



APUNTES DE
PROCESOS E
INSTRUMENTOS
MATEMÁTICOS
GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Sistemas

*Profesora Ana María
Zarco García*

Educación de adultos



Unidad didáctica 5: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde a , b , a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en xy .

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2 .

Actividades propuestas

1. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

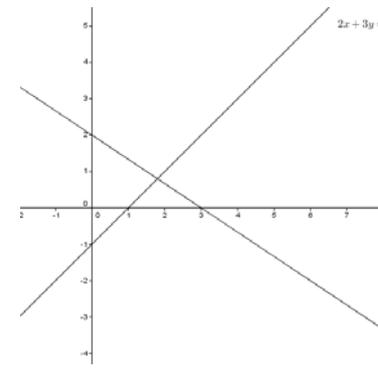
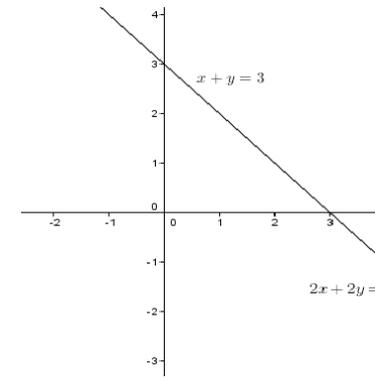
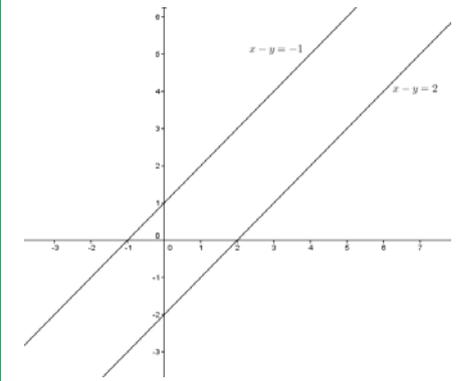
$$\text{c) } \begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$$

2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

- 1) **Compatible determinado:** el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.
- 2) **Compatible indeterminado:** el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES**.
- 3) **Incompatible:** el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS**.

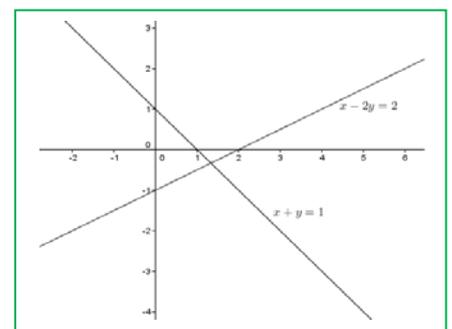
		
Compatible determinado	Compatible indeterminado	Incompatible
Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas

Actividades resueltas

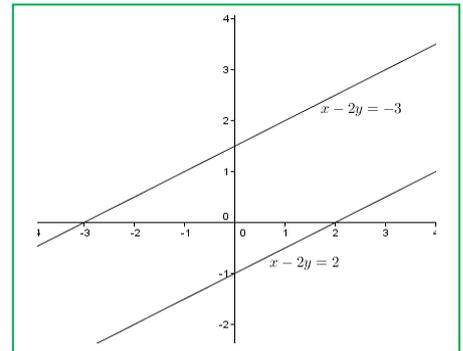
- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:
 - a) Compatible determinado
 - b) Incompatible
 - c) Compatible indeterminado

Solución:

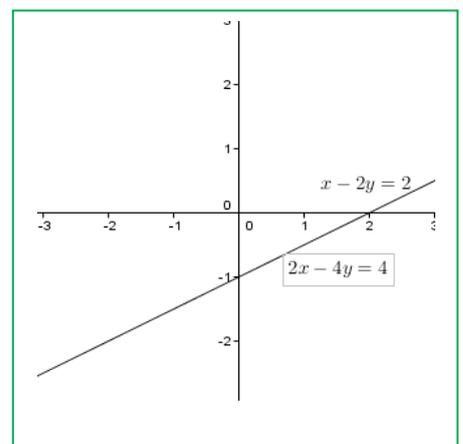
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

2. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \frac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y - 1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot (1) = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

4. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de x o y sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la x sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$2x - 3 \cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

6. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

- 1.- Comprender el enunciado
- 2.- Identificar las incógnitas
- 3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico
- 4.- Plantear el sistema y resolverlo
- 5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7.$$

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es $32 + 7 = 39$ y la diferencia es $32 - 7 = 25$.

Actividades propuestas

6. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?
7. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
8. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$a) \begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$a) \begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$$

4. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

$$a) \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$$

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

$$a) \begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

6. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado
y = 1

$$a) \begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$$

Incompatible
indeterminado

Incompatible

$$b) \begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$$

Su solución sea x = -1 e y = 1

Su solución sea x = 2 e

c)

Compatible

$$d) \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \\ ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$$

f)

7. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
8. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
9. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
10. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

$$a) \begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$$

Problemas

11. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

12. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

13. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

14. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

15. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

16. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

17. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

18. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

19. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

20. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

21. La suma de dos números es 5 y su producto es -84. ¿De qué números se trata?



22. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?



23. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.
24. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números
25. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

26. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?



27. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?
28. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

29. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

30. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?



31. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

32. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

33. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

34. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

35. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

36. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

