 1'5x$, b) $y = -0'5x$.
4. Estudia la función $y = 0,7x$ en el intervalo $[-2, 5]$.
5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica.
6. Representa las siguientes funciones lineales:
   a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.
7. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (2, 1) y determina su expresión algebraica.
8. Calcula la pendiente de las rectas que pasa por los puntos que se indican y determina su expresión algebraica.
   a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)
9. Dos empresas de telefonía móvil lanzan sus ofertas: la empresa StarTel ofrece por cada llamada pagar 50 céntimos más 2 céntimos por minuto hablado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por llamada y minutos ilimitados. ¿Qué oferta es más económica? Para dar la respuesta, realiza los siguientes pasos, expresando los resultados analítica y gráficamente:
   a) ¿Hay algún momento en que las dos ofertas sean iguales?
   b) Si hablo una media de 15 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?
   c) Si hablo una media de 35 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?
   d) Si hago una media de 10 llamadas al día de 3 minutos de duración, ¿qué oferta me conviene?
   e) Si hago una media de 2 llamadas al día de 30 minutos de duración, ¿qué oferta es la mejor?
   f) ¿Qué oferta es más económica?
10. El escritor Jaime Joyce tiene distintas ofertas editoriales para publicar su última novela. La editorial Dole le ofrece 100 €, además del 20 % de cada libro que venda; la editorial Letrarte le ofrece 350 €; y la editorial Paco le ofrece según la venta de libros: 50 € si vende hasta 250 libros, 100 € si vende hasta 500 libros, 300 € si vende hasta 1000 libros y 500 € si vende más de 1000 libros. Entre todas las editoriales, ¿cuál crees que es mejor oferta para Jaime?

Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina los elementos de las parábolas siguientes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones definidas a trozos

15. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

16. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

17. Indica los intervalos donde la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 2 \\ -x^2 + 4 & si\ x > 2 \end{cases}$ es creciente.

18. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cuál de las siguientes funciones lineales es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$

4. Indica cuál de las siguientes funciones cuadráticas es simétrica respecto del eje de ordenadas:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas es *más estrecha* que $y = x^2$:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7. Indica cuál de las siguientes parábolas abre hacia arriba:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

8. Indica cuál de las siguientes parábolas no corta al eje OX:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

9. Indica cuál de las siguientes funciones es siempre decreciente:

a) $y = -5x+1$ b) $y = 5x^2+6x$ c) $y = 3x-8$ d) $y = -x^2$

10. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$