MATEMATICAS

CURIOSIDADES Y REVISTA
Bachillerato

www.apuntesmareaverde.org.es

ÍNDICE

I.S.B.N. - 13: 978-84-606-9050-4

I.S.B.N. - 10: 84-606-9050-4

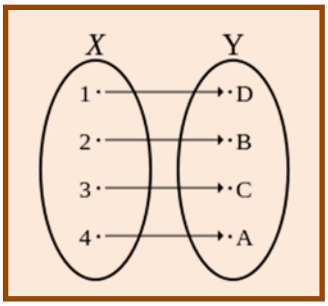
ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

NÚMEROS REALES

Infinito numerable

Se sabe si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, el mismo **cardinal**, si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre ellos.



Lo *sorprendente* es que en los **conjuntos infinitos** se pueda establecer entre un conjunto y una parte de él, y por tanto tener el mismo cardinal.

Card(N) = Card(Pares)

Así, el conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números pares pues se puede hacer corresponder a cada número natural n el número par $2n$.

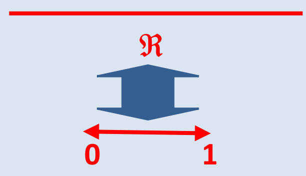
También se puede definir una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números enteros, y entre los números naturales y los números racionales

Card(N) = Card(Z) = Card(Q)

Al infinito de los números naturales lo llamamos **infinito numerable**

Cardinal del continuo

¿Cuántos números irracionales conoces? Pocos, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... Otros tres que se nombran con letras como π, e, Φ. Sin embargo *Cantor* demostró que el infinito de los números irracionales es mucho mayor que el infinito numerable. A su cardinal se le llamó del **continuo**.



Card(ℜ) = Card((0, 1))

¡Hay más números en el intervalo (0, 1) que en los números racionales, que el infinito numerable!

π

Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Ya sabes que vale **3,141592…** con infinitas cifras decimales no periódicas

En la Biblia se le daba el valor de 3.

En el antiguo Egipto, 256/81 = 3,16049

En Babilonia, 3 + 1/8 = 3,125.

Loa árabes obtuvieron hasta 17 cifras decimales

Con los ordenadores cada vez conocemos más cifras, en 1949 se conocían 2037, y en 2011, más de 10 billones (¡un 1 y 13 ceros!)

e

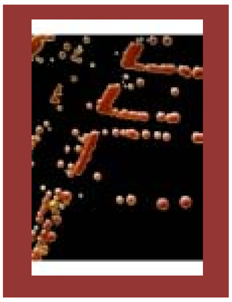
Otro número irracional. *Euler* calculó 23 de sus cifras decimales

Vale **2,718281828459…** con infinitas cifras decimales no periódicas

Es la base de los logaritmos neperianos

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Una de las numerosas aplicaciones del número e en Biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que lo limiten. En esos casos se aplica la fórmula: $P = P_0 \cdot e^t$ que permite averiguar cuál será la población P en un tiempo t a partir de la población inicial P_0.



Φ

¡El número de oro! ¡La divina proporción!

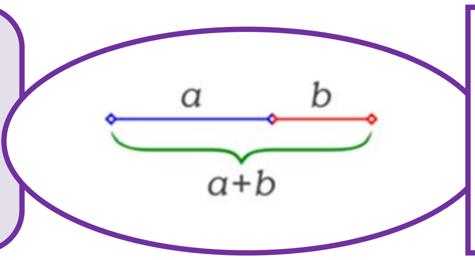
Vale **1,61803398874989…** con infinitas cifras decimales no periódicas

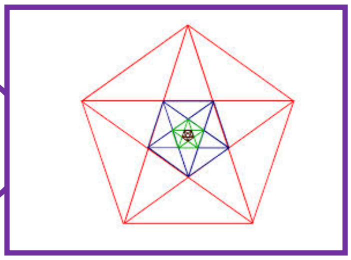
Se define como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observa que se define con un radical $\sqrt{5}$. Es un número irracional **algebraico**, mientras que los otros dos, π y e, son

Se obtiene como una proporción, al dividir un segmento de longitud $a + b$, en dos partes de forma que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$





POTENCIAS DE 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incluidas entre los productos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1331

11 x 11 x 11 x 11 = 14641

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son elevados al cuadrado:

$9^2 = 81$

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

Vale la pena observar que el número de nueves menos 1 de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow log(x) = 378*log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$log(x) = 534'86 \Leftrightarrow x = 10^{534'86} = 10^{534} \cdot 10^{0'86} = 10^{534} \cdot 7'24.$$

Solución:

$26^{378} = 7'24 \cdot 10^{534}$.

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora sabe calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con **50^{200}** y comprueba que te sale **$6'3 \cdot 10^{339}$.**

NÚMEROS GRANDES

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podemos tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abundancia, como son **las gotas del mar** (1×10^{25} gotas), **los granos de arena en todas las playas del mundo** ($5'1 \times 10^{23}$ granos) o el **número de estrellas de todo el Universo conocido** (3×10^{23} estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del universo (1×10^{80}) si queremos obtener un número más grande.

Si queremos hallar un número más grande **"Googol"**, acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que significa el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los **números primos de la forma de Mersenne**, que han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras. En 1952, el número primo de Mersenne más grande era $(2 \cdot 10^{17})-1$, un número primo con 39 dígitos, y ese mismo año, las computadoras probaron que el número $(2 \cdot 10^{521})-1$ es también primo, y que dicho número posee 157 dígitos, siendo este mucho más grande que un Googol

10^100

Googol (10^{100})

**10, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000**

CONJETURAS

Conjeturas

Conjetura: Afirmación que se supone cierta aunque no ha sido ni demostrada ni refutada.

Conjetura de Fermat

La conjetura de *Fermat* ya ha dejado de ser una conjetura, pues ha sido probada en 1995 por *Andrew Wiles*.

Pierre de Fermat escribió en el margen del libro "*Aritmética*" de *Diofanto*, que había encontrado una demostración admirable, pero que el margen del libro era demasiado pequeño para escribirla. Desde entonces los matemáticos quisieron probar que:

Si n es un número natural mayor que 2, no existen números naturales x, y y z para los que se verifique la igualdad:

$$x^n + y^n = z^n.$$

Otra conjetura, que ya no lo es, es la *Conjetura de Poincaré*, demostrada por *G. Perelman*.

Pierre Fermat (1637)

No hay números perfectos impares.

Un número se dice que es perfecto si es igual a la suma de sus divisores, sin incluir a sí mismo. Por ejemplo, 6 y 28 son números perfectos, pues:

6 = 1 + 2 + 3, y

28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Otra conjetura es, si existen, o no, infinitos números perfectos.

Conjetura de los números primos gemelos

Ya sabes que si un número es primo, salvo el 2, no es par. Pues se conjetura que pueden existir infinitos números impares consecutivos que sean primos. Es decir, que p y $p + 2$ sean primos.

Conjetura de Goldbach

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

Y relacionada con ella: Todo número entero mayor que 5 se puede escribir como suma de tres números primos.

Libros como "*El tío Petros y la Conjetura de Goldbach*" y películas como "*La habitación de Fermat*" se han basado en ella y en la fascinación que produce.

En Matemáticas hay otros muchos problemas no resueltos.

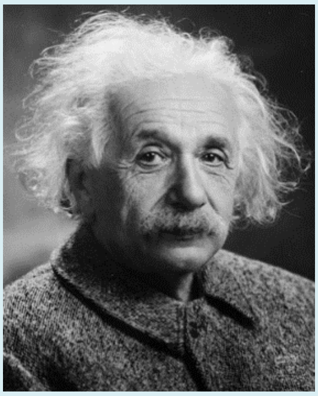
EDUCACIÓN FINANCIERA

IEB

¿Sabías que el IEB, Instituto de Estudios Bursátiles, es en la actualidad el centro oficial líder en el ámbito de la formación financiera en España e Iberoamérica? Pincha en el hipervínculo para conocer más sobre este organismo.

¿Sabías que para los bancos a partir de los **31 años** dejas de ser **joven** y por tanto dejas de aprovecharte de ventajas como poder tener una cuenta sin comisiones?

El primer lunes de octubre se celebra el **Día de la Educación Financiera** desde el año 2015.



Albert Einstein denominó al interés compuesto como "**la fuerza más poderosa de la galaxia**".

"En 2017 la **banca ética** contaba con más de 2 100 millones de euros de ahorros depositados"

(FETS, **Barómetro de las finanzas éticas**).

La Organización de Consumidores y Usuarios (**OCU**), solicita al Banco de España la revisión de las **comisiones** cobradas en ventanilla por retirada de dinero y las múltiples restricciones que encuentran los mayores en estos servicios.

El 24 de febrero de 2022, el **Congreso de los Diputados** ha aprobado el **proyecto de ley de consumidores vulnerables**, entre sus enmiendas se incluye la protección a las personas mayores frente a la exclusión financiera.

Christine Madeleine Odette Lagarde es una abogada y política francesa, que ocupa el cargo de presidenta del Banco Central Europeo desde noviembre de 2019. Anteriormente, fue la directora gerente del Fondo Monetario Internacional.

Janet Louise Yellen (Nueva York; 13 de agosto de 1946), fue nominada en 2014 por el presidente Barack Obama como presidente de la Reserva Federal de los Estados Unidos. Fue presidenta de la Reserva Federal durante un período de cuatro años, de 2014 a 2018, y no fue reelegida por el presidente Donald Trump. Desde el 26 de enero de 2021 se desempeña como secretaria del Tesoro de los Estados Unidos, bajo la presidencia de Joe Biden, siendo la primera mujer en ocupar dicho cargo.

Permitir ocasionalmente que la inflación subiera podría ser una "política sabia y humana" si aumenta la producción. Se dice que está más preocupada por el desempleo que por la inflación.

Abigail Pierrepont "Abby" Johnson (Boston, 19 de diciembre de 1961) es una empresaria e inversora estadounidense.

Una película, *Unplanned: The Abby Johnson Story* (2011, cuenta su biografía.

Warren Edward Buffett, (30 de agosto de 1930 (edad 91 años), Omaha, Nebraska, Estados Unidos) **inversor**, empresario y filántropo estadounidense, es conocido como el 'Oráculo de Omaha' y se ha ganado el título del **inversor** más exitoso de la historia. Ocupa la tercera posición en la lista de la revista Forbes, de los hombres más ricos del mundo.

“Lo que el sabio hace al principio, los necios lo hacen al final.”

“Tardas 20 años en construir una reputación y cinco minutos en arruinarla. Si piensas en eso, harás las cosas de manera diferente.”

NÚMEROS COMPLEJOS

Números complejos

Gauss

Números imaginarios

Un milagro de las Matemáticas

Stiillwell

Números imposibles

Una especie de anfibio entre el ser y la nada

Monstruo

Euler

Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es imposible

Todas las ecuaciones polinómicas de grado *n* tienen exactamente *n* raíces en el campo complejo.

Teorema Fundamental del Álgebra

Un chiste

- Me dicen que ese número de teléfono no existe, que es imaginario.

- Intenta girar 90º el teléfono.

¿Lo has entendido? Los chistes no se explican, pero como es un chiste matemático…

Piensa en un número imaginario, por ejemplo, –2i. Si lo giras 90º se convierte en 2, y ya es real.

La resolución de la paradoja de $\sqrt{-1}$ *fue muy poderosa, inesperada y bella por lo que únicamente la palabra "milagro" parece adecuada para describirla.*

Stillwel

Utilidad

Los números complejos y la variable compleja se utiliza para estudiar electricidad, magnetismo y en la teoría del potencial, entre otros muchos campos

Una fórmula maravillosa

En la Exposición Universal de París de 1937, la misma para la que Picasso pintó el Guernica, en la entrada del pabellón de Matemáticas había un enorme rótulo que decía:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una igualdad que relaciona números como el 0 y el 1, con números irracionales como e y π, y con el número complejo i.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

¿Quieres saber de dónde sale?

Euler expresó, mediante la fórmula que lleva su nombre, que:

$$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}.$$

Ya conoces que un número complejo de módulo *m* y argumento α se escribe en forma trigonométrica como: $m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, por lo que utilizando la fórmula de Euler se obtiene su **expresión exponencial**:

$$m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = me^{i\alpha}.$$

El número –1 tiene de módulo 1 y de argumento π, por lo que su expresión exponencial es:

$$-1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Algo de historia de los números complejos

El desarrollo de las Matemáticas está íntimamente relacionado con la historia del número. Como el producto de un número real por sí mismo es siempre positivo es claro que se necesita ampliar el campo numérico para dar solución a determinadas ecuaciones.

Los números complejos se empiezan a utilizar para obtener soluciones de ecuaciones algebraicas y culminan, en este sentido, cuando se demuestra el teorema fundamental del Álgebra.

Usualmente se dice que los números complejos nacen de la necesidad de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, con la dificultad de que carece de sentido geométrico el que un cuadrado tenga un área negativa. Sin embargo, esto no es enteramente cierto.

Muchas ecuaciones cuadráticas, como círculos o parábolas, están ya implícitas en la geometría de los **griegos** y entonces se analizó si tenían o no solución real, por ejemplo, la intersección de una recta con dichas figuras.

Los **babilonios**, alrededor del año 2000 antes de Cristo, conocían esencialmente el método para resolver ecuaciones cuadráticas, y *Herón de Alejandría* (100 a. C.) utilizó $\sqrt{-63}$, aunque algebraicamente, sin preguntarse por su significado, pues por aquellos tiempos no se especulaba acerca de la naturaleza de las raíces imaginarias.

Sin embargo cuando en 1545 Girolamo Cardano escribió:

$$40 = (5 + \sqrt{-15})\cdot(5 - \sqrt{-15})$$

estos números fueron considerados sin sentido y se les aplicó el término de *"imaginarios"*.

Incluso cuando aparecen las ecuaciones cuadráticas, con *Diofanto* o los árabes, no hay razón para admitir que no tengan solución.

Se necesitan cuando *Del Ferro, Tartaglia* y *Cardano* intentan resolver la ecuación cúbica $x^3 = p\cdot x + q$ en cuya fórmula de solución aparecen números complejos (cuando $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) y sin embargo tiene siempre una solución real.

Bombelli en 1572 trabajó formalmente con el álgebra de los números complejos e implícitamente introdujo las funciones complejas, aunque a pesar de ello los números complejos todavía eran considerados como imposibles.

Al final del siglo XVIII ya se tenía una gran maestría en la manipulación de los números complejos y sin embargo no se tenía la noción de un número complejo como un par de números reales formado por su parte real y su parte imaginaria.

C. Wessel, en 1799, asoció todo número complejo con un vector del plano con origen en *O*, y reinterpretó con estos vectores las operaciones elementales de los números complejos. *R. Argand* en 1806 interpretó geométricamente los números complejos. El número i, por ejemplo, lo representó como una rotación de un ángulo recto alrededor del origen. A partir de dicha interpretación ya empezaron a usarse sin dificultades dichos números.

ÁLGEBRA

El origen del Álgebra

El origen del Álgebra no está en Grecia, está en Bagdad, hacia el año 773, con su Casa de la Sabiduría, un observatorio y una biblioteca. Los libros llegaban en distintas lenguas y fue preciso traducirlos al árabe. Libros de todo tipo, científicos, filosóficos… En esa época Bagdad era la nueva Alejandría gobernada por el califa *Harún al-Raschid*, que promovió la búsqueda de manuscritos.

El matemático más importante fue *al-Jwarizmi*. Si lees este nombre en voz alta te sonará parecido a *algoritmo*, palabra que se deriva de él. Nació en lo que hoy es Uzbekistán. Escribió el primer libro de Álgebra (الجبر, al-Jabr) palabra que en árabe significa colocar, recomponer.

Pretendía convertir lo oscuro en claro y lo complejo en simple.

Cervantes, en el Quijote, habla de un *algebrista* que arreglaba huesos rotos o dislocados.

Hasta ahora se había trabajado con números conocidos, pero al-Jwarizmi dice "*esa cosa que busco, voy a nombrarla, pero como no la conozco, la llamaré cosa*". Y cosa en árabe se dice *chei*. Lo que se hace en álgebra es utilizar la cosa, la incógnita, como si se conociese, y se intenta descubrirla.

La noción de ecuación se debe a al-Jwarizmi. Con ellas no resuelve un problema numérico concreto sino una familia de problemas. Es una igualdad entre dos expresiones donde al menos en una de ellas hay una incógnita.

Resolvieron, él y sus seguidores, ecuaciones de primer, segundo y tercer grado.

Álgebra elemental es la parte del álgebra que se enseña generalmente en los cursos de Matemáticas, resolviendo ecuaciones y como continuación de la aritmética.

Álgebra abstracta es el nombre dado al estudio de las estructuras algebraicas.

Historia del Álgebra en Europa

En el siglo XIII *Leonardo de Pisa*, hijo de Bonaccio, ***Fibonacci***, aprendió árabe. Escribió *Liber abaci*, y trajo las cifras árabes (o hindúes) a Europa.

En 1494 ***Luca Pacioli*** escribió la primera obra de álgebra impresa. No aporta conocimientos nuevos pero recoge los conocidos. Llamaba ***cosa*** a la incógnita.

Hasta ***Tartaglia*** (1499 – 1557) no se vuelve sobre problemas como la solución de ecuaciones de **tercer** grado.

- *"Encuentra un número que sumado a su raíz cúbica de 6"*
- *"Reparte 100 monedas entre dos personas sabiendo que a la primera le corresponde la raíz cúbica de la segunda"*
- *"Se presta un capital con la condición de que se devuelva a final de un año con unos intereses de la raíz cúbica del capital. Se devuelven 800 monedas, cuánto se prestó"*

En 1572 *Raffaelle Bombelli* publica *Álgebra*, donde empieza a manejar los números complejos.

Euler (1707 – 1783) nombra a la unidad imaginaria con la letra i.

Se resuelven ecuaciones por radicales (como sabes resolver la ecuación de segundo grado). Son ecuaciones algebraicas formadas por polinomios de primer, segundo, tercer … grado. Se discute sobre el número de soluciones, extrañándose de que una ecuación de tercer grado pudiera tener más de una solución.

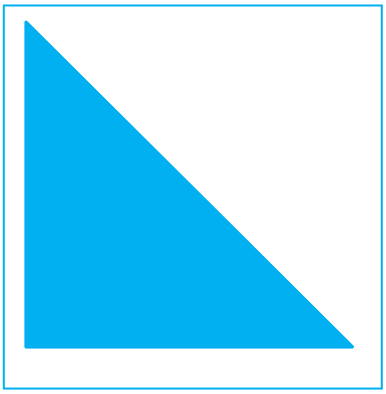
Fue *Karl* ***Gauss*** (1777 – 1855) quien, con el **teorema fundamental del álgebra**, dejó resuelto ese problema del número de soluciones de una ecuación algebraica: ***Una ecuación algebraica de grado n tiene siempre n raíces en el campo complejo***.

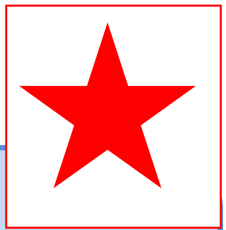
Niels Henrik ***Abel*** (1802 – 1829) demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de **quinto grado**.

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.





$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$ que es el número de oro, otro número irracional.

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b\cdot\mathrm{i}$ se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Problemas

Algunos problemas de ingenio que se resuelven, (o no) por ecuaciones o sistemas.

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

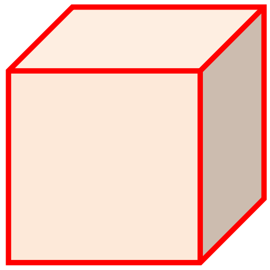
La invitación

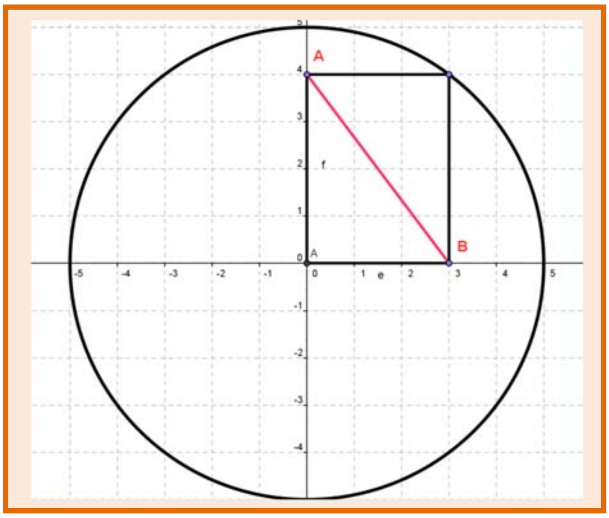
Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?





Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de *x*, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow$

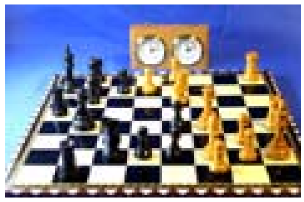
$x \geq 4$.

¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

Observa que hemos dividido la desigualdad por $(x - 4)$ que para unos valores de *x* es positiva y no cambia el sentido de la desigualdad, pero para otros es negativa y sí cambia.

SUCESIONES

A) El inventor del ajedrez



Ya vimos en el capítulo sobre potencias la leyenda sobre el ajedrez. Ahora puedes utilizar tus conocimientos sobre progresiones para hacer los cálculos:

Cuenta la leyenda cómo el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía.

¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?

¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 en el tenis

Las potencias de 2 también aparecen en los torneos de tenis. En muchos torneos se enfrentan los jugadores de la siguiente forma: En la final juegan dos jugadores; en la semifinal hay cuatro; en los cuartos de final hay ocho jugadores. Así, en cada ronda adicional la cantidad de jugadores se duplica, tal como ocurría con los granos de trigo en el tablero de ajedrez. Si el torneo tuviera 25 rondas, ¿te imaginas cuántos habría? Pues, ¡¡podrían participar casi todos los habitantes de España!! y con 33 rondas, ¡¡ podrían participar todos los habitantes del planeta!!

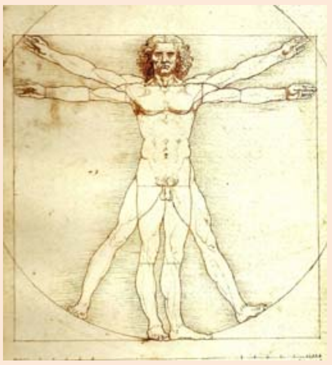
Sucesión de *Fibonacci*

Para los que pensáis que es imposible ver Matemáticas fuera del aula y mucho menos en la naturaleza, os presentamos uno de los más bellos conceptos matemáticos estrechamente relacionado con la naturaleza y el arte.

Se trata de una sucesión muy simple, en la que cada término es la suma de los dos anteriores.

- La sucesión comienza por el número 1,
- Y sigue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ya que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de las propiedades más curiosas, es que el cociente de dos números consecutivos de la sucesión se aproxima a la llamada **"sección áurea" o "divina proporción"**, que ya conoces, el número de oro descubierto por los renacentistas, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1'61803…, que se nombra con la letra griega ϕ. La sucesión formada por los cocientes de números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* se acerca rápidamente hacia el número de oro. Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número y lo consideraban el ideal de la belleza.



De hecho, *Leonardo da Vinci* en su obra "*El hombre de Vitrubio*" utiliza este número para conseguir las perfectas proporciones de su obra.

¿Cómo puede ser que el cociente de dos números de una secuencia inventada por el hombre se relacione con la belleza? Pues porque la sucesión de *Fibonacci* está estrechamente relacionada con la naturaleza. Se cree que *Leonardo* encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos. Supongamos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez engendrarán cada mes una pareja de conejos.

¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Pues sí, cada mes habrá un número de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de *Fibonacci*. Parece magia, ¿verdad?

Pues muchas plantas, como las piñas o las margaritas siguen una disposición relacionada también con la sucesión de *Fibonacci*, lo que ilustra la famosa frase de *Galileo*

"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático".

Los griegos y el infinito

El concepto de infinito ha costado tiempo y esfuerzo a la humanidad entenderlo. Los griegos opinaban que el número de granos de arena del mundo era infinito, hasta que *Arquímedes* escribió *el Arenario*, tratado en el que estimaba ese número, que en efecto es muy grande, pero no infinito.

Paradoja de Aquiles y la tortuga

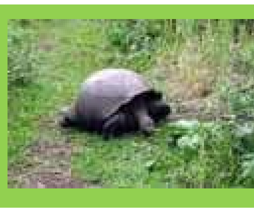
En ese mismo sentido, los griegos no podrían comprender que si sumaban infinitas cantidades les pudiera dar una cantidad finita.

Así aparece la paradoja de *Zenón* de "Aquiles y la tortuga". Aquiles, el de los pies ligeros, echa una carrera con una tortuga. Da a la tortuga una gran ventaja, pongamos L estadios. En poco tiempo Aquiles recorre los L estadios, pero al llegar allí descubre que la tortuga ha avanzado un cierto trecho, supongamos que $L/10$. Avanza de nuevo hasta donde se encontraba la tortuga, pero al llegar, ésta de nuevo ha avanzado. De este modo Aquiles nunca ganará la carrera, pues al llegar a la posición donde se encontraba la tortuga, ésta ya se ha movido.

La experiencia les decía que Aquiles sí alcanzaba a la tortuga, pero no lograban comprenderlo. Tú ya les podrías ayudar pues ya sabes sumar series infinitas en progresión geométrica de razón menor que 1:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = L + L/10 + L/10^2 + \ldots = \frac{L}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10L}{9}$$



Sobre la redondez de la Tierra

¿Desde cuándo sabemos que la Tierra es redonda y no plana? (más bien habría que decir esférica pero todo el mundo dice redonda). Un error relativamente común es, pensar que todo el mundo opinaba que la Tierra era plana hasta el siglo XV. Entonces Colón descubrió América en el siglo XV y convenció a casi todo el mundo. Y luego Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano dieron la primera vuelta al mundo y disiparon todas las dudas.

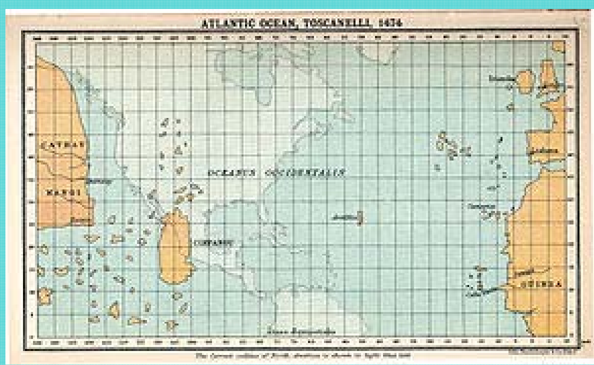
Bien, pues ¡¡no es cierto!! Se sabe que la Tierra es redonda desde la Antigüedad. No sólo eso. Desde el siglo III a.C. se conoce su radio y por tanto su circunferencia. Así que ya antes de Cristo se sabía cuánto tenía que navegar Colón para dar la vuelta al mundo.

Entonces, ¿de qué tuvo que convencer Colón a sus patrocinadores? Ciertamente no de la redondez de la Tierra. Colón pensaba que la circunferencia de la Tierra era más pequeña y que Japón estaba más cerca de los datos más precisos que tenían los científicos de la época. De hecho afirmaba que sólo había unos 3.700 km de las islas Canarias a Japón (la cifra real son 12.500 Km).

Hay cierto debate sobre si realmente Colón pensaba eso o si simplemente sabía que había tierra a esa distancia y se limitó a coger las estimaciones que más se ajustaban a su idea. Pero todo eso nos aleja de la pregunta fundamental que queríamos responder, ¿cómo sabían los antiguos que la Tierra era redonda?

Retrato de Colón.

Fuente: [Imagen en wikipedia]



Mapa de Toscanelli

Posible mapa en que se basó Colón para planear su viaje.

Fuente: [Imagen en wikipedia]

Erastóstenes y el radio de la Tierra

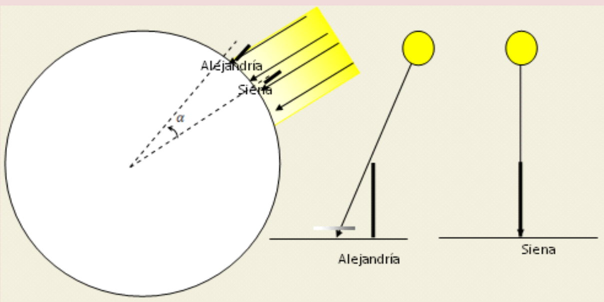
No está claro desde cuándo se sabe que la Tierra es redonda. Algunos dicen que fue *Pitágoras* (siglo VI a.C.) el primero en afirmarlo. También se afirma de otros griegos más o menos de la misma época como *Parménides*, *Zenón* o *Hesiodo*. Lo que sí se sabe es que a partir del siglo V a.C. la idea generalizada era que la Tierra era redonda.

La evidencia venía, entre otros factores, del hecho de que algunas estrellas que se ven desde *Egipto* no se veían desde *Grecia*. Eso sólo puede ocurrir si la Tierra es curva. También en los eclipses, la sombra de la Tierra sobre la Luna es siempre circular independientemente de cómo sea el eclipse. La única figura que siempre da sombras circulares es la esfera.

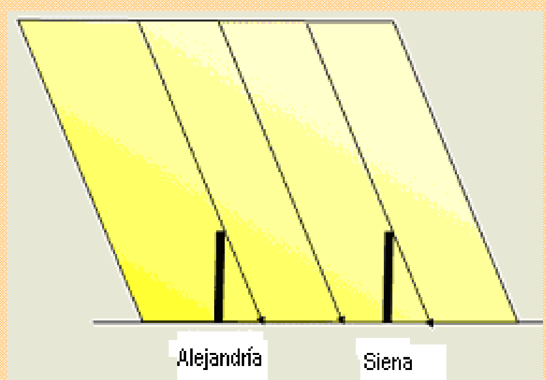
Sin embargo, hasta el siglo III a.C. sólo era una cuestión filosófica. El primero que midió realmente el radio de la Tierra y por tanto calculó su tamaño fue *Erastótenes de Cirene*.

El griego *Eratóstenes* vivió en Alejandría entre los años 276 a. C. y 194 a.C. Era un conocido matemático, astrónomo y geógrafo de la época. Entre otros trabajos uno de los más conocidos y aplicados en la actualidad es la denominada "Criba de *Eratóstenes*" para el cálculo de números primos.

El experimento realizado por *Eratóstenes* era genial en su sencillez: se sabía que en *Siena* (hoy *Asuán* en Egipto) los días próximos al solsticio de verano el Sol al mediodía no proyectaba sombras, es decir estaba en el perpendicular con la horizontal terrestre. En cambio el mismo día a la misma hora en *Alejandría* esto no ocurría y los palos tenían sombra. Mediante esta observación *Eratóstenes* no sólo le valió para darse cuenta de que la Tierra no era plana sino para ¡¡¡calcular el radio de la Tierra!!! Vamos a ver gráficamente el experimento a fin de entenderlo mejor. En la siguiente sección te proponemos realizar con tu clase otra práctica similar.



Situación si la Tierra es redonda



Situación si la Tierra fuese plana

REPLICA EL EXPERIMENTO

Replicando los cálculos originales

Simplemente observando que lo que ocurre es que dos palos separados dan sombras distintas, ya puedes deducir que la Tierra tiene curvatura. Pero el experimento nos da mucho más que eso. Podemos calcular también el radio de la esfera.

Si te fijas bien en el esquema primero (donde la Tierra es esférica) podemos observar que los ángulos que marcan la diferencia de latitud entre las dos ciudades (α) y el ángulo de los rayos solares con el palo en *Alejandría* son iguales, pues los lados que forman ambos ángulos son paralelos. De esta forma calculando el ángulo que forma el palo de *Alejandría* con los rayos solares (con el arco tangente del cociente del tamaño de la sobra y el del palo) hemos calculado la diferencia de latitud.

Así lo hizo *Eratóstenes* y calculó este ángulo cuyo resultado fue 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7º 12'. Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia *Biblioteca de Alejandría*, fijándola en 5000 estadios, un estadio 174’25 m. Con estos resultado con una simple regla de tres llegó a la siguiente conclusión, que te pedimos que compruebes con calculadora:

Diferencia Latitud →	**Distancia**
1/50 partes circunferencia	174’25*5000/1000 = 871’25 km
1 circunferencia	x = longitud circunferencia

x = 871’25 · 50 = 43562’5 km.

Radio Tierra = longitud(x)/(2π) = 6933 m (radio real 6370 m, error inferior al 10%)

Algunas consideraciones: Para hacer la medición de las sombras es necesario que la medición se haga a la misma “hora solar”, esta sólo ocurre en el mismo instante sólo si nos encontramos en ciudades con la misma longitud (en el mismo meridiano). La diferencia entre las dos ciudades elegidas por *Eratóstenes* se diferencia en casi 3º.

Realizando con tu clase un experimento similar

Vamos a realizar la experiencia con tus compañeros de clase. Para realizar la experiencia necesitas buscar la colaboración de otro instituto, cuanto más diferencia de latitud con el tuyo mejor saldrá la experiencia.

Dos son las dudas que se plantean a la hora de repetir el experimento:

1) ¿Necesitamos que los dos institutos estén en el mismo meridiano?
2) ¿Es necesario que el sol en uno de los institutos no proyecte sombra?

Vamos a resolver estas dos dudas:

1) Para hacer las medidas es necesario que el instante cuando miremos la sombra sea la misma “hora solar”, es decir el sol estar en la “misma posición” en los dos centros. Si los dos centros no están en la misma longitud entonces tendremos que buscar el instante en cada centro en el que la hora solar sea la misma. Elegiremos la hora solar más reconocible, el mediodía solar. Es fácil reconocer este momento, por las siguientes características:
   a. El sol ocupa la posición más alta del día (menor sombra)

b. El sol está en el Sur del horizonte (la sombra cae al Norte)

- La hora de reloj del mediodía varía según la época del año y la longitud del centro. Para calcularlo tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:
- En España estamos una hora adelantados respecto a la hora Europea. Así hay que sumar una hora a la hora del mediodía (12 h)

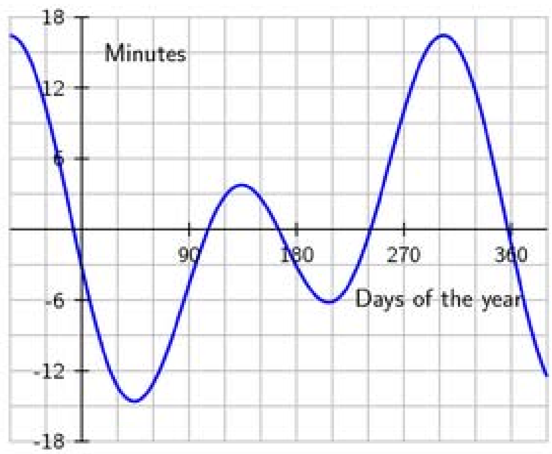
Meridiano de Greenwich

- En invierno con el cambio de hora tendremos que sumar otra hora.
- La hora de nuestros relojes está referida al centro del uso horario, en España el meridiano de *Greenwich*. Así al Oeste de este meridiano (que marca longitud 0º) tendremos que sumar el "tiempo que tarda el sol" en llegar a la latitud del local. Si el centro se encuentra al Este del Meridiano hay que restar el "tiempo que tardó en Sol" en llegar al meridiano de *Greenwich* desde el lugar. Este valor se calcula con una sencilla regla de tres (24 horas → 360º). Veamos dos ejemplos:

León: Longitud – 5'57º, tendremos que sumar a la hora 5'57º$\cdot\frac{24\,h}{360^o}$ = 22 min

Girona: Longitud – 2'8º tendremos que restar 2'8º $\cdot\frac{24\,h}{360^o}$ = 11min

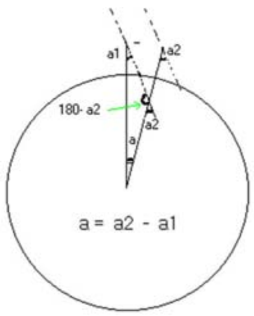
- Ecuación del tiempo: es la diferencia entre el tiempo solar medio (medido generalmente por un reloj) y el tiempo solar aparente (tiempo medido por un reloj de sol). Genera una gráfica de esta forma



Ecuación del tiempo

Para asentar conceptos veamos la hora real del mediodía solar en León el día 90 del año (comienzo de marzo).

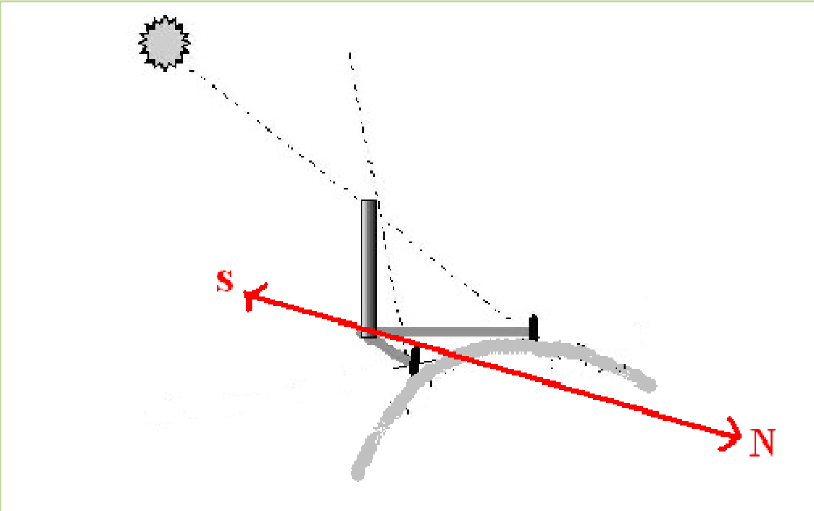
Hora mediodía = 12h + 1h invierno) + 1h (horario de España) + 22 min + -6 (ecuación del tiempo) = 14:16 minutos



2) El Sol sólo se sitúa en la vertical en días de verano de latitudes más próximas al ecuador. Pero esto no limita realizar la experiencia, pues la diferencia de latitud de los dos centros se calcula restando los ángulos que forma es Sol en los institutos.

Toma de medidas y cálculo del radio

Elegimos un día (y esperamos que sea soleado…). Nuestro objetivo es calcular la altura solar (ángulo que forma el sol con un gnomo o palo perpendicular al suelo) en el mediodía. Para calcular este ángulo vamos a hacer varias medidas una hora antes y otra después del mediodía (recuerda como se calcula).

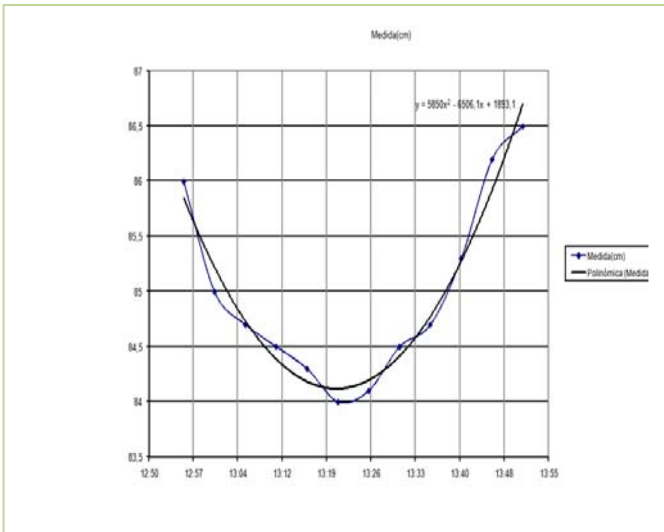


Situamos un palo perpendicular al suelo, podemos usar un recogedor y una plomada para asegurar la perpendicularidad con el suelo. Marcamos la posición en el suelo de la vertical del palo que nos da la sombra y situamos papel de *kraf* en el suelo para poder situar sobre él la sombra del palo. Cada cinco minutos marcamos la posición del extremo de la sombra, así como la hora. La sombra se mueve del Oeste a Este (al revés del sol), además hasta el mediodía la sombra disminuye de tamaño y a partir de mediodía aumenta.

Cuando tengamos las marcas y las horas analizamos las mismas con el fin de determinar la hora del mediodía y el tamaño de la sombra en este momento (sombra más pequeña en el mediodía). Podemos hacer esto de observando el tamaño de la sombra y cogiendo el valor menor o usar una herramienta informática (como Excel) para representar el tiempo frente al tamaño cuya gráfica es una parábola, siendo el vértice de la misma el punto que nos marca la hora del mediodía y la sombra al mediodía.

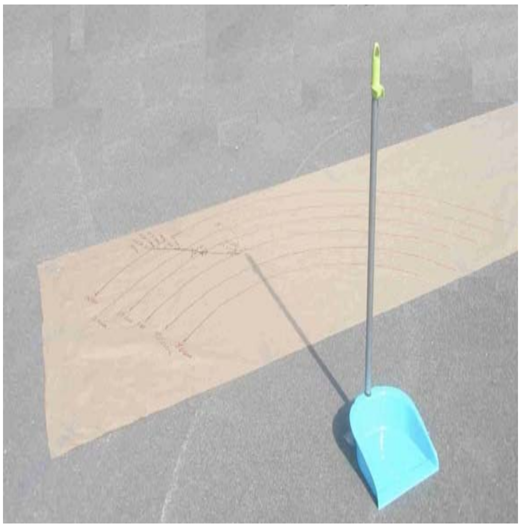
Veamos un ejemplo para asentar ideas:

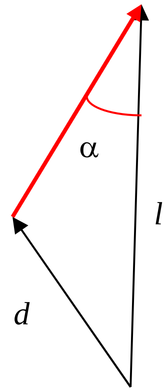
Hora	Sombra(cm)	Altura solar
12:56	86	49,6
13:01	85	49,9
13:06	84,7	50,0
13:11	84,5	50,1
13:16	84,3	50,1
13:21	84	50,3
13:26	84,1	50,2
13:31	84,5	50,1
13:36	84,7	50,0
13:41	85,3	49,8
13:46	86,2	49,5
13:51	86,5	49,4



Recuerda que el vértice se calcula a partir de la expresión analítica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ siendo $V(x_0, y_0)$ con $x_0 = -\frac{-b}{2a}$ (hora del mediodía solar) e $y_0 = f(x_0)$ (sombra del palo en el mediodía solar).

Sólo nos falta calcular el tamaño del palo (gnomon) y con el tamaño de la sombra calcular el ángulo que forma el sol con el palo (altura solar) a partir de la tangente.

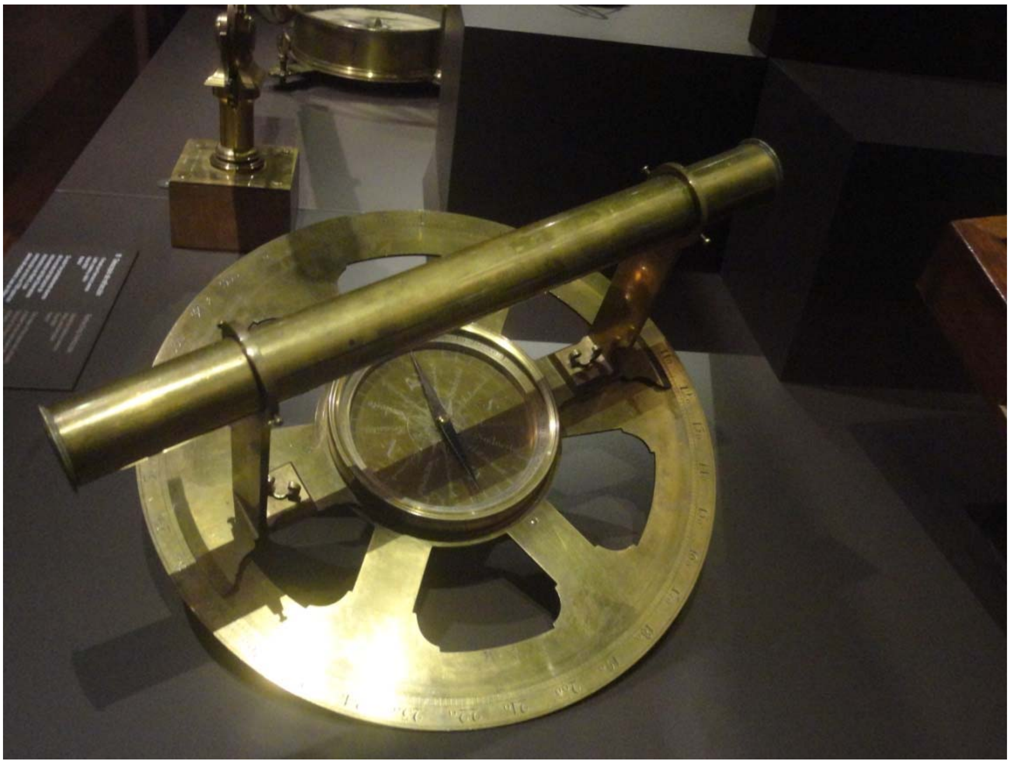




$$tg(\alpha) = \frac{d}{l}$$

Ya tienes el valor de tu ángulo, ahora a esperar que tus compañeros del otro instituto hayan hecho lo mismo. La diferencia entre estos dos ángulos debería ser la diferencia de latitud entre ambos centros. Utiliza algún programa informático como *sigpac* para ver la distancia (sólo en latitud) entre los dos centros y mediante una regla de tres y ¡ya tienes calculado la longitud de la circunferencia terrestre!

Instrumentos para medir ángulos



Del Museo Arqueológico de Madrid

ASTROLABIO

¿Sabes qué es un astrolabio? ¿Para qué sirve?

En el Museo Arqueológico Nacional puedes ver muchos, muy interesantes:

Aparecen en Grecia en el siglo I a. C. Tolomeo en el siglo II en su *Almagesto* describe su construcción. Hipatia perfeccionó el astrolabio de Tolomeo. Se construyen muchos en la Edad Media tanto en el mundo árabe como en los reinos cristianos del s X, y continuaron usando hasta el s XIX y XX. Es decir, es un instrumento que se ha venido usando más de veinte siglos.

Los que se conservan están fabricados en latón.

Aristóteles con astrolabio

La palabra astrolabio deriva de "aster", estrella, y de "lambion" o agarradera.

Observa las fotografías. Es una proyección estereográfica de la esfera celeste. Consta de cuatro partes:

1) La araña, pieza giratoria que, sin modificaciones, perdura desde Grecia, y, simplificando podríamos decir que es un mapa estelar. Cada punta es una estrella. En la base aparece el nombre de la estrella, y la punta debe fijar las coordenadas de dicha estrella.

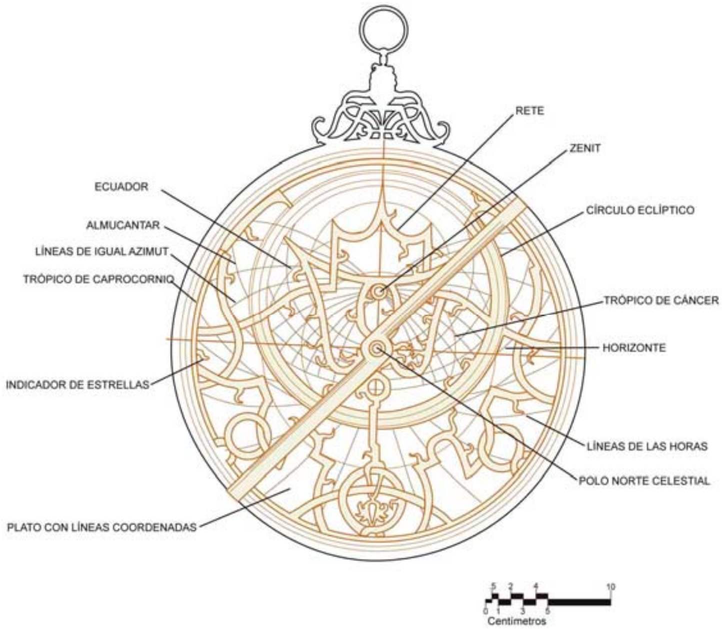
2) Láminas: Puede llevar varias, y cada una sirve para una determinada latitud.

3) Madre, o caja base, que es dónde se coloca todo.

4) Alidada, que es la aguja con un punto de mira.

En la **araña** puedes observar dos círculos. El menor es la eclíptica (círculo eclíptico), indica la trayectoria del Sol (para cada día del año). Los círculos externos indican una escala en grados, los doce signos del zodiaco, un calendario civil (juliano) y un calendario perpetuo. En el centro indica el Círculo Polar Ártico y por tanto, la Estrella Polar. Otro círculo indica el Trópico de Capricornio celeste.

La araña la construye un orfebre, siguiendo el diseño del responsable. Por ello la calidad se empareja con la estética.



Para ver las **láminas** para cada latitud tendrás que eliminar la araña y entonces verás dibujadas las líneas coordenadas: a) Líneas del indicador de las horas; b) Horizonte; c) Almucantar o curvas de igual paralelo; d) Líneas de igual azimut, o de igual meridiano.

Los astrolabios del Museo Arqueológico están en la sala del Islam, con el astrolabio de IBN SA'ID de al-SAHLI, o en la sala de la Edad Moderna que recoge objetos que provienen de la colección de Felipe II del Escorial.

Astrolabio toledano de IBN SA'ID de al-SAHLI

Astrolabio toledano de IBN SA'ID de al-SAHLI

Araña

Alidada

Lámina

Tiene cinco láminas que representan distintas latitudes, una red o "araña" con indicadores para veinticuatro estrellas y una alidada.

En el anverso -o "dorso"- lleva un calendario zodiacal y una escala altímetra denominada "cuadrado de sombras".

Este instrumento fue fabricado en Toledo por el astrolabista Ibrahim Said al-Sahali, cuyo nombre y el año de ejecución, 459 de la Hégira / 1067 d. C., aparecen en una inscripción en caracteres arábigos en el dorso.

Astrolabios planisféricos universales del Museo Arqueológico

Dorso

Completo

Madre

Araña y Alidada

¿Para qué se usaban?

Es un error (que viene en Wikipedia) decir que se usaban para la navegación. Hay como cuatro tipos de astrolabios y sólo uno, que sólo tiene el medidor de ángulos o alidada, se ha usado, y poco, en navegación.

Se usaba en suspensión. Un uso civil: como **medidor de alturas**. Se pone la aguja a 45º y se mira a la altura que se quiere medir, alejándose o acercándose hasta hacerlo coincidir. La distancia que nos hemos alejado, nos da la altura. Podemos medir así la altura de una torre, la profundidad de un pozo, o incluso la anchura de un rio. Por tanto se utilizó para medir distancias.

Y fundamentalmente cómo **reloj**. Los romanos usaron el reloj de sol para medir las horas diurnas, pero, ¿y las nocturnas? Es un reloj portable. Para saber la hora se debe conocer una (o varias) estrella de la araña. Se mueve la alidada hasta mirar la estrella y se mide el ángulo. En la lámina de nuestra latitud se toma en la eclíptica la posición del sol, que se alinea con la estrella elegida, y en la parte inferior del astrolabio miramos la hora. En el mundo musulmán era importante conocer las horas de la oración.

El astrolabio también permite calcular la posición del sol y de las estrellas, y sirve como calendario.

Láminas

Indicador para una estrella. En la base lleva el nombre de la estrella, y se debe hacer coincidir la punta con la estrella

Otros astrolabios


EDAD MODERNA

GRAFOS

LA MATRIZ DE ADYACENCIA

En 2º de Bachillerato aprenderás lo que son las matrices y su manejo. Cuando las estudies, podrás notar que las matrices están estrechamente relacionadas con los grafos.

Sin entrar en demasiado rigor, y con el objetivo de presentarte una idea intuitiva, vamos a definir una matriz como un conjunto de números reales que se disponen en filas y columnas. Su definición es en realidad algo más compleja, pero esta nos puede servir.

Ahora, vamos a considerar el grafo de la derecha.

Como vemos, está formado por un total de 5 vértices que se relacionan entre sí por un total de 7 aristas. Si ahora hacemos parejas de vértices (por ejemplo la pareja $(1,2)$) podemos asignar a cada pareja un valor en función de la existencia o no de una conexión entre ellos, o sea, una arista que los una (generalmente se asigna el 0, si no existe esa conexión; y el 1, si sí existe).

Y esta información la podemos organizar fácilmente en una matriz, resultando fácil de ver y analizar.

De esta forma, podemos hacer la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5
1	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
2	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
3	NO	SÍ	NO	NO	SÍ
4	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
5	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Donde hemos escrito «SÍ» en caso de que ambos vértices estén conectados por una arista, y «NO» en caso contrario.

Con ayuda de esta tabla, vamos a asignar los valores 0 y 1 según correspondan, en función del criterio establecido en el cuarto párrafo.

Tras realizar dicha asignación, podemos armar la siguiente matriz:

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

La matriz de adyacencia resulta muy útil, pues de forma abreviada podemos extraer conclusiones sobre las relaciones entre los vértices del grafo. En este caso, la relación más notable puede ser que la diagonal principal de la matriz está compuesta en su totalidad por ceros, lo que indica la no existencia de ningún bucle.

INTERPRETACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA

La matriz de adyacencia siempre será una matriz cuadrada (con el mismo número de filas que de columnas; y es este número, el de filas y columnas, el número de vértices del grafo). En grafos dirigidos, podemos notar como el valor que se asigne a una misma pareja puede cambiar en función del orden en el que consideremos a los vértices.

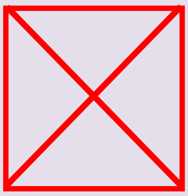
Por otro lado, para leer la relación que existe en un determinado entre los vértices 1 y 4, por ejemplo, bastará con dirigirse a la fila 1 y columna 4 (y viceversa; si es dirigido, sí importa el orden, no es lo mismo la fila 1 y columna 4 que la fila 4 y columna 1) e interpretar el resultado.

Las matrices de adyacencia también resultan útiles en el estudio de grafos ponderados.

EL IMPOSIBLE '*TREND*' DE TIKTOK

TikTok es actualmente la red social por excelencia entre el mundo adolescente, con récord de descargas.

En los últimos meses se ha difundido a través de esta red social un *reto* que se ha llegado a viralizar. Varios usuarios retaban de esta forma a sus seguidores a intentar dibujar la siguiente figura sin levantar el lápiz del papel (o el dedo de la pantalla).



Las redes se llenaron de millares de usuarios que trataban de dar solución al problema, y solo eran unos pocos los que acertaban en la respuesta: *es matemáticamente imposible*. Sin embargo, aquellos que contestaban bien argumentaban: "*lo dijo mi profesora de Matemáticas cuando le pregunté*"; ya… pero, ¿por qué?

La respuesta la tiene la Teoría de Grafos. Estamos buscando recorrer todas las aristas desde un vértice sin pasar dos veces por una misma arista y regresar al vértice inicial… *¿te suena de algo?* ¡Estamos buscando un ciclo euleriano! Sin embargo, debes notar cómo todos los vértices del grafo tienen grado impar, concretamente, grado 3. Recuerda que para que un grafo contenga al menos un ciclo euleriano el número de vértices con grado impar no debe exceder de 2, y el resto debe tener grado par.

Como esto no sucede, podemos decir que el grafo no contiene ningún ciclo euleriano y por tanto, la respuesta es: *no se puede hacer*.

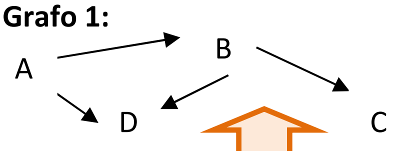
MATRICES

Con un **grafo** se representan las relaciones entre objetos.

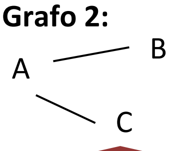
Un grafo está formado por nodos que se relacionan con aristas

Grafos y matrices

Grafo 1:



Grafo 2:



Hay grafos dirigidos, como el grafo 1, y grafos no dirigidos, como el grafo 2.

A cada grafo se le asocia una matriz

¡única!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vértices A, B, C y D son las filas de la matriz. Si A está relacionado con B ponemos un 1 en la fila 1, columna 2.

La matriz de un grafo no dirigido es simétrica.

Imagina que esos grafos están indicando personas que están conectadas por WhatsApp.

En el grafo 1, A está conectada con B y D. B con C y D.

En el grafo 2, A está con B y C. B con A, y C con A.

Se pueden utilizar grafos para representar los caminos que unen unas casas, o unos pueblos, o los vuelos (u otro tipo de conexión) que unen las ciudades. En psicología se utilizan por ejemplo para visualizar las relaciones de dominio entre individuos.

Vamos a multiplicar estas matrices por sí mismas e interpretar el resultado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A podría conectar con C y D (pidiendo a B que reenviara el whats).

Ahora un whats de A podría llegar a esa misma persona A por dos caminos distintos (a través de B y de C), pero sólo sus propios whats.

A B, con 2 whats, le llegarían los suyos y los de C.

Y a C lo mismo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Su primera especialización fue la teoría de invariantes algebraicos, que le permitió demostrar dos teoremas esenciales en la teoría de la relatividad. Su verdadera aportación a la investigación matemática fue poner las bases del Álgebra Moderna. Sus investigaciones en álgebra no conmutativa destacan, sobre todo, por el carácter unificado y general que dio a esta teoría. Sus publicaciones serían suficientes para valorar su decisiva contribución a las matemáticas, pero hay que considerar, además, que nunca le interesó mucho publicar y siempre permitió a sus colegas y a sus estudiantes desarrollar resultados interesantes a partir de las sugerencias que ella les hacía.

El calificativo ***Noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en Álgebra.

El Senado de la Universidad de Erlangen había declarado en 1898, que la admisión de mujeres estudiantes "*destrozaría todo orden académico*", sin embargo se les autorizaba a asistir a clase con un permiso especial, que no le daba derecho a examinarse. En 1904 Noether regresó a Erlangen donde habían cambiado los estatutos de la Universidad y pudo proseguir sus estudios de doctorado

En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y (1862-1943). y Félix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en Göttingen. Aunque Göttingen había sido la primera universidad en conceder un doctorado a una mujer, Sonia Kovalevskaya, no por ello tenía la disposición de contratar como enseñante a una mujer. Emmy no fue una excepción y a pesar de su valía, fracasó en su primer intento de presentarse a oposiciones como docente universitario. El reglamento vigente indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres. Hilbert quiso corregir esa injusticia, pero sus esfuerzos no tuvieron éxito, pues ciertos miembros de la facultad, no matemáticos, se opusieron.

Hilbert y Emmy encontraron un sistema para que ella pudiera trabajar como docente: las clases se anunciaban bajo el nombre de Hilbert y ella figuraba como ayudante. Así pudo probar su competencia y ser mejor conocida.

Se cuenta, como anécdota, que Hilbert dijo en un Consejo de la Universidad de Göttingen, "*no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños*".

A pesar del reconocimiento obtenido por este éxito, los cambios políticos y la llegada de Hitler al poder le obligaron a reorientar su carrera. Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal le obligó a abandonar Alemania.

Algunas biografías

Gabriel Cramer

Gabriel Cramer nació en Ginebra el 31 de julio de 1704 y murió el 4 de enero de 1752.

Mostró gran precocidad en matemática, a los 18 años se doctoró con una tesis sobre la teoría del sonido, y a los 20 años era profesor adjunto de matemáticas.

Fue profesor de matemática de la Universidad suiza de Ginebra durante el periodo 1724-27. En 1750 ocupó la cátedra de filosofía en dicha universidad.

En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.

Gabriel Cramer (1704-1752).

Visitó varios países para conocer y trabajar con matemáticos de su época: Euler, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Halley, de Moivre, Stirling, y otros matemáticos. Sus conversaciones y posterior correspondencia son de gran interés.

La **Regla de Cramer** es un teorema en álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de **determinantes**. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer, que publicó la regla en su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750, obra en la que desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos. Aunque **Colin Maclaurin** también publicó el método en su *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729). Los determinantes ya habían sido usados por Leibniz.

Eugène Rouché

Eugène Rouché (1832-1910) nació en Sommières al sur de Francia, el 18 de agosto de 1832 y murió en Lunel en 1910. Era hijo de un terrateniente. Estudio en la "Ècole Polytechnique" donde consiguió el doctorado en ciencias. Fue un famoso matemático francés, profesor en el *"Lycée Chalemagne"* y en el Conservatorio de Artes y Oficios en París. En 1873 fue nombrado presidente de la *Societé Mathematique* de Francia y más tarde en 1896 fue elegido de la Academia de Ciencias francesa. Es conocido por ser el autor del Teorema de Rouché sobre análisis complejo y coautor del **Teorema de Rouché–Frobenius** en los países de habla hispana.

Se conoce poco de su vida, pero se sabe que escribió varios artículos publicados en prestigiosas revistas, además de libros de texto y obras didácticas como: *Traité de géométrie élémentaire* (1874), *Éléments de Statique Graphique* (1889), *Coupe des pierres: précédée des principes du trait de stéréotomie* (1893), *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs* (1900-02).

F.G. FROBENIUS

Ferdinand Georg Frobenius

Ferdinand Georg Frobenius nació en el lujoso barrio berlinés de Charlottemburg el 26 de octubre de 1849, hijo de un pastor protestante, y murió en Berlín, el 3 de agosto 1917.

Estudió en Joachimsthal Gymnasium en 1860 donde se graduó, fue a la universidad de Göttingen, y siguió sus estudios en la universidad de Universidad Humboldt de Berlín donde obtuvo su doctorado con una tesis sobre la solución de las ecuaciones diferenciales bajo la dirección de Karl Weierstrass.

Fue profesor en distintos sitios, en Berlín, Zürich...

Matemático alemán reconocido por sus aportes a la teoría de las ecuaciones diferenciales y a la teoría de grupos; y su aportación al teorema planteado por Eugène Rouché que conoces con el nombre de teorema de Rouché-Frobenius.

El matemático Fröbenius en 1905 discrepó del teorema, tanto del enunciado por Rouché como del enunciado y demostrado por Fontené y propuso una demostración alternativa.

Otras obras suyas en el campo del álgebra han contribuido a establecer la llamada ley de reciprocidad de Frobenius y los grupos de Frobenius, versando principalmente en la teoría algebráica de los grupos finitos y la sistematización del álgebra mediante procedimientos de lógica matemática y axiomática.

El nombre de teorema de Rouché – Fröbenius se debe al matemático español ***Julio Rey Pastor***.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Cuadrados mágicos

Se pueden usar sistemas de ecuaciones para confeccionar cuadrados mágicos.

En un cuadro de Durero y en la Sagrada Familia de Barcelona tienes un cuadrado mágico.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

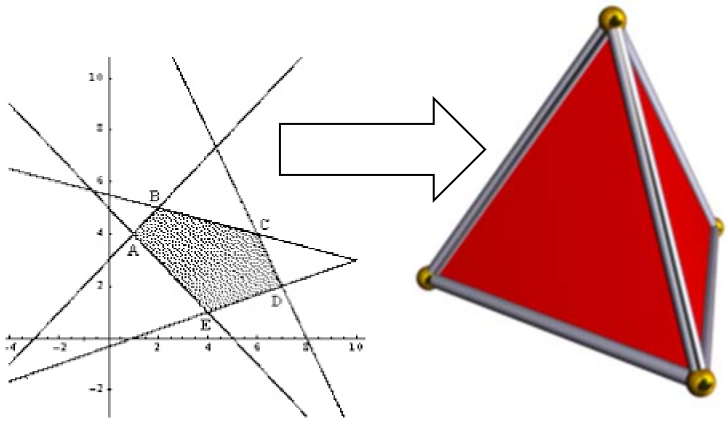
Danzig. Una anécdota

Quizás no sea cierto, pero se cuenta que, **George Bernard Dantzig** (1914 – 2005), siendo estudiante llegó un día tarde a clase, y al entrar vio escritos en la pizarra dos problemas, pensó que estaban propuestos como tarea para casa, así que se puso a resolverlos. Le resultaron difíciles. A la clase siguiente se los entregó al profesor, Jerzy Neyman. ¡Eran problemas que hasta entonces nunca habían sido resueltos! El profesor habló con él y publicó uno de ellos en una revista científica.

Se le considera el "padre de la programación lineal"

Desarrolló el **Método del Simplex**.

¡Ya sabes resolver problemas de Programación Lineal! Pero… imagina que la región factible no está limitada por rectas, sino



¡Busca! ¡Investiga! Haz un trabajo y una presentación de 5 minutos sobre algo que te haya gustado de Programación Lineal. En la web puedes encontrar mucha información, vídeos, artículos…

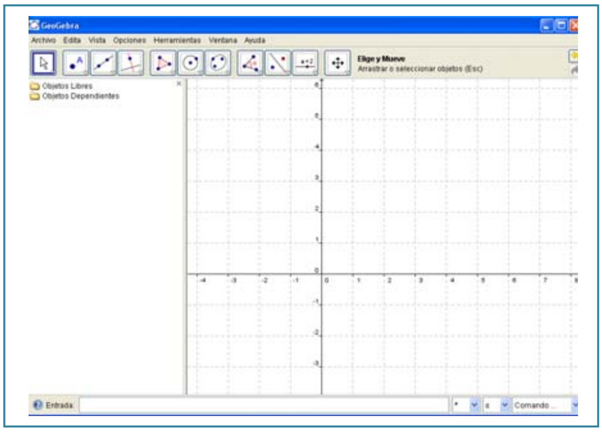
Narendra Krishna Karmarkar

Más difícil todavía, imagina que hay más de tres variables, que hay muchas, por ejemplo, 216, entonces el poliedro estaría en un espacio de más de tres dimensiones, de muchas, muchas dimensiones.

La forma de resolverlo sería la que ya conoces, o similar, pero mucho más complicada de calcular. Habría que hacerlo con un ordenador. Y aun así, la complejidad puede ser enorme. Es necesario estudiar métodos que hagan posible que el ordenador sea capaz de hacerlo. Dantzig desarrolló el Método del Simplex, y posteriormente, en 1984, **Narendra Krishna Karmarkar** (nacido alrededor de 1956) publicó el método conocido como algoritmo de Karmarka o métodos de puntos interiores, que, parece, hacen más rápido el cálculo

Geogebra

Utiliza Geogebra para resolver tus problemas de Programación Lineal

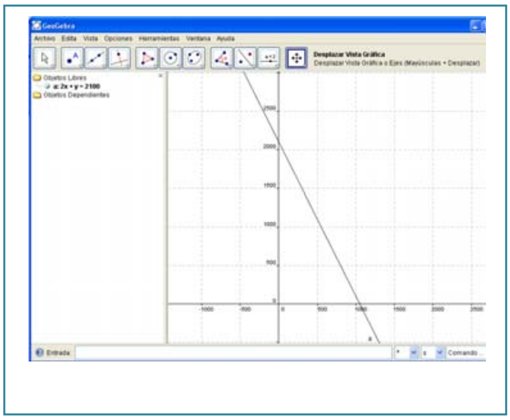


Geogebra es un software matemático libre. Trabaja con geometría, álgebra y cálculo. Permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

Al abrir el programa aparece una pantalla como la del margen con menús desarrollables, botones, una pantalla partida donde en la derecha están las ecuaciones y en la de la izquierda una cuadrícula, unos ejes y es donde aparecen las gráficas. En la parte inferior está: *Entrada*, donde escribimos las ecuaciones y las funciones.

Vamos a resolver el siguiente problema, que ya está resuelto en el capítulo:

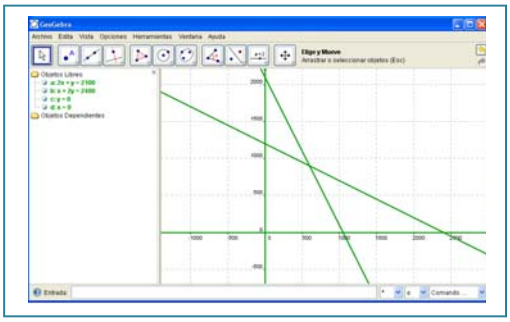
- *Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente* 700 *kg de café tipo C y* 800 *kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de* 2 *partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana* 2,2 *euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana* 2,6 *euros por kg. Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.*



Las restricciones son:

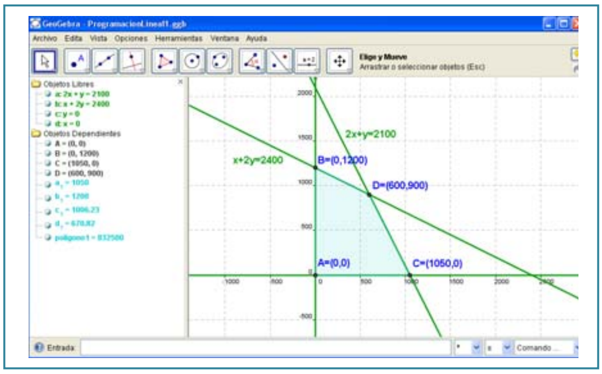
$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}y \le 700 \to 2x + y \le 2100$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y \le 800 \to x + 2y \le 2400$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

Dibujamos la recta $2x + y = 2100$. Para ello escribimos en "*Entrada*" 2x+y=2100. Pero no vemos nada todavía. En el botón de más a la derecha apretamos varias veces "*Zoom de acercamiento*" hasta que veamos la recta, pues, observa, que ahora cada cuadrícula está a 500 unidades.



De igual modo dibujamos $x + 2y = 2400$, $x = 0$, e $y = 0$. Poniéndonos encima de la gráfica o de la ecuación y apretando el botón derecho del ratón, se plantean diversas opciones: renombrar, borrar…, propiedades. Entrando en *propiedades* tenemos de nuevo varias opciones: básico, color, estilo, álgebra y avanzado. Vamos a cambiar el *color* de las rectas a, por ejemplo, el color verde, y en *estilo* ponemos un trazo un poco más grueso. Si fueran restricciones estrictas podríamos elegir un *estilo* de recta de puntos.

Marcamos los vértices, simplemente marcando el segundo botón de “*nuevo punto*” y desplazándonos sobre la gráfica hasta las intersecciones de las rectas. De nuevo con “*Propiedades*” marcamos esos puntos a nuestro gusto y escribimos sus coordenadas, en este caso, en color azul.

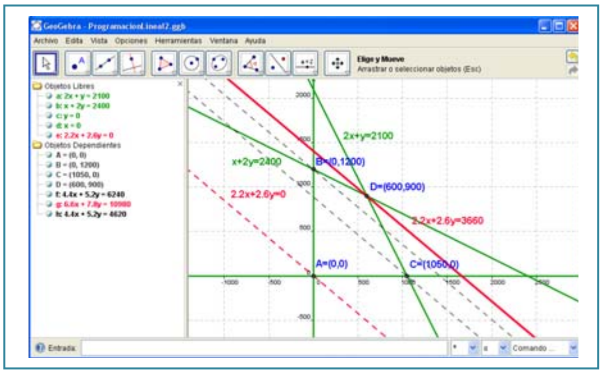


Observa como en la pantalla de la izquierda tenemos como objetos independientes las ecuaciones de las rectas, y como objetos dependientes las coordenadas de los vértices.

Ya vemos claramente la región factible. La hemos coloreado en verde marcando el polígono, botón 5º, “*Polígono*” y con *propiedades*.

Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es:

$$z = 2{,}2x + 2{,}6y \text{ Máx.}$$



Trazamos en rojo una recta paralela a la función objetivo que pase por el origen de coordenadas: $2{,}2x + 2{,}6y = 0$.

Utilizando el cuarto botón: “*recta paralela que pase por un punto*” hemos trazado las rectas paralelas a la función objetivo, en color negro y trazos de puntos, que pasan por cada uno de los vértices. La más alejada es la que hace máximo la función objetivo, en color rojo. Por tanto es la que pasa por el punto D. El siguiente paso es ver qué valores toma la función objetivo en cada uno de los vértices, para saber donde es óptima (máxima):

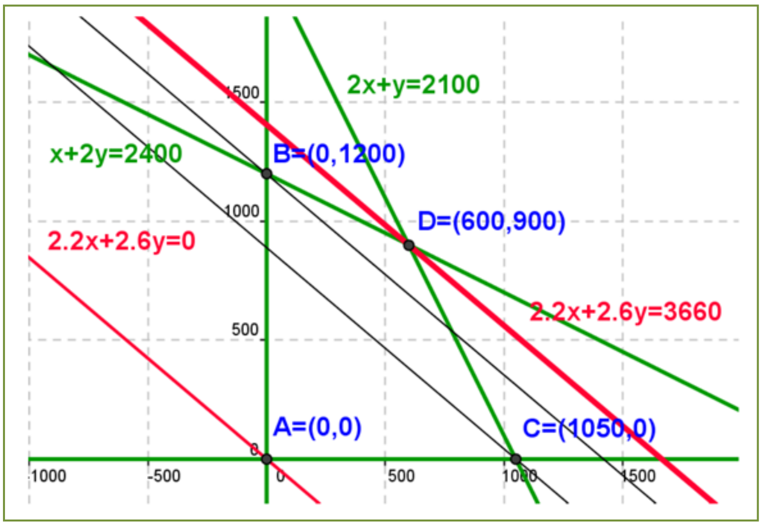
$$A : z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 0 = 0$$

$$B : z = 2{,}2 \cdot 1050 + 2{,}6 \cdot 0 = 2310$$

$$D : z = 2{,}2 \cdot 600 + 2{,}6 \cdot 900 = \mathbf{3660} \text{ es el máximo}$$

$$C : z = 2{,}2 \cdot 0 + 2{,}6 \cdot 1200 = 3120$$

Por tanto deben producirse 600 kg de la mezcla tipo A y 900 kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a 3660 euros.



Ahora sólo nos queda hacer la representación gráfica del problema. Para ello, con el ratón en el primer botón marcamos en la pantalla de la derecha el trozo que queremos copiar, y desplegando el menú “*Edita*” escogemos “*Copia la vista gráfica en portapapeles*”. Ahora ya la podemos copiar en nuestro documento.

- Intenta utilizar Geogebra para volver a resolver los problemas de las actividades realizadas.

Las antenas parabólicas

De todas las palabras raras que hemos visto en este tema, posiblemente la que hayas visto más frecuentemente en la vida diaria haya sido la parábola.

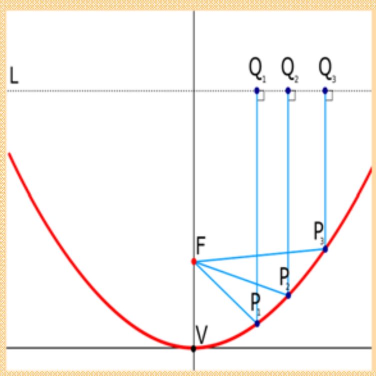
Y es que es muy posible que en tu casa (o la de tus vecinos) haya una antena parabólica. ¿Y qué es una antena parabólica? Pues una antena que tiene (¡oh, sorpresa!) forma de parábola. Más exactamente, como una parábola es una figura plana y la antena es en tres dimensiones, es la figura que se obtiene al girar una parábola (el nombre técnico es paraboloide).

La razón por la que se hacen las antenas de esa manera es porque la parábola tiene una propiedad muy curiosa. Cualquier rayo que llegue paralelo a su eje de simetría se refleja en el foco.

Si las ondas de TV (o radio o luz) llegan desde muy lejos, son aproximadamente rayos paralelos. Y de este modo todos se reflejan en el foco. Por tanto basta poner un receptor en el foco y recibiremos toda la señal. Si te fijas en la figura, una antena tiene únicamente un receptor, situado en su foco.

Una aplicación algo menos conocida del mismo principio son los faros de los coches. El faro tiene forma de parábola. Se pone una luz en el foco y automáticamente, se emiten rayos paralelos hacia delante.

Un foco de luz. Fuente: http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/39/Parabolicos.htm



Rayos reflejándose en una parábola.

Fuente: Wikipedia

Una antena parabólica

Fuente: modificación propia de un original del Banco de imágenes de INTEF)

La recta de *Euler* y la circunferencia de *Feuerbach*

Uno de los hechos más sorprendentes de las matemáticas es el hecho de que se sigan descubriendo cosas sobre objetos matemáticos que parecían ya agotados.

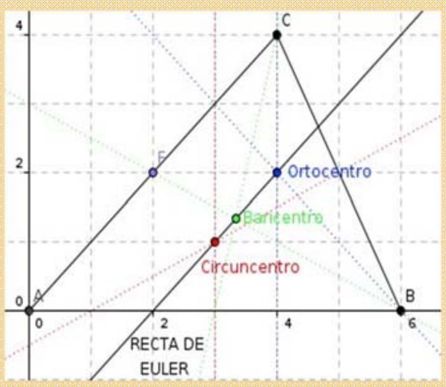
Posiblemente la figura geométrica más simple sea el triángulo, que son simplemente tres puntos no alineados. Lleva siendo estudiado desde la antigüedad. Ya conoces sus cuatro centros (ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro).

Lo que quizás no sepas es que los tres primeros (ortocentro, circuncentro y baricentro) SIEMPRE están en la misma recta. Esta recta se conoce como **recta de *Euler*** en honor a su descubridor, el matemático suizo del siglo XVIII *Leonhard Euler*.

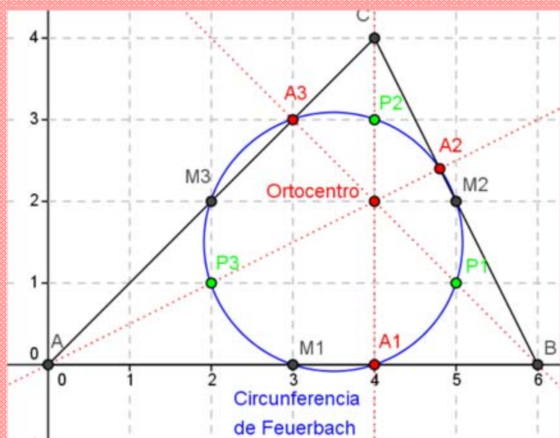
Otra figura notable que se puede construir a partir de un triángulo no es una recta sino un círculo. Si tomas los puntos medios de los lados y los pies de las alturas, estos seis puntos están sobre una circunferencia. Se llama circunferencia de *Feuerbach* por *Karl Wilhelm Feuerbach*, matemático alemán del siglo XIX.

Puede probarse además que esta circunferencia divide en dos partes iguales a los segmentos que unen al ortocentro con los vértices. Vale que esto ya es un poco más cogido por los pelos, pero reconoce que el hecho de pasar por los otros seis puntos es notable.

Por cierto, la recta de Euler TAMBIÉN pasa por el centro de la circunferencia de *Feuerbach*, ¡cosas de la matemática…!



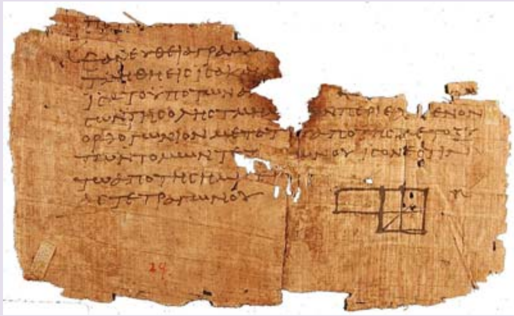
Hemos dibujado en el triángulo de vértices A = (0, 0), B = (6, 0) y C =(4, 4) las dos figuras. Un ejercicio que puedes hacer es calcular la recta y la circunferencia (con *Geogebra* o programa similar o con papel y boli)



M_1, M^2 y M_3 son los puntos medios de los lados, A_1, A_2 y A_3 son los pies de las alturas y P_1, P_2 y P_3 los puntos medios entre el ortocentro y los vértices

Otro ejercicio curioso que puedes hacer es, con *Geogebra* o programa similar, hacer las construcciones y luego mover los vértices del triángulo. Observarás que el triángulo se distorsiona, pero la recta de *Euler* sigue siendo recta y la circunferencia de *Feuerbach* sigue siendo circular.

Otras Geometrías

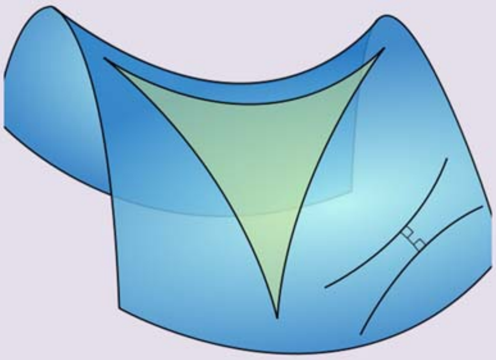


Euclides (325 aC – 265 aC), en Los Elementos, partió de cinco postulados para construir la Geometría. Si alguno de esos postulados no se cumple, entonces tenemos lo que se denomina las **Geometrías No Euclídeas**.

El quinto postulado dice: "Dada una recta y un punto exterior a ella, hay **una única recta** que es paralela a la recta dada y que pasa por el punto".

Cuando a principios del siglo XIX se intentó demostrar el postulado por reducción al absurdo se encontró, con sorpresa, que no se llegaba a una contradicción, que se podían construir geometrías que podían no verificarlo.

De modo independiente, distintos matemáticos (Gauss, Lobachevsky, Bolyai…), en ese intento de demostrar el quinto postulado llegaron a la **Geometría Hiperbólica**.

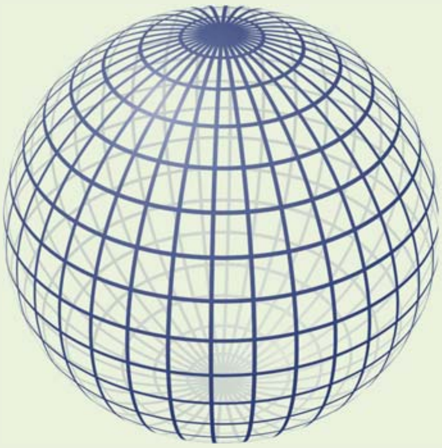


La Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea, y "su" quinto postulado es: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **existen al menos dos rectas paralelas** *a la dada que contienen al punto*". En la geometría hiperbólica la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor que 180°. Puedes pensar en una geometría hiperbólica si te sitúas sobre una trompeta.

Si reescribimos el quinto postulado como: "*Dada una recta y un punto exterior a ella,* **no existe ninguna recta paralela** *a la dada que contenga al punto*", se obtiene la **Geometría Elíptica**.

Imagina que estás en una esfera. Tendrás que redefinir qué entiendes como "rectas". Si una recta es el camino más corto posible que une dos puntos, tendrás lo que se conoce como **líneas geodésicas** (los meridianos de un globo terráqueo). Entonces, por una de esas *nuevas* rectas y un punto exterior, **todas** las rectas que traces cortan a la primera.

Si lo piensas, cada vez que miras un globo terráqueo estás viendo algo de Geometría Elíptica.



Actualmente las Geometrías No Euclídeas proporcionan otras formas de entender el mundo, siendo utilizadas, por ejemplo, en Teoría de la Relatividad, o en el estudio de fenómenos ópticos y propagación de ondas.

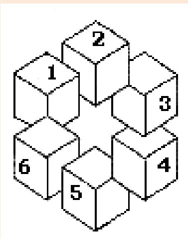
Objetos imposibles

A lo largo del tema hemos ido viendo dibujos de las figuras en el espacio. Muchas veces nos han servido de ayuda, pero en otras (por ejemplo, rectas que se cruzan) en el esquema no está tan claro qué está pasando en realidad.

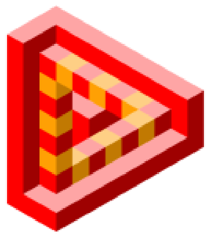
Esto es consecuencia de que **proyectar** una imagen tridimensional en el plano implica una cierta pérdida de información, algo que ciertos artistas aprovechan para realizar dibujos de **figuras imposibles**.

Perspectiva absurda – William Hogarth

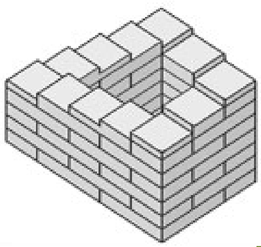
Se considera a Oscar Reutersvard el creador de las figuras imposibles tal y como las conocemos. En 1934, siendo estudiante, se encontraba aburrido en una clase de latín y se puso a dibujar estrellas de varias puntas.



Un día dibujó una estrella de 6 puntas rodeada de cubos y comprobó algo extraño. Colocó 3 nuevos cubos en las esquinas y apareció una figura imposible.



Las figuras sobre estas líneas se denominan triángulos de Penrose, y en 1982 apareció uno de ellos en sellos de correo suecos.



En 1956 Roger Penrose publicó un artículo en el que aparecen otras figuras imposibles.

Parece ser que Penrose se inspiró en dibujos de Escher, que todavía no había pintado figuras imposibles, quien a su vez se inspiró en los artículos de Reutersvard.

Geometría y arquitectura

Geometría y arquitectura

En los libros de Secundaria que acostumbras a usar siempre aparecen edificios clásicos de la antigua Grecia, Roma y otras culturas antiguas.

Hoy en día estamos rodeados de edificios con líneas muy diferentes y sorprendentes, algunas de las cuales exploran aspectos de la geometría que hasta hace poco no se conocían. Esto no quiere decir que sólo hablemos de los edificios modernos. Los mocárabes de la Alhambra, en Granada, son un claro ejemplo de cómo jugar con las tres dimensiones y la repetición de motivos.

Mocárabes en la Alhambra – Granada

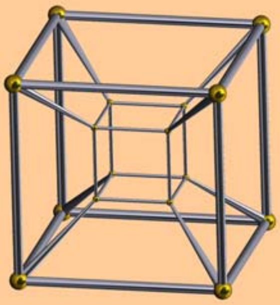
El Centro Niemeyer de Avilés

En otros casos se utilizan volúmenes de revolución, y se consiguen formas suaves de aspecto natural.

Sagrada Familia de Barcelona

Aunque si se trata de imitar a la naturaleza, nada mejor que ver cómo Gaudí imitó la forma de los troncos y las ramas en las columnas de la Sagrada Familia.

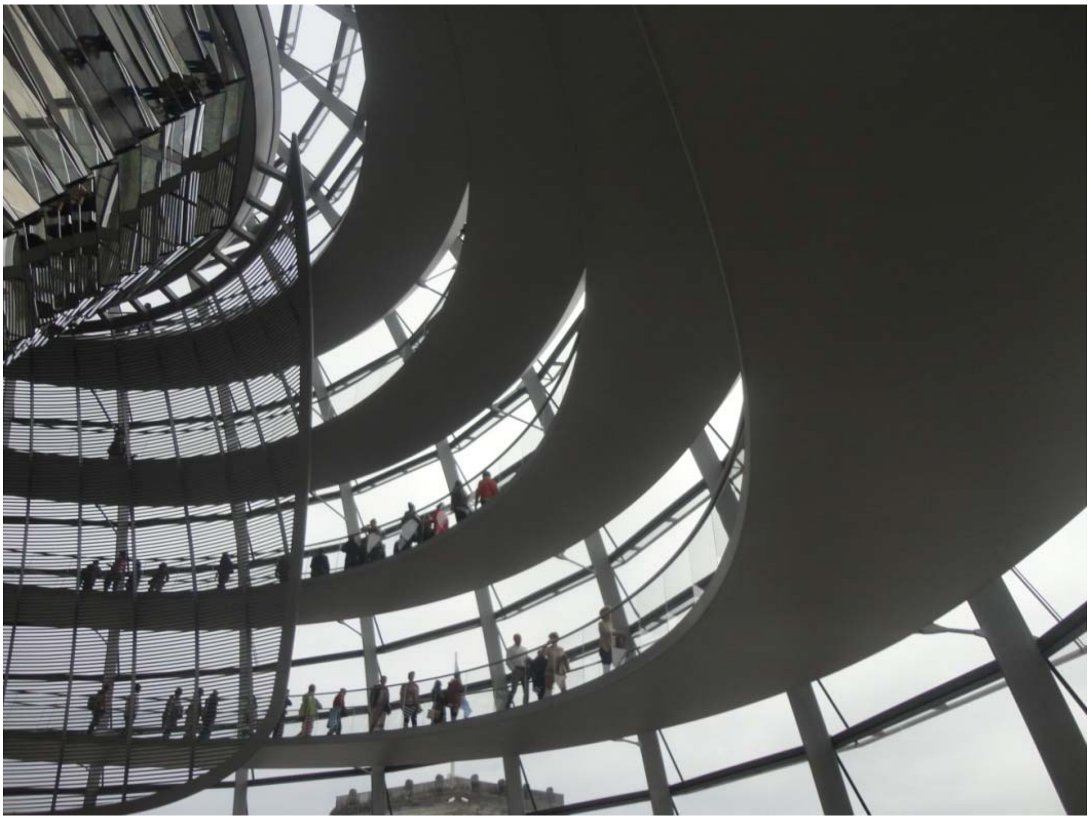
Monumento a la Constitución – Madrid



Se exploran, incluso, dimensiones superiores a tres. El Monumento a la Constitución de Madrid es el modelo tridimensional de lo que se denomina hipercubo, una figura de cuatro dimensiones, y recibe el nombre de **Tesseract**.

Geometría y arquitectura

El Reichtart de Berlín



Espirales

Torre de Babel

RAFAEL DE LA HOZ Y LA PROPORCIÓN CORDOBESA

Nace en Córdoba el 9 de Octubre de 1924 (fallece el 13 de Junio del 2000 en Madrid). Su infancia transcurre en Córdoba, realizando sus estudios universitarios en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid (1951).

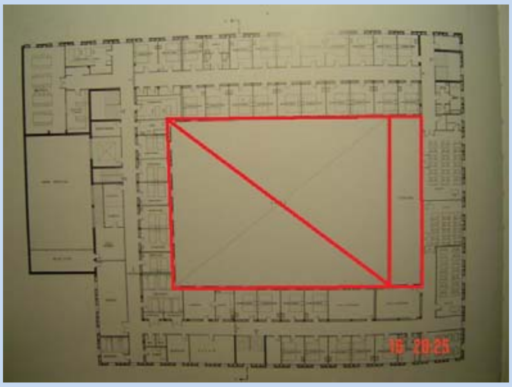
Heredero del estudio de arquitectura que su padre tenía en Córdoba, lo modernizó y racionalizó, convirtiéndolo en el más activo de Andalucía en los años 60 donde también comienza su carrera profesional.

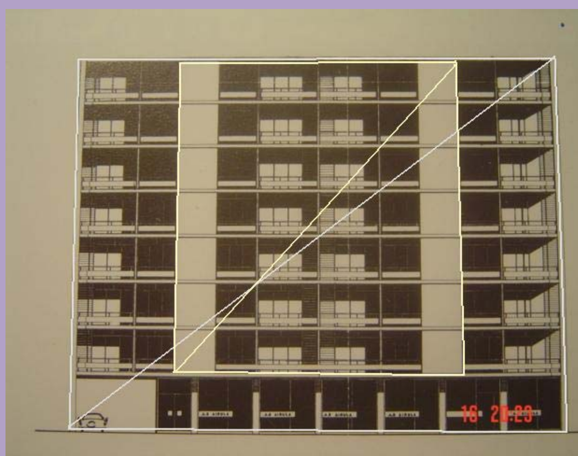
Llevó a cabo un exhaustivo estudio acerca de la proporción cordobesa y se encargó de reflejar su interés en ella por medio de su utilización en gran parte de sus edificios proyectados, a lo que se añade la elaboración de una ponencia titulada "La Proporción Cordobesa".

A continuación incluyo algunos ejemplos de proyectos elaborados por Rafael de la Hoz donde se ha recurrido a la proporción cordobesa para el diseño tanto de fachadas como de elementos constructivos tales como ventanas, patios, puertas...

Ver más en "Proporción cordobesa"

Convento de las Salesas, Córdoba (1959)





Viviendas Calle Gran Capitán, Córdoba (1959)

Las poblaciones crecen exponencialmente

En los modelos que se utilizan para estudiar las poblaciones se utiliza la función exponencial. Se supone que una población de una cierta especie crece exponencialmente mientras tenga alimento suficiente y no existan depredadores. Llega un momento en el que la población ha llenado el territorio (la Tierra es finita) y entonces cambia la función que se utiliza, estabilizándose el crecimiento.

Esto permite estudiar el crecimiento de las bacterias que se reproducen por fisión binaria, o el crecimiento de las células del feto, o la población de conejos cuando llegaron a Australia... *Malthus* afirmó que si la población humana crecía de forma exponencial y la producción de alimentos crecía de forma lineal habría graves hambrunas.

Logaritmos

No hace tanto tiempo no existían las calculadoras. Para calcular logaritmos se usaban "tablas". Había unas tablas de logaritmos que eran un libro con un lomo de unos tres dedos de ancho. Se usaban en problemas de Astronomía en los que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolverlos y se usaban números con muchas cifras decimales (más de 10). ¡Imaginas lo que es multiplicar o dividir números con esas cifras decimales! Resultaba muy conveniente transformar las multiplicaciones en sumas y las divisiones en restas. Esta misma idea fue la que llevó a *John Napier* (o *Neper*) a inventar los logaritmos.

No todo lo puedes calcular con calculadora.

Utiliza tu calculadora para calcular 45^{79}. Verás que da *error*. Pero si usas logaritmos puedes calcularlo fácilmente.

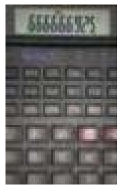
$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130.6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0.6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0.6037886} = 4.016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4.016 \cdot 10^{130}.$$



Decrecimiento exponencial

Muchos fenómenos se modelan con funciones exponenciales de base menor que 1, como

- La desintegración de átomos de una sustancia radiactiva.
- La intensidad luminosa de un haz de luz
- La probabilidad de supervivencia de ciertas especies que no tienen genéticamente determinado el envejecimiento celular

Carbono 14

El carbono 14 es un isótopo radiactivo con un periodo de semi-desintegración (vida media) de 5 568 años, muy utilizado para datar restos orgánicos. Las plantas, por fotosíntesis, y los animales por ingestión incorporan el carbono en la misma proporción que existe en la atmósfera, y al morir el ser vivo empieza el proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

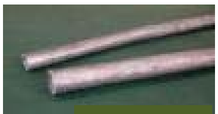
Conocemos muy bien muchas anécdotas de la vida de Sophia (o Sonia como a ella le gustaba que la llamaran), una mujer matemática con teoremas con su nombre, porque escribió su biografía en un precioso libro llamado "*Una infancia en Rusia*"

Cuando Sophia tenía 14 años, su familia recibió la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro sobre esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un *seno*, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía. De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Sonia le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y le comentó al padre de Sonia que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en las Matemáticas.

Fourier y el concepto de función

El concepto de función ha tardado mucho en ser comprendido incluso por los matemáticos, sólo dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer.

Fue *Joseph Fourier* en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Fourier vivió durante la Revolución Francesa y participó en la expedición de Napoleón a Egipto. Era muy friolero y por ese motivo le interesaba la propagación del calor. En su obra afirma que "toda" función podía escribirse como una suma infinita de funciones seno y coseno.



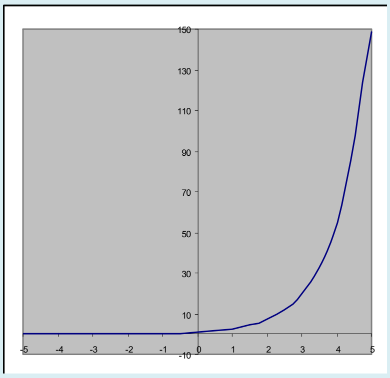
Antoni Zygmund escribió *"Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por matemáticos trabajando sobre series trigonométricas"*. Añade que esa obra de Fourier fue el catalizador para fijar el concepto de función, la definición de integral, profundizar en la Teoría de Conjuntos y actualmente con la Teoría de Funciones Generalizadas o Distribuciones.

El crecimiento exponencial

Existen muchos fenómenos en la naturaleza que siguen un crecimiento exponencial.

En Biología se presenta cuando la tasa de variación de una población es proporcional a la población en cada instante, esto ocurre cuando no hay factores que limitan el crecimiento como ocurre con ciertas poblaciones de bacterias.

También aparece en cierto tipo de reacciones químicas cuando la velocidad de descomposición de una sustancia es proporcional a su masa, la más importante de estas reacciones es la desintegración radiactiva que se utiliza para asignar fecha a acontecimientos que ocurrieron hace mucho tiempo y ha sido un instrumento indispensable en Geología y Arqueología.



La catenaria

La curva $y = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right)$ se denomina catenaria, tiene la forma que toma un hilo flexible y homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

La constante k es el cociente entre el peso por unidad de longitud y la componente horizontal de la tensión que es constante.

La forma catenaria minimiza las tensiones, por esa razón, una curva catenaria invertida se usa en arquitectura, ya que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco, ha sido utilizada, sobre todo, por *Gaudí*.

Los logaritmos de Neper

Ábaco neperiano

Ábaco neperiano

En el **Museo Arqueológico de Madrid** hay dos ábacos confeccionados en el siglo XVII siguiendo las indicaciones del libro de **John Napier** "*Rabdología*" publicado en 1617. Es único en el mundo. No queda ningún otro ejemplar completo como éste. Puedes ver un mueble de madera de palosanto, con incrustaciones de marfil, con dos puertas, en una aparece el triángulo de *Tartaglia*, y en la otra, las tablas de las potencias. En él se guardan dos ábacos, el de los "***huesos de Napier***" y, en los cajones, el **ábaco *promptuario***.

Puerta con las potencias

John Napier

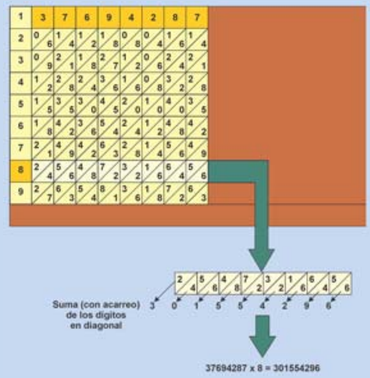
En tiempo de Maricastaña (bueno, no tanto, en el Renacimiento, en 1550) nació en Escocia, *John Napier*, hijo de una familia noble, rica y calvinista. Por eso pudo dedicarse a lo que le gustaba, las Ciencias, llegando a ser conocido por sus vecinos como "*la maravilla de Merchiston*" por sus muchos inventos en diferentes campos: en cultivos, fertilizantes, armas para combatir a los españoles… (¡Curiosa paradoja! El único prontuario neperiano que se ha localizado en el mundo es propiedad de la católica monarquía española a la que Neper quería combatir). Uno de estos inventos fueron los **logaritmos**. Ya sabes, los logaritmos neperianos se llaman así en su honor.

John Napier

Para saber más sobre *Napier* y los logaritmos visita:
http://cifrasyteclas.com/2013/11/25/yo-tambien-vivi-enganado-el-logaritmo-neperiano-no-usaba-la-base-e/
Quizás, luego ya no llames a los logaritmos neperianos así, sino logaritmos naturales.

Los huesos de Napier

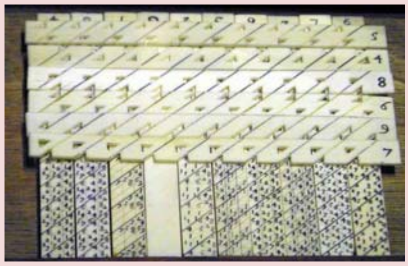
Consta de 60 varillas de marfil con forma de prisma cuadrangular que llevan grabadas las tablas de multiplicar del 1 al 9. Permiten multiplicar números de varias cifras por un número de una cifra, sin tener que saberse las tablas de multiplicar. Sólo hay que saber sumar. Se basa en la forma de multiplicar introducida por los árabes del *método de la celosía*. Ejemplares parecidos sí se conservan varios pues debieron ser muy usados.



¿Cómo se usan?

Ábaco promptuario

En los cajones del mueble de la figura arriba a la izquierda está el segundo ábaco de los que se guardan en el Museo Arqueológico, que permite multiplicar números de hasta 20 cifras por números de hasta 10 cifras, que pueden incluso ampliarse. Hay regletas de dos tipos: 100 verticales con números y similares a los huesos de *Napier*, con las tablas de multiplicar escritas por el método de la celosía, y 200 horizontales que constan de un número (multiplicando) y perforaciones triangulares, que se superponen a las anteriores. Con sólo sumar los números que permiten ver las tablillas perforadas se pueden multiplicar números grandes (sin saber la tabla de multiplicar). Este ábaco es único en el mundo.



Regletas del ábaco promptuario

Tablas de logaritmos

Utilizando un instrumento similar a este ábaco, *Napier* con la ayuda de *Henry Briggs* elaboró la primera tabla de logaritmos, poderosa herramienta de cálculo durante siglos.

Para saber más visita:

http://matemirada.wordpress.com/miscelanea-matematica/

María Gaetana Agnesi (1718 - 1799)

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venús lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco

Nació en Milán, en su país, al contrario que en otros países europeos, sí se aceptaba que las mujeres recibieran educación, y ella tuvo una esmerada formación. Fue una niña precoz y dotada, que con cinco años hablaba francés, y con nueve, conocía siete lenguas: italiano, latín, francés, griego, hebreo, alemán y español, por lo que recibió el apelativo de "Oráculo de siete idiomas".

Su padre, D. Pietro, era profesor en la Universidad de Bolonia. Tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor. A D. Pietro le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino.

María nunca se casó. A los 21 años, quiso entrar en un convento. A instancias de su padre decidió quedarse en casa y consagrarse a las Matemáticas. El álgebra y la geometría, declaraba, son las únicas partes del pensamiento donde reina la paz.

Se considera a María la primera profesora de universidad ya que en 1748 se encargó de los cursos de su padre y dos años más tarde, en otoño de 1750, después de publicar su obra de las *Instituciones analíticas*, el Papa le dio el nombramiento para ocupar la cátedra de matemáticas superiores y filosofía natural de la Universidad de Bolonia.

Su libro, ***Instituzioni Analitiche***, fruto de diez años de trabajo, lo había comenzado con 20 años y lo terminó antes de cumplir los 30, con un total de unas mil páginas.

La curva de Agnesi

María, como hemos visto, fue reconocida como matemática en su época, y sin embargo su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus *Instituzioni Analitiche,* trabajara con la "*curva de Agnesi*" o curva sinusoidal versa, "*versiera*" en italiano, que significa "virar", "girar", que se tradujo al inglés, por un error del traductor, por "*avversiera*", como la "*bruja de Agnesi*". Colson, profesor de Cambridge, *"encontró este trabajo tan excelente que, a una edad avanzada, decidió aprender italiano con el único fin de traducir ese libro y que la juventud inglesa pudiera beneficiarse de él, como lo hacen los jóvenes de Italia"*, tan excelente juzgaba la obra.

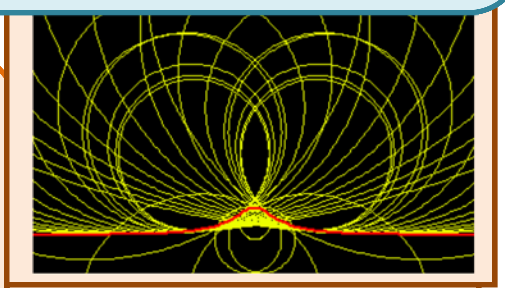
La curva de Agnesi es el lugar geométrico de los puntos P que están a igual distancia de la recta u que el punto M, y a la misma distancia de la recta r que el punto N, cuando M recorre la circunferencia.

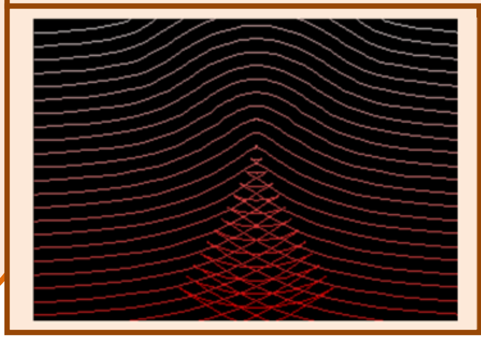
Su ecuación es:

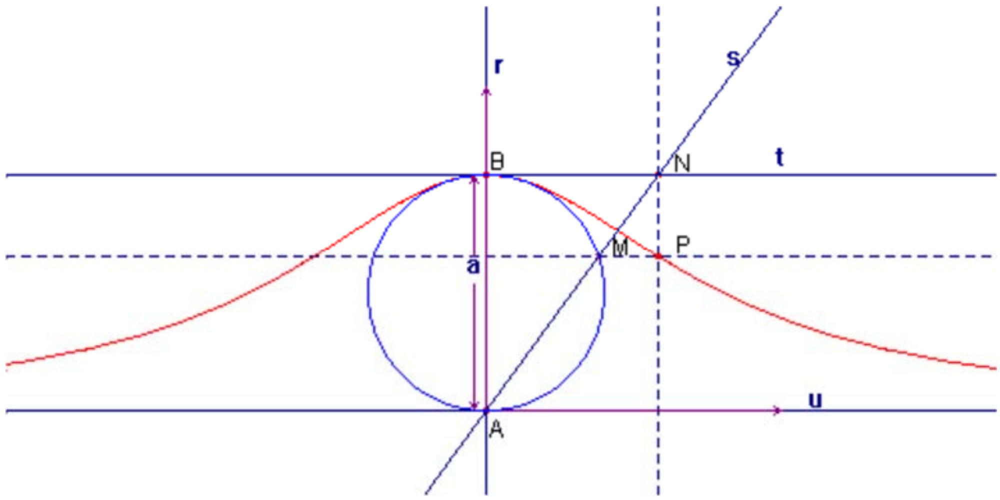
$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Es una función par, creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, por lo que tiene un máximo en el punto (0, a).

Tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal.







Esta curva, fue discutida por *Fermat* en 1703.

Se ha establecido recientemente que es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos, así como de la potencia disipada en los circuitos de alta frecuencia de resonancia.

Función de Dirichlet

La **función de Dirichlet** es una función que **no es continua** en ninguno de sus puntos.

Se define: $f(x) = \begin{cases} 1 & para\ x\ racional \\ 0 & para\ x\ irracional \end{cases}$

Dirichlet

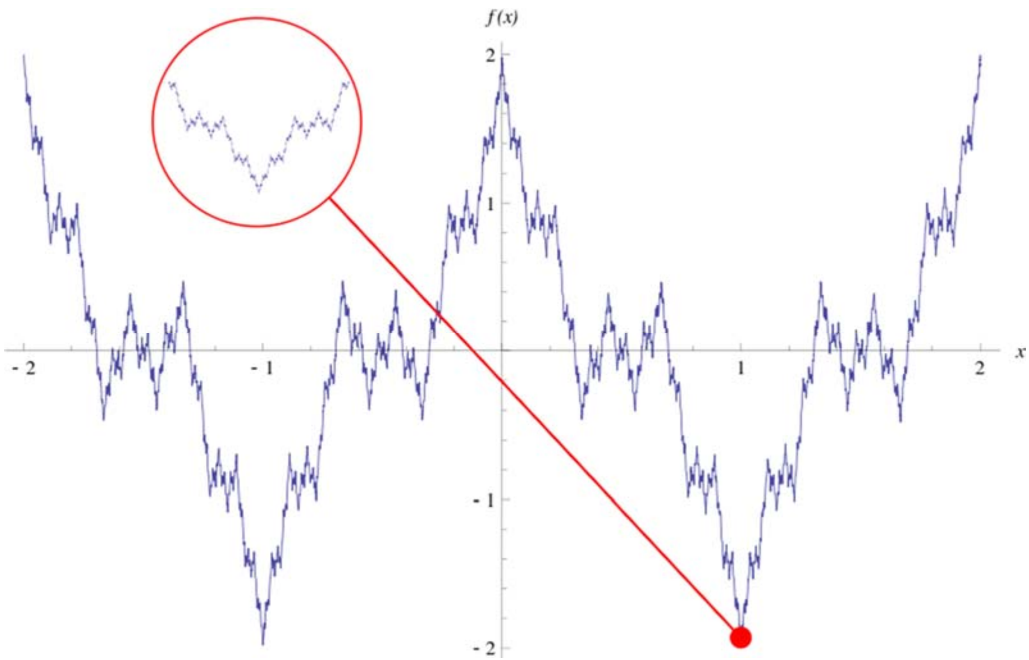
Dirichlet (1805 – 1859) es un matemático alemán que trabajó con *Fourier* para intentar explicar cómo era posible que una función pudiera representarse como una suma infinita de funciones trigonométricas, lo que Fourier había demostrado experimentalmente en sus estudios sobre el calor, pero que todavía no se podía explicar matemáticamente.

Fourier

Función de Weierstrass

La **función de *Weierstrass*** es **continua** en todo punto y **no es derivable** en ningún punto.

Tiene dimensión fractal mayor que uno.



Función de Weierstrass. Fuente: Wikipedia

Caos

Dice el premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"La enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan "leyes de la naturaleza", y mucho menos que el ser humano sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las Matemáticas para la formulación de leyes de la Física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos".

Las funciones se han utilizado para hacer modelos matemáticos de las situaciones reales más diversas. Antes de la época de los ordenadores las funciones que solían utilizarse eran las funciones lineales (que ya conoces pero que estudiarás detenidamente en el próximo capítulo). Se *linealizaban* los fenómenos. Al usar otras funciones, como por ejemplo parábolas, pueden complicarse mucho las cosas. Incluso puede aparecer el caos.

¿Sabes qué es el caos?

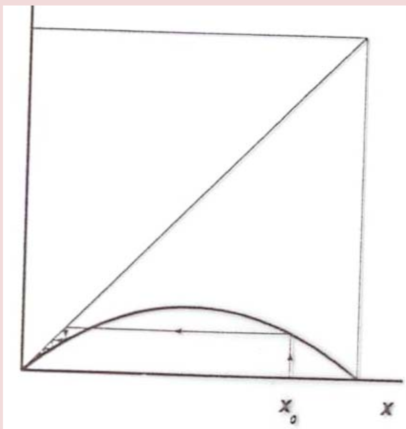
Vamos a estudiar un ejemplo en el que aparece el caos: La **ecuación logística**. Es un modelo matemático propuesto por P. F. Verhulst en 1845 para el estudio de la dinámica de una población. Explica el crecimiento de una especie que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Se consideran valores x entre 0 y 1 de la población.

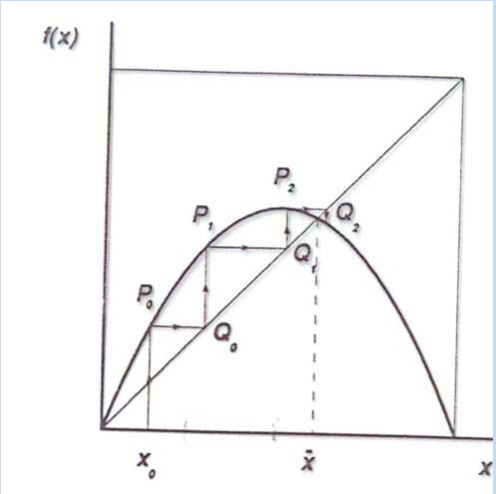
$$y = r(x(1 - x))$$

Si nos quedamos con el primer término, $y = rx$ sería un modelo lineal, y nos indica el crecimiento de la población, pero tiene un término de segundo grado que hace que sea un polinomio de segundo grado. Si en algún momento $y = x$ la población se mantendrá siempre estable para ese valor. Por ejemplo, si $x = 0$ entonces $y = 0$, y siempre habrá una población de tamaño 0. Estos valores que hacen que $y = x$ se denominan **puntos fijos**.

El comportamiento es distinto según los valores que tome r. Por ejemplo, para $r < 1$, se extingue la especie.

Dibujamos la parábola para $r = 0{,}9$. Imaginamos que en el instante inicial hay una población x_0. Buscamos, cortando verticalmente a la parábola, el valor de y. Para transformarlo en el nuevo x, cortamos a la diagonal del primer cuadrante. Observa que la población cada vez es menor y que va hacia la extinción. Observa con cuidado ese proceso de ir cortando a la parábola y a la diagonal, para volver a cortar a la parábola y así sucesivamente.





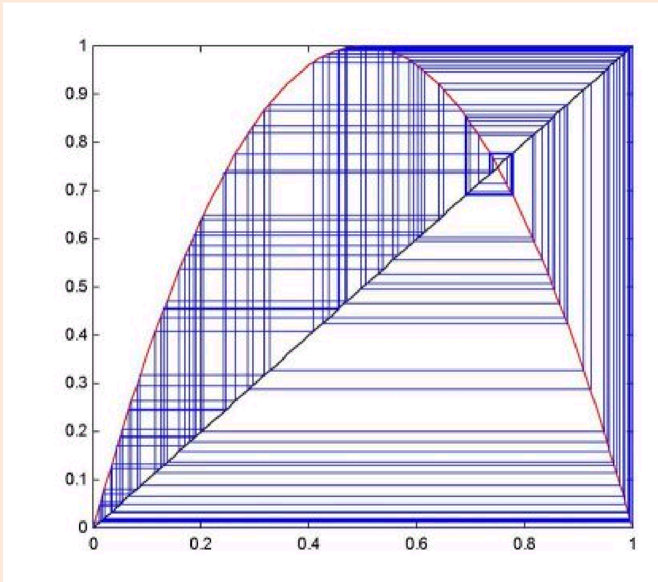
Para valores de r comprendidos entre 1 y 3: $1 < r < 3$, entonces la población se estabiliza, tiende a un punto fijo.

Hemos dibujado la parábola para $r = 2,5$, e igual que antes partimos de un valor inicial cualquiera, en este caso x_0, que se convierte en $y = P_0$. Ese valor lo tomamos como abscisa: $x = Q_0$, y calculamos el nuevo valor de $y = P_1$… Observa cómo la población se estabiliza hacia el valor de intersección de la parábola con la diagonal.

Para valores entre 3 y 3,56994546 las cosas empiezan a complicarse, hasta que …

Para r mayor o igual a 3,56994546 tenemos sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, tenemos **caos**.

No sabemos qué puede ocurrir. La población fluctúa constantemente. Y ese comportamiento tan errático es debido a ¡una función polinómica de segundo grado!



El término **caótico** va a indicar que puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.

El meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizó el término de **efecto mariposa** para explicar por qué el tiempo atmosférico no es predecible a largo plazo, es decir para explicar que existía una dependencia sensible a las condiciones iniciales: *"El* ***aleteo de una mariposa*** *en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?"*

¿Lo habías oído?

Este es un ejemplo de caos dibujado con el ordenador. Hay 5 órbitas bien definidas, pero un punto de la frontera entre órbitas no sabemos en cuál terminará.

Reflexiones sobre el infinito

"El infinito, como ningún otro problema, siempre ha conmovido profundamente el alma de los seres humanos. El infinito como ninguna otra idea, ha tenido una influencia estimulante y fértil en la mente. Pero el infinito necesita, más que ningún otro concepto, clarificarse"

David Hilbert

Davis Hilbert

El hotel infinito

Para el dueño de un hotel es un disgusto tener que decir a un cliente que no le quedan habitaciones. Pero, ¿qué ocurriría si el hotel tuviera infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4,…? Imagina que el hotel está completo y llega un nuevo cliente, ¿cómo lo alojarías?

¿Y si llegaran 100 clientes más? ¿Y si mil? ¿Y si llegaran tantos como hay?

Un juego

Un poco aburridos dos amigos, Daniel y Jorge, deciden jugar a un juego que consiste en que Daniel escriba números y Jorge los borre. El procedimiento propuesto por Daniel es:

- ✓ A las cinco menos un minuto yo escribo los números 1 y 2, y tú borras el 1.
- ✓ A las cinco menos medio minuto yo escribo 3 y 4, y tú borras el 2.
- ✓ A las cinco menos un tercio de de minuto yo escribo 5 y 6 y tú borras el 3

  Y así sucesivamente. Juegan con la imaginación.
- ✓ Daniel pregunta a Jorge: A las cinco menos una centésima de minuto, ¿cuántos números te quedarán por borrar?
- ✓ ¿Y a las cinco menos una millonésima de minuto?
- ✓ ¿Hay algún número que no puedas borrar antes de las cinco?

La tabla de Caratheodory

Tenemos la siguiente tabla infinita:

0	1/2	1/4	1/8	1/16	…
–1/2	0	1/2	1/4	1/8	…
–1/4	–1/2	0	1/2	1/4	…
–1/8	–1/4	–1/2	0	1/2	…
–1/16	–1/8	–1/4	–1/2	0	
…	….	…	…	…	…

La suma 1/2 +1/4 + 1/8 + 1/16 + … = 1

- ➢ Suma la tabla primero por filas.
- ➢ Ahora suma la tabla por columnas
- ➢ Por último suma por diagonales.

Breve historia del concepto de límite de una función

El concepto de límite es clave para dar rigor al Análisis Matemático. No sólo lo necesitamos para conocer el comportamiento de las funciones en el infinito, asíntotas y ramas asintóticas, y estudiar su continuidad, sino que es fundamental para el estudio del cálculo infinitesimal, de las derivadas y las integrales.

D'Alembert (1767) estudia a Newton y en la *Enciclopedia* en el artículo sobre "*Límite*" escribe: "*Una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada*".

Jean le Rond D'Alembert

Augustin Louis Cauchy

Cauchy (1829) en su Curso de Análisis, formula: "*Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.*"

Heine (1872), en sus "Elementos", siguiendo las lecciones de Weierstrass, escribe: "*Si, dado cualquier* ε, *existe un* $\delta > 0$, *la diferencia* $f(x_0 \pm \delta) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε, *entonces se dice que* L *es el límite de* $f(x)$ *para* $x = x_0$."

Heinrich Heine

Observa cómo se fue perfilando la definición y surgió el ε y el δ para formalizar las ideas de *aproximarse hasta diferir menos que, aproximarse tanto como se quiera, diferir tan poco como queramos…*

El número e y el problema de Bernoulli

El número irracional *e* aparece con John Napier (Neper) que introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático (1614). Es la base de los logaritmos neperianos.

La primera aproximación al valor de este número se atribuye a Jacob Bernoulli (1654-1705) asociado al siguiente problema de interés compuesto:

Si se invierte un capital C con un interés del 100 % anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C$ = 2,25 *C. Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdot C$ = 2,44 *C. En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \cdot C$ = 2,61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cdot C$ = 2,71 C.

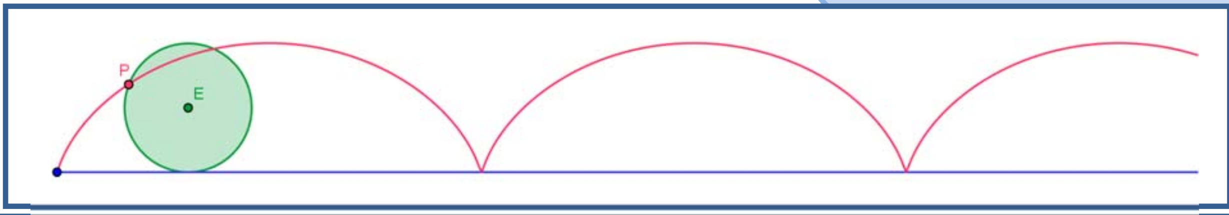
Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2,7182818284…

$$e = lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

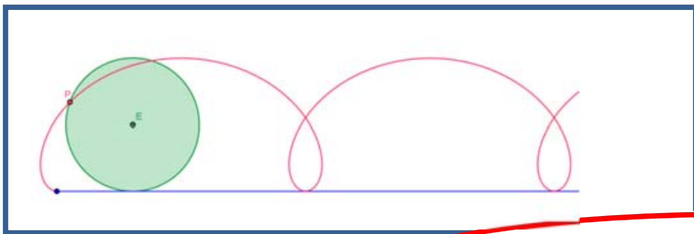
La cicloide, la "Helena" de las curvas

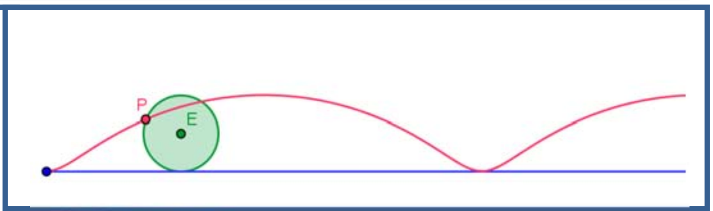
La cicloide es posiblemente la primera curva verdaderamente moderna, en el sentido de que no figura en las obras de Geometría de la antigua Grecia. Galileo fue uno de los primeros en estudiarla, le dio este nombre en 1599 y se interesó por el cálculo de su área, pesando trozos de metal con forma de cicloide.

Un punto P de una circunferencia, que se desplaza horizontalmente sin deslizarse, describe una cicloide. Es, por tanto, la curva que describe un punto de la rueda de un coche o de una bicicleta.



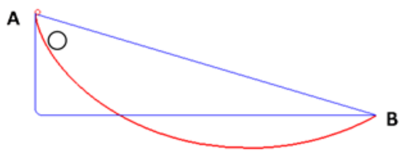
Al modificar el punto, si está dentro del círculo, o si está fuera, se modifica la cicloide pasando a ser una cicloide alargada o una cicloide acortada.





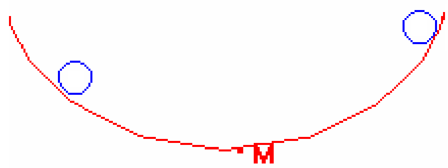
Propiedades de la cicloide

El interés de la cicloide está centrado en que es *braquistócrona*, es decir, la curva de descenso más rápido desde un punto A a un punto B, sin estar en vertical y bajo el efecto de la gravedad y *tautócrona* lo que significa que una bola que dejemos caer llega al punto más bajo, M, en un intervalo de tiempo que no depende del punto de partida.



La cicloide es *braquistócrona*

Para pasar del punto *A* al punto *B* el trayecto más rápido es seguir un arco de cicloide



La cicloide es *tautocrona*

Las dos bolas llegan a la vez al punto *M*.

Por la belleza de sus propiedades, o por las muchas disputas que trajo consigo se la conoce como la "Helena" de las curvas. Otras propiedades curiosas sobre esta curva es que la longitud de un arco de cicloide es 8 veces la longitud del radio de la circunferencia que la genera, que el área barrida por un arco de cicloide es 3 veces la del círculo generador y que es *isócrona*, es decir, el periodo de un péndulo que describe una cicloide es siempre el mismo, no depende de la amplitud de la oscilación.

Las garras del león

En 1696, Johann Bernoulli planteó ante los matemáticos de la Royal Society dos problemas matemáticos y ofreció como premio, a quien fuese capaz de dar las soluciones de ambos, un libro científico de su biblioteca personal.

El primer problema pedía encontrar la trayectoria más rápida para desplazarse de un punto A a uno B. Es la *braquistócrona*. En el segundo se pedía encontrar una curva que al trazar una recta desde O y que corte a la curva en P y Q, se mantenga la suma constante. Ahora sabemos que la solución de ambos problemas es la cicloide, la “Helena” de las curvas.

Estableció un plazo máximo de seis meses para presentar las soluciones, y se puso a esperar. Esperó y esperó. Esperó. Los seis meses transcurrieron, y sólo Leibniz había encontrado la solución a uno de los dos problemas. Como las bases decían que el ganador debía resolver ambos, Bernoulli extendió el plazo por seis meses más, en la esperanza de que alguien consiguiera la solución al segundo. El año transcurrió, y nadie pudo mejorar la solución de Leibniz al primer problema y mucho menos resolver el segundo.

Newton no había sido informado. El 29 de enero de 1697 Halley visitó a Newton. Recuerda con asombro la entrevista con Newton, su distracción extrema y su falta de concentración en estos términos: "Llegué a su casa a las dos de la tarde. Él estaba encerrado en su estudio, y la servidumbre tenía estrictas órdenes de no molestarlo ni abrir la puerta por ningún motivo. Por lo tanto, me senté afuera a esperar que saliera. Rato después, el ama de llaves trajo el almuerzo de Newton en una bandeja, y lo dejó en el piso, frente a la puerta. Las horas pasaron. A las seis de la tarde, yo sentía un hambre atroz, y me atreví a devorar el pollo de la bandeja. Cuando Newton por fin abrió la puerta, miró los huesos del pollo en la bandeja, me miró a mí y exclamó: —¡Qué distraído soy! ¡Pensé que no había comido!".

Halley explicó a Newton la situación y le entregó la carta con los dos problemas. Newton dejó la carta sobre un escritorio y despidió rápidamente a Halley, explicando que "luego echaría una ojeada a los problemas".

A las cuatro de la mañana del día siguiente los tenía listos, y a las ocho envió sus soluciones en una carta sin firma al presidente de la Royal Society. Sus desarrollos eran tan perfectos y elegantes, que las soluciones de Newton fueron publicadas —también en forma anónima— en el número de febrero de 1697 de *Philosophical Transactions*. Newton había resuelto en una noche dos problemas que a cualquier otro matemático le hubiesen llevado la vida entera.

Bernoulli, impresionado por la elegancia de las soluciones de Newton, no tuvo dificultad en identificar al autor: "Es Newton", afirmó. "¿Cómo lo sabe?", le preguntaron. "Porque reconozco **las garras del león** (*Ex ungue leonis*)".

DERIVADAS

Interés de las derivadas

El Análisis y el Cálculo Infinitesimal han sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las derivadas constituyen su parte central, ya que permiten comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio.

Las derivadas sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas, medicina, ciencias sociales e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

Isaac Newton

G. W. Leibniz

Antecedentes

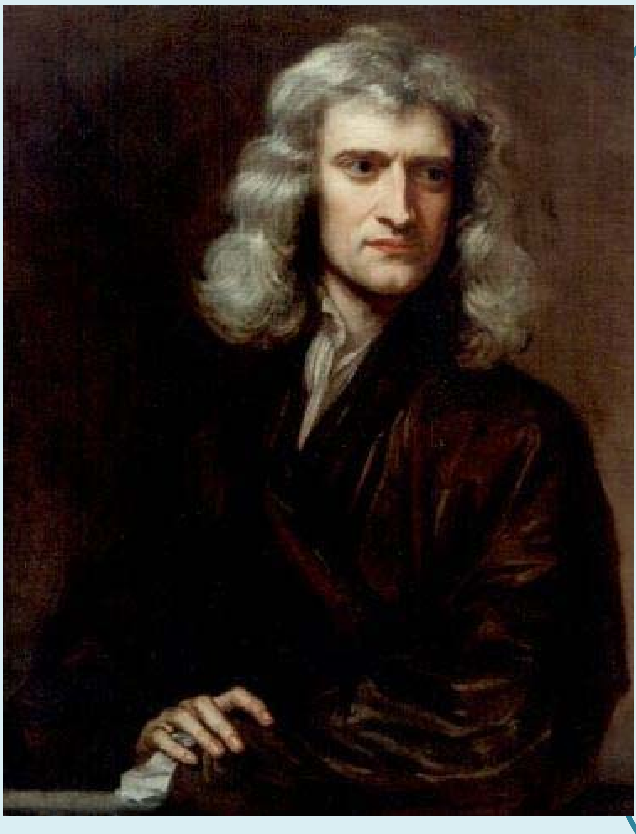
Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1564 – 1642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución las derivadas.

En 1638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1596 – 1650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no se conocía todavía el concepto de derivada), y fue resuelto en 1674 por *Leibniz* y en 1690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

El concepto de derivada comienza con *Isaac Newton* (1642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1646 – 1716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las derivadas son la expresión matemática de las leyes naturales**.

Newton

Isaac Newton (1642 – 1727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Su primera obra impresa: "*Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica*" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de la derivada. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... Indica cómo evoluciona el sistema.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas se pueden expresar mediante derivadas es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues lo publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* en 1684.

Entre sus intereses más profundos se encontraban la alquimia y la religión, temas en los que sus escritos sobrepasan con mucho en volumen a sus escritos científicos. Entre sus estudios alquímicos se encontraban temas esotéricos como la transmutación de los elementos, la piedra filosofal y el elixir de la vida.

En 1693 sufrió una gran crisis psicológica, causante de largos periodos en los que permaneció aislado, durante los que no comía ni dormía. En esta época sufrió depresión y arranques de paranoia. Tras la publicación en 1979 de un estudio que demostró una concentración de mercurio (altamente neurotóxico) quince veces mayor que la normal en el cabello de Newton, la mayoría opina que en esta época Newton se había envenenado al hacer sus experimentos alquímicos, lo que explicaría su enfermedad y los cambios en su conducta.

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*derivar*" en el sentido de "*deducir*" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable *y* depende de otra *x*, y se conoce la tasa de variación de *y* respecto de *x* para cambios muy pequeños de la variable *x*, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x)\cdot dx$, entonces la determinación de *y* respecto de *x* se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización.

Madame de Châtelet

Gabrielle Émilie de Breteuil, (1706 - 1749), marquesa de Châtelet fue una dama francesa que tradujo los "*Principia*" de Newton y divulgó los conceptos del Cálculo en su libro "*Las instituciones de la física*". Era una dama de la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales, y no obstante fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hacen de su época, el siglo de las luces, un periodo excitante.

En sus salones, además de discutir de teatro, literatura, música, filosofía... se polemizaba sobre los últimos acontecimientos científicos. ¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre Ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función?

Mme. de Châtelet, al traducir y analizar la obra de Newton, propagó sus ideas desde Inglaterra a la Europa continental. Quizás, gracias a ella, el determinismo científico de Newton permaneció como idea filosófica hasta mediados del siglo XIX.

Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio. Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor.

Se conserva un retrato al óleo de ella pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras *"adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumento y sus libros de matemáticas..."*. En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Escribió ***Las instituciones de la física***. Convencida de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que no estaba de acuerdo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía entre otras cosas con el estudio. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que es una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, "¡quien dice sabio, dice feliz!".

Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar la Ciencia.

INTEGRALES

Eudoxo de Cnido (390 aC – 337 aC)

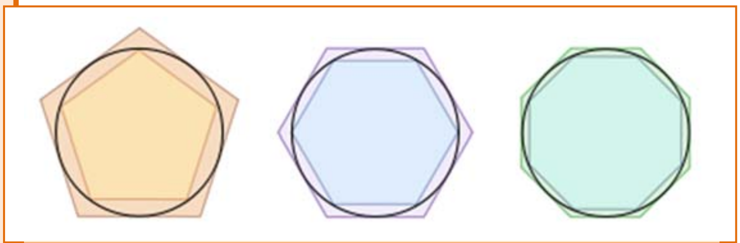
Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura.

Para demostrarlo elaboró el llamado método de *exhausción*.

Método de exhausción

El **método de exhausción** es un procedimiento geométrico de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que avanza el cálculo. El nombre proviene del latín exhaustiö (agotamiento, exhausto)

Se utiliza para aproximar el área de un círculo, o la longitud de una circunferencia, inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares con cada vez mayor número de lados.



Arquímedes

Arquímedes, escribió su tratado sobre "*El método de teoremas mecánicos*", que se consideraba perdido hasta 1906. En esta obra, *Arquímedes* emplea el cálculo infinitesimal, y muestra cómo el método de fraccionar una figura en un número infinito de partes infinitamente pequeñas puede ser usado para calcular su área o volumen. Fue escrito en forma de una carta dirigida a *Eratóstenes de Alejandría*.

Observa cómo es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a *Isaac Newton* y a *Leibniz* unificar el cálculo diferencial con el cálculo integral, y cómo es el precursor del concepto de integral definida como las sumas inferiores y las sumas superiores de *Riemann*.

Historia de los símbolos matemáticos

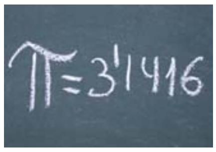
¿Has pensado alguna vez en la historia de los símbolos matemáticos?

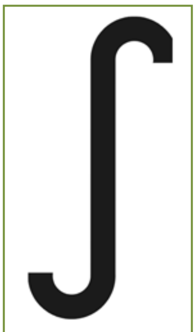
Al principio las matemáticas eran *retóricas*, es decir, todos los cálculos se explicaban con palabras. Poco a poco empezaron a usarse *abreviaturas*, símbolos para representar las operaciones. Hoy las matemáticas están llenas de *símbolos*.

Por ejemplo, para indicar sumas y restas, primero se usaron letras como **p** y **m**, pero en el siglo XV comenzó a usarse los símbolos **+** y **–**. Para el producto se usó el aspa, **x**, de la cruz de San Andrés, pero Leibniz escribió a Bernoulli que ese símbolo no le gustaba pues se confundía con la x, y comenzó a usar el punto, ·. Para el cociente, la barra horizontal de las fracciones es de origen árabe, y los dos puntos, de nuevo se los debemos a Leibniz, que los aconseja cuando se quiere escribir en una sola línea.

El símbolo ∞ se debe a John Wallis.

En 1706 se empezó a usar **π**, como inicial de la palabra griega “perímetro” y se popularizó con Euler en 1737.





El símbolo de la integral se lo debemos, de nuevo, a Leibniz, y es una estilización de la letra S, inicial de suma. También le debemos la notación dx, dy para el cálculo diferencial.

A **Euler** le debemos la invención de muchos símbolos y la popularización de otros: No sabemos por qué uso la letra e para representar al número **e**, base de los logaritmos neperianos, la letra **i**, para la unidad imaginaria compleja, Σ para el sumatorio, y la notación ***f*(*x*)** para las funciones.

En lógica y teoría de conjuntos se usan muchos y nuevos símbolos, como ∩, ∪, ⊃, ⊄, ⊂, ∈, ∉, {, }, ∧, ∨, ⇒, … que podemos deber a **George Boole.**

∩, ∪, ⊃, ⊄, ⊂, ∈, ∉, {, }, ∧, ∨, ⇒

CONTEO

Historia de la Combinatoria

Si buscas en Internet “Historia de la Combinatoria” podrás leer que el término “Combinatoria” fue introducido por Wihen Leibniz en su libro *Dissertartio de Arte Combinatoria.* Pero su origen es mucho más antiguo, ya los chinos o en la Edad Media usaban ideas de combinatoria pasa saber *contar*. Por ejemplo, ya usaban candados similares al de abajo, dónde se utilizaban contraseñas con letras y números.

Su importancia creció con el desarrollo de la *Teoría de la Probabilidad*, que con *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar) de Jacobo Bernouilli, y posteriormente con Leonard **Euler que ya puso los principios de esta Ciencia.**

Está relacionada con la Teoría de Grafos que veremos en un capítulo posterior, con algunos acertijos matemáticos tales como el problema de los Puentes de Konigsberg, que también veremos.

Otras aplicaciones importantes se encuentran en cuestiones tan diversas como el problema de calcular el número de isómetros de hidrocarburos saturados, la lógica simbólica, e incluso en problemas de topología.

Candados

Desde la antigüedad se han usado candados parecidos al de la figura que utilizan la Combinatoria. Como puedes ver en éste, se usa una contraseña de 5 letras, que pueden repetirse. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer?

Se usan mucho en la actualidad como candados de maletas, pues no tienes el problema de perder la llave, aunque sí lo tienes de olvidar la contraseña

Problema

En una probeta hay un cierto número de bacterias. Cada minuto cada bacteria se divide en dos, y igual al minuto siguiente, y así sucesivamente. Al cabo de una hora la probeta está llena de bacterias. ¿Cuándo estaba medio llena?

EL EFECTO PLACEBO Y EL EFECTO NOCEBO

Antes de que un medicamento pueda comercializarse debe superar una serie de estrictas pruebas que arrojen seguridad acerca de su eficacia curativa.

Una de las pruebas más comunes consiste en seleccionar una muestra de enfermos y dividirlos aleatoriamente en dos grupos; un grupo recibe el medicamento, y el otro, sin saberlo, una sustancia en apariencia igual, pero sin ningún poder terapéutico: un placebo.

De esta forma, al final del ensayo pueden compararse los resultados entre los dos grupos y determinar la eficacia del medicamento. Para ello se emplean herramientas estadísticas como la correlación.

Sorprendentemente, hay un número significativo de pacientes que, habiendo recibido el placebo, mejoran de forma ostensible. Por ejemplo, esta contrastado que, en muchas enfermedades relacionadas con el dolor, entre el 10 % y el 15 % de los pacientes experimenta un alivio notable habiendo seguido un tratamiento exclusivamente de placebo.

RELACION FUNCIONAL – CORRELACIÓN.

Si lanzamos una piedra hacia arriba llegará más alto cuando más fuerte sea lanzada. Existe una fórmula que nos permite calcular, exactamente la altura conseguida en función de la velocidad con que es lanzada. Estamos ante una relación funcional.

Las personas, en general, pesan más cuando más altos son. Pero no se puede dar una fórmula que nos permita dar el peso de una persona con exactitud conociendo su altura, sólo podremos conseguir una fórmula que nos dé un valor aproximado y conocer la eficacia de esa fórmula. La relación entre las variables peso-estatura es una relación estadística. Diremos que hay una correlación entre estas variables.

También vamos a encontrar correlación entre la distancia a que un jugador de baloncesto se coloca de la cesta y el número de cestas que consigue. Pero en este caso, al contrario del anterior, hay una correlación negativa, ya que a más distancia, menor número de cestas.

CONTRA LA SUPERSTICIÓN, ESTADÍSTICA.

Vivimos en un mundo dominado por la ciencia y la tecnología, a pesar de ello las supersticiones y las creencias seudocientíficas siguen dominando entre la población general, incluso más que en otras épocas. La Estadística es un arma importante para desenmascarar algunas afirmaciones que circulan impunemente y que mucha gente cree, como las derivadas de la astrología. Existen cientos de estudios que prueban que aunque existan coincidencias entre el signo astrológico de las personas y sus formas de ser, gustos, comportamientos, profesiones, etc. éstas están siempre en torno a la media estadística.

Una creencia muy habitual es que los nacimientos se producen con mayor frecuencia durante los días, y especialmente las noches, de luna llena. Resultaría sencillo coger los registros civiles y comprobar si eso es verdad, pero los que afirman semejante dato nunca se molestan en hacerlo. Recientemente se ha puesto de manifiesto mediante el análisis de los datos de un conjunto de estudios al respecto que las variaciones de nacimientos entre fases lunares son de apenas un 1 %, sin embargo también el mismo estudio ha puesto de manifiesto que el 60 % de los nacimientos se producen entre las 6 de la mañana y las seis de la tarde, mostrando así una diferencia mucho más significativa que suele tener su explicación en la organización de los hospitales.

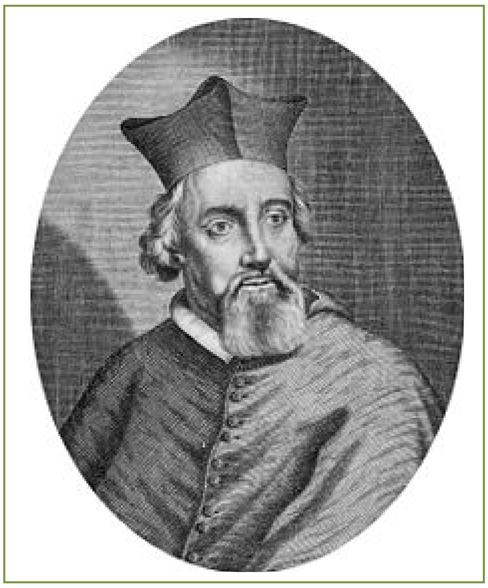
Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

PROBABILIDAD

Juan Caramuel Lobkowitz

(Madrid, 23 de mayo de 1606 – Vigevano, Lombardía, 8 de septiembre de 1682)



Juan Caramuel fue un personaje extraño y prodigioso, tan fascinante como olvidado. Fue matemático, filósofo, lógico, lingüista y monje cisterciense, que se ganó el sobrenombre de «*Leibniz español*» por la variedad y vastedad de sus conocimientos. Lo traemos aquí, por ser un matemático español del siglo XVII, que ya es raro, y porque nació en Madrid, donde una calle lleva su nombre, así como un centro de salud y un parque.

Era hijo del ingeniero luxemburgués Lorenzo Caramuel y de la bohemia Catalina de Frisia. De inteligencia superdotada, a los doce años componía tablas astronómicas, siendo su padre su primer maestro en esta disciplina.

Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá, ingresó en la Orden Cisterciense en el Monasterio de la Santa Espina (cerca de Medina de Rioseco Valladolid); se formó en filosofía en el monasterio de Montederramo, Orense, y en teología en el de Santa María del Destierro, en Salamanca. Amante de las lenguas, llegó a dominar y hablar una veintena como latín, griego, árabe, siríaco, hebreo, chino, etc..

Fue abad, obispo coadjutor en Maguncia y agente del rey de España en Bohemia.

Obra

Mantuvo activa relación epistolar con los eruditos más célebres de su época. Se rebeló contra la autoridad de Aristóteles y adoptó, por ejemplo, el mecanicismo cartesiano.

Nada escapó a su omnímoda curiosidad, de suerte que por su espíritu enciclopédico ha llegado a llamársele el *Leibniz español*. Fue ante todo un generalista y nunca abordó un tema, cualquiera que este fuese, sin replantearse sus fundamentos teóricos desde todas las perspectivas posibles como un típico *homo universalis*: Caramuel se interesó y escribió sobre la lengua, la literatura en general y el teatro y la poesía en particular, la pedagogía, la criptografía, la filosofía y la teología, la historia y la política de su tiempo, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura, las matemáticas, la física, la astronomía, etc. La obra de Caramuel fue cuantiosa, variada y dispersa (se le atribuyen doscientos sesenta y dos títulos, entre ellos sesenta impresos).

Trabajó en **teoría de la probabilidad**, dando pasos en la dirección correcta hacia la formulación de Pascal, quien seguramente se inspiró en su «*Kybeia, quæ combinatoriæ genus est, de alea et ludis Fortunæ serio disputans*» (1670), un tratadito de veintidós páginas incluso en su *Mathesis biceps* que representa el segundo tratado sobre cálculo de probabilidades de la historia después del tratado de

1656 de Huygens. En el tratado de Caramuel se estudian distintos juegos y el problema de la división de las apuestas.

También se le debe la primera descripción impresa del **sistema binario** en su *Mathesis biceps* en lo que se adelantó treinta años a Leibniz, su más famoso divulgador. Explicó allí el principio general de los números en base n, destacando las ventajas de utilizar bases distintas de la 10 para resolver algunos problemas. Fue también el primer español que publicó una tabla de logaritmos. El sistema de logaritmos que desarrolló fue en base 1009, donde log 1010 = 0 y log 1 = 0.

Otra de sus aportaciones científicas fue, en **astronomía**, un método para determinar la longitud utilizando la posición de la Luna.

En **trigonometría**, propuso un método nuevo para la trisección de un ángulo.

Sobre **arquitectura** escribió en español su *Architectura civil, recta y obliqua* (Vigevano, 1678). Se trata de una obra especulativa y destinada al lector entendido en los temas objeto de debate; por eso es difícil de llevar a la práctica por más que la obra se halle ilustrada con calcografías que el autor agrupa en el último tomo y que él mismo diseñó y tardó más de cuarenta años en hacerlas esculpir y grabar. Su origen se encuentra en una obra suya anterior, la *Mathesis architectonica*, publicada en latín, que constituye la tercera parte de su *Cursus mathematicus* (1667–1668), que tradujo al castellano en una versión ampliada en 1678. Diseñó además la fachada de la catedral de Vigevano (1680), transformando el conjunto renacentista de la Piazza Ducale.

Galileo,

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 < 0{,}5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

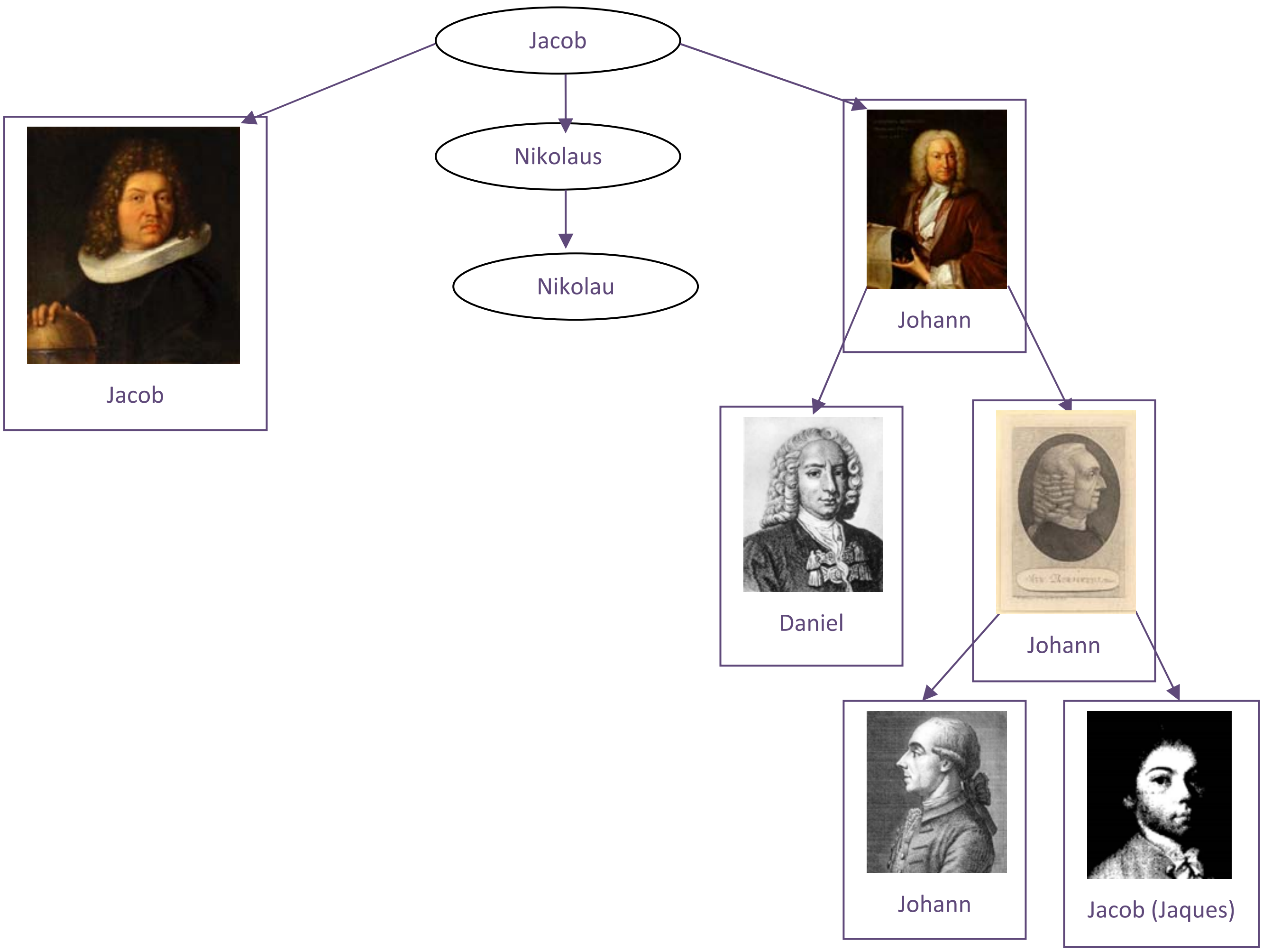
La saga de los Bernoulli

Si te dicen: "*Bernoulli hizo esto o descubrió aquello*" tu puedes preguntar:

- ¿Cuál Bernoulli?

Y es que hubo una familia suiza del siglo XVII en la que hubo padres, hijos, tíos y sobrinos, muchos de ellos matemáticos y físicos con importantes descubrimientos.

El primero de ellos, Jacob *el viejo*, nació en Amberes, Bélgica, pero huyendo de una persecución religiosa pues era hugonote, se trasladó a vivir a Basilea (Suiza) el año 1622. Tuvo un único hijo, Nikolaus, que tuvo varios hijos, dos de ellos matemáticos famosos, Jacob (1654–1705) y Johann (1667–1748), el primero dio su nombre a los números de Bernoulli, y el segundo trabajó en cálculo infinitesimal. Otro de los hijos de Nikolaus, de nombre Nikolau (1687–1759), también fue matemático. Johann tuvo varios hijos, entre ellos, Daniel (1700–1782) que desarrolló el principio de Bernoulli, y Johann (1710–1790), que a su vez también tuvo varios hijos matemáticos, como Johann (1744–1807) y Jacob (1759–1789), también conocido como Jaques, del que recibe el nombre la distribución de Bernoulli.



Distribución de Bernoulli

Se llama distribución de Bernoulli a una distribución con sólo dos posibilidades, “éxito” o no éxito. Por ejemplo:

- Tirar una moneda y ver si sale cara
- Tirar un dado y ver si sale un 5.
- Tirar al blanco…

Distribución de Binomial

Si consideramos n variables aleatorias idénticas que siguen una distribución de Bernoulli, la variable aleatoria suma sigue una distribución binomial. Por ejemplo:

- Tirar una moneda 100 veces y contar el número de caras.
- Tirar un dado mil veces y contra el número de cincos.
- Tirar al blanco 20 veces y contar el número de éxitos.

Debe verificarse que la probabilidad sea siempre la misma y que los sucesos sean independientes.

No es una distribución binomial contar el número de bolas rojas que sacamos en 5 extracciones de una bolsa con 10 bolas rojas y 12 bolas de otro color, si la extracción es SIN reemplazamiento, pues la probabilidad va cambiando.

Distribución Normal

La **importancia** de esta distribución se debe a que se utiliza para modelar numerosos fenómenos naturales, médicos y sociales. Son fenómenos en los que influyen muchas variables difíciles de controlar, por lo que podemos suponer que es suma de distintas causas independientes.

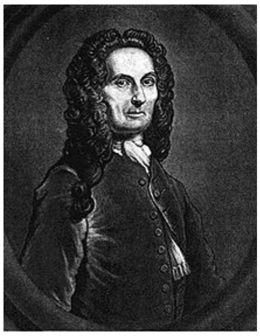
Ejemplos clásicos de fenómenos que se distribuyen según una normal son:

- Fenómenos morfológicos como la estatura o el peso
- Fisiológicos como los efectos de un fármaco
- Sociológicos como los de consumo
- Psicológicos como el cociente intelectual
- El ruido en las telecomunicaciones
- Los errores cometidos al medir una magnitud…

La **historia** de la distribución normal. Aparece por primera vez con *Abraham de Moivre* en un artículo publicado en 1733, sobre la distribución binomial para valores grandes de n.

El resultado fue trabajado por *Laplace* en su libro sobre la Teoría de las probabilidades trabajando sobre errores.

También sobre errores la utilizó *Gauss*, analizando datos astronómicos. En su honor también se denomina a la curva normal, *campana de Gauss*.



Moivre

Laplace

Gauss

Problemas resueltos de selectividad

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad. Por ejemplo en:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

http://pedroreina.net/pau/

http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

http://www.segundoperez.es/