

Matemáticas

3º da ESO

Capítulo 1:

Números Racionais

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044029

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:50:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Paco Moya

Tradutora: M^a Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

0.CONVENCHE RECORDAR

- 0.1. PRIORIDADE DAS OPERACIÓNS
- 0.2. USO DE PARÉNTESSES
- 0.3. OPERACIÓNS CON ENTEIROS

1. NÚMEROS RACIONAIS

- 1.1. DEFINICIÓ
- 1.2. FRACCIÓNS EQUIVALENTES
- 1.3. ORDENACIÓ DE FRACCIÓNS
- 1.4. REPRESENTACIÓ NA RECTA NUMÉRICA
- 1.5. OPERACIÓNS CON FRACCIÓNS

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

- 2.1. REDONDEO
- 2.2. CIFRAS SIGNIFICATIVAS
- 2.3. ERRO ABSOLUTO E ERRO RELATIVO

3. FRACCIÓNS E DECIMAIS

- 3.1. EXPRESIÓ DECIMAL DUNHA FRACCIÓ
- 3.2. FORMA DE FRACCIÓ DUNHA EXPRESIÓ DECIMAL. FRACCIÓ XERATRIZ

4. RESOLUCIÓ DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIÓNS

Resumo

Neste capítulo imos recordar moitas das cousas que xa sabes de cursos anteriores, como as operacións con números naturais e enteiros, as operacións con fraccións e expresións decimais. Estudaremos os números racionais.

0. CONVENCHE RECORDAR

0.1. Prioridade das operacións

Cando non hai parénteses que nos indiquen que operación facer primeiro ou en operacións dentro dunha paréntese chegouse a un acordo para saber como actuar. Deste xeito:

1º Resólvense as parénteses interiores.

Se non hai parénteses ou dentro dunha paréntese faremos:

2º As potencias e as raíces.

3º As multiplicacións e as divisións.

4º As sumas e as restas.

Débense evitar:

Expresións do tipo $1 - 100 : 5 \cdot 5$, onde non está claro que hai que facer (a multiplicación e división teñen igual prioridade). Débense poñer parénteses para indicar cal facer primeiro. A expresión de arriba pode ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ ou ben } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De todas formas, se a encontras, farás:

5º Se hai varias operacións con igual prioridade faranse de esquerda a dereita.

Exemplos:

✚ $(5 - 7) \cdot 10 - 8$ **Non podemos facer $10 - 8$** (en realidade si que podes, pero non debes)

Primeiro a paréntese ➔ $-2 \cdot 10 - 8$ Despois o produto ➔ $-20 - 8$ Por último a resta ➔ -28

✚ $10 - 2 \cdot 3^2 = 10 - 2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Aquí está prohibido facer $10 - 2$ e facer $2 \cdot 3$.

✚ $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$

✚ -10^2 vale -100 xa que primeiro se fai a potencia e ademais o signo menos non está elevado a 2. Porén $(-10)^2$ si que vale $+100$.

✚ $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$

✚ $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$

✚ $\sqrt{9} \cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primeiro faise a raíz.

✚ $10 - 9x$ **non é** $1x$ xa que non pode facerse a resta baixo ningún concepto.

Ten en conta que esta prioridade é **válida sempre**, para operacións con todo tipo de números ou outros obxectos (por exemplo: os polinomios). Merece a pena sabela, non?

0.2. Uso de parénteses

As parénteses indicannos as operacións que se teñen que facer primeiro. De feito o primeiro que faremos serán as **parénteses interiores** e seguiremos **de dentro cara a fóra**. É como vestirse: primeiro pos a camisola, logo o xersei e despois a cazadora. É complicado facelo ao revés. Por iso, antes de poñerte a calcular ao chou, mira toda a expresión para ver que se fai primeiro.

- Debe haber tantas parénteses abertas como pechadas, en caso contrario dise que “as parénteses non están ben balanceadas”.
- Se algo multiplica a unha paréntese non é preciso poñer o símbolo “.”.

Exemplos:

$$2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$2(3 - 2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$(2 - 3) \cdot (6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$$

Se queremos dividir entre 2 o resultado de facer $75 - 90$ **non poñeremos isto $75 - 90 : 2$** , aquí o 2 só divide a 90. Escribiremos $(75 - 90) : 2$

As parénteses utilízanse para meter argumentos de funcións.

Por exemplo:

Se nun programa ou na calculadora queremos facer a raíz de $100 \cdot 3^4$, escribiremos *raíz* ($100 \cdot 3^4$).

0.3. Operacións con enteiros

Recordamos o máis importante:

Regra dos signos para a suma:

A suma de 2 números positivos é positiva. **Exemplo:** $+5 + 7 = +12$

A suma de 2 números negativos é negativa. **Exemplo:** $-10 - 17 = -27$

Ponse o signo $-$, e súmanse os seus valores absolutos.

Exemplo:

Se perdo 10 e despois perdo outros 17, perdín 27.

A suma dun número positivo con outro negativo terá o signo do maior en valor absoluto.

Exemplo:

$$-7 + 15 = +8; \quad +8 + (-20) = 8 - 20 = -12$$

Ponse o signo do máis grande (en valor absoluto) e réstanse.

Exemplo:

Se perdo 7 e despois gaño 15, gañei 8 (son maiores as ganancias cás perdas).

Exemplo:

Se gaño 8 pero despois perdo 20, perdín 12 (son maiores as perdas).

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

Regrados signos para a multiplicación (e a división):

-  Positivo x Positivo = Positivo
-  Positivo x Negativo = Negativo x Positivo = Negativo
-  Negativo x Negativo = Positivo.

x	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemplos:

-  $+2 \cdot (-7) = -14$. Se **recibo** de herdo 2 **débedas** de 7 €, teño unha **débeda** de 14 €.
-  $-2 \cdot (-7) = +14$. Se me **quitan** 2 **débedas** de 7 €, **gañei** 14 €!

Agora algo de matemáticas serias, que xa estamos en 3º!

Demostración rigorosa de que " $0 \cdot x = 0$ para todo x " e de que " $(-1) \cdot (-1) = +1$ "

Para isto imos utilizar 4 propiedades dos números que coñeces:

- 1ª) $a + 0 = a$ para todo número a (0 é o elemento neutro da suma)
- 2ª) **A propiedade distributiva:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- 3ª) $1 \cdot a = a$ para todo número a (1 é o elemento neutro do produto)
- 4ª) $-a$ é o oposto de $+a$, é dicir $-a + a = a + (-a) = 0$

Demostramos " $0 \cdot x = 0$ para todo número x ":

Como $a - a = 0$, pola propiedade distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

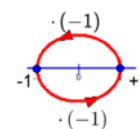
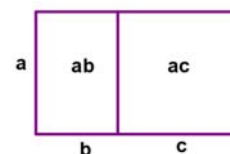
Demostramos que " $(-1) \cdot (-1) = +1$ ":

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; pero pola propiedade distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Logo $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Se sumamos 1 en ambos os membros: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1 \rightarrow (-1) \cdot (-1) + 0 = +1 \rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1$



Actividades resoltas

 *Calcula paso a paso:*

$$(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6))) : (15 - 4^2)) + 5 - 4 \cdot 2) \cdot (-10)$$

Calculamos en primeiro lugar $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ e $4 \cdot 2 = 8$ e quedamos:

$$(((-15 - 5 \cdot (-26))) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130)) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$$

$$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1180$$

Actividades propostas

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$ d) $(-80 - 20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$
d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36} \cdot 4$

3. Calcula:

a) $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^3$ b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$
c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$ d) $2 - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4)^2 - (2 - 4)^3$

1. NÚMEROS RACIONAIS

1.1. Definición

Os **números racionais** son todos aqueles números que **poden** expresarse mediante unha fracción de números enteiros. É dicir, o número r é **racional** se $r = \frac{a}{b}$, con a, b números enteiros e $b \neq 0$.

Unha fracción é unha división indicada, así $\frac{7}{3} = 7 : 3$, pero a división non se realiza ata que o precisemos. Hai moitas ocasións nas que é mellor deixar as operacións indicadas.

Cun exemplo bastará:

✚ Proba facer a división $1.142857142857\dots : 8$, difícil, non?, porén, $\frac{8}{7} : 8 = \frac{1}{7}$ é algo máis sinxela e ademais **exacta**.

O nome “racional” vén de “**razón**”, que en matemáticas significa división ou cociente.

O conxunto dos números racionais represéntase por $\mathbb{Q}$.

Un número racional ten infinitas representacións en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \dots$ son infinitas fraccións que representan o mesmo número racional, chámaselles “**equivalentes**” pois teñen igual valor numérico. Se facemos as divisións no exemplo todas valen $0.333\dots$ que é a súa expresión decimal.

Os números “**enteiros**” son racionais pois poden expresarse mediante unha fracción, por exemplo $-2 = \frac{-8}{4}$

Todo número racional ten un representante que é a súa **fracción irredutible**, aquela que ten os números máis pequenos posibles no numerador e o denominador. A esta fracción chégase partindo de calquera outra dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Se se quere facer nun só paso dividírase entre o Máximo Común Divisor (M.C.D.) do numerador e o denominador. Por exemplo:

$\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ onde dividimos primeiro entre 10 e despois entre 2, pero podíamos ter dividido entre 20

directamente xa que 20 é o MCD (60, 80). Polo tanto $\frac{3}{4}$ é a fracción irredutible e por iso a que representa ao número racional que ten outras moitas formas de fracción como $60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 \dots$ e por expresión decimal 0.75

1.2. Fraccións equivalentes

Dúas fraccións son **equivalentes** se se verifican as seguintes condicións (todas equivalentes):

- Ao facer a división obteremos a mesma **expresión decimal**. Esta é a definición.

Exemplo:

$$4 : 5 = 8 : 10 = 0.8 \text{ logo } \frac{4}{5} \text{ e } \frac{8}{10} \text{ son equivalentes e pode escribirse } \frac{4}{5} = \frac{8}{10}.$$

- Os **produtos cruzados son iguais**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

É doado de demostrar, multiplicamos a ambos os lados do igual por b e por d

$$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d, \text{ como } b : b = 1 \text{ e } d : d = 1 \text{ quedanos } a \cdot d = c \cdot b.$$

Por exemplo:

$$\frac{12}{8} = \frac{6}{4} \text{ posto que } 12 \cdot 4 = 8 \cdot 6 = 48.$$

- Ao simplificar as fraccións chégase á mesma fracción irredutible.

Se $A = B$ e $C = B$ á forza $A = C$.

Exemplo:

$$\frac{80}{60} = \frac{4}{3}; \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \text{ logo } \frac{80}{60} = \frac{12}{9}$$

- Pódese pasar dunha fracción a outra multiplicando (ou dividindo) o numerador e o denominador por un mesmo número.

Exemplo:

$$\frac{6}{4} = \frac{24}{16} \text{ xa que basta multiplicar o numerador e o denominador da primeira por 4 para obter a segunda.}$$

En xeral $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

Redución a común denominador

Co obxecto de comparar 2 ou máis fraccións (ver cal é maior) e tamén para poder sumalas ou restalas é importante obter fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador.

Primeiro un **exemplo** e despois a teoría:

✚ Quero saber se $\frac{5}{6}$ é maior que $\frac{6}{7}$ sen facer a división. Buscamos un múltiplo común de 6 e de 7 (se é o mínimo común múltiplo mellor, pero non é imprescindible), 42 é múltiplo de 6 e de 7. Escribímolo como novo denominador para as 2 fraccións: $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{42}; \frac{6}{7} = \frac{\quad}{42}$

Agora calculamos os novos numeradores: como o 6 o multipliquei por 7 para chegar a 42 pois o 5 multiplicámolo tamén por 7 para obter unha fracción equivalente $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$ e como o 7 o multipliquei por 6, o 6 tamén o multiplico por 6 obtendo $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42}$, agora está claro cal das 2 é maior, non?

Para obter fraccións equivalentes a $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ co **mesmo denominador** buscamos un múltiplo común de b

e d (se é o mínimo común múltiplo mellor) que chamamos m e facemos $\frac{a \cdot \frac{m}{b}}{m}$ e $\frac{c \cdot \frac{m}{d}}{m}$

1.3. Ordenación de fraccións

Para ordenar unha serie de fraccións existen varios procedementos:

- Facer as divisións e comparar as expresións decimais.

Este procedemento é o máis fácil pero non o máis rápido (agás que teñas calculadora).

Por exemplo: Pídenos que ordenemos de menor a maior as seguintes fraccións:

$$\frac{20}{19}; \frac{21}{20}; \frac{-20}{19}; \frac{-21}{20}; \frac{29}{30}; \frac{28}{29}$$

Facemos as divisións que dan respectivamente: 1.0526...; 1.05; -1.0526...; -1.05; 0.9666... e 0.9655... Mirando os números decimais sabemos que:

$$\frac{-20}{19} < \frac{-21}{20} < \frac{28}{29} < \frac{29}{30} < \frac{21}{20} < \frac{20}{19}$$

Recorda que

Os números negativos son sempre menores cós positivos e ademais entre números negativos é menor o que ten maior valor absoluto ($-4 < -3$).

ii) Usar a lóxica e o seguinte truco: Para fraccións positivas $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$.

Exemplo: $\frac{8}{9} < \frac{10}{11}$ xa que $8 \cdot 11 < 9 \cdot 10$.

Demostración:

$$8 \cdot 11 < 9 \cdot 10 \Rightarrow \frac{8 \cdot 11}{9 \cdot 11} < \frac{9 \cdot 10}{9 \cdot 11} \Rightarrow \frac{8}{9} < \frac{10}{11}; \text{ dividimos entre } 9 \cdot 11. \text{ E simplificado.}$$

$$\text{E ao revés: } \frac{8}{9} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{8 \cdot 9 \cdot 11}{9} < \frac{10 \cdot 9 \cdot 11}{11} \Rightarrow 8 \cdot 11 < 10 \cdot 9; \text{ multiplicamos por } 9 \cdot 11 \text{ e simplificado.}$$

Non é preciso que uses a demostración, poñémola só para que vexas que en matemáticas “case” todo ten a súa explicación.

E o de usar a lóxica que é?

Empezamos polo máis fácil,

Exemplo: Comparar $\frac{20}{19}$ e $\frac{28}{29}$

$$\frac{20}{19} > 1 \text{ posto que } 20 > 19. \text{ Pero } \frac{28}{29} < 1 \text{ xa que } 28 < 29. \text{ Está claro que a segunda é menor.}$$

✚ Un pouco máis difícil, comparamos $\frac{20}{19}$ e $\frac{21}{20}$:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}. \text{ Pero, que é maior } 1/19 \text{ ou } 1/20?$$

É maior $1/19$ e polo tanto é maior a primeira. Pensa que se dividimos unha pizza en 19 anacos iguais estes son maiores que se a dividimos en 20 anacos iguais.

$$\text{Se } a \text{ e } b \text{ son positivos } \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

✚ Así que $1/3 > 1/4$ por exemplo.

Máis difícil aínda:

✚ Comparamos $\frac{19}{20}$ e $\frac{18}{19}$. Agora $19/20 = 1 - 1/20$ e $18/19 = 1 - 1/19$.

Como $1/19 > 1/20$ agora a fracción maior é $19/20$ pois fáltalle menos para chegar a 1.

Con números máis sinxelos enténdese mellor: $2/3 < 3/4$ pois a $2/3$ fáltalle $1/3$ para chegar a 1, e a $3/4$ só $1/4$.



$$2/3 < 3/4$$

Importante: Se a e b son positivos entón $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Reducir a común denominador e comparar os numeradores:

✚ Pídenos que ordenemos de maior a menor as seguintes fraccións:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-9}{4}; \frac{-7}{3}; \frac{-2}{1}$$

Primeiro buscamos un número que sexa múltiplo de 6, de 8, de 4 e de 3 (se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor). Atopamos o 24 que é múltiplo de todos eles. Poñémolo como novo denominador de todas as fraccións e calculamos os novos numeradores para que as fraccións sexan equivalentes: $24 : 6 = 4$ logo o 6 hai que multiplicalo por 4 para chegar a 24, facemos o mesmo co 5, $5 \cdot 4 = 20$ é o novo numerador. Así coas demais.

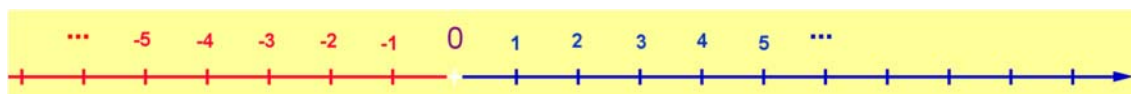
$$\begin{aligned}\frac{5}{6} &= \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} \\ \frac{7}{8} &= \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24} \\ \frac{-9}{4} &= \frac{-9 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{-54}{24} \\ \frac{-7}{3} &= \frac{-7 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{-56}{24} \\ \frac{-2}{1} &= \frac{-2 \cdot 24}{1 \cdot 24} = \frac{-48}{24}\end{aligned}$$

Despois comparamos os numeradores e obtemos que:

$$\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > -2 > \frac{-9}{4} > \frac{-7}{3}$$

xa que $21 > 20 > -48 > -54 > -56$

1.4. Representación na recta numérica



Esta é a recta numérica, nela todo número real ten un lugar exacto.

Recordamos cousas que xa sabes:

- Para debuxala só se poden tomar dúas decisións: onde colocamos o 0 e onde colocamos o 1, é dicir, onde está a orixe e cal é o tamaño da unidade.
- As unidades deben ser sempre do mesmo tamaño.
- Os números positivos van á dereita do 0 e os negativos á esquerda.
- O 0 non é nin positivo nin negativo.
- A recta numérica non ten nin principio nin fin. Nós só podemos debuxar unha “pequena” parte.
- Dados 2 números a, b cúmprese: **$a < b$ se a está á esquerda de b** e viceversa.

Así por exemplo:

$$1 < 3; \quad -1 < 1; \quad -4 < -2$$

Todo número racional ten unha posición predeterminada na recta numérica. As infinitas fraccións equivalentes que forman un número racional caen no mesmo punto da recta. Así que $2/3$ e $4/6$, que son o mesmo número, caen no mesmo punto.

Vexamos como representar as fraccións de forma exacta.

Fracción propia, fracción impropia e forma mixta

Fracción propia: Dise da fracción a/b onde $a < b$. É dicir, o numerador é menor que o denominador.

Por exemplo:

 $4/5$ ou $99/100$.

Se $a < b$ ao facer a división a **expresión decimal será menor que 1**.

Por exemplo:

 $4/5 = 4 : 5 = 0.8$.

Fracción impropia: Dise da fracción a/b onde $a > b$, numerador maior que o denominador.

Exemplo:

 $15/4$ ou $37/27$. Se facemos a división a **expresión decimal é maior de 1**. $15/4 = 3.75$ e $37/27 = 1.37037037...$

Número mixto: As fraccións impropias poden escribirse como a suma dun número enteiro e dunha fracción propia.

Así por exemplo:

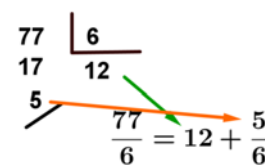
 $\frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = 1 + \frac{4}{5}$, esta última é a forma mixta.

En España non é frecuente, pero no mundo anglosaxón soe escribirse $1\frac{4}{5}$ que significa o mesmo.

A calculadora científica pasa á forma mixta, investigao.

A forma rápida e automática de escribir unha fracción en forma mixta é a seguinte:

 $\frac{77}{6}$ é impropia pois $77 > 6$, para escribila en forma mixta facemos a división enteira $77 : 6$, é dicir, sen decimais, interésannos o cociente e o resto.



$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 77} \\ \underline{12 \cdot 6} \\ 57 \\ \underline{54} \\ 3 \end{array}$$

$\frac{77}{6} = 12 + \frac{5}{6}$

O cociente é a parte enteira, o resto é o numerador da fracción e o divisor é o denominador.

É importante que o intentes facer de cabeza (cando sexa razoable), é doado, por exemplo:

 $47/6$, buscamos o múltiplo de 6 máis próximo a 47 por abaixo, este é $7 \cdot 6 = 42$, polo tanto:

$$47/6 = 7 + 5/6$$

xa que de 42 a 47 van 5. Pénsao, se comemos $47/6$ de pizza, temos comido 7 pizzas enteiras e ademais $5/6$ de pizza.

Nota:

Tamén é doado calcular o cociente e o resto coa calculadora, por se tes présa.

Para $437/6$, fai a división $437 : 6$, obtés $72.83333...$, a parte enteira é 72, só queda calcular o resto. Temos 2 camiños:

1º) Fas $437 - 72 \cdot 6 = 5$ e listo.

2º) Multiplica a parte decimal polo divisor: $0.8333... \cdot 6 = 5$, que é o resto. Se é preciso redondea ($0.8333 \cdot 6 = 4.9998$ que redondeamos a 5).

Só che permitimos facer isto se sabes por que funciona; se non o sabes, esqueceo.

Se a fracción é negativa procedemos da seguinte forma:

$$\frac{-19}{5} = -\left(3 + \frac{4}{5}\right) = -3 - \frac{4}{5}, \text{ xa que a división dá 3 de cociente e 4 de resto.}$$

Representación de fraccións

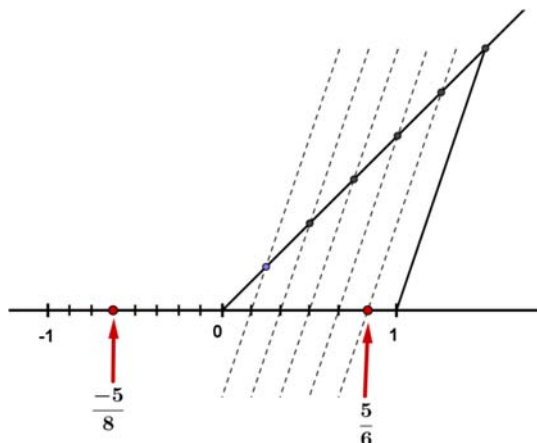
a) Se a fracción é propia:

Por exemplo

Representa a fracción $5/6$: o valor está entre 0 e 1, polo tanto dividimos a primeira unidade en 6 partes iguais e tomamos 5.

Na figura indícase como facelo de forma exacta usando o **Teorema de Tales**. Trazamos unha recta oblicua calquera que pase por 0, marcamos co compás 6 puntos a igual distancia entre si (a que sexa, pero igual). Unimos o último punto co 1 e trazamos paralelas a ese segmento que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua (as liñas descontinuas). Estas rectas paralelas dividen o intervalo $[0, 1]$ en 6 partes iguais.

Fíxate que para dividir en 6 partes iguais só hai que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, sempre un menos. Para dividir en 8 partes iguais marcamos 7 puntos intermedios.



Se a fracción é negativa faise igual pero no intervalo $[-1, 0]$.

Na figura representamos $-5/8$, dividimos o intervalo $[-1, 0]$ en 8 partes iguais e contamos 5 empezando no 0. Asegúrate de entendela e, se non é o caso, pregunta. *Por certo, a frecha apunta ao punto e non ao espazo que hai entre eles.*

Se queremos representar a fracción propia a/b divídese a primeira unidade en “b” partes iguais e cóntanse “a” divisións.

No caso de ser **negativa** faise igual pero contando desde 0 cara á **esquerda**.

b) Se a fracción é impropia:

Actividades resoltas

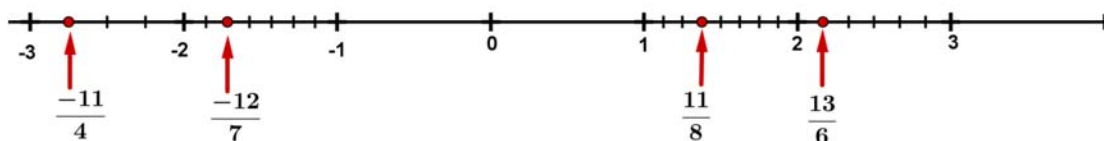
+ Representamos $13/6$. O primeiro é escribila na súa forma mixta, $\frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6}$, agora é doado representala, imos ao 2, a unidade que vai do 2 ao 3 dividímola en 6 partes iguais e tomamos 1 (ver imaxe).

+ Igual para $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$, imos ao 1 e a unidade que vai do 1 ao 2 dividímola en 8 partes iguais e tomamos 3.

Se a fracción é negativa procedemos así:

+ Representamos $\frac{-12}{7} = -\left(1 + \frac{5}{7}\right) = -1 - \frac{5}{7}$, imos ao -1, a unidade que vai do -1 ao -2 dividímola en 7 partes iguais e contamos 5 cara á esquerda empezando en -1.

+ Representamos $\frac{-11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, imos ao -2, dividimos en 4 partes iguais e tomamos 3, contando cara á esquerda e empezando en -2 (ver imaxe).



Actividades propostas

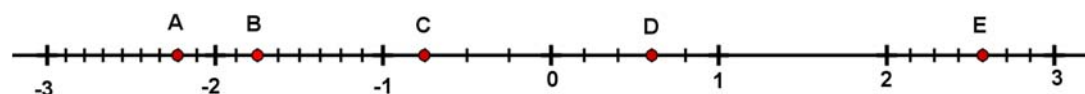
4. Pasa a forma mixta as seguintes fraccións: $\frac{50}{7}$; $\frac{25}{11}$; $\frac{101}{6}$

5. Pasa a forma mixta as fraccións: $\frac{-30}{7}$; $\frac{-50}{13}$; $\frac{-100}{21}$

6. Representa na recta numérica as fraccións: $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{-5}{8}$; $\frac{-3}{4}$

7. Pasa a forma mixta e representa as fraccións: $\frac{23}{8}$; $\frac{-23}{8}$; $\frac{180}{50}$; $\frac{-26}{6}$

8. Calcula as fraccións que corresponden cos puntos A, B, C, D e E, expresando en forma mixta e como fraccións impropias as representadas polos puntos A, B e E.



1.5. Operacións con fraccións

Imos repasar as operacións con fraccións, en concreto, a suma, a resta, o produto e a división.

Suma e resta de fraccións

A suma e a resta son as operacións máis esixentes pois só poden sumarse ou restarse cousas iguais. Non podemos sumar metros con segundos, nin € con litros. Da mesma forma **non poden sumarse terzos con quintos** nin cuartos con medios. É dicir, non se pode facer a suma $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ así tal cal, xa que os sextos e os cuartos son de distinto tamaño. Pero, haberá algunha maneira de sumalas?, si.

O primeiro é calcular 2 fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador e entón xa se poderán sumar.

Vexamos o exemplo:

✚ Un múltiplo de 6 e 4 é 12. Escribimos 12 como novo denominador e calculamos os numeradores para que as fraccións sexan equivalentes:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 2}{12} + \frac{3 \cdot 3}{12} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{10+9}{12} = \frac{19}{12}, \text{ os doceavos xa se poden sumar e o resultado son doceavos.}$$

Outro exemplo:

$$\text{✚ } \frac{13}{6} - \frac{51}{10} + \frac{8}{12} = \frac{13 \cdot 10}{60} - \frac{51 \cdot 6}{60} + \frac{8 \cdot 5}{60} = \frac{130 - 306 + 40}{60} = \frac{-136}{60} = \frac{-34}{15}$$

Calculamos un múltiplo de 6, de 10 e de 12 (Se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor), escríbese como denominador común e facemos $60:6=10$, logo o 13 multiplicámolo por 10, $60:10=6$ logo o 51 multiplicámolo por 6, etc.

Cando todas as fraccións teñen igual denominador, súmanse ou réstanse os numeradores, deixando o mesmo denominador. Se é posible simplifícase a fracción resultante.

Nos casos nos que non sexa fácil calcular o mínimo común múltiplo, faise o seguinte:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Así por exemplo:

$$\frac{15}{387} + \frac{19}{155} = \frac{15 \cdot 155 + 19 \cdot 387}{387 \cdot 155} = \frac{9\,678}{59\,985} = \frac{3\,226}{19\,995}$$

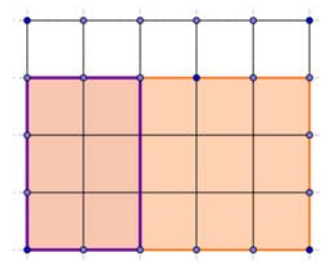
Produto e división de fraccións:

Sorprende que o produto e a división de fraccións sexan máis sinxelos que a suma e a resta.

Produto: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, multiplícanse os numeradores entre si para obter o numerador da fracción produto e os denominadores entre si para determinar o denominador da devandita fracción. Dado, non?

Así:

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 7} = \frac{15}{77}$$

**Por que as fraccións se multiplican así?**

Non imos demostrar o caso xeral, cun exemplo bastará.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ significa dividir en 4 partes iguais e coller 3 (as 3 franxas inferiores da figura). Agora debemos facer $\frac{2}{5}$ do que nos quedou, esas 3 franxas dividímolas en 5 partes iguais e tomamos 2. Como se pode ver quédannos 6 partes iguais das 20 totais.

$$\frac{17}{15} \cdot \frac{5}{17} = \frac{\cancel{17} \cdot 5}{15 \cdot \cancel{17}} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

Ás veces convén facer a multiplicación con intelixencia:

✚ Antes de multiplicar fixémonos en que o 17 se pode simplificar (para que imos multiplicar por 17 e logo dividir por 17?) e despois o 5 xa que $15 = 3 \cdot 5$.

Outro exemplo:

✚ $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ faina, esperamos que chegues ao resultado correcto xa simplificado que é $\frac{1}{6}$ 😊

Temos algo importante que dicirche, non queremos ver isto nunca, nunca:



$$\frac{\cancel{7} + 3}{\cancel{7} + 5} = \frac{3}{5}$$

é **absolutamente falso** ($\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ é o correcto). Só poden simplificarse se o número está multiplicando no numerador e no denominador (se é factor común).

Isto tampouco está **nada ben**.

$$\frac{\cancel{7} \cdot 2 + 3}{\cancel{7} \cdot 4 + 5} = \frac{2 + 3}{4 + 5}$$



Fracción inversa:

A fracción inversa de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ pois cúmprese que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$ que é a definición de inverso.

Exemplos:

✚ A inversa de $3/4$ é $4/3$ e a inversa de 2 é $1/2$.

División:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Polo tanto para dividir multiplícase pola inversa da fracción que divide $\frac{6}{10} : \frac{9}{15} = \frac{6}{10} \cdot \frac{15}{9} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

Tamén podes multiplicar e logo simplificar: $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$

Preguntarás se podes multiplicar en **X**, pois dependerá do teu profesor.

Casos curiosos:

- Dividir entre unha décima é multiplicar por 10 xa que $a : \frac{1}{10} = \frac{a}{1} \cdot \frac{10}{1} = 10a$

Como caso xeral: dividir entre $1/a$ é multiplicar por a .

- Dividir entre un número é como multiplicar polo seu inverso: $a : 2 = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$

- **Torres de fraccións:** Non te asustes se ves isto $\frac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, é moi fácil, é o mesmo que

$$\frac{6}{10} : \frac{4}{15} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{9}{4}, \text{ non esquezas que " } \frac{\quad}{\quad} \text{ " é o mesmo que " : "}$$

Agora todo xunto.

Operacións combinadas.

Aplicaremos todo o que “sabemos” sobre prioridade e uso de parénteses.

Actividades resoltas

- **Calcula paso a paso e simplifica:**

$$\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{6} \right) \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

Primeiro facemos as parénteses de dentro e a multiplicación da segunda paréntese que ten prioridade sobre a resta.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{6} \right) \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{6} \right) \right) : \left(\frac{7}{14} - \frac{2}{14} \right) = \\ & = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6} \right) : \frac{5}{14} = \left(\frac{9}{12} + \frac{2}{12} \right) : \frac{5}{14} = \frac{11}{12} \cdot \frac{14}{5} = \frac{154}{60} = \frac{77}{30} \end{aligned}$$

A fracción como operador

a) Fracción dun número:

+ Pídenos calcular as 3 cuartas partes de 120.

Traducimos: calcular $\frac{3}{4}$ de 120. Este “de” tradúcese en matemáticas por un “por”, logo:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 120 = \frac{3}{4} \cdot 120 = \frac{3 \cdot 120}{4} = 3 \cdot 30 = 90$$

$$\text{En xeral } \frac{a}{b} \text{ de } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

b) Fracción dunha fracción:

Exemplos:

$$\frac{10}{6} \text{ de } \frac{4}{15} = \frac{10}{6} \cdot \frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

+ Calcula as dúas quintas partes das dez doceavas partes de 360.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{12} \cdot 360 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 360}{5 \cdot 12} = \frac{20 \cdot 360}{60} = 20 \cdot 6 = 120$$

c) Problema inverso:

+ Dinme que as tres cuartas partes dun número valen 66. Que número é?

Está claro que un cuarto será $66 : 3 = 22$ e os 4 cuartos son $22 \cdot 4 = 88$.

$$\text{Resumindo } 66 \cdot \frac{4}{3} = 88$$



O caso xeral é: $\frac{a}{b} \cdot x = c \Rightarrow x = c \cdot \frac{b}{a}$, multiplícase o número pola fracción inversa.

Actividades propostas

9. Calcula as catro quintas partes das tres cuartas partes de 12.

10. As cinco sextas partes dun número son 100, que número é?

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

Na vida cotiá e tamén nas Ciencias Aplicadas é preciso traballar con números aproximados.

Uns exemplos:

- ✚ Queremos comprar un terzo de metro de tea, temos que dicirlle ao dependente canto queremos e non imos ser tan idiotas como para dicirlle que nos dea 0.333... metros ou 33.333...cm que é o exacto. O normal é pedir 33 cm ou 333 mm se somos moi finos.
- ✚ Medimos un folio A4 coa regra e dános 29.7 cm, a regra chega aos mm. Queremos dividilo en 8 partes iguais, canto medirá cada parte? Se facemos $29.7 : 8$ dános 3.7125 cm, pero a regra non chega a tanto, será mellor aproximar a 3.7 cm.
- ✚ Facemos un exame con 9 preguntas que valen todas igual. Temos 5 ben e as demais en branco. Que nota temos?, $10 \cdot 5 / 9 = 5.555555556$ segundo a calculadora. Poñémolas todas? Se o facemos estamos supoñendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10 000 millóns de partes iguais do exame. O razoable é 5.6 ou 5.56 se somos moi pero que moi precisos.
- ✚ Resulta curioso e debería ser delito que nas gasoleiras se anuncie: Prezo do gasóleo 1.399 €/litro. Se alguén vai e pide un litro exacto, ou 2 ou 15 non llo poden cobrar exactamente xa que non existen as milésimas de €! Deberían escribir 1.40 €/litro. É certo que desa maneira aforras 5 céntimos se botas 50 litros, pero a eles compénsalles o tema psicolóxico. A xente pouco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.
- ✚ Exactamente o mesmo pasa nos supermercados: pescada 5.99 €/Kg. Son trucos baratos que unha mente adestrada sabe detectar e actuar en consecuencia. A diferenza entre 6 €/Kg e 5.99 €/Kg é que aforras 1 céntimo! Se compras 1 Kg. Se compras medio, canto aforras? Nada! $5.99:2 = 2.995$ que redondeado é 3, que é o que cobran. Aínda que ben mirada, a oferta non está tan mal, se compras 5 Kg. de pescada aforras para mercar un caramelo, iso si, tes que comprar máis de medio Kg por vez.

Utilizar demasiadas cifras decimais sen estar seguro delas non é sinónimo de precisión senón de torpeza.

2.1. Redondeo

Lembrámosche como se redondean correctamente os números.

- ✚ Redondear π ás dez milésimas: $\pi = 3.1415926535\dots$, a cifra das dez milésimas é 5, como a cifra seguinte é 9 que é ≥ 5 , sumámoslle 1 ao 5 e poñeremos $\pi \approx 3.1416$.
Fíxate que π está máis preto de 3.1416 que de 3.1415.
- ✚ Redondear $\sqrt{2}$ ás centésimas: $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$, agora a cifra seguinte é 4 < 5 polo que a deixamos tal cal, $\sqrt{2} \approx 1.41$

A regra é: localizamos a cifra de redondeo, miramos a seguinte cifra (só a seguinte), se esta é menor que 5 deixamos a cifra de redondeo igual; se a cifra seguinte é 5 ou maior que 5 incrementamos en 1 a cifra de redondeo.

Máis exemplos:**Redondea**

- + 1.995 ás centésimas → 2.00 e os ceros hai que escribilos para indicar onde redondeamos.
- + 1 555 555 nos miles → 1 556 000 onde hai que completar con ceros despois dos miles.
- + 6.94999 nas décimas → 6.9 só hai que mirar o 4.

Nota importante: Se o resultado dun problema son **€ redondearase sempre nos céntimos.**

Outra nota importante: Se queremos dar un resultado con 2 decimais nos pasos intermedios traballaremos con máis decimais, polo menos 3 ou 4, do contrario o resultado non terá a precisión que pretendemos, un exemplo:

- + $A = 9.65$; $B = 6.98$ e $C = 4.99$. Queremos facer $(A \cdot B) \cdot C^2$. Se facemos $A \cdot B$ e redondeamos nas centésimas quedanos 67.36 e se agora multiplicamos por $4.99^2 = 24.90$ sae $1\,677.26$.

O resultado correcto é $1\,677.20$ onde só redondeamos ao final.

2.2. Cifras significativas

É o número de cifras “*con valor*” que se utilizan para expresar un número aproximado.

Uns cantos **exemplos** e xa o entendes:

- + 2.25 ten 3 cifras significativas; 28.049 ten 5 cifras significativas.
- + 5.00 ten 3; 4 000.01 ten 6;
- + 10 000 non sabemos as cifras significativas que ten, pode ser 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5. Téñennos que dicir en que cifra se aproximou. Para este último caso pode recorrerse á notación científica para dicir con precisión o número de cifras significativas, así:
 $1 \cdot 10^4$ ten unha cifra significativa, $1.0 \cdot 10^4$ ten 2 e así ata $1.0000 \cdot 10^4$ que ten 5.

Consideracións:

- As cifras **distintas** de 0 sempre son significativas.
- Os ceros á esquerda nunca son cifras significativas: 0.0002 ten unha cifra significativa.
- Os ceros no medio doutras cifras distintas de 0 sempre son significativos. 2 004 ten 4 cifras significativas.

Máis que o número de decimais a precisión dunha aproximación mídese polo número de cifras significativas.

Non deben utilizarse máis cifras das que requira a situación.

Actividades propostas

12. Copia esta táboa no teu caderno e redondea co número de cifras indicado

Número	Cifras significativas			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95 549	100 000			
30 000	$3 \cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

2.3. Erro absoluto e erro relativo

I.- Erro absoluto

Defínese o **erro absoluto** (EA) como $EA = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$.

As barras verticais lense “valor absoluto” e significan que o resultado se dará sempre positivo.

Exemplo:

✚ Aproximamos $1/3$ de litro por 0.33 litros.

$$EA = \left| \frac{1}{3} - 0.33 \right| = 0.00333... \approx 0.0033 \text{ litros.}$$

Outro exemplo:

✚ Aproximamos $16/6$ Kg. con 2 cifras significativas (2.7 Kg.)

$$EA = \left| \frac{16}{6} - 2.7 \right| = |-0.0333...| \approx 0.033 \text{ Kg.}$$

- **Non deben poñerse demasiadas cifras significativas no erro absoluto, 2 ou 3 son suficientes.**
- **O erro absoluto ten as mesmas unidades que a magnitude que se aproxima.**

Estes erros son grandes ou pequenos? A resposta é, comparados con que?

Para iso defínese o erro relativo que si nos dá unha medida do grande ou do pequeno que é o erro absoluto.

II.- Erro relativo

Para comparar erros de distintas magnitudes ou números defínese o **Erro Relativo (ER)** como:

$$ER = \frac{EA}{|\text{Valor real}|}$$

que soe multiplicarse por 100 para falar de % de erro relativo.

Se non se coñece o valor real, substitúese polo valor aproximado (a diferenza normalmente é pequena).

Calculamos o erro relativo para os exemplos de arriba:

$$1^{\text{a}}) ER = \frac{0.0033}{1/3} = 0.0099 \Rightarrow 0.99\% \text{ de ER}$$

$$2^{\text{a}}) ER = \frac{0.033}{8/3} \approx 0.0124 \Rightarrow 1.2\% \text{ de ER}$$

Agora si que podemos dicir que a 1ª aproximación ten menos erro que a 2ª, xa que o erro relativo é menor.

O erro relativo (ER) non ten unidades e por iso se poden comparar erros de distintas magnitudes ou con distintas unidades.

Que facer se non se coñece o valor exacto?

Neste caso non se pode calcular o erro absoluto, porén todos os aparellos de medida teñen un erro absoluto máximo.

- + Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g. O seu erro absoluto máximo é de 50 g.
- + Cronómetros que miden centésimas de segundo. O seu erro absoluto máximo será de 0.005 s, media centésima.
- + Regras normais que miden mm. O seu erro absoluto máximo será de 0.5 mm = 0.05 cm = 0.0005 m

Isto recibe o nome de **cota de erro absoluto**.

Actividades resoltas

- + Pésaste nunha báscula de baño e marca 65.3 Kg, o erro absoluto máximo é de 0.05 Kg (50 g)

Agora pesamos un coche nunha báscula especial e pesa 1 250 Kg con erro absoluto máximo de 10 Kg. Que medida é máis precisa?

$$\text{Ti} \rightarrow ER \leq \frac{0.05}{65.3} = 0.00077 \Rightarrow ER \leq 0.077\%$$

$$\text{Coche} \rightarrow ER \leq \frac{10}{1\,250} = 0.008 \Rightarrow ER \leq 0.8\%$$

É moito máis precisa a báscula de baño neste caso. Porén se na mesma báscula pesamos a un bebé e marca 3.1 Kg, o erro relativo sae menor ou igual que 1.6 % (próbaos) e agora a medida da báscula de baño é moito menos precisa.

Así que o erro depende da precisión da máquina e da medida que fagamos con ela.

Actividades propostas

13. Proba que 123.45 con EA = 0.005 e 0.12345 con EA = 0.000005 teñen o mesmo ER.
14. Contesta Verdadeiro ou Falso e xustifica a túa resposta:
 - a) Para unha mesma máquina de medir o erro cometido é menor canto máis pequena sexa a medida.
 - b) Non se poden comparar erros relativos de distintas magnitudes.
 - c) Poñer prezos como 1.99 €/Kg é un intento de engano.
 - d) Comprar a 1.99 €/Kg fronte a 2 €/Kg supón un aforro.
 - e) Poñer moitas cifras nun resultado significa que un é un gran matemático.
 - f) A precisión mídese polo número de cifras decimais.

3. FRACCIÓN E DECIMAIS

Imos ver como se pasa de fracción a decimal e de decimal a fracción.

3.1. Expresión decimal dunha fracción

Toda fracción ten unha expresión decimal que se obtén dividindo o numerador entre o denominador:

$$a/b = a : b.$$

Exemplos:

$$\frac{3}{25} = 0.12; \frac{68}{99} = 0.686868...; \frac{91}{80} = 1.1375; \frac{177}{90} = 1.9666...$$

Como podes observar unhas veces a expresión decimal é exacta (xa que o resto sae 0) e outras veces sae periódica, infinitos decimais entre os que se repite un bloque de cifras que se denomina período.

Sempre sae así, exacto o periódico?, ti mesmo contestarás cando leas o seguinte.

✚ Facemos $1/17 = 1:17 = 0.05882352941...$, que son as cifras que amosa a calculadora, non parece ter período, pero será posible que si o teña pero que non o vexamos por ser moi longo?

Empezamos a facer a división:

Os restos obtidos son 10; 15; 14; 4; 6; ...

Como sabes os restos son inferiores ao divisor e neste caso poden ser 1; 2; 3; 4; ...; 15 ou 16, o 0 non pode saír, explicámolo despois.

$$\begin{array}{r} 100 \quad | \quad 17 \\ 150 \quad \underline{0,05882} \\ 140 \\ 40 \\ 6 \\ \dots \end{array}$$

Facemos agora 2 preguntas: que ocorre se volve saír o mesmo resto 2 veces?, ten á forza que repetirse algunha vez un resto?

A resposta á primeira pregunta é que se se repite un resto repetírase a cifra do cociente e a partir de aí repetíranse todas en forma de período.

A resposta á segunda pregunta é: Si, á forza, seguro que si! Se teño 16 posibles restos e supoñemos que saíron os 16 posibles xa, que ocorre ao sacar o seguinte?

Enténdelo mellor con caramelos. Teño moitos caramelos para repartir entre 16 persoas. Xa lle dei 1 caramelo a cada un, é dicir, todos teñen xa 1 caramelo. Dispóñome a repartir o seguinte, tocaralle a alguén que xa ten?

A isto chámase en matemáticas **"Principio do Pombal"** e é unha ferramenta moi potente. Busca algo sobre el.

✚ Meto 5 pelotas en 4 caixas, haberá algunha caixa con máis de 1 pelota?



Esperamos que o entenderas: **no peor dos casos** o resto número 17 ten que coincidir con algún dos anteriores, repetíranse as cifras do cociente e polo tanto a expresión decimal é periódica.

✚ Podes comprobar que efectivamente os restos son 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, ..., o peor dos casos posibles, repítese o que fai o número 17. O normal é que se repita antes.

Por certo, que a división sae:

$$1 : 17 = 0.05882352941176470588235294117647... \text{ un período de só 16 cifras!}$$

Aínda que vimos un caso particular, esta é unha regra xeral:

A expresión decimal dunha fracción é exacta ou periódica.

O número de cifras do período de $1/n$ é menor ou igual que $n - 1$.

Cando sae exacta e cando periódica?

✚ Pois é fácil, dannos unha fracción como por exemplo $\frac{27}{150}$, primeiro simplificámola ata obter a irreductible: $\frac{27}{150} = \frac{9}{50}$, fixámonos só no denominador e descompoñémolo en factores primos, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, como os factores primos son só 2 e 5 a expresión decimal é exacta.

Vexamos a razón:

✚ $2 \cdot 5^2$ é divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ unha potencia de 10. Cúmrese $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0.02$, só resta multiplicar por 9 $\Rightarrow \frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0.02 \cdot 9 = 0.18$.
Fíxate que o número de decimais é 2, o maior dos expoñentes de 2 e 5.

✚ Por exemplo $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0.0005$ ten 4 cifras decimais pois o maior expoñente é 4.

En xeral $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ ten expresión decimal exacta e o número de cifras decimais é o máximo entre n e m .

✚ O outro caso: $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$, descompoñemos o 21 en factores primos, $21 = 3 \cdot 7$, como hai factores distintos de 2 e 5 a expresión será periódica.

Vexamos: Se a expresión fose exacta poderíamos escribir $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, con “a” un número enteiro. Pero isto non pode ser!, 10 só ten os factores 2 e 5 e os factores 3 e 7 non poden simplificarse. Como non pode ser exacta será periódica.

$$\begin{aligned} 1.175 &= \frac{1\,175}{1\,000} = \frac{47}{40} \\ 20.68 &= \frac{2\,068}{100} = \frac{517}{25} \\ 3.1416 &= \frac{31\,416}{10\,000} = \frac{3\,927}{1\,250} \end{aligned}$$

Se no denominador dunha fracción irreductible aparecen factores primos distintos de 2 e de 5 a expresión decimal será periódica.

Actividades propostas

15. Sen facer a división indica se as seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracción dunha expresión decimal

Os números decimais exactos ou periódicos poden expresarse como unha fracción. A esta fracción chámasele **fracción xeratriz**.

De decimal exacto a fracción:

É moi doado, mira os exemplos da dereita.

Pillaches o truco?

$$1.175 = \frac{1\,175}{1\,000} = \frac{47}{40}$$

$$20.68 = \frac{2\,068}{100} = \frac{517}{25}$$

$$3.1416 = \frac{31\,416}{10\,000} = \frac{3\,927}{1\,250}$$

Para obter a fracción xeratrizponse no numerador o número sen a coma e no denominador a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais ten. Simplifícase a fracción.

As persoas intelixentes comprobán o que fixeron, divide 47 entre 40, se che dá 1.175 está ben!, e non fai falla que ninguén cho diga. 😊

De decimal periódico a fracción:

Antes de ver o método rigoroso imos xogar un pouco.

✚ Colle a **calculadora** e fai as seguintes divisións e anota os resultados decimais no teu caderno:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Ao facer 6/9 a calculadora dá 0.666666667, realmente é 6 periódico, a calculadora faino ben e redondea na última cifra.

Se observaches ben xa sabes escribir un montón de expresións decimais periódicas á súa forma de fracción, é dicir, sabes calcular a súa **fracción xeratriz**.

Por exemplo:

✚ $0.444... = 4/9;$

✚ $0.333... = 3/9 = 1/3.$

✚ $0.171717... = 17/99;$

✚ $0.454545... = 45/99 = 5/11;$

✚ $0.878787 = 87/99 = 29/33$

✚ $0.337337337... = 337/999;$

✚ $0.549549... = 549/999 = 61/111$

✚ Como será $0.1234512345...?$, pois $12345/99999 = 4115/33333$

Así que xa o sabes, para ter un período de n cifras o denominador ten n noves.

✚ Pero o truco anterior non serve para 5.888...

$$\text{Adaptámolo: } 5.888... = 5 + 0.888... = 5 + \frac{8}{9} = \frac{45}{9} + \frac{8}{9} = \frac{53}{9}$$

✚ Segue sen servir para 0.7333...

$$\text{Facemos } 0.7333... = 0.7 + 0.0333... = \frac{7}{10} + \frac{3}{9} : 10 = \frac{7}{10} + \frac{3}{90} = \frac{21}{30} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

Combinando os 3 trucos anteriores saen todos, pero non seguimos, deixamos que investigues ti. Nós imos explicar o método serio.

Outro exemplo:

✚ Pídenos expresar o número 7.3252525... á súa forma de fracción. O primeiro será poñerlle un nome, por exemplo, $N = 7.3252525...$; o segundo é **conseguir 2 números coa mesma parte decimal**.

O ante período ten 1 cifra e o período 2. Para conseguir a mesma parte decimal multiplicamos por 1 000 e a coma vaise ata despois do primeiro período. Se multiplicamos por 10 a coma vaise para diante do primeiro período.

$$\begin{array}{r} 1000N = 7325,2525... \\ - 10N = 73,2525... \\ \hline 990N = 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{3626}{495}$$

Xa temos 2 números coa mesma parte decimal, se os restamos esta desaparece e podemos despexar N .

Fíxate que a resta se fai nos 2 membros á vez.

Método formal:

Para obter a fracción xeratriz dunha expresión decimal multiplicamos o número pola potencia de 10 necesaria para levarmos a coma ao final do primeiro período, logo multiplicámolo outra vez para que a coma quede ao principio do primeiro período.

Outro exemplo e xa o entendes:

✚ $N = 15.25636363...$

Como conseguir 2 números coa parte decimal .636363...?

Pois o máis doado é $10\,000N = 152\,563.6363...$ e $100N = 1\,525.6363...$

$$\text{Restamos: } 9\,900N = 151\,038 \Rightarrow N = \frac{151\,038}{9\,900} = \frac{8\,391}{550}$$

Estes son os casos máis difíciles (periódicos mixtos), cando non haxa ante período (periódico puro) só haberá que multiplicar unha vez posto que xa temos o período xusto despois da coma:

✚ $N = 4.545454...$

$$100N = 454.5454...$$

$$- 1N = 4.5454...$$

$$\hline 99N = 450 \Rightarrow N = \frac{450}{99} = \frac{50}{11}$$

Exemplos:

N	10N –	1N =	9N	
1.333...	13.333...–	1.333...=	12	N=12/9
N	100N –	10N =	90N	
5.6777...	567.77...–	56.77...=	511	N =511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8.65888...	8658.88...–	865.88...=	7 793	N = 7 793/900

Por último, se che din que hai un truco para facer isto en segundos e sen quentar a cabeza, é certo. Haino. Coñecémolo. É unha regra que se esquece e polo tanto non vale para nada, non é razoada.

Actividades propostas

16. Pasa a fracción e simplifica:

- a) 1.4142
- b) 0.125
- c) 6.66

17. Pasa a fracción e simplifica:

- a. 1.41424142...
- b. 0.125125...
- c. 6.666...

18. Pasa a fracción e simplifica:

- 1) 1.041424142...
- 2) 0.7125125...
- 3) 6.7666...

19. Determina a fracción xeratriz de:

- A. $0.333... + 0.666...$
- B. $0.888... \cdot 2.5$
- C. $0.65 : 0.656565...$

4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIÓN

Vemos uns cantos exemplos:

i) Cantos litros hai en 80 botellas de 3 cuartos de litro cada unha?

O primeiro que debes facer é poñer un exemplo con números máis fáciles.

Teño 10 botellas cada unha de 2 litros. Está claro que temos 20 litros, que operación fixemos?, multiplicar?, pois o mesmo facemos cos números do problema:

$$\frac{3 \text{ litros}}{4 \text{ botella}} \cdot 80 \text{ botellas} = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60 \text{ litros}$$

(Observa que botellas van con botellas e as unidades finais son litros).

ii) Cantas botellas de 3 oitavos de litro necesito para envasar 900 litros?

Novamente cambiamos os números por outros máis sinxelos: quero envasar 10 litros en botellas de 2 litros. Está claro que necesito 5 botellas (10:2).

Facemos o mesmo cos nosos números:

$$900 \text{ litros} : \frac{3}{8} \text{ litros/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2400 \text{ botellas}$$

Fíxate que litros vai con litros e que as botellas que dividen no denominador ao final pasan multiplicando no numerador, polo que a unidade do resultado é “botellas”.

$$\frac{\text{litros}}{1} : \frac{\text{litros}}{\text{botella}} = \frac{\text{litros} \cdot \text{botella}}{\text{litros}} = \text{botella}$$

iii) Uxía gaña certo diñeiro ao mes. Se gasta o 40 % del en pagar a letra do piso, o 75 % do que lle queda en facturas e lle sobran 90 € para comer. Canto gaña e canto gasta no piso e en facturas?

$$\text{O primeiro: } 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \text{ e } 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Facémolo de 2 maneiras e elixes a que máis che guste:

a) Método gráfico:

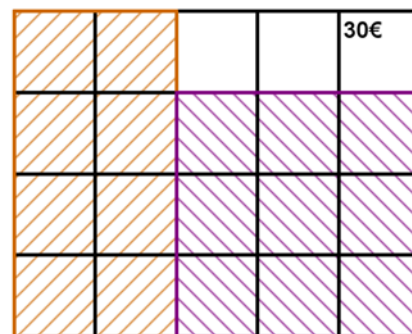
Facemos un rectángulo de 5x4 cadrados que son os denominadores.

Das 5 franxas verticais iguais quitamos 2 que é o que gasta na letra do piso.

O que queda está dividido en 4 partes iguais e quitamos 3 que é o que gasta en facturas. Quédannos 3 cadrados que son os 90 € da comida. Logo un cadrado é $90 : 3 = 30$ €.

O que gaña é $30 \cdot 20 = 600$ €.

Na letra gasta $30 \cdot 8 = 240$ € e en facturas $30 \cdot 9 = 270$ €.



b) Con fraccións:

Se a unha cantidade lle quitamos os seus $\frac{2}{5}$ quedannos $\frac{3}{5}$ dela ($1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5}$)

En facturas gastamos $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

Se tiñamos $\frac{3}{5}$ e gastamos $\frac{9}{20}$ quedannos $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12-9}{20} = \frac{3}{20}$ da cantidade inicial. Eses $\frac{3}{20}$ dinnos que son 90 €. Polo tanto $\frac{1}{20}$ serán $90 : 3 = 30$ €.

A cantidade total son os $\frac{20}{20}$ logo $30 \cdot 20 = 600$ €.

Na letra do piso gasto $\frac{2}{5}$ de 600 = $1200:5 = 240$ € e en facturas $\frac{3}{4}$ de $(600 - 240) = \frac{3}{4}$ de 360 = 270 €.

En calquera caso os problemas compróbanse.

40% de 600 = $0.4 \cdot 600 = 240$ € gasta na letra.

$600 - 240 = 360$ € quedan.

75% de 360 = $0.75 \cdot 360 = 270$ € gasta en facturas.

$360 - 270 = 90$ € que lle quedan para comer. Funciona!

Teño	Quito	Quédame
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5} = \frac{9}{20}$	$\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$

iv) Unha pelota perde en cada bote 1 quinto da altura desde a que cae.

a) Cantos botes debe dar para que a altura acadada sexa inferior a 1 décimo da inicial?

b) Se despois do cuarto bote a súa altura é de 12.8 cm, cal era a altura inicial?

O primeiro é darse conta de que se perde un quinto da altura queda cos 4 quintos desta.

Polo tanto en cada bote a altura multiplícase por $\frac{4}{5}$.

a) Temos que ver para que n se cumpre $\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{10} = 0.1$

E isto facémolo probando coa calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0.107 > 0.1$ pero $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0.0859 < 0.1$, logo fan falla 11 botes.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$ que é a fracción pola que se multiplicou a altura inicial.

$$\frac{256}{625}h = 12.8 \Rightarrow h = 12.8 \cdot \frac{625}{256} = 31.25 \text{ cm}$$

v) A Mariana descóntanlle a quinta parte do seu soldo bruto en concepto de IRPF e a sexta parte do mesmo para a Seguridade Social. Se cobra 600€ netos, cal é o seu soldo bruto?

Sumamos as dúas fraccións xa que se refiren á mesma cantidade:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$$

que é a parte que descuentan do soldo bruto para ter o neto. Quédanlle $1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$ da cantidade inicial.

Eses 19/30 dinnos que son 600 €.

Para calcular o soldo bruto facemos:

$$600 \cdot \frac{30}{19} \approx 947.37 \text{ €}.$$

Comprobación:

1/5 de 947.37 = 189.47 € paga de IRPF

1/6 de 947.37 = 157.90 € paga á S.S.

$947.37 - 189.47 - 157.90 = 600 \text{ €}$ que é o soldo neto. **Ben!**

Podería haber un pequeno desfase dalgún céntimo debido ás aproximacións.

CURIOSIDADES. REVISTA**Suma de infinitas fraccións**

O sentido común diche que se sumamos infinitos números positivos a suma ten que ser infinita. Pois, non necesariamente!

Propoñémosche un reto, imos sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ onde cada fracción é a metade da anterior.

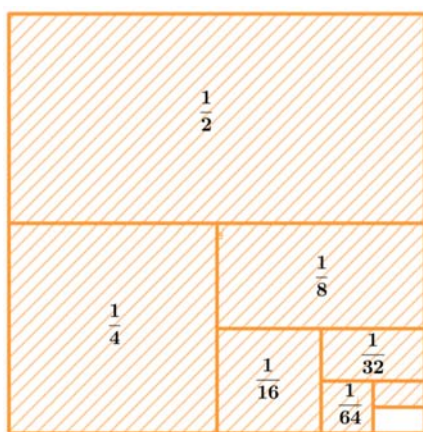
Os puntos suspensivos indican que isto non acaba nunca, en teoría deberíamos sumar e sumar e seguir sumando de forma indefinida. Na práctica non pode facerse, pero para iso están as matemáticas.

Colle a calculadora e empeza: $1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 + 1:32 + 1:64$

Dáche 0.984375 ou se tes sorte $63/64$, só falta $1/64$ para chegar a 1!

Suma agora ao resultado anterior $1/128$, obtemos 0.9921875 ou o que é o mesmo $127/128$, só falta $1/128$ para chegar a 1. Debes seguir, os seguintes números a sumar son $1/256$, $1/512$, $1/1024$...

Se te fixaches achegámonos cada vez máis a 1. Vale, non imos chegar nunca, pero se quixeramos darlle un valor á suma infinita de arriba, cal lle darías?



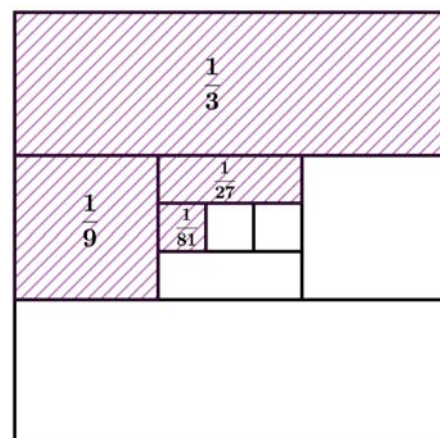
Os matemáticos danlle o valor 1.

Observa. Tes unha folla de papel cadrada de área 1. Córtala pola metade e deixas o anaco cortado enriba da mesa e o sen cortar na túa man. Volves cortar pola metade o anaco que tes na man e volves deixar enriba da mesa o anaco cortado. E segues, e segues... Sumas os anacos de papel que tes na mesa. Podería algunha vez sumar máis de 1? Non, evidentemente, son anacos dun papel de área 1. Algunha vez terías todo o papel enriba da mesa? Cada vez tes menos papel na man, e máis na mesa, pero ao cortar pola metade, nunca o terías todo. Porén os matemáticos din que no infinito esa suma vale 1.

Agora temos unha pizza e imos comela de “terzos en terzos”, é dicir, primeiro $1/3$, despois $1/3$ de $1/3$, logo $1/3$ de $1/3$ de $1/3$, e así sucesivamente...

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots =$$

Canto cres que vale esta suma?



RESUMO

Prioridade das operacións	1º Parénteses interiores, 2º Potencias e raíces, 3º Produtos e divisións, 4º Sumas e restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo da suma	$(+) + (+) = (+)$ súmanse, $(-) + (-) = (-)$ súmanse. $(+) + (-) = ?$ ten o signo do maior en valor absoluto.	$-7/3 - 8/3 = -15/3 = -5$ $-12/5 + 8/5 = -4/5$
Signo do produto e a división	Se teñen igual signo dá positivo. $(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = (+)$ Se teñen signo contrario dá negativo. $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = (-)$	$-4 \cdot (-10) = +40$ $+2 \cdot (-15) = -30$
Número Racional	Un número r é racional se pode escribirse como $r = a/b$ con a, b enteiros e $b \neq 0$.	2; $3/8$; $-7/2$ son racionais. Tamén 0.125 e 2.6777... $\sqrt{2}$ e π non o son.
Fracción irreductible	Obtense dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Numerador e denominador son primos entre si.	$360/840 = 3/7$, a última é irreductible.
Fraccións equivalentes	Son equivalentes as fraccións que teñen igual expresión decimal. Dúas fraccións equivalentes representan ao mesmo número racional. Os seus produtos cruzados valen o mesmo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = 0.75$ son equivalentes. $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$
Ordenación de fraccións	Pásanse a común denominador ou calcúlase o seu valor decimal ou úsase a lóxica e o truco $a/b < c/d$ se $ad < bc$ para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ ya que $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre outros motivos
Representación	Se é preciso pásanse á forma mixta. Para $n + a/b$ dividimos a unidade que vai de n a $n+1$ en b partes iguais e tomamos a . Para $-n - a/b$ dividimos a unidade que vai de $-n$ a $-n - 1$ en b partes iguais e contamos a empezando en $-n$.	
Suma e resta de fraccións	Pásanse a común denominador e súmanse (réstanse) os numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Produto e división	$a/b \cdot c/d = ac/bd$ $a/b : c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 14} = \frac{6}{7}$
Fracción dun número	a/b de $x = a/b \cdot x = (ax)/b$	$3/4$ de 60 = $3/4 \cdot 60 = 45$ $3/4$ de $4/5$ = $3/4 \cdot 4/5 = 3/5$
Cifras significativas	É o número de cifras "con valor" que se utilizan para aproximar un número.	0.025 ten 2 3.020 ten 4 3 000 non sabemos as que ten
Erros	Erro absoluto: $EA = \text{valor real} - \text{valor aproximado} $	$\frac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$

	Erro relativo: $ER = \frac{EA}{ Valor\ real }$ multiplícase por 100 para obter o % de ER.	$\Rightarrow ER \approx \frac{0.033}{2/3} \approx 0.050 \Rightarrow 5\%$
Fraccións e decimais	A expresión decimal dunha fracción sempre é exacta ou periódica. Exacta se o denominador só ten como factores primos o 2 ou o 5. Periódica no caso contrario.	$3/40 = 0.075$ exacta $5/12 = 0.41666...$ periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: divídese o número sen a coma entre a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais. Expresión decimal periódica: multiplícase N por potencias de 10 ata conseguir 2 números coa mesma parte decimal, réstanse e despéxase N.	$3.175 = 3175/1000 = 127/40$ $N = 2.0333...$ $100N - 10N = 183$ $90N = 183 \rightarrow$ $N = 183/90 = 61/30$.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula paso a paso

$$(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1))$$

2. Ordena de menor a maior:

$$\frac{8}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{38}{45}, \frac{77}{90}, \frac{-9}{8}$$

3. Indica razoadamente que fracción é maior:

$$a) \frac{102}{101} \text{ e } \frac{98}{99} \quad b) \frac{98}{99} \text{ e } \frac{97}{98} \quad c) \frac{-102}{101} \text{ e } \frac{-103}{102}$$

4. Demostra que
- $4.999... = 5$

Xeneraliza: Canto vale $n.999...$?

5. Pasa a forma mixta:
- $\frac{16}{9}, \frac{152}{6}, \frac{-17}{5}, \frac{-23}{4}$

6. Representa de forma
- exacta**
- na recta numérica:

$$\frac{760}{240}; 3.125; -\frac{46}{14}; -2.1666...$$

7. Simplifica:

$$a) \frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10} \quad b) \frac{10 + 6}{10 - 2} \quad c) \frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10}$$

8. Calcula a fracción que cae xusto no medio de
- $\frac{3}{2}$
- e
- $\frac{9}{4}$
- na recta numérica.

Pista: a media aritmética $\frac{a+b}{2}$

Representa as 3 fraccións na recta numérica.

9. A media harmónica defínese como
- $H(a, b) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$
- , o inverso da media aritmética dos

inversos.

$$a) \text{ Demostra que } H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

$$b) \text{ Calcula } H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$$

10. Calcula a fracción inversa de
- $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$

11. Opera e simplifica:
- $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$

12. Resolve paso a paso:

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} : \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2\right)}$$

13. Calcula as dúas terceiras partes da sexta parte do 80 % de 900.

14. Calcula o número tal que os seus catro terzos valen 520.

15. Cantos botes de tres oitavos de litro podo encher con 12 litros?

16. Calcula a fracción pola que hai que multiplicar 450 para obter 720.

17. Se 100 polgadas son 254 cm:

a) Calcula o longo en centímetros dunha televisión se a altura son 19.2 polgadas e longo/alto = 4/3

b) Igual pero agora longo/alto = 16/9.

18. Se nunha clase o 77.777... % dos alumnos aproban e hai máis de 30 alumnos, pero menos de 40, cantos alumnos son e cantos aproban?

19. Tres peregrinos deciden iniciar unha viaxe de 8 días. O primeiro deles achega 5 pans para o camiño, o segundo peregrino, 3 pans; e o terceiro non achega ningún pero promete pagarlles aos seus compañeiros ao final da viaxe o pan que coma. Cada un dos días que durou a viaxe, á hora de comer sacaban un pan da bolsa, dividíano en tres anacos e cada peregrino comía un anaco. Cando chegaron ao seu destino, o camiñante que non achegara ningún pan sacou 8 moedas e déullelas aos seus compañeiros: 5 moedas para o que puxera 5 pans e 3 moedas para o que contribuíra con 3 pans. Poderías explicar por que este reparto de moedas non é xusto? Cal sería o reparto xusto? (*Problema da Olimpíada de Albacete!* Débense ter en conta non os pans que un puxo senón o que realmente achega (o posto menos o comido)).

20. Aproxima os números 32 567 e 1.395 con 2 cifras significativas e di en cal se comete menor erro relativo.

21. π non pode representarse mediante una fracción de enteiros, pero podes calcular unha fracción que o aproxime con 5 cifras significativas?

22. Aproximamos π por:

a) Simplifica ata unha fracción impropia irreductible.

b) Calcula o erro absoluto e o erro relativo.

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$

23. Cantas botellas de 3/4 de litro necesito para ter a mesma cantidade que en 60 botellas de 3/5 de litro?

24. Calcula un número enteiro de tal forma que: a súa metade, a súa terceira parte, a súa cuarta parte, a súa quinta parte, a súa sexta parte e a súa sétima parte sexan números enteiros.

25. Á unidade quítolle as súas 2 quintas partes. Por que fracción hai que multiplicar o resultado para chegar outra vez á unidade?

26. Calcula a fracción resultante:

a) Quito 1 terzo do que teño e logo engado 1 terzo do que queda.

b) Engado 1 terzo do que teño e despois quito 1 terzo do resultado.

27. Estás aburrido e decides xogar ao seguinte: Avanzas un metro en liña recta, retrocedes a metade, avanzas a metade do que retrocediches no último paso, retrocedes a metade do que avanzaches no último paso...

Se o fas moitas, pero que moitas veces, canto avanzas en total?

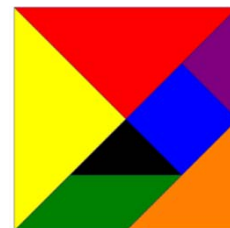
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots =$$

28. Darío dá pasos de $\frac{3}{5}$ de metro, o seu can Raio dá pasos de $\frac{1}{4}$ de metro. Se ambos os dous van a igual velocidade e Raio dá 360 pasos por minuto, cantos pasos por minuto dará Darío?

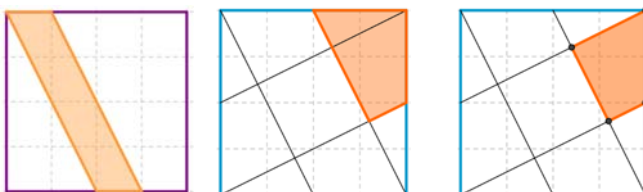
29. A figura do lado é un “Tamgran”.

a) Calcula a fracción que se corresponde con cada unha das 7 pezas.

b) Se o lado do cadrado é de 20 cm, calcula a área de cada peza.



30. Se o lado do cadrado é de 4 cm calcula a fracción e a área da zona coloreada:



31. Calcula:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$

AUTOAVALIACIÓN

1. Sabes operar con números enteiros, coñeces a prioridade das operacións e o uso das parénteses. Resolve paso a paso:

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$$

2. Sabes obter fraccións equivalentes. Ordena de **maior a menor**:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fraccións de forma exacta na recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0.125$$

4. Sabes operar con fraccións. Resolve paso a paso e simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Sabes calcular a fracción dun número e a fracción dunha fracción.
 a) Calcula as catro quintas partes dos cinco oitavos de 360.
 b) Unha botella ten cheas as súas sete oitavas partes. Se contén 840 cm³, canto lle cabe chea?
6. Sabes redondear e calcular o erro relativo cometido. Aproxima os números 9.859 e 9.945 con 2 cifras significativas e calcula os erros relativos cometidos (en %), cal é menor?
7. Sabes distinguir cando unha fracción ten unha expresión decimal exacta.
- a) Di cales das seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{6}{120}; \frac{5}{180}; \frac{42}{210}$$

b) Cantos decimais ten $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?

c) Cantas cifras como máximo pode ter o período de $1/97$?

8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción e simplifica:

a) 2.225

b) 2.2252525...

c) $\frac{0.125}{0.125125125...}$

9. Sabes resolver problemas mediante fraccións.

Unha medusa medra cada semana un terzo do seu volume.

- a) Cantas semanas deben pasar para que o seu volume se multiplique por máis de 3?
 b) Se o seu volume actual é de 1.200 cm³, cal era o seu volume hai 3 semanas?

10. A un traballador báixanlle o soldo a sexta parte, do que **lle queda** o 25 % vai destinado a impostos e por último do resto que **lle queda** as dúas quintas partes gástaas en pagar a hipoteca do piso. Se aínda ten dispoñibles 450 €, canto cobraba antes da baixada de soldo?, canto paga de

impostos e de hipoteca?

Solucións:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3)

4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;

b) 960 cm³.

6) 9 859 : 9 900 → EA = 41 → ER = 0.42 %.

9.945: 9.9 → EA = 0.045 → ER = 0.45 %, é un pouco menor o primeiro.

7) a) Primeiro simplifícanse, son exactas 6/120 e 42/150. 5/180 ten expresión decimal periódica.

b) 10 cifras decimais.

c) 96 cifras (de feito tenas).

8) a) $\frac{89}{40}$

b) $\frac{2\,203}{990}$

c) $\frac{999}{1\,000} = 0.999$

9) a) 4 semanas.

b) 506.25 cm³.

10) Cobrava 1 200 €. Agora cobra 1 000 €, paga 250 € de impostos e 300 € de hipoteca.

