APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS.

UNIDAD DIDÁCTICA 3

Polinomios

Profesora Ana María Zarco García
Educación de adultos

Unidad Didáctica 3.Polinomios.

1 Introducción

En este tema generalizamos el modelo numérico introduciendo el lenguaje algebraico y las operaciones entre expresiones algebraicas de una variable.

La palabra álgebra se debe al matemático árabe AL-KHOWARIZMI, que murió en la primera mitad del siglo IX. Su obra más importante se titula AL-JABR WA'L MUQABALAH.

Una expresión algebraica es un conjunto de números y variables (letras) entre las cuales existen las operaciones de suma, resta, producto, división, potencia o raíz.

Significado

"AL-JABR"= álgebra=restauración o complementación.

"MUQABALAH"= reducción o compensación.

Ejemplo:

$$3xy^2 + \sqrt[3]{x+5} - 5$$

Observa que la operación producto no suele escribirse entre las variables y los números.

Debemos entender:

$$3 \cdot x \cdot y^2 + \sqrt[3]{x+5} - 5$$

2 Monomios, grado de un monomio, monomios semejantes, operaciones con monomios.

Un monomio en la variable x con coeficiente real es una expresión algebraica de la forma:

$$ax^n$$

donde *a* es un número real y **n** es un número entero positivo o es cero.

El monomio x^0 se identifica con el número 1.

Al número *a* se le llama coeficiente o parte numérica del monomio. A x^n se le llama parte literal del monomio.

Si *a* es distinto de cero entonces se dice que *n* es el grado del monomio.
Si *a* es cero entonces el grado del monomio se dice que es infinito.

Ejemplo de monomio:

$$3x^5$$

¿La expresión algebraica $\sqrt{2x}$ es un monomio? Razona la respuesta.
¿Y la expresión $\frac{1}{x}$?
¿Es razonable que el grado del monomio nulo sea infinito?

Ejercicios

1. Completa la tabla:

Monomio	Coeficiente	Grado
$-3x$		
0		
5		
x		
$-x$		
	-1	2
$\frac{2}{3}x^2$		
$\sqrt{2}x$		
$-\frac{1}{3}x^2$		

Dos monomios en la indeterminada *x* se dice que son ***semejantes*** si tienen la misma parte literal.

<u>Operaciones con monomios:</u>

Dos monomios que sean semejantes se pueden sumar o restar. Para sumar dos monomios semejantes se suman los coeficientes y se deja igual la parte literal.
Para restar dos monomios semejantes se restan los coeficientes y se deja igual la parte literal.

Ejemplo 1:

$$4x^5 + 6x^5 = 10x^5$$

Ejemplo 2:

$$14x^7 - 6x^7 = 8x^7$$

Ejercicios

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $\boldsymbol{x + 2x - 4x + 8x}$	**b)** $\boldsymbol{3x - 4x + 7x + 4x}$	**c)** $\boldsymbol{-2x^2 + x^2}$
d) $\boldsymbol{\frac{2}{3}x - x}$	**e)** $\boldsymbol{2x - \frac{1}{3}x + x}$	**f)** $\boldsymbol{3x^5 + 6x^5}$

<u>El producto</u> de dos monomios no nulos en la indeterminada *x* es igual a un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados.
El producto de un monomio por el monomio nulo es el monomio nulo.

Ejemplo 1 :

$$4x^5 \cdot 6x^2 = 24x^7$$

Ejemplo 2:

$$0 \cdot 6x^7 = 0$$

Ejercicios

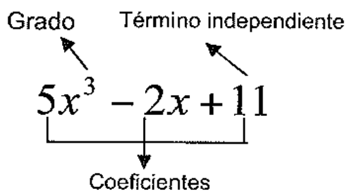
3. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $\boldsymbol{x \cdot 1}$	**b)** $\boldsymbol{1 \cdot x}$	**c)** $\boldsymbol{-1 \cdot x^2}$
d) $\boldsymbol{x \cdot x}$	**e)** $\boldsymbol{x \cdot x^2}$	**f)** $\boldsymbol{x^2 \cdot x^8}$

¿La expresión algebraica $14x/(2x^5)$ es un monomio?

3 Polinomios, grado de un polinomio, operaciones con polinomios.

- Un ***polinomio*** es la suma o resta de varios monomios no semejantes.
- Cada uno de los monomios que componen un polinomio se llama ***término***.
- Los ***coeficientes*** de un polinomio son todos los coeficientes de los términos que componen el polinomio.
- Se llama ***polinomio nulo*** al polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a cero.
- El ***grado*** de un polinomio no nulo es el máximo de los grados de los términos que componene el polinomio.
- El grado del polinomio nulo es infinito.
- El término de grado cero se llama ***término independiente***.



Los coeficientes son 5,0,-2,11.

Un polinomio se dice que está **completo** cuando todos los términos del grado cero al grado mayor tienen coeficientes distintos de cero.

Un polinomio se dice que está ordenado en ***orden creciente*** si en primer lugar escribimos el término independiente (en el caso de que tenga) y a continuación escribimos el resto de términos ordenados de menor a mayor grado.

Ejemplo :

$$\mathbf{2 + 3x - 7x^2 + x^3}$$

Un polinomio se dice que está ordenado en ***orden decreciente*** si escribimos los términos de grado distinto de cero ordenados de mayor a menor grado y a continuación el término independiente en el caso de que tenga.

Ejemplo 1:

$$6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

Ejemplo 2:

$$3x^2 - x$$

Ejercicios

4. Completa la tabla. Fíjate en el ejemplo.

	Coeficientes	Grado
$3x^3 - 5x + 1$	$3, 0, -5, 1$	3
$5x^3 - x^2 + 2x - 7$		
$x^4 - 2x + 1$		
$-2x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 2$		

	Coeficientes	Grado
$x^4 + 2x^3 - 3x$	$1, 2, 0, -3, 0$	4
$-4x^2 + 9$		
$6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x$		
$-5x^3 + 7$		

5. Completa la tabla. Fíjate en el ejemplo.

	Ordenado	Coeficientes	Grado
x^2+3x^3-5+6x	$3x^3+x^2+6x-5$	$3, 1, 6, -5$	3
$3x-2x^3-5+x^2$			
$2+x^4-x$			
$-x^5+-x+x^2+1+x^4-x^3$			
$-2+3x-4x^2+5x^3$			

El ***valor numérico*** de un polinomio *P(x)* en número real dado es el resultado de sustituir la variable por dicho número y realizar las operaciones.

Ejemplo: Calcula el valor de $3x^2+7x-1$ ***para*** $x=2$

Calcula el valor de $3x^2+7x-1$ **para** $x=2$ **y para** $x=-4$

$x=2$	$\Rightarrow$	Sustituimos la x	$\Rightarrow$	$3\cdot2^2+7\cdot2-1$
		Potencias		$3\cdot4+7\cdot2-1$
		Productos		$12+14-1$
		Sumas/restas		25

Ejercicios

6. Calcula el valor de x^3+5x^2-4x+3 para $x=2$ y para $x=-1$

$x=2$	$\Rightarrow$	Sustituye la x	$\Rightarrow$	
		Potencias		
		Productos		
		Sumas/restas		
$x=-1$	$\Rightarrow$	Sustituye la x	$\Rightarrow$	
		Potencias		
		Productos		
		Sumas/restas		

7. Calcula el valor numérico de los polinomios en los valores indicados

Polinomio	$x=-1$	$x=0$	$x=2$
x^3-2x^2+3	$(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3=$ $-1-2+3=0$	$0^3-2\cdot 0^2+3=$	$2^3-2\cdot 2^2+3=$
x^2-3x+1			
$2x^3-8x$			
$-x^2+3x+4$			

Operaciones con polinomios

Suma:

La suma de dos polinomios es el polinomio que resulta de sumar los términos semejantes de ambos polinomios.

Ejemplo:

$$P(x) = 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

$$Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x + 4$$

$$P(x) + Q(x) = 13x^5 + 11x^4 - 2x^3 + 3x + 5$$

Producto de un número por un polinomio

El producto de un número por un polinomio es el polinomio que resulta de múltiplicar por dicho número todos los coeficientes de los términos del polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

$$3 \cdot P(x) = 18x^5 + 27x^4 - 15x^3 + 3x + 3$$

Opuesto de un polinomio

El opuesto de un polinomio es el resultado de cambiar de signo todos los términos de dicho polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

$$-P(x) = -6x^5 - 9x^4 + 5x^3 - x - 1$$

Resta

La resta de dos polinomios es el polinomio que resulta al sumar al primer polinomio el opuesto del segundo.

Ejemplo :

$$P(x) = 5x^2 + 8x + 4$$

$$Q(x) = 3x^2 + 5x + 5$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^2 + 8x + 4 - (3x^2 + 5x + 5) =$$

$$5x^2 + 8x + 4 - 3x^2 - 5x - 5 =$$

$$2x^2 + 3x - 1$$

Ejercicios

8. Dados los polinomios

$P(x) = 5x^2 - 2x + 3$

$Q(x) = -3x^3 + 2x - 4$

calcula

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Producto de un monomio por un polinomio

El producto de un monomio por un polinomio es el polinomio formado por los términos que

Observa

$$-(x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1) =$$

$$-x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

El resultado es el mismo que si multiplicamos por (-1) el polinomio:

$$(-1) \cdot (x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1) =$$

$$-x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

resultan al multiplicar dicho monomio por todos los términos del polinomio dado.

Ejemplo :

$4\cdot(5x^2+3x-5)$	$\rightarrow$	$20x^2+12x-20$
$3x\cdot(-2x^2-5x+3)$	$\rightarrow$	$-6x^3-15x^2+9x$
$-2x^2\cdot(x^2-x-7)$	$\rightarrow$	$-2x^4+2x^3+14x^2$

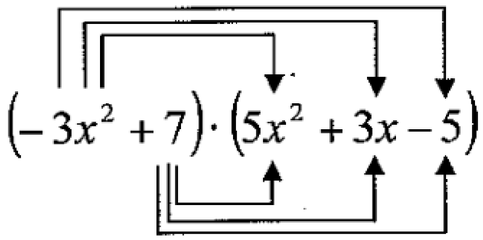
Ejercicios 3

9. Calcula

$-3\cdot(x^2+2x-2)$	$\rightarrow$	
$x\cdot(-2x^2+x+6)$	$\rightarrow$	
$-2x^2\cdot(2x^2-4x-1)$	$\rightarrow$	
$5\cdot(-x^2+3x+1)$	$\rightarrow$	
$4x\cdot(3x^2+3x-2)$	$\rightarrow$	
$3x^2\cdot(2x^2+6x-8)$	$\rightarrow$	
$4x^2\cdot(-9x^2-6x-3)$	$\rightarrow$	
$-3x\cdot(-5x^2+3x-4)$	$\rightarrow$	

__Producto de polinomios__

El producto de dos polinomios es el polinomio cuyos términos resultan de multiplicar todos los términos del primer polinomio por todos los términos del segundo polinomio y agrupar los monomios semejantes.



Ejemplo : Calcula el producto

$$(-3x^2+7)\cdot(5x^2+3x-5)=$$

Se agrupan los monomios

$$-15x^4-9x^3+\overbrace{15x^2+35x^2}^{monomios\ semejantes}+21x-35=$$

$$-15x^4-9x^3+50x^2+21x-35=$$

Ejercicios

10. Calcula

Calcula: $(-x+5)\cdot(3x^2+x+2)$

Multiplica todos los términos del primero por los del segundo	→	
Agrupa términos semejantes	→	

Calcula: $(x^2+3x-2)\cdot(2x^2-3x-1)$

Multiplica todos los términos del primero por los del segundo	→	
Agrupa términos semejantes	→	

Sabías que…

Paolo Ruffini (Valentano, 22 de septiembre de 1765 – Módena, 10 de mayo de 1822) fue un matemático, profesor y médico italiano.

3.1 Regla de Ruffini

Es un método que sirve para hallar los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x + a$.

En el siguiente enlace encontrarás un vídeo que explica el algoritmo:

https://www.youtube.com/watch?v=nLhT2jET7WY

y en esta página encontrar ejercicios interactivos:

http://www.vitutor.com/ab/p/a_8e.html

Explicación del método mediante un ejemplo:

Consideramos los polinomios $P(x) = -3x + 2x^4 + x^2 + 5$ y $Q(x) = x - 2$.

Hallaremos el cociente y el resto de la división $P(x): Q(x)$

Primero: Escribimos $P(x)$ en orden decreciente, es decir, $P(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 5$. Con este orden los coeficientes son: 2,0,1,-3,5.

	2	0	1	-3	5
2					

Hemos colocado a la izquierda el término independiente de $Q(x)$ cambiado de signo.

Segundo: Bajamos el primer coeficiente de $P(x)$

	2	0	1	-3	5
2					
	2				

Tercero: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el número que hemos bajado y colocamos el resultado debajo del segundo coeficiente de $P(x)$ y sumanos.

	2	0	1	-3	5
2		4			
	2	4			

Cuarto: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el último número que tenemos en la parte inferior y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente de $P(x)$ y sumamos.

	2	0	1	-3	5
2		4	8		
	2	4	9		

Volvemos a repetir este paso hasta que ya no queden coeficientes de $P(x)$.

	2	0	1	-3	5
2		4	8	18	30
	2	4	9	15	$\boxed{35}$

Los números que nos aparecen en la última fila excepto el último son los coeficientes del polinomio cociente $C(x)$ en orden decreciente y el último número es el resto de la división.

Es decir:

$$C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 15$$

$$R = 35$$

Comprobación:

Tenemos que comprobar que se verifica la igualdad:

$$Dividendo = divisor \cdot cociente + resto$$

En efecto, $2x^4 + x^2 - 3x + 5 = (x-2) \cdot (2x^3 + 4x^2 + 9x + 15) + 35$.

Ejercicios

11. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

A) $(3x^4 + 2x^3 - 5x + 8) : (x - 3)$
B) $(x^3 - 4x^2 + 9 + 6x) : (x + 3)$

3.2 Teorema del resto: El valor numérico de un polinomio $P(x)$ en un número real *a* coincide con el resto de la división $P(x) : (x - a)$.
El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el número real *a* se denota por $P(a)$.

Ejemplo :

Dado el polinomio $P(x) = -3x + 2x^4 + x^2 + 5$***, calcula*** $P(2)$.

En el apartado anterior hemos visto que el resto de la división $P(x) : (x - 2)$ es 35. Aplicando el teorema del resto deducimos que $P(2) = 35$

Ejercicios

12. Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 + 9x - 3$, calcula $P(-1)$ utilizando el teorema del resto.

4. Identidades notables.

Una ***identidad*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que tengan las variables.
En esta unidad didáctica estudiamos tres identidades: El cuadrado de la suma, el cuadrado de la diferencia y suma por diferencia.
Cuadrado de la suma:

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

Ejemplo:

Desarrolla: $\boldsymbol{(2x + 5)^2}$

Solución: $\boldsymbol{(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25}$

Ejercicios

13. Desarrolla:
a) $\boldsymbol{(3x + 5)^2}$
b) $\boldsymbol{(2x + 4)^2}$

Cuadrado de la diferencia:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x-5)^2$

Solución: $(2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Ejercicios

14. Desarrolla:

$a)$ $(1-3x)^2$

$b)$ $(x-2)^2$

Suma por diferencia:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x+5)\cdot(2x-5)$

Solución. $(2x+5)\cdot(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Ejercicios

15. Desarrolla:

a) $(3x+4)\cdot(3x-4)$

b) $(x-5)\cdot(x+5)$

5. Operaciones combinadas con polinomios.

Ejemplo:

Calcula: $3x\cdot(-3x+7)+3\cdot(2x-3)^2-4\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Potencias	→	$3x\cdot(-3x+7)+3\cdot(4x^2-12x+9)-4\cdot(x-1)\cdot(x+1)$
Productos	→	$-9x^2+21x+12x^2-36x+27-4\cdot(x^2-1)$ $-9x^2+21x+12x^2-36x+27-4x^2+4$
Sumas/restas	→	$-x^2-15x+31$

Ejercicios

16. Calcula

a) $(x+1)^2 + (2-x)^2$

b) $(x-2)^2 + 3\cdot(x^2 + x + 1)$

c) $(3x+4)\cdot(3x-4) - (x+1)\cdot(9x-1)$

d) $(2x+4)^2 + (2x+4)\cdot(2x-4)$

17. Calcula

a) $(3x+2)\cdot(3x-2) + (x+3)^2$

b) $3x\cdot(x-4) + (3-2x)^2 - (4x+2)\cdot(2x+1)$

c) $4\cdot(-x^2+2) + (2x+3)^2$

d) $(x+2)\cdot(2x-3) - (1-3x)^2$

e) $(2x+1)^2 - (2x-1)^2$

f) $(2x+3)^2 - (2x-3)\cdot(2x+3)$

g) $(x-5)\cdot(x+5) + 3x\cdot(x+1)$

h) $(x+3)\cdot(x-3) - x\cdot(x-1) + 9$

6. Traduce al lenguaje algebraico.

Traducir al lenguaje algebraico significa expresar con variables, números y operaciones el lenguaje natural.

Ejemplos:

Cuatro menos un número: $4 - x$

El cuádruplo de un número: $4x$

La cuarta parte de un número: $\frac{x}{4}$

Dos números se diferencian en 4 unidades: $x - y = 4$

El quíntuplo de un número divido entre 3: $5x: 3$

Ejercicios

18. Traduce al lenguaje algebraico:

a) La mitad de un número menos su tercera parte.
b) Número de personas casadas después de celebrarse x matrimonios.
c) Repartir una fortuna entre 7 hermanos.
d) Contenido de 12 botellas de agua de igual capacidad.
e) Duplo de la edad más 25 años.
f) Dos quintos de un número.
g) El triple de un número más 1.
h) Un número menos 3.
i) Tres octavos de un número.
j) La edad de Juan dentro de 16 años.
k) La edad de Pedro hace 4 años.

Ejercicios finales

19. Calcula:

$$(-3x^2+7)\cdot(5x^2+3x-5)-(7x^2+3x-5)$$

20. Escribe tres identidades notables sobre binomios.

21. Desarrolla utilizando identidades notables:

$a)$ $(4x-1)^2$
$b)$ $(x+5)^2$
$c)$ $(x^2+8)\cdot(x^2-8)$
$d)$ $(x^3-2)^2$

22. Traduce al lenguaje algebraico:

a. Una cantidad aumentada el 67%.

b. Una cantidad disminuida el 6%
c. La suma de dos números por su diferencia es igual a cinco.
d. Un número menos su precesor.
e. La suma de tres números consecutivos es mayor o igual a veinte.
f. El triple de un número más su mitad es igual a veintiséis.
g. Dos tercios de la suma de dos números más trece veces su diferencia.
h. Una cantidad aumentada el 7%.
i. Una cantidad disminuida el 30%
j. La suma de dos números por su diferencia es igual a ocho.

23. Desarrolla:

$a)$ $(x^2+4)\cdot(x-1)+(2-x)\cdot(2+x)$

$b)$ $(x+6)^2-3x\cdot(x^2-1)$

24. Calcula el cociente y el resto de la división

$P(x):(x+3), siendo\ P(x)=-2x^5+x^4-x^2+x-1.$

Realiza la prueba de la división.

25. Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x)=x^4-x^2+x-4\ en\ \ x=-2\ y\ en\ x=0.$$

26. Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x)=x^6-x^2+x-4\ en\ \ x=-1\ y\ en\ x=0.$$

27. ¿Es lo mismo (1000+6000)2 que 10002+60002? Justifica la respuesta.

28. Halla el valor de m para que la división sea exacta:

$$(x^2-12x+m):(x+4)$$

29. Factoriza los polinomios siguientes:

$a)$ $5x^2+20x+20$ $\qquad$ $b)$ x^3-4x^2+x+6