APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 6

Geometría

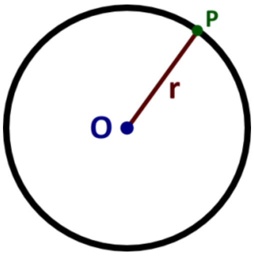
Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 6 Geometría

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

Muchas veces definimos una figura geométrica como los puntos del plano que cumplen una determinada condición. Decimos entonces que es un *lugar geométrico del plano*.

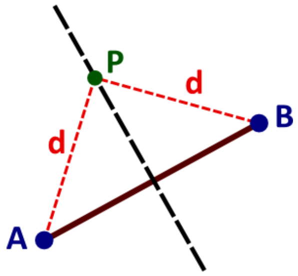


1.1. La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto del mismo (el centro) es un valor determinado (el radio).

Todos los puntos de la circunferencia tienen una distancia igual al radio (*r*) del centro (*O*).

1.2. Mediatriz de un segmento

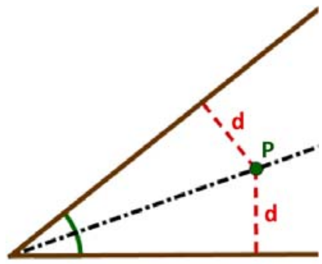


La **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo.

Un punto *P* de la mediatriz verifica que está a la misma distancia de *A* que de *B*. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la mediatriz.

La mediatriz es una recta perpendicular al segmento y pasa por el punto medio del mismo.

1.3. Bisectriz de un ángulo



Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.

Un punto *P* de la bisectriz verifica que está a la misma distancia de las dos rectas que forman el ángulo. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la bisectriz.

La bisectriz pasa por el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.

Actividades propuestas

1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?

2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?

3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?

4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

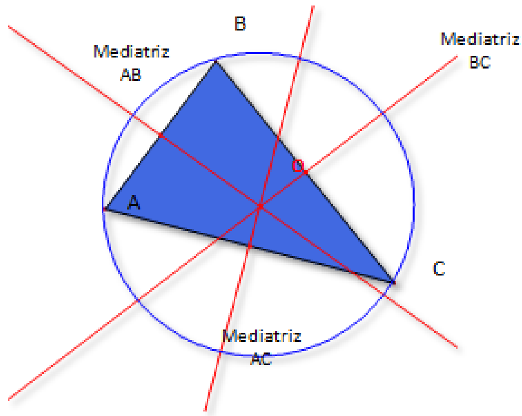
1.4. Rectas y puntos notables de un triángulo

Recuerda que:

En cualquier triángulo podemos encontrar sus mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.

Mediatrices. Circuncentro.

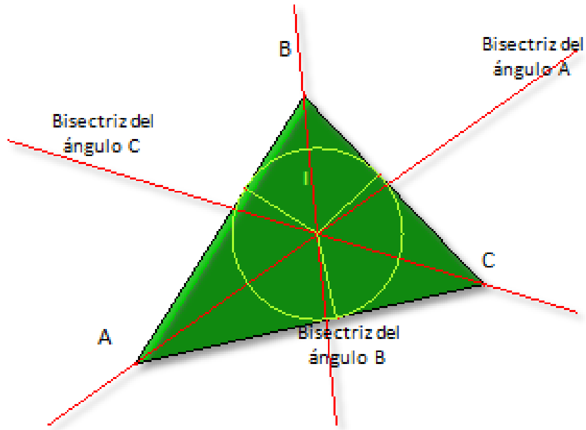
Circuncentro O



Las mediatrices se cortan en el circuncentro.
El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices. Es el centro de la circunferencia circunscrita.

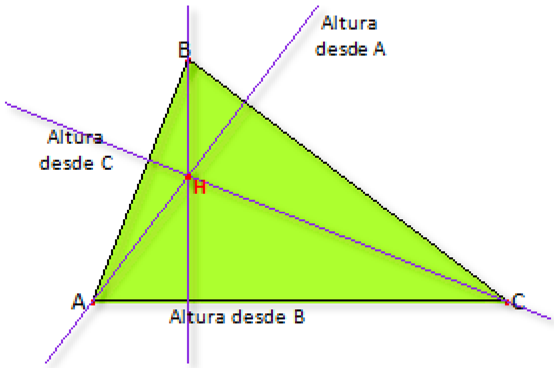
Bisectrices. Incentro.

Incentro I



Las bisectrices se cortan en el Incentro.
El incentro está a la misma distancia de los tres lados. Es el centro de la circunferencia inscrita.

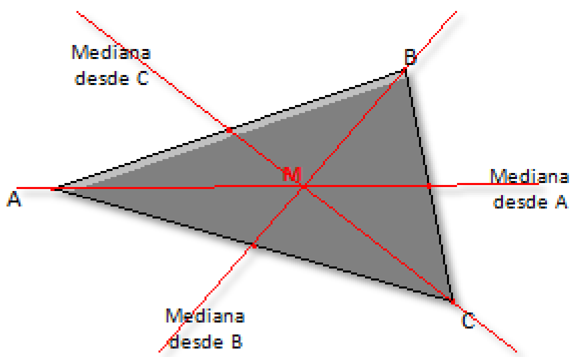
Alturas. Ortocentro.



Ortocentro H

Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto. Se cortan en el ortocentro.

Medianas. Baricentro.



Baricentro M

Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
Se cortan en el baricentro. La distancia del mismo a cada vértice es el doble de su distancia al punto medio del lado opuesto correspondiente.

Si la **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, cada mediatriz de un triángulo equidistará de dos de los vértices del triángulo y es la mediatriz de uno de sus lados. Las tres mediatrices se cortan en un punto, el **circuncentro**, que, por tanto, distará lo mismo de cada uno de los tres vértices del triángulo, y es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, que pasa por sus tres vértices.

Si la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo, ahora cada una de las tres bisectrices de un triángulo equidistará de dos de los lados del triángulo. Las tres bisectrices se cortan en un punto, el **incentro**, que, por tanto, equidista de los tres lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

En cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*. Esta recta contiene otros puntos notables. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.

Actividades propuestas

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.

6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.

7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

8. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?

9. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?

10. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?

11. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?

12. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?

13. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?

14. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?

15. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.

16. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

17. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]

1.5. Uso de Geogebra para el estudio de los puntos y rectas notables de un triángulo

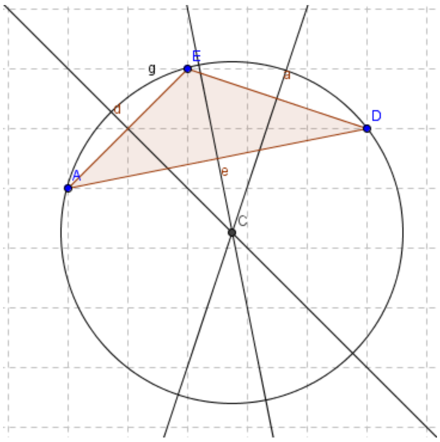
Se utiliza el programa **Geogebra** para determinar el *circuncentro*, el *incentro* y el *baricentro* de un triángulo, estudiar sus propiedades y dibujar la *recta de Euler*.

Actividades resueltas

Una vez abierto el programa en la opción del menú **Visualiza**, oculta **Ejes** y activa **Cuadrícula.**

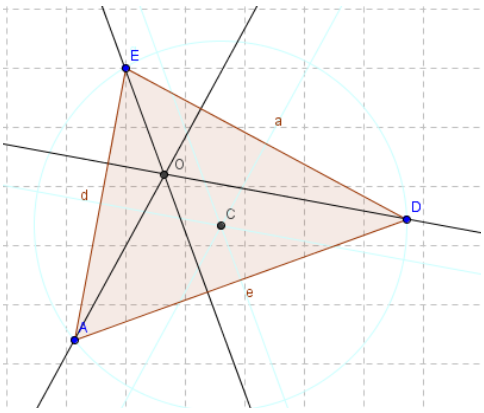
Circuncentro:

Dibuja las tres mediatrices de un triángulo y determina su circuncentro.



- Define tres puntos *A*, *D* y *E*, observa que el programa los define como *A, B* y *C*, utiliza el botón derecho del ratón y la opción **Renombra** para cambiar el nombre.
- Con la herramienta **Polígono** activada dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos. Observa que cada lado tiene la misma letra que el ángulo opuesto con minúscula.
- Con la herramienta **Mediatriz** dibuja las mediatrices de dos lados, los segmentos *a* y *d*.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el punto común de estas rectas y con **Renombra** llámalo *C*. Dicho punto es el *circuncentro* del triángulo.
- Dibuja la **Mediatriz** del segmento *e* y observa que pasa por el punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Utiliza el **Puntero** para desplazar los vértices *A*, *D* o *E* y comprobar que la circunferencia permanece circunscrita al triángulo.

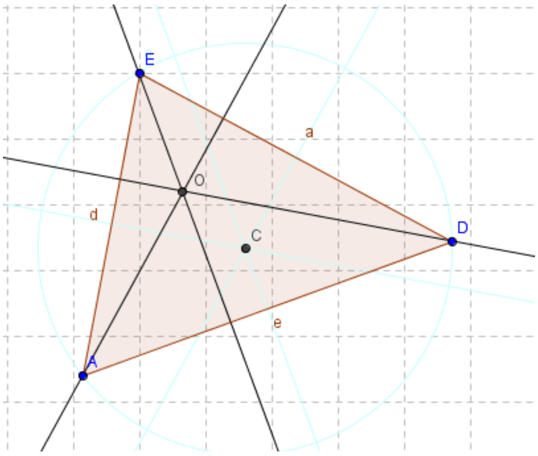
Ortocentro:



Dibuja las tres alturas de un triángulo y determina su ortocentro.

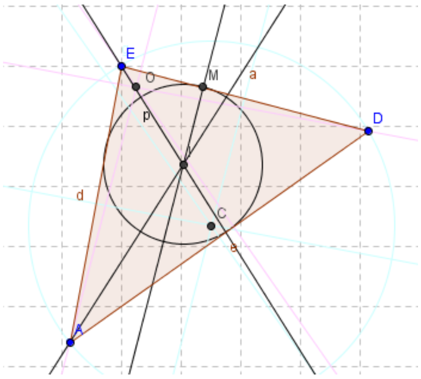
- En el mismo triángulo cambia el color de las mediatrices y la circunferencia situándote con el ratón sobre el trazo o sobre su ecuación y con el botón derecho elige en **Propiedades, Color** un azul muy próximo al blanco.
- Dibuja dos alturas con la herramienta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa te pide que el punto por el que vas a trazarla y la recta o el segmento respecto al que es perpendicular.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el *ortocentro* como el punto de corte de las dos alturas y con **Renombra** denomínalo *O*.
- Dibuja la tercera altura y comprueba que pasa por el *ortocentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.

Incentro:

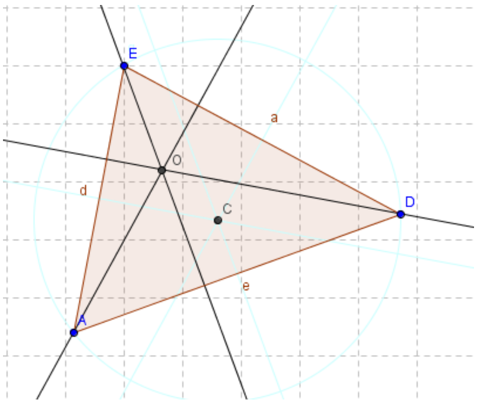


Dibuja las tres bisectrices de un triángulo y determina su incentro.

- Cambia el color de las alturas como en la construcción anterior, ahora con color rosa pálido.
- Con la herramienta **Bisectriz** dibuja dos bisectrices. Observa que para determinar la bisectriz de un ángulo es suficiente señalar tres puntos que pueden ser los vértices del triángulo en el orden adecuado.
- Determina el *incentro* con **Intersección de dos objetos** como el punto de corte de las dos bisectrices y con **Renombra** denomínalo *I*.
- Dibuja la tercera bisectriz y comprueba que siempre pasa por el *incentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Traza desde el punto *I* una **Recta perpendicular** a uno de los lados y con **Intersección de dos objetos** calcula el punto de corte entre esta recta y el lado del triángulo y con **Renombra** llámalo *M*.
- Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.
- Desplaza con el **puntero** los vértices del triángulo para comprobar que la circunferencia permanece inscrita al triángulo.



Baricentro:



Dibuja las tres medianas de un triángulo y determina su baricentro.

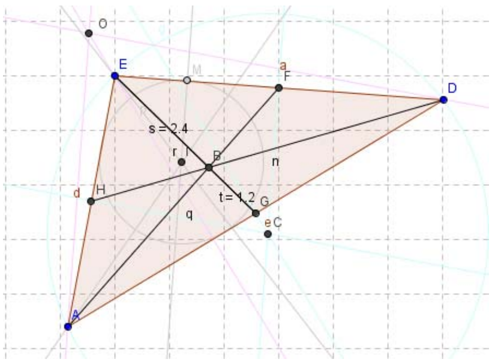
- Cambia el color de las bisectrices, del punto *M* y de la circunferencia inscrita, con gris muy pálido, como en las construcciones anteriores.

- Con la herramienta **Punto medio o centro** calcula los puntos medios de dos lados. Si el programa nombra alguno con la letra *B*, utiliza **Renombra** para llamarlo *H*.

- Con la herramienta **Segmento entre dos puntos** dibuja dos medianas y con **Intersección de dos objetos**, su punto de corte, el **baricentro**, que llamarás *B*.

- Traza la tercera mediana y verifica que el baricentro pertenece a este segmento desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.

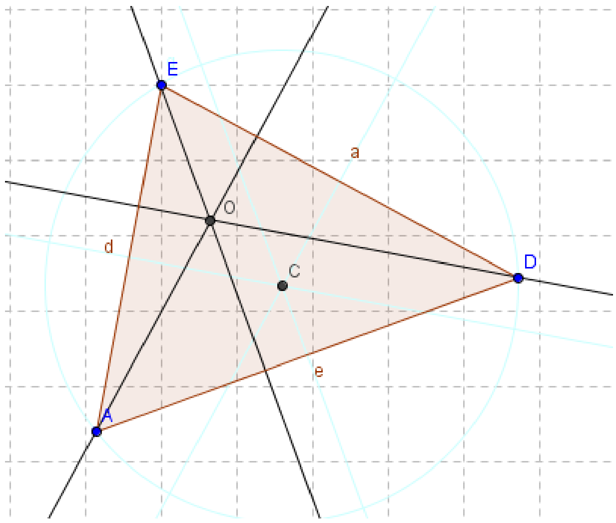
- Activa **Segmento entre dos puntos** y determina los dos segmentos determinados por el baricentro en una de las medianas.



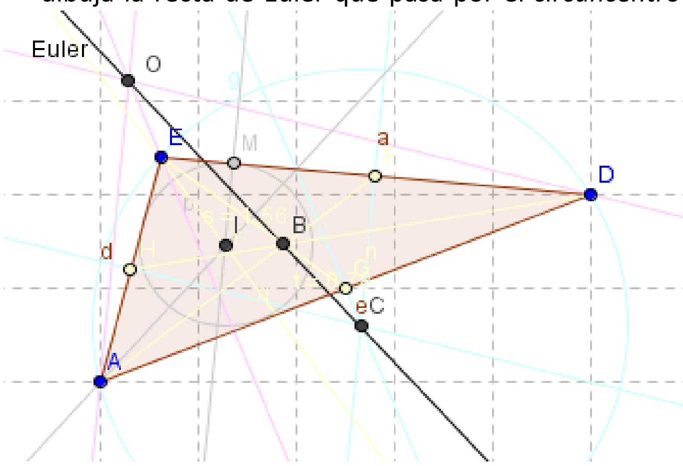
- Activa **Distancia** para medir estos segmentos.
- Desplaza los vértices del triángulo con el **Puntero** y observa la relación que existe entre las medidas realizadas.

Recta de Euler

Dibuja la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro.



- Cambia el color de las medianas, de los puntos medios de los lados y de los dos segmentos de la mediana, con amarillo muy pálido.
- Con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** dibuja la recta de Euler que pasa por el *circuncentro* y



el *ortocentro* y utiliza **Renombra** para llamarla *Euler*. Comprueba que el baricentro pertenece a la recta de Euler y que el incentro no siempre pertenece.

Actividades propuestas

18. Repite las actividades resueltas con *Geogebra*. Modifica a tu gusto colores y líneas.

19. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.

20. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.

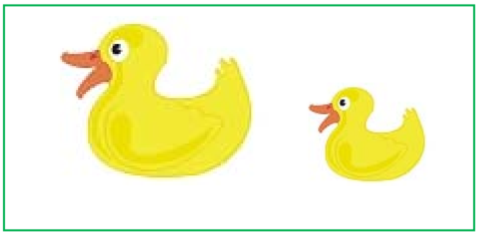
21. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.

22. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?

23. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

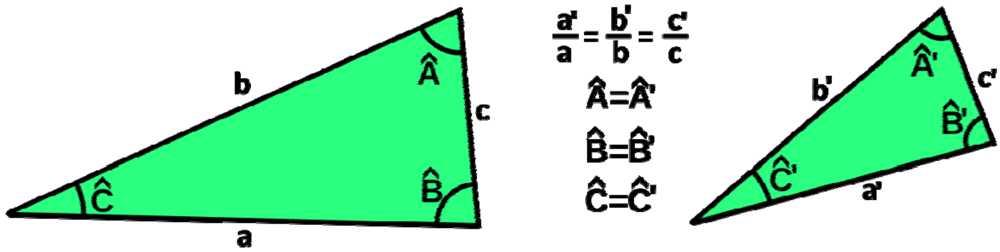


Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.

Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Dos triángulos son semejantes sí:

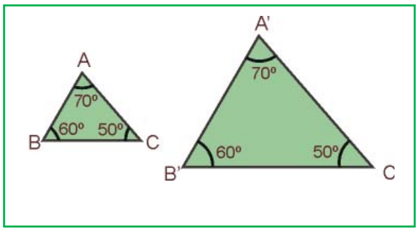
Primero: Tienen dos ángulos iguales.

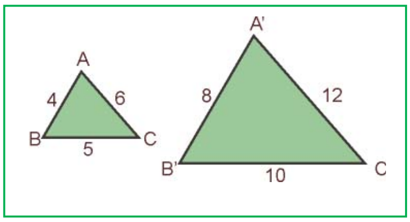
Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

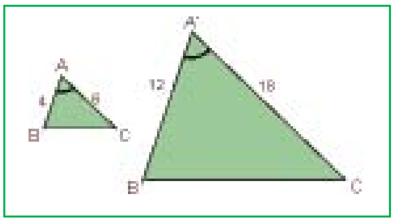
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en posición *Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo







Actividades propuestas

24. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.

c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm

d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

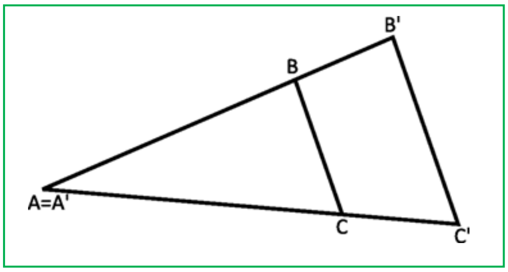
25. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

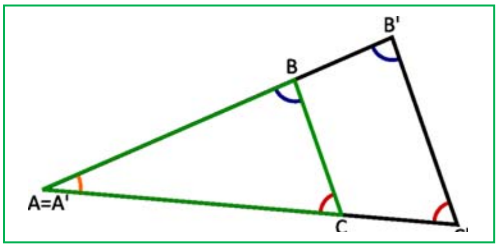
b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 8 cm, ¿a'?

26. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

2.3. Triángulos en posición de Tales



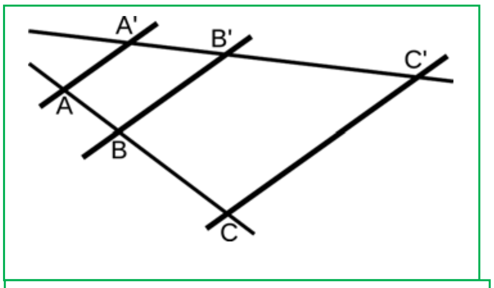
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

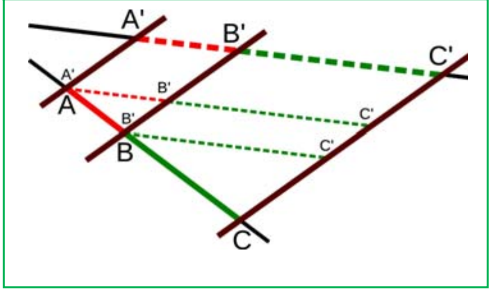


Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los triángulos son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

2.4. Teorema de Tales





El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes y que por lo tanto se establece que:

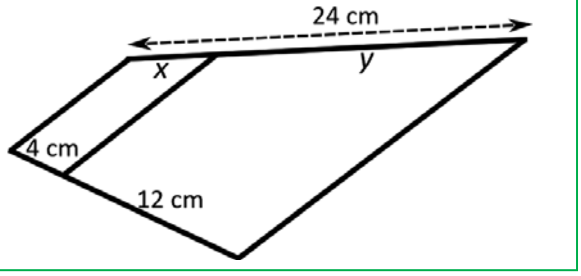
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

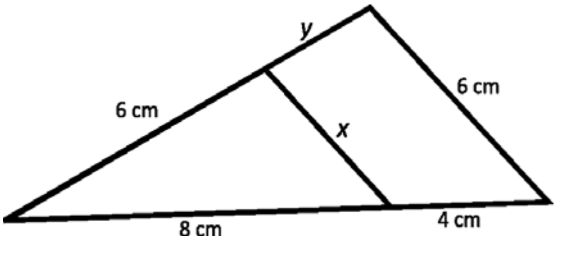
Actividades propuestas

27. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.

a)



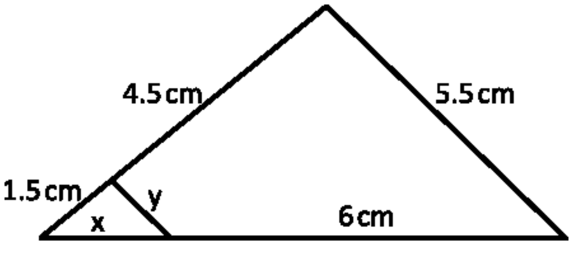
b)

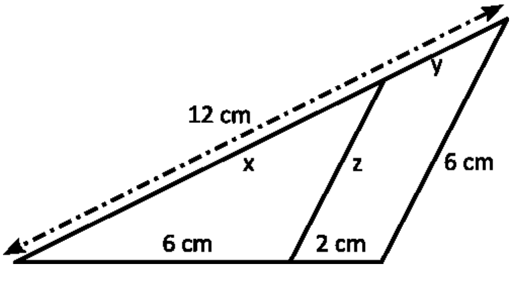


28. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

30. Calcula las longitudes que se indican:

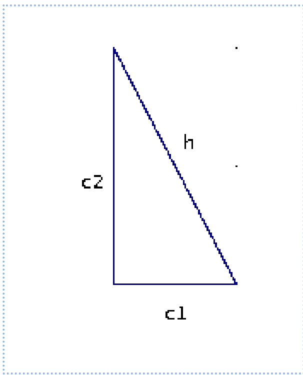




3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

3.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

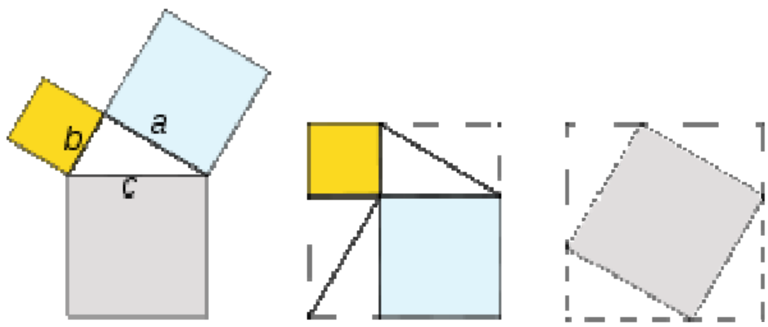
Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 *cm* y 24 *cm*, su hipotenusa vale 26 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26 \ cm.$$

Interpretación del teorema de Pitágoras



Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2, c_2^2. Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*,

en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.
Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Actividades propuestas

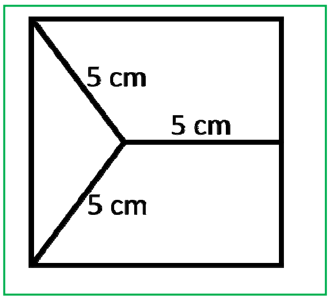
31. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

32. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.

33. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14,7 *km* y 5,9 *km*



34. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:

35. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

40. Una portería de fútbol mide 7,32 m de ancho por 2,44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:

a) Un tiro directo a la base del poste.

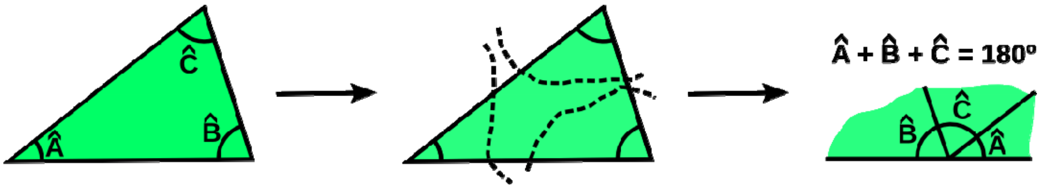
b) Un tiro directo a la escuadra.

41. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.

42. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

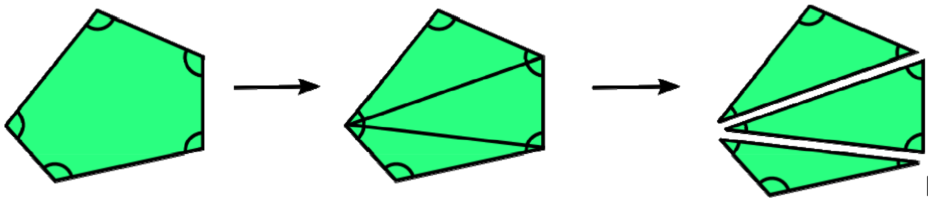
3.2. Suma de ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es (*n* – 2)·180º.

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

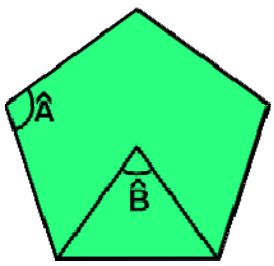


Por lo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180º	Cuadrilátero	180º · 2 = 360º
Pentágono	180º · 3 = 540º	Hexágono	180º · 4 = 720º

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos centrales es* 180 · 3 = 540º.

Por lo tanto el **ángulo interior**: $\hat{B} = \frac{540^{o}}{5} = 108^{o}$

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^{o}}{5} = 72^{o}$

Actividades propuestas

43. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.

44. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.

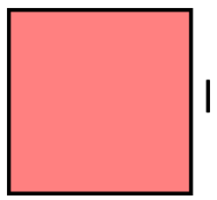
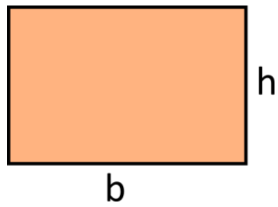
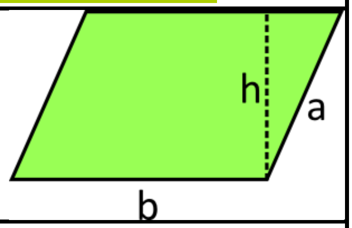
45. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 36º y 72º, ¿cuánto puede medir el ángulo que falta?

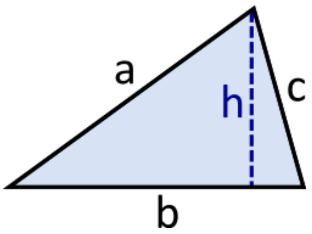
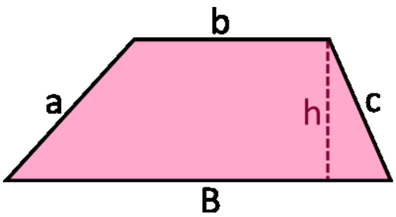
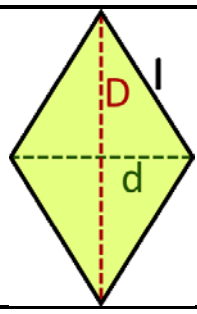
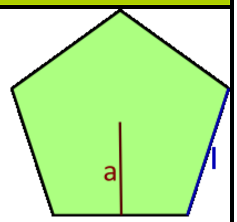
46. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 108º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?

47. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

3.3. Longitudes y áreas de figuras poligonales

Recuerda que:

Cuadrado	Rectángulo	Romboide
		
Perímetro: P = $4l$ **Área: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$ **A** = $b \cdot h$	$= 2b + 2a$ **A** = $b \cdot h$

Triángulo	Trapecio	Rombo	Polígono regular de *n* lados
			
P = $a + b + c$ A = $\frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$ A = $\frac{B+b}{2} \cdot h$	l A = $\frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$ A = $\frac{P \cdot a}{2}$

Actividades propuestas

48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.

49. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.

50. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 100 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.

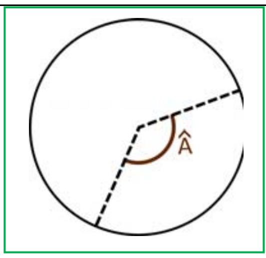
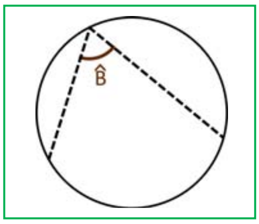
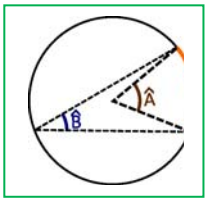
51. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.

52. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es la apotema del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

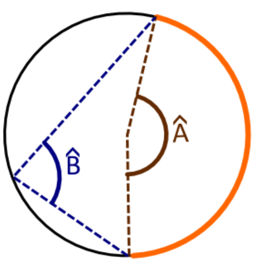
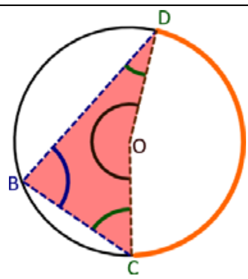
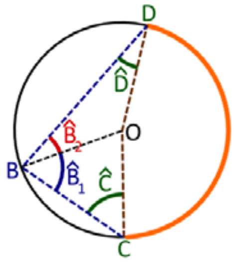
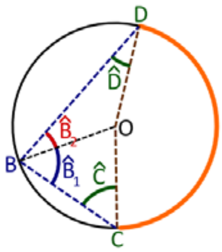
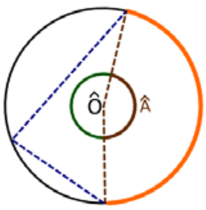
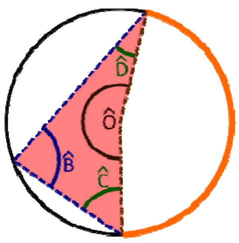
53. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm^2. Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]

3.4. Ángulos de la circunferencia

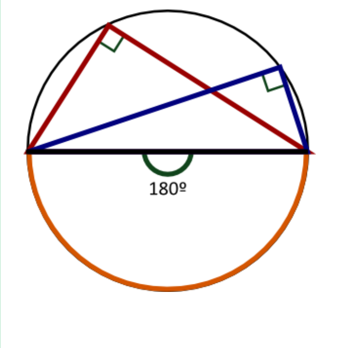
En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B}=\frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración de la propiedad		
		
Debemos comprobar que el ángulo $\hat{B}$ es la mitad de $\hat{A}$. $2\hat{B}=\hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero *BCOD* y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360º.	*BO* y *OD* son radios de la circunferencia. Por lo tanto *BDO* es isósceles y $\hat{B}_2$ y $\hat{D}$ son iguales.
		
Lo mismo para $\hat{B}_1$ y $\hat{C}$ Entonces $\hat{C}+\hat{D}=\hat{B}_2+\hat{B}_2=\hat{B}$	Además el ángulo Ô del cuadrilátero mide 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B}+(\hat{C}+\hat{D})+\hat{O}=360º$. $\hat{B}+(\hat{B})+360º-\hat{A}=360º$. 2 $\hat{B}=\hat{A}$

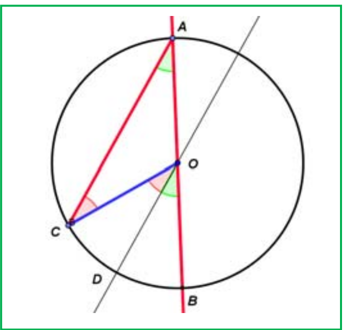
Actividades propuestas



54. Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa. Observa la figura y razona la afirmación.

55. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

56. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?



57. ***Otra demostración. Intenta comprenderla. T***razamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

3.5. Longitudes y áreas de figuras circulares

Ya sabes que:

El **número π** se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Ya sabes que es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r, entonces su diámetro mide $2r$, y su longitud, por la definición de π, mide $2 \cdot \pi \cdot r$.

Longitud de la circunferencia = $2 \cdot \pi \cdot r$.

Para calcular la l**ongitud de un arco de circunferencia** que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360.$$

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

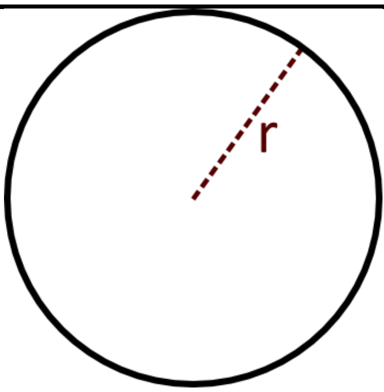
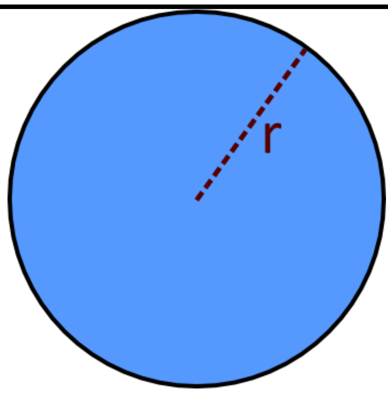
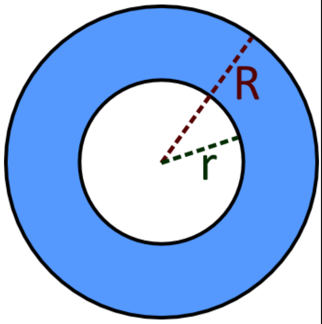
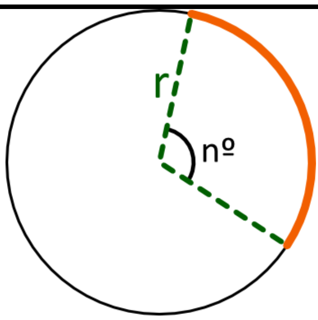
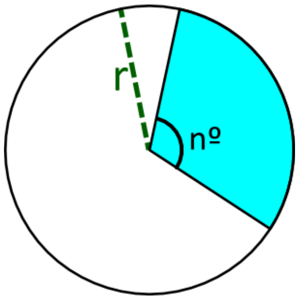
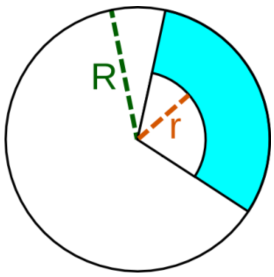
$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo.

En resumen

Longitud de la circunferencia	**Área del círculo**	**Área de la corona circular**
		
L = $2 \cdot \pi \cdot r$	**A** = $\pi \cdot r^2$	**A** = $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
π es la razón entre el la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3,14, otra 3,1416 y otra 3,141592		
Longitud del arco de circunferencia	**Área del sector circular**	**Área del trapecio circular**
		
$L = \frac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 5 *cm* tiene una longitud L = $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10 \cdot \pi \approx 31{,}416$.
- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es:

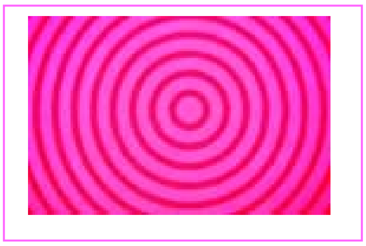
$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360 = 60 \cdot \pi / 16 \approx 11{,}78 \text{ } cm.$$

- El área de un círculo de radio 8 *cm* es A = $64\ \pi \approx 201{,}06$ *cm*^{2}. Y el de un círculo de 10 *cm* de radio es A = $\pi \approx 314{,}16$ *cm*^{2}.

- El área de un círculo de diámetro 10 m es A = 25π ≈ 78,54 m^2.
- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* y 5 *cm* es igual a: A = π·(R^2 – r^2) = π·(9^2 – 5^2) = π·(81 – 25) = π·56 ≈ 175,93 cm^2.
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 10 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: π·10^2 = 100 π, y hallamos la proporción:
  - A_S = 100π·90/360 = 25π ≈ 78,54 m^2.
- Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 10 *m* y altura 10 *m*, A_T = 10·10/2 = 50 m^2. Luego el área del segmento es:

A = A_S – A_T = 78,54 – 50 = 28,54 m^2.

Actividades propuestas



58. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

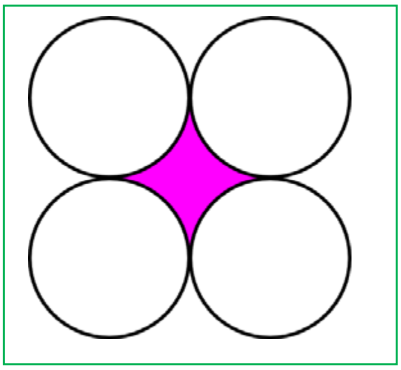
59. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

60. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

61. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

62. Determina el área del triángulo equilátero de 10 cm de radio.

63. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.



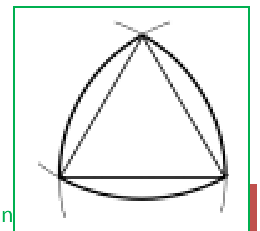
64. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.

65. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

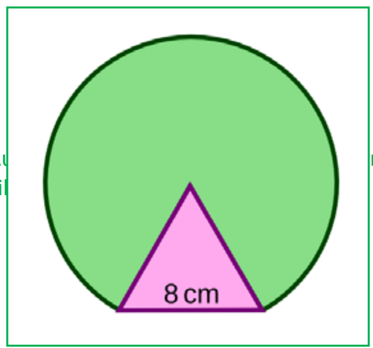
66. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

67. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.

68. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga la misma área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?



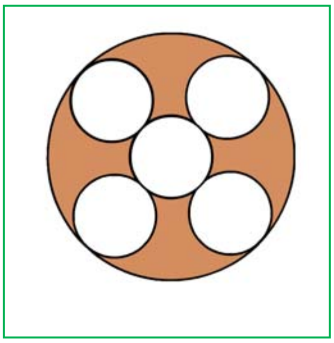
69. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que

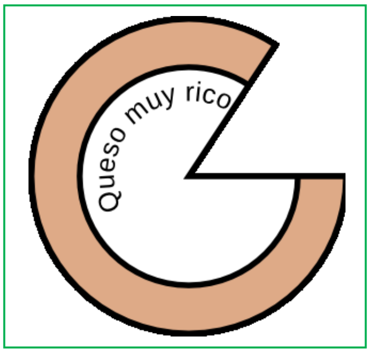


pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo equilátero de 2 metros de lado.

70. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

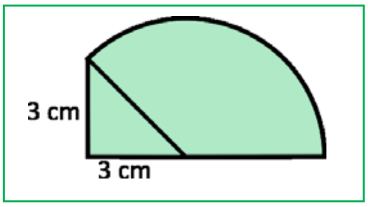
Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



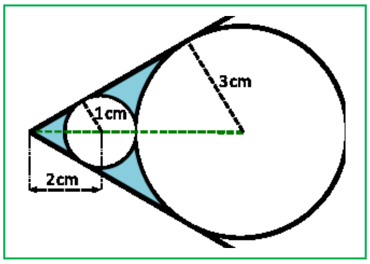


71. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?

72. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?

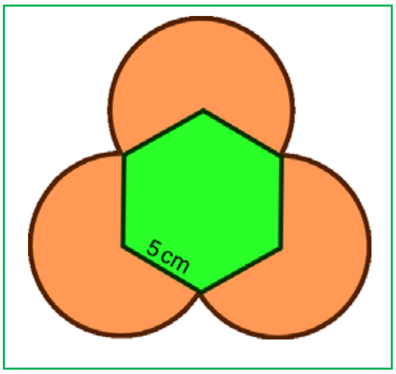


73. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.



74. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?

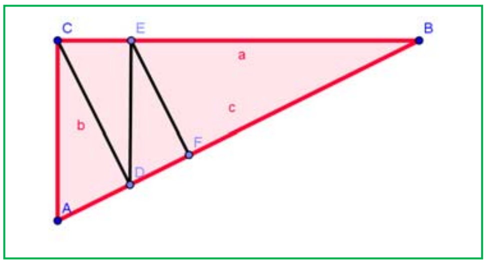
75. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

2. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



3. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.

4. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

5. El mapa a escala 1:3000000 de un pueblo tiene un área de 2500 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

6. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

7. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Ángulos, longitudes y áreas

8. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado *a*, el lado *a* y el *c*.

9. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

10. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.

11. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

12. Calcula la longitud de una circunferencia cuya círculo tiene una superficie de mide 50 cm^2.

13. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?

14. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?

15. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a *n*. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, …. a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

16. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm^2 ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?

17. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?

18. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1,5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

19. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.

20. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.

21. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?

22. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

23. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.

24. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.

25. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.

26. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.

27. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.

28. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.

29. Un triángulo mide de altura π y de base $\pi + 1$. ¿Es rectángulo?

30. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

31. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

32. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.

33. Calcula la generatriz de un cono de radio de la base 5 m y de altura 7 m.

34. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pié está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia x y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?

35. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?