Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º de Bachillerato

RESPUESTAS

LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Luis Carlos Vidal Del Campo

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

ÍNDICE

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 1: Números reales. Potencias y raíces. Notación científica

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Hugo Bastante Gómez-Limón

Pilar Paramio Barrigas

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica:**

   a) 1/9 = Expresión periódica.
   b) 7/5 = Expresión decimal exacta.
   c) 9/50 = Expresión decimal exacta.
   d) 2/25 = Expresión decimal exacta.
   e) 1/8 = Expresión decimal exacta.
   f) 3/22 = Expresión periódica.

2. **Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta:**

   a) 1/9 = 0,111111111 está correcto. (Expresión periódica)
   b) 7/5 = 1,4 está correcto. (Expresión decimal)
   c) 9/50 = 0,18 está correcto. (Expresión decimal)
   d) 2/25 = 0,125 está correcto. (Expresión decimal)
   e) 1/8 = 1,5 está correcto. (Expresión decimal)
   f) 3/22 = 0,136363636 está correcto. (Expresión periódica)

3. **Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:**

   a) 1/5 = 0,2
   b) 1/3 = 0,333333333…
   c) 5/9 = 0,55555555…
   d) 2/25 = 0,08
   e) 11/400 = 0,0275
   f) 1/11 = 0,0909090909…

4. **Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:**
   a) **7,92835 =** 792835/100000 à158567/20000
   b) **291,291835 =** 291291835/1000000 à58258367/200000
   c) **0,47** = 47/100

5. **Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:**
   a) **2,353535…** = 235-2/99 à 233/99
   b) **87,2365656565…** = 872365-8723/ 9900 = 863642/9900 à431821/4950
   c) **0,9999…**= 9/9 =1
   d) **26,5735735735…** = 2657357-2657/99900 = 2654700/99900 à 26547/999 à 8849/333

6. **¿Puedes demostrar que 4,99999…es igual a 5? ¿Calcula cuánto vale 2,5999…? Ayuda: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.**

Para demostrar que 4,99999 es igual a 5 pasamos el número a fracción siguiendo la explicación del ejercicio 5 y lo realizaríamos de la siguiente manera:

4,99999= 49-4/9 =45/9 =5

Por otra parte, realizamos el mismo proceso con 2,5999:

2,5999= 259-25/90 = 234/90 à 78/30= 26/10 = 2,6

7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Vamos a suponer que $\sqrt[3]{7}$ es un número racional y llegar a una contradicción.

Si $\sqrt[3]{7}$ es un número racional puede escribirse con una fracción $\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$, que suponemos irreducible,

$\sqrt[3]{7}=\frac{p}{q}$; $7=\frac{p^3}{q^3}$; $7q^3 = p^3$.

Luego en la descomposición en factores primos de p^3 hay un 7, y por tanto p es múltiplo de 7

p =7 a , $7 \cdot q^3 = 7^3 \cdot a^3$, $q^3 = 7^2 \cdot a^3$, que también es múltiplo de 7, que contradice que la fracción $\frac{p}{q}$ sea irreducible.

8. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

El resultado de esta fracción es 0,<u>0212765957446808510638297872340425531914893617</u>

Es decir, puede tener 46 decimales como máximo.

9. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? ¿Te atreves a dar una razón?

Tiene siete decimales. La expresión decimal es exacta porque el denominador tiene como actores primos potencias de 2 o 5 y la mayor potencia es la de 2 que es 7.

10. Haz la división 999 999 : 7 y después 1 : 7. ¿ Es casualidad?

999 999 : 7 = 142 857

1 : 7 = 0, 142 857

No, no es casualidad. Porque “999 999” es prácticamente un millón, por lo tanto, “1” es un millón seis veces reducido, por lo cual, el resultado va a ser 6 veces más pequeño.

11. Ahora divide 999 entre 37 y después 1 : 37, ¿ es casualidad?

999 : 37 = 27

1 : 37 = 0,2702703

No, no es casualidad debido a que “999” redondeado es 1000 y “1” es 3 veces más pequeño, por lo tanto, su resultado va a ser 3 veces más pequeño.

12. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ = - 0,6180

1 = 1

Los 3 números reales son : -0,3 ; 0 y 0,8

13. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1,5.

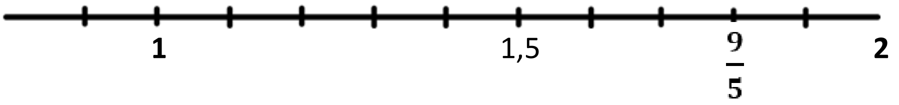
5/2, 5/3, 8/3, 9/2, y 30/4

14. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π.

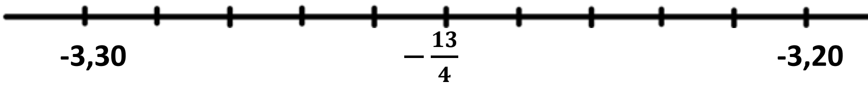
3,14131 ; 3,1413131 ; 3,1411111 ; 3,141212121 ; 3,1411211

15. Representa en la recta numérica los siguientes números:

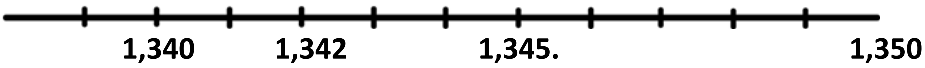
a) $\frac{9}{5} = 1,8$



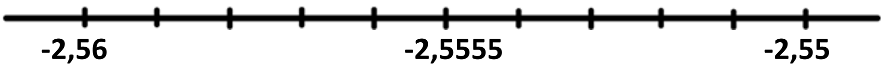
b) $\frac{-13}{4} = -3,25$



c) 1,342



d) -2,5555



16. Representa en la recta numérica.

a) $\sqrt{10}$

b) $-\sqrt{6}$

c) $\sqrt{27}$

d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

17. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

a) $5 \rightarrow |5| = 5$

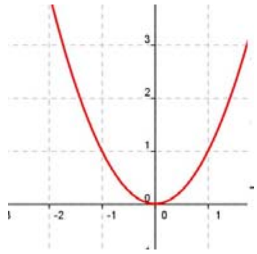
b) $-5 \rightarrow |-5| = 5$

c) $-\pi \rightarrow |-\pi| = \pi$

18. Representa las siguientes funciones:

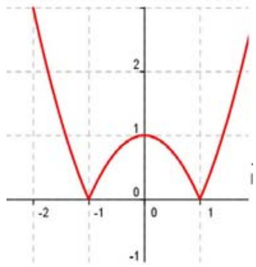
a) f(x) = $|x^2|$

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



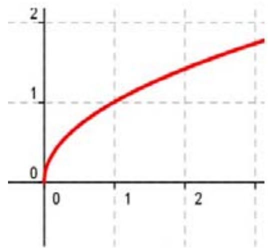
b) f(x)=| x²-1 |

x	y
-2	3
-1	0
0	1
1	0



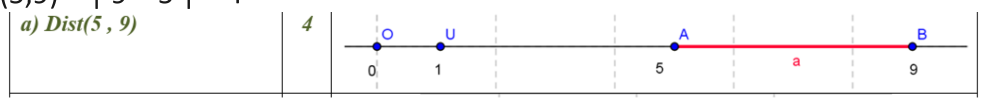
c) f(x)=| $\sqrt{x}$ |

x	y
-2	1,41
-1	1
0	0
1	1
2	1,41

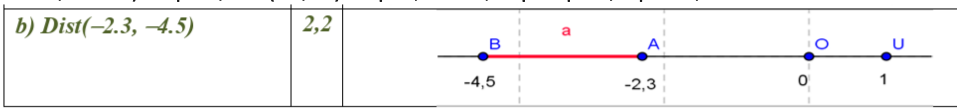


19. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes :

a)Distancia (5,9) = | 9 – 5 | = 4

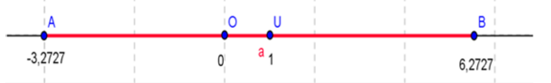


b) Distancia (-2’3, -4’5) = | -4,5 –(-2,3) = |-4,5 + 2,3 | = | -2,2| = 2,2



c) Distancia (-1/5, 9/5) = |9/5 – (-1/5) | = | 9/5 + 1/5 | = 2

d) Distancia (-3,272727…, 6,272727…) = | 6,272727… - (-3,272727…) | =
= | 6,272727… + 3,272727… | = 9,545454…

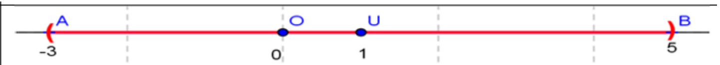
d) Dist(–3.272727…. , 6.27272727….)	*9*	

20. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real.

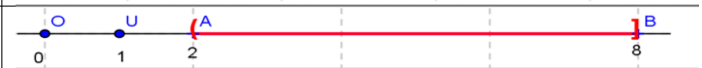
a)[1,7) = { x E R / 1 ≤ x < 7 }

a) {x ∈ R; 1 ≤ x < 7}	

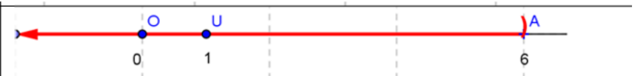
b) (-3,5) = { x E R / -3 < x < 5 }

b) {x ∈ R; –3 < x < 5}	

c) (2,8] = { x E R / 2 < x ≤ 8 }

c) {x ∈ R; 2 < x ≤ 8}	

d) (- ∞, 6) = { x E R / - ∞ < x < 6 }

d) {x ∈ R; x < 6}	

21. Representa en la recta real y escribe de forma de intervalo :

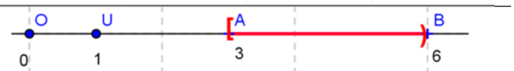
a)2 < x < 5 = (2,5)

a) (2, 5)	

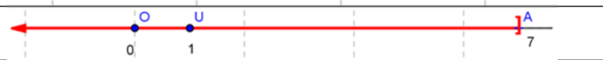
b) 4 < x = (4 , ∞)

b) (4, +∞)	

c) 3 ≤ x < 6 = [3,6)

c) 3 ≤ x < 6	

d) x ≤ 7 = (- ∞ , 7]

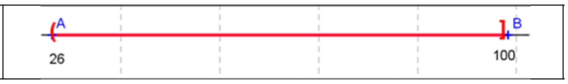
d) (–∞, 7]	

22. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

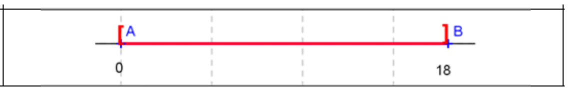
a) Un porcentaje superior al 26 %.
b) Edad inferior o igual a 18 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25°C.
f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

a) $(26,\ 100]$, $\{x \in \Re / 26 < x \le 100\}$

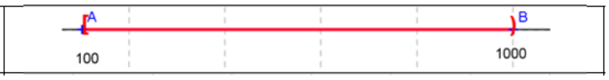


b) $[0,\ 18]$, $\{x \in \Re / 0 \le x \le 18\}$

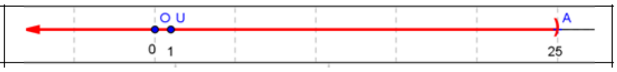


c) $(2, +\infty)$; $\{x \in \Re / x^3 > 8\}$

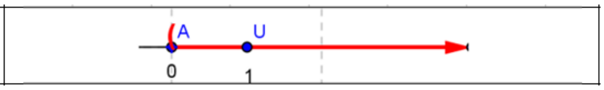
d) $[100, 1000)$; $\{x \in \Re / 100 \le x < 1000\}$



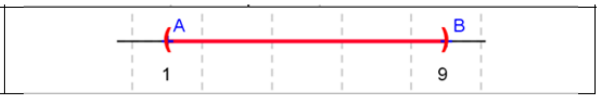
e) $(-\infty, 25)$; $\{x \in \Re / x < 25\}$



f) $(0, +\infty)$; $\{x \in \Re / x > 0\}$



g) $(1, 9)$; $\{x \in \Re / 1 < x < 9\}$



23. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) E(1, 5)
b) E(-2, 8/3)
c) E(-10, 0.001)

a) E(1, 5) = (1 – 5 , 1 + 5) = (-4, 6)
b) E(-2, 8/3) = (-2 + 8/3, -2 + 8/3) = (-14/3, 2/3)
c) E(-10; 0.001) = (-10 + 0.001, -10 + 0.001) = (-10.001, -9.999)

24. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7)
b) (-7, -4)
c) (-3, 2)

a) $\frac{4+7}{2} = 5.5\,, \quad 5.5 - 4 = 1.5 \;\rightarrow E(5.5, 1.5)$
b) $\frac{-4+(-7)}{2} = -5.5\,, \quad -5.5 - (-7) = 1.5 \;\rightarrow E(-5.5, 1.5)$
c) $\frac{-3+2}{2} = -0.5\;, \; -0.5 - (-3) = 2.5 \rightarrow E(-0.5, 2.5)$

25. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?
***Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?**

No se pueden poner como un intervalo, ya que sería el intervalo (500 , 1000) , por lo que 600.222333€ sería un sueldo, y no puede serlo al tener más de dos decimales.

26. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/9				
3.7182				
42.27				

	Cifras significativas			
Número	**1**	**2**	**3**	**4**
$\sqrt{10}$	*3*	*3.1*	*3.16*	*3.162*
1/9	*0*	*0.1*	*0.11*	*0.111*
3.7182	*3*	*3.7*	*3.71*	*3.718*
42.27	*40*	*42*	*42.2*	*42.27*

27. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{1+2{,}2361}{2} = \frac{3.2361}{2} \approx 1{,}61805$$

Redondeo: 1,6

Error absoluto: $|valor\ exacto - valor\ redondeado| = |1{,}61805 - 1{,}6| = 0{,}01805$

Error relativo: $\frac{error\ absoluto}{valor\ exacto} = \frac{0{,}01805}{1{,}61805} \approx 0{,}01115$

28. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 6.3 **b) 562** **c) 562.00**

a) EA ≤ 0.05; b) EA ≤ 0.5; c) EA ≤ 0.0005.

29. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

Peso mínimo del lote: $500 - 50 = 450g \rightarrow 450 \cdot 5 = 2250g = 2{,}25kg$

Peso máximo del lote: $500 + 50 = 550g \rightarrow 550 \cdot 5 = 2750g = 2{,}75kg$

Cota de error absoluto por lote: $50 \cdot 5 = 250g = 0{,}25kg$

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

30. Calcula las siguientes potencias:

a) $\boldsymbol{-2^5} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

b) $\boldsymbol{(2+1)^4} = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $\boldsymbol{-(-2x)^3} = -[(-2x) \cdot (-2x) \cdot (-2x)] = -[-8x^3] = 8x^3$

31. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $\boldsymbol{(x+1) \cdot (x+1)^3} = (x+1)^{1+3} = (x+1)^4$

b) $\boldsymbol{(x+2)^3 : (x+2)^4} = (x+2)^{3-4} = (x+2)^{-1} = \frac{1}{x+2}$

c) $\boldsymbol{\{(x-1)^3\}^4} = (x-1)^{3\cdot 4} = (x-1)^{12}$

d) $\boldsymbol{(x+3) \cdot (x+3)^{-3}} = (x+3)^{1-3} = (x+3)^{-2} = \frac{1}{(x+3)^2}$

32. Calcula las siguientes operaciones con potencias:

a) $\mathbf{2^5 \cdot 4^2} = 2^5 \cdot (2^2)^2 = 2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$

b) $\mathbf{(3^3)^3} = 3^{3\cdot 3} = 3^9$

c) $\mathbf{\frac{7^3}{7^0}} = \frac{7^3}{1} = 7^3$

d) $\mathbf{\frac{4^4}{4^{-5}}} = 4^{4-(-5)} = 4^9$

e) $\mathbf{5^{-5} \cdot 25^{-2}} = 5^{-5} \cdot (5^5)^{-2} = 5^{-5} \cdot 5^{-10} = 5^{-15} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15}$

f) $\mathbf{(7^{-3})^{-3}} = 7^{(-3)\cdot(-3)} = 7^9$

g) $\mathbf{\frac{4^{-3}}{7^0}} = \frac{4^{-3}}{1} = 4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

h) $\mathbf{\frac{7^{-4}}{7^{-5}}} = 7^{(-4)-(-5)} = 7^{-4+5} = 7$

33. Simplifica:

a) $\mathbf{\frac{a^2 \cdot b^3}{(a\cdot b)^4}} = \frac{a^2\cdot b^3}{a^4\cdot b^4} = \frac{1}{a^2\cdot b}$

b) $\mathbf{\frac{(2x-1)^8\cdot(2x-1)}{(2x-1)^7}} = \frac{(2x-1)^{8+1}}{(2x-1)^7} = \frac{(2x-1)^9}{(2x-1)^7} = (2x-1)^2$

c) $\mathbf{\frac{y^6\cdot z^{-5}\cdot x^2}{y^8\cdot z^{-6}\cdot x^3}} = \frac{y^6\cdot z^6\cdot x^2}{y^8\cdot z^5\cdot x^3} = \frac{z}{y^2\cdot x}$

d) $\mathbf{\frac{(3x-1)^7\cdot(3x-1)^5}{(3x-1)^0}} = \frac{(3x-1)^{7+5}}{1} = (3x-1)^{12}$

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

34. Calcula:

a) $\mathbf{\left(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9}\right)^2} = (a^2 \cdot b^3)^2 = a^{2\cdot 2} \cdot b^{3\cdot 2} = a^4 \cdot b^6$

b) $\mathbf{\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{12}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

c) $\mathbf{\left(\sqrt[12]{(x+1)^3}\right)^2} = \sqrt[12]{(x+1)^{2\cdot 3}} = \sqrt[12]{(x+1)^6} = \sqrt{x+1}$

35. Halla:

a) $\mathbf{\sqrt{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}} = \sqrt[8]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[8]{\frac{3x}{y^2}} = \sqrt[8]{\frac{x}{5y} : \frac{3x}{y^2}} = \sqrt[8]{\frac{x\cdot y^2}{5y\cdot 3x}} = \sqrt[8]{\frac{y}{15}}$

b) $\mathbf{\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{3} : \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

36.- Realiza las siguientes operaciones con radicales.

a) $\mathbf{\frac{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}}{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{x}{5y}}{\frac{3x}{y^2}}} = \sqrt[4]{\frac{xy^2}{15xy}} = \sqrt[4]{\frac{y}{15}}$

b) $\left(\left(\sqrt[5]{(x+3)^2}\right)\right)^3 = \sqrt[5]{(x+3)^6} = (x+3)\sqrt[5]{x+3}$

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION

37.- Escribe bajo un solo radical y simplifica:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{8}}}}}} = \sqrt[4]{2^2\cdot 3\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{8}}}}} = \sqrt[8]{(2^2\cdot 3)^2\cdot 4\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{8}}}} =$$
$$= \sqrt[16]{(2^4\cdot 3^2\cdot 4)^2\cdot 5\sqrt{6\sqrt{8}}} = \sqrt[32]{(2^8 3^4 4^2 5)^2 6\sqrt{8}} =$$
$$= \sqrt[64]{(2^{16}3^8 4^4 5^2 6)^2 8} = \sqrt[64]{2^{32}3^{16}4^8 5^4 6^2 8} =$$
$$= \sqrt[64]{2^{32}3^{16}(2^2)^8 5^4(2\cdot 3)^2 2^3} = \sqrt[64]{2^{32}3^{16}2^{16}5^4 3^2 2^2 2^3} = \sqrt[64]{2^{53}3^{18}5^4}$$

38.- Calcula y simplifica:

$$\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}} = \sqrt[12]{\frac{(x^3\cdot y^3)^3\cdot(x^4\cdot y^5)^4}{(x^5\cdot y^4)^2}} = \sqrt[12]{\frac{x^9y^9x^{16}y^{20}}{x^{10}y^8}} =$$
$$= \sqrt[12]{\frac{x^{25}y^{29}}{x^{10}y^8}} = \sqrt[12]{x^{15}y^{21}} = xy\sqrt[12]{x^3y^9} = xy\sqrt[4]{xy^3}$$

39.- Realiza la siguiente operación:

$$\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x} = x\sqrt{x}+4x^3\sqrt{x}+\sqrt{x} = (4x^3+x+1)\sqrt{x}$$

40.- Calcula y simplifica:

$$\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{5}} = \sqrt[12]{\left(\frac{3}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{x^2}{2^3}\right)^4\cdot\left(\frac{3^2}{5}\right)^3} = \sqrt[12]{\frac{3^6\cdot x^8\cdot 3^6}{x^6\cdot 2^{12}\cdot 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^{12}\cdot x^2}{2^{12}\cdot 5^3}} = \frac{3}{2}\sqrt[12]{\frac{x^2}{5^3}}$$

41. Racionaliza la expresión:

$$\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} = \frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2y})(\sqrt{x}+\sqrt{2y})} = \frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2y})^2} = \frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{x-2y}$$

42. Racionaliza:

$$\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}^2)-(\sqrt{2}^2)} = (3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

43. Racionaliza:

$$\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2} = \frac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5^2})-(2^2)} = \frac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{5-4} = (5\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)$$

5. NOTACION CIENTÍFICA

44. Calcula:

a) $(7,83\cdot 10^{-5})(1,84\cdot 10^{13}) = (7,83\cdot 1,84)10^{(-5+13)} = 14,4072\cdot 10^8 = 1,44072\cdot 10^9$

b) $(\mathbf{5,2\cdot 10^{-4}}) \div (\mathbf{3,2\cdot 10^{-6}}) = (5{,}2 \div 3{,}2)\cdot 10^{[(-4)-(-6)]} = 1{,}625\cdot 10^2$

45. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{\mathbf{3\cdot 10^{-5}+7\cdot 10^{-4}}}{\mathbf{10^6-5\cdot 10^5}} = \dfrac{3\cdot 10^{-5}+70\cdot 10^{-5}}{10\cdot 10^5-5\cdot 10^5} = \dfrac{73\cdot 10^{-5}}{5\cdot 10^5} = \dfrac{73}{5}\cdot 10^{-10} = 14{,}6\cdot 10^{-10} = 1{,}46\cdot 10^{-11}$

b) $\dfrac{\mathbf{7{,}35\cdot 10^4}}{\mathbf{5\cdot 10^{-3}}} + \mathbf{3,2\cdot 10^7} = (7{,}35 \div 5)\cdot 10^{[4--3)} + 3{,}2\cdot 10^7 = 1{,}47\cdot 10^7 + 3{,}2\cdot 10^7 =$

$= (1{,}47+3{,}2)\cdot 10^7 = 4{,}67\cdot 10^7$

46. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $\left(\mathbf{4,3\cdot 10^3 - 7,2\cdot 10^5}\right)^{\mathbf{2}} = (4{,}3\cdot 10^3 - 720\cdot 10^3) = (-715{,}7\cdot 10^3)^2 = (-715{,}7^2)(10^{3\cdot 2}) =$

$= 512226{,}49\cdot 10^6 = 5{,}1222649\cdot 10^{11}$

b) $(\mathbf{7,8\cdot 10^{-7}})^{\mathbf{3}} = (7{,}8)^3(10^{-7})^3 = 474{,}552\cdot 10^{-21} = 4{,}74552\cdot 10^{-19}$

6. LOGARITMOS

47. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$log_5\ 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$log_2\ 2 = 1$	$5^0 = 1$	$log_2\ 32 = 5$
$2^1 = 2$	$log_2\ 1 = 0$	$log_5\ 5 = 1$	$log_5\ 25 = 2$
$2^4 = 16$	$log_3\ 81 = 4$	$log_2\ 16 = 4$	$3^4 = 81$

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow log_2\ 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow log_2\ 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow log_5\ 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow log_5\ 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow log_2\ 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow log_5\ 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow log_2\ 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow log_3\ 81 = 4$

48. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

$$\log_b(a^c) = c\log_b a$$

a) $\log_2 2^5 = 5\log_2 2 \ \rightarrow \log_2 2^5 = 5\cdot 1 = 5$
b) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 \ \rightarrow \log_5 25 = 2\cdot 1 = 2$
c) $\log_2 2^{41} \rightarrow 41\log_2 2 \ \rightarrow \ \log_2 2^{41} = 41\cdot 1 = 41$
d) $\log_5 5^{30} = 30\log_5 5 \ \rightarrow \ \log_5 5^{30} = 30\cdot 1 = 30$

49. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

$$\log_b(a^c) = c\log_b a$$

a) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 \ \rightarrow \log_3 27 = 3\cdot 1 = 3$
b) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 \ \rightarrow \log_{10} 100 = 2\cdot 1 = 2$
c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \ \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2\cdot 1 = 2$
d) $\log_{10} 0{,}0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4\log_{10} 10 \ \rightarrow \log_{10} 0{,}0001 = -4\cdot 1 = -4$

50. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x \ \rightarrow \ 2^x = 64 \ \rightarrow \ 2^x = 2^6 \ \rightarrow \ x = 6$
b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4 \ \rightarrow \ \left(\frac{1}{2}\right)^4 = x \ \rightarrow \ x = \frac{1}{16}$

c) $\log_x 25 = 2 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow x = 5$

51. Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\mathbf{\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})} \rightarrow 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\log_2 64 = 6$, $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$, $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$, $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

b) $\mathbf{\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1} \rightarrow -5 + 3 - 0 = -8$

$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$, $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$, $\log_2 1 = 0$

52. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\mathbf{\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}}$ **b)** $\mathbf{\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d}\right)}$

a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}} = \ln\left(\frac{4x^2}{e^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4x^2}{e^3}\right) = \frac{1}{5}(\ln 4x^2 - \ln e^3) = \frac{1}{5}(\ln 4 + 2\ln x - 3\ln e) =$

$= \frac{1}{5}(\ln 4 + 2\ln x - 3)$

b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d}\right) = \log(a^3 \cdot b^2) - \log(c^4 \cdot d) = \log a^3 + \log b^2 - \log c^4 - \log d =$

$= 3\log a + 2\log b - 4\log c - \log d$

53. Utiliza la calculadora para obtener a) log 0.000142; b) log 142; c) log 9 + log 64.

a) log 0.000142 = -3.8477117; b) log 142 = 2.15228834; c) log 9 + log 64 = 2.76042248

54. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

a) $\log 81 = \log 3^4 = 4 \cdot \log 3 = 4 \cdot 0.4771212$
b) $\log 27 = \log 3^3 = 3 \cdot \log 3 = 3 \cdot 0.4771212$
c) $\log 59049 = \log 3^{10} = 10 \cdot \log 3 = 10 \cdot 0.4771212$

55. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h = \log m^{\frac{1}{2}} - \log t^2 - \log p + \log h^{\frac{5}{2}} \rightarrow \log\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{t^2 \cdot p}\right) + \log h^{\frac{5}{2}} =$

$= \log\left(\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{5}{2}}}{t^2 \cdot p}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{h^5}}{t^2 \cdot p}\right)$

7. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

1. **Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 euros. Responde a las siguientes cuestiones:**

a. **¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?**

La fórmula del interés compuesto es: $C_f = C_i \cdot (1+i)^n$

Sabemos que el precio actual del producto es C_i=18 euros, la tasa de incremento anual es

i = 5% = 0.05 y el número de años es n=4. Sustituimos estos valores en la fórmula:

$C_f = 18\cdot(1+0.05)^4$, $C_f = 18\cdot(1.05)^4$, $C_f = 18\cdot 1.21550625$, $C_f \approx 21.9$ euros

Por lo tanto, el producto costará aproximadamente **21.90 euros** dentro de 4 años.

b. ¿Cuánto costaba hace 4 años?

Para encontrar el precio hace 4 años, usamos la fórmula de valor presente: $C_i = \frac{C_f}{(1+i)^n}$

Sabemos que el precio actual del producto es C_f = 18 euros, la tasa de incremento es i = 0.05 y el número de años es n = 4. Sustituimos estos valores en la fórmula:

$C_i = \frac{18}{(1+0.05)^4}$, $C_i = \frac{18}{1.21550625}$, $C_i \approx 14.83$ euros

Por lo tanto, el precio del producto hace 4 años era aproximadamente **14.83 euros**.

c. ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?

Necesitamos que el valor futuro V_f sea el doble del valor actual V_0. Entonces, tenemos: $C_f = 2\cdot C_i$

Usando la fórmula del valor futuro: $2\cdot C_i = C_i \cdot(1+i)^n$

Cancelamos C_i en ambos lados: $2 = (1+0.05)^n$

Para resolver, logaritmos en ambos lados: $\log(2) = n\cdot\log(1.05)$, $n = \frac{\log(2)}{\log(1.05)}$

Calculamos los logaritmos: $n \approx \frac{0.3010}{0.02119} \approx 14.2$

Por lo tanto, deben pasar aproximadamente **14.2 años** para que el precio del producto se duplique.

2. Calcula el tiempo que debe de estar colocado un capital de 4.500 euros en una cuenta corriente al 2% de interés compuesto anual para que el capital se duplique.

La fórmula del interés compuesto es: $C_f = C_i\cdot(1+i)^n$

Sabemos que el capital se duplica, por lo que $C_f = 2\cdot C_i$

Sustituyendo esto en la fórmula: $2\cdot C_i = C_i\cdot(1+0.02)^n$

Dado que C_i no es cero, podemos cancelarlo en ambos lados de la ecuación: $2 = (1+0.02)^n$, $2 = 1.02^n$

Para despejar n, tomamos logaritmos en ambos lados de la ecuación: $\log(2) = n\cdot\log(1.02)$

Despejamos n: $n = \frac{\log(2)}{\log(1.02)}$, $\log(2) \approx 0.3010$, log1.02) ≈ 0.0086

Sustituyendo estos valores: $n = \frac{0.3010}{0.0086} \approx 35$

Por lo tanto, el capital de 4.500 euros deberá estar colocado durante **aproximadamente 35 años** para que se duplique a una tasa de interés compuesto anual del 2%.

3. Calcula el tiempo necesario para que un capital impuesto a interés compuesto al 3% anual se duplique ¿y para que se triplique?

La fórmula del interés compuesto es: $C_f = C_i \cdot (1+i)^n$

Para duplicar el capital, necesitamos que $C_f = 2 \cdot C_i$

Sustituimos en la fórmula: $2 \cdot C_i = C_i \cdot (1+0.03)^n$

Cancelamos C_i en ambos lados: $2 = (1.03)^n$

Ahora, tomamos logaritmos en ambos lados para despejar n: $\text{Log}(2) = n \cdot \log(1.03)$

Despejamos n: $n = \frac{\log(2)}{\log(1.03)}$

Cálculo de logaritmos: $\log(2) \approx 0.3010$, $\log(1.03) \approx 0.01283$

Sustituimos estos valores: $n = \frac{0.3010}{0.01283} \approx 23.5$

Se necesitan aproximadamente **23.5 años** para que el capital se duplique a un 3% de interés compuesto anual.

Para que el capital se triplique

Para triplicar el capital, necesitamos que $C_f = 3 \cdot C_i$

Sustituimos en la fórmula: $3 \cdot C_i = C_i \cdot (1+0.03)^n$

Cancelamos C_i en ambos lados: $3 = (1.03)^n$

Tomamos logaritmos en ambos lados: $\log(3) = n \cdot \log(1.03)$

Despejamos n: $n = \frac{\log(3)}{\log(1.03)}$

Calculamos los logaritmos: $\log(3) \approx 0.4771$, $\log(1.03) \approx 0.01283$

Sustituimos estos valores: $n = \frac{0.4771}{0.01283} \approx 37.2$

Respuesta para triplicar el capital: Se necesitan aproximadamente **37.2 años** para que el capital se triplique a un 3% de interés compuesto anual.

4. ¿Durante cuánto tiempo hemos de abonar mensualidades de 60 euros al 4% anual para conseguir capitalizar 6.500 euros?

Usamos la fórmula del valor futuro de una serie de pagos periódicos (en este caso, mensualidades). La fórmula para calcular el valor futuro de una anualidad es: $C_f = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

P es el pago periódico (en este caso, 60 euros mensuales)

i es la tasa de interés por periodo (4% anual, pero como son mensualidades, la tasa de interés mensual será: $\frac{4\%}{12} = 0.04/12 = 0.0033333$.

Sustituimos en la fórmula para encontrar el valor de n, el número de meses.

La fórmula quedaría así: $6.500 = 60\cdot\frac{(1+0.0033333)^n-1}{0.0033333}$

Despejamos n: $\frac{6.500}{60} = \frac{(1+0.0033333)^n-1}{0.0033333}$, $108{,}33 = \frac{(1.0033333)^n-1}{0.0033333}$

Multiplicamos ambos lados por 0.0033333:

$108.33\cdot 0.0033333 = (1.0033333)^n - 1$, $0.3611 = (1.0033333)^n - 1$

Sumamos 1 a ambos lados: $1.3611 = (1.0033333)^n$

Hacemos logaritmos en ambos lados de la ecuación para despejar n: $\log(1.3611) = n\cdot\log(1.0033333)$

Despejamos n: $n = \frac{\log(1.3611)}{\log(1.0033333)}$

Calculamos los logaritmos: $\log(1.3611) \approx 0.1335$, $\log(1.0033333) \approx 0.001444$

Sustituimos estos valores: $n = \frac{0.1335}{0.001444} \approx 92.5$

Se deben abonar mensualidades de 60 euros durante **aproximadamente 93 meses** (es decir, **7 años y 9 meses**) para conseguir capitalizar 6.500 euros a un 4% de interés anual.

5. **El abuelo de Luis, al nacer este, decidió ingresar en un banco un capital de 3.600 euros a interés compuesto anual del 3%. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral ¿cuánto dinero hubiera recibido?**

$C_f = C_i\cdot(1+i)^n$

La capitalización es anual, la fórmula es directa con $i = 0.03$ y $n = 25$.

Sustituimos en la fórmula: $C_f = 3600\cdot(1+0.03)^{25}$, $C_f = 3600\cdot(1.03)^{25}$

Calculamos $(1.03)^{25}$: $(1.03)^{25} \approx 2.0936$

Por tanto: $C_f = 3600\cdot 2.0936 \approx 7.534{,}96$euros

Por lo tanto, con capitalización anual, **Luis recibirá aproximadamente 7.535 euros** cuando cumpla 25 años.

Si la capitalización se hubiera hecho semestralmente, hay que tener en cuenta que el interés se capitaliza dos veces al año. En este caso:

- La tasa de interés semestral es $i = \frac{0.03}{2} = 0.015$
- El número de periodos será $n = 25\times 2 = 50$ (25 años, pero con capitalización semestral).

La fórmula ahora será: $C_f = C_i\cdot(1+i)^n$

Sustituimos: $C_f = 3600\cdot(1+0.015)^{50}$, $C_f = 3600\cdot(1.015)^{50}$

Calculamos $(1.015)^{50}$: $(1.015)^{50} \approx 2.4486$

Por tanto: C_f = 3600·2.4486≈ 8.814,96euros

Por lo tanto, con capitalización semestral, **Luis recibiría aproximadamente 8.815 euros** cuando cumpla 25 años.

6. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 euros. La capitalización es mensual al 3% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

La fórmula para calcular el valor futuro de una serie de pagos periódicos (anualidad ordinaria) es

$$C_f = P\cdot\frac{(1+\mathrm{i})^{n}-1}{\mathrm{i}}$$

P es el pago periódico (en este caso, 60 euros mensuales)

i es la tasa de interés por periodo (3% anual, pero como son mensualidades, la tasa de interés mensual será: $\frac{3\%}{12}$ = 0.0025

n es el número total de pagos (en este caso, 4 años con pagos mensuales, por lo que n = 4·12 = 48

Sustituimos en la fórmula para encontrar el valor de n, el número de meses.

La fórmula quedaría así: $C_f = 60\cdot\frac{(1+0.0025)^{48}-1}{0.0025}$

Calculamos: $(1+0.0025)^{48}$ = 1.002548 ≈ 1.12749

Sustituimos en la fórmula: $C_f = 60\cdot\frac{1.12749-1}{0.0025}$, $C_f = 60\cdot\frac{0.12749}{0.0025}$, C_f =60·50.996 , C_f ≈3.059,76 euros

Al final de los 4 años, el capital acumulado será aproximadamente **3.059,76 euros**.

7. Una persona compra un piso en 90.000 euros. A la firma del contrato entrega 18.000 euros y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra el 2% anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

Usamos la fórmula del **valor presente de una anualidad ordinaria** (al ser las cuotas de amortización mensuales). La deuda concedida es el monto restante después del pago inicial.

Datos:

- **Precio del piso**: 90.000 euros
- **Pago inicial**: 18.000 euros
- **Deuda restante (préstamo)**: 90.000 - 18.000 = 72.000 euros
- **Tasa de interés anual**: 2% anual
- **Plazo del préstamo**: 20 años
- **Número de cuotas mensuales**: 20 años × 12 meses = 240 meses
- **Tasa de interés mensual**: $\frac{2\%}{12}$ = 0.002

La fórmula es: $C = \frac{C_i\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$

Sustituimos en la fórmula: $C = \frac{72.000 \cdot 0.002}{1-(1+0.002)^{-240}}$

Calculamos $(1+0.002)^{-240}$: $(1.002)^{-240} \approx 0.6065$

Ahora sustituimos en la fórmula: $C = \frac{72.000 \cdot 0.002}{1-0.6065}$, $C = \frac{144}{0.3935}$, $C \approx 365.06$

Por lo tanto, la cuota mensual que debe pagar la persona para amortizar el préstamo de 72.000 euros en 20 años con un 2% de interés anual es **aproximadamente 365,06 euros**.

8. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 3%, cada anualidad de amortización asciende a 16.200 euros. ¿Cuánto costó el camión?

Necesitamos calcular el **valor presente** de las anualidades que la empresa va a pagar por el camión, usando la fórmula del **valor presente de una anualidad ordinaria**. La fórmula es:

$$C_i = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

A es la anualidad; el pago anual de 16.200 euros

i es la tasa de interés anual 3%; i = 0.03

n es el número de anualidades, 13 años

Sustituimos en la fórmula: $C_i = 16.200 \cdot \frac{1-(1+0.03)^{-13}}{0.03}$

Calculamos: $(1+0.03)^{-13}$, $(1.03)^{-13} \approx 0.6026$

Sustituimos en la fórmula: $C_i = 16.200 \cdot \frac{1-0.6026}{0.03}$, $C_i = 16.200 \cdot \frac{0.3974}{0.03}$, $C_i = 16.200 \cdot 13.2467$

$C_i \approx 214.788{,}54$euros

El camión costó aproximadamente **214.788,54 euros**.

9. Confecciona una hoja de cálculo que te permita resolver problemas de interés compuesto, capitalización y amortización.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

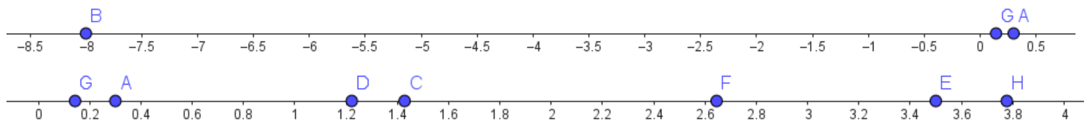
NÚMEROS REALES

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales y pasa a fracción los racionales:

Números Racionales	Números Irracionales
$0 \to \frac{0}{1}$	$\sqrt{5}$
$-0{,}2 \to -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$	$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$
$3{,}72 \to \frac{372}{100} = \frac{93}{25}$	
$-\frac{1}{7}$	
$2{,}321321321 \to \frac{2309}{999}$	
$-9{,}9 \to -\frac{99}{10}$	
$9^1 \to \frac{9}{1}$	
$3{,}222 \to \frac{29}{9}$	
$5{,}03421221 \to \frac{50089}{9990}$	

2. Representa, aproximadamente, en la recta real los números:

A = 0.3; B = -8; C = $\sqrt{3}$; D = 1.22222 …; E = 3.5; F = $\sqrt{7}$; G = $\frac{1}{7}$; H = 3.777…



3. Escribe dos números en las condiciones siguientes:

a) Mayores que 0.12 y menores que 0.13

0.125; 0.126;

b) Comprendidos entre 2.35 y 2.36.

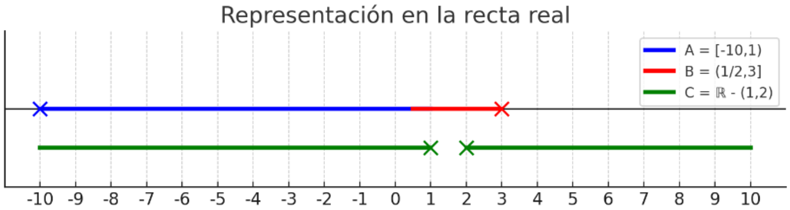
Comprueba que la diferencia entre estos números y 2.36 es menor que una centésima

2.351; 2.355.

Las diferencias con 2.36 son: 0.009 y 0.005 menores que 0.01.

4. Dados los intervalos: A = {x ∈ ℛ; –10 ≤ x < 1}; B = {x ∈ ℛ ; 1/2 < x ≤ 3} ; C = ℛ – (1, 2)

a) Represéntalos en la recta real



b) Calcula sus longitudes

$$L(A) = 1 - (-10) = 11$$
$$L(B) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$
$$L(C) = (-\infty,\ 1]\ U\ \ [2, \infty)$$

c) Calcula: AUB, A∩B, AUC, (A∩C) U B, AUBUC, A∩B∩C

$$A \cup B = \ [-10, 3]$$
$$A \cap B = \ \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$A \cup C = \ C$$
$$(A \cap C) \cup \ B = \ [-10,1) \ \cup \ \left(\frac{1}{2}, 3\right]$$
$$A \cup B \cup C = \ \Re$$
$$A \cap B \cap C = \ \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$$

5. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (Pista: x puede tener dos valores)

a) |x| = 5 b) |x – 4| = 0 c) |3x + 9| = 21

a) |x| = 5 , x = – 5 , x = 5

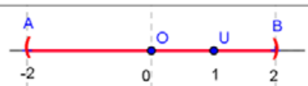
b) |x – 4| = 0 , x = 4

c) |3x + 9| = 21 , 3x + 9 = -21, 3x = -30, x = -10 ; 3x + 9 = 21 , 3x = 12 , x = 4

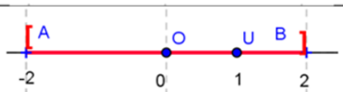
6. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

a) |x| < 2 b) |x| ≤ 2 c) |x| > 2 d) |x| ≥ 2

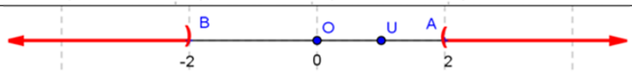
a) $-2 < x < 2$



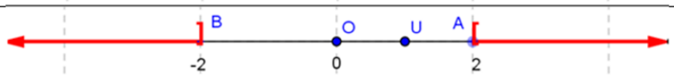
b) $-2 \le x \le 2$



c) $x < -2 \vee x > 2$



d) $x \le -2 \vee x \ge 2$

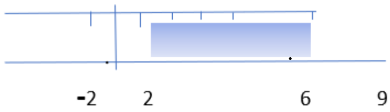


7. Halla dos números que disten cuatro unidades de 2 y otros dos que disten 2,5 unidades de -3, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

2 + 4 = 6 , 2 – (+ 4) = - 2 ; 6 – (-2) = 8

- 3 + (2,5) = - 0,5 , -3 – (2,5) = - 5,5 ; –5,5 – (-0,5) = 6

8. Escribe el intervalo [-2,6] ∩ (2,9)



[-2, 6] ∩ (2 , 9) **(2,6]**

9. Escribe el intervalo formado por los números reales x, que cumplen |x – 8| ≤ 3

x € R / |x – 8 | ≤ 3

x – 8 ≤ 3 x ≤ 3 + 8 x ≤ 11

x – 8 ≥ -3 x ≥ -3 + 8 x ≥ 5

[5 , 11]

10. Cúal es el error absoluto y el error relativo, cometidos al hacer las siguientes aproximaciones.

a) $\mathbf{3\sqrt{3}}$ **por 1,73**

$$E_a = |1{,}73205 - 1{,}73| = 0{,}00205$$

$$E_r = \frac{0{,}00205}{1{,}73205} \approx 0{,}00118\ (0{,}118\%)$$

b) $\boldsymbol{\pi + 1}$ **por 4,1**

$$E_a = |4{,}1416 - 4{,}1| = 0{,}0416$$

$$E_r = \frac{0{,}0416}{4{,}1416} \approx 0{,}01004\ (1{,}004\%)$$

c) **Redondeo a 4 cifras del número π**

$$E_a = |3{,}1416 - 3{,}142| = 0{,}0004$$

$$E_r = \frac{0{,}0004}{3{,}1416} \approx 0{,}000127\ (0{,}0127\%)$$

POTENCIAS

11. Expresa en forma de potencia:

a) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

b) $\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t^5}} = t^{1-5} = t^{-4}$

c) $\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z+1}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{(1)^2}{(z+1)^2} = (z+1)^{-2}$

d) $\frac{27^{-2}}{81^{-5}} = \frac{(3^3)^{-2}}{(3^4)^{-5}} = \frac{3^{3\cdot(-2)}}{3^{4\cdot(-5)}} = \frac{3^{-6}}{3^{-20}} = 3^{-6+20} = 3^{14}$

e) $\frac{x^{-2}\cdot y^{-7}}{x^8\cdot y^{-4}} = \frac{x^{-2}}{x^8}\cdot\frac{y^{-7}}{y^{-4}} = x^{-2-8}\cdot y^{-7+4} = x^{-10}\cdot y^{-3}$

12. Calcula:

a) $4^{1/2} = \sqrt[2]{4} = 2$

b) $\sqrt[3]{125} = 125^{3/3} = 5$

c) $625^{5/6} = \sqrt[6]{625^5} = \sqrt[6]{(5^4)^5} = \sqrt[6]{5^{20}} = 5^{20/6} = 5^{10/3}$

d) $\left(64^{2/3}\right)^{5/6} = 64^{10/18} = 64^{5/9} = (2^6)^{5/9} = 2^{30/9} = 2^{10/3}$

e) $\left(8^{-4/3}\right)^{2/5} = 6^{\frac{-4}{3}\cdot\frac{2}{5}} = 8^{-8/15} = (2^3)^{-8/15} = 2^{-24/15} = 2^{-8/5}$

13. Calcula:

a) $\frac{(x+1)^2\cdot(x+1)^3}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)^{2+3}}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)^5}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)^4\cdot(x+1)^1}{(x+1)^4} = (x+1)$

b) $\frac{(2x-3)^7\cdot(2x-3)^5}{(2x-3)^6} = \frac{(2x-3)^{5+7}}{(2x-3)^6} = \frac{(2x-3)^{5+7}}{(2x-3)^6} = \frac{(2x-3)^{12}}{(2x-3)^6} = (2x-3)^6$

c) $\frac{(5y+1)^6\cdot(5y+1)^2}{(5y+1)^8} = \frac{(5y+1)^{2+6}}{(5y+1)^8} = \frac{(5y+1)^8}{(5y+1)^8} = 1$

d) $\frac{(x-1)^4\cdot(x-1)^0}{(x-1)^3} = (x-1)^{4-3} = (x-1)$

14. Expresa en forma de radical:

a) $x^{7/9} = \sqrt[9]{x^7}$

b) $\left(m^5\cdot m^3\right)^{1/3} = (m^5)^{1/3}\cdot(m^3)^{1/3} = m^{5/3}n^{3/3} = \sqrt[3]{m^5\cdot n}$

c) $\left[(x^2)^{1/3}\right]^{1/5} = x^{(2/1)\cdot(1/3)\cdot(1/5)} = x^{2/15} = \sqrt[15]{x^2}$

d) $a^{1/2}\cdot b^{1/3} = \sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$

15. Expresa en forma de radical:

a) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = \left(x^{2/3}\right)^5 = x^{(2/3)\cdot(5/1)} = x^{10/3} = \sqrt[3]{x^{10}}$

b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}} = \sqrt{a^{13-6}} = \sqrt[2]{a^7} = a^{7/2}$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a\cdot k}} = \sqrt[n\cdot m]{(a\cdot \mathrm{k})} = (a\cdot k)^{1/n\cdot m}$

d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}} = x^{(5x+1)/3}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

e) $\sqrt[4]{(x^2)^{3x+2}} = \sqrt[4]{x^{2\cdot(3x+2)}} = \sqrt[4]{x^{6x+4}} = x^{(6x+4)/4} = x^{(3x+2)/2}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{1/5}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{x^{(2/5)}}}} = \sqrt[24]{x^{2/5}} = x^{(2/5)/24} = x^{1/60} = \sqrt[60]{x}$

16. Expresa como potencia única:

a) $\sqrt[3]{\frac{a^8}{a^3}} = \frac{a^{8/3}}{a^2} = a^{\frac{8}{3}-\frac{2}{1}} = a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2}$

b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[2]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{125}\cdot\sqrt[3]{5}}{5} = \frac{\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}}{5} = \frac{5\sqrt{5}\sqrt[3]{5}}{5} = \sqrt{5}\sqrt[3]{5}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a\cdot a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a^3}} = \frac{a^{2/3}}{a^{3/2}} = a^{-5/6}$

d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot 2^3} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$

e) $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{1}{a}\cdot a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[2]{2\cdot\frac{1^2}{2^2}}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$

17. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = 2^{\frac{6}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[5]{2^4}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{8}{10}-\frac{5}{10}} = 2^{\frac{3}{10}}$

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}} = \frac{(a^3\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{4}}}{(a\cdot b^3\cdot c^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}\cdot c^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}} = \sqrt[3\cdot 4]{x^{7+5}} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$

e) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = \left(\sqrt[8]{2}\right)^8 = 2$

f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}} = \frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{5}{3}}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{13}{3}}\cdot y^{\frac{14}{3}}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{13}{12}}\cdot y^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{y}$

g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\sqrt[10]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}} = \sqrt[5]{x^2\cdot 3\sqrt[10]{x^{\frac{7}{2}}}} = \sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot x^{\frac{7}{20}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{47}{20}}\cdot 3}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

18. Extrae factores del radical:

a) $\sqrt[3]{\boldsymbol{32x^4}} = x\sqrt[3]{2^5x} = 2x\sqrt[3]{4x}$

b) $\sqrt[3]{\boldsymbol{81a^3b^5c}} = \sqrt[3]{3^4a^3b^5c} = 3ab\sqrt[3]{3b^2c}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\right)^{\boldsymbol{10}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^{10} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

d) $\sqrt[4]{\frac{\boldsymbol{25a^2b}}{\boldsymbol{c^6}}} = \sqrt[4]{\frac{5^2 \cdot a^2b}{c^6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a} \cdot b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{3}{2}}}$

e) $\sqrt{\frac{\boldsymbol{8a^5}}{\boldsymbol{b^4}}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{a^5}}{\sqrt{b^4}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot a^{2\sqrt{a}}}{b^2} = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{2a}}{b^2}$

f) $\sqrt{\frac{\boldsymbol{28x^5}}{\boldsymbol{75y^3}}} = \frac{\sqrt{28x^5}}{\sqrt{75y^3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{x^5}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{y^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot x^{2\sqrt{x}}}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot y\sqrt{y}} = \frac{2x^{2\sqrt{7x}}}{5y\sqrt{3y}}$

g) $\sqrt{\frac{\boldsymbol{32a^3}}{\boldsymbol{45b^4}}} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{b \cdot 4}} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{b^4}} = \frac{4a\sqrt{2a}}{3b^{2\sqrt{5}}}$

19. Introduce factores en el radical:

a) $\boldsymbol{2} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

b) $\boldsymbol{3} \cdot \sqrt{\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}}$

c) $\boldsymbol{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot \frac{1}{2^2}} = \sqrt[3]{2}$

d) $\boldsymbol{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{12}}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot \frac{5}{2^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{12}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt{\frac{1}{2^2} \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt{3}$

f) $\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{4}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3^2}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

20. Calcula:

a) $\sqrt[3]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{a^2}} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b^4}} \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{b^2}} = \sqrt[3]{a \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^6} = ab^2$

b) $\sqrt{\boldsymbol{5a}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{10ab}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{8a^3b}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{a}} = \sqrt{5a \cdot 10ab \cdot 8a^3b \cdot a} = \sqrt{400a^6b^2} = 20a^3b$

c) $\frac{\sqrt[6]{\boldsymbol{20}}}{\sqrt[4]{\boldsymbol{10}}} = \frac{\boldsymbol{20^{\frac{1}{6}}}}{\boldsymbol{10^{\frac{1}{4}}}} = \frac{\boldsymbol{(2 \cdot 10)^{\frac{1}{6}}}}{\boldsymbol{10^{\frac{1}{4}}}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}} = \sqrt[6]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{10}} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{10}}$

d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{5}{12}}{\frac{20}{3}}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 3}{12\cdot 20}} = \sqrt[4]{\frac{15}{240}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

22. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8} = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a} = \sqrt{25\sqrt{2a}}-\sqrt{9\sqrt{2a}} = 5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500} = \sqrt{64\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}-\sqrt{100\cdot 5} = 8\sqrt{5}+4\sqrt{5}-10\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{64}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7}}{8}+\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}+4\sqrt{7}}{8} = \frac{5\sqrt{7}}{8}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}} = 20\sqrt{6}-\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{32}} = 20\sqrt{6}-\frac{\sqrt[5]{3}}{2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 5}{2^3}}-\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{5}}{2}-\frac{\sqrt[3]{5}}{2} = \frac{3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}}{2} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{2} = \sqrt[3]{5}$

g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24} = \sqrt{25\cdot 6}+\sqrt{9\cdot 6}-\sqrt{4\cdot 6} = 5\sqrt{6}+3\sqrt{6}-2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

23. Racionaliza los denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 6+3\sqrt{3}$

c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 4\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{6}}{3-2} = 3-\sqrt{6}$

f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{5-3}{2} = 1$

23. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \frac{11}{2\sqrt{5}+3}\cdot\frac{2\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}-3} = \frac{22\sqrt{5}-33}{11} = 2\sqrt{5}-3$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} = \frac{\sqrt{2}\cdot(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)} = \frac{4-3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2}-4$

c) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = 3\sqrt{2}+\sqrt{15}+2\sqrt{30}+10$

d) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2} = -\frac{11+4\sqrt{6}}{5} = -\frac{11}{5}-\frac{4\sqrt{6}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{21}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{(4\sqrt{15}-2\sqrt{21})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{40\sqrt{3}-14\sqrt{3}}{13} = \frac{26\sqrt{3}}{13} = 2\sqrt{3}$

f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1} = x-\sqrt{x^2-1}$

24. Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3}) = 6-3 = 3$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \to 6-2\sqrt{18}+3 = 9-6\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{9-6\sqrt{2}}{3} = 3-2\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \to (3)^2-(2\sqrt{2})^2 = 1$$

b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5}$; $(\sqrt{5}+1)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2\cdot(\sqrt{5})\cdot(1) + (1)^2 = 6+2\sqrt{5}$

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} = \frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - 3\sqrt{5}$$

$$(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1) \to 6\sqrt{5}+6+2\cdot5+2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}+6+10+2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}+16$$

$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5-1 = 4$$

$$\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} = \frac{(6+2\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - 3\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}+4-3\sqrt{5} = 4-\sqrt{5}$$

c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}:\frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{-2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

25. Utiliza la calculadora para efectuar:

a)$\sqrt{\mathbf{357}} + \sqrt{\mathbf{87}} - \sqrt{\mathbf{531}} \rightarrow 5.178385437$

b)$\sqrt{\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{59}}} : \sqrt{\frac{\mathbf{26}}{\mathbf{31}}} \rightarrow 0.8763144346$

LOGARITMOS

26. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a)$\boldsymbol{ln}\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2 \cdot z^{-4}}\right) = ln\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^2 \cdot z^{-4}}\right) = ln\, x^{\frac{3}{2}} - ln(y^2 \cdot z{-}^4) = ln\, x^{\frac{3}{2}} - (ln\, y^2 + ln\, z{-}^4) =$

$= \frac{3}{2} ln\, x - \left(2\, ln\, y + (-4\, ln\, z)\right) = \frac{3}{2} ln\, x - 2\, ln\, y + 4\, ln\, z = \frac{3}{2} ln\, x + 4\, ln\, z - 2\, ln\, y$

b) $\mathbf{log_3} \sqrt[4]{\frac{(x \cdot y)^5}{z^{\frac{1}{2}} \cdot e^2}} = \log_3 \left(\frac{(x \cdot y)^5}{z^{\frac{1}{2}} \cdot e^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_3 \left(\frac{(x \cdot y)^5}{z^{\frac{1}{2}} \cdot e^2}\right) = \frac{1}{4}\left(5\,(\log_3 x + \log_3 y) - \frac{1}{2} \log_3 z - 2 \log_3 e\right) =$

$= \frac{5}{4}(\log_3 x + \log_3 y) - \frac{1}{8} \log_3 z - \frac{1}{2} \log_3 e$

27. Simplifica la siguiente expresión

$$\mathbf{log_2 5 - 3 \log_2 \boldsymbol{a} + \frac{7}{3} \log_2 9} = \log_2 5 - \log_2 a^3 + \log_2 9^{\frac{7}{3}} = \log_2 5 - \log_2 a^3 + \log_2 3^{\frac{14}{3}} = \log_2 \left(\frac{5 \cdot 3^{\frac{14}{3}}}{a^3}\right)$$

$$9^{\frac{7}{3}} = (3^2)^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{14}{3}}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

28. La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es 5.98 · 1021 t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos

$5.98 \cdot 10^3\, toneladas$ **tierra**

$5.98 \cdot 10^{21} \cdot 10^3 = 5.98 \cdot 10^{24} kg$ **, masa de tierra en kg**

$(3.3 \cdot 10^5) \cdot (5.98 \cdot 10^{24})$ **, la masa del sol es 330000 veces la masa de la tierra**

$(3.3 \cdot 5.98) \cdot 10^{5+24} \rightarrow 19.734 \cdot 10^{29}$ **, expresamos en notación científica**$\rightarrow 19.734 \times 10^{30} kg$

29. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10-18 g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?

1)$138t = 138 \cdot 10^{-6}$g peso de la ballena

2)10^{-18} peso del virus

3) $cantidad\ del\ virus = \frac{peso\ de\ la\ ballena}{peso\ de\ un\ virus} \rightarrow \frac{138 \cdot 10^{6}}{10-^{18}} = 138 \cdot 10^{6} \cdot 10^{18}$

4)$10^{6} - (-18) = 10^{6+18} = 10^{24} \rightarrow cantidad\ del\ virus = 1.38 \cdot 10^{26}$

Se necesitarán aproximadamente $1.38 \cdot 10^{26}$ virus para igualar el peso de una ballena azul.

30. Los 5 países más contaminantes del mundo (EEUU, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2, en el año 1995, cantidad que representa el 53,5% de las emisiones de todo el mundo ¿qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

$$Total\ mundial = \frac{Emisiones\ de\ los\ 5\ países}{Porcentaje\ que\ representa} \rightarrow Total\ mundial = \frac{12}{0.535} \rightarrow 22.43$$
billones de toneladas de CO2

31. Expresa en notación científica:

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1 628 000 euros.

1 628 000 = 1,628 · 10^{6}

b) Toneladas de CO que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5 228,5 miles de millones.

5 228,5 · 1 000 000 000 = 5,2285 · 10^{12}

c) Radio del átomo de oxígeno: 0,000000000066 m.

0,000000000066 = 10^{-11}

32. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ = $(3 \cdot 8) \cdot (10^{-7} \cdot 10^{18}) = 24 \cdot 10^{11} = 2,4 \cdot 10^{12}$

b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ = $(4 \cdot 5) \cdot (10^{-12} \cdot 10^{-3}) = 20 \cdot 10^{-15} = 2,0 \cdot 10^{-16}$

c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ = $(5 : 2) \cdot (10^{12} : 10^{-3}) = 2,5 \cdot 10^{15}$

d) $3,1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ = $(3,1 \cdot 100 + 2) \cdot 10^{10} = (310 + 2) \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3,12 \cdot 10^{12}$

e) $(4 \cdot 10^{5})^{-2}$ = $4^{-2} \cdot (10^{5})^{-2} = 0,0625 \cdot 10^{-10} = 6,25 \cdot 10^{-12}$

33. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75800)^{4} : (12000)^{4} \rightarrow \frac{7,58 \cdot 10^{4}}{1,2 \cdot 10^{4}} = 1593,2$

b) $\frac{0,000541 \cdot 10318000}{1520000 \cdot 0,00302} \rightarrow \frac{5,41 \cdot 10^{-4} \cdot 1,03 \cdot 10^{7}}{1,52 \cdot 10^{6} \cdot 3,02 \cdot 10-3} \rightarrow \frac{5,57 \cdot 10^{3}}{4,59 \cdot 10^{3}} = 1,214$

c) $(0,0073)^{2} \cdot (0,0003)^{2} \rightarrow (7,3 \cdot 10^{-3})^{2} \cdot (3 \cdot 10^{-4})^{2} = (53,29 \cdot 10^{-6}) \cdot (9 \cdot 10^{-8}) = 4,79 \cdot 10^{-12}$

d) $\frac{2700000 - 13000000}{0,00003 - 0,00015} \rightarrow \frac{2,7 \cdot 10^{6} - 1,3 \cdot 10^{7}}{3 \cdot 10^{-5} - 1,5 \cdot 10^{-4}} \rightarrow \frac{-1,03 \cdot 10^{7}}{-1,2 - 10^{-4}} = 8,58 \cdot 10^{10}$

34. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^{6} - 5 \cdot 10^{5}} \rightarrow \frac{7,3 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{5}} = 1,46 \cdot 10^{-9}$

b) $\frac{7,35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3,2 \cdot 10^{7} \rightarrow \frac{7,35 \cdot 10^{4} + 1,6 \cdot 10^{5}}{5 \cdot 10^{-3}} = 4,67 \cdot 10^{7}$

c) $(4,3 \cdot 10^{3} - 7,2 \cdot 10^{5}) = -7,157 \cdot 10^{5}$

35. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica:

$(\mathbf{5,24\cdot 10^6})\cdot(\mathbf{8,32\cdot 10^5})$

a) $4{,}35968\cdot 10^{12}$ correcto

b) $43{,}5968\cdot 10^{13}$ no es notación científica

c) $4{,}35968\cdot 10^{11}$ incorrecto

d) $4{,}35968\cdot 10^{13}$ incorrecto

AUTOEVALUACIÓN

1. El número $8^{-\frac{4}{3}}$ vale:

a) un dieciseisavo
b) Dos
c) Un cuarto
d) Un medio.

$$8^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{(2^3)^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{2^{\frac{12}{3}}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

a) un dieciseisavo

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $\left(16^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)$. El resultado es:

a) $2^{-\frac{1}{3}}$
b) $2^{-\frac{5}{4}}$
c) $2^{-\frac{5}{3}}$
d) 2^{-5}

$$\left(16^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=(2^4)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\sqrt[6]{2^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^3}\right)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot2^{-3}=2^{1+\frac{1}{3}-3}=2^{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{9}{3}}=2^{-\frac{5}{3}}$$

c) $2^{-\frac{5}{3}}$

3. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

a) $6^{\frac{1}{4}}$
b) $2^{\frac{1}{3}}$
c) $2^{\frac{5}{6}}\cdot6^{\frac{1}{9}}$
d) 2

$$\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{2^3}}}=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\cdot2^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{4\cdot6^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{3}{2}}}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6^{\frac{1}{3}}}\cdot\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot6^{\frac{1}{9}}\cdot2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{5}{6}}\cdot6^{\frac{1}{9}}$$

c) $2^{\frac{5}{6}}\cdot6^{\frac{1}{9}}$

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$
b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$
c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$
d) $\sqrt[3]{2}$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}=\frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{2}{2\sqrt[3]{2}}$$

b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt{\sqrt{625 \cdot a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}}$

a) $5^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2 \cdot c}$
b) $5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$
c) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^3}$
d) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$

$$\sqrt{\sqrt{625 \cdot a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}} = \sqrt[4]{5^4 \cdot a^6 \cdot b^7 \cdot c^6} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$$

d) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{\frac{3}{2}}$

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2$
b) $a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{-1}$
c) $(a^2)^2$
d) $a^3 \cdot a^{-2}$

$$a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{5}{2}-1} = a^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$$

b) $a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{-1}$

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$:

a) $2 \cdot \sqrt{7}$
b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$
c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$
d) $-\frac{2}{5} \cdot \sqrt{7}$

$$\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3} = 3\sqrt{7} - \frac{5}{2} \cdot \left(2\sqrt{7}\right) + 4\sqrt{7} = 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + \frac{4\sqrt{7}}{3} = -2\sqrt{7} + \frac{4\sqrt{7}}{3} =$$
$$= \frac{-6\sqrt{7}+4\sqrt{7}}{3} = \frac{-2\sqrt{7}}{3}$$

c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)}$ **está dada por:**

a) $\sqrt[6]{x^2 \cdot (x+2) \cdot (x+1)}$
b) $\sqrt[8]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$
c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$
d) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)^6}$

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)} = x^{\frac{2}{3}} \cdot (x+2)^{\frac{3}{4}} \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$$

c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$
c) $2+\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?:
$\mathbf{5,83\cdot 10^{9}+6,932\cdot 10^{12}-7,5\cdot 10^{10}}$

a) $6.86283\cdot 10^{12}$
b) $6.86283\cdot 10^{13}$
c) $6.8623\cdot 10^{11}$
d) $6.8628\cdot 10^{12}$

$$5{,}83\cdot 10^{9}+6{,}932\cdot 10^{12}-7{,}5\cdot 10^{10}=0{,}00583\cdot 10^{12}+6{,}932\cdot 10^{12}-0{,}075\cdot 10^{12}=$$
$$=6{,}93783-6{,}86283= \;=6{,}86283\cdot 10^{12}$$

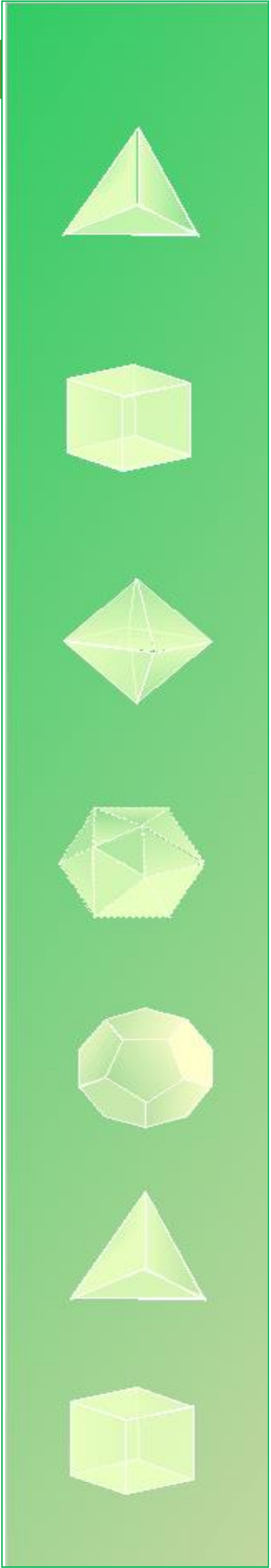
a) $6.86283\cdot 10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5,24\cdot 10^{10}}{6,3\cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317\cdot 10^{17}$
b) $8.317\cdot 10^{16}$
c) $8.317\cdot 10^{15}$
d) $83.17\cdot 10^{16}$

$$\frac{5{,}24\cdot 10^{10}}{6{,}3\cdot 10^{-7}}=\frac{5{,}24}{6{,}3}\cdot 10^{10-(-7)}=\frac{5{,}24}{6{,}3}\cdot 10^{10+7}=\frac{5{,}24}{6{,}3}\cdot 10^{17}=0{,}8317\cdot 10^{17}=8{,}317\cdot 10^{16}$$

b) $8.317\cdot 10^{16}$



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato

Capítulo 2: Álgebra

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Realizados por:

Hugo Bastante Gómez-Limón

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POLINOMIOS

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

A: $x^2 - 2$; B: $3x^4 + x^3 - 1$

Suma:

$$\begin{array}{l} 3x^4 + x^3 + 0 + 0 - 1 \\ \qquad\qquad\quad x^2 \quad - 2 \\ \hline 3x^4 + x^3 \;+ x^2 \quad - 3 \end{array}$$

Resta:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2 \\ -3x^4 - x^3 \qquad + 1 \\ \hline -3x^4 - x^3 + x^2 - 1 \end{array}$$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$ b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (3x^2 - 5x + 4) + (2x^5 - x + 5)$

$$\begin{array}{l} 2x^3 - 2x^2 \quad + x - 2 \\ \qquad -2x^2 \;\; - 3x + 1 \\ \qquad\quad x^2 \quad - x \\ \hline 2x^3 - \;3x^2 \quad - 3x \; - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \qquad -x^4 + x^3 \qquad 2x - 3 \\ \qquad\qquad\quad +3x^2 - 5x + 4 \\ 2x^5 \qquad\qquad\qquad\quad - x + 5 \\ \hline 2x^5 \; -x^4 \; +3x^3 + 3x^2 \; -4x + 6 \end{array}$$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

A. $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ .... $-2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 1$

B. $-7x^3 - 6x + 5$ .... $7x^3 + 6x - 5$

C. $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$ ....$x^4 - 3x^2 + 8x - 7$

4. Considera los polinomios p = x^3 - 6x + 2 , q = $3x^2$ + 3x + 1 así como s = p+q. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para x = -2, p(-2), q(-2) y s(-2). Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

$$p + q = x^3 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 \quad = \quad x^3 + 3x^2 - 3x + 3$$

$$p(-2) = \; (-2)^3 \; - 6 \cdot (-2) + 2 = -8 + 12 + 2 = 6$$

$$q(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 1 = -12 - 6 + 1 = 7$$

$$s(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 3 = 13$$

El valor obtenido para el polinomio suma es igual a la suma de los valores obtenidos para cada polinomio.

5. Obtén el valor del polinomio p= - x - $5x^3$ + 2x - 2 en x=3. Que valor opuesto de p en x=3

$$p(3) = -(3)^4 - 5(3)^3 + 2(3) - 2 = \; -81 - 135 + 6 - 2 = -210 + 4 = -206$$

$$-p(x) = x^4 + 5x^3 - 2x + 2$$

$$-p(3) = -(3)^4 - 5(3)^3 + 2(3) - 2 = \; -81 - 135 + 6 - 2 = -210 + 4 = 206$$

El opuesto del polinomio anterior es 206

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a)$(-4x^3 + 2x) - (-3x^2) = -4x^3 + 3x^2 + 2x$

b)$(2x^4 + x) - (-3x - 4) = 2x^4 + 4x + 4$

c) $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)=-2x^3+2x^2$

7. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

Se multiplican los coeficientes y la parte literal se suman los exponentes.

a) $(5x^3-2x)\cdot(-4x^3)= \ -20x^6+8x^4$

b) $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)= \ -6x^5-3x^2-8x^4-4x= \ -6x^5-8x^4-3x^2-4x$

c)$(2x^5+x^3-x^2)\cdot(-3x^2-x)=-6x^7-3x^5+3x^4-2x^5-x^4+x^3=-6x^7-5x^5+2x^4+x^3$

d) $-(7x^3-4x^2-3x+1)=-7x^3+4x^2+3x-1$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos.

Multiplicamos todo el polinomio por un número de manera que el coeficiente de la x de mayor grado sea 1.

a) $4x^3+3x^3+2x^2 = 7x^3+2x^2 = \frac{1}{7}(7x^3+2x^2) = x^3+\frac{2}{7}x^2$

b) $-2x^3+x^2-1 = -\frac{1}{2}(-2x^3+x^2-1) = x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

c) $-x^2+x-7 = -(-x^2+x-7) = x^2-x+7$

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^3+4x^2-6) = 6x^4+12x^3-18x = x^4+2x^3-3$

b) $(3x-4)\cdot(4x+6) = 12x^2-16x+18x-24 = 12x^2+2x-24 = 6x^2+x-12$

c)$(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^2) = 8a^2b-6a^4-20b^2+15a^2b = 6a^4\mp 23a^2b-20b^2$

d) $(3a-b)(8-2a)(9a-2)=(-6a^2+24a+2ab-8b)(9a-2)=$

$=-54a^3+12a^2+216^2-48a+18a^2b-4ab-72ab+16b=$

$= \ -54a^3+228a^2+18a^2b-76ab-48a+16b$

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(-5x^4-3x^2+1)\cdot 2x^3 = 2x^5\cdot(-5x^4-3x^2+1) = \ -10x^9-6x^7+2x^5$

b) $(2x^3-3)\cdot(-3x^2-5x+4)(-x) = (-2x^3+3x)(-3x^2-5x+4)=$

$=6x^5+10x^4-8x^3-9x^3-15x^2+12x = \ = x^5+10x^4-17x^3-15x^2+12x$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

Debemos buscar aquel factor que es común a los monomios dados en el polinomio para poder extraerlo.

a) $\boldsymbol{-16x^4-20x^3+10x^2} = 2x^2\cdot(-8x^2-10x+5)$

b) $\boldsymbol{24x^4-30x^2} = 3x^2\cdot(8x^2-10)$

12. Realiza los cálculos:

Realizamos los cálculos mediante el triángulo de Tartaglia o identidades notables.

a) $\boldsymbol{(2+3a)^2} = 2^2+2\cdot2\cdot3a+3a^2 = 9a^2+12a+4$

b) $\boldsymbol{(-x+3)^2} = (-x)^2+2\cdot(-x)\cdot3+3^2 = x^2-6x+9$

c) $\boldsymbol{(-3x+2)^2} = (-3x)^2+2\cdot(-3x)\cdot2+2^2 = 9x^2-12x+4$

d) $\boldsymbol{(x^2-1)^3} = x^{2\cdot3}-3(x^{2\cdot2})\cdot1+3\cdot x^2\cdot1^2-1^3 = x^6-3x^4+3x^2-1$

e) $(\boldsymbol{4x^2+2})^3 = (4x^2)^3 + 3\cdot(4x^2)^2\cdot 2 + 3\cdot 4x^2\cdot 2^2 + 2^3 = 64x^6 + 96x^4 + 48x^2 + 8$

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(\boldsymbol{a+b+c})^2 = (a+b+c)\cdot(a+b+c) =$
$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

b) $(\boldsymbol{a+b-c})^2 = (a+b-c)\cdot(a+b-c) =$
$= a^2 + ab - ac + ba + b^2 - bc - ca - cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(\boldsymbol{2x-5y})^2 = 2x^2 + 2\cdot(2x\cdot -5y) - 5y^2 = 4x^2 - 2\cdot(-10xy) - 25y^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$

b) $(\boldsymbol{3x+\frac{y}{3}})^2 = 3x^2 + 2\cdot\left(3x\cdot\frac{y}{3}\right) + \frac{y^2}{3} = 9x^2 + 2\cdot(xy) + \frac{y^2}{9} = 9x^2 + 2xy + \frac{y^2}{9}$

c) $(\boldsymbol{5x^2-\frac{5}{x}})^2 = (5x^2)^2 - 2\cdot\left(5x^2\cdot\frac{5}{x}\right) + \frac{5^2}{x} = 25x^4 + 2\cdot(-25x) - \frac{25}{x^2} = 25x^4 - 50x + \frac{25}{x^2}$

d) $(\boldsymbol{3a-b})^2 = 3a^2 - 2\cdot(3a\cdot b) + b^2 = 9a^2 - 2\cdot(3ab) + b^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$

e) $(\boldsymbol{a^2+b^2})^2 = (a^2)^2 + 2\cdot(a^2\cdot b^2) + (b^2)^2 = a^4 + 2\cdot(a^2b^2) + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

f) $(\boldsymbol{\frac{3}{5y}-\frac{2}{y}})^2 = \left(\frac{3}{5y}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{5y}\cdot\frac{2}{y}\right) + \frac{2^2}{y} = \frac{9}{25y^2} - 2\cdot\left(\frac{6}{5y^2}\right) + \frac{4}{y^2} = \frac{9}{25y^2} - \frac{12}{5y^2} + \frac{4}{y^2}$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a)$\boldsymbol{a^4+6a^2+9} = (a^2)^2 + 2\cdot(a\cdot 3) + 3 = (a^2+3)^2$

b) $\boldsymbol{9x^2-6x+1} = 3x - 2\cdot(3x\cdot 1) + 1 = (3x-1)^2$

c) $\boldsymbol{b^2-10b+25} = b - 2\cdot(b\cdot 5) + 5 = (b+5)^2$

d) $\boldsymbol{4y^2+12y+9} = 2y + 2\cdot(2y\cdot 3) + 3 = (2y+3)^2$

e) $\boldsymbol{a^4-2a^2+1} = a^2 - 2(a^2\cdot 1) + 1 = (a^2-1)^2$

f) $\boldsymbol{y^4+6y^2+9} = y^2 + 2\cdot(y^2\cdot 3) + 3 = (y^2+3)^2$

16. Efectúa estos productos:

a) $(\boldsymbol{4x^2+3y})\cdot(\boldsymbol{4x^2-3y}) = (4x^2\cdot 4x^2) - (3y\cdot 3y) = 16x^4 - 9y^2$

b) $(\boldsymbol{2x^2+8})\cdot(\boldsymbol{2x^2-8}) = (2x^2\cdot 2x^2) - (8\cdot 8) = 4x^4 - 64$

c) $(\boldsymbol{-x^2+3x})\cdot(\boldsymbol{x^2+3x}) = -(x^2\cdot x^2) + (3x\cdot 3x) = -x^4 + 9x^2$

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $\boldsymbol{2x^4 - x^2 - x + 7}$ entre $\boldsymbol{x^2 + 2x + 4}$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 \quad\quad - x^2 - x + 7 & x^2 + 2x + 4 \\ \hline
-2x^4 - 4x^3 - 8x^2 & 2x^2 - 4x - 1 \\ \hline
\quad -4x^3 - 9x^2 - x + 7 & \\
\quad 4x^3 + 8x^2 + 16x & \\ \hline
\quad\quad -x^2 + 15x + 7 & \\
\quad\quad x^2 + 2x + 4 & \\ \hline
\quad\quad\quad 17x + 11 &
\end{array}
$$

C(x) = $2x^2 - 4x - 1$ R(x) = $17x + 11$

b) $\mathbf{-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4}$ entre $\mathbf{5x^3 - x^2 - x + 3}$

$$
\begin{array}{l|l}
-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & 5x^3 - x^2 - x + 3 \\ \hline
10x^3 - 2x^2 - 2x + 6 & -2 \\ \hline
\quad -4x^2 + x + 10 &
\end{array}
$$

C(x) = -2 R(x) = $-4x^2 + x + 10$

c) $\mathbf{4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7}$ entre $\mathbf{-2x^3 + x + 3}$

$$
\begin{array}{l|l}
4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7 & -2x^3 + x + 3 \\ \hline
-4x^5 + 2x^3 + 6x^2 & -2x^2 + 2 \\ \hline
\quad -4x^3 + 12x^2 - 3x - 7 & \\
\quad +4x^3 \quad\quad - 2x - 6 & \\ \hline
\quad\quad 12x^2 - 5x - 13 &
\end{array}
$$

C(x) = $-2x^2 + 2$ R(x) = $12x^2 - 5x - 13$

d) $\mathbf{-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5}$ entre $\mathbf{4x^3 + x^2 + x - 1}$

$$
\begin{array}{l|l}
-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5 & 4x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline
8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 & -2x^2 + 3 \\ \hline
\quad 12x^3 \quad\quad + 3x + 5 & \\
\quad -12x^3 - 3x^2 - 3x + 3 & \\ \hline
\quad\quad -3x^2 + 8 &
\end{array}
$$

C(x) = $-2x^2 + 3$ R(x) = $-3x^2 + 8$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

$$\begin{array}{l|l} -6x^5 + x^2 + 1 & x^3 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{6x^5 + 6x^2} & -6x^2 \\ \quad 7x^2 + 1 & \end{array}$$

C(x) = $-6x^2$ R(x) = $7x^2 + 1$

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca q(x) = x^2- x - 3 como polinomio cociente y r(x) = -3x² - 1 como resto.

Regla de la división: D(x) = d(x)·q(x) + r(x)

$(x^2 – x - 3)\cdot x^3 + (-3x^2 - 1) = x^6 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 1$; D(x) = $x^6 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 1$ y d(x) = x^3

19. usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) -3x² + x + 1 entre x – 1

	-3	1	1
1		-3	-2
	-3	-2	-1

C(x) = $-3x - 2$ R(x) = -1

b) $x^4 + 2x^3 – 2x + 1$ entre x – 2

	1	2	0	-2	1
2		2	8	16	28
	1	4	8	14	29

C(x) = $x^3 + 4x^2 + 8x + 14$ R(x) = 29

d) $4x^3$ - $3x^2$ – 1 entre x + 1

	4	-3	0	-1
-1		-4	8	-8
	4	-7	8	-9

C(x) = $4x^2 - 7x + 8$ R(x) = - 9

e) x^3 – 9x + 1 entre x – 3

	1	0	-9	1
3		3	9	0
	1	3	0	1

C(x) = $x^2 + 3x$ R(x) = 1

20. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre 2x + 3

$x^3 + 2x^2 + 5x + 7 : 2x + 3$, dividimos dividendo y divisor entre 2 : $\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} \; : \; x + \frac{3}{2}$

Ya podemos usar la regla de Ruffini

	1/2	1	5/2	7/2
-3/2		-3/4	-3/8	-51/16
	1/2	1/4	17/8	5/16

Cociente = $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{17}{8}$ Resto = $\frac{5}{16}$

21. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-3x^3+7x^2+2x+4$ en $x=5$.

	-3	7	2	4
5		-15	-40	-190
	-3	-8	-38	-186

El valor del polinomio para x = 5 es - 186

22. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados.

a) $\alpha = 3\ de\ x^3-4x+5$

No→ El resto no da 0.

	3	4	0	5
		9	39	117
3				
	3	13	39	122

b) $\beta = -2\ de\ -x^3-2x^2+x+2$

Sí→ El resto da 0.

	-1	-2	1	2
		2	0	-2
-2				
	-1	0	1	0

c) $\gamma = 1\ de -2x^4+x+1$

Sí→El resto es 0.

	-2	0	0	1	1
		-2	-2	-2	-1
1					
	-2	-2	-2	-1	0

d) $\sigma = -1\ de\ 2x^3+2x^2$

Sí→El resto da 0.

	2	2	0	0
		-2	0	0
-1				
	2	0	0	0

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y , después determina cuáles lo son.

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Divisores de -2 = 1, 2, -1, -2 / raíces = 1

Solo es raíz 1 porque si sustituimos el resultado es 0.→$1^3 - 1^2 + 2(1) - 2 = 0$

Los demás al sustituir el resultado no es 0, con lo cual no son raíces.→$2^3 - 2^2 + 2(2) - 2 = 6$

b) $\mathbf{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3}$

Divisores de 3 = 1, 3, -1, -3 / raíces = - 1 y - 3

$$(-1)^4 + 4(-1)^3 + 4(-1)^2 + 4(-1) + 3 = 0$$
$$(-3)^4 + 4(-3)^3 + 4(-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0$$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

Divisores de -9 = 1, 3, 9, -1, -3, -9 / raíces = 3 y -3

Son raíces 3 y -3 porque al sustituir, el resultado da 0.→$2(3)^3 + 3^2 - 18(3) - 9 = 0$

$(-3)^3 + (-3)^2 - 18(-3) - 9 = 0$ El resultado es 0 así que es raíz

$2(1)^3 + 1^2 - 18(1) - 9 = -24$ El resultado no es 0 así que no es raíz

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Divisores de 6 = 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 / raíces = -2

Solo es raíz -2 porque al sustituir da 0→$(-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 6(2) = 0$

24. Comprueba que -1/2 es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

Sí lo es porque el resto da 0.

	2	3	-11	-6
-1/2		-1	-1	6
	2	2	-12	0

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

$a)$ $3x^2 + 4x - 5$

Posibles raíces: 1, -1, 5, -5 , 1/3, -1/3, 5/3, -5/3.
Sustituyendo, ningún número es raíz

$b)$ $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

Posibles raíces: 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2.
Realizamos Ruffini con los divisores de dos:
Con 1:

	2	-9	12	2
1		2	-7	5
	2	-7	5	7

Con -1:

	2	-9	12	2
-1		-2	11	-1
	2	-11	1	1

Con 2:

	2	-9	12	2
2		4	-10	4
	2	-5	2	2

Con -2:

	2	-9	12	2
-2		-4	26	-76
	2	-13	38	-74

Igualmente, no son raíces 1/2 ni -1/2

->Aquí ninguno es raíz tampoco porque ninguno de los candidatos ha sido solución dado que al realizar Ruffini ningún resto ha salido 0 por lo tanto tampoco hemos obtenido ninguna raíz.

26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real a.

a) Si a es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?

No, a es raíz de $p_1(x) = x – a$ y si $p_2(x) = x + a$; $p_1(x) + p_2(x) = 2x$ y a no es raíz

b) Si a es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

Sí, porque el resultado sí sería divisible entre (x + a)

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio *p₁(x)* y las del polinomio 4 · *p₁(x)*?

Sí, porque son las mismas

27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea 3 raíces distintas

$$P(x) = (x+2)(x-1)(x-3)^2 = (x^2-6x+9)(x+2)(x-1) =$$
$$= (x^2+x-2)(x^2+6x+9) = x^4-6x^3+9x^2+x^3-6x^2+9x-2x^2+12x-18 =$$
$$= x^4-5x^3+x^2+21-18$$

28. Determina un polinomio de grado 4 que tenga, al menos, una raíz repetida

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x-3) = (x^2-2x+1)(x+2)(x-3) =$$
$$= (x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2)(x-3) = (x^3-3x+2)(x-3) =$$
$$= x^4-3x^3-3x^2+9x+2x-6 = x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

29.- Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz

$$P(x) = (x-2)^4 = x^4-8x^3+24x^2-32x+16$$

30.- Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots \ldots + a_1 x + a_0$ admite al número 0 como raíz

Un polinomio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots \ldots + a_1 x + a_0$ tiene al número 0 como raíz sí y solo sí el término independiente es cero, es decir: $P(0) = a_0 = 0$

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$ +…..+$a_1 x + a_0$ admite al número 1 como raíz.

En un polinomio cualquiera el número 1 será raíz siempre y cuando la suma de los coeficientes sea 0.

Por ejemplo, en x^3+3x^2+3x+1, sabemos que el número 1 no es raíz porque todos los coeficientes son positivos y dará un número muy grande si lo sustituimos en el polinomio.

En $-x^3-3x^2-3x-1$, también sabemos que el 1 no es raíz puesto que todos los coeficientes son negativos y al sustituir el 1 el resultado no será 0, sino un número negativo.

Sin embargo, en x^3-3x^2+3x-1, la suma de los coeficientes dará 0, ya que en realidad son los coeficientes con los que se operan, debido a que el coeficiente por 1 es el mismo número. Por esta razón, en estos casos el número 1 siempre será una raíz.

32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $\boldsymbol{x+5}$ → $x+5=0$ → $x=-5$

b) $\boldsymbol{-x+3}$ → $-x+3=0$ → $x=3$

c) $\boldsymbol{7x-5}$ → $7x-5=0$ → $7x=5$ → $x=\frac{5}{7}$

d) $\boldsymbol{-3x-11}$ → $-3x-11=0$ → $3x=-11$ → $x=-\frac{11}{3}$

e) $\boldsymbol{-7x}$ → $x=0$

f) $\boldsymbol{x^2-8x}$ → $x^2-8x=0$ → $x(x-8)=0$ Raíces: $x_1=0,\ x_2=8$

g) $\boldsymbol{4x^2-x-3=0}$ → $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4} = \frac{+1\pm\sqrt{49}}{8}$

→ $x_1=\frac{1+7}{8}=\frac{8}{8}=1$; → $x_2=\frac{1-7}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

h) $\boldsymbol{x^3-4x=0}$ → $x(x^2-4)=0$

→$x^2-4=0$ → $x^2=4$ → $x=\sqrt{4}=\pm 2$ Raíces: $x_1=0,\ \ x_2=2,\ \ x_3=-2$

i) $\boldsymbol{x^3+25x=0}$ → $x(x^2+25)$

→ $x^2+25=0$ → $x=\ \sqrt{-25}$ (No tiene solución real)   Raíz: $x=0$

33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{\boldsymbol{x^2+4x}}{\boldsymbol{x^3+3x^2-6x-8}}=\frac{x(x+4)}{x^3+3x^2-6x-8}$

(Ruffini)→ x^3+3x^2-6x-8 (Divisores de 8)→ D=$\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\}$

	1	3	-6	-8	Raíz: x=-1; Factor: (x+1)
-1		-1	-2	8	
	1	2	-8	0	
2		2	8		Raíz: x=2; Factor: (x-2)
	1	4	0		
-4		-4			
	1	0			Raíz: x=-4; Factor: (x+4)

→ $\frac{x(x+4)}{x^3+3x^2-6x-8}=\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)(x+4)}=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$

b) $\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x^3+3x^2-6x-8}}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^3+3x^2-6x-8}$

Volvemos a aplicar Ruffini, en este caso, el mismo de antes.

→$\frac{(x+1)(x-1)}{x^3+3x^2-6x-8}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)(x+4)}=\frac{(x-1)}{(x-2)(x+4)}$

c) $\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x^3+x^2-6x}}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+x-6)}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)(x+3)}$

→ $x^2+x-6=0$ → $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=-\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$

→ $-\frac{1+5}{2}=-\frac{6}{2}=-3$ →(x+3)   ;   → $-\frac{1-5}{2}=-\frac{-4}{2}=2$ → (x-2)

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{\boldsymbol{3x^2-6x}}{\boldsymbol{9x^2+15}}=\frac{3x(x-2)}{3(3x^2+5)}=\frac{x(x-2)}{(3x^2+5)}$

b) $\frac{\boldsymbol{a^3-5a^2}}{\boldsymbol{7a^3+4a^2}}=\frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)}=\frac{(a-5)}{(7a+4)}$

c) $\frac{\boldsymbol{x^2y+3xy^2}}{\boldsymbol{4xy}}=\frac{xy(x+3y)}{4xy}=\frac{(x+3y)}{4}$

d) $\frac{\mathbf{2a^2b^2+3ab}}{\mathbf{a^3b-ab}} = \frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)} = \frac{(2ab+3)}{(a+1)(a-1)}$

35) Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{-3x+12}} + \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x^2-4x}} = \frac{5}{-3(x-4)} + \frac{x+2}{x(x-4)} = \frac{5x-3x-6}{-3x(x-4)} = \frac{2x-6}{-3x(x-4)} = \frac{2(x-3)}{-3x(x-4)}$

b) $\frac{\mathbf{-x}}{\mathbf{x^2-2x+1}} - \frac{\mathbf{3x-1}}{\mathbf{x^2-1}} = \frac{-x}{(x-1)^2} - \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x(x+1)-(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} =$

$= \frac{-x^2-x-(3x^2-3x-x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-x^2-x-3x^2+3x+x-1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-4x^2+3x-1}{(x+1)(x-1)^2}$

36) Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x^2+1}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{x}} = \frac{x(2x+1)+4(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{2x^2+x+4x^2+4}{x(x^2+1)} = \frac{6x^2+x+4}{x(x^2+1)}$

b) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x+1}} = \frac{1(x+1)+3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+1+3x-6}{(x-2)(x+1)} = \frac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$

c) $\frac{\mathbf{-x}}{\mathbf{x^2+3x}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}} = \frac{-x\cdot 1}{(x^2+3x)(x-1)} = -\frac{x}{x(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{(x+3)(x-1)}$

d) $\frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x^2+3x}} : \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x+3}} = \frac{(x-2)(x+3)}{x(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, uno de los denominadores, y su respectivo numerador.

a) $\frac{\mathbf{-x^2+x-1}}{\mathbf{x^3}} - \frac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x^2}} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} - \frac{3x^2+2x}{x^3} = \frac{2x^2+3x-1}{x^3}$

b) $\frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x^2+3x}} - \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{x+3}} = \frac{x-2}{x(x+3)} - \frac{8}{x+3} = \frac{1(x-2)-8x}{x(x+3)} = \frac{-7x-2}{x(x+3)}$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad.

a) $\frac{\mathbf{8a^4b^3}}{\mathbf{2a^2b^2}} = \mathbf{4a^2b}$; $\quad (\frac{8a^4}{2a^2} = 4a^2; \quad \frac{b^3}{b^2} = b) \to 4a^2b$ Sí se cumple

b) $\frac{\mathbf{4x^3y^2-3xy^2}}{\mathbf{2xy}} = \mathbf{2x^2y} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$; $\quad (\frac{4x^3y^2}{2xy} = 2x^2y; \quad \frac{3xy^2}{2xy} = \frac{3}{2}y) \to 2x^2y - \frac{3}{2}$ Sí se cumple

c) $\frac{\mathbf{3x^2-9x}}{\mathbf{6x+12}} = \frac{\mathbf{x^2-3x}}{\mathbf{2x+4}} \to \frac{3(x^2-3)}{3(2x+4)}; \frac{x^2-3x}{2x+4}$ Sí se cumple

d) $\frac{\mathbf{6a^2b^2+8a^2b-10ab}}{\mathbf{2ab^2+16a^2b}} = \frac{\mathbf{3ab+4a-5}}{\mathbf{b+8a}} \to \frac{3ab(2a+b)+4(2a+b)-5(2a+b)}{2ab^2+8a(2a)}; \frac{3ab+4a-5}{b+8a}$ Sí se cumple

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{\mathbf{2x-4}}{\mathbf{3x-2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$; $\quad (2x-4)7 = (3x-2)4; 14x - 28 = 12x - 8; 14x - 12x = 28 - 8;$

$2x = 20; \quad x = \frac{20}{2} = 10$

b) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}$ m.c.m = (x+1) (x-1)

$$\left[\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}\right]\cdot(x+1)(x-1)\rightarrow(x+8)(x+1)-(x+4)(x+1)=12x$$

$$x^2+8x+x+8-x^2-x-4x-4=12x$$

$$4x+4=12x;\quad 12x-4x=4;\quad x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=x+\frac{151}{12}$ m.c.m=12

$$\frac{9(6x+1)}{12}-\frac{10x+6}{12}+\frac{48x}{12}+\frac{4x+4}{12}=\frac{12x}{12}+\frac{151}{12}$$

$$54x+9-10x-6+48x+4x+4=12x+151$$

$$54x-10x+48x+4x-12x=-9+6-4+151$$

$$84x=144;\quad x=\frac{144}{84}=\frac{12}{7}$$

40. Resolver:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{9}=1$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{x^2+6x+9}{9}=1\,;\ 9x^2+25(x^2+6x+9)=225$$

$$9x^2+25x^2+150x+225=225\,;\ 9x^2+25x^2+150=0$$

$$34x^2+150x=0\,;\ 2x\,(17x+75)=0\,;\ x(17x+75)=0$$

$$x=0 \qquad x=-\frac{75}{17}$$

b) $\frac{x^2}{16}=1+\frac{\frac{3}{4x}}{9}$

$$\frac{x^2}{16}=1+\frac{\frac{3}{4x}}{9}\,;\qquad \frac{x^2}{16}=1+\frac{x}{12}$$

$$\frac{3x^2}{48}=48+\frac{4x}{48}\,;\ 3x^2=48+4x\,;\ 3x^2-4x-48=0$$

x = -3,389 ; x = 4,722

c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=\frac{151}{12}$

$$\frac{18x+9}{12}-\frac{10x-6}{12}+\frac{48}{12}+\frac{4x+4}{12}=\frac{151}{12}$$

$$18x+9-10x-6x+48x+4x+4=151\,;\ 60x+7=151$$

$$60x=151-7\,;\quad 60x=144\,;\quad x=\frac{144}{60}=\frac{12}{5}$$

d) $80x^4-48x^2-12=0$

$$t=x^2\quad;\quad 80t^2-48t-12=0$$

$$t_1 = \frac{3+2\sqrt{6}}{10} > 0 \quad ; \quad t_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{10} < 0$$

$x_1 = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{6}}{10}} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6}}{10}}$, las otras dos raíces son complejas

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

El número, x

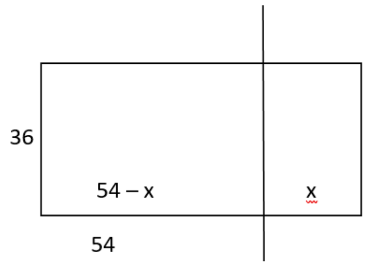
$7 + 2x + \frac{3}{2}x = 6x - 23$

$14 + 4x + 3x = 12x - 46\,;\; 14 + 7x = 12x - 46$

$7x - 12x = -46 - 14\,;\; -5x = -60$

$x = \frac{-60}{-5} = 12$; el número es 12

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y36 metros. Trazar una paralela al lado que mide 36m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54m?



$$\frac{36}{x} = \frac{54}{36} \quad ; \quad x = \frac{36^2}{54} = 24 \qquad 54 - 24 = 30$$

Las longitudes son 24 m y 30 m

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300 000 €. Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso 5 veces más que la finca. ¿Cuánto vale cada cosa?

Precio del Coche: x; Precio de la Finca: y ; Precio del Piso: z

Ecuaciones:

Ec.1: x + y + z = 300 000

Ec.2: y = 4x→ -4x + y = 0

Ec.3: z = 5y→ -5y + z = 0

Operación: 4(Ec.1) + Ec.2 = Ec.2'

(4x + 4y + 4z = 1 200 000) + (-4x + y = 0); (5y + 4z = 1 200 000)

Ecuaciones:

Ec.1': x + y + z = 300 000

Ec.2': 5y + 4z = 1 200 000

Ec.3': 5y - z = 0

Operación: Ec.2'- Ec.3'= Ec.3''

(5y + 4z = 1 200 000) - (5y - z = 0); (5z = 1 200 000)

Ecuaciones:

Ec.1’’: x + y + z = 300 000

Ec.2’’: 5y + 4z = 1 200 000

Ec.3’’: 5z = 1 200 000

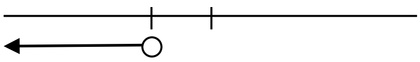
$$z = \frac{1\,200\,000}{5} = 240\,000 \text{ € vale el piso.}$$

Sustituyendo: 5y = z → 5y = 240 000 → y = $\frac{240\,000}{5}$; 48 000 € vale la finca.

Sustituyendo: 4x = y→ 4x = 48 000 → x = $\frac{48\,000}{4}$; 12 000 € vale el coche.

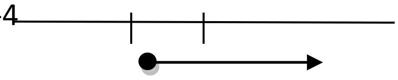
44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) 5 + 3x < 2x + 4 ; 3x - 2x < 4-5 ; x<-1



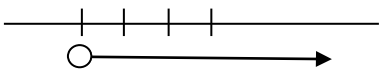
xϵ (-∞, -1)

b) 3 + 4x ≤ 8x + 6 ; 4x - 8x ≤ 6 - 3 ; -4x ≤ 3 ; x ≥ 3/-4



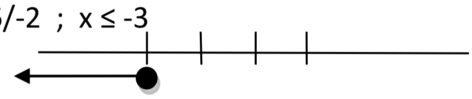
xϵ[-3/4, ∞)

c) 5 + 4x > 3x + 2 ; 4x - 3x > 2 - 5 ; x > -3



xϵ(-3, ∞)

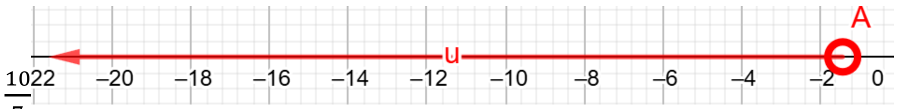
d) 1+3x ≥ 5x + 7 ; 3x - 5x ≥ 7 - 1 ; -2x ≥ 6 ; x ≤ 6/-2 ; x ≤ -3



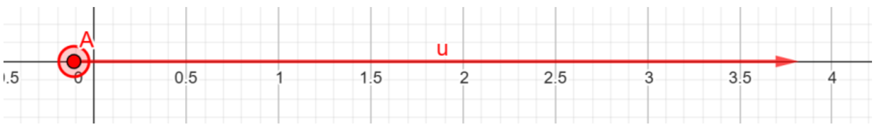
xϵ(-∞,-3]

45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3+2x) < -(6x+8) \rightarrow 12+8x < -6x-8 \rightarrow 12+14x < -8 \rightarrow 14x < -20 \rightarrow x < -\frac{20}{14} = -\frac{10}{7}$

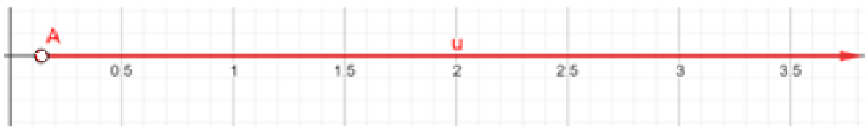


b) $7(2+3x) \leq 5(6x+3) \rightarrow 14+21x \leq 30x+15 \rightarrow 14 \leq 9x+15 \rightarrow -1 \leq 9x \rightarrow x \geq -\frac{1}{9}$



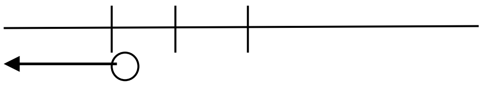
c) $9(2+4x)+4(5x-2) > 3(2x+1) \rightarrow (18+36x)+(20x-8) > 6x+3 \rightarrow$

$$\rightarrow 10+56x > 6x+3 \rightarrow 50x > 7 \rightarrow x > \frac{7}{50}$$



46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

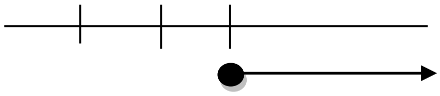
a) $6 + 3x < \frac{x}{3} + 1 \;\rightarrow\; 18 + 9x < x + 3 \;\rightarrow\; 18 + 8x < 3 \;\rightarrow\; 8x < -15 \;\rightarrow\; x < -\frac{15}{8}$



xϵ(-∞, -15/8)

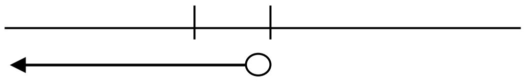
b) $5 + \frac{5x}{2} \leq \frac{9x}{2} + 1 \;\rightarrow\; 2\left(5 + \frac{5x}{2}\right) \leq 2\left(\frac{9x}{2} + 1\right) \;\rightarrow\; 10 + 5x \leq 9x + 2 \;\rightarrow 8 \leq 4x \;\rightarrow\; x \geq \frac{8}{4} = 2$

xϵ[2, ∞)



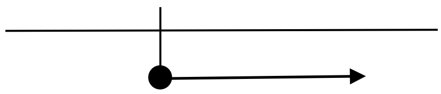
c) $\frac{(2+5x)}{3} > 4x + 1 \;\rightarrow\; 2 + 5x > 12x + 3 \;\rightarrow\; 2 > 7x + 3 \;\rightarrow\; -1 > 7x \;\rightarrow\; x < -\frac{1}{7}$

xϵ(∞, -1/7)



d) $\frac{(1+5x)}{2} + 1 \geq \frac{(3x+6)}{4} \;\rightarrow\; 2(1 + 5x) + 4 \geq 3x + 6 \;\rightarrow\; 2 + 10x + 4 \geq 3x + 6 \;\rightarrow$

$\rightarrow 6 + 10x \geq 3x + 6 \;\rightarrow\rightarrow\; 6 + 7x \geq 6 \;\rightarrow\; 7x \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 0$



xϵ[0, ∞)

47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) [2, ∞) ; x ≥ 2 x-2 ≥ 2-x ; x+x ≥ 2+2 ; 2x ≥ 4 ; x ≥ 4/2 ; x ≥ 2

b) (-∞, 3) ; x < 3 x-5 < -2x+4 ; x+2x < 5+4 ; 3x < 9 ; x < 9/3 ; x < 3

c) (4, ∞) ; x > 4 x-6 > -3x+10 ; x+3x > 10+6 ; 4x > 16 ; x > 16/4 ; x > 4

d) (-∞, 2) ; x < 2 2x-8 < -3x+2 ; 2x+3x < 2+8 ; 5x < 10 ; x < 10/5 ; x < 2

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3} \;\rightarrow\; 2x - 3 \geq 0 \;\rightarrow\; 2x \geq 3 \;\rightarrow\; x \geq \frac{3}{2}$; x ϵ [3/2, ∞)

b) $\sqrt{-x-9} \;\rightarrow\; -x - 9 \geq 0 \;\rightarrow\; -x \geq 9 \;\rightarrow\; x \leq -9$; xϵ(-∞, -9]

c) $\sqrt{2-7x} \;\rightarrow\; 2 - 7x \geq 0 \;\rightarrow\; -7x \geq -2 \;\rightarrow\; 7x \leq 2 \;\rightarrow\; x \leq \frac{2}{7}$; x ϵ (-∞, 2/7]

d) $\sqrt{-2x+7} \;\rightarrow\; -2x + 7 \geq 0 \;\rightarrow\; -2x \geq -7 \;\rightarrow\; x \leq \frac{7}{2}$; x ϵ (-∞, 7/2]

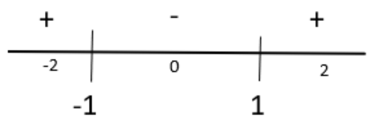
49. Resuelve las inecuaciones de segundo grado:

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{x^2 - 1 \geq 0} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x_1 = 1 \,;\; x_2 = -1$

$x = -2 \rightarrow (-2)^2 - 1 = 3$

$x = 0 \rightarrow 0^2 - 1 = -1$

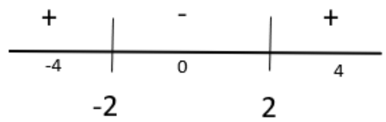
$x = 2 \rightarrow 2^2 - 1 = 3$



Solución: $(-\infty,-1]U[1,\infty)$

$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{x^2-4\leq 0} \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\sqrt{4} \rightarrow x_1=2\,;\ x_2=-2$

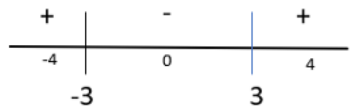
$$x=-4 \rightarrow (-4)^2-4=12$$
$$x=0 \rightarrow 0^2-4=-4$$
$$x=4 \rightarrow 4^2-4=12$$



Solución: $[-2,2]$

$\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{x^2-9>0} \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\sqrt{9} \rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=-3$

$x=-4 \rightarrow (-4)^2-9=7$
$x=0 \rightarrow 0^2-9=-9$
$x=4 \rightarrow 4^2-9=7$



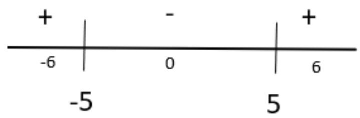
Solución: $(-\infty,-3)U(3,\infty)$

$\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{x^2+4\geq 0} \rightarrow x^2=-4 \rightarrow x=\sqrt{-4}$

Solución: *todos los números reales*

$\boldsymbol{e})\ \boldsymbol{2x^2-50<0} \rightarrow 2x^2=50 \rightarrow x^2=\frac{50}{2} \rightarrow x=\sqrt{25} \rightarrow x_1=5\,;\quad x_2=-5$

$x=-6 \rightarrow 2(-6)^2-50=22$
$x=0 \rightarrow 2\cdot 0^2-50=-50$
$x=6 \rightarrow 2(6^2)-50=22$



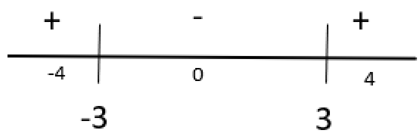
Solución: $(-5,5)$

$\boldsymbol{f})\ \boldsymbol{3x^2+12\leq 0} \rightarrow 3x^2=-12 \rightarrow x^2=\frac{-12}{3} \rightarrow x=\sqrt{-4}$

Solución: *ningún número real*

$\boldsymbol{g})\ \boldsymbol{5x^2-45>0} \rightarrow 5x^2=45 \rightarrow x^2=\frac{45}{5} \rightarrow x=\sqrt{9} \rightarrow x_1=3\ ;\ x_2=-3$

$x=-4 \rightarrow 5(-4)^2-45=35$
$x=0 \rightarrow 5\cdot 0^2-45=-45$
$x=4 \rightarrow 5\cdot(4)^2-45=35$



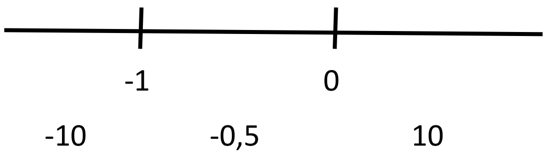
$Solución: (-\infty, -3)U(3, \infty)$

$\boldsymbol{h)x^2 + 1 \geq 0} \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$

Solución: todos los números reales

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\boldsymbol{x^2 + x \leq 0}$ $\quad x^2 + x = 0 \ ; \ \ x = 0 \ ; \ \ x = -1$



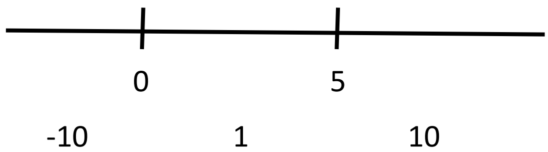
$(-10)^2 + (-10) > 0$

$(-0{,}5)^2 + (-0{,}5) < 0$

$(10)^2 + (10) > 0$

Solución: [-1 , 0]

b) $\boldsymbol{x^2 - 5x > 0}$ $\quad x^2 - 5x = 0 \ ; \ \ x = 0 \ , \ \ x = 5$



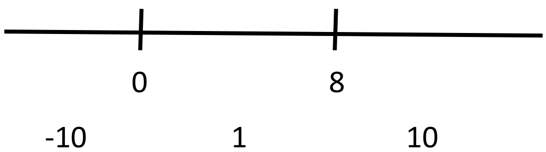
$(-10)^2 - 5(-10) > 0$

$(1)^2 - 5(1) < 0$

$(10)^2 - 5(10) > 0$

Solución: (-∞ , 0) ∪ (5 , ∞)

c) $\boldsymbol{x^2 \leq 8x}$ $\quad \boldsymbol{x^2 - 8x \leq 0}$ $\quad \boldsymbol{;}$ $\quad x^2 - 8x = 0 \ ; \ \ x = 0 \ , \ \ x = 8$



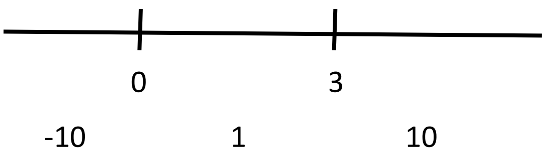
$(-10)^2 - 8(-10) > 0$

$(1)^2 - 8(1) < 0$

$(10)^2 - 8(10) > 0$

Solución: [0 , 8]

d) $\boldsymbol{x^2 \leq 3x}$ $\quad \boldsymbol{x^2 - 3x \leq 0}$ $\quad x^2 - 3x = 0 \ ; \ \ x = 0 \ , \ \ x = 3$



$(-10)^2 - 3(-10) > 0$

$(1)^2 - 3(1) < 0$

$(10)^2 - 3(10) > 0$

Solución: [0 , 3]

e) $\mathbf{2x^2 - 3x > 0}$ $\qquad 2x^2 - 3x = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad x = \frac{3}{2}$

0 $\qquad \frac{3}{2}$

-10 $\qquad$ 1 $\qquad$ 10

$2(-10)^2 - 3(-10) > 0$

$2(1)^2 - 3(1) < 0$

$2(10)^2 - 3(10) > 0$

Solución: $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

f) $\mathbf{5x^2 - 10x < 0}$ $\qquad 5x^2 - 10x = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad x = 2$

0 $\qquad$ 2

-10 $\qquad$ 1 $\qquad$ 10

$5(-10)^2 - 10(-10) > 0$

$5(1)^2 - 10(1) < 0$

$5(10)^2 - 10(10) > 0$

Solución: (0 , 2)

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{x^2 - 2x - 3 \leq 0}$ $\qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad ; \quad x = -1 \quad , \quad x = 3$

-1 $\qquad$ 3

-10 $\qquad$ 1 $\qquad$ 10

$(-10)^2 - 2(-10) - 3 > 0$

$(1)^2 - 2(1) - 3 < 0$

$(10)^2 - 2(10) - 3 > 0$

Solución: [-1 , 3]

b) $\mathbf{-x^2 - 2x - 3 \geq 0}$ $\qquad -x^2 - 2x - 3 = 0$ no tienes raíces reales

$(-0)^2 - 2(-0) - 3 < 0$ nunca es > 0

c) $\mathbf{x^2 + 9x + 14 > 0}$ $\qquad x^2 + 9x + 14 = 0 \quad ; \quad x = -2 \quad , \quad x = -7$

-7 $\qquad$ -3

-10 $\qquad$ -5 $\qquad$ 0

$(-10)^2 + 9(-10) + 14 > 0$

$(-5)^2 + 9(-5) + 14 < 0$

$(0)^2 + 9(0) + 14 > 0$

Solución: [-7 , -3]

d) $\mathbf{x^2 - 6x + 9 \leq 0}$ *;* $x^2 - 6x + 9 = 0 \quad ; \quad x = 3 \;\; doble \qquad (x-3)^2 \leq 0$ *siempre es > 0*

Solución: x = 3

e) $\mathbf{-x^2 - 4x - 5 < 0}$ *;* $-x^2 - 4x - 5 = 0$, *no tiene raíces reales, siempre es < 0*

Solución: $\mathscr{R}$

f) $\boldsymbol{x^2+8x+16>0}$; $x^2+8x+16=0$, $x=-4\ doble$, $(x+4)^2>0$ *siempre, salvo en x = -4*

Solución: $\mathscr{R}$ - {-4}

g) $\boldsymbol{x^2+x+3\geq 0}$; $x^2+x+3=0$ no tiene raíces reales, siempre es > 0

Solución: $\mathscr{R}$

h) $\boldsymbol{2x^2-3x-5\leq 0}$; $2x^2-3x-5=0$; $x=-1$, $x=\frac{5}{2}$

-1 $\frac{5}{2}$

-10 0 10

$2(-10)^2-3(-10)-5>0$

$2(0)^2-3(0)-5<0$

$2(10)^2-3(10)-5>0$

Solución: [-1 , $\frac{5}{2}$]

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\boldsymbol{x^2+x-6>0}$; $x^2+x-6=0$; $x=-3$, $x=2$

-3 2

-10 0 10

$(-10)^2+(-10)-6>0$

$(0)^2+(0)-6<0$

$(10)^2+(10)-6>0$

Solución: (-∞ , -3) ∪ (2 , ∞)

b) $\boldsymbol{x^2-x-12\leq 0}$; $x^2-x-12=0$; $x=-3$, $x=4$

-3 4

-10 0 10

$(-10)^2-(-10)-12>0$

$(0)^2-(0)-12<0$

$(10)^2-(10)-12>0$

Solución: [-3 , 4]

c) $\boldsymbol{x^2-x-20<0}$; $x^2-x-20=0$; $x=-4$, $x=5$

-4 5

-10 0 10

$(-10)^2-(-10)-20>0$

$(0)^2-(0)-20<0$

$(10)^2-(10)-20>0$

Solución: (-4 , 5)

d) $\boldsymbol{x^2+5x-14\geq 0}$; $x^2+5x-14=0$; $x=-7$, $x=2$

-7 2

-10 0 10

$(-10)^2+5(-10)-14>0$

$(0)^2+5(0)-14<0$

$(10)^2+5(10)-14>0$

Solución: (-∞ , -7] ∪ [2 , ∞)

e) $\mathbf{-2x^2+3x+2>0}$; $-2x^2+3x+2=0$; $x=-0{,}5$; $x=2$

-0,5 2

-10 0 10

$-2(-10)^2+3(-10)+2<0$

$-2(0)^2+3(0)+2>0$

$-2(10)^2+3(10)+2<0$

Solución: (-0,5, 2)

f) $\mathbf{3x^2+2x-1\leq 0}$; $3x^2+2x-1=0$; $x=-1$, $x=\frac{1}{3}$

-1 $\frac{1}{3}$

-10 0 10

$3(-10)^2+2(-10)-1>0$

$3(0)^2+2(0)-1<0$

$3(10)^2+2(10)-1>0$

Solución: [-1 , $\frac{1}{3}$]

g) $\mathbf{5x^2-7x-6\geq 0}$; $5x^2-7x-6=0$; $x=-0{,}6$, $x=2$

-0,6 2

-10 0 10

$5(-10)^2-7(-10)-6>0$

$5(0)^2-7(0)-6<0$

$5(10)^2-7(10)-6>0$

Solución: (-∞ , -0,6] ∪ [2 , ∞)

h) $\mathbf{2x^2+x-15<0}$; $2x^2+x-15=0$; $x=-3$, $x=2{,}5$

-3 2,5

-10 0 10

$2(-10)^2+(-10)-15>0$

$2(0)^2+(0)-15<0$

$2(10)^2+(10)-15>0$

Solución: (-3 , 2,5)

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{x^2-1}}$; $x^2-1\geq 0$; $x^2-1=0$; $x=-1$, $x=1$

-1 **1**

-10 0 10

$(-10)^2-1>0$

$(0)^2-1<0$

$(10)^2-1>0$

Solución: [-1 , 1]

b) $\sqrt{\mathbf{-x^2+4}}$ $-x^2+4\geq 0$ $-x^2+4=0$; $x=-2$, $x=2$

-2 **2**

-10 0 10

$-(-10)^2+4<0$

$-(0)^2+4>0$

$-(10)^2+4<0$

Solución: [-2 , 2]

c) $\sqrt{\boldsymbol{x^2+5x+6}}$; $x^2+5x+6 \geq 0$; $x^2+5x+6=0$; $x=-2$, $x=-3$

-3 **-2**

-10 -2,5 10

$(-10)^2+5(-10)+6>0$

$(-2{,}5)^2+5(-2{,}5)+6<0$

$(10)^2+5(10)+6>0$

Solución: (-∞ , -3] ∪ [-2, ∞)

d) $\sqrt{\boldsymbol{x^2-5x+6}}$; $x^2-5x+6 \geq 0$; $x^2-5x+6=0$; $x=1$; $x=6$

2 **3**

-10 2,5 10

$(-10)^2-5(-10)+6>0$

$(2{,}5)^2-5(2{,}5)+6<0$

$(10)^2-5(10)+6>0$

Solución: (-∞ , 2] ∪ [3 , ∞)

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\boldsymbol{(2x+5)(2x-5) \leq 11}$

$(2x+5)(2x-5) \leq 11$; $4x^2-25 \leq 11$; $4x^2-25-11 \leq 0$; $4x^2-36 \leq 0$;

$\boldsymbol{x^2-9 \leq 0}$; $x=-3$, $x=3$

-3 3

-10 0 10

$(-10)^2-9>0$

$(0)^2-9<0$

$(10)^2-9>0$

Solución: [-3 , 3]

b) $\boldsymbol{(2x-5)(4x-3)-(x-10)(x-2) \geq 50}$

$8x^2-6x-20x+15-x^2+2x-10x+20 \geq 50$; $7x^2-34x+35 \geq 50$

$7x^2-34x+35-50 \geq 0$; $\boldsymbol{7x^2-34x-15 \geq 0}$; $x=\frac{17+\sqrt{394}}{7} \approx 5{,}26$; $x=\frac{17-\sqrt{394}}{7} \approx -0{,}4$

-0,4 **5,26**

-10 0 10

$7(-10)^2-34(-10)-15>0$

$7(0)^2-34(0)-15<0$

$7(10)^2-34(10)-15>0$

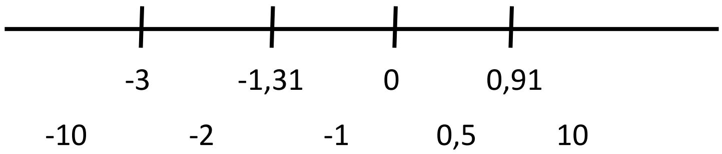
Solución: (-∞ , $\frac{17-\sqrt{394}}{7}$] ∪ [$\frac{17+\sqrt{394}}{7}$, ∞)

c) $\boldsymbol{\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}}$; $\boldsymbol{\frac{3x-2}{x}-\frac{5-2x}{x+3} \leq 0}$

$\boldsymbol{\frac{(3x-2)\cdot(x+3)-(5-2x)\cdot x}{x\cdot(x+3)} \leq 0}$; $\boldsymbol{\frac{3x^2+9x-2x-6-5x+2x^2}{x\cdot(x+3)} \leq 0}$; $\boldsymbol{\frac{5x^2+2x-6}{x\cdot(x+3)} \leq 0}$

$x\cdot(x+3)=0$, $x=0$, $x=-3$;

$$5x^2+2x-6=0 \quad ; \quad x=\frac{-1+\sqrt{31}}{5}\approx 0{,}91 \; ; \quad x=\frac{-1-\sqrt{31}}{5}\approx -1{,}31$$



$$\frac{5(-10)^2+2(-10)-6}{(-10)\cdot(-10+3)}>0$$

$$\frac{5(-2)^2+2(-2)-6}{(-2)\cdot(-2+3)}<0$$

$$\frac{5(-1)^2+2(-1)-6}{(-1)\cdot(-1+3)}>0$$

$$\frac{5(0{,}5)^2+2(0{,}5)-6}{(0{,}5)\cdot(0{,}5+3)}<0$$

$$\frac{5(10)^2+2(10)-6}{(10)\cdot(10+3)}>0$$

Solución: (-3 , $\frac{-1-\sqrt{31}}{5}$] ∪ (0 , $\frac{-1+\sqrt{31}}{5}$]

3. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11)=0}$

$$x-7=0\Rightarrow x=7$$
$$x-2=0\Rightarrow x=2$$
$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$
$$x-3=0\Rightarrow x=3$$
$$x-11=0\Rightarrow x=11$$

b) $\boldsymbol{3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0}$

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$
$$x-7=0\Rightarrow x=7$$
$$x+2=0\Rightarrow x=-2$$
$$x-3=0\Rightarrow x=3$$
$$x-4=0\Rightarrow x=4$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $\boldsymbol{x^4-3x^2+2=0} \rightarrow t^2-3t+2=0 \rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \rightarrow t_1=2\,,\ t_2=1 \rightarrow$

$\rightarrow x=\sqrt{2}\ ,\ x=-\sqrt{2}\ ,\ x=1\ ,\ x=-1$

b) $\boldsymbol{x^4+12x^2+35=0} \rightarrow t^2+12t+35=0 \rightarrow t=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4(35)}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-12\pm2}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=-5\ ,\ t_2=-7$, no tiene soluciones reales

c) $\boldsymbol{x^4-4x^2-12=0} \rightarrow t^2-4t-12=0 \rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(-12)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{4\pm8}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=6\ ,\ t_2=-2\ ;\ x=\sqrt{6}\ ,\ x=-\sqrt{6}$ y dos raíces complejas

3. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $\boldsymbol{x^4-13x^2+36=0} \rightarrow t^2-13t+36=0 \rightarrow t=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4(36)}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=9\ ,\ t_2=4\ ;\ x=3\ ,\ x=-3\ ,\ x=2\ ,\ x=-2$

b) $\boldsymbol{x^4-29x^2+100=0} \rightarrow t^2-29t+100=0 \rightarrow t=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4(100)}}{2}=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{29\pm21}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=25 \;,\; t_2=4 \quad ; \qquad x=5 \;,\; x=-5 \;,\; x=2 \;,\; x=-2$

c) $\boldsymbol{x^4-10x^2+9=0} \rightarrow t^2-10t+9=0 \rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4(9)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=9 \;,\; t_2=1 \quad ; \qquad x=-3 \;,\; x=-3 \;,\; x=-1 \;,\; x=1$

d) $\boldsymbol{x^4-26x^2+25=0} \rightarrow t^2-26t+25=0 \rightarrow t=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4(25)}}{2}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{26\pm24}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=25 \;,\; t_2=1 \quad ; \qquad x=-5 \;,\; x=5 \;,\; x=-1 \;,\; x=1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\boldsymbol{\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0} \rightarrow \frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}=0 \rightarrow \frac{1}{x(x-1)}-\frac{x}{x(x-1)}=0 \rightarrow \frac{1-x}{x(x-1)}=0 \rightarrow \frac{-1}{x}=0$

No tiene solución.

b) $\boldsymbol{\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x^2-8x+12}} \rightarrow \frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{(x-6)(x-2)} \rightarrow \frac{x-2}{(x-6)(x-2)}+\frac{x(x-6)}{(x-6)(x-2)}=\frac{4}{(x-6)(x-2)} \rightarrow$

$\rightarrow x-2+x(x-6)=4 \rightarrow x-2+x^2-6x=4 \rightarrow x^2-5x-2=4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-5x-6=0 \rightarrow x=6 \;,\; x=-1$

c) $\boldsymbol{\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}} \rightarrow \frac{18}{6x}=\frac{6x}{6x}+\frac{x(x-13)}{6x} \rightarrow 18=6x+x(x-13) \rightarrow x^2-13x+6x-18=0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-7x-18=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(-18)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{7\pm11}{2} \rightarrow \quad x_1=9 \;,\; x_2=-2$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\boldsymbol{\sqrt{5x+4}-1=2x} \rightarrow \left(\sqrt{5x+4}\right)^2=(2x+1)^2 \rightarrow 5x+4=4x^2+4x+1 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2-x-3=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4(4)(-3)}}{2(4)}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{1\pm7}{8} \rightarrow x_1=1 \;,\quad x_2=-\frac{3}{4}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}} \rightarrow \left(\sqrt{x+19}\right)^2=\left(\sqrt{2x+4}-1\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x+19=(2x+4)-2\sqrt{2x+4}+1 \rightarrow x+19=2x+5-2\sqrt{2x+4} \rightarrow$

$\rightarrow x+19-2x-5=-2\sqrt{2x+4} \rightarrow -x+14=-2\sqrt{2x+4} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{-x+14}{-2}=\sqrt{2x+4} \rightarrow \frac{x-14}{2}=\sqrt{2x+4} \rightarrow \left(\frac{x-14}{2}\right)^2=2x+4 \rightarrow \frac{(x-14)^2}{4}=2x+4 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x^2-28x+196}{4}=2x+4 \rightarrow x^2-28x+196=8x+16 \rightarrow x^2-36x+180=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4(180)}}{2}=\frac{36\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{36\pm24}{2} \rightarrow x_1=30 \;,\; x_2=6$

c) $\boldsymbol{3\sqrt{x-1}+11=2x} \rightarrow 3\sqrt{x-1}=2x-11 \rightarrow \sqrt{x-1}=\frac{2x-11}{3} \rightarrow$

$$\to \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\frac{2x-11}{3}\right)^2 \to x-1 = \frac{(2x-11)^2}{9} \to x-1 = \frac{4x^2-44x+121}{9} \to$$

$$\to 9x-9 = 4x^2-44x+121 \to 4x^2-53x+130=0 \to$$

$$\to x = \frac{53 \pm \sqrt{53^2-4(4)(130)}}{2(4)} = \frac{53 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{53 \pm 27}{8} \to x_1 = 10 \ , \ x_2 = \frac{13}{4}$$

6. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0} \to$

$$\to x=9\ ;\ x=1\ ;\ x=-24\ ;\ x=5\ ;\ x=3$$

b) $\boldsymbol{3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0} \to$

$$\to x=5\ ;\ x=9\ ;\ x=-2\ ;\ x=1\ ;\ x=4$$

7. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $\boldsymbol{x^4+5x^2-36=0} \to t^2+5t-36=0 \to t = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-36)}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{169}}{2} = \frac{-5\pm13}{2} \to$

$$\to t_1 = 4\ ,\ t_2 = -9 \to \quad x = \pm\sqrt{4}\ ;\quad x=-2\ ,\ x=2$$

b) $\boldsymbol{x^4-21x^2+12100=0} \to t^2-21t+12100 \to t = \frac{21\pm\sqrt{21^2-4(12100)}}{2} = \frac{21\pm\sqrt{-47959}}{2}$

No tiene solución real

c) $\boldsymbol{x^4-45x^2+234=0} \to t^2-45t+234=0 \to t = \frac{45\pm\sqrt{45^2-4(234)}}{2} = \frac{45\pm\sqrt{1089}}{2} = \frac{45\pm33}{2} \to$

$$\to t_1 = 39\ ,\ t_2 = 6 \to x = \pm\sqrt{39}\ ,\ \ x=\pm\sqrt{6}$$

d) $\boldsymbol{x^4-37x^2+36=0} \to t^2-37t+36=0 \to t = \frac{37\pm\sqrt{37^2-4(36)}}{2} = \frac{37\pm\sqrt{1225}}{2} = \frac{37\pm35}{2} \to$

$$\to t_1 = 36\ ,\ t_2 = 1 \to x = \pm\sqrt{36} = \pm6\ ,\quad x = \pm\sqrt{1} = \pm1$$

8. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\boldsymbol{\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2} \to \frac{9x-1}{3x} = \frac{3}{x} - 2 \to \frac{9x-1}{3x} = \frac{3\cdot3}{3x} - \frac{2\cdot3x}{3x} \to 9x-1 = 9-6x \to$

$$\to 9x+6x = 9+1 \to 15x = 10 \to x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}} \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + 1 - \frac{1}{3} = 0 \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3} = 0 \to$

$$\to \frac{3(x-2)}{3x(x-2)} - \frac{3x}{3x(x-2)} + \frac{2x(x-2)}{3x(x-2)} = 0 \to 3(x-2) - 3x + 2x(x-2) = 0 \to$$

$$\to 3x-6-3x+2x^2-4x = 0 \to 2x^2-4x-6=0 \to x^2-2x-3=0 \to$$

$$\to (x-3)(x+1) = 0 \to x=3 \quad x=-1$$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}} \to \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{4}{3} \to \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \frac{4}{3} \to \frac{2x}{x^2-1} = \frac{4}{3} \to$

$$\to 3\cdot 2x = 4(x^2-1) \to 6x = 4x^2-4 \to 2x^2-3x-2=0 \to$$

$$\to x = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{3\pm5}{4} \to x_1 = 2\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1 \rightarrow \frac{2x-3+1}{x}=1 \rightarrow \frac{2x-2}{x}=1 \rightarrow 2x-2=x \rightarrow 2x-x=2 \rightarrow x=2$

9. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5+\sqrt{x-1}= x+2 \rightarrow \sqrt{x-1}= x+2-5 \rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x-1=x^2-6x+9 \rightarrow x^2-7x+10=0 \rightarrow (x-5)(x-2)=0 \rightarrow x=2\ ,\ \ x=5$

b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1 \rightarrow 4\sqrt{x-2}=x+1 \rightarrow \sqrt{x-2} = \frac{x+1}{4} \rightarrow x-2=\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x-2=\frac{(x+1)^2}{16} \rightarrow 16x-32= x^2+2x+1 \rightarrow x^2-14x+33=0 \rightarrow$

$\rightarrow (x-11)(x-3)=0 \rightarrow\rightarrow x=11\ ,\ \ x=3$

c) $\sqrt{x-4}=x-1 \rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2=(x-1)^2 \rightarrow x-4=x^2-2x+1 \rightarrow x^2-3x+5 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(5)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$ *No tiene solución real*

d) $7+\sqrt{x+4}=x+9 \rightarrow \sqrt{x+4}= x+2 \rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2=(x+2)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x+4=x^2+4x+4 \rightarrow x^2+3x \rightarrow x(x+3)=0 \rightarrow x=0\ \ ,\ x=-3$

10. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625} \rightarrow 5^{3x} = \frac{1}{5^4} \rightarrow 5^{3x} = 5^{-4} \rightarrow 3x=-4 \rightarrow x=-\frac{4}{3}$

b) $2^{2x}\cdot 4^x = \frac{1}{16} \rightarrow 2^{2x}\cdot 2^{2x}=\frac{1}{2^4} \rightarrow 2^{4x} = 2^{-4} \rightarrow 4x=-4 \rightarrow x=-\frac{4}{4}=-1$

c) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3} = 8 \rightarrow 2^{x+5+x+4+x+3}=8 \rightarrow 2^{3x+12} = 2^3 \rightarrow 3x+12=3 \rightarrow$

$\rightarrow 3x=-9 \rightarrow x=\frac{-9}{3}= -3$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES

57. Resolver por el método de Gauss los sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ *E2-E3* $\begin{cases} 5x-3y+z=3 \\ -2x+y-z=-3 \end{cases} \rightarrow 3x-2y=0$

E1 + E2 $\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \end{cases} \rightarrow 9x-y=8$ *nos queda*

$\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 9x-y=8 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$ *-2E2 + E3* $\begin{cases} -18x+2y=-16 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \rightarrow -15x=-16$ *nos queda*

$\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 9x-y=8 \\ -15x=-16 \end{cases}$ *x=16/15* ; $9\frac{16}{15}-y=8$ *; y = 8/5 ;* $4\frac{16}{15}+2\frac{8}{5}-z=5;\ z=\frac{37}{15}$

RESULTADOS: x=16/15 y = 8/5 Z= 37/15

b) x + y + z = 0 *4E2 + E3:* *E1 + E2:*

7x + 2y – z = 0 *28x + 8y – 4z = 0* *x + y + z = 0*

3x+ 5y + 4z = 0 *3x + 5y + 4z = 0 ; 31x + 13 y = 0 ;* *7x + 2y – z = 0 ; 8x + 3y = 0*

x + y + z = 0 *13E2 – 3E3:*

8x + 3y = 0 *104x + 39 y =0*

31x + 13y = 0 *- 93x – 39 y = 0* *; 11x=0* *x= 0*

Sustituyo x en E2

8 · 0 + 3y = 0 *0+ 3y = 0* *y= 0*

x + y + z = 0 *0 + 0 + z = 0* *z=0*

RESULTADOS: x=0 y=0 z=0

58. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema

x + 2y – z = 1 2E1- E2

2x + y - 2z =2 2x + 4y – 2 z = 2

x – y – z = 1 -2x –y + 2 z = -z ; 3y = 0

x + 2y – z =1

3y = 0 y = 0

x – y – z = 1 sustituyo y

x – z = 1

x – z = 1

(como las 2 ecuaciones son las mismas, tengo que elegir un parámetro para una de las incógnitas)

RESULTADO x = 1 +λ , y=0 , z= λ

Sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones

59. Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema

a) $$\begin{cases} \boldsymbol{x - 6y - 4z = -7} \\ \boldsymbol{x + 8y + 4z = 6} \\ \boldsymbol{x + y = 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} \to \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = E1 + E2 \\ E3' = E3 \end{matrix} \to \begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ 2x + 2y + \quad = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{matrix} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = E3' - 2E2' \end{matrix} \to \begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ 2x + 2y + \quad = -1 \\ 0 = -3 \end{cases} \to$$

ES UN SISTEMA INCOMPATIBLE es decir NO TIENE SOLUCION

b) $$\begin{cases} \boldsymbol{x + y - 6z - 4t = 6} \\ \boldsymbol{3x + 2y - 3z + 8t = -7} \\ \boldsymbol{3x - y - 6z - 4t = 2} \\ \boldsymbol{4x - y + 3z + 12t = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x+2y-3z+8t=-7 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 4x-y+3z+12t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1'=E1 \\ E2'=-3E1+E2 \\ E3'=-3E1+E3 \\ E4'=-4E1+E4 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ -y+15z+20t=-25 \\ -4y+12z+8t=-12 \\ -5y+27z+28t=-24 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} E1''=E1' \\ E2''=E2' \\ E3''=-4E2'+E3' \\ E4''=-5E2'+E4' \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ -y+15z+20t=-25 \\ -48z-72t=88 \\ -48z-72t=101 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1'''=E1'' \\ E2'''=E2'' \\ E3'''=E3'' \\ E4'''=-E3''+E4'' \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ -y+18z+20t=-25 \\ -48z-72t=88 \\ 0 \quad =13 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

60. Compramos 8kg de café natural y 5kg de café torrefacto, pagando 66€. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5€.

1er PASO: organizar los datos

Sea x el precio por kilo del café natural y tenemos 8 kilos: 8x

Sea y el precio por kilo del café torrefacto y tenemos 5 kilos: 5y

$$8x + 5y = 66€$$

Si mezclamos la mitad de cada kilo , el kilo seria 5€, es decir, que la suma de la mitad de cada precio del café debe darnos 5 €

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=5$$

Simplificamos la ecuación multiplicando todo por 2:

$$x+y=10$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, para ello, aplicaremos el método de reducción:

$$8x+5y=66$$
$$x+y=10$$

Para resolverlo, multiplicaremos la segunda ecuación por -5

$$8x+5y=66$$
$$-5x-5y=-50 \quad \text{Sumamos las ecuaciones}$$
$$3x=16$$
$$x=\frac{16}{3} \quad , \quad x=5{,}33$$

Sustituimos el valor de la x en la primera ecuación:

$$8(5{,}33)+5y=66$$
$$5y=66-42{,}64=23{,}36$$
$$y=\frac{23{,}36}{5}=4{,}67$$

El precio del kilo del café natural es de 5,33€/kg y el precio del café torrefacto es de 4,67€/kg

61. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

La edad del hijo menor es a

La edad del hijo mayor es 2a

Madre: 2(a+2a)

Lo siguiente que debemos hacer es sumar las edades de los niños y de la madre, entonces el resultado será 45

a + 2a + 2(a+2a) = 45 ; a + 2a + 2a + 4a = 45 ; 9a = 45 ; a = 5

Solución: la edad del hijo menor es 5 años

-La edad del hermano es de: 2·5 = 10 años

-La edad de la madre: 2(5+2·5) = 10 + 20 = 30 años

62. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300.000€. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

Primero, debemos organizar los datos:

Sea el precio del coche: x ; el precio de la finca: 4x ; el precio del piso: 5(4x)

La suma de las tres cosas es igual a 300 000€, por lo que debemos sumar todos los datos:

$x + 4x + 20x = 300\,000$; $25x = 300\,000$; $x = 12\,000$

Por lo tanto, el coche vale 12 000€

La finca: 4 · 12 000 = 48 000€

El piso: 20 · 12 000= 240 000€

El coche vale 12000€, la finca cuesta 48000€, el piso cuesta 240000€

63. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

El número es abc

La primera condición afirma que:

$$a + b + c = 18$$

La segunda afirma que:

$$abc - cba = 594$$

La tercera afirma que:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

La segunda condición significa que :

$(100\,a + 10\,b + c) - (100c + 10\,b + a) = 594$

$100a - 100c + c - a = 594$; $100(a - c) + (c - a) = 594$

$-100(-a + c) + (c - a) = 594$

$(c - a)(1 - 100) = 594$; $(c - a)(-99) = 594$

$c - a = \frac{-594}{99}$; $c - a = -6$; $c = a - 6$

Si $b = \frac{a+c}{2} \Longrightarrow 2b = a + c$

Como $c = a - 6 \Longrightarrow 2b = a + (a - 6) \Longrightarrow b = a - 3$

Ahora sustituimos en la primera ecuación:

$a + b + c = 18$; $a + (a - 3) + (a - 6) = 18$; $3a - 9 = 18$; $a = \frac{27}{3} = 9$

Teniendo la a podemos despejar la b y la c:

$b = a - 3 \quad ; \quad b = 9 - 3 = 6$

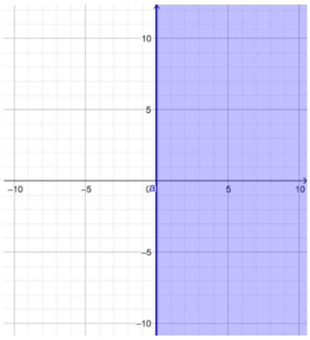
$c = a - 6 \quad ; \quad c = 9 - 6 = 3$

abc = 963

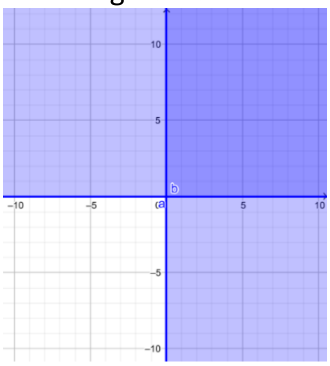
64. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x \geq 0} \\ \boldsymbol{y \geq 0} \\ \boldsymbol{6x + 5y \leq 30} \\ \boldsymbol{x + 2y \leq 8} \end{gathered}$$

La representación de $x \geq 0$ en la gráfica es la siguiente:



Junto a la representación de $y \geq 0$ es la siguiente:



Esto quiere decir que la inecuación es factible en el primer cuadrante

A continuación, vamos a representar la inecuación $6x + 5y \leq 30$, para ello dibujamos la recta:

$6x + 5y = 30$,

-Si x = 0: $6 \cdot 0 + 5y = 30 \quad ; \quad 5y = 30 \quad ; \quad y = 6$

Esto sería el punto (0,6)

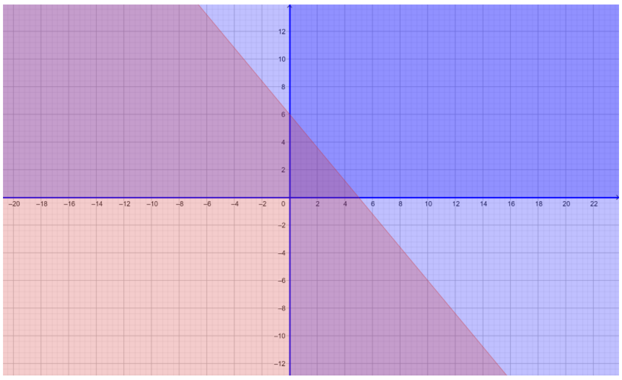
-Si y = 0: $6x + 5 \cdot 0 = 30 \quad ; \quad 6x = 30 \quad ; \quad x = 5$

Esto sería el punto (5,0)

-Seguidamente, vemos si (0, 0) verifica la inecuación:

$$0 \leq 30$$

Esta se verifica, por lo que la región factible de esta inecuación va se sitúa por debajo de la recta



Ahora vamos a representar la inecuación $x + 2y \leq 8$; Consideramos $x + 2y = 8$

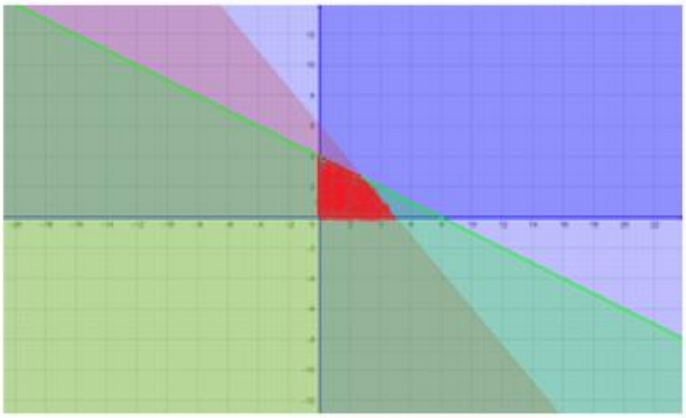
-Si x = 0 ; $0 + 2y = 8$; $y = 4$

Este sería el punto (0,4)

-Si y = 0 ; $x + 0 = 8$; $x = 8$

Este sería el punto (8,0)

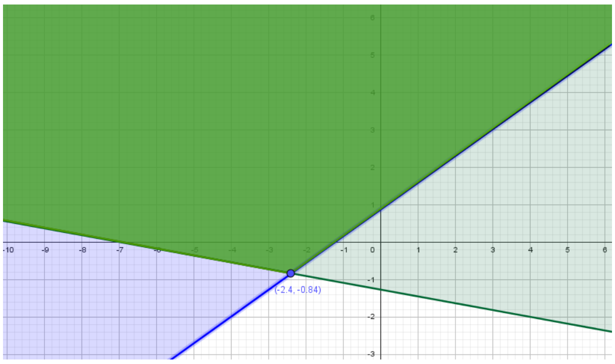
-Seguidamente comprobamos si (0, 0) verifica la inecuación: $0 \leq 8$



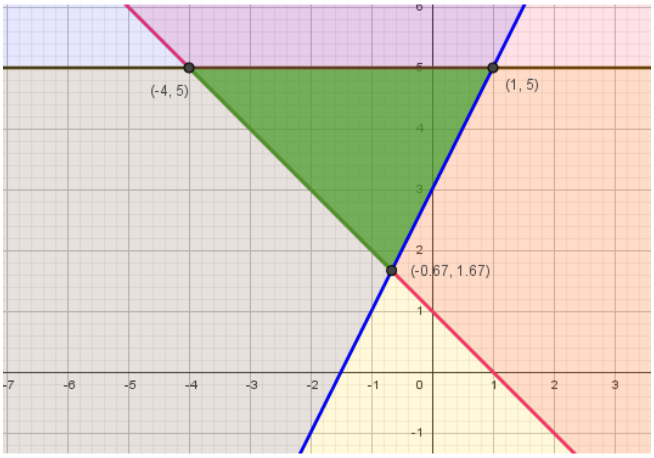
65. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2}} \\ \mathbf{1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3}\right) \geq 6\left(\frac{x-y+1}{2}\right) \\ 6\left(1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \rightarrow$

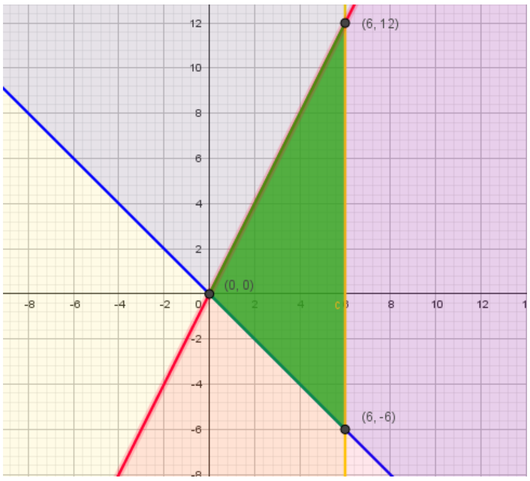
$\rightarrow \begin{cases} 3 - 2x + 4y - 6 \geq 3x - 3y + 3 \\ 6 - 4x + 8 + 2y + 6x + 9y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x + 7y \geq 6 \\ 2x + 11y \geq -14 \end{cases}$



b) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y\geq 1} \\ \boldsymbol{y-2x\geq 3} \\ \boldsymbol{y\leq 5} \end{cases}$

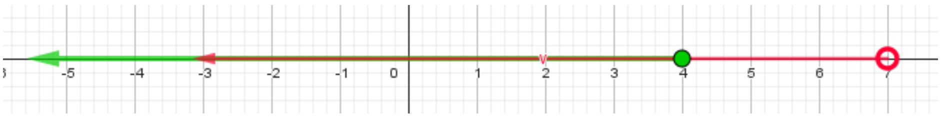


c) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y\geq 0} \\ \boldsymbol{2x-y\geq 0} \\ \boldsymbol{x\leq 6} \end{cases}$



d) $\begin{cases} \boldsymbol{(x+1)\cdot 10+x\leq 6(2x+1)} \\ \boldsymbol{4(x-10)<-6(2-x)-6x} \end{cases} \to \begin{cases} 10x+10+x\leq 12x+6 \\ 4x-40<-12+6x-6x \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 10-6\leq 12x-11x \\ 4x<28 \end{cases} \to \begin{cases} x\leq 4 \\ x<7 \end{cases} \to x\leq 4$



5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

66. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{xy+2y=6} \\ \boldsymbol{2x-3y=1} \end{cases} \to \textit{Sistema de ecuaciones no lineal}$, tiene un producto de x por y.

b) $\begin{cases} \mathbf{5y - x = 4} \\ \mathbf{2x - 3y = -1} \end{cases} \rightarrow \textit{Sistema de ecuaciones lineal}$

c) $\begin{cases} \mathbf{4x - 2 = y} \\ \mathbf{3x + 5y = 2} \end{cases} \rightarrow \textit{Sistema de ecuaciones lineal}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y = 2} \\ \mathbf{3x + y^2 = 4} \end{cases} \rightarrow \textit{Sistema de ecuaciones no lineal}$, tiene incógnitas al cuadrado.

67. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} \mathbf{xy + 2 = 4x} \\ \mathbf{y - x = 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy - 4x + 2 = 0 \\ y = 1 + x \end{cases} \rightarrow x(x+1) - 4x + 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 2 \ , \ x_2 = 1$

$y_1 = 1 + x_1 \rightarrow y_1 = 1 + 2 = 3 \ , \ y_2 = 1 + x_2 \rightarrow y_2 = 1 + 1 = 2$

$x_1 = 2 \ , \ y_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = 1 \ , \ y_2 = 2$

b) $\begin{cases} \mathbf{y^2 - x^2 = 5} \\ \mathbf{5x - 3y = 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ x = \frac{1+3y}{5} \end{cases} \rightarrow y^2 - \left(\frac{1+3y}{5}\right)^2 = 5 \rightarrow y^2 - \frac{9y^2 + 6y + 1}{25} - 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 25y^2 - 9y^2 - 6y - 1 - 125 = 0 \rightarrow 8y^2 - 3y - 63 = 0$

$y = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(8)(-1)}}{2(8)} = \frac{3 \pm \sqrt{2025}}{16} = \frac{3 \pm 45}{16} \rightarrow y_1 = 3 \ , \ y_2 = -\frac{21}{8}$

$x_1 = \frac{1+9}{5} = 2 \ , \ x_2 = \frac{1 - \frac{63}{8}}{5} = -\frac{11}{8}$

$x_1 = 2 \ , \ y_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -\frac{11}{8} \ , \ y_2 = -\frac{21}{8}$

c) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 7} \\ \mathbf{xy = 12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ xy = 12 \end{cases} \rightarrow (7-y)y - 12 = 0 \rightarrow 7y - y^2 - 12 = 0 \rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \rightarrow$

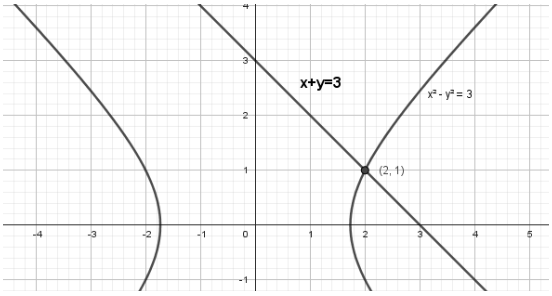
$\rightarrow (y-3)(y-4) \rightarrow y_1 = 3 \ , \ y_2 = 4 \quad ; \ x_1 = 7 - 3 = 4 \ , \ x_2 = 7 - 4 = 3$

$x_1 = 4 \ , \ y_1 = 3 \quad ; \ x_2 = 3 \ , \ y_2 = 4$

68. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} \mathbf{x^2 - y^2 = 3} \\ \mathbf{x + y = 3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \rightarrow x^2 - (3-x)^2 = 3 \rightarrow x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 3 \rightarrow$

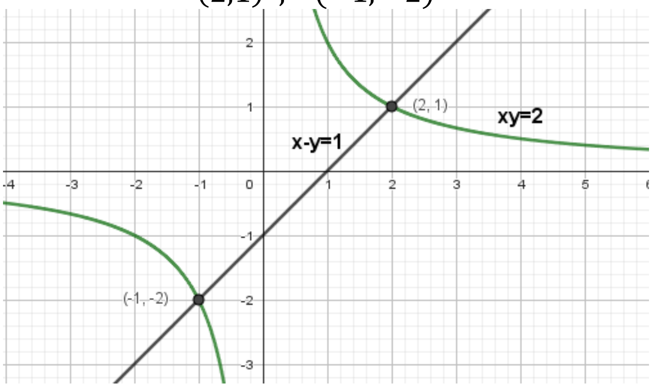
$\rightarrow 6x - 9 = 3 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 3 - x = 3 - 2 = 1 \rightarrow \quad (2, 1)$



b) $\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{xy=2} \end{cases} \to \begin{cases} x=1+y \\ xy=2 \end{cases} \to y(1+y)=2 \to y+y^2=2 \to y^2+y-2=0 \to$

$\to (y-1)(y+2)=0 \to y_1=1 \quad y_2=-2 \to x_1=1+1=2 \ , \ x_2=1-2=-1$

$(2,1) \ , \quad (-1,-2)$

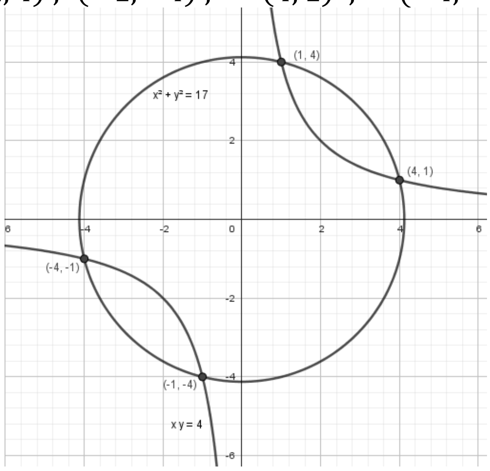


c) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2=17} \\ \boldsymbol{xy=4} \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases} \to x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=17 \to x^2+\frac{16}{x^2}-17=0 \to$

$\to x^4+16-17x^2=0 \to t^2-17t+16=0 \to (t-16)(t-1)=0 \to$

$\to x_1=\pm\sqrt{16}=\pm 4 \ , \ x_2=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \to \ y_1=\ \pm\frac{4}{4}=\ \pm 1 \quad ; \ y_2=\pm\frac{4}{1}=\pm 4$

$(1,4) \ , \ (-1,-4) \ , \quad (4,1) \ , \quad (-4,-1)$

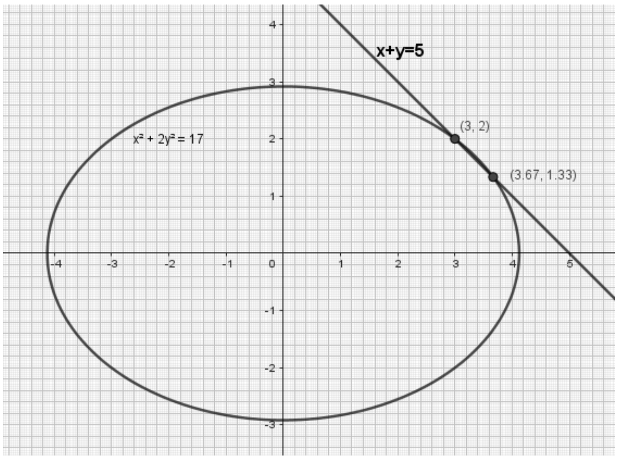


d) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2y^2=17} \\ \boldsymbol{x+y=5} \end{cases} \to \begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x=5-y \end{cases} \to (5-y)^2+2y^2=17 \to$

$\to (y^2-10y+25)+2y^2-17=0 \to 3y^2-10y+8=0 \to (y-2)\left(y-\frac{4}{3}\right)=0 \to$

$$\rightarrow y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = \frac{4}{3} \ \rightarrow x_1 = 5 - 2 = 3 \ , \ x_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

$$(3, 2) \quad ; \quad \left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$$



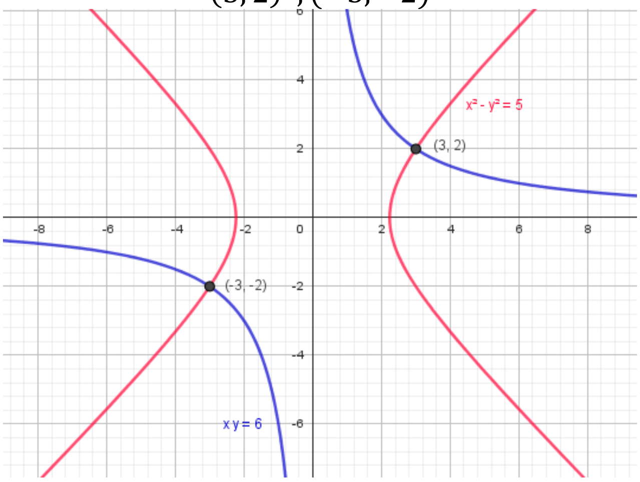
e) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^2 = 5} \\ \boldsymbol{xy = 6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases} \rightarrow \left(\frac{6}{y}\right)^2 - y^2 - 5 = 0 \rightarrow \frac{36}{y^2} - y^2 - 5 = 0 \rightarrow 36 - y^4 -$

$5y^2 = 0 \ \rightarrow y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \ \rightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \ \rightarrow (t - 4)(t + 9) \ \rightarrow$

$\rightarrow y_1 = \ \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad y_2 = \ \pm\sqrt{-9} = No\ son\ números\ reales \rightarrow$

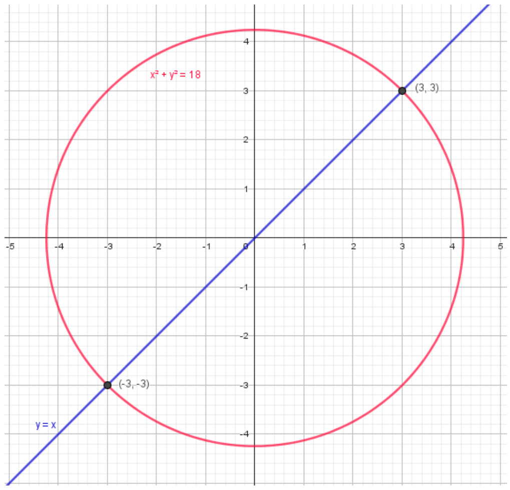
$\rightarrow x = \frac{6}{y} \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \ \ , \quad x = \frac{6}{-2} = -3$

$$(3, 2) \ , (-3, -2)$$



f) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 18} \\ \boldsymbol{y = x} \end{cases} \rightarrow x^2 + x^2 = 18 \ \rightarrow 2x^2 = 18 \ \rightarrow x^2 = 9 \ \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow y = x = \ \pm 3$

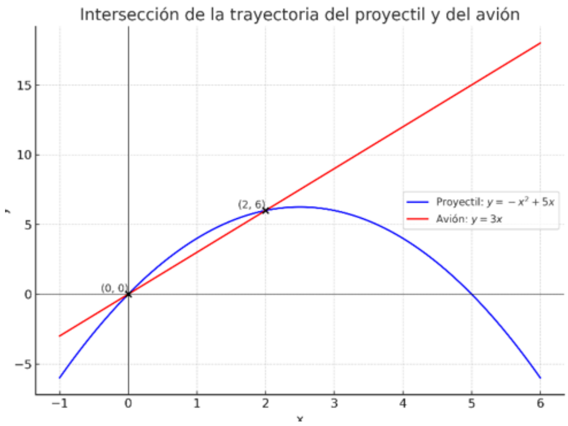
$$(3, 3) \quad , \quad (-3, -3)$$



69. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x = 0 \\ y = 3x \end{cases} \rightarrow -x^2 + 5x = 3x \rightarrow -x^2 + 2x = 0 \rightarrow -x(x-2) = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = 0\ ,\ x_2 = 2\ \ ;\ \ y_1 = 3(0) = 0 \quad y_2 = 3(2) = 6 \ \rightarrow (0,0)\ ,\ (2,6)$$



70. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 5y^2 = -2} \\ \mathbf{2x^2 - 3y^2 = -1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = -4 \\ -6x^2 + 9y^2 = 3 \end{cases} \rightarrow -y^2 = -1 \rightarrow y = \pm 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 3y^2 = -1 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

(1, 1) , (1, -1) , (-1, 1) , (-1, -1)

b) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + y^2 = 3} \\ \mathbf{5x^2 - 2y^2 = 5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 2y^2 = 6 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow 11x^2 = 11 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 = 3 - 3x^2 \rightarrow 3 - 3 = 0 \rightarrow (1,0)\ ,\ (-1,0)$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{xy = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{x + y = \frac{3}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} - x \end{cases} \rightarrow x \cdot \left(\frac{3}{2} - x\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}x - x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow x_1 = 1 \;,\; x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow y_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \;\;,\; y_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$\left(1, \frac{1}{2}\right) \;\;,\;\; \left(\frac{1}{2},\; 1\right)$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 4y = 3} \\ \boldsymbol{xy = 1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4y = 3 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow x^2 - 4\left(\frac{1}{x}\right) = 3 \rightarrow x^3 - 3x - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 2{,}195 \;,\;\; y = \frac{1}{2{,}195} = 0{,}466 \rightarrow \mathit{Usamos\ la\ calculadora\ para\ calcular\ x}$

x tiene solo una solución real $(2{,}195\,,\; 0{,}466)$

e) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - \frac{y}{x} = 1} \\ \boldsymbol{x + y = 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \rightarrow x + 2 - x - \frac{2-x}{x} = 1 \rightarrow 2 - \frac{2-x}{x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 2x - 2 + x = x \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 2 - x \rightarrow y = 2 - 1 = 1 \rightarrow (1, 1)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ **b)** $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ **d)** $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

No van a poder ser evaluadas cuando el denominador sea 0.

a) $\frac{7x-9}{(x+3)(2x-16)} \rightarrow (x+3)(2x-16)=0 \rightarrow x=-3 \quad x=8$

b) $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6} \rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \rightarrow x=2 \quad x=3$

c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4} \rightarrow -2x^4-3x^2-4=0$ *No existen valores que anulen este polinomio*

d) $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2} \rightarrow x^2+y^2=0 \rightarrow (x,y)=(0,0)$

2. Calcula cuánto debe valer la letra *m* para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea -2 para x = 0. $\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$

La letra m puede ser sustituida por cualquier número real ya que al ir multiplicada por x (x=0) siempre va a dar 0. Por lo tanto, el polinomio siempre va a tener la misma solución. (-2).

- Si sustituimos (m= -1):
  $(0)^3$-(-1) · (0) +4 / ($(0)^4$ -1) · ((-1) · (0) +2) = 4/ (-1) · (2) = 4/-2 = **-2**
- Si sustituimos (m= 1):
  $(0)^3$-(-1) · (0) +4 / ($(0)^4$ -1) · ((-1) · (0) +2) = 4/ (-1) · (2) = 4/-2 = **-2**

3. Consideramos los polinomios: $p(x)=-3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x)=2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x)=3x^2+5x-7$**. Realiza las siguientes operaciones:**

a) P + Q + R

$(-3x^3 +2x^2 -5x -4) + (-2x^4 +3x^3 -4x^2 +5x +6) + (3x^2 +5x -7) =$ $\mathbf{-2x^4 +x^2 +5x -5}$

b) P – Q

$(-3x^3 +2x^2 -5x -4) - (-2x^4 +3x^3 -4x^2 +5x +6) =$ $\mathbf{2x^4 -6x^3 +6x^2 -10x -10}$

c) P · R

$(-3x^3 +2x^2 -5x -4) \cdot (3x^2 +5x -7) = -9x^5 +6x^4 -15x^3 -12x^2 -15x^4 +10x^3 -25x^2 -20x +21x^3 -14x^2 +35x +28=$ $\mathbf{-9x^5 -9x^4 +16x^3 -51x^2 +15x +28}$

d) P · R – Q

$(-3x^3 +2x^2 -5x -4) \cdot (3x^2 +5x -7) = -9x^5 +6x^4 -15x^3 -12x^2 -15x^4 +10x^3 -25x^2 -20x +21x^3 -14x^2 +35x +28= (-9x^5 -9x^4 +16x^3 -51x^2 +15x +28) - (-2x^4 +3x^3 -4x^2 +5x +6) =$ $\mathbf{-9x^5 -7x^4 +13x^3 -47x^2 +10x +22}$

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ **entre** $3x^2+2x-5$

b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ **entre** x^3+3x+5

a)

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 -2x^3 -5x^2 +7x -9 & 3x^2 +2x - 5 \\ \hline -3x^4+2x^3+5x^2 & x^2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \underline{7x -9} & \end{array}$$

COCIENTE: x^2 RESTO: $7x - 9$

b)

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 -7x^4 +8x^3 +9x^2 -10x -5 & x^3 +3x +5 \\ \hline -6x^5 \quad -18x^3 -30x^2 & 6x^2 -7x +10 \\ 0 \quad -7x^4 -10x^3 -21x^2 -10x -5 & \\ 0 \quad +7x^4 \quad +21x^2 +35x & \\ 0 \quad 0 \quad -10x^3 \quad 0 \quad +15x -5 & \\ 0 \quad 0 \quad 10x^3 \quad 0 \quad -30x -50 & \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \underline{-15x -55} & \end{array}$$

COCIENTE: $6x^2 -7x +10$ RESTO: $-15x -55$

5. **Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:**

a) **$x^5 +7x^4 -13x^3 +5x^2 -17x+5$ / $x-3$:** ($x=3$)

$3^5 +7 \cdot (3)^4 -13 \cdot (3)^3 +5 \cdot (3)^2 -17 \cdot (3) +5 = 243 + 567 - 351 +45 -51 +5 = 458$
RESTO: 458 (No es exacta)

b) **$x^5 +x^4 -3x^3 -3x^2 -4x +4$ /$x-2$:** ($x=2$)

$2^5 + 2^4 - 3 \cdot (2)^3 - 4 \cdot (2) + 4 = 32 + 16 - 24 - 8 + 4 = 20$
RESTO: 20 (No es exacta)

c) **$9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1$ /$x - 1$:** ($x=1$)

$9 \cdot (1)^5 +7 \cdot (1)^4 -3 \cdot (1)^3 +5 (1)^2 -17 \cdot (1) -1 = 9 + 7 - 3 + 5 - 17 - 1 = 0$
RESTO: 0 (Es exacta)

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

$$(x-4)(x+1) \to x^2 + x - 4x - 4 = x^2 - 3x - 4$$

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

$$(x-2)(x-3) \to x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$$
$$x(x-2)(x-3) \to x^3 - 5x^2 + 6x$$

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

$$(x-3)^2(x+1)^2 \to (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 2x + 1) \to$$
$$\to x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^3 - 12x^2 - 6x + 9x^2 + 18x + 9 \to$$
$$\to x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$$

9. Encuentra un polinomio q(x) tal que al dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

$x(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) + (5x^4 + 5x^2 + 1) \rightarrow$
$(x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x)(5x^4 + 5x^2 + 1) \rightarrow\ x^7 + x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + x + 1$

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

a) $4x^3$+ $11x^2$+ 6x - 3 ------- no tiene. Su raíz es 0,307 no es entera ni racional. Sus otras dos raíces (-1,528 +0,321 i y -1,528 – 0,321 i) son complejas

b) $3x^3$- $2x^2$+ 6x -3 --------- no tiene. Su raíz es 0,519 pero no es entera ni racional, sus otras dos raíces (0,073+1,385 i y 0,073 – 1,385 i) son complejas

c) $3x^3$- $4x^2$+ 2x -1 ----------- su raíz es 1

d) $2x^3$+ x^2- 6x - 3 ------------ su raíz es -$\frac{1}{2}$

Todas se hacen por Ruffini y se comprueba en la calculadora.

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3$+ 11 x^2+ 5x + 3 ---------- no se puede, porque su raíz que es -3,248 no es ni entera ni racional. Sus otras dos raíces son -0,209 + 0,514 i y -0,209 – 0,514 i son complejas
- $5x^3$ + 5 x^2 + x – 1 ----------- no se puede porque su raíz que es 0,321 no es ni racional ni entera y sus otras dos raíces (-0,66+0,433 i y -0,66 – 0,433 i) son complejas
- $2x^3$+ x^2 + 6x – 3 ------------ no se puede porque 0,439 no es ni entero ni racional y sus otras dos raíces -0,469+1,786 i y -0,469 – 1,786 i son raíces complejas
- $3x^3$- $6x^2$ + x – 2 ------------- $(x - 2)(3x^2 + 1)$

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{x(x-3)} - \frac{4x}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2} - \frac{x(4x)}{x(x-3)^2} = \frac{x^2-3x-x+3-4x^2}{x(x-3)^2} = \frac{-3x^2-4x+3}{x(x-3)^2}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{x(x-3)} - \frac{2x^2}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-3)-(2x^2)(x)}{x(x-3)^2} = \frac{-2x^3+x^2-4x+3}{x(x-3)^2}$
- $\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{x+2}{x(x-3)} \cdot \frac{2x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x^2+2)}{x(x-3)^3} = \frac{2(x^2+2)}{(x-3)^2}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} / \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{\frac{x-1}{x(x-3)}}{\frac{2x}{(x-3)^2}} = \frac{x^3-7x^2+15x-9}{2x^4-6x^2} = \frac{(x-1)(x-3)^2}{2x^2(x^2-3)} = \frac{x^2-4x+3}{2x^2}$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- $\boldsymbol{x^2-6x+9}$ ------ $(x-3)^2$
- $\boldsymbol{x^4+8x^2+16}$ ------$(x^2+4)^2$
- $\boldsymbol{x^2+\sqrt{20xy}+5y^2}$ ------ $(x+\sqrt{5}y)^2$
- $\boldsymbol{x^4+2x^3+x^2+2x+1}$ --------- NO, sus dos primeras raíces no son enteras ni racionales (-0,531 y -1,883) y sus otras dos raíces son complejas (0,207+0,978 i y 0,207 – 0,978 i)
- $\boldsymbol{x^4-2x^3+x^2+2x+1}$ ------ NO, porque tiene cuatro raíces complejas:
  1,44+1,08 i . 1,44 – 1,08 i . -0,44+0,33 i . -0,44 – 0,33 i .
- $\boldsymbol{x^2-36}$ ------- $(x+6)\cdot(x-6)$
- $\boldsymbol{5x^2+1}$ ------ NO, porque sus dos raíces son complejas = 0,447 i . y . -0,447 i .
- $\boldsymbol{5x^2-11}$ ------ $(\sqrt{5}x+\sqrt{11})(\sqrt{5}x-\sqrt{11})$
- $\boldsymbol{x^4-3y^2}$------ $(x^2+\sqrt{3}y)(x^2-\sqrt{3}y)$

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)}+\frac{6}{2(5-x)}=\frac{(2)(5-x)2}{2x(5-x)^2}+\frac{(x)(5-x)6}{2x(5-x)^2}=\frac{(20-4x)+(30x-6x^2)}{2x(5-x)^2}=\frac{-6x^2+26x+20}{2x(5-x)^2}$

b) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)(x^2y^2)}{(x-y)(x^2-y^2)}=\frac{x^3+xy^2+yx^2+y^3}{x^3-xy^2-yx^2+y^3}=\frac{xy^2+yx^2}{-xy^2-yx^2}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}=\frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{1}{(2x-1)}$

15. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible.

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x^6}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{x^4}{x}+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^6-1}{x^2}:\frac{x^4+1}{x}=\frac{x^6-1}{(x^4+1)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$

Descomposición factorial del numerador

	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*-1*
1		1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	0
-1		-1	0	-1	0	-1	
	1	0	1	0	1	0	

b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x+a}{x-a}=\frac{(x+a)(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)}{(x+a)(x-a)}=\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{(x-a)}=$

$$=\frac{(x-a)(x^2-2x+a^3)}{x-a}=x^2-2x+a^3$$

Descomposición del numerador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3a & +3a^2 & -a^3 \\ a & & a & -2a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & -2a & a^2 & 0 \end{array}$$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a-b}=\left(\left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}\right)-\left(\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right)\right):\frac{ab}{a-b}=\frac{(a^2+b^2+2ab)-(a^2+b^2-2\hat{a}b)}{(a-b)(a+b)}:\frac{ab}{a-b}=$

$=\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}:\frac{ab}{a-b}=\frac{(4ab)(a-b)}{(a+b)(a-b)(ab)}=\frac{4}{a+b}$

16. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible.

a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a-y}}=\frac{\frac{1(x-y)-1a}{(x-y)a}}{\frac{1(x+y)+1a}{(x+y)a}}:\frac{\frac{1(a+y)-1x}{x(a+y)}}{\frac{1(a-y)+1x}{x(a-y)}}=\frac{((x-y)-a)(a(x+y))}{(x+y+a)((x-y)a)}:\frac{(a+y-x)(x(a-y))}{(a-y+x)(x(a+y))}=$

$=\frac{((x-y)-a)(a(x+y))(a-y+x)(x(a+y))}{(x+y+a)((x-y)a)(a+y-x)(x(a+y))}=\frac{((x-y)-a)(a(x+y))(a-y+x)}{(x+y+a)((x-y)a)(a+y-x)}$

b) $\left(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=\left(\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^3}\right):\left(\frac{x^2-3x-2}{x^3}\right)=$

$=\frac{(x^3-x^2-3x+2)(x^3)}{(x^2-3x-2)(x^3)}=\frac{(x^3-x^2-3x+2)}{(x^2-3x-2)}$

c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}=\frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y+3x}{xy}}\cdot\frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+x}{xy}}=\frac{(3y+2x)(xy)}{(y+3x)(xy)}\cdot\frac{(2y-x)(xy)}{(3y+5x)(xy)}=\frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y+3x)(3y+5x)}$

17. Resolver las ecuaciones siguientes.

a) $\frac{3x-1}{2x-4}=\frac{5}{9}\to\frac{3x-1}{2(x-2)}=\frac{5}{9}\to 27x-9=10x-20\to 27x-10x=-20+9\to$

$\to 17x=-11\to x=\frac{-11}{17}$

b) $\frac{x}{2}+5=\frac{3x}{6}-7\to\frac{3x+30}{6}=\frac{3x-42}{6}\to 3x+30=3x-42\to 3x-3x=-30-42\ \to 0=-72$

no tiene solucion

c) $\frac{5}{x+1}=\frac{5x}{x-1}-2\to 5(x-1)=5x(x+1)-2(x+1)(x-1)\to$

$\to 5x-5=5x^2+5x-2x^2+2\ \to\ 5x^2-2x^2-5x+5x+2+5=0\to\ 3x^2+7=0$

no tiene solucion

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son :

a) $\frac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x\ \to 16x^3-7=(5+8x)(2x^2-3)\to$

$\to 16x^3-7=10x^2-15+16x^3-24x\to 16x^3-16x^3-10x^2+24x-7+15=0\to;\ \to$

$\to -10x^2+24x+8=0$ *tiene dos soluciones* $x=\frac{6+2\sqrt{14}}{5}\ ;\ x=\frac{6-2\sqrt{14}}{5}$

b) $x^4+8x^2-12=0\ \to x^2=z\ \to (x^2)+8(x^2)-12=0\to z^2+8z-12=0\to$

$$\rightarrow z = -4 + 2\sqrt{7} \;\; ; \quad tiene\ dos\ soluciones\ x = \pm\sqrt{-4 + 2\sqrt{7}}$$

c) $\mathbf{80x^4 - 48x^2 + 7 = 0} \rightarrow x^2 = z \rightarrow 80(x^2)^2 - 48(x^2) + 7 = 0 \rightarrow 80z^2 - 48z + 7 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow z = \frac{7}{20} \;\; ; \;\; z = \frac{1}{4} \quad => x = \pm\sqrt{\frac{7}{20}}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

d) $\mathbf{\frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{x^2+25+10x}{25} = 1 \rightarrow \frac{25x^2}{400} + \frac{16(x^2+10x+25)}{400} = \frac{400}{400} \rightarrow$

$\rightarrow 25x^2 + 16x^2 + 160x + 400 = 400 \rightarrow 41x^2 + 160x + 400 - 400 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow\ 41x^2 + 160x = 0 \quad tiene\ dos\ soluciones\!: \quad x = 0; \quad x = -\frac{160}{41}$

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:
a) escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el teorema de Pitágoras.
b) calcula la hipotenusa y los catetos.

Cateto menor = x , Cateto mayor = x + 1 , Hipotenusa = x + 3

a) $(x+3)^2 = x^2 + (x+1)^2$

b) $x^2 + 9 + 6x = x^2 + x^2 + 1 + 2x => x^2 - x^2 - x^2 + 6x - 2x + 9 - 1 = 0 =>$

$-x^2 + 4x + 8 = 0 => x = 2 + 2\sqrt{3}; \qquad x = 2 - 2\sqrt{3}$

Cateto menor= 2 + $2\sqrt{3}$ Cateto mayor = $3 + 2\sqrt{3}$ Hipotenusa = $5 + 2\sqrt{2}$

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

x → partidos ganados , y → partidos perdidos

$$\begin{cases} 2x + y = 36 \rightarrow y = 36 - 2x \\ x + y = 24 \end{cases}$$

sustitución: x + (36 – 2x) = 24 → -x = -12 → x = 12

sustituir 'x' en la e2: 12 + y = 24 → y = 24 – 12 → y = 12

Han ganado 12 partidos y perdido 12 también.

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

y → medida de las aristas , x → número de cubitos

$$\begin{cases} x - 71 = y^3 \rightarrow x = y^3 + 71 \\ x + 200 = (y+1)^3 \end{cases}$$

sustitución: $(y^3 + 71) + 200 = (y + 1)^3$

resolver la potencia del binomio $(y + 1)^3$; $y^3 + 71 + 200 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$

agrupar los números que se puedan: $y^3 + 71 + 200 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \rightarrow 3y^2 + 3y - 270 = 0$

resolver ecuación de segundo grado: $y_1 = 9$, $y_2 = -10$. solución $y = 9$ (porque -10 es negativo y estamos hablando de medidas)

sustituir y en una de las dos ecuaciones originales: $x = y^3 + 71 \rightarrow x = 9^3 + 71 \rightarrow x = 800$

Aristas 9cm y 800 cubitos.

22. Las tres cifras de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

x → cifra de las centenas , y → cifra de las decenas , z → cifra de las unidades

Número: $xyz = 100x + 10y + z$, $zyx = 100z + 10y + x$

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 198 \\ y = \frac{z+x}{2} \rightarrow 2y = z + x \rightarrow -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Agrupamos ecuación 2: $(100x - x) + (10y - 10y) + (z - 100z) = 198 \rightarrow$

$99x - 99z = 198 \rightarrow x - z = 2 \rightarrow E2': x - z = 2$, $x = z + 2$

$E1 + E3 = E3': x + y + z = 24$

$-x + 2y - z = 0$

$3y = 24 \rightarrow y = \frac{24}{3} = 8 \rightarrow E3': y = 8$

Sustitución: $x + y + z = 24 \rightarrow (z + 2) + 8 + z = 24 \rightarrow 2z = 14 \rightarrow z = \frac{14}{2} = 7$

'x' lo hemos sustituido en la E2' 'y' lo hemos sustituido en la E3'

averiguar 'x' sustituyendo las incógnitas que ya sabemos: $x + y + z = 24 \rightarrow x + 8 + 7 = 24 \rightarrow x = 9$

El número es 987

23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

a → edad padre/madre

b → edad madre/padre

c → edad hijo

d → edad otro hijo

$$\begin{cases} a + b + c \quad = 100 \\ a + b + \quad d = 98 \\ a \quad + c + d = 74 \\ \quad b + c + d = 73 \end{cases}$$

-E1 + E2 = E'2 → - a - b - c = -100
a + b + d = 98
-c + d = - 2

-E1 + E3 = E'3 → - a - b - c = -100
a + c + d = 74
-b + d = - 26

$$\begin{cases} a+b+c \quad = 100 \\ -c+d = -2 \\ -b \quad +d = -26 \\ b+c+d = 73 \end{cases}$$

E'3 + E4 = E'4 → - b + d = -26
b + c + d = 73
+c + 2d = 47

E'2 + E'4 = E''4 → - c + d = -2
+ c + 2d = 47
+ 3d = 45 → d = $\frac{45}{3}$ = 15

E'3 → - b + d = -26 → -b = -d – 26 → b = 15 + 26 = 41

E'2 → - c + d = - 2 → - c = - d – 2 → c = 15 + 2 = 17

E1 → a + b + c = 100 → a = - 41 – 17 + 100 = 42

La edad de los padres son 41 y 42. Y la de los hijos son 17 y 15.

24. Resuelve:

a) $\frac{x}{3}$ **– 9 < 2** → m.c.m = 3 → x – 27 < 6 → x < 33

b) $\frac{5x}{7}$ **– 7 ≤ -5x** → m.c.m =7 → 5x – 49 ≤ -35x → 5x + 35x ≤ 49 → 40x ≤ 49 → x ≤ $\frac{49}{40}$

c) 4 (2x – 3) > 1 - 7x → 8x – 12 > 1 - 7x → 8x + 7x > 1 +12 → 15x > 13 → x > $\frac{13}{15}$

d) $\frac{3\,(x+4)}{5}$ **< 2x** → m.c.m = 5 → 3 (x + 4) < 10x → 3x + 12 < 10x → 3x – 10x < -12 → x > $\frac{12}{7}$

e) $\frac{2x-4}{3}$ **+ 1 >** $\frac{9x+6}{6}$ → m.c.m = 6 → 4x – 8 + 6 > 9x + 6 → 4x -9x > 6 – 6 +8 → x < - $\frac{8}{5}$

f) $\frac{7x}{2}$ **- 1 < x -** $\frac{3x+5}{4}$ → m.c.m = 4 → 14x – 4 < 4x - 3x – 5 → 14x – 4x +3x < -5 + 4 → x < - $\frac{1}{13}$

25. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\boldsymbol{x-3}} \rightarrow x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

b) $\sqrt{\boldsymbol{-x+3}} \rightarrow -x+3 \geq 0 \rightarrow -x \geq -3 \rightarrow x \leq -\frac{3}{-1} \rightarrow x \leq 3$

c) $\sqrt{\boldsymbol{15-3x}} \rightarrow 15 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{15}{3} \rightarrow x \leq 5$

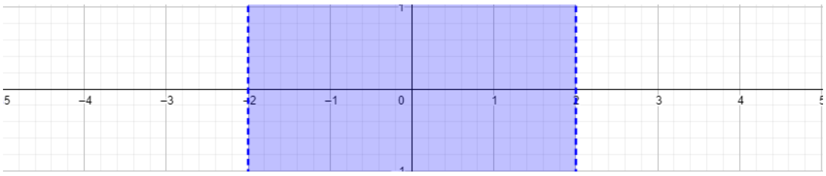
d) $\sqrt{-6x-24} \rightarrow -6x - 24 \geq 0 \rightarrow -6x \geq 24 \rightarrow x \leq -\frac{24}{6} \rightarrow x \leq -4$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado

Las zonas coloreadas en la interpretación gráfica hacen referencia a la zona cuyos valores son solución de la inecuación.

a) $\boldsymbol{2x^2 - 8 < 0}$

$2x^2 - 8 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = 2$; $x = -2$



$$x = 10 \rightarrow 2\cdot(10)^2 - 8 < 0 \rightarrow 192 < 0\ (no\ es\ solución)$$

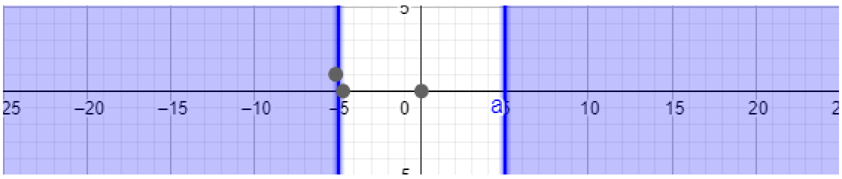
$$x = -10 \rightarrow 2\cdot(-10)^2 - 8 < 0 \rightarrow 192 < 0\ (no\ es\ solución)$$

$$x = 0 \rightarrow 2\cdot(0)^2 - 8 < 0 \rightarrow -8 < 0\ (es\ solución)$$

Solución → $(-2,\ 2)$

b) $\boldsymbol{-x^2 + 25 \leq 0}$

$-x^2 + 25 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = -5$; $x = 5$



$$x = -10 \rightarrow -(-10)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -100 + 25 \leq 0 \rightarrow -75 \leq 0\ (es\ solución)$$

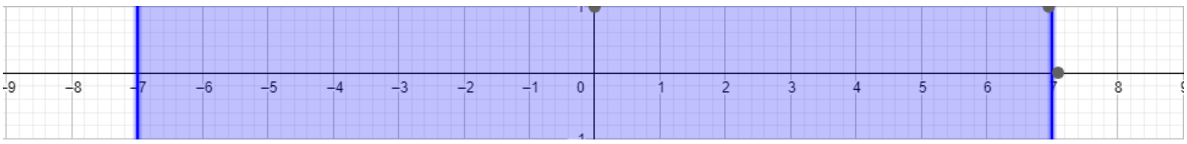
$$x = 10 \rightarrow -(10)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -100 + 25 \leq 0 \rightarrow -75 \leq 0\ (es\ solución)$$

$$x = 0 \rightarrow -(0)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -25 \leq 0\ (no\ es\ solución)$$

Solución → $(-\infty, -5] \cup [5, \infty]$

c) $\boldsymbol{-x^2 + 49 \geq 0}$

$-x^2 + 49 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = 7$; $x = -7$



$$x = 10 \rightarrow -(10)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow -100 + 49 \geq 0 \rightarrow -51 \geq 0\ (no\ es\ solución)$$

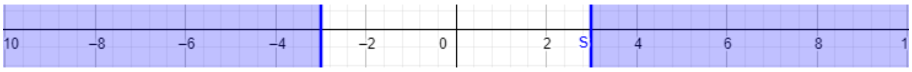
$$x = -10 \rightarrow -(-10)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow -100 + 49 \geq 0 \rightarrow -51 \geq 0\ (no\ es\ solución)$$

$$x = -10 \rightarrow -(0)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow 0 + 49 \geq 0 \rightarrow 49 \geq 0\ (es\ solución)$$

Solución→ $[-7,\ 7]$

d) $\mathbf{5x^2 - 45 \geq 0}$

$5x^2 - 45 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = -3$; $x = 3$



$$x = 10 \rightarrow 5 \cdot (10)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow 455 \geq 0 \ (es\ solución)$$

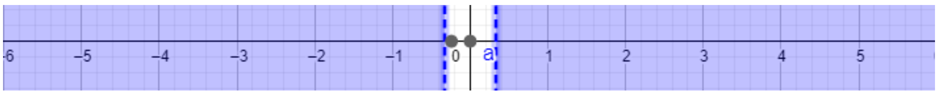
$$x = -10 \rightarrow 5 \cdot (-10)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow 455 \geq 0 \ (es\ solución)$$

$$x = 0 \rightarrow 5 \cdot (0)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow -45 \geq 0 \ (no\ es\ solución)$$

Solución → $(-\infty, \ -3] \cup [3, \ \infty)$

e) $\mathbf{9x^2 - 1 > 0}$

$9x^2 - 1 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = \frac{1}{3}$; $x = -\frac{1}{3}$



$$x = 1 \rightarrow 9 \cdot (1)^2 - 1 > 0 \rightarrow 8 > 0 \ (es\ solución)$$

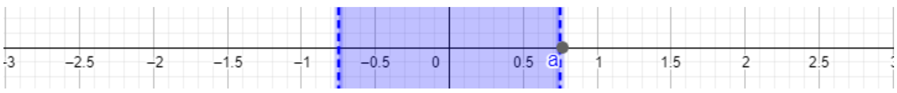
$$x = -1 \rightarrow 9 \cdot (-1)^2 - 1 > 0 \rightarrow 8 > 0 \ (es\ solución)$$

$$x = 0 \rightarrow 9 \cdot (0)^2 - 1 > 0 \rightarrow -1 > 0 \ (no\ es\ solución)$$

Solución → $\left(-\infty, \ -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \ \infty\right)$

f) $\mathbf{16x^2 - 9 < 0}$

$16x^2 - 9 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = \frac{3}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$



$$x = 0 \rightarrow 16 \cdot (0)^2 - 9 < 0 \rightarrow -9 < 0 \ (es\ solución)$$

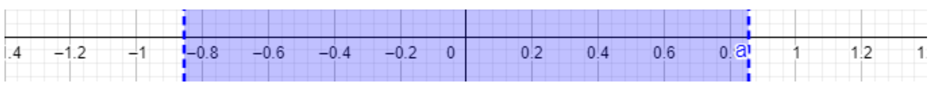
$$x = -1 \rightarrow 16 \cdot (-1)^2 - 9 < 0 \rightarrow 7 < 0 \ (no\ es\ solución)$$

$$x = 1 \rightarrow 16 \cdot (1)^2 - 9 < 0 \rightarrow 7 < 0 \ (no\ es\ solución)$$

Solución → $\left(-\frac{3}{4}, \ \frac{3}{4}\right)$

g) $\mathbf{49x^2 - 36 < 0}$

$49x^2 - 36 = 0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = -\frac{6}{7}$, $x = \frac{6}{7}$



$$x = 1 \rightarrow 49 \cdot (1)^2 - 36 < 0 \rightarrow 13 < 0 \ (no\ es\ solución)$$

$$x = -1 \rightarrow 49 \cdot (-1)^2 - 36 < 0 \rightarrow 13 < 0 \ (no\ es\ solución)$$

$$x = 0 \rightarrow 49 \cdot (0)^2 - 36 < 0 \rightarrow 31 < 0 \ (es\ solución)$$

Solución → $\left(-\frac{6}{7}, \ \frac{6}{7}\right)$

h) $\mathbf{121x^2+100\leq 0}$

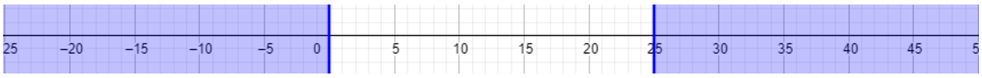
Al ser suma de positivos nunca puede ser negativa ni cero. No tiene solución.

27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

Se realiza el mismo procedimiento que el ejercicio anterior

a) $\mathbf{-2x^2+50x\leq 0}$

$-2x^2+50x=0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x=0$, $x=25$



$$x=1\ \rightarrow\ -2\cdot(1)^2+\ 50\cdot(1)\leq 0\ \rightarrow\ -2\ +\ 50\leq 0\ \rightarrow\ 48\leq 0\ (no\ es\ solución)$$

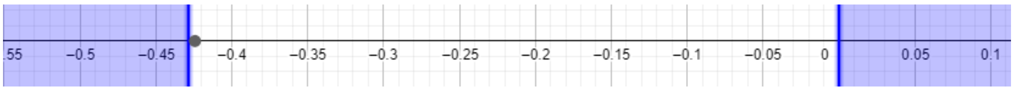
$$x=-1\ \rightarrow\ -2\cdot(-1)^2+\ 50\cdot(-1)\leq 0\ \rightarrow\ -2\ -\ 50\leq 0\ \rightarrow\ -52\ \leq 0\ (es\ solución)$$

$$x=30\ \rightarrow\ -2\cdot(30)^2+\ 50\cdot(30)\leq 0\ \rightarrow\ -1800\ +1500\leq 0\ \rightarrow\ -300\ \leq 0\ (es\ solución)$$

Solución → $(-\infty,\ 0]\cup[25,\ \infty]$

b) $\mathbf{7x^2+3x\geq 0}$

$7x^2+3x=0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x=0$, $x=-\frac{3}{7}$



$$x=-1\ \rightarrow\ 7\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)\geq 0\ \rightarrow\ 7-3\geq 0\ \rightarrow\ 4\geq 0\ \ (es\ solución)$$

$$x=1\ \rightarrow\ 7\cdot(1)^2+3\cdot(1)\geq 0\ \rightarrow\ 7+3\geq 0\ \rightarrow\ 10\geq 0\ (es\ solución)$$

$$x=-0.25\ \rightarrow\ 7\cdot(-0.25)^2+3\cdot(-0{,}25)\geq 0\ \rightarrow\ \frac{7}{16}-\frac{3}{4}\geq 0\ \rightarrow\ -\frac{5}{16}\geq 0\ (no\ es\ solución)$$

Solución→ $\left(-\infty,\ -\frac{3}{7}\right]\cup[0,\ \infty]$

c) $\mathbf{2x^2<8x\ \rightarrow\ 2x^2-8x<0}$

$2x^2-8x=0$ Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Raíces: $x=0$ $x=4$

$$x=1\ \rightarrow\ 2\cdot(1)^2-8\cdot 1<0\ \rightarrow\ 2\ -8\ <0\rightarrow\ -6\ <0\ \ (es\ solución)$$

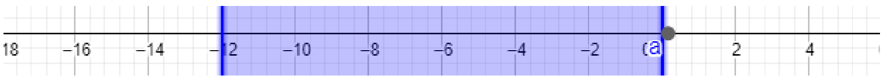
$$x=-1\ \rightarrow\ 2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)\ <\ 0\ \rightarrow\ 2+8\ <0\ \rightarrow\ 10\ <0\ \ (no\ es\ solución)$$

$$x=5\ \rightarrow\ 2\cdot(5)^2-8\cdot(5)\ <\ 0\ \rightarrow\ 50-40<0\ \rightarrow\ 10\ <0\ (no\ es\ solución)$$

Solución → $(0,\ 4)$

d) $\mathbf{-2x^2-24x\geq 0}$

$-2x^2-24x=0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x=0$, $x=-12$



$$x = -100 \;\rightarrow\; -2 \cdot (-100)^2 - 24 \cdot (-100) \geq 0 \;\rightarrow\; -22400 \geq 0 \; (no\ es\ solución)$$

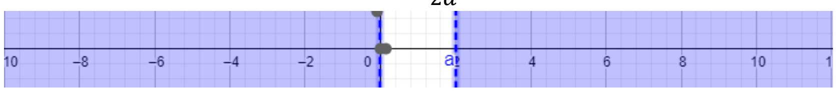
$$x = -1 \;\rightarrow\; -2 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) \geq 0 \;\rightarrow\; 22 \geq 0 \; (es\ solución)$$

$$x = 1 \rightarrow\; -2 \cdot (1)^2 - 24 \cdot (1) \geq 0 \;\rightarrow\; -26 \geq 0 \; (no\ es\ solución)$$

Solución → $[-12,\ 0]$

e) $\boldsymbol{-7x^2 + 14x < 0}$

$-7x^2 + 14x = 0$, Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = 0$, $x = 2$



$$x = -1 \;\rightarrow\; -7 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) < 0 \;\rightarrow\; -7 - 14 < 0 \;\rightarrow\; -21 < 0 \; (es\ solución)$$

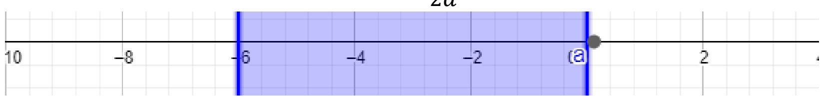
$$x = 3 \;\rightarrow\; -7 \cdot (3)^2 + 14 \cdot (3) < 0 \;\rightarrow\; -63 + 42 < 0 \rightarrow -21 < 0 \; (es\ solución)$$

$$x = 0.5 \;\rightarrow\; -7 \cdot (0.5)^2 + 14 \cdot (0.5) < 0 \;\rightarrow\; -\frac{7}{4} + 7 < 0 \;\rightarrow\; \frac{21}{4} < 0 \; (no\ es\ solución)$$

Solución: → $(-\infty,\ 0) \cup (2,\ \infty)$

f) $\boldsymbol{-5x^2 - 30x \geq 0}$

$-5x^2 - 30x \geq 0$, Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Raíces: $x = 0$, $x = -6$



$$x = 1 \;\rightarrow\; -5 \cdot (1)^2 - 30 \cdot (1) \geq 0 \;\rightarrow -35 \geq 0 \;\; (no\ es\ solución)$$

$$x = -1 \;\rightarrow\; -5 \cdot (-1)^2 - 30 \cdot (-1) \geq 0 \;\rightarrow\; 25 \geq 0 \;\; (es\ solución)$$

$$x = -10 \;\rightarrow\; -5 \cdot (-10)^2 - 30 \cdot (-10) \geq 0 \;\rightarrow -200 \geq 0 \; (no\ es\ solución)$$

Solución → $[-6,\ 0]$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

Al estar todos los coeficientes multiplicados por una variable elevada a 2, podemos llegar a una conclusión, da igual si el valor de x es positivo o negativo, pues, al estar elevado a 2, aunque el número de la base de la potencia sea negativo, el resultado de la potencia será positivo

$$x^2 = positivo$$

Por lo tanto, el signo final de la operación será el mismo que el del termino a

$$ax^2 = positivo \qquad\qquad -ax^2 = negativo$$

Existe una excepción a este razonamiento, el cual sería si $x = 0$, pues cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0

$$a0^2 = 0 \qquad\qquad -a0^2 = 0$$

Por lo que siguiendo este razonamiento el ejercicio se puede realizar a partir de razonamientos lógicos

a) $\mathbf{5x^2 \leq 0}$ ¿Por qué número tengo que multiplicar a 5 para que sea igual que o menor que 0?, la única solución posible a esa cuestión es $x = 0$

b) $\mathbf{7x^2 > 0}$ → Aplicando el razonamiento explicado cualquier número multiplicado por una potencia con exponente 2, el resultado será positivo, menos multiplicándolo por 0, entonces podemos llegar a la conclusión de que la solución es $\mathbb{R} - [0]$

c) $\mathbf{-2x^2 < 0}$ → Sabiendo que $-ax^2 = negativo$, podemos llegar a la conclusión de que La solución es $\mathbb{R} - [0]$

d) $\mathbf{6x^2 \geq 0}$ → Sabiendo que $ax^2 = positivo$ y que $a0^2 = 0$, podemos llegar a la conclusión de que la solución es $\mathbb{R}$

29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

Para despejar x, tenemos que resolver la expresión que hay en el radicando, y estudiar cuando es mayor que 0.

a) $\sqrt{\mathbf{2x^2 + x + 3}}$

Solución: todos los valores que toma el radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x , pues cualquier número es solución $(\mathbb{R})$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{2(0)^2 + 0 + 3} \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{2(100)^2 + 100 + 3} \rightarrow \sqrt{20103} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{2(-100)^2 + 100 + 3} \rightarrow \sqrt{20103} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

b) $\sqrt{\mathbf{x^2 + x + 1}}$

Todos los valores que toma el radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x , pues cualquier número es solución $(\mathbb{R})$

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{(-100)^2 - 100 + 1} \rightarrow \sqrt{9901} \rightarrow tiene\ sulución\ real$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{(100)^2 + 100 + 1} \rightarrow \sqrt{10101} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{(0)^2 + 0 + 1} \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow tiene\ solución\ real$$

c) $\sqrt{\mathbf{-1 + 2x - x^2}} \rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x - 1} \rightarrow \sqrt{-1(x - 2x + 1)} \rightarrow \sqrt{-1(x - 1)^2}$

No tiene solución pues los valores del radicando siempre son negativos

d) $\sqrt{\mathbf{x^2 + 3x + 5}}$

Todos los valores del radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x , pues cualquier número es solución $(\mathbb{R})$

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{(-100)^2 - 1200 + 36} \rightarrow \sqrt{8836} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{(100)^2 + 2 \cdot 100 + 5} \rightarrow \sqrt{10205} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{(0)^2 + 2 \cdot 0 + 5} \rightarrow \sqrt{5} \rightarrow tiene\ solución\ real$$

e) $\sqrt{\boldsymbol{-x^2+12x+36}} \rightarrow -x^2+12x+36$

$-x^2+12x+36=0$, Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Soluciones: $x=6+6\sqrt{2}$, $x=6-6\sqrt{2}$

$$x=10 \rightarrow \sqrt{-(10)^2+120\ +\ 36} \rightarrow \sqrt{56} \rightarrow \textit{tiene solución real}$$

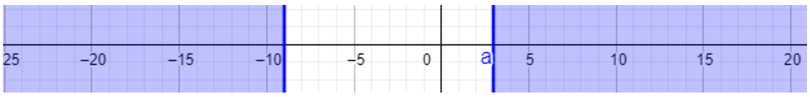
$$x=-10 \rightarrow \sqrt{-(-10)^2-120+36} \rightarrow \sqrt{-184} \rightarrow \textit{no tiene solución real}$$

$$x=100 \rightarrow \sqrt{-(100)^2+1200+36} \rightarrow \sqrt{-8764} \rightarrow \textit{no tiene solución real}$$

Solución $\rightarrow$ $x\in\mathbb{R}/6-6\sqrt{2}\leq x\leq 6+6\sqrt{2}$

f) $\sqrt{\boldsymbol{x^2+6x-27}} \rightarrow x^2+6x-27$

$x^2+6x-27=0$ Aplicamos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Soluciones: $x=-9$, $x=3$



$$x=-10 \rightarrow \sqrt{(-10)^2-60-27} \rightarrow \sqrt{133} \rightarrow \textit{tiene solución real}$$

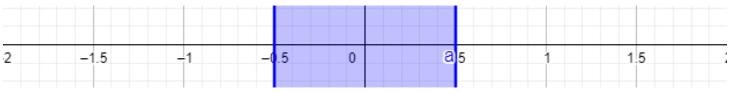
$$x=-10 \rightarrow \sqrt{(-10)^2-60-27} \rightarrow \sqrt{13} \rightarrow \textit{tiene solución real}$$

$$x=0 \rightarrow \sqrt{(0)^2+0-27} \rightarrow \sqrt{-27} \rightarrow \textit{no tiene solución real}$$

Solución $\rightarrow$ $x\in\mathbb{R}/-9\leq x\leq 3$

g) $\sqrt{\boldsymbol{1-4x^2}} \rightarrow \sqrt{-4x^2+1} \rightarrow \sqrt{-1(4x^2-1)} \rightarrow \sqrt{-1(2x-1)(2x+1)}$

$-4x^2+1=0$, Soluciones: $x=\frac{1}{2}$ $x=-\frac{1}{2}$



$$x=0 \rightarrow \sqrt{-1(0-1)(0+1)} \rightarrow \sqrt{1} \rightarrow \textit{tiene solución real}$$

$$x=-1 \rightarrow \sqrt{-1(2\cdot(-1)-1)(2(-1)+1)} \rightarrow \sqrt{-1(-2-1)(-2+1)} \rightarrow$$

$$\sqrt{-1(-3)(-1)} \rightarrow \sqrt{-3} \rightarrow \textit{no tiene solución real}$$

$$x=1 \rightarrow \sqrt{-1(2-1)(2+1)} \rightarrow \sqrt{-1(1)(3)} \rightarrow \sqrt{-3} \rightarrow \textit{no tiene solución real}$$

Solución: $x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y discute el resultado:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+2z=4} \\ \boldsymbol{x+y \quad\;\; =2} \\ \boldsymbol{y+z \;=2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-E1 \\ E3'=E3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+2z=4 \\ -2z=2 \\ y+z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+2z=4 \\ y+z=2 \\ \boldsymbol{z=1} \end{cases}$

$y+z=2 \rightarrow y+1=2 \rightarrow \boldsymbol{y=1}$; $\quad x+1+2=4 \rightarrow \boldsymbol{x=1}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+t=3} \\ \boldsymbol{x+z-t=1} \\ \boldsymbol{y+z+t=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-E1 \\ E3'=E3 \\ E4'=E4-E1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \quad +t=3 \\ -y+z-2t=-2 \\ y+z+t=3 \\ -2y+z-t=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1''=E1' \\ E2''=E2' \\ E3''=E3'+E2' \\ E4''=E4'-2E2' \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x+y \quad +t=3 \\ -y+z-2t=-2 \\ 2z-t=1 \\ -z+3t=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'''=E1'' \\ E2'''=E2'' \\ E3'''=E3'' \\ E4'''=2E4''+E3'' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \quad +t=3 \\ -y+z-2t=-2 \\ 2z-t=1 \\ 5t=5 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t=1}$

$2z-t=1 \rightarrow 2z-1=1 \rightarrow \boldsymbol{z=1}$; $\quad -y+z-2t=-2 \rightarrow -y+1-2=-2 \rightarrow \boldsymbol{y=1}$;

$x+y+t=3 \rightarrow x+1+1=3 \rightarrow \boldsymbol{x=1}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x-y+2z=4} \\ \boldsymbol{2x+y+5z=13} \\ \boldsymbol{-x+y-4z=-6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-2E1 \\ E3'=E3+E1 \end{cases} \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y+z=5 \\ -2z=-2 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{z=1}$

$3y+z=5 \rightarrow 3y+1=5 \rightarrow \boldsymbol{y=1}$; $\quad x-1+4=4 \rightarrow \boldsymbol{x=1}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{3x+4y-z=6} \\ \boldsymbol{6x-6y+2z=2} \\ \boldsymbol{x-y+2z=-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-2E1 \\ E3'=3E3-E1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ -14y+4z=-10 \\ -7y+7z=-12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1''=E1' \\ E2''=E2' \\ E3''=E3'-\frac{1}{2}E2' \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ -14y+4z=-10 \\ 5z=-7 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{z=-\frac{7}{5}}$

$-14y+4z=-10 \rightarrow -14y+4\left(-\frac{7}{5}\right)=-10 \rightarrow \boldsymbol{y=\frac{11}{35}} \rightarrow 3x+4\left(\frac{11}{35}\right)-\frac{7}{5}=6 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{89}{35}}$

e) $\begin{cases} \boldsymbol{x+4y-8z=-8} \\ \boldsymbol{4x+8y-2z=-2} \\ \boldsymbol{8x-y-4z=-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-4E1 \\ E3'=E3-8E1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ -8y=0 \\ -31y+60z=60 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y=0}$

$-31y+60z=60 \rightarrow -31\cdot 0+60z=60 \rightarrow \boldsymbol{z=1}$

$x+4y-8z=-8 \rightarrow x+4\cdot 0-8\cdot 1=-8 \rightarrow \boldsymbol{x=0}$

$f)$ $\begin{cases} \boldsymbol{x-2y+3z+4t=6} \\ \boldsymbol{2x-y+z-t=1} \\ \boldsymbol{x-y+3z+2t=5} \\ \boldsymbol{3x-y+2z-3t=1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E1'=E1 \\ E2'=E2-2E1 \\ E3'=E3-E1 \\ E4'=E4-3E1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 3y-5z-9t=-11 \\ y \quad -2t=-1 \\ 5y-7z-15t=-7 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = 3E3' - E2' \\ E4'' = E4' - \frac{5}{3}E2' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z + 4t = 6 \\ 3y - 5z - 9t = -11 \\ 5z + 3t = 8 \\ \frac{4}{3}z = -\frac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{z = 1}$$

$5z + 3t = 8 \rightarrow 5 \cdot 1 + 3t = 8 \rightarrow \boldsymbol{t = 1}$; $3y - 5z - 9t = -11 \rightarrow 3y - 5 \cdot 1 - 9 \cdot 1 = -11 \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$

$\boldsymbol{x - 2y + 3z + 4t = 6 \rightarrow x - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6 \rightarrow x = 1}$

PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

31. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 100 €. La capitalización es mensual al 5 % anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

$$C_f = R \cdot \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) \cdot (1+i) = 100 \cdot \left(\frac{(1+0{,}004167)^{48} - 1}{0{,}004167}\right) \cdot (1 + 0{,}004167) \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 + 0{,}004167)^{48} \approx 1{,}2216 \Rightarrow \frac{1{,}2216 - 1}{0{,}004167} \approx 53{,}15 \rightarrow Cf = 100 \cdot 53{,}15 \cdot 1{,}004167 = 5\,337{,}44€$$

48. La abuela de María, al nacer ésta, decidió ingresar en un banco un capital de 6 000 € a interés compuesto anual del 7.5 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

$$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \rightarrow 6000 \cdot \left(1 + \frac{0.075}{1}\right)^{1 \cdot 25} = 6000 \cdot (1.075)^{25} \rightarrow 6000 \cdot 5.427 = 32562{,}49€$$

$$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \rightarrow 6000 \cdot \left(1 + \frac{0.075}{1}\right)^{2 \cdot 25} = 6000 \cdot (1.0375)^{50} = 6000 \cdot 5.926 = 35556{,}03€$$

49. Tasa Anual Equivalente (T.A.E.). Si colocamos 600 € al 8 % anual con capitalización trimestral, en un año, ¿qué montante genera? A que tanto por ciento debemos colocar el mismo capital para generar el mismo montante si la capitalización es anual.

$$M = C \cdot (1 + i_{trimestral})^4 = 600 \cdot \left(1 + \frac{8}{4}\right)^4 = 600 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 600 \cdot (1{,}02)^4 \approx 649{,}46€$$

50. Calcula el T.A.E. en los siguientes casos:

$$TAE = \left(1 + i_{periodo}\right)^n - 1$$

a) Partiendo del montante que se genera en el problema anterior, cuando los intereses se devengan mensualmente al 3 % anual.

$TAE = \left(1 + i_{periodo}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{3\%}{12}\right)^{12} - 1 = (1 + 0{,}0025)^{12} - 1 = 1.0304 - 1 = 0{,}0304 =$ 3,04%b) Los intereses se devengan trimestralmente al 4 % anual.

$$TAE = \left(1 + \frac{4\%}{4}\right)^4 = (1 + 0{,}01)^4 - 1 = 1{,}0406 - 1 = 0{,}0406 = 4{,}06\%$$

c) Los intereses se devengan diariamente al 5 % anual.

$$TAE = \left(1 + \frac{5}{365}\right)^{365} - 1 = (1 + 1{,}37 \cdot 10^{-4})^{365} - 1 = 1{,}0513 - 1 = 0{,}0513 = 5{,}13\%$$

d) Encuentra la fórmula general para calcular el T.A.E

$$TAE = \left(1 + i_{periodo}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{i_{nom}}{n}\right) - 1$$

51. Una persona compra un piso por 150 000 €. A la firma del contrato entrega 30 000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra un 9 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

$$C = P \cdot \frac{i_m(1+i_m)^n}{(1+i_m)^n - 1} = 120000 \cdot \frac{0{,}0075(1+0{,}0075)^{240}}{(1+0{,}0075)^{240}-1} = 120000 \cdot \frac{0{,}0075 \cdot 5{,}946}{5{,}946-1} =$$

$$= 120000 \cdot \frac{0{,}044595}{4{,}946} = 120000 \cdot 0{,}009017 \approx 1082.04€$$

52. Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 18000 €. La va a pagar mediante cuotas trimestrales de 75 € al 6 % anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?

$$P = C \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \rightarrow 18000 = 75 \cdot \frac{1-(1+0{,}015)^{-n}}{0{,}015} \rightarrow 270 = 75 \cdot (1-(1{,}015)^{-n}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{270}{75} = 1-(1{,}015)^{-n} \rightarrow (1{,}015)^{-n} = 1 - 3{,}6 = -2.6$$

Con 75 € trimestrales no es posible pagar un préstamo de 18 000 € al 6 % anual, nunca terminaría de pagarlo.

53. Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 2000 €. Al comenzar el quinto año, sacamos 6 000 € de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4,5 % anual?

$$C_f = C_i \cdot (1+r)^n \rightarrow$$

Depósito	Años que ganan interés	Fórmula aplicada
Año 1	4 años	$2000 \cdot (1+0{,}045)^4 = 2000 \cdot (1{,}045)^4 \approx 2382{,}03€$
Año 2	3 años	$2000 \cdot (1+0{,}045)^3 = 2000 \cdot (1{,}045)^3 \approx 2281{,}37€$
Año 3	2 años	$2000 \cdot (1+0{,}045)^2 = 2000 \cdot (1{,}045)^2 \approx 2184{,}05€$
Año 4	1 año	$2000 \cdot (1+0{,}045)^2 = 2000 \cdot (1{,}045)^2 \approx 2090€$

$$2382{,}03 + 2281{,}37 + 2184{,}05 + 2090 = 8937{,}45€$$

$$8937{,}45 - 6000 = 2937{,}45€$$

54. ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

$$C_f = C_i \cdot (1+r)^n \rightarrow 2 = (1+r)^n \rightarrow 2^{\frac{1}{n}} = 1 + r \rightarrow r = 2^{\frac{1}{n}} - 1$$

En 20 años: $r = 2^{\frac{1}{20}} - 1 = 3{,}53\%$

En 10 años $r = 2^{\frac{1}{20}} - 1 = 7{,}18\%$

55. ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 54 000 € a 15 años al 5 % anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

$$C = \frac{P \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{54000 \cdot \frac{5}{12} \cdot \left(1 + \frac{5}{12}\right)^{180}}{\left(1+\frac{5}{12}\right)^{180} - 1} = 76865.14€$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a 2

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a 2

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado cuatro

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a 2

2. Considera el polinomio $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. ¿Cuál de los siguientes números enteros es un candidato razonable para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) -11 d)-7

Para que sea raíz debe ser divisor del término independiente, sólo es el 3

Podemos comprobar si es raíz, $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

$p(3) = 2 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 \;=\; 2(81) - 7(27) + 5(9) - 7(3) \;=$

$= \; 162 - 189 + 45 - 21 + 3 = 0$

Respuesta: a) 3

3. La desigualdad 2 < x < 7 se verifica para los valores:

a) 2; 3 y 6 b) 3; 4.7 y 6 c) 3; 5.2 y 7 d) 4; 5 y 8

Respuesta: b) 3; 4.7; 6

4. La solución de la inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ es:

a) x < –10/17 b) x > - 6/10.2 c) x > –10/1.7 d) x < +6/10.2

$$3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x \;\rightarrow\; 3{,}4 \;- 2{,}9x < 9{,}4 + 7{,}3x \;\rightarrow\; -6 - 10.2x < 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow -10{,}2x < 6 \;\rightarrow\; x \succ -\frac{6}{10{,}2}$$

Respuesta: b) $x \succ -\frac{6}{10{,}2}$

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$

Respuesta: a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm **b) base = 2 cm, altura = 3 cm**

c) base = 6 cm, altura = 4 cm **d) base = 9 cm, altura = 2 cm**

Vamos a calcular los posibles perímetros para ir descartando:

a) 4 + 4 + 1 + 1 = 10 es posible
b) 2 + 2 + 3 + 3 = 10 es posible
c) 6 + 6 + 4 + 4 = 20 No es posible
d) 9 + 9 + 2 + 2 = 22 No es posible

La segunda condición no la cumple b) pues la altura es mayor que las base, sin embargo en a)

4 > 2 · 1 , por tanto,

Respuesta: a) base = 4 cm, altura = 1 cm

7. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, -5)$ es:

a) 5x – 3x + 2 < 9x + 2 **b) 8x – 3x + 7 < 9x + 2**

c) 5x – 3x + 2 < 7x + 27 **d) 5x – 3x + 2 > 7x + 27**

$$5x - 3x + 2 > 7x + 27 \rightarrow 2x + 2 > 7x + 27 \rightarrow -5x > 25 \rightarrow x < -5$$

Respuesta: d) 5x – 3x + 2 > 7x + 27

8. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

a) (1, 2) **b) (–∞, 1)** **c) x < 1 U x > 2** **d) (–1, 2)**

$$\frac{2x-3}{x-2} < 1 \rightarrow \frac{2x-3}{x-2} - 1 < 0 \rightarrow \frac{2x-3-(x-2)}{x-2} < 0 \rightarrow \frac{2x-3-x+2}{x-2} < 0 \rightarrow \frac{x-1}{x-2} < 0$$

Los puntos críticos son 1 y 2 puesto que hacen el denominador y numerador cero

Intervalo	$x-1$	$x-2$	$\frac{x-1}{x-2}$
$x < 1$	-	-	+
$1 < x < 2$	+	-	-
$x > 2$	+	+	+

Respuesta: a) (1, 2)

9. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?: $\begin{cases} \mathbf{2x - 5y + 3z = 4} \\ \mathbf{x - 2y + z = 3} \\ \mathbf{5x + y + 7z = 11} \end{cases}$

a) x = 5, y = 0, z = –2 b) x = 5, y = 0, z = 1 c) x = –2, y = 0, z = 5 d) x = 0, y = –1, z = –2

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \rightarrow E1 \leftrightarrow E2 \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 3z = 4 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -2E1 + E2 \\ E3' = -5E1 + E3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = -2 \\ 11y + 2z = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = 11E2' + E3' \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -y + z = -2 \\ 13z = -26 \rightarrow z = -2 \end{cases} \rightarrow -y - 2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x - 2y + z = 3 \rightarrow x - 2 \cdot 0 - 2 = 3 \rightarrow x = 5$$

Respuesta: a) x = 5, y = 0, z = –2

10. En el mercado de ocasión del coche usado nos venden un coche por 3 000 €. La empresa tiene una entidad financiera que cobra un 8 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

a) 136,382 € **b) 136,482 €** **c) 135,383 €** **d) 136,3853 €**

$$A = \frac{P \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \approx \frac{3000 \cdot 0{,}00666}{1-(1+0{,}00666)^{-24}} \approx \frac{20}{1-0{,}8528} \approx 135{,}383€$$

Respuesta: a) 135,383 €

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 3: Funciones
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

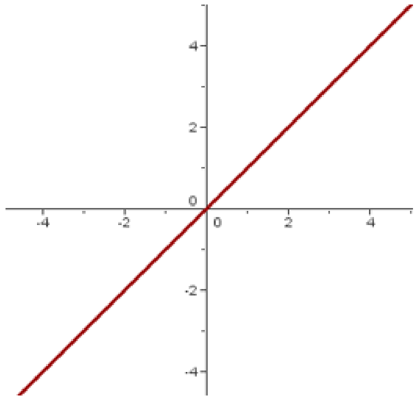
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TIPOS DE FUNCIONES

1. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

f(x) = x

y	-1	0	1
x	-1	0	1



2. Calcula las imágenes de los números: -3; 0; 1; $\frac{-1}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}$; 10 por la función f(x) = $-x^2+2x-3$

f(-3) = $-(-3)^2+2\cdot(-3)-3=-18$

f($\frac{-1}{2}$) $=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{-1}{2}-3=-4{,}25$

f(0) = $0^2+2\cdot 0-3=-3$

f(1) = $-(1)^2+2\cdot 1-3=-2$

f$(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}-3=-5+2\sqrt{2}=-2{,}17$

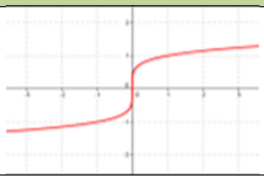
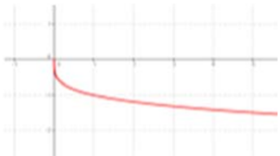
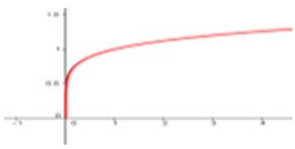
f$\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}-3=-2{,}25$

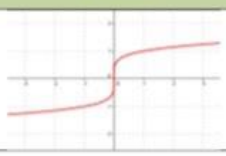
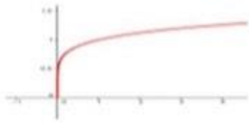
f(10) = $-(10)^2+2\cdot 10-3=-83$

3. Utiliza la recta anterior (y = 3.5x + 42) para obtener el porcentaje de curaciones esperado para una dosis de 7.3 mg.

y = 3.5x + 42 , para x = 7.3, y = 3.5 · 7.3 + 42 = 67.55%

4. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

FUNCIÓN	ÍNDICE Par	ÍNDICE Impar	FUNCIÓN	ÍNDICE Par	ÍNDICE Impar
		x		x	
	x				x

5. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora

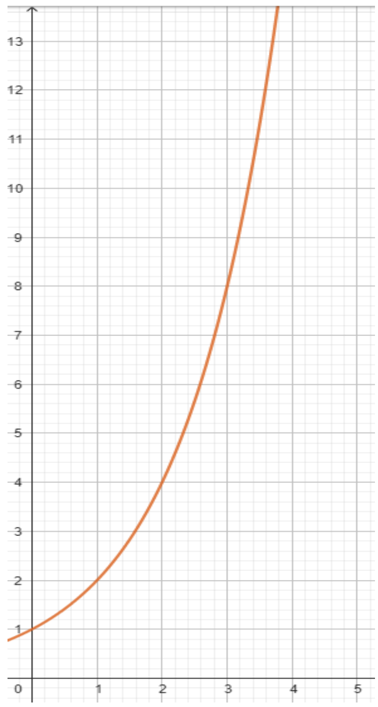
Le damos valores entre 0 y 5

"x" es el número de horas que pasan y "y" es el número de bacterias que hay.

la ecuación sería: $y = f(x) = 2^x$

Esta es la representación gráfica:

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



6. Vuelve a realizar el ejercicio anterior pero ahora suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora

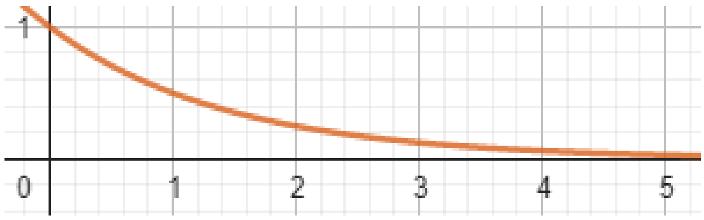
Le damos valores entre 0 y 5

"x" es el número de horas que pasan y "y" es el número de bacterias que hay.

la ecuación sería: $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Esta es la representación gráfica:

x	y
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125



Observamos que, en el primer caso, los valores de "y" aumentan mucho más deprisa y enseguida se salen del papel. Mientras que los valores de "x" aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial.** En el segundo caso, como en lugar de multiplicar se trata de dividir, tenemos un **decrecimiento exponencial.**

7. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

Hacemos las 2 tablas de valores.

Le damos valores entre 0 y 5

Hacemos la representación conjunta:

$y = f(x) = 2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

$y = f(x) = x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

8. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones f(x) = e^x y g(x) = e^{-x}.

f(x)= e^x → y = e^x

Sustituimos x por algunos valores, para así obtener y.

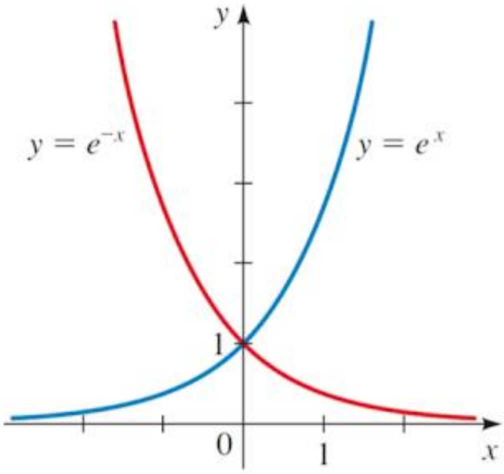
x	-2	-1	0	1	2	3
y	0,135	0,367	1	2,718	7,389	20,085

f(x)= e^{-x} → y = e^{-x}

Sustituimos al igual que antes en esta ecuación:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	7.389	2,718	1	0,367	0,135	0,049

Representamos en la gráfica los valores obtenidos:



9. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2% en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,02.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, ,4 ,5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien que unidades deberás utilizar en los ejes.

Hallar la ecuación. Dice que se cantidad ingresada es de 5 000 euros y que cada año se le multiplica 1,02 de intereses, por lo que la ecuación sería la siguiente:

f(x) = 5 000·1,02^x → C = 5 000·1,02^x

'x' siendo los años que pasan e 'y' siendo la cantidad de dinero resultante obtenida cada año.

a) Se hace una tabla de valores:

x (años)	1	2	3	4	5	10
y (capital)	5 100	5 202	5 306,04	5412,16	5 520,404	6 094,972

f(1) = 5 000·1,02^1 = 5 000·1,02 = 5100

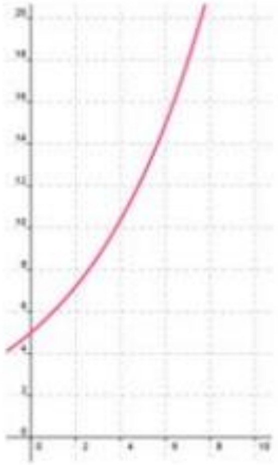
f(2) = 5 000·1,02^2 = 5 000·1,0404 = 5202 f(3) = 5 000·$1{,}02^3$ = 5306,04

f(4) = 5 000·$1{,}02^4$ = 5412,160

f(5) = 5 000·$1{,}02^5$ = 5520,404

f(10) = 5 000·$1{,}02^{10}$ = 6 094,972

c) en el eje de abscisas se representarán los años y en el eje de coordenadas el capital.



10. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 1/3 cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").

b) Representa gráficamente estos datos.

Hallar la ecuación. Si la cantidad de bacterias es de 10 000 000 y se multiplica por $\frac{1}{3}$ cada hora la ecuación sería la siguiente: f(x)=10 000 000·$(\frac{1}{3})^x$. Pero, dice que es a las nueve cuando se tiene ese número de bacterias por lo que se tendrían que restar el número de la hora a 9 para saber las bacterias:

f(x) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-x}$

Siendo 'x' el número de la hora en el que queremos saber las bacterias existentes y siendo 'y' el número de bacterias que hay.

x (horas)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
y (bacterias)	13.717,4	41.152,2	123.456,7	370.370, 3	1.111.111, 1
x (horas)	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
y (bacterias)	3.333.333,3	10.000.000	30.000.000	90.000.000	270.000.000

f(3) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-3}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^6$ = 13.717,4

f(4) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-4}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^5$ = 41.152,2

f(5) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-5}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^4$ = 123.456,7

f(6) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-6}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^3$ = 370.370,3

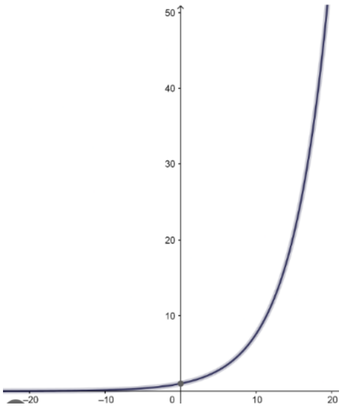
f(7) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-7}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^2$ = 1.111.111,1

f(8) = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^{9-8}$ = 10 000 000·$(\frac{1}{3})^1$ = 3.333.333,3

$f(10) = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{9-10} = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{-1} = 10\,000\,000 \cdot 3 = 30\,000\,000$

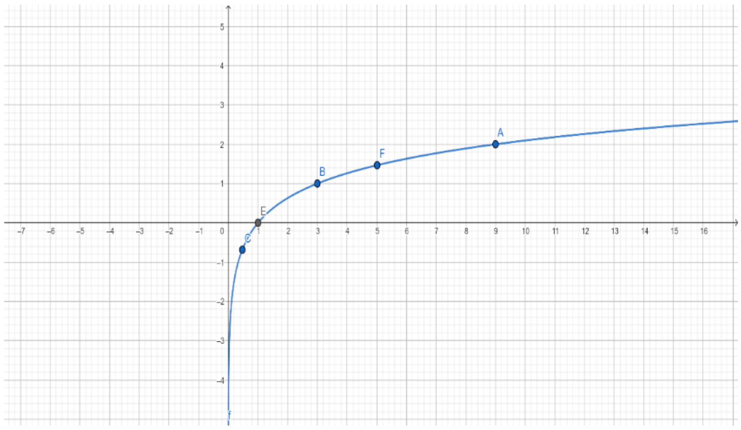
$f(11) = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{9-11} = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{-2} = 90.000.000$

$f(12) = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{9-12} = 10\,000\,000 \cdot (\frac{1}{3})^{-3} = 270.000.000$



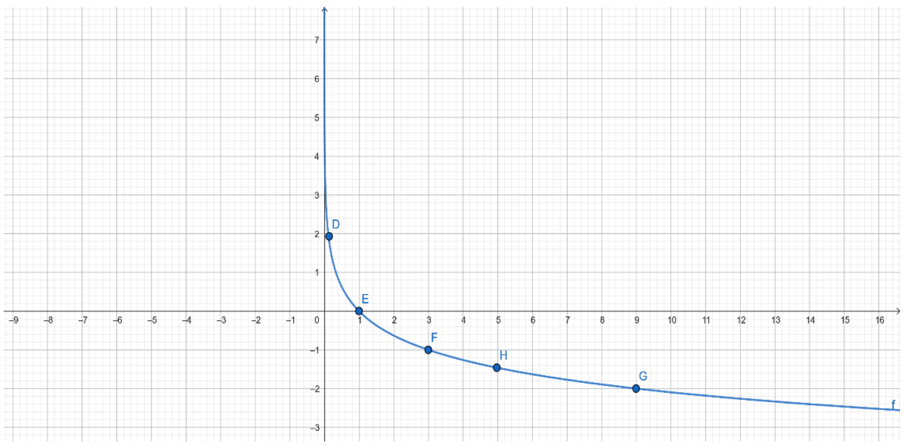
11. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones :

a) $f(x) = log_3(x)$



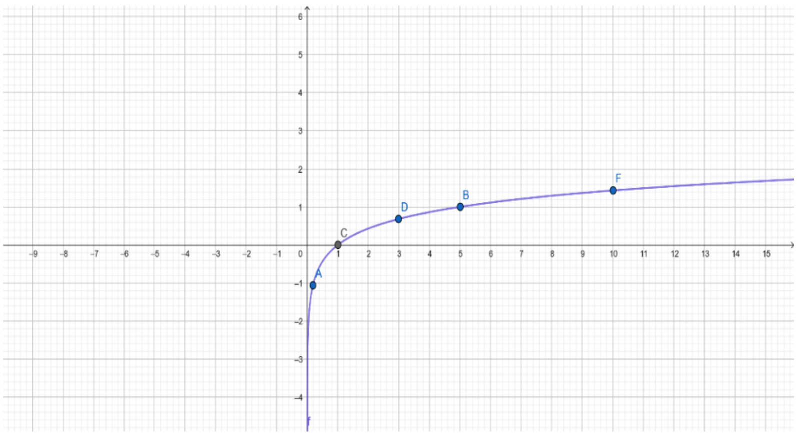
x	$\log_3$ x
0,1	-2,09
0,5	-0,63
0,7	-0,32
1	0
3	1
5	1,46
9	2

b) $f(x) = log\ _{1/3}(x)$



x	$\log_{1/3}$ x
0,1	2,09
0,5	0,63
0,7	0,32
1	0
3	-1
5	-1,46
9	-2

c) $f(x) = log_{1.5}(x)$



x	$\log_{1.5} x$
0,1	-1,43
0,5	-0,43
0,7	-0,22
1	0
3	0,68
5	1
10	1,43

X	1/3	2/3	1	3/2	3	4
$y = log_3 x$	-1	-0.37	0	-0.37	1	1.26
$y = log_{1/3} x$	1	0.37	0	0.37	-1	-1.26
$y = log_{1.5} x$	-2.71	-1	0	1	2.71	3.42

12. Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, -1), donde a es la base.

En efecto todas las gráficas pasan por (1, 0);

y = $\log_3$(x) pasa por (3, 1) y (1/3, -1);

y = $\log_{1/3}$(x) pasa por (1/3, 1) y (3, -1);

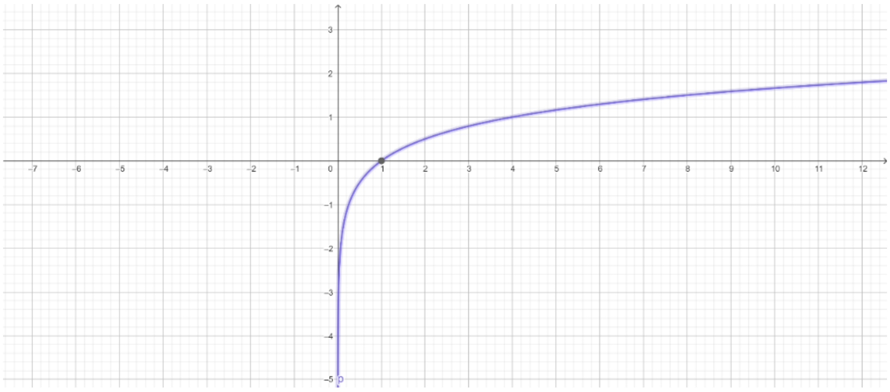
y = $\log_{3/2}$(x) pasa por (3/2, 1) y (2/3, -1).

13. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas.

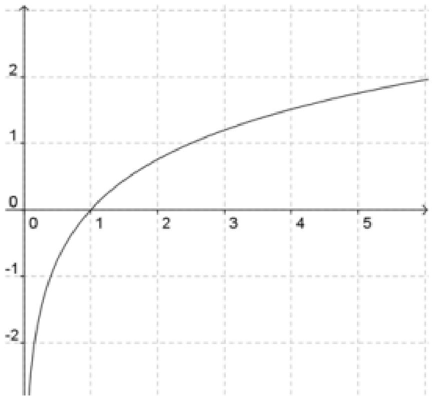
a) $y = log_b x$

Cogemos un punto de la gráfica, (4, 1)

$log_b 4 = 1$, $b^1 = 4$ $b = 4$ $y = log_4 x$



b) $\boldsymbol{y = log_b\, x}$



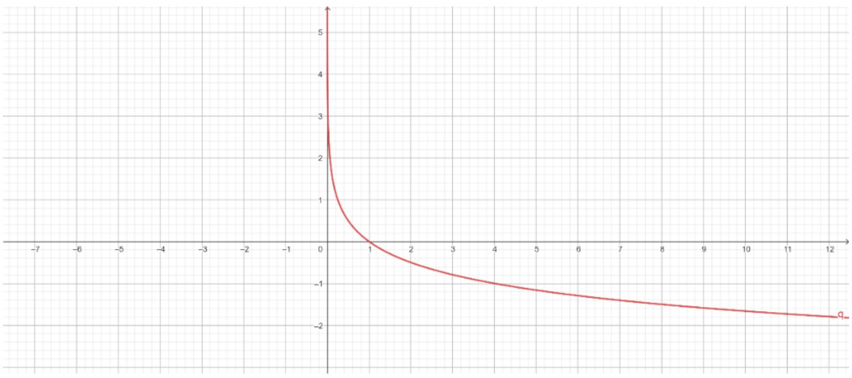
Cogemos un punto de la gráfica (6,2) y los sustituimos en $y = log_b\, x$

$log_b\, 6 = 2$ $\quad b^2 = 6$ $\quad (b^2)^{1/2} = (6)^{1/2}$ $\quad b = 6^{1/2}$ $\quad \boldsymbol{y = log_{\sqrt{6}}\, x}$

c) $\boldsymbol{y = log_b\, x}$

Cogemos un punto de la gráfica (4, -1),

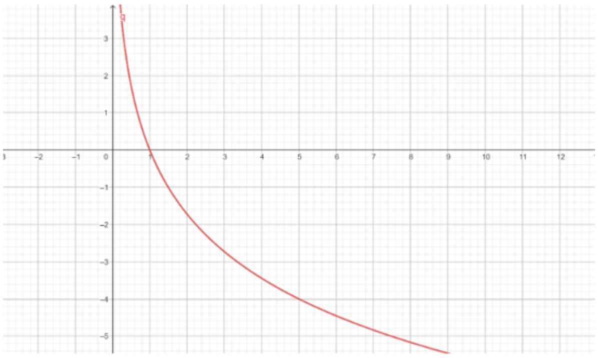
$log_b\, 4 = -1$ $\quad (b)^{-1} = 4$ $\quad b = 4^{-1}$ $\quad b = \frac{1}{4}$ $\quad \boldsymbol{y = log_{1/4}\, x}$



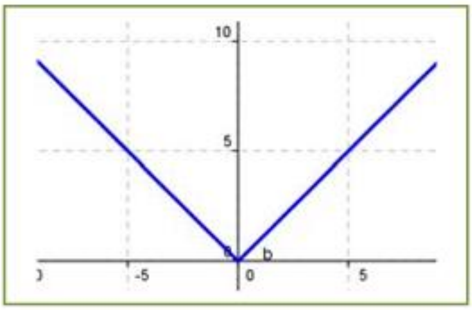
d) $\boldsymbol{y = log_b\, x}$

Cogemos un punto de la gráfica (5,-4)

$log_b\, 5 = -4$ $\quad b^{-4} = 5$ $\quad (b^{-4})^{-1/4} = (5)^{-1/4}$ $\quad b = 5^{-1/4}$ $\quad \boldsymbol{y = log_{5^{-1/4}}\, x}$



14. Representa gráficamente la función valor absoluto.



15. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -4 \\ -x + 2 & si \; -4 \leq x < 0 \\ 5 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$ **Puntos: -6, -4, -1/2, -0.2, 0, 1, 3/2, 4**

$y = x^2 - 1$

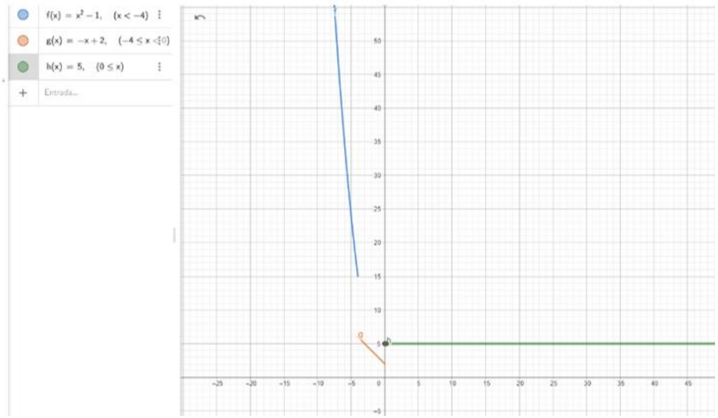
x	y
-4	15
-6	35

y = -x + 2

x	y
-4	6
-0.5	2.5
-0.2	2.2
0	2

y = 5

x	y
0	5
1	5
3/2	5
4	5



b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x < -3 \\ x & si \quad -3 \le x < 2 \\ \sqrt{x} & si \quad 2 \le x \end{cases}$ **Puntos: -5, -3, -1/2, -0.2, 0, 2, 9/4, 4**

$y = \frac{1}{x}$

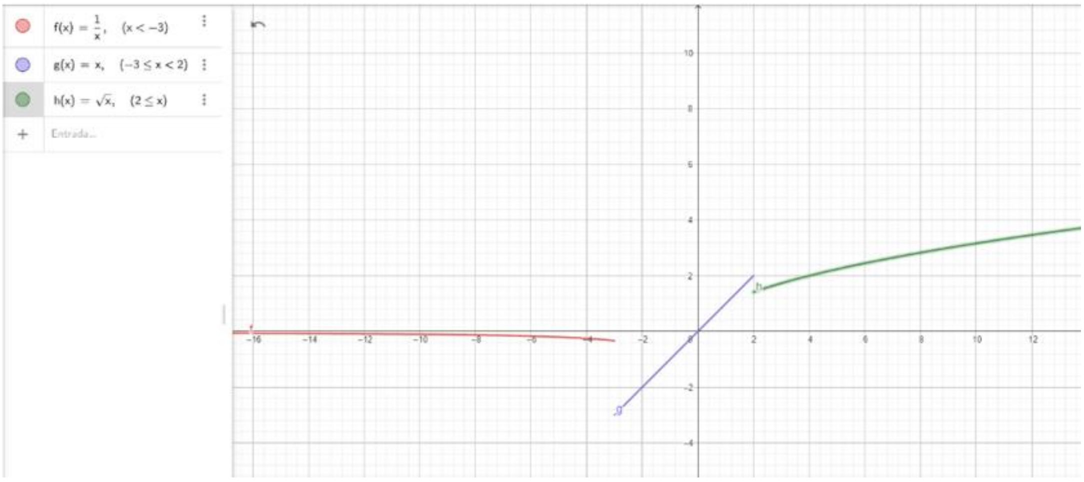
x	y
-3	-0.3
-5	-0.2

y = x

x	y
-3	-3
-1/2	-1/2
-0.2	-0.2
0	0
2	2

$y = \sqrt{x}$

x	y
2	1.41
9/4	1.5
4	2



a)

x	-6	-4	$-1/2$	-0.2	0	1	$3/2$	4
y	35	6	$5/2$	2.2	5	5	5	5

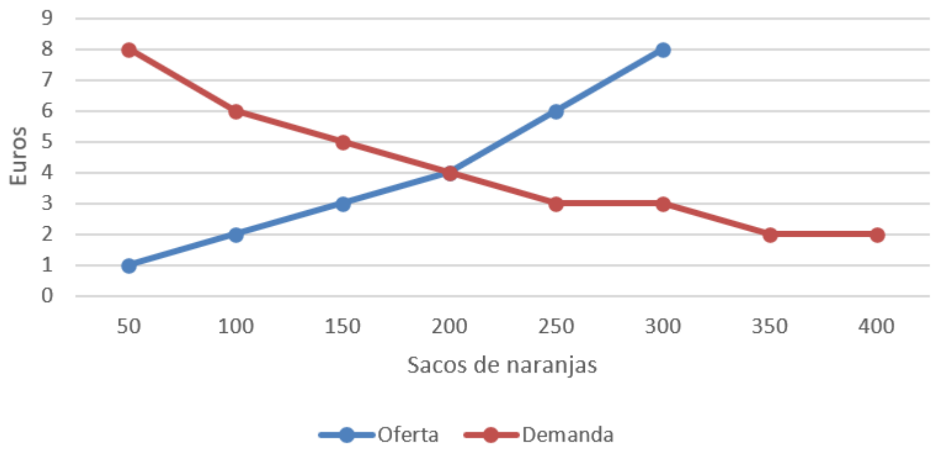
b)

x	-5	-3	$-1/2$	-0.2	0	2	$9/4$	4
y	$-1/5$	-3	$-1/2$	-0.2	0	$\sqrt{2}$	$3/2$	2

16. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades de demandas de naranjas por semanas y en la tercera fila las cantidades ofrecidas.

Precio por saco(euros)	8	6	4	2
Cantidad demanda (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.



Observamos que la función de demanda es una función decreciente, pues al aumentar los precios el consumidor demanda menor cantidad del producto en este caso las naranjas.

La función de oferta excede la cantidad demandada, y al haber depósitos de mercancía no vendida la competencia entre vendedores hará que le precio baje hasta un punto de equilibrio.

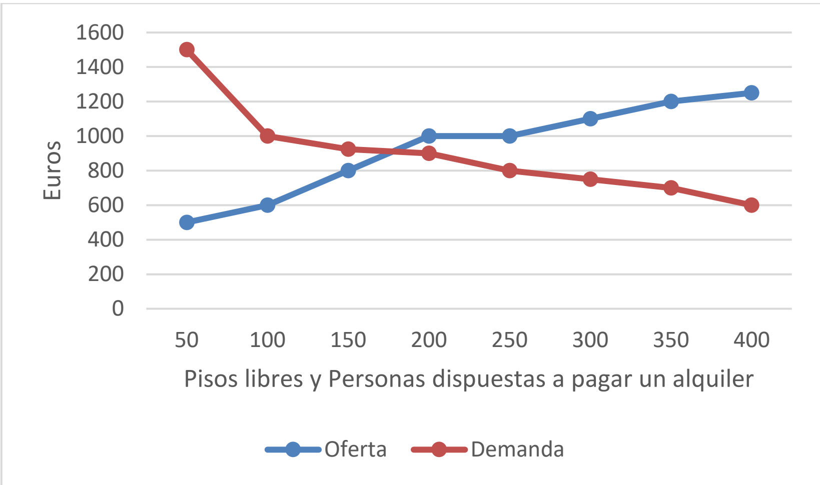
El punto de intersección se encuentra en (200,4), la oferta de 200 sacos y el precio de 4 euros.

17. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de $70m^2$, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean al alquilar un piso, y en la tercera fila los pisos vacíos en una determinada ciudad.

Precio de un piso(euros)	**1500**	**1000**	**500**
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	**10**	**100**	**500**
Cantidad ofrecida (pisos libres)	**600**	**200**	**50**

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio



La intersección entre oferta y demanda es el punto (180, 900), donde la oferta es de 900 euros de alquiler para los 180 pisos, y hay 180 personas con un presupuesto de 900 euros para pagar un alquiler

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

18. Realizar las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$p(x) = -5x + 3$; $q(x) = 2x^2 - x + 7$; $r(x) = -x^3 + 6$

$s(x) = 3x^2 - x$; $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$; $g(x) = \frac{-3}{x}$; $h(x) = \frac{x+1}{x^2}$;

$j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$; $k(x) = e^{x-4}$; $l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; $m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

$n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; $a(x) = L(x-2)$; $b(x) = Log_{10}\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right)$; $d(x) = Log_{10}(x^3 - 1)$

a) (p + q) (x)

$(-5x + 3 + 2x^2 - x + 7) = (2x^2 - 6x + 10) = 2x^3 - 6x^2 + 10x$

b) (q + r) (x)

$(2x^2 - x + 7 + (-x^3 + 6)) = (-x^3 + 2x^2 - x + 13)$

c) (q + r + s) (x)

$(2x^2 - x + 7) + (-x^3 + 6) + (3x^2 - x) = (-x^3 + 5x^2 - 2x + 13)$

d) (s - q) (x)

$3x^2 - x - (2x^2 - x + 7) = 3x^2 - x - 2x^2 + x - 7 = (x^2 - 7)$

e) (q - r) (x)

$(2x^2 - x + 7 - (-x^3 + 6) = 2x^2 - x + 7 + x^3 - 6 = (x^3 + 2x^2 - x + 1)$

f) (r - p) (x)

$(-x^3 + 6 - (2x^2 - x + 7)) = -x^3 - 2x^2 + x - 1 =$

g) (f + p) (x)

$$\left(\frac{2x-4}{x+3} + \frac{-5x+3}{1}\right) = \left(\frac{2x-4+(-5x^2+3x-15x+9)}{x+3}\right) = \left(\frac{-5x^2-10x+5}{x+3}\right)$$

h) (j - f) (x)

$$\left(\frac{-x^2}{x^2-4} - \frac{2x-4}{x+3}\right) = \left(\frac{-x^2\cdot(x+3)-(2x-4)\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)\cdot(x+3)}\right) =$$

$$= \frac{-x^3-3x^2-(2x^3-8x-4x^2+16)}{(x^2-4)\cdot(x+3)} = \frac{-x^3-3x^2-2x^3+8x+4x^2-16}{(x^2-4)\cdot(x+3)} = \frac{-3x^3+x^2+8x-16}{(x^2-4)\cdot(x+3)}$$

i) (g + k)

$$\left(\frac{-3}{x} + e^{x-4}\right)$$

j) (m - a)

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - L(x-2)\right)$$

k) (b + d) (x)

$$Log_{10}\left(\frac{x-1}{3}\right) + Log_{10}(x^3-1) = Log_{10}\left(\frac{x-1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{1}\right) = Log_{10}\left(\frac{x^4-x^3-x+1}{3}\right)$$

l) (r + m) (x)

$$\left(-x^3+6+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

m) (p · q) (x)

$$(-5x+3)\cdot(2x^2-x+7) = (-10x^3+5x^2-7x+6x^2-3x+21) =$$

$$= (-10x^3+11x^2-10x+21)$$

n) (q · r) (x)

$$(2x^2-x+7)(-x^3+6) = (2x^5+x^4-7x^3+12x^2+42)$$

o) (q · r : s) (x)

$$(2x^2-x+7)\cdot(-x^3+6):(3x^2-x) =$$

$$= \frac{-2x^5+12x^2+x^4-6x-7x^3}{3x^2-x} = \frac{-2x^5+x^4-7x^3+12x^2-6x}{x(3x-1)} = \frac{-2x^4+x^3-7x^2+12x-6}{3x-1}$$

p) (p : q) (x)

$$\left(\frac{-5x+3}{2x^2-x-7}\right)$$

q) (f ·p) (x)

$$\left(\frac{2x-4}{x+3}\cdot(-5x+3)\right) = \left(\frac{-10x^2+20x+6x-12}{x+3}\right) = \left(\frac{-10x^2+26x-12}{x+3}\right)$$

r) (j · f) (x)

$$\left(\frac{-x^2}{x^2-4}\cdot\frac{2x-4}{x+3}\right) = \left(\frac{-2x^3+4x^2}{x^3+3x^2-4x-12}\right)$$

s) (g : k) (x)

$$\left(\frac{-3}{x}:e^{x-4}\right) = \left(\frac{-3}{x\cdot e^{x-4}}\right)$$

t) (a·b) (x)

$$\left(L(x-2)\cdot log_{10}\left(\frac{x-3}{3}\right)\right)$$

u) $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q})$ **(x)**

q compuesto de p → (p ∘ q) (x) = p(q(x)) = p $(2x^2 - x + 7\,)$ → donde ponga x en p ponemos q(x) = $2x^2 - x + 7$

$$(p \circ q)\,(x) = p(q(x)) = p\,(2x^2 - x + 7\,) = -5(2x^2 - x + 7) + 3 =$$
$$= -10x^2 + 5x - 35 + 3 = -10x^2 + 5x - 32$$

v) $(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})$ **(x)**

b compuesto de a → (a ∘ b) (x) = a(b(x)) = a $(\log\left(\frac{x-1}{2}\right))$ → donde ponga x en a ponemos

b(x) = $\log\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$$(a \circ b)\,(x) = a(b(x)) = a\,(\log\left(\frac{x-1}{2}\right)) = L\left(\left(\log\frac{x-1}{2}\right) - 2\right)$$

w) $(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{s})$

s compuesto de r → (r ∘ s) (x) = r(s(x)) = r($3x^2 - x$) → donde ponga x en r ponemos

s(x) = $3x^2 - x$

(r ∘ s) (x) = r(s(x)) = r($3x^2 - x$) = $(-(3x^2 - x)^3 + 6)$

calculamos aparte $(3x^2 - x)^3 = (3x^2 - x)\cdot(3x^2 - x)\cdot(3x^2 - x) =$

$= (9x^4 - 6x^3 + x^2)\cdot(3x^2 - x) = 27x^6 - 18x^5 + 3x^4 - 9x^5 + 6x^4 - x^3 =$

$= 27x^6 - 27x^5 + 9x^4 - x^3$

(r ∘ s) (x) = r(s(x)) = r($3x^2 - x$) = $(-(3x^2 - x)^3 + 6) = (-(27x^6 - 27x^5 + 9x^4 - x^3) + 6) =$

$= -27x^6 + 27x^5 - 9x^4 + x^3 + 6$

x) (f ∘ p) (x)

$$(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(-5x + 3) = \left(\frac{2(-5x+3)-4}{(-5x+3)+3}\right) = \left(\frac{-10x+2}{-5x+6}\right)$$

y) (j ∘ f) (x)

$$(j \circ f)(x) = j\big(f(x)\big) = j\left(\frac{2x-4}{x+3}\right) = \left(\frac{-\left(\frac{2x-4}{x+3}\right)^2}{\left(\frac{2x-4}{x+3}\right)^2 - 4}\right) = \left(\frac{-\frac{(2x-4)^2}{(x+3)^2}}{\frac{(2x-4)^2}{(x+3)^2} - 4}\right) = \left(\frac{-\frac{(2x-4)^2}{(x+3)^2}}{\frac{(2x-4)^2 - 4\cdot(x+3)^2}{(x+3)^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{(2x-4)^2}{(2x-4)^2 - 4\cdot(x+3)^2}\right) = \left(\frac{4x^2 - 16x + 16}{4x^2 - 16x + 16 - 4\cdot(x^2 + 6x + 9)}\right)$$

z) (g ∘ k)(x)

$$(g \circ k)(x) = g\big(k(x)\big) = g(e^{x-4}) = \frac{-3}{e^{x-4}}$$

19. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

· $\boldsymbol{p(x) = -5x + 3} \rightarrow y = -5x + 3 \rightarrow x = -5y + 3 \rightarrow y = \frac{3-x}{5}$

· $\boldsymbol{q(x) = 2x^2 - x + 7} \rightarrow y = 2x^2 - x + 7 \rightarrow$ No existe función inversa porque cualquier elemento tiene dos imágenes y una función puede tener a lo sumo una imagen

· $\boldsymbol{r(x) = -x^3 + 6} \rightarrow y = -x^3 + 6 \rightarrow x^3 = -y + 6 \rightarrow y = \sqrt[3]{-x + 6}$

· $\boldsymbol{s(x)=3x^2-x} \rightarrow y=3x^2-x \rightarrow$No existe por el mismo motivo que en el apartado q(x)

· $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x-4}{x+3}} \rightarrow y=\frac{2x-4}{x+3} \rightarrow y\cdot(x+3)=2x-4 \rightarrow xy+3y=2x-4 \rightarrow$
$xy-2x=-3y-4 \rightarrow x(y-2)=-3y-4 \rightarrow x=\frac{-3y-4}{y-2} \rightarrow y=\frac{3x+4}{2-x}$

· $\boldsymbol{g(x)=\frac{-3}{x}} \rightarrow y=\frac{-3}{x} \rightarrow x=\frac{-3}{y} \rightarrow y=\frac{-3}{x}$

· $\boldsymbol{h(x)=\frac{x+1}{x^2}} \rightarrow y=\frac{x+1}{x^2} \rightarrow x=\frac{x+1}{x^2} \rightarrow$No existe función inversa

· $\boldsymbol{j(x)=\frac{-x^2}{x^2-4}} \rightarrow y=\frac{-x^2}{x^2-4} \rightarrow$No existe función inversa

· $\boldsymbol{k(x)=e^{x-4}} \rightarrow y=e^{x-4} \rightarrow x=e^{y-4} \rightarrow \ln(e^{y-4})=\ln(x) \rightarrow (y-4)\ln(e)=\ln(x) \rightarrow$
$(y-4)\cdot 1=\ln(x) \rightarrow y-4=\ln(x) \rightarrow y=\ln(x)+4$

· $\boldsymbol{l(x)=2^{\frac{1}{x}}} \rightarrow y=2^{\frac{1}{x}} \rightarrow x=2^{\frac{1}{y}} \rightarrow x=\log_2\frac{1}{y} \rightarrow x=\frac{1}{\log_2 y} \rightarrow y=\frac{1}{\log_2 x}$

· $\boldsymbol{m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x} \rightarrow y=\left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow x=\left(\frac{2}{3}\right)^y \rightarrow x=log_{\frac{2}{3}}y \rightarrow y=log_{\frac{2}{3}}x$

· $\boldsymbol{n(x)=e^{\frac{x}{x-1}}} \rightarrow y=e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow x=\ e^{\frac{y}{y-1}} \rightarrow \ln\left(e^{\frac{y}{y-1}}\right)=\ln(x) \rightarrow \frac{y}{y-1}\ln(e)=\ln(x) \rightarrow$
$\frac{y}{y-1}=\ln(x) \rightarrow (y-1)\ln(x)=y \rightarrow ylnx-lnx=y\ \rightarrow ylnx-y=lnx \rightarrow y=\frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}$

$\boldsymbol{a(x)=Ln(x-2)} \rightarrow y=Ln(x-2) \rightarrow x=Ln(y-2) \rightarrow e^x=y-2 \rightarrow y=e^x+2$

$\boldsymbol{b(x)=\log\left(\frac{x-1}{3}\right)} \rightarrow y=\log\left(\frac{x-1}{3}\right) \rightarrow x=\log\left(\frac{y-1}{3}\right) \rightarrow 10^x=\frac{y-1}{3} \rightarrow 3\cdot 10^x=y-1 \rightarrow$
$y=3\cdot 10^x+1$

$\boldsymbol{c(x)=L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right)} \rightarrow y=L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \rightarrow x=L\frac{y^2-1}{2y+4} \rightarrow$No existe función inversa

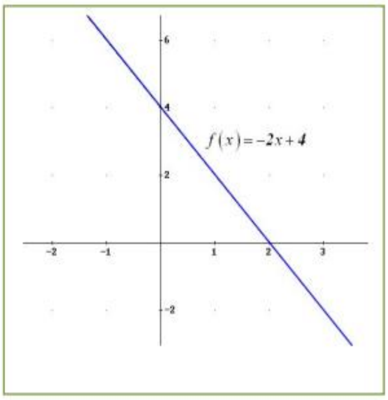
$\boldsymbol{d(x)=\log(x^3-1)} \rightarrow y=log(x^3-1) \rightarrow x=\log(y^3-1) \rightarrow 10^x=y^3-1 \rightarrow$
$y^3=10^x+1 \rightarrow y=\sqrt[3]{10^x+1}$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) p(x)	$y=\frac{(3-x)}{5}$	b) q(x)	No existe
c) r(x)	$\sqrt[3]{-x+6}$	d) s(x)	No existe
e) f(x)	$y=\frac{(3x+4)}{2-x}$	f) g(x)	$y=\frac{(-3)}{x}$
g)h(x)	No existe	h)j(x)	No existe

i) k(x)	$y = ln(x) + 4$	j) l(x)	$y = \frac{1}{\log_2 x}$
k) m(x)	$y = \log_{\frac{2}{3}} x$	l) n(x)	$y = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$
m) a(x)	$y = 2 + e^x$	n) b(x)	$y = 1 + 3 \cdot 10^x$
o) c(x)	No existe	p) d(x)	$y = \sqrt[3]{1 + 10^x}$

20. Calcula la función inversa de:

$\boldsymbol{f(x) = -2x + 4}$



Para realizar la inversa de esta función, llamamos y a f(x)

$y = -2x + 4$,

Despejamos x en función de y: $x = \frac{-y+4}{2}$

Y finalmente, cambiamos x e y: $y = \frac{-x+4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

21. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-3}$		b) $j(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		d) $k(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$		f) $l(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$		h) $m(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$	

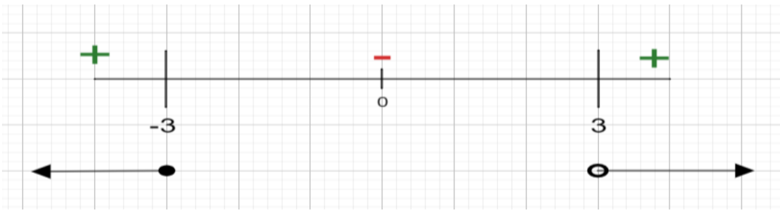
a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-3}} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow Dom\ f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R}\ /h(x) = 0\}$

$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$

b) $\mathbf{f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /g(x) \geq 0\}$

$\rightarrow \frac{x+3}{x-3} \geq 0 \rightarrow$ Raíces numerador: $x = -3$ / Raíces denominador: $x = 3$

En x = 0 $\rightarrow \frac{0+3}{0-3} \geq 0 \rightarrow -1 \leq 0$

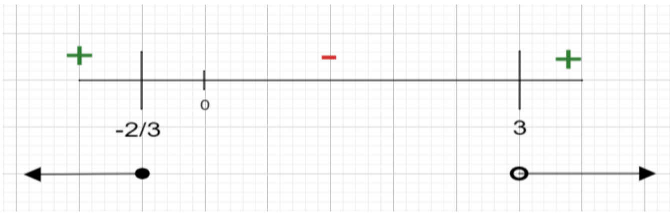


$Dom\ f(x)= (-\infty,-3] \cup (3,\infty)$

c) $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\frac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x-3}}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /g(x) \geq 0\}$

$\rightarrow \frac{3x+2}{x-3} \geq 0 \rightarrow$ Raíces numerador: $3x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$ /Raíces denominador: $x = 3$

En x = 0 $\rightarrow \frac{3 \cdot 0+2}{0-3} \geq 0 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq 0$



$Dom\ f(x) = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup (3,\infty)$

d) $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x^2-1}}{\mathbf{x^2-4}} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow\ Dom\ f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R}\ /h(x) = 0\}$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-2\ ,\ 2\}$

e) $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow\ Dom\ f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R}\ /h(x) = 0\}$

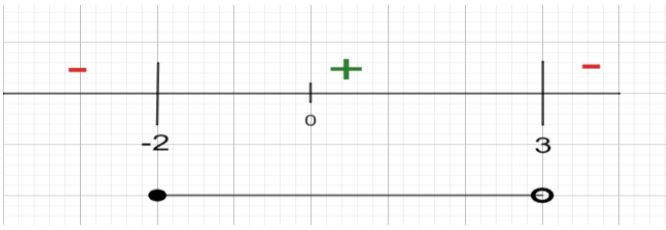
$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

f) $\mathbf{f(x)} = \sqrt{\frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{3-x}}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow Dom\ f(x) = \{x \in \mathbb{R}\ /g(x) \geq 0\}$

$\frac{x+2}{3-x} \geq 0 \rightarrow$ Raíces numerador: $x = -2$ /Raíces denominador: $x = 3$

En x = 0 $\rightarrow \frac{0+2}{3-0} \geq 0 \rightarrow \frac{2}{3} \geq 0$



$Dom\ f(x) = [-2,3)$

g) $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x^2+1}}{\mathbf{x^2-1}} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow\ Dom\ f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R}\ /h(x) = 0\}$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

h) $\mathbf{f(x)} = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow Dom\ f(x) = Dom\ g(x)$

$\frac{x+1}{x-1} = 0 \rightarrow Dom\ g(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R}\ /h(x) = 0\} \quad \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a, $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-3}$	$\{x\in\Re;\ x\neq\pm\sqrt{3}\}$	b) $j(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-3$ o bien $x>3\}$
c) $g(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-2/3$ o bien $x>3\}$	d) $k(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-4}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 2,\ x\neq -2\}$
e, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1\}$	f) $l(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	$\{x\in\Re;\ x>-2$ y además $x<3\}$
g, $i(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1,\ x\neq -1\}$	h) $m(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1\}$

22. Estudia la simetría del resto de las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante.

Las funciones tangente, cotangente y cosecante son impares. La función secante es par.

23. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x+2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3 - 5\right)$$

a) p(x) = -x + 3

Como sabemos que es una función polinómica su dominio serán todos los reales: Domp = $\mathbb{R}$

b) q(x) = $\sqrt{2x^2 - x + 7}$

Como sabemos que en las funciones irracionales si el índice es par, domq: {x∈ $\mathbb{R}$ /f(x)≥0}

Como f(x)= $2x^2 - x + 7$, es siempre positiva, Domq: $\mathbb{R}$

c) r(x) = $\sqrt[4]{-x^3 - 1}$

Como sabemos que en las funciones irracionales si el índice es par, domq: {x∈ $\mathbb{R}$ /f(x)≥0}

Calculamos f(x): $-x^3 - 1$≥0 →$-x^3 - 1$=0 y con la calculadora nos da x≤-1

Domr: (-∞,-1]; Domr: {x∈ $\mathbb{R}$; x ≤ −1}

d) s(x) = $\sqrt[3]{3x^2 - x}$

Como el índice es impar, Doms = Domf ; f(x): $3x^2 - x$ es polinómica, Doms: $\mathbb{R}$

e) f(x) = $\frac{2x-4}{x+3}$

Sabemos que Domf= ℝ - {x∈ ℝ /h(x)=0}
h(x): x+3=0; x=-3; Domf: ℝ -{-3} →{x∈ ℝ; x ≠ −3}

f) g(x) = $\frac{-3}{x}$

f(x) = x; x = 0; Domg = ℝ -{0} →{x∈ ℝ; x ≠ 0}

g) h(x) = $\frac{x+1}{x^2+1}$

f(x) = $x^2 + 1$ =0; $x^2 = -1$; $x = \sqrt{-1}$; Domh: ℝ

h) j(x) = $\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$

f(x) = $x^2 - 4$=0; $x^2 = 4$; x=$\sqrt{4}$; $x = 2$; $x = -2$; Domj: ℝ -{2; -2} →{x∈ ℝ; x ≠ −2 y x ≠ 2}

i) k(x) = e^{x-4}

Sabemos que Domk=Domf(x)
Como f(x) = x - 4 , es una función polinómica, Domk: ℝ

j) l(x) = $2^{\frac{1}{x}}$

f(x) = x = 0; Doml: ℝ -{0}

k) m(x) = $(\frac{2}{3})^{x+1}$

Como f(x) = x+1 es una función polinómica, Domm: ℝ

l) n(x) = $e^{\frac{x}{x^2-1}}$

f(x) = x^2 - 1 ≥ 0; x^2-1=0; x = -1; x = 1
Domn:{x∈ ℝ; x ≠ −1 y x ≠ 1}

m) a(x) = L(x+2)

Sabemos que dom*a*: {x∈ ℝ /f(x)>0}
f(x) = x + 2 > 0; x > -2; doma:{x∈ ℝ /x>-2}

n) b(x) = log($\frac{x^2}{4}$**)**

Sabemos que Dom*n*:{x∈ ℝ /f(x)>0} porque es una función logarítmica.
f(x) = $\frac{x^2}{4}$ > 0 ; $x^2 = 0; x = \sqrt{0}; x = 0$; Domb: {x∈ ℝ; x ≠ 0}

o) c(x) = L($\frac{x^2+1}{2x+4}$**)**

Sabemos que Domc:{x∈ ℝ /f(x)>0}
f(x)= $\frac{x^2+1}{2x+4} > 0$
$x^2 + 1 = 0 \to x^2 = -1 \to x = \sqrt{-1}$ = no es número real
$2x + 4 = 0$ →2x=-4→ $x = \frac{-4}{2} \to x = -2$
Domc:(-2,∞)

p) d(x) = log($x^3 - 5$**)**

Sabemos que Domd:{x∈ ℝ /f(x)>0} por ser una función logarítmica.

$x^3 - 5 > 0$; $x^3 > 5$; $x > \sqrt[3]{5}$

Domd: {x∈ ℝ; x > $\sqrt[3]{5}$}

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$	$\Re$	b) $q(x)$	$\Re$
c) $r(x)$	$\{x\in\Re;\ x<-1\}$	d) $s(x)$	$\Re$
e) $f(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-3\}$	f) $g(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq 0\}$
g) $h(x)$	$\Re$	h) $j(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-2 \text{ y } x\neq 2\}$
i) $k(x)$	$\Re$	j) $l(x)$	$\Re$
k) $m(x)$	$\Re$	l) $n(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-1 \text{ y } x\neq 1\}$
m) $a(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	n) $b(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq 0\}$
o) $c(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	p) $d(x)$	$\{x\in\Re;\ x>\sqrt[3]{5}\}$

24. Calcula los puntos de cortes con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

Para calcular el corte con el eje de ORDENADAS hay que sustituir x por cero y para el corte con el eje de ABSCISAS hay que igualar a cero y resolver.

- **a) p(x) = -5x+3**

  ORDENADAS: -5·0 + 3 = 3 Punto de corte = (0,3).

  ABSCISAS = -5x + 3 = 0 , x = 3/5 Punto de corte = (3/5,0)

- **b) q(x) = $\sqrt{2x^2 - x + 7}$**

  ORDENADAS: $\sqrt{2 \cdot 0^2 - 0 + 7} = \sqrt{7}$ Punto de corte = (0, $\sqrt{7}$)

  ABSCISAS no tiene ningún punto de corte con ABSCISAS

- **c) r(x) = $\sqrt[4]{-x^3 - 1}$**

  ORDENADAS no tiene ya que al sustituir por cero no hay resultado por lo que no hay ningún punto de corte con ordenadas

  ABSCISAS: $\sqrt[4]{-x^3 - 1} = 0$; $-x^3 - 1 = 0$; $x = -1$ Punto de corte con abscisas (-1, 0)

- **d) s(x) = $\sqrt[3]{3x^2 - x}$**

  ORDENADAS: $\sqrt[3]{3 \cdot 0^2 - 0} = 0$ Punto de corte (0,0)

  ABSCISAS: $\sqrt[3]{3x^2 - x} = 0$; $3x^2 - x = 0$; $x(3x - 1) = 0$

  1. x = 0
  2. 3x – 1 = 0 por lo que 3x = 1 por lo que x = 1/3

  Puntos de corte (0, 0), (1/3, 0)

- *e)* $\mathbf{f(x) = \frac{2x-4}{x+3}}$

  ORDENADAS*:* $\frac{2\cdot 0-4}{0+3} = \frac{-4}{3}$ punto de corte(-4/3, 0)

  ABSCISAS*:* $\frac{2x-4}{x+3} = 0$; $2x - 4 = 0$; por lo que *x* = 4/2 = 2 punto de corte (2, 0)

- *f)* $\mathbf{g(x) = \frac{-3}{x}}$

  ORDENADAS :no tiene ningún punto de corte

  ABSCISAS: no se hace cero por lo que no tiene ningún punto de corte

- *g)* $\mathbf{h(x) = \frac{x+1}{x^2-1}}$

  ORDENADAS: $\frac{0+1}{0^2-1} = -1$ punto de corte (0, -1)

  ABSCISAS: $\frac{x+1}{x^2-1} = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$ punto de corte (-*1*, *0*)

- *h)* $\mathbf{j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}}$

  ORDENADAS: $\frac{-0^2+2\cdot 0}{0^2-4} = 0$ Punto de corte (0,0)

  ABSCISAS : $-x^2 + 2x = 0$; $x(-x+2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$

  Punto*s* de corte (0,0),(2,0)

- **i)** $\boldsymbol{k(x) = e^{x-4}}$

  ORDENADAS : $e^{0-4} = e^{-4}$ Punto de corte (0, e^{-4})

  ABSCISAS: no tiene ningún punto de corte con eje de AB*S*CISAS

- *j)* $\mathbf{l(x) = 2^{\frac{1}{x}}}$

  ORDENADAS*:* $2^{\frac{1}{0}}$ *no existe*

  ABSCISA*S:* $2^{\frac{1}{x}} = 0$ *no tiene solución*

- *k)* $\mathbf{m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}}$

  ORDENADAS*:* $\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1} = \frac{2}{3}$ punto de corte (0, 2/3)

  ABSCISAS: no tiene punto*s* de corte

- *l)* $\mathbf{n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}}$

  ORDENADAS : $e^{\frac{0}{0^2-1}} = e^0 = 1$ punto de cort*e* (0, 1)

  ABSCISAS $e^{\frac{x}{x^2-1}} = 0$ *no tiene solución*

- *m)* **a(x) = L(x+2)**

  ORDENADAS: L(0+2) = L(2) punto de corte (0, L(2))

  ABSCISAS:L(x+2)=0 *; x + 2 = 1 ; x = -1* Punto de corte (-1,0)

- *n)* $\mathbf{b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right)}$

  ORDENADAS*:* $\log\left(\frac{0^2}{4}\right)$ no hay ningún punto de co*rte*

ABSCISAS: $\log\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0$; $\frac{x^2}{4} = 1$; $x^2 = 4$; $x = -2$; $x = 2$
Puntos de corte (-2, 0), (2, 0)

- ***o)*** $\mathbf{c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right)}$

  ORDENADAS: $L\left(\frac{0^2+1}{2\cdot 0+4}\right) = L\left(\frac{1}{4}\right)$ Punto de corte $(0, L\left(\frac{1}{4}\right))$
  ABSCISAS: $L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) = 0$; $\frac{x^2+1}{2x+4} = 1$; $x^2 + 1 = 2x + 4$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = -1$, $x = 3$
  Puntos de corte (-1, 0) (3, 0)

- ***p)*** $\mathbf{d(x) = \log(x^3 - 5)}$

  ORDENADAS: $\log(0^3 - 5) = \log(-5)$ *no tiene punto de corte*
  ABSCISAS: $\log(x^3 - 5) = 0$; $x^3 - 5 = 1$; $x^3 = 6$; $x = \sqrt[3]{6}$ *punto de corte (*$\sqrt[3]{6}$*, 0)*

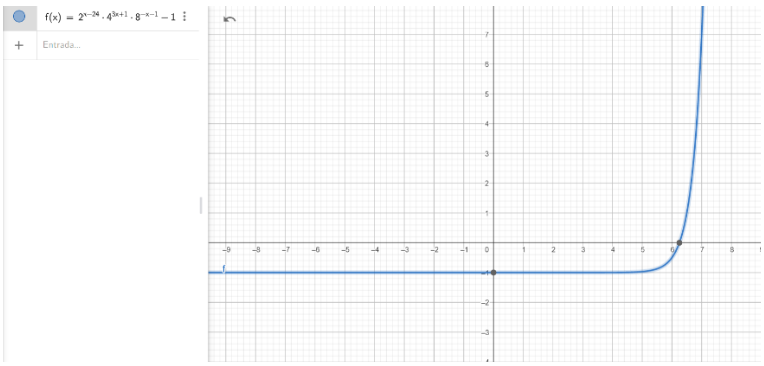
FUNCION	PUNTOS CORTES EJES		FUNCION	PUNTOS CORTES EJES	
	ORDENADAS	ABSCISAS		ORDENADAS	ABSCISAS
p(x)	(0,3)	(3/5,0)	**q(x)**	(0, $\sqrt{7}$))	NINGUNO
r(x)	NINGUNO	(-1,0)	**s(x)**	(0,0)	(0,0), (1/3,0)
f(x)	(0,-4/3)	(2,0)	**g(x)**	NINGUNO	NINGUNO
h(x)	(0,1)	(-1,0)	**j(x)**	(0,0)	(0,0)(2,0)
k(x)	(0, e^{-4}))	NINGUNO	**l(x)**	(0,0)	(0,0)
m(x)	(0,2/3)	NINGUNO	**n(x)**	(0,1)	*NINGUNO*
a(x)	(0,L(2))	(-1,0)	**b(x)**	NINGUNO	(-2,0),(2,0)
c(x)	(0,L(1/4))	(-1,0)	**d(x)**	NINGUNO	($\sqrt[3]{6}$, 0)

25. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{-x-1} - 1$ $\quad h(x) = x^3 + 4x$ $\quad k(x) = e^{-2x} - 22$

$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1$ $\quad j(x) = \sqrt{15x - 3\sqrt{-x-9}}$ $\quad l(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

a) f(x) = $\mathbf{2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{x-1} - 1}$ => f(-x) = $2^{-x-24} \cdot 4^{-3x+1} \cdot 8^{x-1} - 1$; -f(-x) = $-2^{-x-24} \cdot 4^{-3x+1} \cdot 8^{x-1} + 1$
Como f(x) es distinto de f(-x), no es una función par
Como f(x) es distinto de -f(-x), no es una función impar
f(0) = $2^{0-24} \cdot 4^{3\cdot 0+1} \cdot 8^{0-1} - 1$; Corte eje Y en (0,-1) aproximadamente.
f(x) = $2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{x-1} - 1 = 0$ => x= 25/4 = 6,25 => Corte de X en (6,25 , 0)

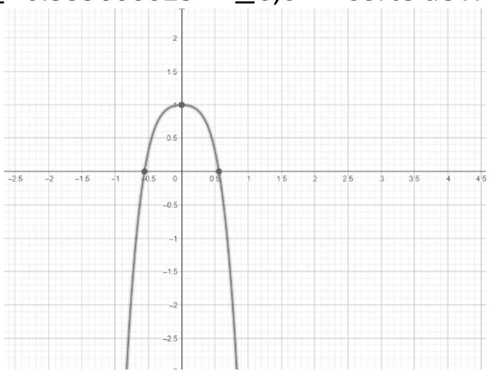


b) $g(x) = -7x^4 - x^2 + 1$ => $g(-x) = -7(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = -7x^4 - x^2 + 1$

Como g(x) es igual que g(-x), es una función par

$g(0) = -7\cdot0 - 0 + 1 =$ Corte de Y en (0, 1)

$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\ 0.559666023 \approx \pm 0{,}6$ => Corte de X en (-0,6 , 0) y (0,6 , 0)



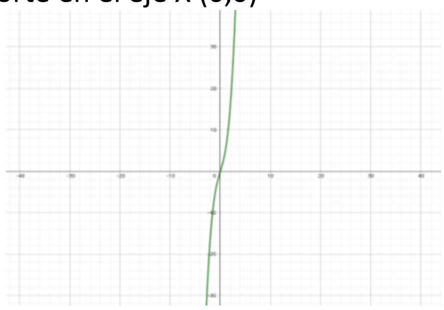
c) $h(x) = x^3 + 4x$ => $h(-x) = (-x)^3 + 4(-x) = -x^3 - 4x$ => $-h(-x) = -(-x^3 - 4x) = x^3 + 4x$

Como h(x) es distinto de h(-x), no es una función par

Como h(x) es igual de -h(-x), es una función impar

$h(0) = 0^3 + 4\cdot0 = 0$ => Corte en el eje Y (0, 0)

$h(x) = x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ => Corte en el eje X (0,0)



d) $j(x) = \sqrt{15x - 3\sqrt{-x-9}}$

Como j(x) es distinto de j(-x), no es una función par

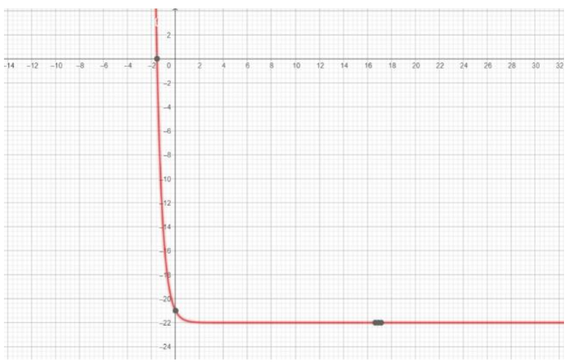
Como j(x) es distinto de -j(-x), no es una función impar

e) $k(x) = e^{-2x} - 22$ => $k(-x) = e^{2x} - 22$

Como k(x) no es igual a k(-x) ni a -k(-x), no es par ni impar

$k(0) = 1 - 22 = -21$ Corte en el eje Y (0, -21)

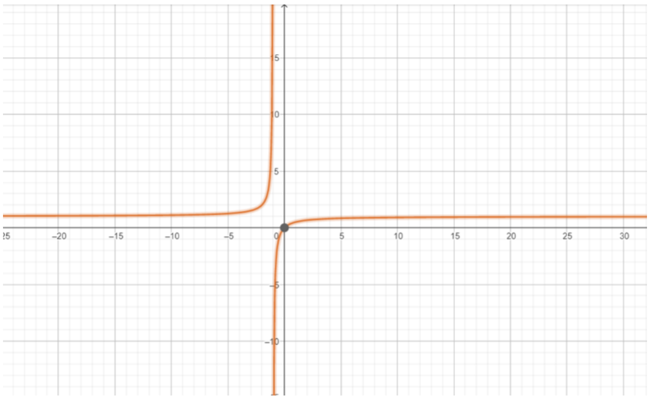
$k(x) = e^{-2x} - 22 = 0 \Rightarrow x = -1{,}545521227 \approx -1{,}55$ Corte en el eje X (-1,55, 0)



f) l(x) = $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$ => l(-x) = $\frac{-x}{-x+1}$

Como l(x) es distinto a l(-x) y a -l(-x), no es par ni impar

l(0) = $\frac{0}{0+1} = 0$ Con el eje Y y con el eje X (0,0)



26. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x+3 \;\; ; \;\; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \;\; ; \;\; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \;\; ; \;\; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \;\; ; \;\; g(x) = \frac{-3}{x} \;\; ; \;\; h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \;\; ; \;\; j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \;\; ; \;\; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \;\; ; \;\; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \;\; ; \;\; n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

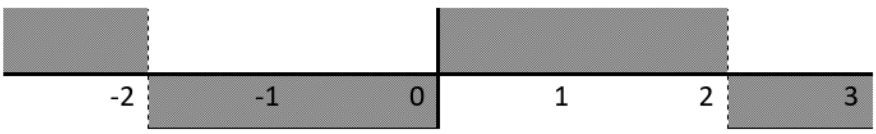
$$a(x) = L(x+2) \;\; ; \;\; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;\; ; \;\; c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;\; ; \;\; d(x) = \log\left(x^3 - 5\right)$$

Aprovechamos los puntos de corte con el eje X calculados en el ejercicio 24

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$	$x < 3/5$	$x > 3/5$	b) $q(x)$	$\Re$	-----
c) $r(x)$	$x < -1$	-----	d) $s(x)$	$x < 0$ y $x > 1/3$	$0 < x < 1/3$
e) $f(x)$	$x > 2$	$x < 2$	f) $g(x)$	$x < 0$	$x > 0$
g) $h(x)$	$x > -1$	$x < -1$	h) $j(x)$	$-2 < x < 0$	$x < -2$ y $x > 0$
i) $k(x)$	$\Re$	-----	j) $l(x)$	$\Re$	-----
k) $m(x)$	$\Re$	-----	l) $n(x)$	$\Re$	-----
m) $a(x)$	$x > -1$	$-2 < x < -1$	n) $b(x)$	$x < -2$ o $x > 2$	$-2 < x < 2$
o) $c(x)$	$x < -1$ y $x > 3$	$-1 < x < 3$	p) $d(x)$	$x > \sqrt[3]{5}$	$\log(5) < x < \sqrt[3]{5}$

27. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo: la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Polos: } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$$



Aprovechamos los signos del ejercicio 26.

a)	*0 3/5*			*b) q(x)*	*0 1 2*		
		1 2					

c)	*-1*			*d) s(x)*	*0*		*1/3 1*
						1/5	

e)		*2*		*f) g(x)*	*0*	
	0 1					*1 2*

g)		*0 1*		*h) j(x)*		*-1 0*	
	-1				*-2*		*1*

i)	*0 1 2*		*j) l(x)*	*0 1 2*

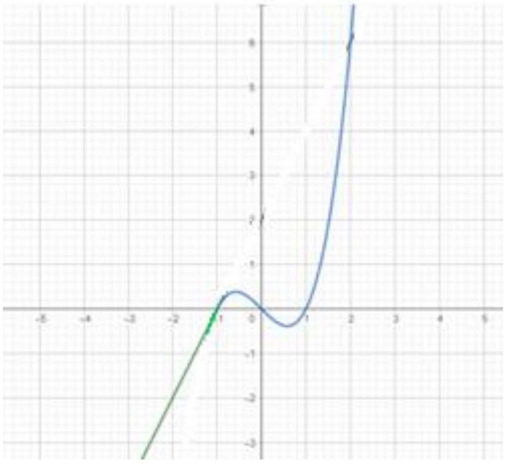
k)	*0 1 2*		*l) n(x)*	*0 1 2*

m)			*0*		*n) b(x)*	*-2*		*2*
		-2 -1						

o)	*-1*				*p) d(x)*			$\sqrt[3]{5}$
		-1 0 3					*log(5)* $\sqrt[3]{5}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **Esboza la gráfica de la función f:ℝ → ℝ dada por f(x) =** $\begin{cases} 2x + 2 \text{ si } x \leq -1 \\ x^3 - x \text{ si } x > -1 \end{cases}$



2. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$p(x) = -5x + 3$; $q(x) = 2x^2 - x + 7$; $r(x) = -x^3 + 6$; $s(x) = 3x^2 - x$

$f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 3}$; $g(x) = \dfrac{-3}{x}$; $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2}$; $j(x) = \dfrac{-x^2}{x^2 - 4}$

$k(x) = e^{x-4}$; $l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; $m(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; $n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

$a(x) = L(x - 2)$; $b(x) = \log\left(\dfrac{x - 1}{3}\right)$; $c(x) = L\left(\dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}\right)$; $d(x) = \log(x^3 - 1)$

a) (s+q)(x)

$3x^2 - x + 2x^2 - x + 7 = 5x^2 - 2x + 7$

b) (r+p)(x)

$-x^3 + 6 - 5x + 3 = -x^3 - 5x + 9$

c) (p-q)(x)

$-5x + 3 - (2x^2 - x + 7) = -5x + 3 - 2x^2 + x - 7 = -2x^2 - 4x - 4$

d) (p+q+r+s)(x)

$-5x + 3 + 2x^2 - x + 7 - x^3 + 6 + 3x^2 - x = -x^3 + 5x^2 - 7x + 16$

e) (q-r-s)(x)

$2x^2 - x + 7 - (-x^3 + 6) - (3x^2 - x) = 2x^2 - x + 7 + x^3 + 6 - 3x^2 + x = x^3 - x^2 + 13$

f) (p-q+r-s)(x)

$-5x + 3 - (2x^2 - x + 7) + (-x^3 + 6) - (3x^2 - x) = -5x + 3 - 2x^2 + x - 7 - x^3 + 6 - 3x^2 + x =$

$= -x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

g) (g+h)(x)

$-\frac{3}{x} + \frac{x+1}{x^2} = \frac{-3x + x + 1}{x^2} = \frac{-2x + 1}{x^2}$

h) (s-g)(x)

$\frac{x+1}{x^2} - \left(-\frac{3}{x}\right) = \frac{x+1}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{x+1+3x}{x^2} = \frac{4x+1}{x^2}$

i) (n-k)(x)

$e^{\frac{x}{x-1}} - e^{x-4}$

j) (g+d)(x)

$-\frac{3}{x} + \log(x^3-1)$

k) (b-d)(x)

$\log\left(\frac{x-1}{3}\right) - \log(x^3-1) = \log\frac{\frac{x-1}{3}}{\frac{x^3-1}{1}} = log\frac{x-1}{3(x^3-1)} = log\frac{x-1}{3(x-1)(x^2+x+1)} = log\frac{1}{3(x^2+x+1)}$

l) (c+s)(x)

$L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) + 3x^2 - x$

m) (s·q·r)(x)

$(3x^2-x)(2x^2-x+7)(-x^3+6) = (6x^4-3^3+21-2x^3+x^2-7x)(-x^3+6) =$

$= (6x^4-5x^3+x^2-7x+21)(-x^3+6) =$

$= -6x^7+5x^6-x^5+7x^4-21x^3+36x^4-30x^3+6x^2-42x+126 =$

$= -6x^7+5x^6-x^5+43x^4-51x^3+6x^2-42x+126$

n) (r·p)(x)

$(-x^3+6)(-5x+3) = 5x^4-3x^3-30x+18$

o) (q:p)(x)

$\frac{2x^2-x+7}{-5x+3}$

p) (s:q)(x)

$\frac{3x^2-x}{2x^2-x+7}$

q) (g·h)(x)

$\left(\frac{-3}{x}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-3x-3}{x^3}$

r) (s:g)(x)

$\frac{3x^2}{\frac{-3}{x}} = \frac{3x^3}{-3} = -x^3$

s) (n·k)(x)

$\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)\left(e^{x-4}\right) = e^{\frac{x}{x-1}+x-4}$

t) (g:d)(x)

$\frac{\frac{-3}{x}}{\log(x^3-1)} = \frac{-3}{x\log(x^3-1)}$

u) (s ∘ q)(x)

$(s\circ q)(x) = s(q(x)) = s(2x^2 - x + 7) = 3((2x^2 - x + 7)^2 - (2x^2 - x + 7))$

v) (r ∘ p)(x)

$(r\circ p)(x) = r(p(x)) = r(-5x+3) = -(-5x+3)^3 + 6 = 125x^3 - 225x^2 + 135x - 21$

w) (q ∘ p)(x)

$(q\circ p)(x) = q(p(x)) = q(-5x+3) = 2(-5x+3)^2 - (-5x+3) + 7 = 50x^2 - 55x + 22$

x) (g ∘ h)(x)

$$(g\circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-3}{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{3x^2}{(x+1)}$$

y) (s ∘ g)(x)

$$(s\circ g)(x) = s(g(x)) = s\left(\frac{-3}{x}\right) = 3\left(\frac{-3}{x}\right)^2 - \left(\frac{-3}{x}\right) = \frac{27}{x^2} + \frac{3}{x}$$

z) (n ∘ k)(x)

$$(n\circ k)(x) = n(k(x)) = n(e^{x-4}) = e^{\left(\frac{e^{x-4}}{e^{x-4}-1}\right)}$$

a)	$(s+q)(x) = 5x^2 - 2x + 7$	*b)*	$(r+p)(x) = -x^3 - 5x + 9$
c)	$(p-q)(x) = -2x^2 - 4x + 4$	*d)*	$(p+q+r+s)(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 16$
e)	$(q-r-s)(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$	*f)*	$(p-q+r-s)(x) = -x^3 - 5x^2 - 3x + 2$
g)	$(g+h)(x) = (-2x^2 + x)/x^2$	*h)*	$(s-g)(x) = 3x^2 - x + 3/x$
i)	$(n-k)(x) = e^{x/(x-1)} - e^{x-4}$	*j)*	$(g+d)(x) = -3/x + \log(x^3 - 1)$
k)	$(b-d)(x) = \log(1/(3(x^2 + x + 1))$	*l)*	$(c+s)(x) = L((x^2 - 1)/(2x + 4)) + 3x2 - x$
m)	$(s\cdot q\cdot r)(x) = (3x^3 - x)(2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6)$	*n)*	$(r\cdot p)(x) = (-x^3 + 6)(-5x + 3)$
o)	$(q:p)(x) = (2x^2 - x + 7)/(-5x + 3)$	*p)*	$(s:q)(x) = (3x^2 - x)/(2x^2 - x + 7)$
q)	$(g\cdot h)(x) = (-3x - 3)/x^4$	*r)*	$(s:g)(x) = -x^3 + x^2/3$
s)	$(n\cdot k)(x) = e^{(x-4)+(x/(x-1))} = e^{(x2-4x+4)/(x-1)}$	*t)*	$(g:d)(x) = -3/(x(\log(x^3 - 1))$
u)	$(s\circ q)(x) = 3((2x^2 - x + 7)^2 - (2x^2 - x + 7))$	*v)*	$(r\circ p)(x) = -(-5x + 3)^3 + 6$
w)	$(q\circ p)(x) = 2(-5x + 3)^2 - (-5x + 3) + 7 = 50x^2 - 55x + 22$	*x)*	$(g\circ h)(x) = -3x^2/(x+1)$
y)	$(s\circ g)(x) = 27/x^2 + 3/x$	*z)*	$(n\circ k)(x) = e^{\frac{e^{x-4}}{e^{x-4}-1}}$

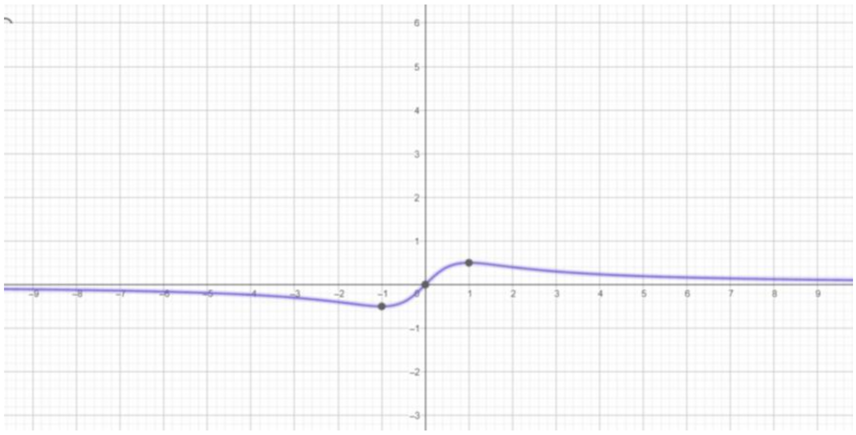
3. **Considera la función f:ℝ → ℝ definida por f(x) = $\frac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, punto de corte con los ejes, signos y simetría.**

- Domf = ℝ ; - Puntos de corte: eje X (0, 0); eje Y (0, 0).
- Simetría par: f(x) = $f(-x)$

f(x) = $\frac{x}{1+x^2}$ → f(-x) = $\frac{(-x)}{1+(-x)^2}$ = $\frac{-x}{1+x^2}$; f(x)≠ $f(-x)$, la función no es par.

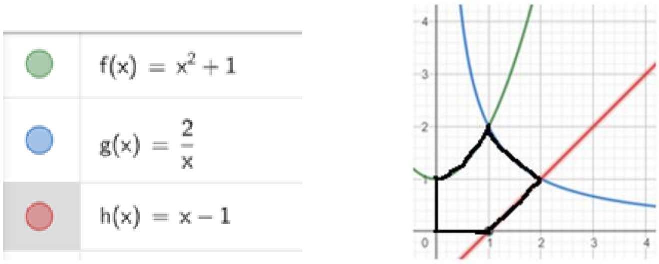
Simetría impar: f(-x) = $-f(x)$

-f(x) = -1 · $\frac{x}{1+x^2}$ = $\frac{-x}{1+x^2}$; f(-x) = $-f(x)$ se cumple, la función es impar.



4. **Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas**

y = x^2+1 **,** **y=** $\frac{2}{x}$ **e** **y = x – 1**



El recinto de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0)

5. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ $\qquad g(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$

$h(x)=2^{-x+1}$ $\qquad j(x)=L(x^5-1)$

$k(x)=2^x\cdot 30^{x-1}\cdot 12^{-x+1}$ $\qquad l(x)=\frac{x^2-9}{x^3+7x^2+15x+9}$

$m(x)=\sqrt[4]{-5+2x}$ $\qquad n(x)=(4x^2-4x+1)^{\frac{-1}{3}}$

a) Calcular las siguientes composiciones:

- **h compuesto con f**

$$f\circ h\Rightarrow(f\circ h)(x)=f\big(h(x)\big)=f(2^{-x+1})=(2^{-x+1})^3-3(2^{-x+1})^2+3(2^{-x+1})-1$$

- **h compuesto con g**

$$g\circ h\Rightarrow(g\circ h)(x)=g\big(h(x)\big)=g(2^{-x+1})=\left(\sqrt{\frac{2^{-x+1}-2}{2^{-x+1}+7}}\right)$$

- **j compuesto con g**

$$g\circ j\Rightarrow(g\circ j)(x)=g\big(j(x)\big)=g\big(L(x^5-1)\big)=\left(\sqrt{\frac{L(x^5-1)-2}{L(x^5-1)+7}}\right)$$

- **h compuesto con k**

$$k\circ h\Rightarrow(k\circ h)(x)=k\big(h(x)\big)=k(2^{-x+1})=2^{2^{-x+1}}\cdot 30^{2^{-x+1}-1}\cdot 12^{2^{-x+1}+1}$$

• **j compuesto con h compuesto con g**

$$g\circ h\circ j \Rightarrow (g\circ h\circ j)(x) = (g\circ h)\big(j(x)\big) = (g\circ h)\left(L(x^5-1)\right) = g\left(h\left(L(x^5-1)\right)\right) =$$

$$= g\left(2^{-L(x^5-1)+1}\right) = \sqrt{\frac{2^{-L(x^5-1)+1}-2}{2^{-L(x^5-1)+1}+7}}$$

• **j compuesto con m**

$$m\circ j \Rightarrow (m\circ j)(x) = m\big(j(x)\big) = m\big(L(x^5-1)\big) = \left(\sqrt[4]{-5+2\left(L(x^5-1)\right)}\right)$$

• **h compuesto con l**

$$l\circ h \Rightarrow (l\circ h)(x) = l\big(h(x)\big) = l(2^{-x+1}) = \frac{\left(2^{-x+1}\right)^2-9}{(2^{-x+1})^3+7(2^{-x+1})^2+15(2^{-x+1})+9}$$

• **h compuesto con m**

$$m\circ h \Rightarrow (m\circ h)(x) = m\big(h(x)\big) = m(2^{-x+1}) = \left(\sqrt[4]{-5+2(2^{-x+1})}\right)$$

• **h compuesto con j**

$$j\circ h \Rightarrow (j\circ h)(x) = j\big(h(x)\big) = j(2^{-x+1}) = L((2^{-x+1})^5-1)$$

• **m compuesto con l**

$$l\circ m \Rightarrow (l\circ m)(x) = l\big(m(x)\big) = l\left(\sqrt[4]{-5+2x}\right) = \frac{\left(\sqrt[4]{-5+2x}\right)^2-9}{\left(\sqrt[4]{-5+2x}\right)^3+7\left(\sqrt[4]{-5+2x}\right)^2+15\left(\sqrt[4]{-5+2x}\right)+9}$$

b) Calcular:

función inversa de $\boldsymbol{f(x) = x^3-3x^2+3x-1}$

Esta función no tiene función inversa

función inversa de $\boldsymbol{h(x) = 2^{-x+1}}$

Cambiamos la h por una y , $y = 2^{-x+1}$

Remplazar x con y , $x = 2^{-y+1}$

$Si\ f(x) = g(x),\ entonces\ ln\big(f(x)\big) = ln\big(g(x)\big)$, $ln(x) = ln(2^{-y+1})$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos $log_a\,(x^b) = b\cdot log_a\,(x)$

$$ln(2^{-y+1}) = (-y+1)ln(2); \qquad ln\,(x) = (-y+1)ln(2)$$

Despejamos y, $ln(x) = (-y+1)ln(2)$: $\quad y = -\frac{ln(x)-ln(2)}{ln(2)} = \frac{ln(2)-ln(x)}{ln(2)} = 1-\frac{ln(x)}{ln(2)}$

funcion inversa de $\boldsymbol{k(x) = 2^x\cdot 30^{x-1}\cdot 12^{-x+1}}$

$$k(x) = 2^x\cdot 30^x\frac{1}{30}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^x\cdot 12 = \frac{12}{30}\cdot\left(2\cdot 30\cdot\frac{1}{12}\right)^x = \frac{2}{5}\cdot 5^x$$

$$x = \frac{2}{5}\cdot 5^y\ ;\quad \frac{5x}{2} = 5^y;\quad y = \log_5\frac{5x}{2}$$

funcion inversa de $\boldsymbol{j(x) = L(x^5-1)}$

$$x = L(y^5-1)\ ;\ e^x = y^5-1\ ;\ y^5 = e^x+1\ ;\ y = \sqrt[5]{e^x+1}$$

funcion inversa de $\boldsymbol{n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{\frac{-1}{3}}}$

Remplazar x con y , $x = (4y^2 - 4y + 1)^{\frac{-1}{3}}$

Elevar ambos lados de la ecuación a la potencia –3

$$x^{-3} = \left((4y^2 - 4y + 1)^{\frac{-1}{3}}\right)^{-3} = (4y^2 - 4y + 1)$$

Aplicamos las leyes de los exponentes $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

$$\frac{1}{x^3} = 4y^2 - 4y + 1$$

Multiplicamos ambos lados por x^3

$$\frac{1}{x^3}x^3 = 4y^2x^3 - 4yx^3 + 1 \cdot x^3 \Rightarrow 1 = 4x^3y^2 - 4x^3y + x^3$$

Es una ecuación de segundo grado en y

$$4x^3y^2 - 4x^3y + x^3 - 1 = 0$$

Dos soluciones

$$y = \frac{x^3 + x^{\frac{3}{2}}}{2x^3}; \quad y = \frac{x^3 - x^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$$

c) Calcular todos los dominios:

El dominio de una función es el conjunto de entradas o valores de los argumentos para los cuales la función es real y definida.

$Dom\, f(x) = \{x \in \Re; -\infty < x < \infty\}$

$Dom\, h(x) = \{x \in \Re; -\infty < x < \infty\}$

$Dom\, k(x) = \{x \in \Re; -\infty < x < \infty\}$

$Dom\, m(x) = \left\{x \in \Re; x \geq \frac{5}{2}\right\}$; $-5 + 2x \geq 0$

$Dom\, g(x) = \{x \in \Re; x < -7 \; or \; x \geq 2\}$; $\frac{x-2}{x+7} \geq 0$

$Dom\, j(x) = \{x \in \Re; x > 1\}$; $x^5 - 1 > 0$

$Dom\, l(x) = \{x \in \Re; x \neq -1, \; x \neq -3\}$; $x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$

$Dom\, n(x) = \left\{x \in \Re; \; x \neq \frac{1}{2}\right\}$; $4x^2 - 4x + 1 = 0$

d)Calcular los puntos de corte con los ejes de todas las funciones

$f(x)$: $(x) \Rightarrow 3.84732 \ldots\ldots,0$
$(y) \Rightarrow (0,-1)$

$g(x)$: $(x) \Rightarrow (2,0)$
el eje y no lo corta

$h(x)$: **el eje x no lo corta**
$(y) \Rightarrow (0,2)$

$j(x)$: $(x) \Rightarrow (1,0)$
$(y) \Rightarrow (0,-1)$

$k(x)$ **el eje x no lo corta**
$(y) \Rightarrow \left(0,\frac{2}{5}\right)$

$l(x)$ $(x) \Rightarrow (3,0)$
$(y) \Rightarrow (0,-1)$

$m(x)$ $(x) \Rightarrow \left(\frac{5}{2},0\right)$
El eje y no lo corta

$n(x)$ **el eje x no lo corta**
$(y) \Rightarrow (0,1)$

6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por h(t) = $5 + 4t - t^2$.
Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo.

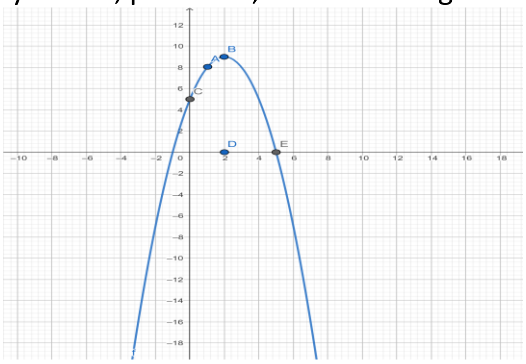
$h(1) = 5 + 4 \cdot 1 - 1^2 = 8\ m$ m. Se encontrará a 8 metros después de 1 segundo.
$h(0) = 5 + 4 \cdot 0 - 0^2 = 5$ m. El objeto se lanza desde 5 metros de altura.

Determina en que instante alcanzará la altura máxima y cual será.

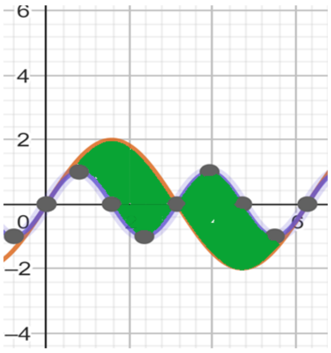
$h'(\text{t}) = -2t + 4 = 0$
$-2t = 4$ Por tanto, t=2 segundos. A los dos segundos alcanzará la altura máxima.
$h(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$ metros será la altura máxima

Por último, calcula el instante en el que caerá al suelo y representa gráficamente la solución con los datos obtenidos anteriormente.

$-t^2 + 4t + 5 = 0$ t = 5 y t = -1 , por tanto, cae a los 5 segundos.



7. Considera las funciones f, g: (0, 2π). f(x) = 2senx y g(x) = sen(2x). Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y g.



8. Sea la función dada por f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que es impar y que pasa por el punto (1, 2).

Como es impar:
f(x) = -f(-x)
f(-x) = $(-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) + c$ = $-x^3 + ax^2 - bx + c$
-f(-x) = $x^3 - ax^2 + bx - c$
$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - ax^2 + bx + c$
$ax^2 + c = -ax^2 - c$ Por tanto, a = 0 y c = 0
Como pasa por el punto (1,2):
f(1) = $1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$1 + b = -2$ Por tanto $b = -3$ de donde **f(x) = $x^3 - 3x$**

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$. Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.

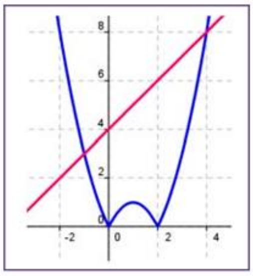
$x + 4 = x(x-2) \rightarrow x + 4 = x^2 - 2x \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow\ x = 4,\ x = -1$

$x + 4 = -x(x-2) \rightarrow x + 4 = -x^2 + 2x \rightarrow x^2 - x + 4 = 0,\quad sin\ solución$

Sustituyendo en cualquier función tenemos el valor de y, puntos (4, 8) y (-1, 3)

La función f(x) es el valor absoluto de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola, que corta al eje X en 0 y en 2.

La función g(x) es una función afín cuya gráfica es una recta.



10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión: $f(t) = -1/5\, t^2 + 2t + 10$, $0 \le t \le 12$.

a) Representa gráficamente la función. b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?

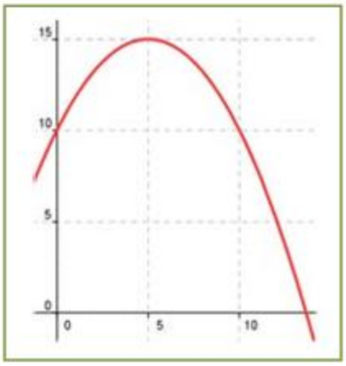
a)

f(t) es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola, como el coeficiente de x cuadrado es negativo, la parábola está abierta hacia abajo,

para t = 0, f toma el valor 10

los cortes con el eje X toman un valor negativo, que no es válido y otro en 13,66.

El vértice está en t = 5



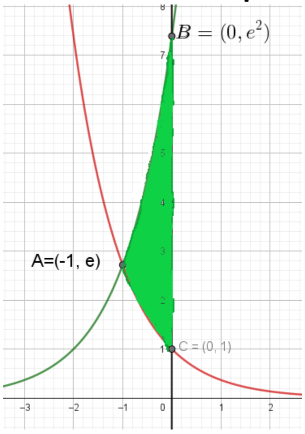
b) A las 6 horas, $f(6) = (-1/5)\, 6^2 + 2\cdot 6 + 10 = 14.8$ céntimos de euro;

A las 12 horas, $f(12) = (-1/5)\, 12^2 + 2\cdot 12 + 10 = 5.2$ céntimos de euro.

11. Considera la función definida por $f(x) = \frac{2logx}{x^2}$. Calcula su dominio.

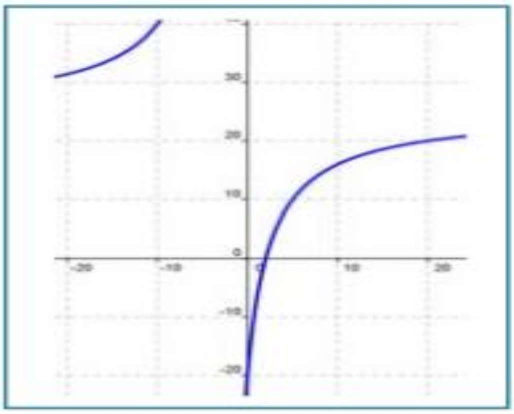
logx solo está definida para valores positivos, f(x) está definida únicamente para valores positivos de x.

12. Dibuja el recinto limitado por las curvas , $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$



Tiene de vértices (0, 1), (0, e^2) y (–1, e).

13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando x ≥ 0 . Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.



Dominio: La función está definida en toda la recta real salvo en el punto x = –5/2;

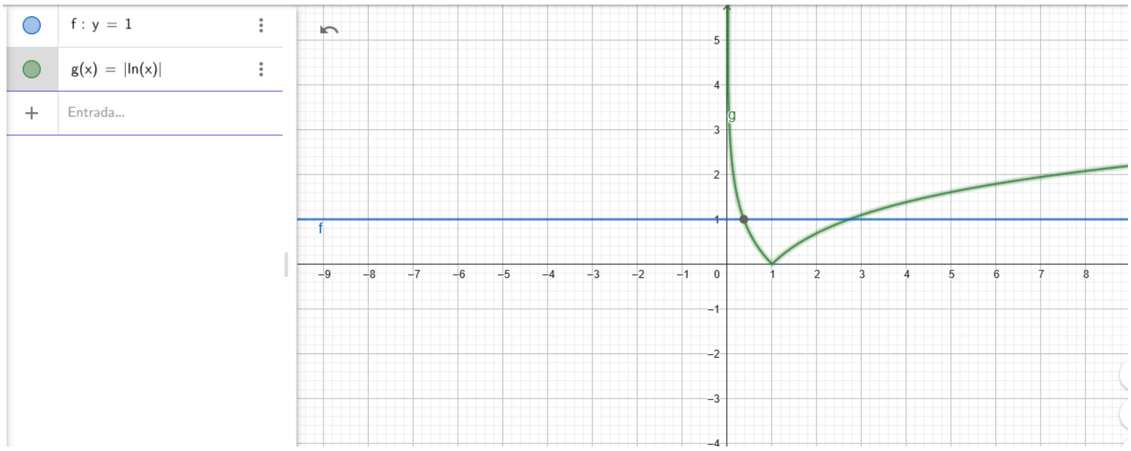
Intersección con los ejes: (2, 0), (0, –20).

No es simétrica.

Tiene una asíntota vertical para x = –5/2.

Para x < –5/2 y para x > 2 la función es positiva, y para –5/2 < x < 2 es negativa.

14. Considera la función definida por g(x) = |ln(x)|(donde ln denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y=1. Calcula los puntos de corte entre ellas.



Los puntos de corte obtenidos con la recta y son los siguientes:
- Punto A: (1/e, 1)
- Punto B: (e, 1)

15. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) f(x)=$\frac{Lx}{x^2}$ → Dom f: (0, ∞)

Los logaritmos son de 0 a infinito, lo cual ya excluye el 0 del denominador.

b) g(x)= (1-x³) · cos (x) → Dom g: R

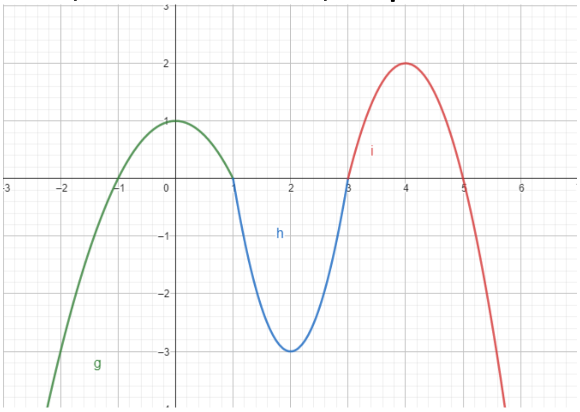
Tanto las funciones polinómicas como el coseno tienen todo R como dominio

c) h(x)=4·x³ - 5·x + $\frac{1}{e^x}$ →Dom h: R

Función polinómica y el denominador no se anula nunca

16. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & si \quad x\le 1 \\ 3x^2-12x+9 & si \quad 1<x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & si \quad x>3 \end{cases}$

Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.



Dominio:

Se trata de una función definida a trozos, formada por 3 funciones polinómicas, como el dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$ podemos decir que:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R}$$

Puntos de corte:

puntos de corte con el eje X → $(-1,0)$; $(1,0)$; $(3,0)$; $(5,0)$

punto de corte con el eje Y → $(0,1)$

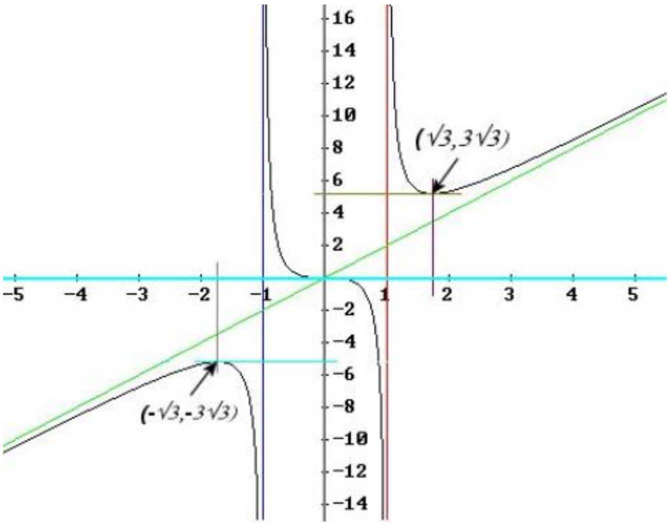
Signo de la función:

Zonas donde $f(x)$ es positiva: $(-1,1)\cup(3,5)$

Zonas donde $f(x)$ es negativa: $(-\infty,-1)\cup(1,3)\cup(5,\infty)$

17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a)



$$Dom f(x) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$$

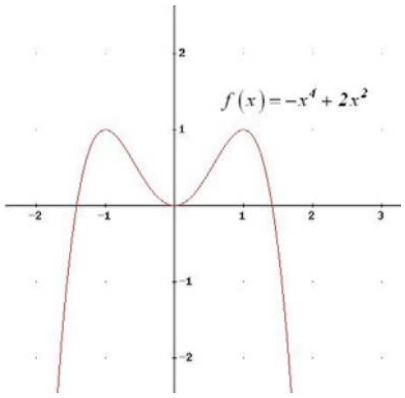
puntos de corte con el eje X: $(0,0)$

puntos de corte con el eje Y: $(0,0)$

función con signo negativo: $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

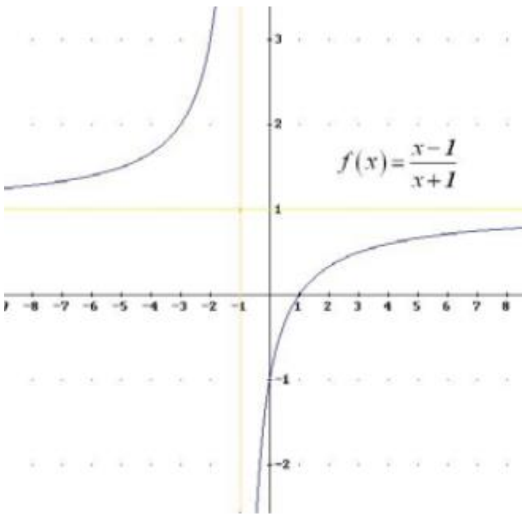
función signo positivo: $(-1,0) \cup (1,\infty)$

b)



Dominio: $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$
Cortes eje X:
$f(x) = -x^4 + 2x^2$; $-x^4 + 2x^2 = 0$; $x = -\sqrt{2}$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$
puntos de corte: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$; $(0,0)$; $\left(\sqrt{2}, 0\right)$
Punto de corte con el eje Y
Para calcular el punto de corte con el eje Y, se le da a x el valor de 0: $x = 0$, el $(0,0)$
Signo:
Negativo: $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$
Positivo: $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$

c)



Dominio:
$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Puntos de corte:

El punto de corte con el eje X es $(1,0)$

El punto de corte con el eje Y es el punto $(0,-1)$

Signos:

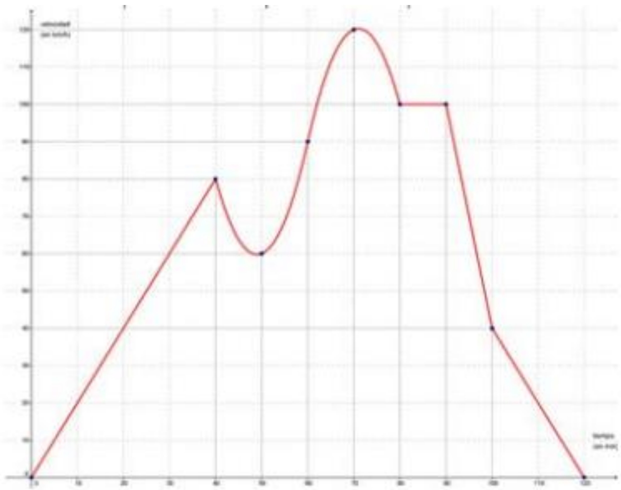
Zonas donde la función es positiva

$$(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

Zonas donde la función es negativa

$$(-1,1)$$

d)



$$Domf(x) = x \in/(0 \le x \le 120)$$

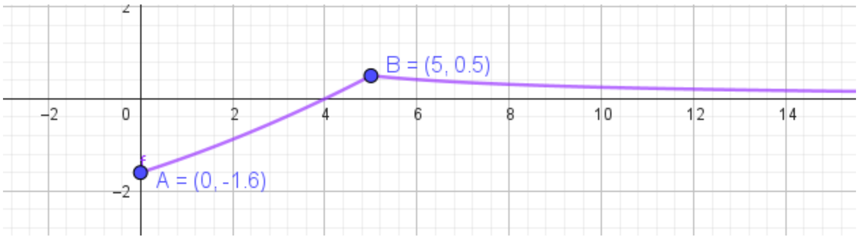
puntos de corte con el eje X:
$(0,0)$
$(120,0)$

punto de corte con el eje Y
$(0,0)$

zonas donde la función es positiva
$(0,120)$

zonas donde la función es negativa
No existe zona negativa

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de f(x) millones de € , siendo: $f(x) = x^2/50 + 8x/25 - 8/5$, si $0 \le x \le 5$ y $5/2x$ si $x>5$ Razona cual es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y , finalmente, el dominio de la función.



Las abscisas varían entre (0, +∞)(0, +∞), que es el dominio de la función, las ordenadas varían entre -8/5 y 1/2.

Los puntos de corte con los ejes son: (0, -8/5) y (4, 0). Asíntota horizontal y = 0.

Es continua en todo su dominio.

Alcanza un máximo en (5, 1/2).

Los beneficios son negativos para inversiones menores a 4 millones de euros.

El beneficio es máximo para 5 millones y luego desciende.

19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros). La altura que se encuentra en cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.

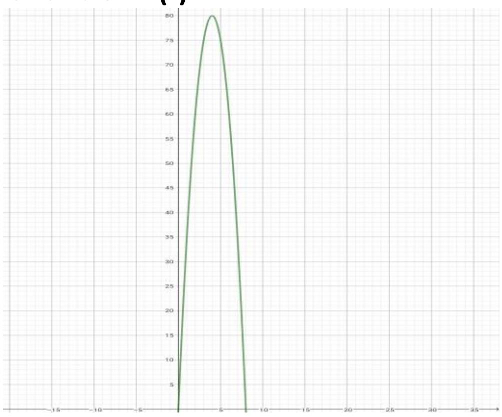
a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?¿Cuál es esa altura?

Vértice de la parábola: $x = -b/2a$, $x = -40/2\cdot(-5) = 4$ segundos

$h(4) = -5\cdot(4)^2 + 40\cdot 4 = -5\cdot 16 + 160 = -80 + 160 = 80$ metros

La altura máxima es a los 4 segundos, 80 metros.

b) Representa gráficamente la función h(t)



c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

$60 = -5t^2 + 40t$, $-5t^2 + 40t - 60 = 0$, $t_1 = 6$ y $t_2 = 2$.

El momento de la caída a los 60 metros es 6 segundos,

A los 2 segundos también está a 60 metros, pero es de subida.

d) ¿En qué instante llega al suelo?

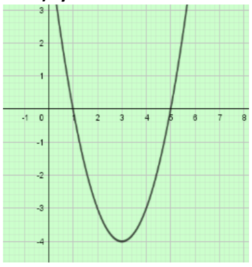
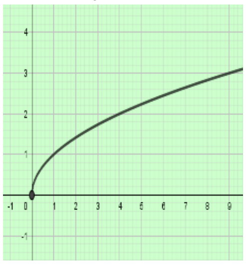
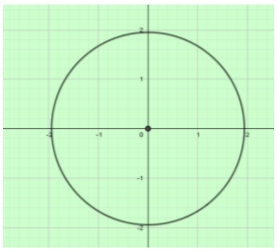
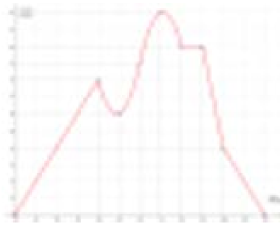
Resolvemos h(t) = 0: $0 = -5t^2 + 40t$, $t_1 = 8$ y $t_2 = 0$

Llega al suelo a los 8 segundos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) y=x^2-6x+5 b) y=$\sqrt{x}$ c)x^2+y^2+1 d) función a trozos

La c) no es una función, pues cuando una abscisa "x" tiene más de una ordenada "y", esta no puede ser función

2. La fórmula de la composición $f \circ g$ de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

a) $-2x^2+3$ b) $2x^2-3$ c) $-4x^2+4x+1$ d) $4x^2-4x-1$

$$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \mathrm{f}(-\mathrm{x}^2+2) = -(2\mathrm{x}-1)^2+1 = -(4\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+1)+2 = (-4\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+1)$$

Es la c)

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

$y = \frac{x-1}{x+2} \to y(x+2) = x-1 \to yx+2y = x-1 \to yx - x = -2y-1 \to$
$x(y-1) = -2y-1 \to x = \frac{-2y-1}{y-1}$; $y = \frac{-2x-1}{x-1}$

Es la d) $\boldsymbol{y = \frac{-2x-1}{x-1}}$

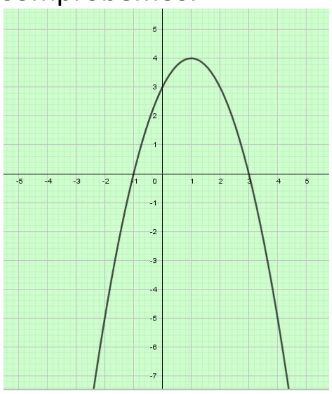
4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

a)  b) c) d) 

Deberá ser una parábola. Al ser $a < 0$ debe ser cóncava, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

Es entonces la d). Comprobemos:

x	y
-1	0
0	3
1	4
2	3
3	0



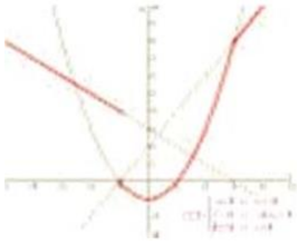
5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

$$e^{\frac{x}{x^2-1}} \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \quad , \; Dom\, f = R - \{-1, 1\}$$

Es la c)

6. El recorrido de la función



es:

a) $[-1, \infty[$ b) $]-1, \infty[$

c) $]-\infty, -1]$ d) $\Re - \{4\}$

Es la opción **a) [-1,∞)**

Porque el –1 es el punto el cual determina el inicio de la imagen de la función y va hacia el infinito.

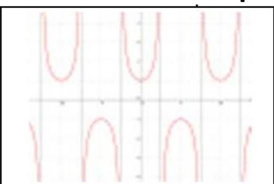
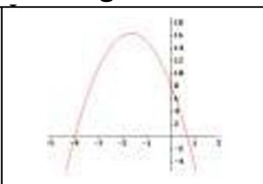
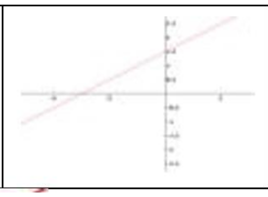
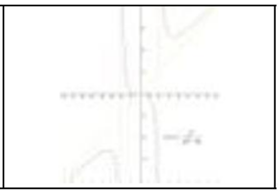
7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = ln(x^2 - 3x + 3)$ es:

Para sacar los puntos de corte con el eje x se tiene que igualar la función a 0

$\ln(x^2 - 3x + 3) = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 3 = 1;\; x^2 - 3x + 3 - 1 = 0 \rightarrow\; x^2 - 3x + 2 = 0$

Las soluciones a esta ecuación de segundo grado son 1 y 2 por lo tanto, es la opción **b) (1,0) y (2,0).**

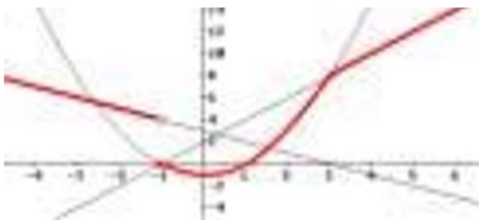
8. La única función impar entre las siguientes es:

a)		b)		c)		d)	

El apartado **d)** porque se cumple que f(-x) = -f(x)

Además, toda función de simetría impar es simétrica respecto al origen de coordenadas y la gráfica del apartado d es la única que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

9. El intervalo donde la función



es negativa es:

a) $]-1, 1[$ b) $]-\infty, -1[$

c) $]-\infty, 1]$ d) $]-\infty, 0[$

Para que una función sea negativa en un intervalo se debe cumplir que f(x) < 0, esto se consigue en el intervalo abierto $(-1{,}1)$.

Es abierto porque tanto en el –1 y en el 1 la función se hace 0 y no es negativa.

Respuesta la a)

10) La única función No periódica de las siguientes es:

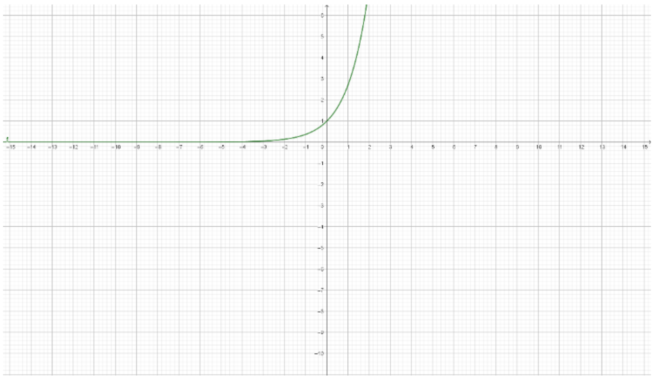
a) $f(x) = \text{sen}(x)$ b) $g(x) = \text{tg}(x)$ c) $h(x) = e^x$ d) $j(x) = \text{cosec}(x)$

El sen(x) es periódica de periodo 2π,

La tan(x) es de periodo π

La cosec(x) tiene periodo 2π

Si nos fijamos en la gráfica de e^x tenemos



Esta función no es periódica.

Respuesta: la c)

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 4: Límites

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LÍMITES

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x\to 1} x = 1$**.**

Sea un Ɛ cualquiera, hemos de ver que existe un δ, de tal manera que si 0 < |x-1| < δ entonces |x - 1|< Ɛ

Para que |x - 1|< Ɛ para cualquier Ɛ, basta tomar δ = Ɛ.

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -2x+3 \; si \; x < 1 \\ 3x-2 \;\; si \; x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x+3) = -2\cdot 1 + 3 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x-2) = 3\cdot 1 - 2 = 1$$

Como existen los 2 límites laterales y son iguales, existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$ y es = 1.

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} \; si \; x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} \;\; si \; x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \to \frac{-2\cdot 1+3}{1+5} = \frac{1}{6} \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \to \frac{5\cdot 1^2}{1+5} = \frac{5}{6}$$

No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

c) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} \; si \; x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} \;\; si \; x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \to \frac{7}{1^2+4} = \frac{7}{5} \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \to \frac{1-1}{1^2} = 0$$

No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

3. Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos y calcúlalos:

a) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}(-x^2)} = -\infty^2 = -\infty$ infinito de variable infinita

b) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}(+x^2)} = +\infty^2 = \infty$ infinito de variable infinita

c) $\boldsymbol{\lim_{x\to 3} x^2} = 3^2 = 9$ finito de variable finita

d) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ finito de variable infinita

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

4. Calcula los limites indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -(+\infty^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = -(-\infty^3) = +\infty^3 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

5. Calcula los siguientes limites indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^+-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^--1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^+-3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^--3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

6. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right)$

$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right) = \left(\frac{1}{3^2-9} - \frac{1}{3-3}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \rightarrow$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-3}\right) \rightarrow mcm = (x+3)(x-3)$

$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1-(x+3)}{(x+3)(x-3)}\right) = \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1-x-3}{(x+3)(x-3)}\right) = \left(\frac{1-3-3}{(3+3)(3-3)}\right) = \frac{-5}{6\cdot0} = -\frac{5}{0} = -\infty$

7. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \left(\frac{1}{1^2-1} - \frac{1}{1-1}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \rightarrow$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1}\right) \rightarrow mcm = (x+1)(x-1)$

$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) = \frac{1-1-1}{(1+1)(1-1)} = \frac{-1}{2\cdot0} = -\frac{1}{0} = -\infty$

8. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\left(\frac{1}{-2+2}-\frac{1}{(-2)^2-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)(x-2)}\right)\rightarrow mcm=(x+2)(x-2)$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1(x-2)-1}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2-1}{(x+2)(x-2)}\right)=\left(\frac{-2-2-1}{(-2+2)(-2-2)}\right)=\frac{-5}{0\cdot(-4)}=-\frac{5}{0}=-\infty$$

9. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)=\left(\frac{-2-2}{-2+2}-\frac{-2}{(-2)^2-4}\right)=\frac{-4}{0}-\left(-\frac{2}{0}\right)=-\infty+\infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{(x+2)(x-2)}\right)\rightarrow mcm=(x+2)(x-2)$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{(x-2)^2-x}{(x+2)(x-2)}\right)=\left(\frac{(-2-2)^2-(-2)}{(-2+2)(-2-2)}\right)=\left(\frac{(-4)^2+2}{0\cdot(-4)}\right)=\frac{16+2}{0}=\frac{18}{0}=+\infty$$

10. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)=\frac{3^2-5\cdot 3+6}{3^2-9}=\frac{9-15+6}{9-9}=\frac{0}{0}$, indeterminación

$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

11. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-4x+3)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x+1)}=\frac{1(1-3)}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$x^3-4x^2+3x = x(x - 3)(x - 1)$ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

12. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x})^2-3^2}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{6+x-9}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{6+x}+3)}=\frac{1}{(3+3)(\sqrt{6+3}+3)}=\frac{1}{6\cdot 6}=\frac{1}{36}$$

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

13. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)=\left(\frac{\sqrt{4}-2}{1-1}\right)=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+x})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3+x-4}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

14. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0}=\frac{0}{0}\quad \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3-x})^2-(\sqrt{3})^2}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{3-x-3}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

15. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2}=\frac{2-\sqrt{2+2}}{2-2}=\frac{2-\sqrt{4}}{2-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 2}\frac{(2-\sqrt{2+x})}{\underset{x\to 2}{x-2}}=\lim\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\cdot\frac{2+\sqrt{2+x}}{2+\sqrt{2+x}}=\lim_{x\to 2}\frac{2^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 2}\frac{4-2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2+\sqrt{2+x}}=\frac{-1}{2+\sqrt{2+2}}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

16. Escribe sin hacer cálculos el valor de los límites siguientes:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}=1$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ *en el numerador y* $5x^2$en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^2, quedando 5/5 . De modo que la solución es 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}=\infty$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^5$ *en el numerador y* $5x^2$en el denominador, al simplificar queda en el numerador x^3. La fracción final quedaría $\frac{\infty}{5}$ y esto es igual a ∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}=0$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ *en el numerador y* $5x^7$en el denominador, al simplificar queda en el denominador x^5. La fracción final quedaría en el denominador x^5. El resultado final quedaría $\frac{5}{\infty}$ que es igual a 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}=2$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $4x^3$ *en el numerador y* $2x^3$en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^3, quedando 4/2 . De modo que la solución es 2.

17. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x}\right)=-1 \quad ;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)=(0-1)=-1$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{1}-3x\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2-3x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2-3x^2+3x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{1}\right)=3$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-1)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+2)-(x-3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\right)=\frac{5}{\infty}=0$$

18. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{(x-4)}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{(x-4)-(x-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{8}=\frac{\infty}{8}=\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(senx)$

$$\lim_{x\to\infty}(senx)=no\ existe$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x)$

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x) \to (e^{+\infty}) = \infty$$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} (ln\, x)$

$$\lim_{x\to0^+} (ln\, x) = (ln\, 0^+) = -\infty$$

19. Determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1} = 1^\infty \quad ; \qquad \text{Utilizo } \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1+2-2}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{3}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2x^2-1}\right]^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{(2x^2-1)\cdot\frac{3}{x-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-3}{x-2}\right)} = e^\infty = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+x+2-2}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-2}{3x^2-2}+\frac{2+2}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}\right]^{\frac{3x^2-2}{2+x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right]^{\frac{2x^2-1}{x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}\right)} = e^{\frac{2}{3}}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1-5+5}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^3+5}+\frac{-6}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-6}{x^3+5}\right)^{3x^2} =$$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{3x^2}\right]^{\frac{x^3+5}{-6}\cdot\frac{-6}{x^3+5}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{\frac{x^3+5}{-6}}\right]^{3x^2\cdot\frac{-6}{x^3+5}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2\cdot\frac{-6}{x^3+5}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-18x^2}{x^3+5}\right)} = e^0 = 1$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3+1-1}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+1}+\frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}\right]^{\frac{5x+1}{2}\cdot\frac{2}{5x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{5x+1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{5x}\cdot\frac{2}{5x+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x}\cdot\frac{2}{5x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2}{25x^2+5x}\right)} = e^{\frac{2}{25}}$$

20. Determina los limites siguientes (observa que no son de tipo e)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right) = 5\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \infty\ \ ;\ \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = 5^{\infty} = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{\lim\limits_{x\Rightarrow\infty}(3x^2)};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4x^3}\right) = \frac{1}{4};\quad \lim_{x\to\infty}(3x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\infty} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{3x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{3}\right) = 1$$

$$lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^3}\right) = lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)} = 1^0 = 0$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{5x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{5x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3}\right)}=0^0$$

Se resuelve mediante derivadas

2. ASÍNTOTAS

21. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

Como determinar una asíntota vertical: f(x) = P(x) / Q(x); Q(x) = 0; x = a; x = b, …

a) **f(x) =** $\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$ **=** $\frac{(x+4)}{(x-1)}$ **;** (x -1) = 0 **;** x = 1

A.V. x = 1.

b) **f(x) =** $\frac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$ **;** (x - 2) = 0; (x - 3) = 0 **;** x = 2; x = 3

A.V. x = 2 y x = 3.

c) **f(x) =** $\frac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}=\frac{(x+4)}{(x-1)}$ **;** (x - 1) = 0 ; x = 1

A.V. x = 1.

d) **f(x) =** $\frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$ **;** (x - 1) = 0; (x - 3) = 0; (x - 5) = 0; (x + 1) = 0 **;**

x = 1; x = 3; x = 5; x = -1.

A.V. x = 1, x = 3, x = 5 y x = -1.

22. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

·Una asíntota horizontal de una función es una recta horizontal a la cual su gráfica se va aproximando indefinidamente sin llegar nunca a cruzarla , por lo que, para averiguar la asíntota horizontal de una función tendremos que calcular: $\lim_{x\to\infty} f(x)=k\to y=k$

a)$\boldsymbol{f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\to y=1$$

b)$\boldsymbol{f(x)=\frac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+12x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\frac{3}{1}=3\to y=3$$

c) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8x+16}{2x^2-10x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2}$$

d) $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^4-8x^3+14x^2+8x-15} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^4} = 0 \to y = 0$$

23. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las siguientes funciones:

Para resolver la A.O de cada función:
1) A.O → y = mx +n m = pendiente n = *ordenada origen*
2) Identificar si existe *A.H.*: si A.H existe, A.O. no hay.
3) m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$
4) n = $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

a) $f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)}$

A.V → x -1 = 0 → x = 1

1) Identificar si existe *A.H.*: si A.H. existe, A.O no.

A.H → $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$ A.H. no existe

2) m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$

m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+4)(x-2)}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ → m = 1

3) n = $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

n = $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - 1x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4x-8-x^2+x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = 3$ → n = *3*

4) A.O → y = mx + n : A.O → **y = x + *3***

b) $f(x) = \frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}$

A.V → (x - 2) ·(x - 3) = 0 → **x = 2** **x= 3**

1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no hay.

A.H → $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} 3x = \infty$ A.H no existe

2) m = $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}}{x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2(x+4)}{x^3-3x^2-2x^2+6x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3}$ = 3 → m = 3

3) n = $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

n = $\lim_{x\to\infty} (\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} - 3x)$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+12x^2-3x^3+9x^2+6x^2-18x}{x^2-3x-2x+6}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{27x^2}{x^2}$ = 27 → n = 27

4) A.O → y = mx +n ; A.O → **y = 3x + 27**

c) $\mathbf{f(x) = \frac{x^2+4}{2(x-1)}}$

A.V → $2(x-1) = 0$ → **x = 1**

1) Identificar si existe *A.H.*: si A.H existe, A.O no.

A.H → $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2(x-1)}$= $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \infty$ A.H no existe

2) m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ ≠ ±∞, 0

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+4}{2(x-1)}}{x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x^2-2x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}$ → m = $\frac{1}{2}$

3) n = $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

n = $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2+4}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x)$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+8-2x^2+2x}{4x-4}$ =$\lim_{x\to\infty} \frac{8+2x}{4x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}$ → n = $\frac{1}{2}$

4) A.O → y = mx +n ; A.O → **y = $\frac{1}{2}$x + $\frac{1}{2}$**

d) $\mathbf{f(x) = \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}}$

A.V → x + 1 = 0 → **x = -1**

1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no.

A.H → $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} = \infty$ A.H no existe

2) m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ ≠ ±∞, 0

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}}{x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+4}{x^2+x}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ → m = 2

3) n = $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

n = $\lim_{x\to\infty} (\frac{(2x^2+4)}{(x+1)} - 2x)$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+4-2x^2-2x}{x+1}$ = $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x}$ = -2 → n = -2

4) A.O → y = mx +n ; A.O → **y = 2x-2**

24. Analizar el comportamiento en el infinito de cada una de estas funciones

a) $\boldsymbol{f(x) = (x+4)^2}$

$$\lim_{x\to\infty}(x+4)^2 = \lim_{x\to\infty}(x^2+8x+16) = \lim_{x\to\infty}x^2 = (\infty)^2 = +\infty$$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{(x-2)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2-4x+4} = \frac{3}{(\infty)^2} = 0$$

c) $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 4}$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+4) = (\infty)^3 + 4 = \infty$$

d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+4}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{1} = \infty$$

3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

25. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}}$;

$$Dom\ f\ (x) = \Re - \{1 - 1\} \quad , \quad \text{Continua en } \Re - \{1-1\}$$

$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1+1}{(1)^2-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$, discontinuidad inevitable de 1º especie de salto infinito.

$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}\,,\ \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1}\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Esta función presenta una discontinuidad evitable en x = -1

b) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x-5}}$ **;**

Continua en $x \geq 5$ porque su dominio es $x - 5 \geq 0\,, x \geq 5$

c) $\boldsymbol{f(x) = \log_2(x-3)}$;

Continua en $x > 3$ porque su dominio es $x - 3 > 0$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{Bmatrix} 2 + x^2\ si\ x \leq 0 \\ 1 + e^x\ si\ x > 0 \end{Bmatrix}}$

1. f(0) = 2+0^2= 2 **2.** $\lim_{x\to0}f(x) = \begin{Bmatrix} \lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^-}(2+x^2) = 2 \\ \lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}(1+e^x) = 2 \end{Bmatrix}$

$\lim_{x\to0^-}f(x) = \lim_{x\to0^+}f(x)$, existe $\lim_{x\to0}f(x) = 2$

3. $f(0)$= 2 = $\lim_{x\to0}f(x)$, es continua en x = 0, continua en $\Re$

26. Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \leq 1 \\ k + x & x > 1 \end{cases}$$

f es continua en toda la recta real, en x = 1 lo estudiamos

Continuidad en x = 1

Paso 1. $f(1) = 2 - 1^2 = 1$

Paso2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 - x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (k + x) = k + 1 \end{cases}$

Para que exista $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ los limites laterales han de ser iguales, de donde, k+1 = 1 ; k=0

27. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si \;\; x < -1 \\ 2 + x^2 & si \;\; -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & si \;\; x > 1 \end{cases}}$

$f(x)$ es continua en todo $\Re$ salvo en $x = -1 \; y \; x = 1$, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas y una racional cuyo denominador no se anula, que son continuas.

- Continuidad en $x = -1$

1º $f(-1) = 2 + (-1)^2 = 3$

2º. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-2x + 3) = 5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2 + x^2) = 3 \end{cases}$

Para que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando $x \to -1$

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1º especie de salto finito.

- Continuidad en $x = 1$

1º. $f(1) = 2 + 1^2 = 3$

2º. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2 + x^2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{3}{x}\right) = 3 \end{cases}$

3º. Como $f(1) = 3 = \lim\limits_{x \Rightarrow 1} f(x)$, $f \; es \; continua \; en \; x = 1$

$f(x)$ es continua en todo $\Re$ salvo en $x = -1$

b) $\boldsymbol{f(x) = x - \sqrt{x - 2}}$

1º Encontrar dominio para identificar intervalos continuos

"El dominio de una función es el conjunto de entradas o valores de los argumentos para los cuales la función es real y definida"

2ºEncontrar valores no negativos para las raíces;

$\sqrt{f(x)} \Rightarrow \; f(x) \geq 0$ **;** $x - 2 \geq 0,$; $x \geq 2$; $Domf : x \geq 2 \Rightarrow$ f es continua en $x \geq 2$

c) $\boldsymbol{f(x) = |x - 3| - 1}$

La función no tiene puntos no definidos ni limitaciones de dominio.

Por lo tanto, el dominio es $-\infty < x < \infty$ y es continua en $-\infty < x < \infty$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. LÍMITES

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{-3+3}{9-9} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to -3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-6}$$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x-3} \to \frac{9-9}{-3-3} = \frac{0}{-6} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x} = \frac{-3+3}{(-3)^2+3-3} = \frac{-27+27}{9-9} \to \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2-3x+9)}{x} = \frac{9+9+9}{-3} \to -9$$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+2)} = \frac{1+1+1}{3} = 1$$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{-x-2}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{-x-2} = \frac{(-2)^3}{-(-2)-2} = \frac{-8+8}{2-2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{-x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-1(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x^2-2x+4)}{-1} = -[(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4] = -12$$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1} = \frac{2-4}{0} = \pm\infty$$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3} = \frac{-98}{-5} = \frac{98}{5}$$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-1} = \frac{\infty^2}{-1} \to -\infty$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{-\infty^2} \to 0$$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{-x^2-4} - \frac{2}{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{-x^2-4} - \frac{2}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{-x^2} - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{-x} - \frac{2}{x}\right) = \frac{3}{-\infty} - \frac{2}{\infty} \to 0 - 0 = 0$$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{-x^2} - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{-x} - 1\right) = 0 - 1 = \mathbf{-1}$$

f) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x} - \sqrt{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1-x+2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

h) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{-4}\right) = -\infty$$

3. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

$$\textit{Asíntota vertical} \quad x - 3 = 0 \;\; \boldsymbol{x = 3}$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2|x|}{x-3} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x}{x-3} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

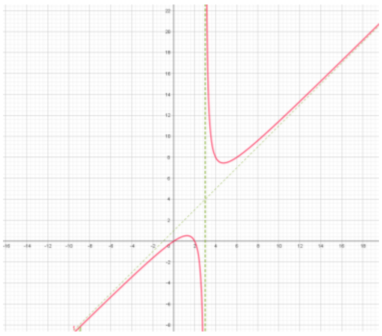
$$\textit{Asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty \textit{ no tiene AH}$$

$$Asíntota\ oblicua$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x}{x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{X^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-3x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2+3x}{x-3} == \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad ; \quad \boldsymbol{y = x+1}$$



b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{5}{x^2-4}}$

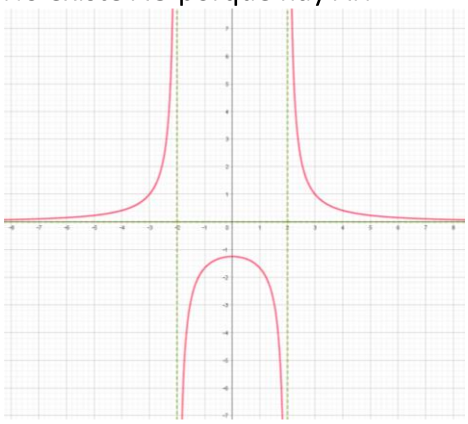
$$AV => x^2 - 4 = 0 \quad \boldsymbol{x = 2} \ , \ \boldsymbol{x = -2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{5}{x^2-4} = \frac{5}{0^-} = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{x^2-4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{5}{x^2-4} = \frac{5}{-0^-} = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{5}{x^2-4} = \frac{5}{-0^+} = -\infty$$

$AH \ =>$ $\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ **y = 0**

No existe AO porque hay AH



c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}}$

$$AV => x^2 - 4 = 0 \quad x = 2 \ , \ \boldsymbol{x = -2}$$

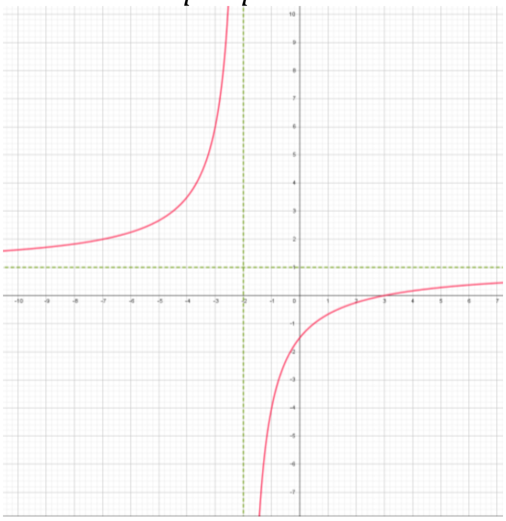
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{0}{0^-} = indeterminación \ , \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{-1}{4}$$

$$no\ hay\ asíntota\ en\ x = 2$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{20}{-0^-} = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{20}{-0^+} = -\infty$$

$$AH \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad \textbf{y = 1}$$

no tiene AO porque tiene AH



d) $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$

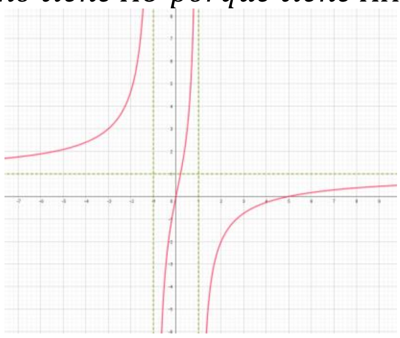
$$x^2 - 1 = 0 \qquad x = 1, \qquad x = -1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{-4}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{-4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{6}{-0^-} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{6}{-0^+} = -\infty$$

$$AH \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad , \; y = 1$$

no tiene AO porque tiene AH



e) f(x) = $\frac{-5x}{(x-1)^2}$

$$AV \Rightarrow (x-1)^2 = 0; \quad \textbf{x = 1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$AH \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x} = 0 \quad , \quad \textbf{y = 0}$$

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene asíntota horizontal.

f) **f(x)** = $\frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

$AV \;\; => \;\; (x-1)^2 = 0;$ **x = 1**

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-10}{0^+} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-10}{0^+} = -\infty$

$AH \;\; => \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = -5$, **y = -5**

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene asíntota horizontal.

g) f(x) = $\ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$

$AV =>$ Debemos calcular que valores de x hacen que la función tienda a infinito, (ln 0 = ∞)

$\frac{-5x}{(x-1)^2} = 0$ → -5x = 0 → **x = 0**

$AH \;\; => \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{-\infty} = \frac{5}{\infty} = 0,$ **y = 0**

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene asíntota horizontal.

h) f(x) = $\sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$

Calculamos el dominio de f(x).

Como el denominador es siempre positivo, vemos cuando el numerador es positivo,

$-5x \geq 0 \;\to x \leq 0$, Por lo tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

No tiene A.V. porque solo está definida para x ≤ 0.

$AH \;\; => \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{-5x}{x^2}} = \sqrt{0} = 0$, **y = 0**

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene asíntota horizontal.

2. CONTINUIDAD

4.- Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^x & si\ x < -2 \\ 4 - x^2 & si\ -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & si\ x > 1 \end{cases}}$

f es continua en todo ℝ, salvo en x = -2 y x = 1 que debemos estudiar si lo es.

Cuando x = -2

1.- f(-2) = 4 - (-2)^2 = 4 – 4 = 0

2.- $\lim_{x\to-2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} (3^x) = (3^{-2}) = \frac{1}{9} \\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} (4-x^2) = (4-(-2)^2\,) = 0 \end{cases}$, los límites laterales son distintos por tanto no existe el límite.

3.- Como no existe $\lim_{x\to-2} f(x)$, f no es continua en x = 2.

Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito, (límites laterales finitos)

Cuando x = 1

1.- f(1) = 4 – (1)^2 = 4 – 1 = 3

2.- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3^x) = (3^3) = 27 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (4-x^2) = (4-(1)^2\ ) = 3 \end{cases}$, los límites laterales son distintos por tanto no existe el límite.

3.- Como no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, f no es continua en x = 1.

Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

b) $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x < 0 \\ x^2 - 3x & si\ 0 \le x \le 3 \\ \sqrt{x-3} & si\ x \ge 3 \end{cases}}$

f es continua en todo ℝ, salvo en x = 0 y x = 3 que debemos estudiar si lo es.

Cuando x = 0

1.- g(0) = 0^2 -3 · 0 = 0

2.- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2-3x) = ((0)^2 - 3\cdot 0\ ) = 0 \end{cases}$, los límites laterales son distintos por tanto no existe el límite.

3.- Como no existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, g no es continua en x = 0.

Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito

Cuando x = 3

1.- g(3) = 3^2 – 3 · 3 = 0

2.- $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2-3x) = ((3)^2 - 3\cdot 3) = 0 \end{cases}$, los límites laterales son distintos por tanto no existe el límite.

3.- Como no existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, g(x) no es continua en x=3. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

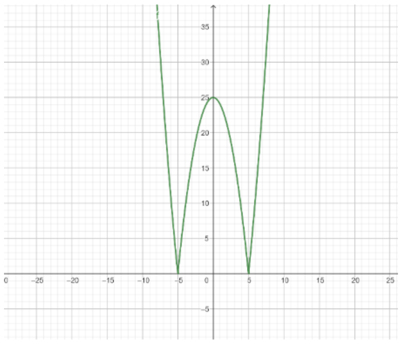
c) $\boldsymbol{|x^2 - 5x|}$

Es continua en ℝ porque es el valor absoluto de una función polinómica.

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $\boldsymbol{f(x) = |x^2 - 25|}$

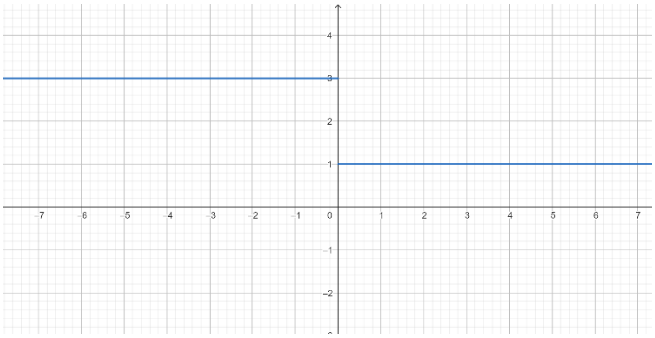
Es el valor absoluto de un polinomio por tanto es continua en todo ℝ.



b) $\boldsymbol{g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - \left(-\frac{x}{x}\right) = 2 + 1 = 3 & x < 0 \\ 2 - \left(\frac{x}{x}\right) = 2 - 1 = 1 & x > 0 \end{cases}$$

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto finito



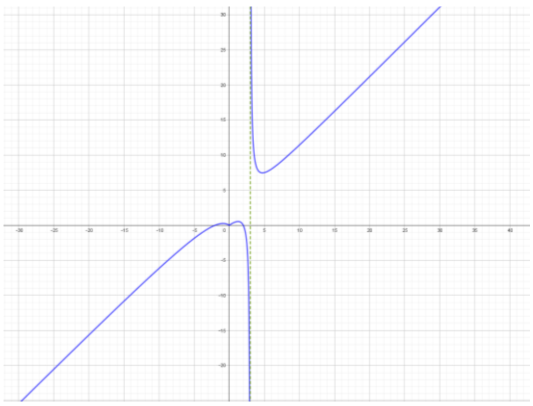
c) $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x-3}}$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2(-x)}{x-3} = \frac{x^2+2x}{x-3} & x < 0 \\ \frac{x^2-2(x)}{x-3} = \frac{x^2-2x}{x-3} & x \geq 0 \end{cases}$$

En x = 0 la función es continua. Pues existe el límite y el valor de la función.

Estudiamos la continuidad en x = 3

f(3) no existe y los límites laterales son $\pm\infty$ por tanto hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.



6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$; x = 1 y x = 3

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x+5}{x^2-4x+3} = \frac{8}{0} = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3x+5}{x^2-4x+3} = \frac{14}{0} = \pm\infty \end{cases}$$

Es continua en todos los números reales salvo en x = 1 y x = 3

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

b) $\boldsymbol{g(x) = \frac{7x+2}{x^2+x}}$

$x^2 + x = 0$; x = 0 ; x = -1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{7x+2}{x^2+x} = \frac{-5}{0} = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{7x+2}{x^2+x} = \frac{2}{0} = \pm\infty \end{cases}$$

Es continua en todos los números reales salvo en x = 0 y x = -1

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

c) $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$; x = 3 ; x = -1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3} = \frac{-2}{0} = \pm\infty \end{cases}$$

Es continua en todos los números reales salvo en x = 3 y x = -1

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en los dos valores.

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) f(x)= $\boldsymbol{\sqrt{x^2 - x - 6}}$

$x^2 - x - 6 \geq 0$, $x^2 - x - 6 = 0$ → x = 3 , x = -2

Estudiamos el signo dentro de la raíz en los intervalos determinados por los valores.

Cogemos los siguientes valores: por ejemplo -3 / 0 / 4

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{-6}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos por 4 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.

Al haber calculado el dominio se calcula también la continuidad, por lo que:

Dom: (-∞, -2] U [3, ∞)

Continuidad: (-∞, -2] U [3, ∞) en el resto la función no existe

b) $g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$

$\frac{2-x}{x^2-4} \geq 0$ → $2 - x = 0$ → $x = 2$

$x^2 - 4 = 0$ → $(x + 2)\cdot(x - 2) = 0$ → $x = -2$, $x = 2$

Estudiamos el signo dentro de la raíz en los intervalos determinados por los valores.

Vamos a sustituir con los siguientes valores: -3 / 0 / 3

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{1}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{\frac{2}{-4}}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos con 3 nos da $\sqrt{\frac{-1}{5}}$ por lo que no existe la raíz.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: $(-\infty, -2)$

Continuidad: $(-\infty, -2)$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$

$\frac{3-x}{x^2-3x} > 0$ → $3 - x = 0$ → $x = 3$

$x^2 - 3x = 0$ → $x = 3$, $x = 0$

Estudiamos el signo dentro de la raíz en los intervalos determinados por los valores.

Vamos a sustituir con los siguientes valores: -3 / 1 / 4

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{\frac{6}{18}}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 1 nos da $\sqrt{\frac{2}{-2}}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos con 4 nos da $\sqrt{\frac{-1}{4}}$ por lo que no existe la raíz.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: $(-\infty, -3)$

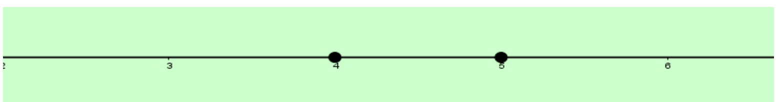
Continuidad: $(-\infty, -3)$

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$

Como es logaritmo neperiano, estudiamos:

$\frac{4-x}{5-x} > 0$, $4 - x = 0 \rightarrow -x = -4 \rightarrow x = 4$; $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = 3 \rightarrow \frac{4-3}{3-5} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$x = 4{,}5 \rightarrow \frac{4-4{,}5}{4{,}5-5} = \frac{-0{,}5}{-0{,}5} = 1$

$x = 6 \rightarrow \frac{4-6}{6-5} = \frac{-2}{1} = -2$

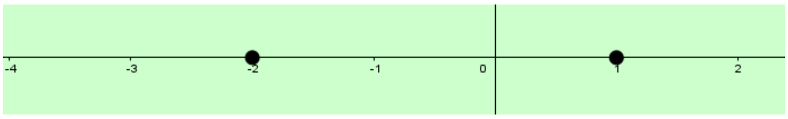
Es continua en los puntos que son mayores que cero, por lo que:

Continua en (4, 5) en el resto no existe la función

b) $\boldsymbol{g(x) = \ln(-x^2 - x + 2)}$

Al ser logaritmo neperiano, estudiamos

$-x^2 - x + 2 > 0 \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \ \rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{-2} = \frac{1\pm 3}{-2} \rightarrow \ x = -2\,,\ \ x = 1$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = -3 \rightarrow -(-3)^2 - (-3) + 2 = 0 \rightarrow -9 + 3 + 2 = -4$

$x = 0 \rightarrow 0 - 0 + 2 = 2$

$x = 2 \rightarrow -(2)^2 - 2 + 2 = -4$

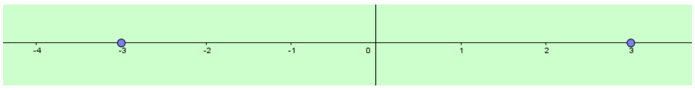
Continua en (-2, 1) en el resto la función no existe

c) $\mathbf{h(x) = \ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)}$

Como a) y b).

$\frac{9-x^2}{(x-3)^2} > 0 \qquad 9 - x^2 = 0 \rightarrow -x^2 = -9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3; \quad x = -3$

$(x-3)^2 = 0 \ \rightarrow x = 3$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = -4 \rightarrow \frac{9-16}{(-4-3)^2} = -\frac{1}{7}$

$x = 0 \rightarrow \frac{9}{(0-3)^2} = 1$

$x = 4 \rightarrow \frac{9-16}{(4-3)^2} = -7$

Continua en (-3, 3), en el resto no existe la función

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad

$\boldsymbol{a)\ f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}}$

Dom $f(x)$: $\ 7 + x \neq 0 \quad ; \quad 7 + x = 0$ –> $x = -7$; Dom$f(x)$ → $\Re - \{-7\}$

$\lim_{x\to -7^+}$ f(x) = $e^{\frac{-7^2-9}{7-7}}$ = e^{∞} = ∞ , $\lim_{x\to -7^-}$ f(x)= $e^{\frac{-7^2-9}{7-7}}$ = $e^{-\infty}$ = 0

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito

$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{g(x) = e^{\sqrt{x-5}}}$

Dom$g(x)$, $x-5 \geq 0$, $x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$; Dom$g(x) \rightarrow \{x \in \Re;\ x \geq 5\}$

Es continua ahí ya que es el dominio de definición de la función

$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}}$

$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$; $x^2-1 \neq 0 \rightarrow x = +1\ y\ -1$; Dom$h(x) \rightarrow \{x \in \Re;\ x > 1\}$,

h es continua en $\{x \in \Re;\ x > 1\}$

10. Dada la función $f(x)\begin{cases} 3-x^2 & x<0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x\to 0^-}(3-x^2)$= 3 - 0^2 = 3 , $\lim_{x\to 0^+}(2+e^x)$= 2 + 1= 3

La función es continua

b)

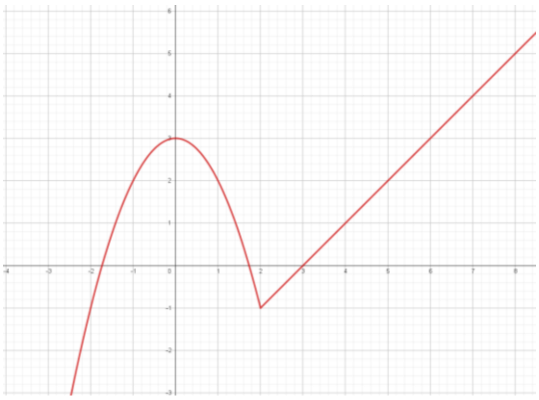
11. Dada la función $f(x)\begin{cases} 3-x^2 & x<2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de k para que sea continua en toda la recta real.

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x\to 2^-}(3-x^2)$= 3 - 2^2 = -1 ; $\lim_{x\to 2^+}(k+x)$ = k + 2 ; k + 2 = -1 ; k = -3

b) Sustituyendo k por – 3



12. Dada la función $f(x)\begin{cases} x-3 & x<-1 \\ x^2-5 & -1\le x<1 \\ \frac{2}{x} & x\ge 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

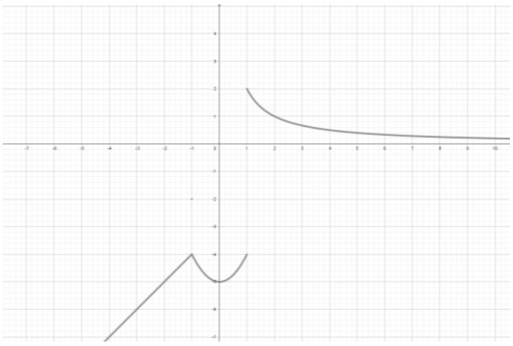
a) Continuidad en x = 1

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{2}{x})$ = 2/1 = 2 , $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-5)$ = 1 - 5 = -4 . No es continua

Continuidad en x = -1

$\lim\limits_{x\to -1^-}$(x - 3) = -1 - 3 = -4 $\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-5)$ = 1 - 5 = -4. Es continua

b)



13.Dada la función $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & x<2 \\ x^2-4 & x\ge 2 \end{cases}}$

a)Estudia su continuidad

PASO 1. Estudio de la continuidad de la función en el punto x = 2

$f(x)=x^2-4 \quad x\ge 2$

$f(2)=2^2-4=4-4=0$

PASO 2. Calculo los limites:

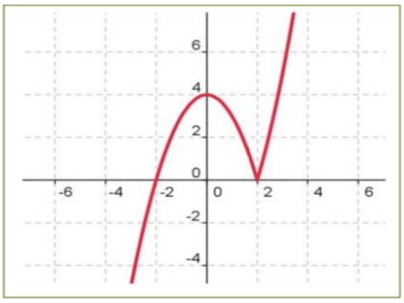
-Límite por la izquierda $f(x)=4-x^2 \quad x<2 \qquad \lim\limits_{x\to 2^-}(4-x^2)=4-2^2=0$

-Límite por la derecha $f(x)=x^2-4 \quad x\ge 2 \qquad \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-4)=2^2-4=0$

PASO 3. Entonces $f(2)=0=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

Como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en x=2

b)Representa la gráfica



14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

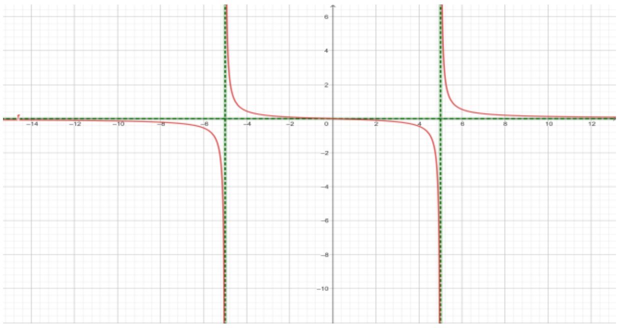
Asíntotas verticales:

$x^2 - 25 = 0 \quad ; \; x + 5 = 0 \qquad \boldsymbol{x = -5} \quad , \quad x - 5 = 0 \qquad \boldsymbol{x = 5}$

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0}$

Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas



Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, x = 5 y x = -5 discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

15. Esboza la gráfica de la función $\frac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Asíntotas verticales

$x^2 - 25 = 0 \quad ; \; x + 5 = 0 \qquad \boldsymbol{x = -5} \quad , \quad x - 5 = 0 \qquad \boldsymbol{x = 5}$

Asíntotas horizontales

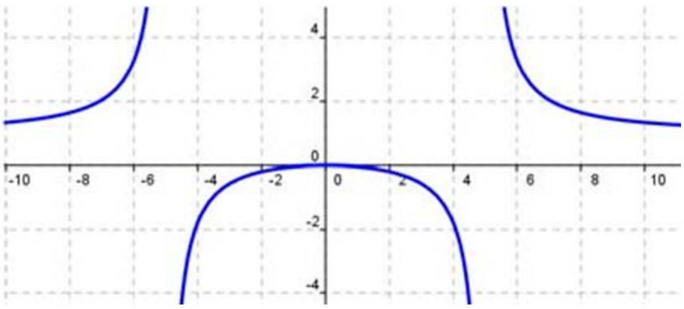
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-5)(x+5)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-25} = 1 \qquad \boldsymbol{y = 1}$

No hay asíntotas oblicuas porque hay asíntotas horizontales

Loa puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, x = 5 y x = -5, hay una discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

16. Utiliza GeoGebra para dibujar, de nuevo, la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$.

Estudia su simetría.



Es una función par.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ es igual a:

a) -∞ b) 0 c) 1 d) 2/3

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{1^2-1}-\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x}{x^2-1}=\frac{-1}{1^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty$

Respuesta: a) $-\infty$

2. El límite $\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)\left(\frac{1}{x+2}\right)$ es igual a:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1

$\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)(\frac{1}{x+2})=(-2^2-(-2)-2)(\frac{1}{-2+2})=(+4)(\frac{1}{0})=\frac{4}{0}=\infty$

Respuesta: a) ∞

b) El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ es igual a:

a) ∞ b) 0 c) -2/3 d) -1

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)=(\frac{1^2-4(1)+3}{1^2+1-2})=\left(\frac{1-4+3}{1+1-2}\right)=\frac{0}{0}$ *indeterminación*

$x^2-4+3=(x-3)(x-1)$; $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$\lim_{x\to 1}(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)})=\lim_{x\to 1}(\frac{(x-3)}{(x+2)})=\frac{1-3}{1+2}=\frac{-2}{3}$

Respuesta: c) $\frac{-2}{3}$

b) El límite $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ es igual a:

a) ½ b) 0 c) -∞ d) -1

$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-1^2}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=$

$=\lim_{x\to -1}\frac{2+x-1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(\sqrt{2+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Respuesta: a) $\frac{1}{2}$

c) El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ es igual a:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty$

Respuesta: a) ∞

6. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ es igual a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^3}=5$$

Respuesta: c) 5

7. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ es igual a:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3x}=1\,;\lim_{x\to\infty}(2x^2+1)=\infty;\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2+1}=1^{\infty}=Indeterminación$$

Calculamos: $e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+1)\left(\frac{3x+1}{3x-2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+1)\left(\frac{3x+1-3x+2}{3x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+1)\cdot\frac{3}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{1}\cdot\frac{3}{3x-2}}=$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3}{3x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x}=e^{\infty}=\infty$

Respuesta: a) ∞

8. Estudia la continuidad de f(x) = $\begin{cases}\frac{x^3-3}{x} & si\ x<0\\ 3x+2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en x = 0.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

1. f (0) = 3 · 0 + 2 = 0 + 2 = 2

2. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x^3-3}{x}\right)=\frac{-3}{0^-}=\infty$

Al darnos ∞ no hace falta calcular el siguiente límite.

Al ser el límite = ∞, tiene una discontinuidad inevitable, de primera especie de salto infinito.

Respuesta: d) de un salto infinito.

9. Estudia la continuidad de f(x) = $\begin{cases}x^3-3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$ en x = 2.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

1. f (2) = 3 · 2 + 2 = 6 + 2 = 8

2. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^3-3)=(8-3)=5\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(3x+2)=(6+2)=8\end{cases}$

Como los límites laterales son distintos, tiene una discontinuidad inevitable de primera especie de salto finito.

Respuesta: c) con un salto finito.

10. Estudia la continuidad de f(x) = $\begin{cases}x^3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x>2\end{cases}$ en x = 2.

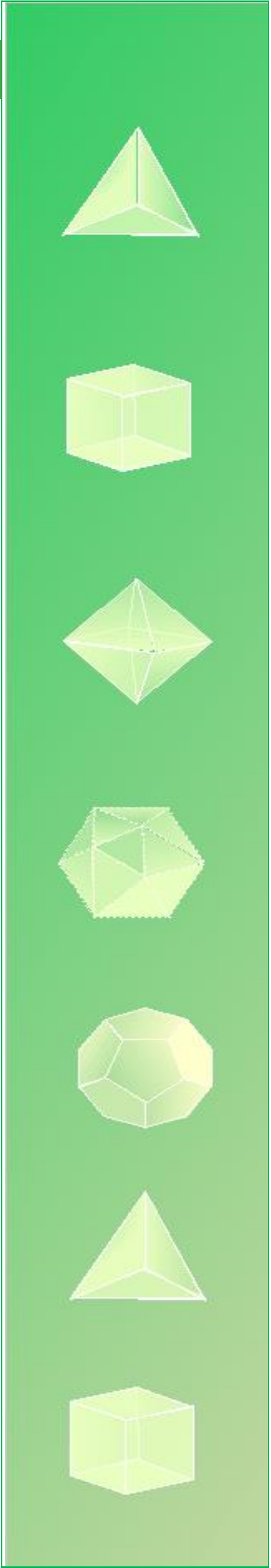
a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

1. f (2) no existe.

2. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(x^3)=(2^3)=8\\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}(3x+2)=(6+2)=8\end{cases}$

Como los dos limites dan la misma solución y son finitos, al no existir f(2), tenemos una discontinuidad evitable.

Respuesta: b) tiene una discontinuidad evitable



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 5: Derivadas
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 3x - 4}$

$$TVM[3,2]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+13}{2+3} = 3$$

$$TVM[1,5]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{11+1}{5-1} = 3$$

$$TVM[0,3]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{5+4}{3-0} = 3$$

b) $\boldsymbol{y = -2x - 3}$

$$TVM[3,2]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-7-3}{2+3} = -2$$

$$TVM[1,5]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+5}{5-1} = -2$$

$$TVM[0,3]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+3}{3-0} = -2$$

c) $\mathbf{y = 0.5x + 2}$

$$TVM[3,2]\ \colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3-0{,}5}{2+3} = 0{,}5$$

$$TVM[1,5]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4{,}5-2{,}5}{5-1} = 0{,}5$$

$$TVM[0,3]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3{,}5-2}{3-0} = 0{,}5$$

d) $\boldsymbol{y = x - 1}$

$$TVM[3,2]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1+4}{2+3} = 1$$

$$TVM[1,5]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4-0}{5-1} = 1$$

$$TVM[0,3]\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+1}{3-0} = 1$$

2.Halla la tasa de variación media de la función y = x^2 – 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

$$TVM[-3,2] = \frac{f(2)-f(-3)}{2-3} \to \frac{(2^2-1)-((-3)^2-1)}{2+3} \to \frac{-5}{5} \to -1$$

$$TVM[1,5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \to \frac{(5^2-1)-(1^2-1)}{5-1} \to \frac{24}{4} \to 6$$

$$TVM[0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \to \frac{(3^2-1)-(0^2-1)}{3-0} \to \frac{9}{3} \to 3$$

Ahora no es cte.

3. Halla la tasa de variación media de la función y = x^3 + 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

$$TVM[-3,2] = \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \to \frac{(2^3+1)-((-3)^3+1)}{2+3} \to \frac{35}{5} \to 7$$

$$TVM[1,5] = \frac{f(5)-f(-1)}{5-1} \to \frac{(5^3+1)-(1^3+1)}{5-1} \to \frac{124}{4} \to 31$$

$$TVM[0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \to \frac{(3^3+1)-(0^3+1)}{3-0} \to \frac{27}{3} \to 9$$

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

$$Vmedia = \frac{340}{14} \to 24.26\ \frac{m}{s}$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

$$Vmedia\ [0,6] \to \frac{230}{6} = 38.33\ \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [2,10] \to \frac{200}{8} = 25\ \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [6,14] \to \frac{40}{8} = 5\ \frac{m}{s}$$

c) ¿Es constante?

No es cte. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	35
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to TVM\ (0,40) = \frac{720-0}{40-0} = 18\ m/s$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to TVM\ (15,25) = \frac{430-290}{25-15} = 14\ m/s$$

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \to TVM\ (0,40) = \frac{510-370}{30-20} = 14\ m/s$$

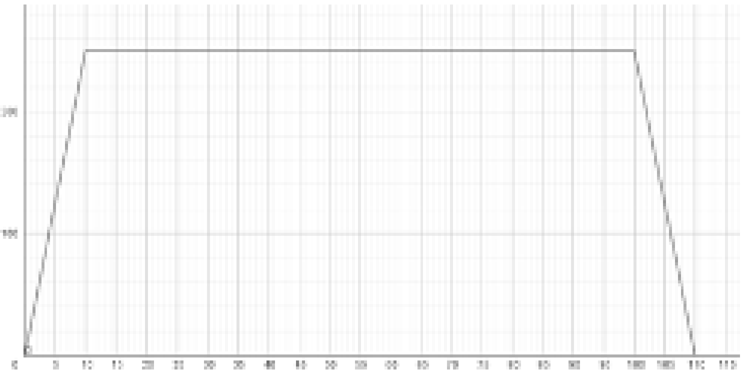
Cómo la velocidad no varía se puede decir que son constantes.

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

120 km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.



b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

$$am\,[0{,}10] = \frac{250-0}{10-0} = 25\ km/h^2$$

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

$am\,[10{,}90] = \frac{250-250}{90-10} = 0$**,** velocidad constante

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

$$am\,[100{,}110] = \frac{0-250}{110-100} = -25\ km/h^2$$

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B\,(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$ donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.

$$TVM(0-100) = \frac{B(100)-B(0)}{100-0}$$

$$B(0) = (0)^2 + 7(0) + \sqrt{0} = 0$$

$$B(100) = (100)^2 + 7(100) + \sqrt{100} = 10710$$

$$TVM(0-100) = \frac{10710-0}{100-0} = 107.1$$

$$TVM(25-100) = \frac{B(100)-B(25)}{100-25}$$

$$B(25) = (25)^2 + 7(25) + \sqrt{25} = 805$$

$$TVM(25-100) = \frac{10710-805}{100-25} = 132.07$$

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B (x) por trabajador contratado son ingresos menos costes (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina las tasas de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

$$B(x) = x^2 + x - \sqrt{x}$$

$$TVM = \frac{B(2500) - B(100)}{2500 - 100}$$

$$B(2500) = 2500^2 + 2500 - \sqrt{2}500 = 6252450$$

$$B(100) = 100^2 + 100 - \sqrt{1}00 = 10090$$

$$TVM = \frac{6252450 - 10090}{2500 - 100} = 2601.83$$

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5:

a) $y = 3x - 4$

$$y = 3x - 4 \ \rightarrow \ y' = 3$$

$$x = 1;\ y'(1) = 3$$

$$x = 3;\ y'(3) = 3$$

$$x = 5;\ y'(5) = 3$$

b) $y = -2x - 3$

$$y = -2x - 3 \rightarrow y' = -2$$

$$x = 1;\ y'(1) = -2$$

$$x = 3;\ y'(3) = -2$$

$$x = 5;\ y'(5) = -2$$

c) $y = 0.5x + 2$

$$y = 0.5x + 2 \ \rightarrow \ y' = 0.5$$

$$x = 1;\ y'(1) = 0.5$$

$$x = 3;\ y'(3) = 0.5$$

$$x = 5;\ y'(5) = 0.5$$

d) $y = x - 1$

$$y = x - 1 \rightarrow \ y' = 1$$

$$x = 1;\ y'(1) = 1$$

$$x = 3;\ y'(3) = 1$$

$$x = 5;\ y'(5) = 1$$

La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función y = x² – 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5. ¿Es ahora constante?

$$y = x^2 - 1 \rightarrow y' = 2x$$
$$x = 1;\ y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$x = 3;\ y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$x = 5;\ y'(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

No, no es constante.

11. Halla la derivada de la función y = x³ + 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5.

$$y = x^3 - 1 \rightarrow\ y' =\ 3x^2$$
$$x = 1;\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3$$
$$x = 3;\ y'(3) = 3 \cdot (3)^2 = 27$$
$$x = 5;\ y'(5) = 3 \cdot (5)^2 = 75$$

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia "y" dada por la ecuación: y = 0.2x + 110x – 67.2. Determina la velocidad que llevaba el coche para x = 1.5.

$$y = 0.2x^2 + 110x - 67.2 \rightarrow y' =\ 0.4x + 110$$
$$0.4 \cdot (1.5) + 110 \rightarrow 110.6\ \frac{m}{s}$$

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $\mathbf{2.5 \leq x \leq 3}$ viene dada por la ecuación $\mathbf{y = 110x\ - 121.4}$. Y para $\mathbf{3 \leq x \leq 5}$ por $\mathbf{y =\ 0,1x^2 + 118x - 143.3}$. Para x = 3 hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de x = 3, y la velocidad después de x = 3.

Para 2,5 ≤ x ≤ 3

$$y = 110x - 121{,}4\ \rightarrow\ y' =\ 110 = 110$$

Para 3 ≤ x ≤ 5

$$y = 0{,}1x^2 + 118x - 146{,}3\ \rightarrow\ y' = 0{,}2x + 118\ \rightarrow\ y'(3) = 0{,}2 \cdot 3 + 118 = 0{,}6 + 118 = 118{,}6$$

Antes de x = 3 la velocidad es 110 m/s y después 118,6 m/s

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

$$y = 50x - 0.2x^2 \rightarrow\ y' = 50 - 0.4x$$
$$x = 2 \rightarrow\ 50 - 0.4(2) \rightarrow 50 - 0.8 \rightarrow 49.2$$

Solución = 49.2m

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

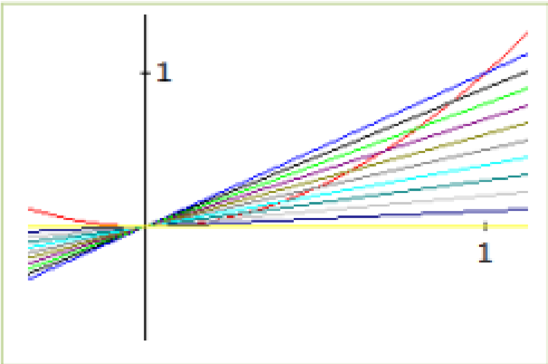
$$d = 0.3t^4 \rightarrow\ d' = 1.2t^3$$
$$t = 4 \rightarrow\ v(4) = 1.2 \cdot (4)^3 = 76.8$$
$$t = 7 \rightarrow\ v(7) = 1.2 \cdot (7)^3 = 411.6$$
$$t = 10 \rightarrow\ v(10) = 1.2 \cdot (10)^3 = 1200$$

16. Representa gráficamente la función y = 2, y determina su derivada para x = 1, 2, 3.... a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal y=b?

y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0.

Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, f(x) y f(a), correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

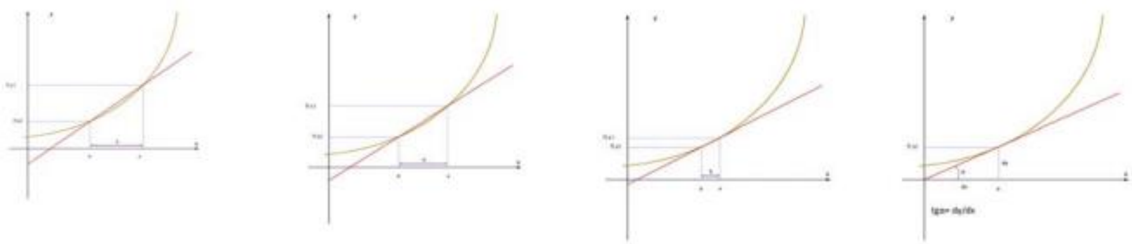


Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).

18. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica1, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición y = f(t), y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

$$y = f(t) = t^2; \qquad y' = v = 2t; \qquad a = y'' = 2.$$

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función f(a). Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.



20. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 2x + x2. (Observa que esta función no es continua, no

se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

$$y = f(t) = t^2; y' = v = 2t; a = y'' = 2.$$

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = 1. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = a. Calcula mediante la expresión resultante f '(1), f' (2), f' (12), f' (5.43) y f' (-7).

$$\boldsymbol{y = x^2 - x + 1} \rightarrow y'(1). = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-(1+h)+1-1}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(1+h^2+2h)-(1+h)+1-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+h^2+2h-1-h-1+1}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h(h+1)}{h} = 0+1 = 1$$

$\boldsymbol{y = x^2 - x + 1}$, x = a

$$y'(a). = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-(a+h)+1-(a^2-a+1)}{+1)h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(a^2+h^2+2ah)-(a+h)+1-a^2+a-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah-h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2a-1)}{h} = 2a-1$$

f '(1) = 2·1 – 1 = 1; f' (2) = 2·2 – 1 = 3; f' (12) = 2·12 – 1 = 23;

f' (5.43) = 2·5.43 – 1 = 9.86; f' (-7) = 2·(-7) – 1 = -15

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	f(x) = x^3	f(x) = 2	f(x) = x^2	f(x) = x	f(x) = k	f(x) = 2x + 3	f(x) = $2x^2$ + 3x
Derivada	f'(x) = $3x^2$	f'(x) =0	f'(x) =2x	f'(x) = 1	f'(x) =0	f'(x) = 2	f'(x) = 4x+3

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

24.Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen, pero tiene un mínimo en dicho origen.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{f(x) = x^{24}} \rightarrow f'(x) = 24x^{23}$

b) $\boldsymbol{g(x) = 6x^{10}} \rightarrow g'(x) = 60x^9$

c) $\boldsymbol{h(x) = \frac{6}{7x^{13}}} \rightarrow h`(x) = \frac{78}{7x^{12}}$

d) $\boldsymbol{j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7} \rightarrow j'(x) = 12x^3 - 10x$

e) $\boldsymbol{p(x) = 5x^3 - x} \rightarrow p'(x) = 15x^2 - 1$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $\boldsymbol{y = 6 + x - 5x^2} \rightarrow y' = -10x + 1$

b) $\boldsymbol{y = 6x^2 - 7x + 3x^5} \rightarrow y' = 15x^4 + 12x - 7$

c) $\boldsymbol{y = \frac{2}{3x^7} + \frac{8}{5x^5} - \frac{9}{4x^4}} \rightarrow y' = \frac{14}{3x^6} + \frac{40}{5x^4} - \frac{36}{4x^3}$

d) $\boldsymbol{y = x^8 - x} \rightarrow y' = 7x^7 - 1$

27. Ya hemos obtenido la derivada $\boldsymbol{y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}}$ de Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

En $x = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

En $x = 4 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

En $x = 5 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 0.2236$

En $x = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot 0^{\frac{1}{2}}} \rightarrow$ No existe, puesto que cuando el 0 se encuentra en el denominador no es un valor real.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = (x^2 + 3)(6x^6 - 5)} \rightarrow y = 6x^8 - 5x^2 + 18x^2 \rightarrow y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $\boldsymbol{y = (7x^3 - 1)(5x^4 + 4)} \rightarrow y = 35x^7 + 28x^3 - 5x^4 - 4 \rightarrow y' = 245x^6 + 84x^2 - 20x^3$

c) $\boldsymbol{y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 5x) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 5)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \frac{x-1}{x+3}} \rightarrow y' = \frac{x(x-3) - x(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$

b) $\boldsymbol{y = x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x^3} - 2x + 7 \rightarrow y' = 2x + 5x^2 - 2;\ y' = 2x + 5x^2 - 2$

c) $\boldsymbol{y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}} \rightarrow y' = \frac{(6x^2 - 10x)(6x^4 - 2x^3) - (24x^3 - 6x^2)(2x^3 - 5x^2)}{(6x^4 - 2x^3)^2} = \frac{-6x^2 + 30x - 5}{18x^4 - 12x^3 + 2x^2}$

d) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+2) - x^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2} + 3\right)}{(x+2)^2}$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt[5]{x^7}} = (x^7)^{\frac{1}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{5}(x^7)^{-\frac{4}{5}}(7x^6) = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$

b) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3 + 5} \rightarrow y' = \frac{\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3 + 5) - \left(\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}\right)(3x^2)}{(x^3 + 5)^2} = \frac{-11x^4 + 35x}{(x^3 + 5)^2}$

c) $\boldsymbol{y} = \frac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}} \rightarrow y' = \frac{\left[4x^3\cdot\sqrt{x}+(x^4-2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(\sqrt[4]{x^5}\right)-\left((x^4-2)\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x^5}\right)^2}$

d) $\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2} = \frac{(\mathrm{x})^{\frac{11}{6}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{11}{6}(\mathrm{x})^{\frac{5}{6}}(x+2)-(\mathrm{x})^{\frac{11}{6}}}{(x+2)^2}$

31. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C\,(x) = x+\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por, $I\,(x) = 2x+x^2$ Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes C(x) y de la función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

$$C'(x) = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ;\ B'(x) = 1+2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Estas derivadas nos dan información sobre cómo los costes y los beneficios cambian con respecto al número de trabajadores contratados, lo que puede ser útil para la toma de decisiones empresariales.

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \left(x^5-7x^3\right)^{12}} \rightarrow y' = 12(x^5-7x^3)^{11}(5x^4-21x^2)$

b) $\boldsymbol{y = (3x^3-5x^2)^7} \rightarrow y' = 7(3x^3-5x^2)^6(9x^2-10x)$

c) $\boldsymbol{y = \sqrt{(4x^5-8x^3)^5}} \rightarrow y = (4x^5-8x^3)^{\frac{5}{2}} \rightarrow y' = \frac{5}{2}(4x^5-8x^3)^{\frac{3}{2}}(20x^4-24x^2)$

d) $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}} \rightarrow y = (2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} \rightarrow y' = \frac{4}{3}(2x^2+4x^7)^{\frac{1}{3}}(4x-28x^6)$

3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}\,(x^4-6x^3)^2}}$ = y= $\left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

y'= $\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot\left(\frac{(6x-5)(2x^3+7)-(3x^2-5x)(6x^2)}{(2x^3+7)^2}\right)\cdot(x^4-6x^3)^2+\left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}\right)\cdot 2(x^4-6x^3)(4x^3-18x^2)$

b) $\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}} = \sqrt{\frac{x^4-7x^2+3x^2-21}{x^3-5}} = \sqrt{\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}} = \left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(4x^3-8x)(x^3-5)-3x^2(x^4-4x^2-21)}{(x^3-5)^2}\right)\right]$$

c) $\boldsymbol{y = \sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3}} = \left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$y' = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}(10x+3)(8x^3-2x^2)-(5x^2+3x)(24x^2-4x)\right]$$

d) $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}}}$, $y' = \left(3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3+\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$y'=\frac{1}{3}(3+(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{1}{2}})^{\frac{-2}{3}}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{-1}{2}}(1-6x^{-4})$

34. Determina la ecuación de la recta tangente a y = 7x² + 5x – 3 en el punto x = 2.

$$y = 7x^2+5x-3 \;\rightarrow\; y' = 14x+5$$
$$y'(2) = 14(2)+5 = 28+5 = 33$$
$$y(2) = 7(2)^2+5(2)-3 = 29 \;\rightarrow\; P(2{,}29)$$
$$y-y_1 = m(x-x_1) \;\rightarrow\; y-29 = 33(x-2) \;\rightarrow\; y = 33x-66+29 \;\rightarrow\; y = 33x-37$$

35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $\boldsymbol{y = 0.05x - 0.01x^2}$donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.

$y = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$; $f(0) = 0.05\cdot 0-0.01\cdot 0^2 = 0$ $f'(x) = 0.05-\frac{1}{50}x$

$f'(0) = 0.05-\frac{1}{50}\cdot 0 = 0.05$

$y = 0+0.05\cdot(x-0)$, $y = 0{,}05x$

PARA x = 1 -> $x_0 = 1$

$f(1) = 0.05\cdot 1-0.01\cdot 1^2 = 0.04$, $f'(1) = 0.05-\frac{1}{50}\cdot 1 = 0.03$; y = 0.03x + 0.01

PARA x = 2 -> $x_0 = 2$

$f(2) = 0.05\cdot 2-0.01\cdot 2^2 = 0.06$ $f'(2) = 0.05-\frac{1}{50}\cdot 2 = 0.01$ $y = 0.06+0.01\cdot(x-2)$

$y = 0.06+0.01x-0.02$; $y = 0.01x+0.04$

PARA x = 3 -> $x_0 = 3$

$f(3) = 0.05\cdot 3-0.01\cdot 3^2 = -0.04$ $f'(3) = 0.05-\frac{1}{50}\cdot 3 = -0.01, y = -0.04+(-0.01)\cdot(x-3); y = -0.04-0.01x+0{,}03;$ $y =$ -0,01x - 0,01

36. El departamento de “marketing” de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $\boldsymbol{y = 30+5t^2-0.4t^3}$ donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

a) $\frac{dy}{dt}(3) = 10\cdot(3)-1.2\cdot(3)^2 = 19.2$. Creciente

b) $10t-1.2t^2 > 0$, $t(10-1.2t) > 0$

$t > 0 \;\; y \;\; 10 - 1.2t > 0$ o $t < 0 \;\; y \;\; t < \frac{10}{1.2}$, $t < 0 \;\; y \;\; t < \frac{25}{3}$

Los ingresos están aumentando para $0 < t < \frac{25}{3}$

c)$10t - 1.2t^2 < 0$, $t(10 - 1.2t) < 0$

$t < 0 \;\; y \;\; 10 - 1.2t > 0$ o $t > 0 \;\; y \;\; 10 - 1.2t < 0$

$t < 0 \;\; y \;\; t < \frac{10}{1.2}$ o $t > 0 \;\; y \;\; t > \frac{25}{3}$

Los ingresos están disminuyendo para $t > \frac{25}{3}$

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: y = x³ - 3x. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 2? ¿Y en x = -2?

$y = x^3 + 3x$ -> $y' = 3x^2 + 3$, ahora igualo la derivada a 0 (y´=0)->

$3x^2 + 3 = 0$ -> $x = \sqrt{-1}$

$y = x^3 - 3x$ -> $y' = 3x^2 - 3$, (y´=0)-> $3x^2 - 3 = 0$-> $x = \sqrt{1}$-> $x = \pm 1$

$y'(0) = -3 < 0$ / Decreciente

$y'(2) = 1 > 0$ / Creciente

$y'(-2) = 1 > 0$ / Creciente

Creciente $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Decreciente $(-1, 1)$

38. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C\,(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

$$B(x) = I(x) - C(x) \; \rightarrow \; B(x) = (2x + x^2) - (x + x) \; \rightarrow \; x^2$$

$$B(x) = x^2 \; ; \; B'(x) = 2x$$

Es creciente

39. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a)$\boldsymbol{y = 4x^2 + 3}$; $y' = 8x$; 8x = 0 . x = 0; y'' = 8 > 0 En x = 0 hay un mínimo

b) $\boldsymbol{y = 5x^4 - 2}$; $y' = 20x^3$; $20x^3 = 0$; $x = 0$;

$(-\infty, 0)$ *decreciente*, $(0, \infty)$ *creciente*, en x = 0 hay un mínimo

c) $\boldsymbol{y = 3x^3 + 1}$; $y' = 9x^2$ como siempre es positiva, no hay máximos ni mínimos

d)$\boldsymbol{y = 4x^4 - 2x^2 + 5}$; $y' = 16x^3 - 4x \rightarrow y' = 4x \cdot (4x^2 - 1) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ $y \; x = 0$;

$y'' = 48$

$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ *Es un mínimo relativo*

$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0$ *Es un máximo relativo*

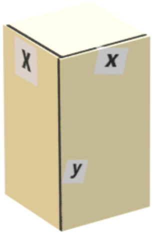
y''(0) = -4 < 0 *Es un máximo relativo*

e) $\boldsymbol{y = 7x^3 - 3x}$; $y' = 21x^2 - 3 \to y' = \pm\sqrt{\frac{3}{21}}$; $y'' = 42x$

$y''\left(\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42 \cdot \sqrt{\frac{3}{21}} = 6 \cdot \sqrt{7} > 0$ *Es un mínimo relativo*

$y''\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42x \to 42\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = -6 \times \sqrt{7} < 0$ *Es un máximo relativo*

40. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.



Función para optimizar, superficie: S(x, y) = 2·x·x + 4·x·y = $2x^2 + 4xy$

Condición: x·x·y = 1 , $x^2y = 1$

Despejamos y, $y = \frac{1}{x^2}$ sustituimos en la función, $S(x) = 2x^2 + 4x\frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

Derivamos $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$

Igualamos a 0 y resolvemos, $4x - \frac{4}{x^2} = 0$, $4x = \frac{4}{x^2}$, $x^3 = 1$, $x = 1$

Calculamos la segunda derivada, $S''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ y $S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$

Luego en x = 1 hay un mínimo, $y = \frac{1}{1^2} = 1$

La mínima superficie se obtiene con un cubo de 1dm de arista.

41. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7} \to y' = 18x^2 - 4x + 5 \to 18x^2 - 4x + 5 = 0$; *sin raíces reales*

$y(0) = 5 > 0$ por tanto, siempre creciente, no hay máximos ni mínimos

b) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x + 5} \to y' = 3x^2 - 3 = 0 \to x = 1;\ x = -1$

$$y'' = 6x \to y''(-1) = -6 < 0;\ máximo \to y''(1) = 6 > 0$$

c) $\boldsymbol{y = |x - 4|} \to x - 4 = 0 \to x = 4,\ mínimo\ en\ x = 4$

d) $\boldsymbol{y = |x + 1| + |x - 2|}$; $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \le -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$; $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & x < 2 \\ x-2 & x \ge 2 \end{cases}$

$$|x+1| + |x-2| = \begin{cases} -x-1-x+2 & x \le -1 \\ x+1-x+2 & -1 < x < 2 \\ x+1+x-2 & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 & x \le -1 \\ 3 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & x \ge 2 \end{cases}$$

No tiene máximos ni mínimos

42. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72 \ \rightarrow\ 6x^2 - 6x + 72 = 0 \ no\ tiene\ solución\ real$$

No hay máximos ni mínimos relativos

Intervalo [–4, 3]:

$$f(-4) = 2(-4)^3 - 3(-4)^2 + 72(-4) = -128 - 48 - 288 = -464$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 + 72(3) = 54 - 27 + 216 = 243$$

En x = - 4, hay un mínimo absoluto y en x = 3, hay un máximo absoluto.

Intervalo [0, 5]

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 72(0) = 0$$

$$f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 250 - 75 + 360 = 535$$

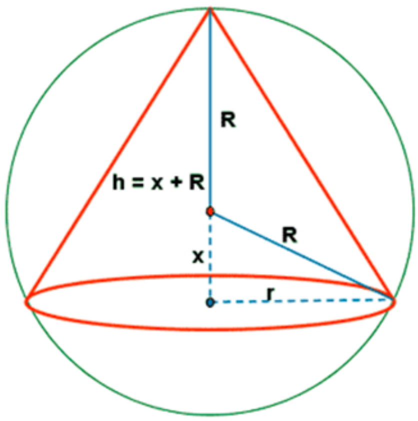
En x = 0, hay un mínimo absoluto y en x = 5, hay un máximo absoluto.

43. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

$$x + 2 = 0\,;\ x = -2 \quad ;\ f(-3) = -3 + 2 = -1 \ ;\ f(-2) = -2 + 2 = 0 \quad ;\ f(5) = 5 + 2 = 7$$

En x = -2 hay un mínimo absoluto y en x = 5 hay un máximo absoluto.

44. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de R= 5 cm. (La altura del cono es igual a R+x, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$



$$v = \frac{(\pi r^2 h)}{3} = \frac{\pi r^2 (R+x)}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi(25 - x^2)(5+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(125 + 25x - 5x^2 - x^3)$$

$$v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) \ \rightarrow\ v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) \ = 0 \ \rightarrow x = 1{,}66 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow v'' = \frac{\pi}{3}(-6x - 10)$$

$v''(1{,}66) < 0$, por tanto, es un máximo.

$r^2 = R^2 - x^2 = 5^2 - 1{,}66^2;\ r = 4{,}83\ cm$

$h = R + x = 5 - 1{,}66;\ h = 6{,}66\ cm$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

DEFINICIÓN DE DERIVADA

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = x³ en el punto x = 2.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)f(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

$$f'(2)=3\cdot 2^2=12$$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y=\sqrt{x}$ en $x = 1$.

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=\text{indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y= $\frac{1}{x^2}$ en x= 4

$$y'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{16-x^2}{16x^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^2(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^3-64x^2}$$

$$=\frac{16-4^2}{16(4^3)-64(4^2)}=\frac{16-16}{1024-1024}=\frac{0}{0},\, indeterminación\ .=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(4+x)}{16x^2(x-4)}=$$

$$\lim_{x\to 4}-\frac{4+x}{16x^2}=-\frac{4+4}{16(4^2)}=-\frac{8}{256}=-\frac{1}{32}$$

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-5(1+h)+2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h+3-5-5h+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+1)=1$$

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-3-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

CÁLCULO DE DERIVADAS

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=4x^2+2x-3}\ \rightarrow\ y'=8x+2$

b) $\boldsymbol{y=2x^3-3x^2+7x+5}\ \rightarrow\ y'=6x^2-6x+7$

c) $\boldsymbol{y=x^2-5x+2}\ \rightarrow\ y'=2x-5$

d) $\boldsymbol{y=8x^7-9x^6-5x^3}\ \rightarrow\ y'=\ (56x^6-54x^5-15x^2)$

7. Calcula:

a) $D(5x^2+7x^4+3x) \rightarrow y' = (10x+28x^3+3)$

b) $D(6x^5+4x^2+7x+5x^3) \rightarrow y' = (30x^4+8x+7+15x^2)$

c) $D(x^5+7x^4+2x^3) \rightarrow y' = (5x^4+28x^3+6x^2)$

d) $\frac{dy}{dx}(3x^3+9x^6+2x^8) \rightarrow y' = (9x^2+54x^5+16x^7)$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\left(7x^2+3x+\frac{1}{x}\right)=(7x^2+3x+x^{-1}) \rightarrow y'=14x+3-x^{-2}=14x+3-\frac{1}{x^2}$

b) $y=(5x^3+2x^2+\sqrt{x})=\left(5x^3+2x^2+x^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y'=15x^2+4x+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=15x^2+4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $y=\frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2-5x+2)} \rightarrow y=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-5x^2+2x+3x^2-15x+6}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-2x^2-13x+6}$

$$y'=\frac{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x^3-2x^2-13x+6)-(x)^{\frac{1}{2}}(3x^2-4x-13)}{(x^3-2x^2-13x+6)^2}=\frac{-5x^3+6x^2+13x+6}{\sqrt{x}(x+3)^2(x^2-5x+2)^2}$$

d) $y=\frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot(x+5)}{(x^2-5)} \rightarrow y'=\frac{\left[\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x+5)+\sqrt{x}\cdot 1\right](x^2-5)-2x\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)^2}=\frac{-x^3-15x^2-15x-25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{7x^2}{3}+\frac{3x}{5}+\frac{8}{3x}=\frac{7x^2}{3}+\frac{3x}{5}+\frac{8}{3}x^{-1} \rightarrow y'=\frac{14x}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{3}x^{-2}=\frac{14x}{3}+\frac{3}{5}-\frac{8}{3x^2}$

b) $y=\frac{5x^3}{2}+\frac{2x^2}{3}+6\frac{\sqrt{x}}{5}=\frac{5x^3}{2}+\frac{2x^2}{3}+\frac{6}{5}x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=\frac{15x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{6}{5}\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{15x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{3}{5\sqrt{x}}$

c) $7y=\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{7}+\frac{7}{\sqrt{x}} \rightarrow y=\frac{1}{7}\left(\frac{4x^3}{3}+\frac{5x^2}{7}+7x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$y'=\frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3}+\frac{10x}{7}+7\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3}+\frac{10x}{7}-\frac{7}{2\sqrt{x^3}}\right)$$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{(x-1)(2x-3)}{x+2} \rightarrow y=\frac{2x^2-3x-2x+3}{x+2} \rightarrow y=\frac{2x^2-5x+3}{x+2}$; $y'=\frac{(4x-5)(x+2)-(2x^2-5x+3)}{(x+2)^2}$

b) $y=\frac{(3x^2+4)(4x-2)}{7x-1} \rightarrow y=\frac{12x^3-6x^2+16x-8}{7x-1}$; $y'=\frac{(36x^2-12x+16)(7x-1)-7(12x^3-12x^2+16x-8)}{(7x-1)^2}$

c) $y=\frac{(8x+5x^2)(2x^5-7)}{4x+6} \rightarrow y=\frac{16x^6-56x^2+10x^7-35x^2}{4x+6} \rightarrow y=\frac{16x^6+10x^7-91x^2}{4x+6}$

$$y'=\frac{(96x^5+70x^6-182x)(4x+6)-4(16x^6-91x^2+10x^7)}{(4x+6)^2}$$

d) $y=\frac{(x+9)(2x-3)}{(x+3)(x+2)} \rightarrow y=\frac{2x^2-3x+18x-27}{x^2+5x+6} \rightarrow y=\frac{2x^2+15x-27}{x^2+5x+6}$

$$y'=\frac{(4x+15)(x^2+5x+6)-(2x^2+15x-27)(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2}$$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^3+5} \rightarrow y=(x^3+5)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$

b) $y=\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1} \rightarrow y=(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y'=-\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\frac{2}{3}}(6x^2+8x)$

c) $y=(5x^3+2)^5 \rightarrow y'=5(15x^2+2)^4(15x^2)$

d) $y=(2x^2+5x)^9 \rightarrow y'=9(2x^2+5x)^8 4x$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^3+5}\cdot(x^7+3x^2)^6 \rightarrow y=(x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^7+3x^2)^6$

$$y'=\left[\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(x^7+3x^2)^6+(x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 6(x^7+3x^2)^5\cdot(7x^6+6x)\right]$$

b) $y=\frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1} \rightarrow y=\frac{(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{x+1}$

$$y'=\frac{\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\mp\frac{2}{3}}(6x^2+8x)(x+1)-(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^2}$$

c) $y=(5x^3+2)^5\cdot(x^5+6x^8) \rightarrow y'=5(5x^3+2)^4(15x^2)(x^5+6x^8)+(5x^3+2)^5(5x^4+48x^7)$

d) $y=\frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

$$y'=\frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)^2-(2x^3-5x^2)^9-2(7x^4-5x^3)(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^4}=$$

$$=\frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)-(2x^3-5x^2)^9-2(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^3}$$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=e^{x^5+4x^3} \rightarrow y'=\left(e^{x^5+4x^3}\right)(5x^4+12x^2)$

b) $y=\left(e^{2x^3+7x^2}\right)^7 \rightarrow y'=7\left(e^{2x^3+7x^2}\right)^6\cdot\left(e^{2x^3+7x^2}\right)\cdot(6x^2+14x)$

c) $y=e^{(3x^5+5x^3)^5} \rightarrow y'=\left(e^{(3x^5+5x^3)^5}\right)(5(3x^5+5x^3)^4)(15x^4+15x^2)$

d) $y=\sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}=e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}$

$$y'=\left[\left(e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2}{3}(6x^5-9x^8)^{-\frac{1}{3}}\right)(30x^4-72x^7)\right]$$

14. La derivada de $y = cos(x)$ es $y' = -\mathrm{sen}(x)$. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) $\boldsymbol{y=\cos\left(x^5-7x^3\right)}\ \rightarrow\ y' = -\operatorname{sen}(x^5-7x^3)\,(5x^4-21x^2)$

b) $\boldsymbol{y=(\cos(3x^3-5x^2))^7}\rightarrow\ y' = 7\left(\cos\,(3x^3-5x^2)\right)^6\cdot\ (-\operatorname{sen}(3\,x^3-5x^2))(9x^2-10x)$

c) $\boldsymbol{y=\cos^5\left(4x^5-8x^3\right)}\ \rightarrow\ y' = 5(\cos\,(\,4x^5-8x^3))^4\cdot\ \left(-\operatorname{sen}\,(4x^5-8x^3)\right)\cdot\ (20x^4-24x^2)$

d) $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{\cos^4(2x^2+4x^7)}} = \left(cos\,(2x^2+4x^7)\right)^{\frac{4}{3}}$

$$y' = \left[\frac{4}{3}\left(cos\,(2x^2+4x^7)\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\ (-\operatorname{sen}\,(2x^2+4x^7))(4x+28x^6)\right]$$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en x = 0, x = 1 y x = 2.

$y' = 3x^2-3$

Para x = 0 $\quad y'(0) = 3(0)^2-3=-3$

Punto: (0,0) Pendiente: -3

Ecuación recta tangente: $y-0=-3(x-0)\ \rightarrow\ y=-3x$

Para x = 1 $\quad y'(1) = 3(1)^2-3=0$

Punto: (1,-2) Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y+2=0\ \rightarrow\ y=-2$

Para x = 2 $\quad y'(2) = 3(2)^2-3=6$

Punto: (2,2) Pendiente: 6

Ecuación recta tangente: $y-2=6(x-2)\ \rightarrow\ y=6x-12+2\ \rightarrow\ y=6x-10$

16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y=x^3$ en x= 2

$$y' = 3x^2\ \rightarrow\ y'(2) = 3(2)^2 = 12$$

Pendiente: 2

Ecuación recta tangente: $y-y(2)=12(x-2)\ \rightarrow\ y=12x-24-8\ \rightarrow\ y=12x-16$

b) $y=2x^2+4x-5$ en x= 1

$$y' = 4x+4\ \rightarrow\ y'(1) = 4\,(1)+4 = 8$$

Pendiente: 8

Ecuación recta tangente: $y-y(1)=8(x-1)\ \rightarrow\ y=8x-8+(2+4-5)\ \rightarrow\ y=8x-7$

c) $y=x^3-7x^2+3x$ en x= 0

$$y' = 3x^2-14x\ \rightarrow\ y'(0) = 3\,(0)^2-14(0) = 0$$

Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y - y(0) = 0(x - 0) \rightarrow y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en x = 3

$$y\acute{} = 3x^2 + 3 \rightarrow y\acute{}(3) = 3(3)^2 + 3 = 30$$

Pendiente: 30

b) $y + 2x - 5 = 0$

$$y = -2x + 5 \rightarrow y\acute{} = -2$$

Pendiente: -2

c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en x= 1

$$y\acute{} = 12x^2 - 10x \rightarrow y\acute{}(1) = 12\,(1)^2 - 10\,(1) = 2$$

Pendiente: 2

18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

a) a la recta $y = 0$;

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y\acute{} = 3x^2 - 3$$

Para que la tangente sea paralela a la recta y = 0, su pendiente debe ser cero, es decir→ $y\acute{} = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y(-1) = (-1)3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$y(1) = (1)3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Solución: (1, 0), (–1, 4);

b) a la recta $y = 6x$.

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y\acute{} = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y(-\sqrt{3}) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{3}\right) + 2 = 7 - 3\sqrt{3}$$

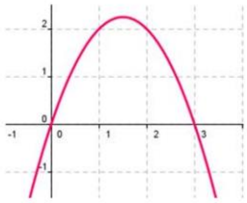
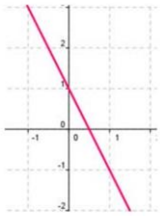
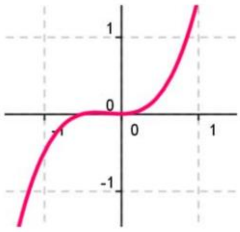
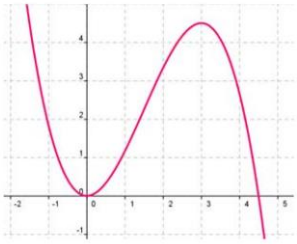
Solución$\left(\sqrt{3}, 2\right), \left(-\sqrt{3}, 2\right)$

19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $\sqrt{x^3}$en x = 0.

$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \qquad y'(0) = \frac{3}{2}0^{\frac{1}{2}} = 0$$

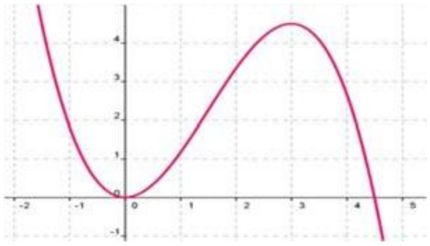
Solución: y = 0.

20. Si $f'(x) = x\,(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

$$f'(x) = x(3 - x) = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \ x = 3$$

Tiene extremos relativos en los puntos x= 0 y x=3, por lo que la única gráfica que cumple los requisitos es la siguiente:



21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Para saber en qué puntos de x la pendiente es 12, igualamos f'(x) a 12

$y' = 12x^2 - 12 \ \rightarrow \ 12x^2 - 12 = 12 \ \rightarrow \ 12x^2 = 24 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{24}{12} \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{2}$

Utilizamos la fórmula $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ para calcular las rectas.

Después calculamos $f(\sqrt{2})$

$a = \pm\sqrt{2} \rightarrow \ y = f(\pm\sqrt{2}) + f'(\pm\sqrt{2})(x - \pm\sqrt{2}) \ \rightarrow$

$f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 12(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2}) \rightarrow \ y = -4\sqrt{2} + 12x - 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x - 16\sqrt{2}$

Y repetimos el proceso con $a = -\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 - 12(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2}) \rightarrow \ y = 4\sqrt{2} + 12x + 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x + 16\sqrt{2}$

Calculamos el mínimo de $y' = 12x^2 - 12$; $y'' = 24x$; $24x = 0$, $x = 0$;

$y''' = 24 > 0$, mínimo.

$y'(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12$; $f(0) = 4(0)^3 - 12(0) = 0$

El menor valor de la pendiente es -12 y se alcanza en (0, 0).

22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto A (–1, 2). ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$$
$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \rightarrow y = 2 + 0(x-0) \rightarrow y = 2$$
$$x^3 - 3x = 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ , } x = 2$$

Por ende, x= 2 es el otro punto por donde pasa la recta en la función.
Llamaremos a este punto B (2,2)

23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A (1, 2) y es tangente a la recta $y = x$ en el punto O (0, 0).

Tenemos que utilizar la información a nuestra disposición para calcular las tres incógnitas.

Primero, sabiendo que f(x) es tangente a la recta en (0,0), sabemos que cuando x=0; y=0

Por ende, sabemos que c=0

También sabemos que porque la pendiente de la recta y=x es 1

$$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(0) = 3a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow f'(0) = b = 1$$

Luego, para encontrar el valor de a podemos utilizar más información:

f(x) pasa por el punto A (1,2)

$$f(1) = 2 \rightarrow a \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + 0 = 2 \rightarrow \boldsymbol{a = 1},\ \boldsymbol{b = 1},\ \boldsymbol{c = 0}$$

24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A (1, 0).

$$f'(x) = 3x^2 + b \rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1 + b = 3 + b$$
$$g'(x) = a - 2x \rightarrow g'(1) = a - 2 \cdot 1 = a - 2$$
$$3 + b = a - 2 \rightarrow a = b + 5$$
$$f(1) = 0 \rightarrow 1 + b + c = 0$$
$$g(1) = 0 \rightarrow a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$
$$1 = 5 + b \rightarrow b = -5 + 1 \rightarrow b = -4\,;\ 1 - 4 + c = 0 \rightarrow c = 3$$
$$\mathbf{a = 1} \quad , \quad \mathbf{b = -4} \quad , \quad \mathbf{c = 3}$$

25. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$

$y' = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ sustituimos en la recta, $y = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$
$$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^3} > 0$, $y'(10) = -\frac{2}{(10)^3} < 0$

Creciente: $(-\infty, 0)$ y Decreciente $(0, \infty)$

27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot x}{(x^2)} = -\frac{1}{x^2}$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^2} < 0$, $y'(10) = -\frac{2}{(10)^2} < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

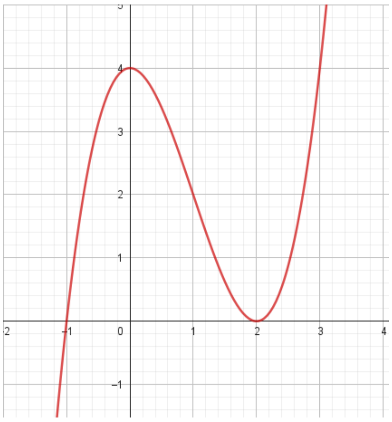
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 6x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0\,;\ x = 0\,,\ x = 2$

$y'(-10) = 3(-10)(-10-2) > 0$; $y'(1) = 3(1)(1-2) < 0$; $y'(10) = 3(10)(10-2) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **Decreciente:** $(0,2)$

$y(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \rightarrow Máximo: (0,4)$; $y(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow Mínimo:\ (2,0)$



29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 6 = 0\,;\ Punto\ corte\ con\ el\ eje\ de\ ordenadas\ (0,6)$

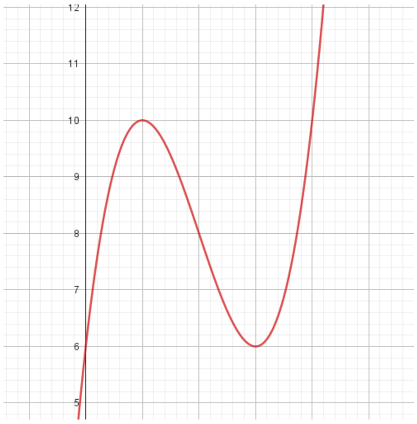
$y' = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0\,;\ x = 1\ \ x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 12(-10) + 9 > 0$ $f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 < 0$

$f'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 9 > 0$

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ Decreciente: $(1,3)$

Existe un máximo relativo cuando x= 1 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



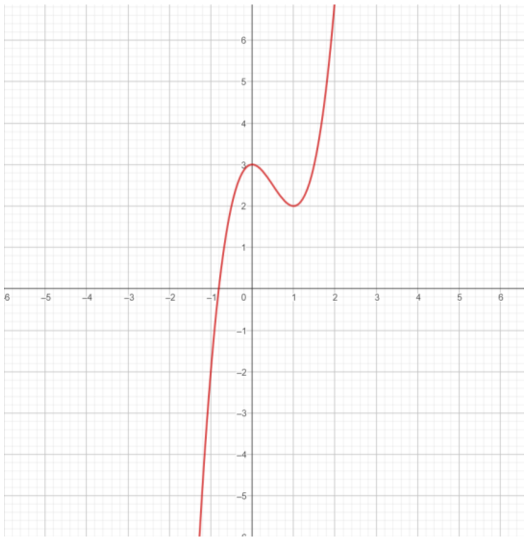
30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 6x^2 - 6x \rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0 \;\; x = 1$

$f'(-10) = 6(-10)^2 - 6(-10) > 0$; $f'(0{,}5) = 6(0{,}5)^2 - 6(0{,}5) < 0$; $f'(10) = 6(10)^2 - 6(10) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Decreciente: $(0{,}1)$

Existe un máximo relativo cuando x= 0 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 1 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



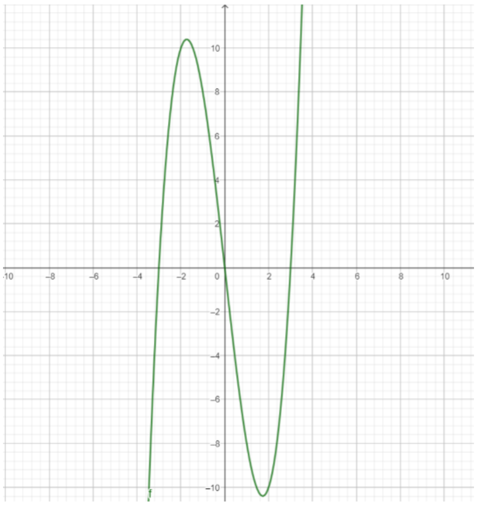
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 9 \rightarrow y' = 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = -3 \;\; x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 9 > 0$; $f'(0) = 3(0)^2 - 9 < 0$; $f'(10) = 3(10)^2 - 9 > 0$

Creciente: $(-\infty - 3) \cup (3, \infty)$ Decreciente: $(-3{,}3)$

Existe un máximo relativo cuando x = -3 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x = 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función *f*(x) = $4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–7, 2] y en el intervalo [0, 8].

$$y' = 12x^2 - 12x + 72 \;\rightarrow\; y' = 12(x^2 - x + 6)$$

$$No\ tiene\ soluciones\ reales,\ no\ existen\ máximos\ o\ mínimos\ relativos$$

En [–7, 2] :

$$f(-7) = 4(-7)^3 - 6(7)^2 + 72(-7) = -1372 - 294 - 504 = -2170\ ;$$
$$Mínimo\ absoluto\ (-7, -2170)$$

$$f(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 72(2) = 32 - 24 + 144 = 152\quad ;\ Máximo\ absoluto\ (2, 152)$$

En [0, 8]:

$$f(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 72(0) = 0\ \ Mínimo\ absoluto\ (0,\ 0)$$

$$f(8) = 4(8)^3 - 6(8)^2 + 72(8) = 2048 - 384 + 576 = 2240\ ;\ Máximo\ absoluto\ (8,\ 2240)$$

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función *f*(x) = $|x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Máximos y mínimos absolutos:

$$f(3) = x + 3 = 6 \;\rightarrow\; Máximo\ absoluto:\ (3{,}6)$$

$$f(-3) = -(-3 + 3) = 0 \;\rightarrow\; Mínimo\ absoluto:\ (-3{,}0)$$

PROBLEMAS

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los *t* segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: *y* = 15*t* + 0.8t^2. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

$y(t) = 15t + 0{,}8\,t^2$; $v(t) = 15 + 1{,}6t$

Para t = 0

$v(0) = 15 + 1{,}6\,(0) = 15$ m/s

Para t = 5

$v(5) = 15 + 1{,}6\,(5) = 15 + 8 = 23$ m/s

$120\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = \frac{100}{3}\ \frac{m}{s}$

$15 + 1{,}6t = \frac{100}{3}\ \ ;\ 45 + 4{,}8t = 100\ \ ;\ t = \frac{100-45}{4{,}8} = 11{,}46\ seg$

35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75°, 100°? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

$$r = 40 + 0.001T\ \rightarrow\ v(t) = \frac{dr}{dt} = 0{,}001$$

Por lo tanto, la velocidad a la que varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75° y 100° es constante y es de 0,001mm/°.

$T = 200 - \frac{500}{t}\ \rightarrow\ v(T) = \frac{500}{t^2}$

Para t = 30 segundos:

$v(30) = \frac{500}{30^2} = \frac{500}{900} = 0{,}556$ °/s

Para t = 90 segundos:

$v(90) = \frac{500}{90^2} = \frac{500}{8100} = 0{,}061$ °/s

$r = 40 + 0.001T\ \ ;\ T = 200 - \frac{500}{t}$

$r(t) = \frac{dr}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = 0{,}001 \cdot \frac{500}{t^2}$

Para t = 10 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{10^2} = 0{,}05$ mm/s

Para t = 30 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{30^2} = 0{,}001$ mm/s

Para t = 90 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{90^2} = 0$ mm/s

36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

$d = \frac{1}{2}gt^2\ \ ;\ \ \ v = g \cdot t$

Para la primera plataforma (57 m):

$d = \frac{1}{2}\,9.8t^2 \;\rightarrow\; 57 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 \;= \frac{57}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{11{,}63} = \;3{,}41\,s$

$v = (9{,}8)(3{,}41) = \;33{,}38$ m/s

Para la segunda plataforma (115 m):

$d = \frac{1}{2}\,9.8t^2 \;\rightarrow\; 115 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 \;= \frac{115}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{23{,}47} = \;4{,}85\,s$

$v = (9{,}8)(4{,}85) = \;47{,}63$ m/s

Para la tercera plataforma (274 m):

$d = \frac{1}{2}\,9.8t^2 \;\rightarrow\; 274 = 4{,}9t^2 \;\rightarrow\; t^2 \;= \frac{274}{4.9} \;\rightarrow\; t = \sqrt{55{,}92} = \;7{,}48\,s$

$v = (9{,}8)(7{,}48) = \;73.30$ m/s

37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 - 4t + 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} = \;v = 2t - 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \;\rightarrow\; a = 2$

b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} \;\rightarrow\; v = 6t^2 - 10t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \;\rightarrow\; a = 36t - 10$

c) $e = -t^2 + 4t + 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} \;\rightarrow\; v = -2t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \;\rightarrow\; a = -2$

d) $e = (3t - 4)^2$

$v(t) = \frac{de}{dt} \;\rightarrow\; v = 9t^2 + 16 - 24t$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \;\rightarrow\; a = 18t - 24$

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$V = 0.3t\,m^3 \;\rightarrow\; V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ diámetro = 10 ; radio = 5

$\pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}3t \;\rightarrow\; h = \frac{0{,}3t}{\pi \cdot r^2} \;\rightarrow\; h' = v = \;\frac{0.3}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$

Para t=2

$v(2) = \;\frac{0{,}3}{25\pi} = \;0{,}0038$ **m/s**

Para t=5

$v(5) = \frac{0,3}{25\pi} = 0,0038$ **m/s**

La velocidad es 0,0038 m/s

39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por d = 0.2t^2 + 0.01t^3. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

$d(t) = 0.2t^2 + 0.01t^3 \ \rightarrow \ v(t) = \frac{d(d)}{dt} = 0.4t + 0.03t^2$

Para t= 2

$v(2) = 0.4(2) + 0.03(2)^2 = 0.8 + 0.12 = $ 0,92 m/s

Para t= 4

$v(4) = 0.4(4) + 0.03(4)^2 = 1.6 + 0.48 = $ 2,08 m/s

Para t= 7

$v(7) = 0.4(7) + 0.03(7)^2 = 2.8 + 1.47 = $ 4.27 m/s

Para t= 15

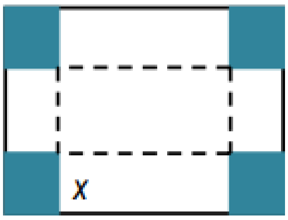
$v(15) = 0.4(15) + 0.03(15)^2 = 6 + 6.75 = $ 12,75 m/s

$60\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = $ 16,67 m/s

$0,4t + 0,03t^2 = 16,67 \ \rightarrow \ 0,4t + 0,03t^2 - 16,67 = 0 \ \rightarrow \ t = \frac{-0,4 \pm \sqrt{(0,4)^2 - 4(0,03)(-16,67)}}{2(0,03)} =$

$= \frac{-0,4 \pm \sqrt{2,1604}}{0,06} = \frac{0,4 + 1,469}{0,06} \ \rightarrow \ t = \frac{1,068}{0,06} = 17,8\ s$

40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



$V(x) = x(25 - 2x)(20 - 2x)$

$V'(x) = (25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) =$

$= (25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) = 0$

$(500 - 90x + 4x^2) - (40 - 4x^2) - (50 - 4x^2) =$

$= 500 - 90x + 4x^2 - 40x + 4x^2 - 50x + 4x^2 = 0$

$$500-180x+12x^2=0 \rightarrow 12x^2-180x+500=0 \rightarrow 3x^2-45x+125=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{45\pm\sqrt{(45)^2-4(3)(125)}}{2\,(3)}=\frac{45\pm\sqrt{525}}{6}=\frac{45\pm5\sqrt{21}}{6}$$

$$x_1=\frac{45+5\sqrt{21}}{6}=11{,}31\ cm\ \ no\ válido\ ;\ x_2=\frac{45-5\sqrt{21}}{6}\approx 3{,}7\ cm$$

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$$V=\pi\cdot r^2\cdot h=150 \rightarrow \pi\cdot r^2\cdot h \rightarrow h=\frac{150}{\pi\cdot r^2}$$

$$A=2\pi\cdot r\cdot h+2\pi r^2=2\pi\cdot r\cdot\frac{150}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{300}{r}+2\pi r^2$$

$$A'=-\frac{300}{r^2}+4\pi r=0 \rightarrow \frac{300}{r^2}=4\pi r$$

$$300=4\pi r^3 \rightarrow \frac{300}{4\pi}=r^3 \rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}} \rightarrow \boldsymbol{r}=\sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{75}}{\boldsymbol{\pi}}}$$

$$A''=\frac{600}{r^3}+4\pi\quad;\quad A''\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)=\frac{600}{\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^3}+4\pi>0,\quad mínimo$$

$$\boldsymbol{h}=\frac{150}{\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}}=\frac{150}{\pi\cdot 2{,}879}=\boldsymbol{137{,}46\ m}$$

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que, según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

$$y=100-\frac{80}{(x+5)}-2x\quad;\quad y'=\frac{80}{(x+5)^2}-2\quad;\quad \frac{80}{(x+5)^2}-2=0$$

$$2(x+5)^2=80\ ;\ \ 2x^2+20x-30=0\ \ ;\ x^2+10x-15=0\ \ ,\ x=-5\mp2\sqrt{10}$$

Solución válida, $x=-5+2\sqrt{10}$, la otra es negativa;

$y''=\frac{-160}{(x+5)^3}$ que es negativa para $x=-5+2\sqrt{10}$

Por tanto, es un máximo.

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u\cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$f'(t) = 0{,}03 \cdot f(t) \quad ; \quad g'(t) = 0{,}02 \cdot g(t)$

$0{,}03 \cdot f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot 0{,}02 \cdot g(t) \rightarrow 0{,}03\, u \cdot v + 0{,}02\, u \cdot v \rightarrow 0{,}05\, u \cdot v$

Aumenta un 5%

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$$y = u \cdot v = (3t) \cdot (t^2 + 3t) \rightarrow y = 3t\,(t^2 + 3t) = 3t^3 + 9t^2 \rightarrow y' = 9t^2 + 18t$$

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

$$\frac{dp}{dt} = P(x) \cdot 0{,}03 \quad ; \quad \frac{dT}{dt} = T(x) \cdot (-0{,}05)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = \frac{d(P \cdot T)}{dt} \rightarrow \frac{d\,(PT)}{dt} = P \cdot \frac{dT}{dt} + T \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = P(x) \cdot \big(T(x) \cdot (-0.05)\big) + T(x) \cdot (P(x) \cdot 0.03) \rightarrow \frac{d(PT)}{dt} =$$

$$= -0.05 \cdot P(x) \cdot T(x) + 0.03 \cdot P(x) \cdot T(x)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = -0.02 \cdot P(x) \cdot T(x)$$

Disminuye un 2% anual.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim\limits_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **c)** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **d)** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

Respuesta: c)

2. La derivada de $y = \sqrt{x}\,(x-1)$ en x= 1 es:

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2

$$y'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}(1+h-1)-\left(\sqrt{1}(1-1)\right)\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}h}{h} = \sqrt{1+0} = 1$$

Respuesta: c)

3. La derivada de $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en x = es:

a) $\frac{15}{11}$ **b)** $-\frac{10}{25}$ **c)** $-\frac{16}{121}$ **d)** $\frac{1}{3}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(2+h)^2+1}{(2+h)^3+3}-\frac{2^2+1}{2^3+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(4+4h+h^2+1)+1}{(8+12h+6h^2+h^3)+3}-\frac{4+1}{8+3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{4h+h^2+5}{(11+12h+6h^2+h^3)}-\frac{5}{11}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{11(4h+h^2+5)-5(11+12h+6h^2+h^3)}{11(11+12h+6h^2+h^3)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{11h^2+44h+55-5h^3-30h^2-60h-55}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-5h^3-19h^2 16h-}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-5h^2-19h-16)}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(-5h^2-19h-16)}{11(11+12h+6h^2+h^3)} = -\frac{16}{11\cdot 11} = -\frac{16}{121}$$

Respuesta: c)

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x\cdot e^{x^2+3}$ **b)** $y' = 2(e^x)^2\cdot e^x$ **c)** $y' = 3+e^{x^2}\cdot 2x$ **d)** $y' = 2e^{x^2}$

$$y = e^{x^2+3} \to y' = \left(e^{x^2+3}\right)(2x)$$

Respuesta: a)

5. La derivada $y = sen(x^3)$ es:

a) $y' = 3\left(sen\,(x)\right)^2\cdot(\cos\,(x)^3)$ **b)** $y' = cos\,(x^3)\cdot 3x^2$

c) $y' = cos\,(x^3)\cdot \operatorname{sen}(3x^2)$ **d)** $y' = 3(\operatorname{sen}(x))^2\cdot\left(\cos\,(x)\right)$

$$y = sen\,x^3 \to y' = 3x^2\cdot\cos x^3$$

Respuesta: b)

6. La ecuación de la recta tangente de la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x-6$ **b)** $y = x+8$ **c)** $y = 2x+6$ **d)** $y = 2x+8$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$y' = -6x^2 + 6x + 2 \rightarrow y'(1) = -6(1)^2 + 6\,(1) + 2 = 2$; $y(1) = 5 + 2·1 + 3·1^2 – 2·1^3 = 8$

$y = 8 + 2(x - 1) \rightarrow y = 8 + 2x - 2 \rightarrow y = 2x + 6$

Respuesta: c)

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 – 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 6x$ **d)** $y = 0$

$y' = -6x^2 + 6x \rightarrow y'(0) = -6(0)^2 + 6(0) = 0$; $y(0) = 3·0^2 – 2·0^3 = 0$

$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

Respuesta: d)

8. La función $y = 3x^4 – 5x^3 + 2x^2 – x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente **b) decreciente** **c) alcanza un mínimo** **d) alcanza un máximo**

$y' = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 1 \rightarrow y'(1) = 12\,(1)^3 - 15\,(1)^2 + 4\,(1) - 1 = 0$

$y'(0) = 12\,(0)^3 - 15\,(0)^2 + 4\,(0) - 1 < 0$; $y'(2) = 12\,(2)^3 - 12\,(2)^2 + 4\,(2) - 1 < 0$

Decrecimiento: $(-\infty, 1)$ Crecimiento: $(1, \infty)$

Respuesta: c) alcanza un mínimo

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x – 4)\,x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $\boldsymbol{x < 0,\ decreciente;\ 0 < x < 4,\ decreciente;\ x > 4,\ creciente}$

b) $\boldsymbol{x < 0,\ decreciente;\ 0 < x < 4,\ creciente;\ x > 4,\ decreciente}$

c) $\boldsymbol{x < 0,\ creciente;\ 0 < x < 4,\ creciente;\ x > 4,\ decreciente}$

d) $\boldsymbol{x < 0,\ creciente;\ 0 < x < 4,\ decreciente;\ x > 4,\ decreciente}$

$f'(x) = x(x - 4) \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0\ \ x = 4$

$f'(-10) = (-10)(-10 - 4) > 0$; $f'(1) = (1)(1 - 4) < 0$; $f'(10) = (10)(10 - 4) > 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ La función es decreciente en $(0,4)$

Respuesta: d)

10. La función $y = 3x^2 – 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) $\mathbf{(0,0)}$ **máximo y** $\mathbf{(1,1)}$ **mínimo** **b)** $\mathbf{(-1,5)}$ **máximo y** $\mathbf{(1,1)}$ **mínimo**

c) $\mathbf{(6,-324)}$ **mínimo y** $\mathbf{(1,1)}$ **máximo** **d)** $\mathbf{(0,0)}$ **mínimo y** $\mathbf{(1,1)}$ **máximo**

$y = 3x^2 - 2x^3 \rightarrow y' = 6x - 6x^2 = 0$; $x = 1\ \ x = 0$

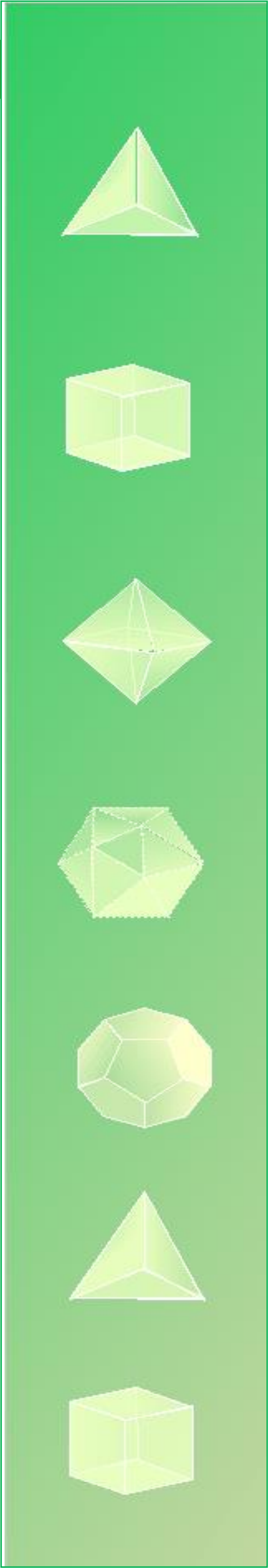
$y'(-10) = 6(-10) - 6(-10)^2 < 0$; $y'(0{,}5) = 6(0{,}5) - 6(0{,}5)^2 > 0$;

$y'(10) = 6(10) - 6(10)^2 < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Creciente: $(0,1)$

x = 0 mínimo f (0) =0 , (0,0) ; x = 1 máximo f (1) = 1 , (1,1)

Respuesta: d)



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 6: Estadística

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16			16	0.4
19	15			
22	6	0.15	37	0.925
25				

Como la frecuencia acumulada para el valor 13 es 6 y para el valor 16 es 16, tenemos que la frecuencia absoluta del valor 16 es: 16 – 6 = **10.**

Como la frecuencia absoluta del valor 10 es 2 y su frecuencia relativa es 0.05, 2/n = 0.05, n = 2/0.05 = **40**

La frecuencia absoluta de 25 es: 40 – 37 = **3**

Las frecuencias relativas que faltan son: 10/40 = **0.25** ; 15/40 = **0.375** ; 3/40 = **0.075**

Ya podemos completar la tabla:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16	*10*	*0.25*	16	0.4
19	15	*0.375*	*31*	*0.775*
22	6	0.15	37	0.925
25	*3*	*0.075*	*40*	*1*

2. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60		60
[10, 20[		0.4	
[20, 30[	30		170
[30, 40[		0.1	
[40, 50]			200

- $n = 200$ y $n_1 = 60$, por tanto, $f_1 = 60/200 = 0.3$
- $f_2 = 0.4$, …, $n_2 = 0.4 \cdot 200 = 80$, de donde, $N_2 = 60 + 80 = 140$
- $n = 200$ y $n_3 = 30$, …, $f_3 = 30/200 = 0.15$
- $f_4 = 0.1$, …, $n_4 = 0.1 \cdot 200 = 20$, de donde, $N_4 = 170 + 20 = 190$
- $N_4 = 190$ y $N_5 = 200$, luego, $n_5 = 200 – 190 = 10$, y $f_5 = 10/200 = 0.05$

La tabla quedaría:

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60	0.3	60
[10, 20[	80	0.4	140
[20, 30[	30	0.15	170
[30, 40[	20	0.1	190
[40, 50]	10	0.05	200

3. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.

a) Intención de voto de un partido
b) Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
c) Número de calzados.
d) Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
e) Marcas de cerveza
f) Número de empleados de una empresa
g) Altura
h) Temperatura de un enfermo.

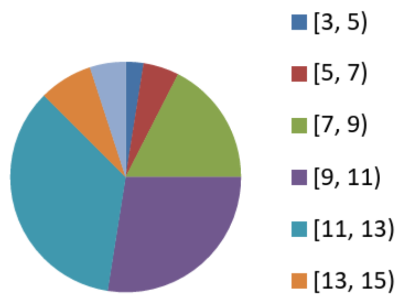
Cualitativas: a) y e); Cuantitativas discretas: b), c) y f); Cuantitativas continuas: d), g) y h).

4. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos: 10.5 11.2 9.9 15.0 11.4 12.7 16.5 10.1 12.7 11.4 11.6 6.2 7.9 8.3 10.9 8.1 3.8 10.5 11.7 8.4 12.5 11.2 9.1 10.4 9.1 13.4 12.3 5.9 11.4 8.8 7.4 8.6 13.6 14.7 11.5 11.5 10.9 9.8 12.9 9.9 Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

Tiempo (meses)	*[3, 5)*	*[5, 7)*	*[7, 9)*	*[9, 11)*	*[11, 13)*	*[13, 15)*	*[15, 17)*
Frec. Abs.	*1*	*2*	*7*	*11*	*14*	*3*	*2*

360° : 40 = 9°

[3, 5) ... 1 · 9° = 9°
[5, 7) ... 2 · 9° = 18°
[7, 9) ... 7 · 9° = 63°
[9, 11) ... 11 · 9° = 99°
[11, 13) ... 14 · 9° = 126°
[13, 15) ... 3 · 9° = 27°
[15, 17) ... 2 · 9° = 18°



5. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados. 70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80. Determinar:

a) Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.
b) Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.
c) ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?

d) Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).

a)

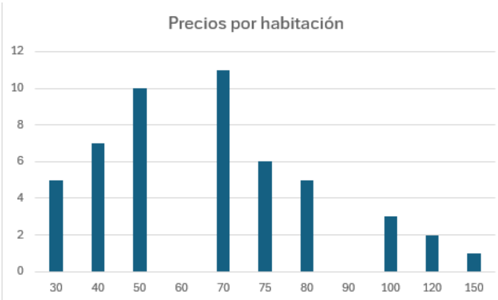
30	40	50	60	70	75	80	90	100	120	150
5	7	10	0	11	6	5	0	3	2	1

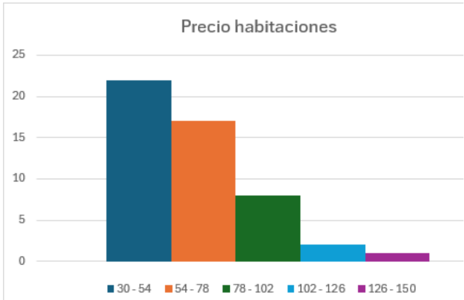
30 - 54	54 - 78	78 - 102	102 - 126	126 - 150
22	17	8	2	1

b) Con un precio superior a 75 hay: 5 + 0 + 3 + 2+ 1 = 11 hoteles, 11/50 = 0.22 = 22%

c) Hay 10 + 0 + 11 + 6 + 5 + 0 + 3 = 35.

d) Gráficas





6. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes. 2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

a) Construye la tabla de frecuencias con estos datos.

b) ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?

c) ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?

d) ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?

e) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.

f) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

a)

Nº Hijos	0	1	2	3	4	5	6
Fr. Abs.	2	4	22	14	6	1	1

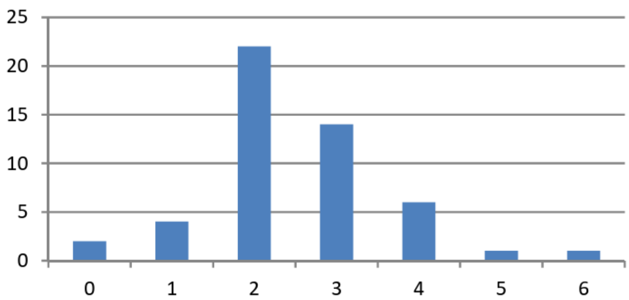
b) 14

c) 14/50 = 0.28 = 28%

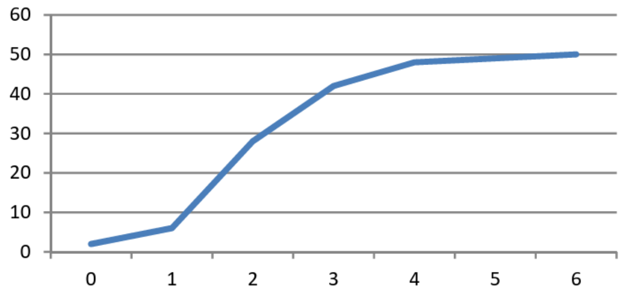
d) 14 + 6 + 1 + 1 = 22, más de dos hijos: 22/50 = 0.44 = 44% ;

22 + 4 + 2 = 28, menos de tres hijos: 28/50 = 0.56 = 56%.

e)



f)



7. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebes y se tiene: 3.2 3.7 4.2 4.6 3.7 3.0 2.9 3.1 3.0 4.5 4.1 3.8 3.9 3.6 3.2 3.5 3.0 2.5 2.7 2.8 3.0 4.0 4.5 3.5 3.5 3.6 2.9 3.2 4.2 4.3 4.1 4.6 4.2 4.5 4.3 3.2 3.7 2.9 3.1 3.5

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Si sabemos que los bebes que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?

c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?

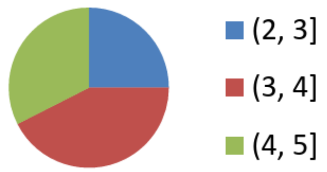
d) Representa gráficamente la información recibida.

a)

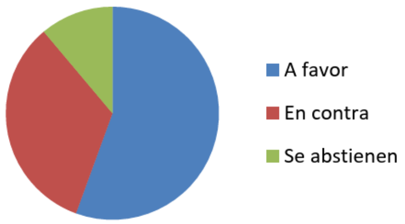
Peso (kg)	*(2, 3]*	*(3, 4]*	*(4, 5]*
Fr. Abs.	*10*	*17*	*13*

b) Hay 6 bebés que pesan menos de 3 kg, 6/40 = 0.15 = 15%.

c) Hay 20 bebés que pesan más de 3.5 kg, 20/40 = 0.5 = 50%



8. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Representa la información mediante un diagrama de sectores.



9. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son: 74.001 74.003 74.015 74.000 74.005 74.002 74.005 74.004 Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

Media: (calculadora) 74.004 mm
Mediana: 74.000 74.001 74.002 74.003 74.004 74.005 74.005 74.015
Como hay 8 valores hallamos la media de los dos intermedios: (74.003 · 74004)/2 = 74.0035
Varianza: (calculadora) 0.00002.
Desviación típica: (calc.) 0.00466.
Rango: 74.015 – 74.000 = 0.015

10. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.

Datos (xi)	38432	384343	38436	38438	38440
Frecuencias (fi)	4	8	4	3	8
xi*fi	153728	3074744	153744	115314	307520

n = 27, suma de $x_i \cdot f_i$ = 3 805 050; Media = 3805050/27 = 140 927.78

11. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:
a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000)
b) El salario más frecuente.
c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
[0,1500[	2145
[1500, 2000[	1520
[2000, 2500[	840
[2500, 3000[	955
[3000, 3500[	1110
[3500, 4000[	2342
[4000, 5000[	610
[5000, 10000[	328
≥10000	150

a) Escribimos la tabla con las marcas de clase para introducir los datos en la calculadora

x_i	750	1750	2250	2750	3250	3750	4500	7500	20000
n_i	2145	1520	840	955	1110	2342	610	328	150

Media (calc.): 2646€

b) Moda: 3750€

c) Escribimos la tabla con las frecuecias absolutas acumuladas

x_i	750	1750	2250	2750	3250	3750	4500	7500	20000
n_i	2145	1520	840	955	1110	2342	610	328	150
N_i	2145	3665	4505	5460	6570	8912	9522	9850	10000

El 50% es 5000, que corresponde, aproximadamente a 2500€

12. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

Escribimos la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas

x_i	5	10	15	20	25
n_i	3	7	5	3	2
N_i	3	10	15	18	20

Mediana: 20/2 = 10, al ser un número par de datos, (10 + 15)/2 = **12.5**

Moda: **10**.

Primer cuartil: 20/4 = 5, aproximadamente, **7.5**

Tercer cuartil: (20/4)·3 = 15, sería, **15**.

Percentil noventa: (20/100)·90 = 18, sería, **20**.

13. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

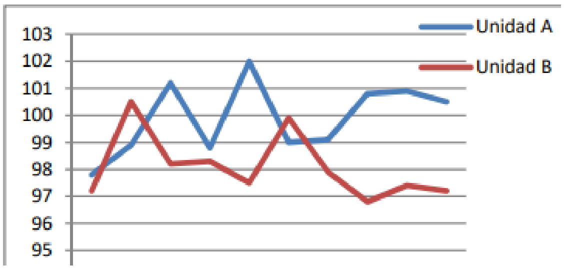
Unidad A 97.8 98.9 101.2 98.8 102.0 99.0 99.1 100.8 100.9 100.5

Unidad B 97.2 100.5 98.2 98.3 97.5 99.9 97.9 96.8 97.4 97.2

a. Haz una representación gráfica de estas muestras.

b. Determina las medias y las varianzas.

a.



b. Introducimos los datos en la calculadora y obtenemos:

	Media	Varianza
Unidad A	99.9	1.8
Unidad B	98.09	1.5

14. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	Nº de familias
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a. ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b. ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c. Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes debería tener una familia para entrar en el cupo?

d. Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

Escribimos la tabla con las marcas de clase para poder introducir los datos en la calculadora

Composición	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10
x_i	1	3	5	7	9
n_i	110	200	90	75	25
N_i	110	310	400	475	500

a. (Calculadora) Media: 3.82

b. 2 – 4 miembros.

c. (500/100)·75 = 375, entre 4 y 6, unas 5 personas.

d. (500/100)·85 = 425, menos de 7 personas.

15. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

xi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ni	**a**	**32**	**35**	**33**	**b**	**35**

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3.6.

Escribimos la tabla con los productos $n_i \cdot x_i$

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	a	32	35	33	b	35
$n_i \cdot x_i$	a	64	105	132	5b	210

Sabemos que el total es 200: a + 32 + 35 + 33 + b + 35 = 200, ……… a + b = 65

Por otra parte, Media = (a + 64 + 105 + 132 + 5b + 210)/200 = 3.6, despejando, a + 5b = 209

Restamos las ecuaciones: 4b = 144, luego **b = 36** y a + 36 = 65, **a = 29**.

Nos queda la tabla con frecuencias acumuladas:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	29	32	35	33	36	35
N_i	29	61	96	129	165	200

La moda es 5. La mediana es 3.1.

Mediana: 200/2 = 100, como para 3 la acumulada es 96, la mediana es aproximadamente, **3.1**

Moda: es el **5**.

16. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70,

57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) **Calcula la media y la mediana muestrales.**
b) **Halla los cuartiles primero y tercero.**
c) **Halla los percentiles cincuenta y noventa.**
d) **Calcula el rango muestral.**
e) **Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.**

Hay 36 datos, el menor valor es 31 y el mayor 84, 84 – 31 = 53 que es el rango, como $7^2 = 49$
Creamos 7 intervalos de amplitud 8, $8 \cdot 7 = 56$.

Capacidad	30 – 37	38 – 45	46 – 53	54 – 61	62 – 69	70 – 77	78 - 85
x_i	33.5	41.5	49.5	57.5	65.5	73.5	81.5
n_i	1	2	3	5	9	10	6
N_i	1	3	6	11	20	30	36

a) (Calculadora) Media: **65.86**; Mediana: 36/2 = 18 , próximo a 69 (acumulada 20) **68**.
b) Cuartil primero: 36/4 = 9, **59**. Cuartil tercero: (36/4)·3 = 27, **75**.
c) Percentil cincuenta = mediana = 68. Percentil noventa: (36/100)·90 = 32.4, **79.5**
d) Rango: **53**.
e) (Calculadora) Varianza = **72**; Desviación típica: **12.16**

17. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.

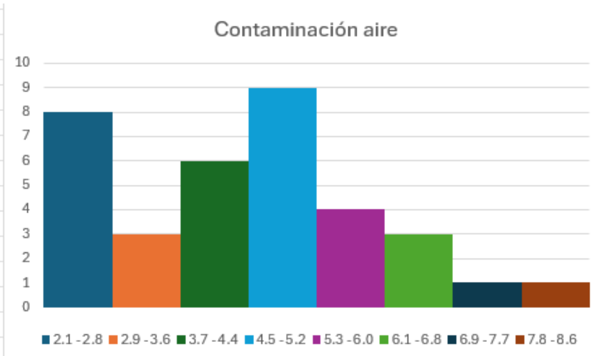
6.5 2.1 4.4 4.7 5.3 2.6 4.7 3.0 4.9 8.6 5.0 4.9 4.0 3.4 5.6 4.7 2.7 2.4
2.7 2.2 5.2 5.3 4.7 6.8 4.1 5.3 7.6 2.4 2.1 4.6 4.3 3.0 4.1 6.1 4.2

a) **Construye un histograma.**
b) **Determina los cuartiles.**
c) **Calcula la media y la desviación típica.**

Hay 35 datos, el menor valor es 2.1 y el mayor 8.6, 8.6 – 2.1 = 6.5 es el rango; como $8^2 = 64$
Creamos 8 intervalos de amplitud 0.8, $8 \cdot 0.8 = 6.4$

Contaminación	2.1 – 2.8	2.9 – 3.6	3.7 – 4.4	4.5 – 5.2	5.3 – 6.0	6.1 – 6.8	6.9 – 7.7	7.8 – 8.6
x_i	2.45	3.25	4.05	4.85	5.65	6.45	7.3	8.2
n_i	8	3	6	9	4	3	1	1
N_i	8	11	17	26	30	33	34	35

a)



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

b) Cuartil 1: 35/4 = 8.75, **3.0**; Mediana: 35/2 = 17.5, **4.6**; Cuartil 3: (35/4)·3 = 26.25, **5.3**

c) (Calculadora) Media: **4.4**; Desviación típica: **1.6**

2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. 3. COVARIANZA

18. Los datos siguientes son las calificaciones obtenidas por 24 estudiantes de un grupo de 25 de 1º de bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y Lengua.

Matemáticas	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Lengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemáticas	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Lengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

a) Escribe la tabla de frecuencias conjunta.

b) Proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en ambas asignaturas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Matemáticas, proporción estudiantes que obtiene más de un cinco en Lengua.

c) ¿Son independientes las calificaciones de Matemáticas y Lengua?

d) Representa gráficamente.

e) Calcula el coeficiente correlación.

a)

M / L	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	3	3	0	0
8	0	0	0	2	4	1	0
9	0	0	0	0	3	1	2
10	0	0	0	0	0	0	1

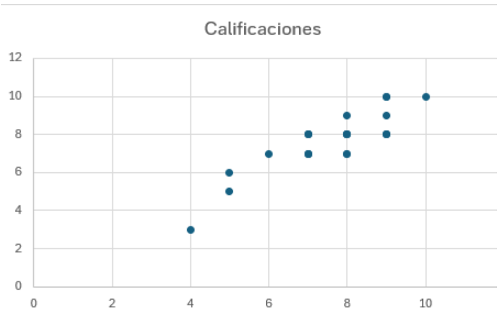
b) Más de un cinco en ambas: 21 de 24, 21/24 = 0,88 = 88%

Más de un cinco en Matemáticas: 21 de 24, 88%

Más de un cinco en Lengua: 22 de 24, 22/24 = 0,92 = 92%

c) No son independientes, están muy relacionadas.

d) Gráfica:



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

e) (Calculadora, hoja de cálculo) Coeficiente de correlación = 0.87, dependencia positiva fuerte.

19. Para realizar un estudio sobre la utilización de una impresora en un determinado departamento, se midió en un día los minutos transcurridos entre las sucesivas utilizaciones X y el número de páginas impresas Y, obteniéndose los siguientes resultados.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	12
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3

a) Escribe la distribución de frecuencias conjunta. Porcentaje de veces que transcurren más de nueve minutos desde la anterior utilización y se imprimen menos de doce páginas. Número de veces que se imprimen menos de doce páginas y transcurren nueve minutos desde la utilización anterior.

b) Frecuencias marginales. Veces que se imprimen como mucho doce páginas. Número de páginas que se imprimen en el 80 % de las ocasiones.

c) Calcula la distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones.

d) Dibuja el diagrama de dispersión.

a) Tabla conjunta

Y\X	4	6	7	8	9	10	12	15	totales
3	1	0	0	1	2	0	2	0	6
8	0	2	1	0	3	3	2	1	12
12	0	0	0	0	2	1	0	0	3
20	0	0	0	0	2	2	1	0	5
totales	1	2	1	1	9	6	5	1	26

Y\X	10	12	15	totales
3	0	2	0	2
8	3	2	1	6
totales	3	4	1	8

Más de 9 minutos y menos de 12 páginas:

8/26 = 0.35 = 35%

Y\X	9	totales
3	2	2
8	3	3
totales	5	5

Menos de 12 páginas y transcurren 9 minutos:

5 veces

b) Frec

Y	Frec.
3	6
8	12
12	3
20	5
total	26

X	4	6	7	8	9	10	12	15	total
Frec.	1	2	1	1	9	6	5	1	26

Como mucho 12 páginas:

6 + 12 + 3 = 21 veces

Nº de páginas en el 80%

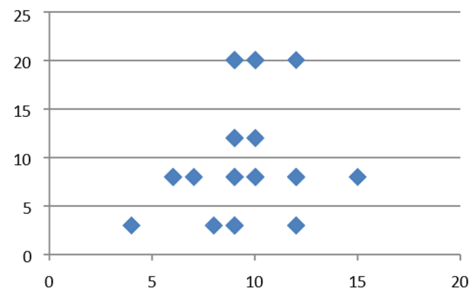
y/26 = 0.8, y = 0.8 · 26 = 20.8

se imprimen 20.8 páginas

c) Distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones

Y\X	9
3	2
8	3
12	2
20	2
total	9

d)



20. Las estaturas de los 30 niños nacidos en una maternidad durante una semana fueron los siguientes:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Peso	3.2	4.1	4.5	3.0	3.6	2.9	3.8	3.8	3.6	3.9	3.0	3.8	4.1	3.5	4.0

Estatura	49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
Peso	3.1	3.3	3.9	3.7	4.1	4.2	3.5	3.8	3.6	3.4	4.6	3.5	3.6	3.1	4.0

a) Construye una tabla de doble entrada, agrupando los pesos en intervalos de 0.5 kg.

b) ¿Es la estatura independiente del peso?

a)

Estatura	*3*	*3.5*	*4*	*4.5*
Peso	*6*	*10*	*12*	*2*

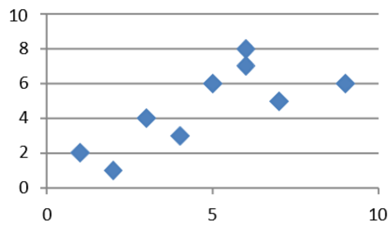
b) Calculamos el coeficiente de correlación = 0.75, la estatura depende del peso.

21. En el examen de una asignatura que consta de parte teórica y parte práctica, las calificaciones de nueve alumnos fueron:

Teoría	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Práctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. Dibuja la nube de puntos. Comenta los resultados.

- Covarianza = 4.04
- Coeficiente de correlación lineal = 0.76



- Hay una correlación positiva pero no muy fuerte

22. Se desea investigar el ganado caprino y el ganado ovino de un país. En la tabla de doble entrada adjunta se presentan los resultados de un estudio de 100 explotaciones ganaderas, seleccionadas aleatoriamente del censo agropecuario. Se proporcionan las frecuencias conjuntas del número de cabezas (en miles) de cabras X y ovejas Y que poseen las explotaciones.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

a) Halla las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales.

b) Halla el número medio de ovejas condicionado a que en la explotación hay 2000 cabras.

c) Halla el número medio de cabras que tienen aquellas explotaciones que sabemos que no tienen ovejas.

d) Halla la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables.

a) Media X = 1.76; Media Y = 1.56; Var X = 1.38; Var Y = 1.53; s(X) = 1.18; s(Y) = 1.24

b) X = 2000 cabras; Media de ovejas: 31/24 = 1.29, es decir, una media de 1290 ovejas

Ovejas Y	0	1	2	3	4
n_{2j}	7	8	5	3	1

c) Y = 0 ovejas; Media de cabras: 42/23 = 1.83, es decir, una media de 1830 cabras.

Cabras X	0	1	2	3	4
n_{1i}	4	5	7	5	2

d) Cov(X, Y) = - 0.898, depencia negativa. Coeficiente de correlación = - 0.61

23. El volumen de ahorro y la renta del sector familias en millones en euros constantes de 2005 para el periodo 2005-2014 fueron.

Años	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

a) Recta regresión del ahorro sobre la renta.

b) Recta de regresión de la renta sobre el ahorro.

c) Para el año 2015 se supone que la renta era de 24.1 millones de euros. ¿cuál será el ahorro esperado para el año 2015?

d) Estudiar la fiabilidad de la predicción anterior.

a) Ahorro sobre la renta: y = 0.11x + 1.59 (x = renta, y = ahorro)

Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

b) Renta sobre el ahorro: y = 0.314x + 20.27 (y = ahorro, x = renta)

c) Conocemos la renta = 24.1, deseamos predecir el ahorro, en el apartado a) y = 0.11x + 1.59 sustituimos, y = 0.11 · 24.1 + 1.59 = 4.23

d) Calculamos el cuadrado de coeficiente de correlación: r^2 = 0.75, es bastante fiable.

24. Se midió el tiempo en segundos que tardaron en grabarse los mismos 24 ficheros en un lápiz USB X y en un disco duro exterior Y.

X	1.2	1	1.1	0.5	1.1	1.5	1	1.4	1.4	1.3	0.4	0.3
Y	1.3	1.1	1.2	0.4	1.2	1.4	1.1	1.6	1.6	1.5	0.4	0.3
X	0.3	1.5	1.4	1.1	1.2	1.2	0.4	0.5	1.3	1.5	1.2	0.2
Y	0.3	1.6	1.3	1.1	1.3	1.1	0.4	0.4	1.4	1.6	0.9	0.3

a) Construye la tabla de frecuencias conjunta. ¿Cuál es el porcentaje de ficheros que tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo? ¿Cuántos ficheros tardan en grabarse entre 0.6 y 1.2 segundos en el primer tipo de memoria? ¿Cuánto tiempo tardan como mucho en gravarse al menos el 90 % de los ficheros en el segundo tipo de memoria?

b) Halla la tabla de frecuencias condicionadas de los tiempos del segundo tipo de memoria de aquellos programas que tardaron 1.2 en el primer tipo de memoria. ¿Cuál es la proporción de estos programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria?

c) Representa gráficamente los datos y comenta el resultado obtenido.

d) Si un fichero tarda 0.8 segundos en grabarse en el primer tipo de memoria, ¿cuántos segundos tardara en grabarse en el segundo tipo? Dar una medida de fiabilidad. ¿Confirma esta medida lo comentado en el apartado c)?

a) Tabla conjunta

Y/X	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**1**	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**
0.3	1	2								
0.4			2	2						
0.9							1			
1.1					2	1	1			
1.2						2				
1.3							2		1	
1.4								1		1
1.5								1		
1.6									2	2

- Menos de 1.5 en X y más de 1.4 en Y, hay 3 ficheros, 3/24 = 0.125 = 12.5 %

Y/X	1.3	1.4	1.5
1.4	1		1
1.5	1		
1.6		2	2

- Entre 0.6 y 1.2 en X, hay 9 ficheros, 9/24 = 0.375 = 37.5%

Y/X	1	1.1	1.2
0.3			
0.4			
0.9			1
1.1	2	1	1
1.2		2	
1.3			2
1.4			
1.5			
1.6			

- 0.9 · 24 = 21.6, calculamos la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas de Y

Y	n_i	N_i
0.3	3	3
0.4	4	7
0.9	1	8
1.1	4	12
1.2	2	14
1.3	3	17
1.4	2	19
1.5	1	20
1.6	4	24

Aproximadamente 1.54 segundos, es decir, el 90% de los archivos tardan como mucho 1.54 segundos en grabarse en el segundo dispositivo.

b) Tabla de frecuencias condicionadas a X = 1.2

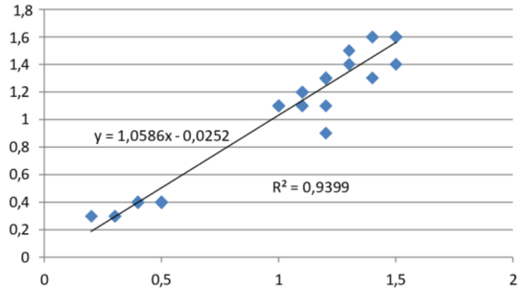
Y/X	1.2
0.3	
0.4	
0.9	1
1.1	1
1.2	
1.3	2
1.4	
1.5	
1.6	

Programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria

Y/X	0.2	0.3	0.4	0.5	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
≤1.5	1	2	2	2	2	3	4	2	1	1
1.6									2	2

Hay 4 programas, 4/24 = 0.166 = 16.6%

c)



La correlación es alta y positiva, los ficheros que tardan más en grabarse en el USB también tardan en el disco duro y viceversa.

d) La recta de regresión de Y sobre x es: y = 1.0586x – 0.0252, sustituimos

y = 1.0586 · 0.8 – 0.0252 = 0.82

La fiabilidad es R^2 = 0.9399, muy alta.

Se confirma lo comentado en el apartado c)

25. De un muelle se cuelgan pesos y obtenemos los alargamientos siguientes:

Peso gr X	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Alargamiento cm Y	0	0.5	1	3	5	6.5	8	10.2	12.5	18

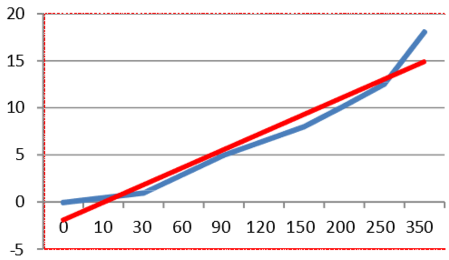
Encuentra la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 y 500 gr. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

Recta de regresión: y = 6.5 + (596/12871)(x -126) = 0.05 x – 0.64;

Para 100 gr: y = 0.05 · 100 – 0.64 = 3.77 cm

Para 500 gr: y = 0.05 · 500 – 0.64 = 21.42 cm.

Es más fiable para 100 gr por estar dentro de los datos que tenemos, en la gráfica podemos observar que al aumentar los pesos la curva se va alejando de la recta de regresión.



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

26. La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cubico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido.

Número de horas X	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes Y	20	26	33	41	47	53

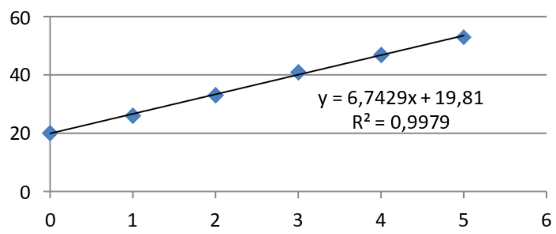
a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cubico en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cubico es previsible encontrar cuando transcurran 6 horas? ¿Es buena esta predicción?

a) Introduciendo los datos en la calculadora obtenemos: $y = 6.7x + 19.8$

b) Sustituimos: $y = 6.7 \cdot 6 + 19.8 = 60$.

El coeficiente de correlación es positivo y muy alto, por tanto, la predicción es buena.



27. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía a medida que pasa el tiempo según los datos recogidos en la tabla:

Tiempo: *h*	8	22	27	33	50
Altura: *m*	17	14	12	11	6

a) Encuentra el coeficiente correlación entre el tiempo y la altura. Da una interpretación de él.

b) ¿Qué altura se alcanzará cuando hayan transcurrido 40 horas?

c) Cuando la altura alcanza 2 m suena una alarma. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que suene la alarma?

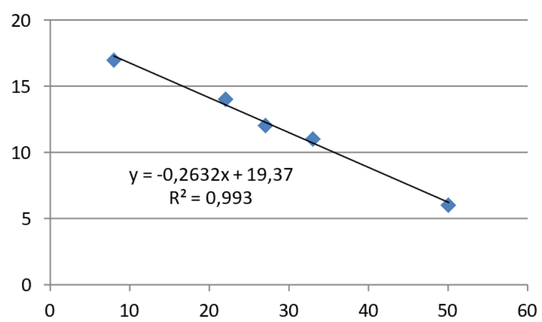
a) Coeficiente de correlación = - 0.9965.

Es negativo y muy alto, por tanto a más tiempo menor altura y viceversa.

b) La recta de regresión es: $y = - 0.2632x + 19.37$

Sustituimos $y = - 0.2632 \cdot 40 + 19.37 = 8,8$ m

c) Como el coeficiente de correlación es muy alto, las rectas Y/X y X/Y prácticamente van a coincidir, por lo que podemos sustituir 2 en la recta obtenida, $2 = - 0.2632x + 19.37$; $x = 66$ h



28. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y la tasa de inflación en los meses indicados de un determinado año, va a ser:

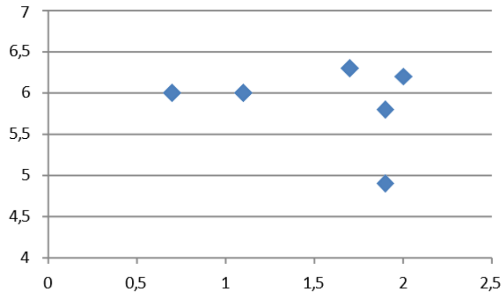
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Tasa inflación	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

a) Representa la nube de puntos.

b) Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.

c) ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

a)



b) Coeficiente de correlación = - 0.24

c) No es fiable, pues el coeficiente de correlación es muy bajo, en valor absoluto, cerca de 0.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante 10 semanas, en un municipio pequeño: 25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6

Calcula:

a) Las medidas de centralización: la media, mediana, moda

b) Las medidas de dispersión: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Haz una representación gráfica en serie temporal, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que, en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

a) Media: (25.5 + 27.1 + 31.8 + 34.2 + 38.9 + 21.3 + 28.7 + 33.2 + 36.5 + 39.6)10 = **31.68** m^3

Mediana: 21.3, 25.5, 27.1, 28.7, 31.8, 33.2, 34.2, 36.5, 38.9, 39.6

(31.8 + 33.2)/2 = **32.5**

Moda: no hay, todos los valores se presentan sólo una vez.

b) Desviación típica = **5.99**; Varianza = **35.8**; Coeficiente de variación = $\frac{5.99}{31.68}$ =**0.19**,

Valor mínimo = **21.3**; Valor máximo = **39.6**; Recorrido: 39.6 – 21.3 = **18.3**

Primer cuartil: 10/4 = 2.5, (27.1 + 25.5)/2 = **26.3**; Tercer cuartil: (10/4)·3 = 7.5, (34.2 + 36.5)/2 = **35.4**

Rango intercuartílico: 35.4 – 26.3 = **9.1**

c)

2. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

b) Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.

c) Representa un histograma de frecuencias relativas. Cuidado: Los intervalos no son todos iguales.

d) Calcula la media y la desviación típica.

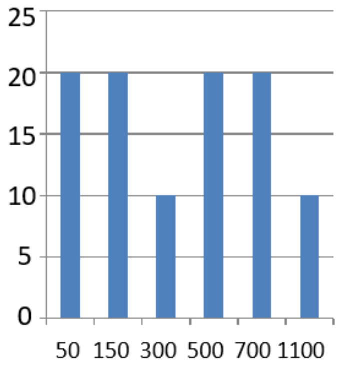
e) Calcula la mediana y los cuartiles.

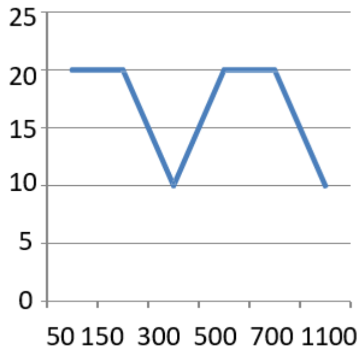
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel

a)

Marcas de clase	50	150	300	500	700	1100
Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias absolutas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias relativas	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1
Frecuencias absolutas acumuladas	20	40	50	70	90	100
Frecuencias relativas acumuladas	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1

b)





c) Histograma

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias relativas	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1

d) Media = **420**; Desviación típica = **326.5**

e) Mediana: 100/2 = 50, **300**; Cuartil 1: 100/4 = 25, **125**; Cuartil 3: (100/4)·3 = 75, **650**.

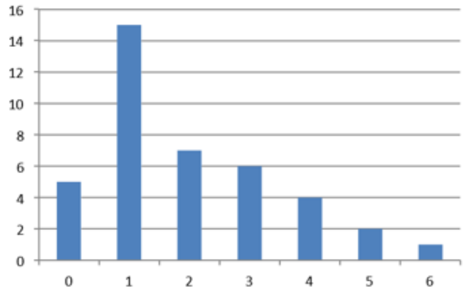
3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

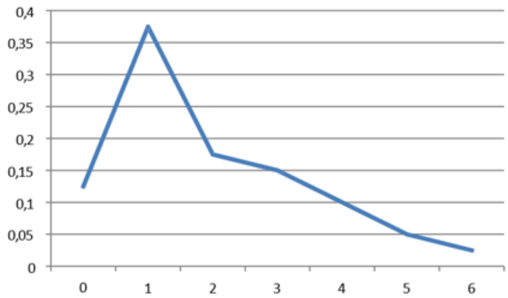
Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

a) Diagrama de barras de frecuencias absolutas y de líneas de frecuencias relativas





Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1
Frecuencias relativas	0.125	0.375	0.175	0.15	0.10	0.05	0.025
Frec acumuladas	5	20	27	33	37	39	40

b) Media: **1.975**; Mediana: 40/2 = 20, (1 + 2)/2 = **1.5**; Moda: **1**

4. Se ha preguntado a 50 estudiantes de 1º de Bachillerato por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

a) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.

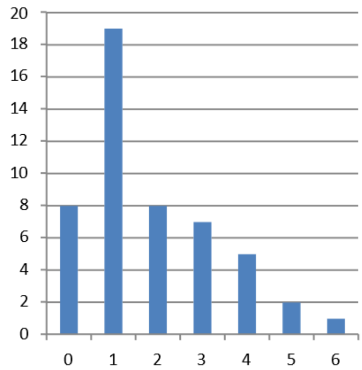
b) Haz un histograma.

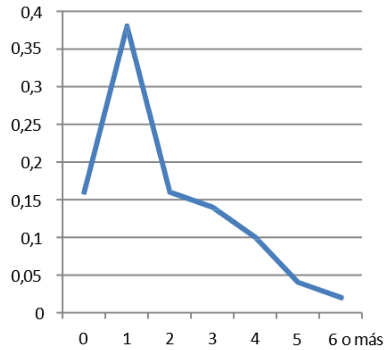
c) Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.

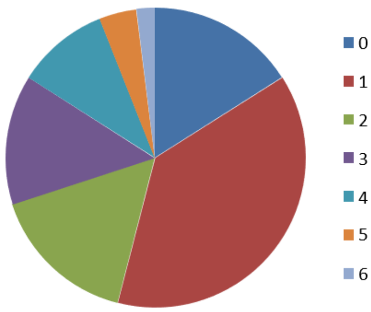
d) Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1
Frec. relativas							
Frec. Abs. Acumul.	8	27	35	42	47	49	50

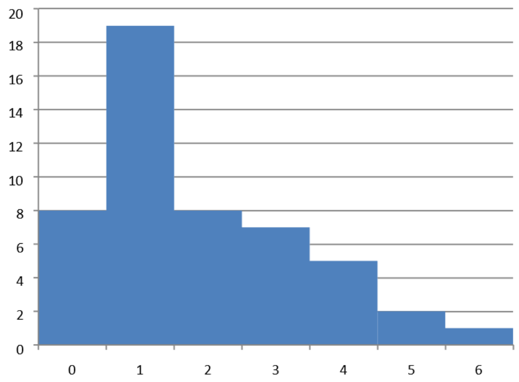
a)







b)



c) Media = **1.84**; Mediana: 50/2 = 25, **1**; Moda = **1**
Cuartil 1: 50/4 = 12.5, **0.9**; Cuartil 3: (50/4)·3 = 37.5, **2.4;**

d) Varianza = **2.214**; Desviación típica = **1.488**; Recorrido = **7**; Intervalo intercuartílico = **1.5**.

5. Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

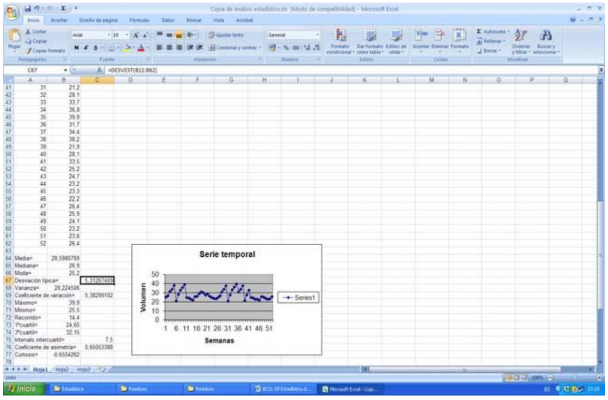
Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m³ durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

Parámetros estadísticos.

Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52. Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.
En la casilla A11 un título, por ejemplo, "Residuos sólidos".
En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.
Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



a) **Las medidas de centralización: la media, mediana, moda**

Media = 28.5, mediana = 26.7, moda = 25.2.

b) **Las medidas de dispersión: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.**

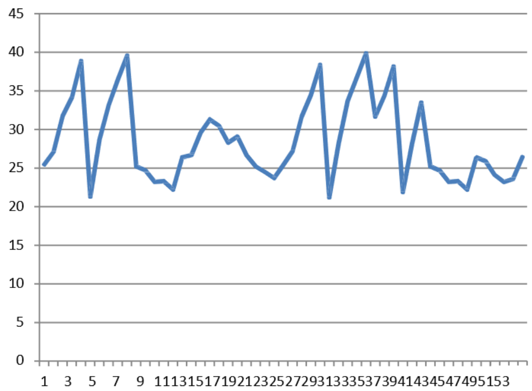
Desviación típica = 5.3, varianza = 28.2, coeficiente de variación = 0.19, valor mínimo = 21.2, valor máximo = 39.9, recorrido = 18.7, primer cuartil = 24.5, tercer cuartil = 31.8; intervalo intercuartílico = 7.3.

c) **Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.**

Coeficiente de asimetría = 0.68; Curtosis =-0.63.

Haz una representación gráfica en serie temporal, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que, en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

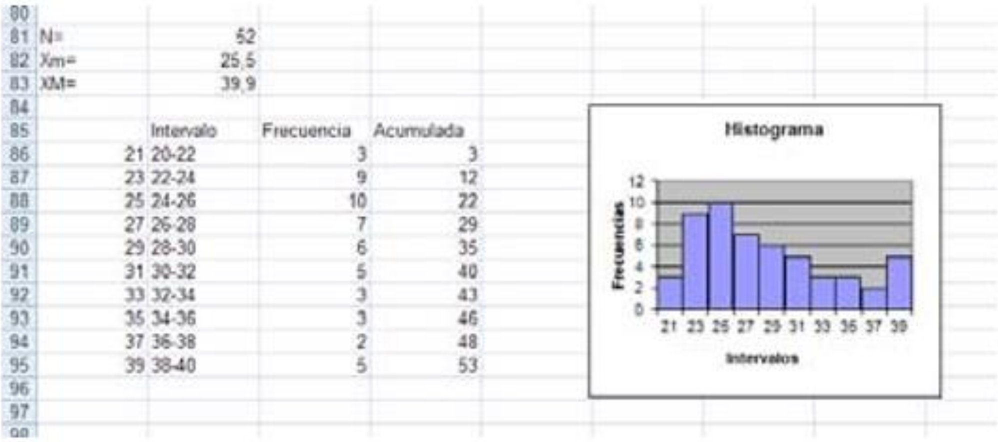
Parece que hay un ciclo cada 4 o 5 semanas.



6. **Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un histograma para mejor determinar su distribución. Para ello:**
   a) **Indica el número total de datos, N, el menor valor: Xm, el mayor valor, XM, y el recorrido R.**
   b) **La cantidad de barras del histograma, k, se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h, en 2, y el número de barras, k, en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.**
   c) **Calcula y representa en el histograma los puntos m, m ± s, m ± 2s, m ± 3s, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente.**

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra y Excel



80				
81	N=	52		
82	Xm=	25,5		
83	XM=	39,9		
84				
85		Intervalo	Frecuencia	Acumulada
86	21	20-22	3	3
87	23	22-24	9	12
88	25	24-26	10	22
89	27	26-28	7	29
90	29	28-30	6	35
91	31	30-32	5	40
92	33	32-34	3	43
93	35	34-36	3	46
94	37	36-38	2	48
95	39	38-40	5	53
96				
97				

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA BIDIMENSIONAL

7. **En una muestra de 10 personas miramos su color de ojos y pelo y encontramos que hay 5 morenos de ojos marrones, 1 moreno de ojos verdes, 3 rubios de ojos azules y 1 rubio de ojos verdes. A) Representa en una tabla de doble entrada esta situación. B) Escribe la tabla de frecuencias relativas. C) Escribe las frecuencias absolutas y relativas marginales. D) Escribe la distribución de frecuencias condicionadas.**

a. y c)

Frecuencias absolutas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	5		5
Ojos verdes	1	1	2
Ojos azules		3	3
Marginales	6	4	10

b. y c)

Frecuencias relativas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	0.5	0	0.5
Ojos verdes	0.1	0.1	0.2
Ojos azules	0	0.3	0.3
Marginales	0.6	0.4	1

c. Color de ojos condicionado por pelo moreno

Frecuencias absolutas	Moreno
Ojos marrones	5
Ojos verdes	1
Ojos azules	

Frecuencias relativas	Moreno
Ojos marrones	0.5
Ojos verdes	0.1
Ojos azules	0

Color de ojos condicionado por pelo rubio

Frecuencias absolutas	Rubio		Frecuencias relativas	Rubio
Ojos marrones	0		Ojos marrones	0
Ojos verdes	1		Ojos verdes	0.1
Ojos azules	3		Ojos azules	0.3

Color de pelo condicionado por ojos marrones

Frecuencias absolutas	Ojos marrones		Frecuencias relativas	Ojos marrones
Moreno	5		Moreno	0.5
Rubio	0		Rubio	0

Color de pelo condicionado por ojos verdes

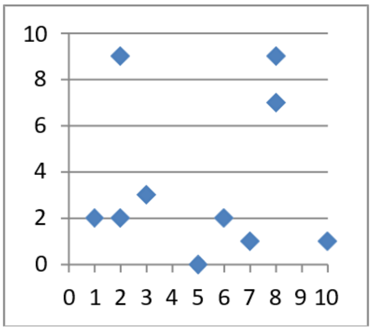
Frecuencias absolutas	Ojos verdes		Frecuencias relativas	Ojos verdes
Moreno	1		Moreno	0.1
Rubio	1		Rubio	0.1

Color de pelo condicionado por ojos azules

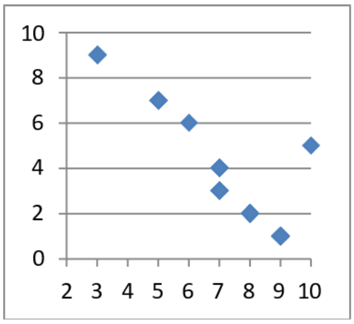
Frecuencias absolutas	Ojos azules		Frecuencias relativas	Ojos azules
Moreno	0		Moreno	0
Rubio	3		Rubio	0.3

8. **Lola ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas. y ha obtenido: -0.8, 0.85 y 0.03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?**

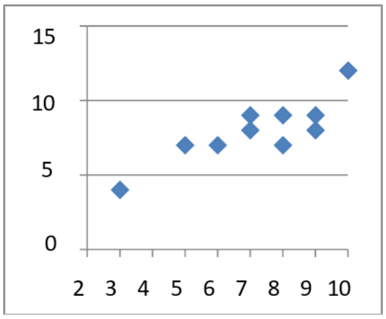
A



B



C



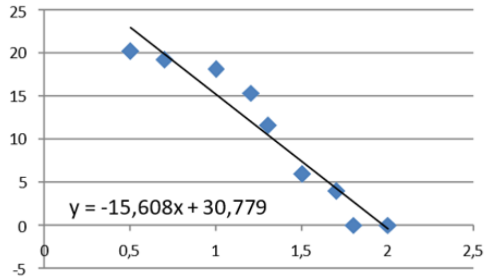
A = 0.03; B = -0.8; C = 0.85.

9. **En una tienda quieren estudiar las ventas del pan de molde en función del precio. Para ello prueban cada semana con un precio distinto y calculan las ventas realizadas. Han obtenido los siguientes datos:**

Precio (euros)	0.5	0.7	1	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
Ventas (medias)	20.2	19.2	18.1	15.3	11.6	6	4	0	0

a) **Representa los datos en un diagrama de dispersión (nube de puntos) e indica a qué conclusiones crees que se va a llegar.**
b) **Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.**
c) **Deciden poner un precio de 1.4 euros, ¿cuáles opinas que serían las ventas medias semanales?**

a)



La nube de puntos indica que va a existir una correlación fuerte y negativa

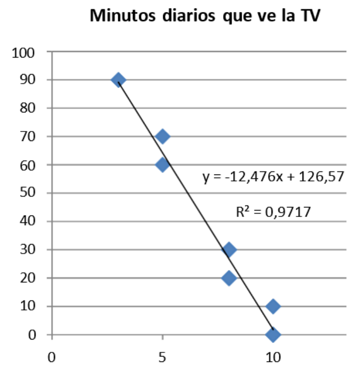
b) Cov(X, Y) = - 3.54 ; Coeficiente de correlación = - 0.96 ;
Recta de regresión: y = - 15.608 x + 30.779

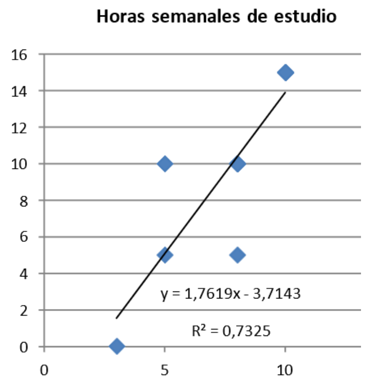
c) Sustituimos en la recta de regresión: y = - 15.608 · 1.4 + 30.779 = 9.1
Tendrán unas ventas de 9.1

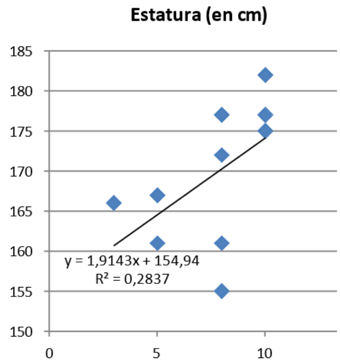
10. Preguntamos a 10 estudiantes de 1º de Bachillerato por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Horas semanales de estudio	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Estatura (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Queremos estudiar la relación entre las calificaciones de Matemáticas y las otras tres variables. Para ello dibuja los diagramas de dispersión, y calcula los coeficientes de correlación y las rectas de regresión.







- Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y los minutos diarios de ver la TV se observa que existe una correlación alta en valor absoluto, pero negativa.
  La recta de regresión es **y = -12.476 x + 126.57**, y el coeficiente de correlación = **0.986**; A más tiempo dedicado a ver la TV, peores notas en Matemáticas.

- Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas semanales de estudio se observa que existe una correlación alta y positiva.
  La recta de regresión es **y = 1.7619 x - 3.7143**, y el coeficiente de correlación = **0.86**; A más horas de estudio, mejores notas en Matemáticas.

- Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y la estatura se observa que existe una correlación muy pequeña.
  La recta de regresión es **y = 1.9143 x + 15.94**, y el coeficiente de correlación = **0.53**; Hay poca relación.

11. Una compañía aérea realiza un estudio sobre la relación entre las variables X, tiempo de un vuelo, en horas; e Y, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros, y se han obtenido los siguientes datos.

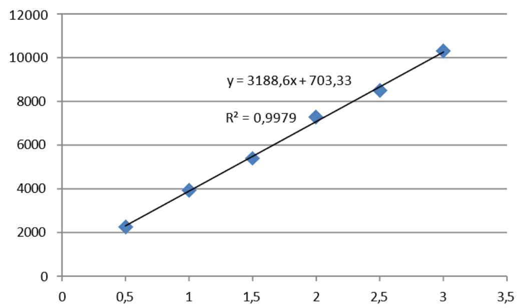
X (horas)	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
Y (litros)	**2250**	**3950**	**5400**	**7300**	**8500**	**10300**

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

b) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpreta los resultados.

c) Calcula la ecuación de las rectas de regresión.

a)



b) Covarianza = 2325; Coeficiente de correlación = 0.83

c) Recta de regresión: litros = 3188 · horas +703

12. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Elige una muestra de 10 personas y hazles dos preguntas con datos numéricos, como, por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calza, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música, la calificación en Matemáticas de su último examen… Representa los datos obtenidos en una tabla de doble entrada. Haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de doble entrada de frecuencias absolutas, frecuencias relativas. Obtén las distribuciones marginales y condicionadas.

b) Con las distribuciones unidimensionales, dibuja los diagramas de barras, diagramas de líneas y diagramas de sectores.

c) Calcula las medias, medianas y modas. Calcula las varianzas y las desviaciones típicas. Calcula los cuartiles y los intervalos intercuartílicos.

d) Con las distribuciones bidimensionales, dibuja un diagrama de dispersión, y calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

e) Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Respuesta manipulativa y abierta.

Utiliza una hoja de cálculo con un ordenador

13. El objetivo de esta práctica es estudiar la dispersión entre dos variables, mediante una nube de puntos o diagrama de dispersión, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

En 10 países se anotan los ingresos medios, en euros, por habitante y año, y el porcentaje medio en los residuos sólidos de comida.
Se obtiene:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

a) **Abre una hoja de cálculo. Copia los datos. Calcula la media y la desviación típica de las x, y la media y la desviación típica de las y.**
b) **Representa la nube de puntos.**
c) **Observa que si $x - \overline{X}$ e $y - \overline{Y}$ tienen el mismo signo quedan en los cuadrantes I y III y si lo tienen distinto en II y IV.**
d) **Organiza en Excel una hoja de cálculo que te permita calcular la correlación.**
e) **Ahora vamos a mejorar nuestro gráfico.**
f) **Escribe la ecuación de la recta de regresión.**

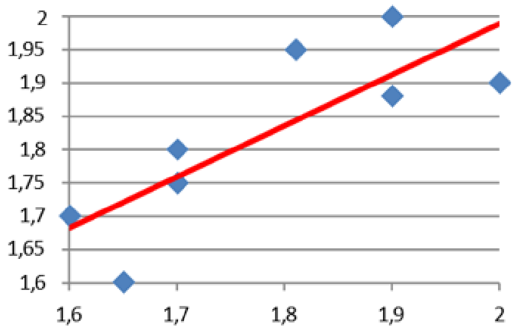
Respuesta manipulativa y abierta.

14. Se recoge en una tabla la altura (en metros) de un padre y de la de su hijo con 15 años de edad.

Padre	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Hijo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95

a) **Utiliza el ordenador para representar el diagrama de dispersión.**
b) **Dibuja la recta de regresión.**
c) **Utiliza la recta para determinar que altura del hijo correspondería a una altura del padre de 1.75 m.**

a) y b)



c) La recta de regresión es: y = 0.67 x + 0.62
Sustituimos, 1.75 = 0.67 · x + 0.62 , x = 1.7975 m.

AUTOEVALUACIÓN

Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

1. **La media de errores es**

   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Respuesta: c)

2. **La media de tiempos es**

   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Respuesta: a)

3. **La desviación típica de errores es**

   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Respuesta: c)

4. **La desviación típica de tiempos es**

   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Respuesta: b)

5. **El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:**

   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5.9, 6.1 y 7.3 d) 6, 7 y 8

Respuesta: d)

6. **El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:**

   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6.5, 7.5 y 8.5 d) 6, 7 y 8

Respuesta: a)

7. **La covarianza es:**

   a) 1.21 b) –1.5 c) –1.4 d) 1.425

Respuesta: d)

8. **El coeficiente de correlación es:**

   a) 0.8 b) –0.8 c) –0.7 d) 0.7

Respuesta: a)

9. **La recta de regresión lineal de los errores sobre el tiempo es:**

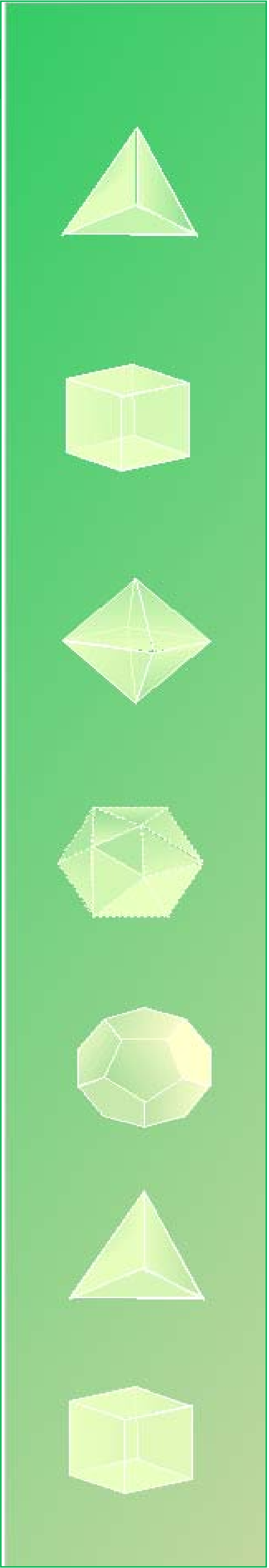
   a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.71x$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

Respuesta: b)

10. **La recta de regresión lineal del tiempo sobre los errores es:**

    a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.7$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

Respuesta: c)



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 7: Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: ADRIAN, KASSANDRA, ÁLVARO, SARA, ARÍSTIDES, LUIS, TERESA, LUCÍA, PATRICIA, PALOMA, ADRIANA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

b) Anotar el sexo del próximo bebe nacido en una clínica determinada.
$Sí\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos. $Sí\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

e) Saber si el próximo año es bisiesto. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: *"Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar".*
Suceso A {salir a}, suceso B {salir e}, suceso C {salir i}, suceso D {salir o} y suceso E {salir u}
Espacio muestral {A, B, C, D, E}

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: *"Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no".*
Suceso A {caer de punta}, suceso B {no caer de punta}
Espacio muestral {A, B}

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas.*
Suceso A {salir cara y salir cruz}, suceso B {salir cara y salir cara}

5. En el juego de la lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.
(Solución abierta)
Sabiendo que la cifra de las unidades (espacio muestral) es: $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$
1)El suceso obtener un número par $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
2)El suceso obtener un múltiplo de 3 $\{0, 3, 6, 9\}$

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.
(Solución abierta)
Sacar una carta de una baraja española es

$$E = \{As\ de\ Oros, 2O, 3O, \dots, SO, CO, RO, As\ de\ Copas, \dots, RC, As\ de\ Espadas, \dots, RE, As\ de\ Bastos, \dots, RB\}$$

1)El suceso sacar una carta de copas

$$\{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, SC, CC, RC\}$$

2)El suceso sacar un rey

$$\{RC, RO, RB, RE\}$$

3)El suceso sacar una carta par

$$\{2C, 4C, 6C, SC, RC, 2B, 4B, 6B, SB, RB, 2E, 4E, 6E, SE, RE, 2O, 4O, 6O, SO, RO\}$$

7.Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

$$B = \{As\ de\ Oros, As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$$

$$A = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$$

$A \cup B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE, As\ de\ Oros,$

$$As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$$

$A \cap B = \emptyset;\ son\ sucesos\ incompatibles$

$A - B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

El suceso sacar un número mayor que cuatro es $A = \{5, 6\}$

Por tanto, el suceso contrario es que se saquen números menores que 4 o igual a 4, luego:

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta:

- A y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles. No puede ocurrir a la vez un suceso y su contrario.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "sacar un as".

Suceso sacar un as = A   Suceso no sacar un as = $\bar{A}$

Suceso sacar un 6 = B   Suceso sacar un rey = C

11. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja sea una espada.

Como hay cuatro palos y las espadas son uno dividimos 1 entre 4:

$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

12. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

En la de frecuencias relativas, porque si hubiese la misma posibilidad de ser zurdo que de ser diestro, habría aproximadamente los mismos zurdos que diestros.

13. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5 al tirar un dado?

Suponiendo un dado de 6 caras:

Como hay 5 números que no son cinco $\frac{5}{6}$.

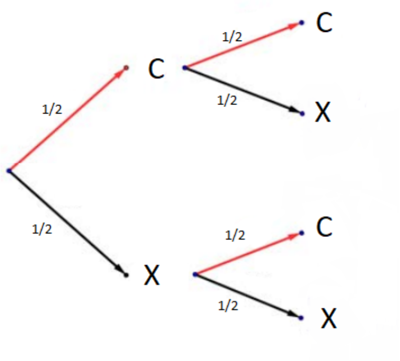
¿Y de no sacar un múltiplo de 3?

Los múltiplos de 3, del 1 al 6 son 3 y 6, y como se trata de no sacar estos, $\frac{4}{6}$.

¿Y de no sacar un número menor que 2?

Menor que 2 solo está el 1, $\frac{5}{6}$.

14. Al tirar una moneda 2 veces, ¿cuál es la posibilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.



La probabilidad de no sacar ninguna cara es:

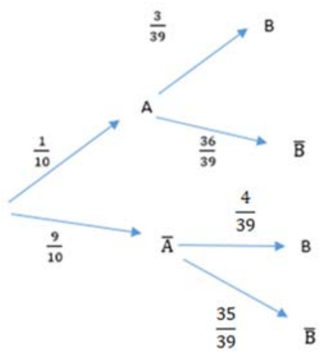
$$P(X \cap X) = P(X) \cdot P(X) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Y la de sacar al menos una cara:

$$P(al\ menos\ 1\ cara) = 1 - P(ninguna\ cara) =$$

$$= 1 - P(2\ cruces) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

15. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos *A* y *B*: *A* = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y *B* = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?



$$P(B/\bar{A}) = \frac{4}{39}$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{35}{39}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{39} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{39} = \frac{12}{65}$$

16. En el diagrama de árbol anterior indica cuál es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{130} = \frac{129}{130}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$$

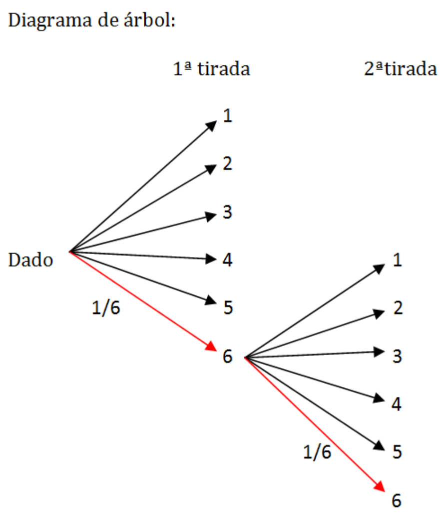
17. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Con reemplazo: P(3 ases) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{1000}$

Sin reemplazo: P(3 ases) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

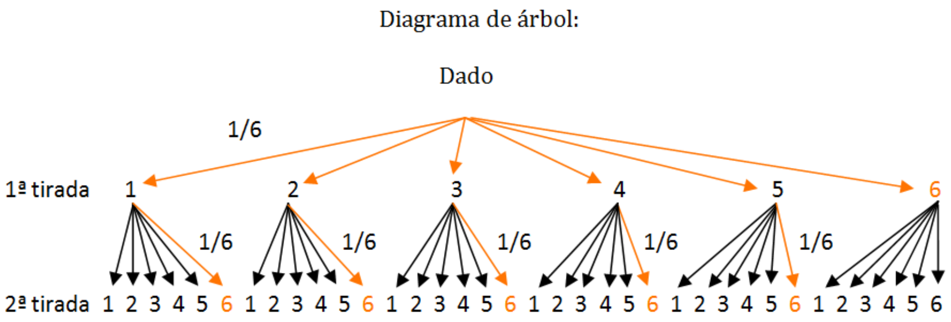
$P(A) = Probabilidad\ de\ sacar\ un\ seis\ doble$



$$P(A) = P(6) \cdot P(6/6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6

$P(A) = Probabilidad\ de\ sacar\ al\ manos\ un\ seis$

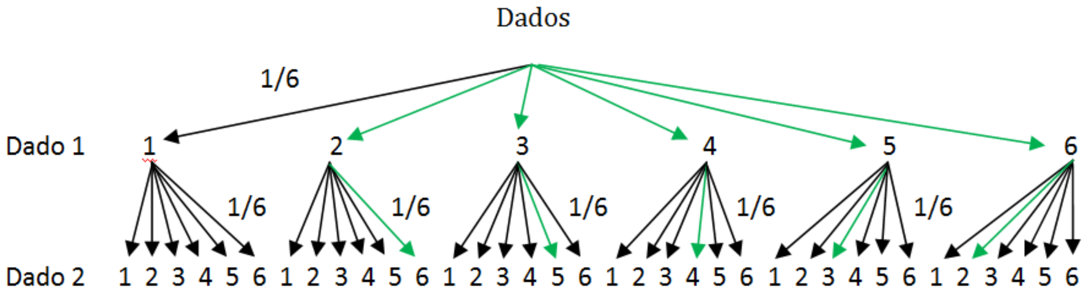


$$P(A) = P(1) \cdot P(6/1) + P(2) \cdot P(6/2) + P(3) \cdot P(6/3) + P(4) \cdot P(6/4) + P(5) \cdot P(6/5) + P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 5\left(\frac{1}{36}\right) + \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$$

20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso *A* que la suma de las dos caras sea 8 y el suceso B que esos números difieran en dos unidades.

a) Comprueba que P(*A*)= 5/36 (casos favorables: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2) y que P(*B*)= 8/36 (casos favorables: (1,3), (2,4), …).

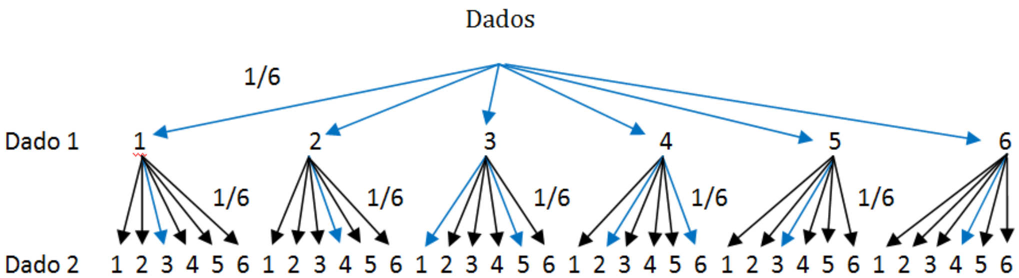
Diagrama de árbol:



(Para A)

$P(A) = P(2) \cdot P(6/2) + P(3) \cdot P(5/3) + P(4) \cdot P(4/4) + P(5) \cdot P(3/5) + P(6) \cdot P(2/6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 5\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{36}$

Diagrama de árbol:



(Para B)

$P(B) = P(1) \cdot P\left(\frac{3}{1}\right) + P(2) \cdot P\left(\frac{4}{2}\right) + P(3) \cdot P\left(\frac{1}{3}\right) + P(3) \cdot P\left(\frac{5}{3}\right) + P(4) \cdot P\left(\frac{2}{4}\right) + P(4) \cdot P\left(\frac{6}{4}\right) + P(5) \cdot P\left(\frac{3}{5}\right) + P(6) \cdot P\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 8(\frac{1}{36}) = \frac{8}{36}$

b) Calcula las probabilidades de: P($A \cap B$); P($A \cup B$); P($A \cap \overline{B}$); P($\bar{A} \cap B$); P($\bar{A} \cap \overline{B}$).

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B/A)} = \frac{5}{36} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{18}$

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{8}{36} - \frac{5}{162} = \frac{107}{324}$

$\mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P}(\bar{B}/A) = \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(\bar{A} \cap B) = \mathrm{P}(\bar{A}) \cdot \mathrm{P}(B/\bar{A}) = \left(1 - \mathrm{P(A)}\right) \cdot \mathrm{P}(B/\bar{A}) = \left(1 - \frac{5}{36}\right) \cdot \mathrm{P}(B/\bar{A}) = \frac{31}{36} \cdot \frac{6}{31} = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(\bar{A}) \cdot \mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = \left(1 - \mathrm{P(A)}\right) \cdot \mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = \left(1 - \frac{5}{36}\right) \cdot \mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{31}{36} \cdot \frac{25}{31} = \frac{25}{36}$

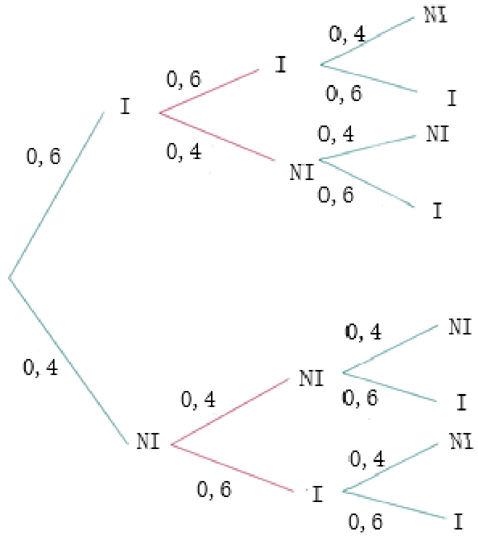
c) Calcula P(A/B); P(A/$\overline{B}$); P($\bar{A}$/B).

$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{8}{36}} = \frac{1}{4}$

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{12}}{\left(1-\frac{8}{36}\right)} = \frac{3}{28}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{36}} = \frac{3}{4}$$

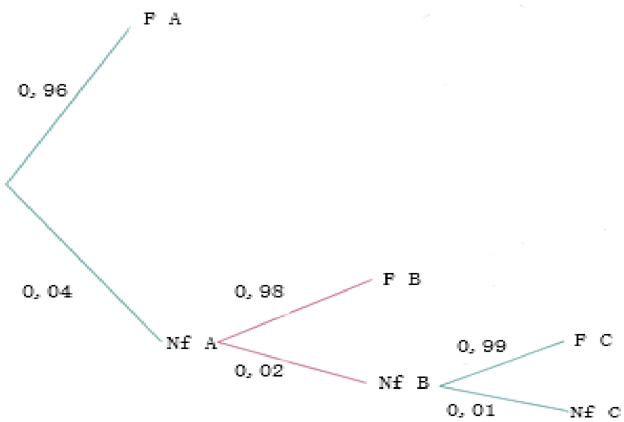
21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0,6$



$P(al\ menos\ 1\ intencionado) = 1 - P(ninguno\ intencionado) = 1 - (0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4) = 0{,}936$

22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0,96$; $P(B) = 0,98$; $P(C) = 0,99$ a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

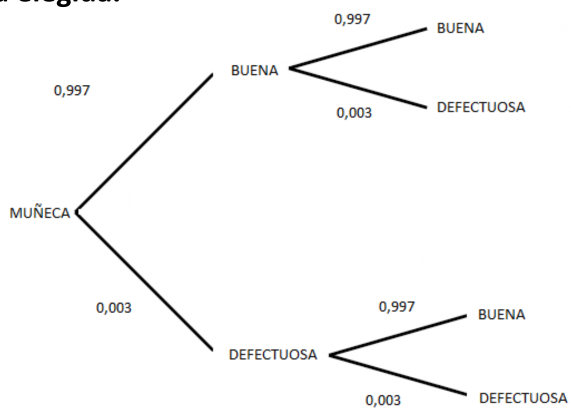
F = Funcione Nf = No funcione



$$P(fallen\ los\ 3) = P(Nf \cap Nf \cap Nf) = P(Nf) \cdot P(Nf/Nf) \cdot P(Nf/Nf \cap Nf) =$$
$$= 0{,}04 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}000008$$

$$P(todo\ salga\ bien) = 1 - P(fallen\ los\ 3) = 1 - 0{,}000008 = 0{,}999992$$

23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0,3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.



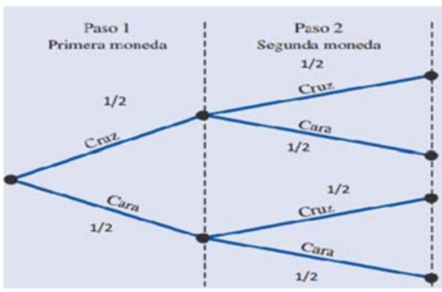
$a)\ P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D) = 0{,}003 \cdot 0{,}003 = 0{,}000009$

$b) P(B \cap D) + P(D \cap B) = 2 \cdot P(B) \cdot P(D) = 2(0{,}997 \cdot 0{,}003) = 0{,}00598$

$c)\ P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) = 0{,}997 \cdot 0{,}997 = 0{,}994$

$d)\ P(defectuosa\ solo\ la\ tercera) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) \cdot P(B) = 0{,}997 \cdot 0{,}997 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997 = 0{,}0029$

24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento)



$$a)\ P(C \cap C) + P(X \cap X) = P(C) \cdot P(C) + P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$b)\ P(termine\ en\ el\ tercero) = P(X) \cdot P(C) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$c)\ P(termine\ en\ el\ cuarto) = P(C) \cdot P(X) \cdot P(C) \cdot P(C) + P(X) \cdot P(C) \cdot P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$d)\ P(a\ lo\ sumo\ en\ el\ cuarto) =$

$$= P(segundo) + P(termine\ en\ el\ tercero) + P(termine\ en\ el\ cuarto) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: P(V ∩C); P(V ∩U); P(M ∩C); P(M ∩U); P(V); P(M); P(C) y P(U).

c) Calcula P(U/V); P(C/V); P(V/U); P(V/C). ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

a)

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	**0,27**	0,29	**0,56**
Accidente con sólo daños materiales (M)	0,31	0,13	0,44
Totales	**0,58**	0,42	**1**

b) $\mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) = 0{,}27$; $P(V \cap U) = 0{,}29$; $P(M \cap C) = 0{,}31$; $P(M \cap U) = 0{,}13$

$P(V) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + (V \cap U) = 0{,}56$; $P(M) = P(M \cap C) + P(M \cap U) = 0.44$

$P(C) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + P(M \cap C) = 0{,}58$; P(U)=$P(V \cap U) + P(M \cap U) = 0{,}42$

c) $P(U/V) = \frac{0{,}29}{0{,}56} = 0{,}54$; $P(C/V) = \frac{0{,}27}{0{,}56} = 0{,}48$

$P(V/U) = \frac{0{,}30}{0{,}43} = 0{,}7$; $P(V/C) = \frac{0{,}27}{0{,}58} = 0{,}47$

Los sucesos V y C son dependientes pues P(V) = 0,56 ≠ P(V/C) = 0,47

26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes pueden ser de carretera© o urbanos(U), pero que ahora los clasificamos en leves(L), Graves(G) o mortales(M). Observa que lo fundamental para confecciona la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

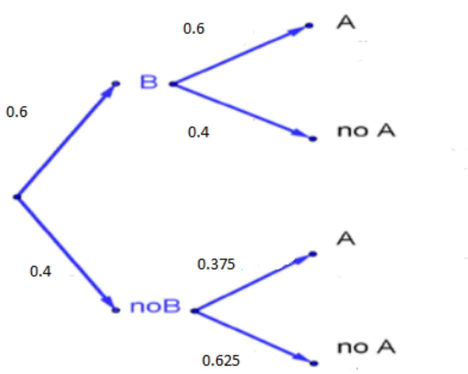
	Accidentes en carretera (C)	Accidentes urbanos (U)	Totales
Accidentes (L)	0.27	0.29	0.56
Accidentes (G)	0.18	0.01	0.19
Accidentes (M)	0.13	0.12	0.25
Totales	0.58	0.42	1

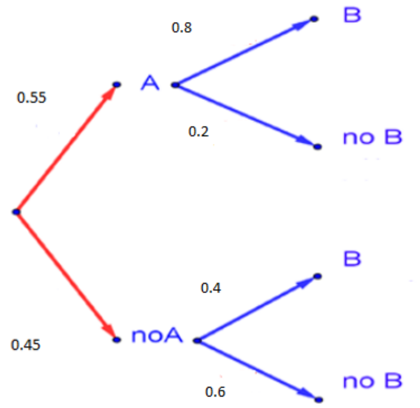
27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A	
B	0.4	0.2	0.6
No B	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

$$P(A\cap B)=0.4\to P(B)\cdot P(A/B)=0.4\to P(A/B)=\frac{0.4}{0.6}=0.6$$

$$P(A\cap noB)=0.15\to P(noB)\cdot P(A/noB)=0.15\to P(A/noB)=\frac{0.15}{0.4}=0.375$$

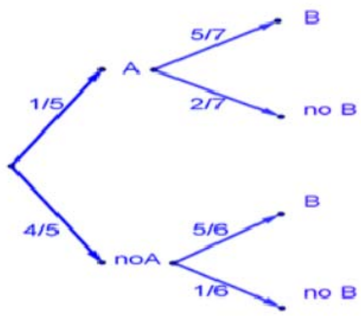




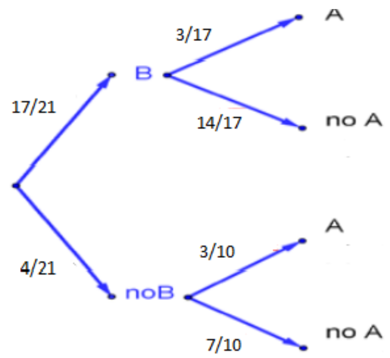
$$P(B\cap A)=0.4\to P(A)\cdot P(A/B)=0.4\to P(A/B)=\frac{0.4}{0.5}=0.8$$

$$P(B\cap noA)=0.2\to P(noA)\cdot P(noA/B)=0.2\to P(noA/B)=\frac{0.2}{0.45}=0.4$$

28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye una tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



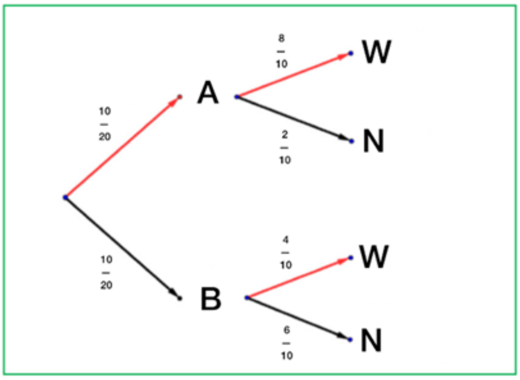
	A	No A	Totales
B	5/35	20/30	17/21
No B	2/35	4/30	4/21
Totales	7/35	24/30	1



$$P(A\cap B)=\frac{5}{35}\to P(B)\cdot P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{5}{35}\to P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{\frac{5}{35}}{\frac{17}{21}}=3/17$$

$$P(A\cap noB)=2/35\to P(noB)\cdot P(A/noB)=2/35\to P(A/noB)=\frac{2/35}{4/21}=3/10$$

29. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?



A → elegir urna A *B* → elegir urna B

W → extraer bola blanca *N* → extraer bola negra

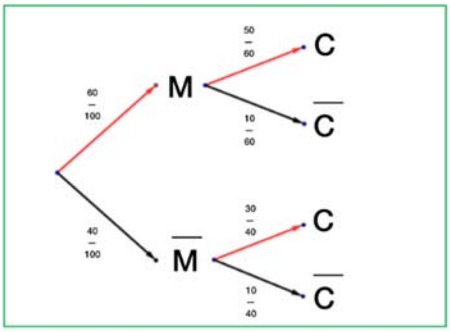
P(A/N) = $\frac{P(A\cap N)}{P(N)}=\frac{P(A)\cdot P(N/A)}{P(N)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}2}{0{,}4}=0{,}25$

P(N) = $P(A\cap N)+P(B\cap N)=P(A)\cdot P(N/A)+P(B)\cdot p(N/B)=\frac{10}{20}\cdot\frac{2}{10}+\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{10}$ = 0,4

La probabilidad de que la bola negra proceda de la urna A es de 0,25

30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta. Calcula:

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100



$M \rightarrow$ Tratados con medicamento $\qquad \bar{M} \rightarrow$ Tratados sin medicamento, es decir, con el placebo

$C \rightarrow$ Curados $\qquad \bar{C} \rightarrow$ No curados

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento.

$$P(M/C) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)\cdot P(C/M)}{P(C)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}83}{0{,}8} = 0{,}62$$

$$P(C) = P(M) \cdot P(C/M) + P(\bar{M}) \cdot P(C/\bar{M})$$

$$P(C) = \frac{50}{60}\cdot\frac{60}{100} + \frac{30}{40}\cdot\frac{40}{100} = 0{,}8$$

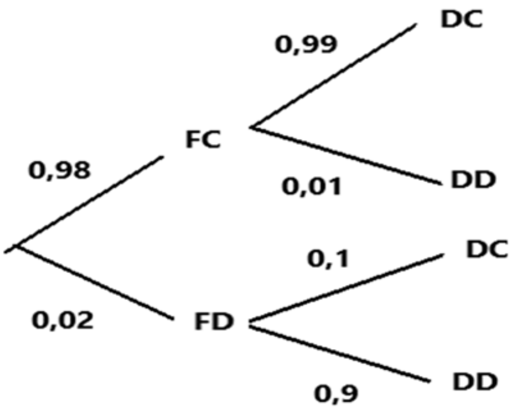
La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento es de 0,62

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo.

$$P(\bar{M}/C) = \frac{P(\bar{M}\cap C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{M})\cdot P(C/\bar{M})}{P(C)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}75}{0{,}8} = 0{,}38$$

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo es de 0,38

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. Ayuda: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.



	Fabricado Correcto (FC)	Fabricado Defectuoso (FD)	
DETECTADO como Correcto (DC)	**0,9702**	**0,002**	**0,9722**
DETECTADO como Defectuoso (DD)	**0,0098**	**0,018**	**0,0278**

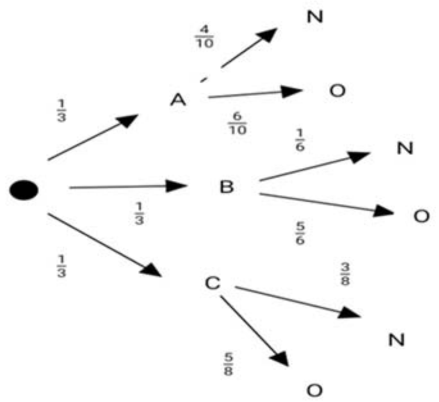
	0,98	0,02	**1**

$$A)\ P(FC/DD) = \frac{P(FC \cap\ DD)}{P(DD)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0278} = 0{,}3525$$

$$B) P(FD/DC) = \frac{P(FD \cap\ DC)}{P(DC)} = \frac{0{,}002}{0{,}9722} = 0{,}0021$$

32. Se tienen 3 cajas, A, B y C. la caja A tiene 10 bolas de cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

A = 10 bolas y 4 negras B = 6 bolas y 1 negra C = 8 bolas y 3 negras O = No negra

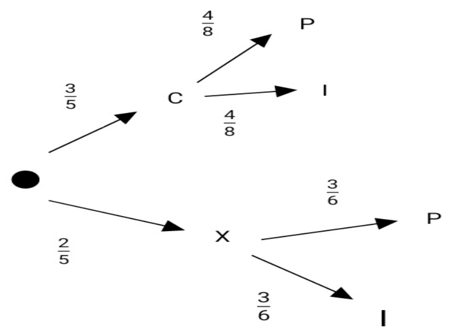


$$P(A \cap N) + P(B \cap N) + P(C \cap N) = \big(P(A) \cdot P(N/A)\big) + ((P(B) \cdot P(N/B)) + (P(C) \cdot P(N/C)$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{113}{360}$$

Sí se cumple

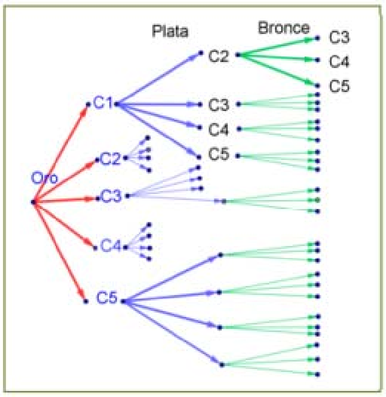
33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es de 3/5 y la cruz es de 2/5. Si sale cara se escoge un numero al azar del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.



$$P(I) = P(C \cap I) + P(X \cap I) = \big(P(C) \cdot P(I/C)\big) + \big(P(X) \cdot P(I/X)\big) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

2. COMBINATORIA

34. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

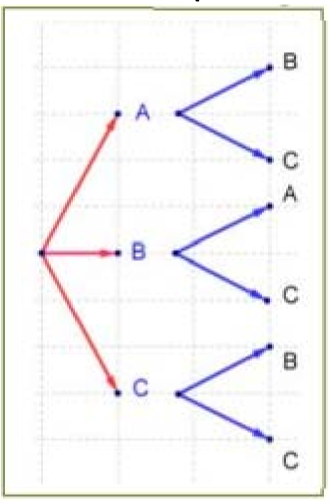


Solución gráfica: Observa el diagrama en árbol. La medalla de oro la puede ganar cualquiera de los 5 corredores, C1, C2, C3, C4 o C5.

Si la gana C1, la medalla de plata la puede ganar alguno de los otros 4, nunca C1, luego la podría ganar C2, C3, C4 o C5.

Si la gana C2, la medalla de bronce la puede ganar 3 corredores: C3, C4 o C5. Por tanto las formas posibles de ganar las medallas son: **5·4·3 = 60**

35. Haz diagramas en árbol para calcular: a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras? b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (Recuerda que hay 5 vocales y 22 consonantes).



Solución gráfica:

a) Distintas: 3·2 = 6;   Repetidas: 3·3 = 9;

b) Palabras de 3 letras: 5·27·22 = 2970.

Tenemos 5 vocales para empezar, como se pueden repetir tenemos 27 letras para la segunda posición y como debe terminar en consonante, tenemos 22 letras

36. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? Ayuda: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

4·2·3 = 24 modelos diferentes. No puede llevar combinación diferente durante 61 días.

24 + 24 + 24 = 72,   72 – 61 = 11,   11 días debe repetir y 13 veces por tercera vez.

37. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

Solución: $P_5 = 5! = 120$.

38. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas

distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Solución: Cada uno de los 4 puede llegar el primero.

Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, y 3. Si la carrera no está amañada hay P_4 = 4! = 4·3·2·1 = 24 formas distintas de llegar a la meta.

39. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Solución: P_6 = 6! = 6·5·4·3·2·1 = 720

40. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Solución: Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea. Se pueden ordenar de P_{28} = 28! = 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes.

41. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Solución: P_6 = 6! = 6·5·4·3·2·1 = 720.

42. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Solución: P_7 = 7! = 7·6·5·4·3·2·1 = 5040.

43. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5!3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{11!}$; f) $\frac{677!}{676!}$.

Solución: a) $\frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$;

b) $\frac{8!}{3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4 = 6720$;

c) $\frac{9!}{5!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 504$;

d) $\frac{7!}{5!} = \frac{7\cdot6\cdot5!}{5!} = 7\cdot6 = 42$;

e) $\frac{13!}{11!} = \frac{13\cdot12\cdot11!}{11!} = 13\cdot12 = 156$;

f) $\frac{677!}{676!} = \frac{677\cdot676!}{676!} = 677$.

44. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$ d) $\frac{n!}{(n+1)!}$

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = n+1$

$b)$ $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} = \frac{(n+4)\cdot(n+3)!}{(n+3)!} = n+4$

$c)$ $\frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = n+3$

$d)\ \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

45. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

Solución: a) $5\cdot4\cdot3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = \frac{5!}{2!}$

b) $10\cdot11\cdot12\cdot13 = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9!}{9!} = \frac{13!}{9!}$

c) $8\cdot7\cdot6 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$

d) $10\cdot9 = \frac{10\cdot9\cdot8!}{8!} = \frac{10!}{8!}$

47. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

Solución: $P_{30} = 30!$

48. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Solución: $P_9 = 9! = 362\,880$.

49. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

Solución: Como el 0 no puede estar el primero, nos quedan 9 cifras para el primer lugar y 10 para las 3 restantes, como se pueden repetir, $9\cdot VR_{10,3} = 9\cdot10^3 = 9\cdot1000 = 9000$.

50. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

Solución: Suponemos que los números pueden empezar por 0:

$VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 10^4 \cdot 27^3 = 196\,830\,000$

51. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Solución: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$.

52. Calcula: a) $VR_{2,5}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{10,2}$; d) $VR_{2,10}$.

Solución: a) $VR_{2,5} = 2^5 = 32$; b) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$;

c) $VR_{10,2} = 10^2 = 100$; d) $VR_{2,10} = 2^{10} = 4\,096$

53. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 4 elementos tomadas de 5 en 5.

b) Las variaciones con repetición de 8 elementos tomadas de 2 en 2.

c) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 4 en 4.

Solución: a) $VR_{4,5} = 4^5$; b) $VR_{8,2} = 8^2$; c) $VR_{7,4} = 7^4$.

54. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

Solución: para la primera letra hay 22 consonantes, para la 2ª y 3ª hay 27 letras y para la 4ª sólo la s, por tanto, $22 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 1 = 16\,038$.

55. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Solución: $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

56. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Solución: Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de seis cifras.
Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero pero no la colocada en primer lugar.
Para la tercera 8 y para la cuarta 7;
En total $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$ posibilidades.

57. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Solución: $V_{11,4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot = 7920$.

58. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Solución: $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

59. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

Solución: $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

60. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

Solución: a) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$;
b) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$;
c) $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

61. Calcula: $a)\ \frac{6!}{3!}$; $b)\ \frac{8!}{4!}$: $c)\ \frac{11!}{8!}$.

Solución: a) $\frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!} = 6\cdot5\cdot4 = 120$

b) $\frac{8!}{4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$

c) $\frac{11!}{8!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8!}{8!} = 11\cdot10\cdot9 = 990$

62. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Solución: Como no importa el orden, los bombones son iguales, $C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$.

63. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Solución: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$

64. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Solución: $C_{52,5} = \binom{52}{5} = 1\,497\,000\,960$

65. Añade tres filas más al triángulo de Tartaglia de la derecha

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

Solución: las 3 nuevas filas serían:

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

66. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2m

Solución: se puede ver en la imagen del 65.

67. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Solución: mirando en el triángulo del ejercicio 65, $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,5} = 1$.

También, la fila 5 es: $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ $C_{5,3} = \binom{5}{3}$ $C_{5,4} = \binom{5}{4}$ $C_{5,5} = \binom{5}{5}$

1 5 10 10 5 1

68. Desarrolla (a + b)^6

Solución: (a + b)^6 = $\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6=$

$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

69. Desarrolla a) (a – b)^6 ; b) (x – 3)^4 ; c) (x + 2)^7 ; d) (–x + 3)^5 .

Solución:

a) (a - b)^6 = $\binom{6}{0}a^6-\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2-\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4-\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6=$

$=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$

b) (x – 3)^4 = $\binom{4}{0}x^4-\binom{4}{1}x^3\cdot 3+\binom{4}{2}x^2\cdot 3^2-\binom{4}{3}x\cdot 3^3+\binom{4}{4}3^4=$

$=x^4-4x^3\cdot 3+6x^2\cdot 3^2-4x\cdot 3^3+3^4=x^4-12+54x^2-108x+81$

c) (x + 2)^7 = $\binom{7}{0}x^7+\binom{7}{1}x^62+\binom{7}{2}x^52^2+\binom{7}{3}x^42^3+\binom{7}{4}x^32^4+\binom{7}{5}x^22^5+\binom{7}{6}x2^6+$

$+\binom{7}{7}2^7=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128$

d) (–x + 3)^5 = $\binom{5}{0}(-x)^5+\binom{5}{1}(-x)^4\cdot 3+\binom{5}{2}(-x)^3\cdot 3^2+\binom{5}{3}(-x)^2\cdot 3^3+\binom{5}{4}(-x)3^4+$

$+\binom{5}{5}3^5=-x^5+15x^4-90x^3+270x^2-405x+243$

70. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^5$

Solución: la suma de los exponentes de x han de sumar 7, $x^{5-k}\cdot(x^2)^k=x^7$, luego

5 – k + 2· k = 7 , k = 2 , por tanto el término es,

$\binom{5}{2}(3x)^3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=10\cdot 3^3\cdot x^3\cdot\frac{x^4}{2^2}$, el coeficiente es $\frac{10\cdot 27}{4}=\frac{135}{2}$

71. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

Solución: $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5$

$\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5=\binom{5}{0}(\sqrt{2})^5-\binom{5}{1}(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{5}{2}(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-\binom{5}{3}(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{5}{4}(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-$

$\binom{5}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5=(\sqrt{2})^5-5(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+10(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-10(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+5(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\left(\frac{x}{2}\right)^5=$

$=4\sqrt{2}-10x+5\sqrt{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{16}\sqrt{2}x^4-\frac{1}{32}x^5$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian inglés o francés. De ellos 150 estudian inglés y 70 francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés?

En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán e italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

a)

	estudiantes	inglés	francés
probabilidad	200	150	70
	200/200	3/4	7/20

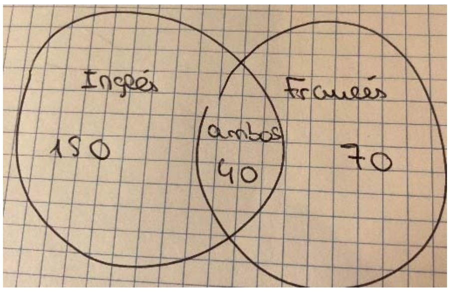
$$P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F); \quad P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F);$$

$$P(I \cap F) = \frac{3}{4} + \frac{7}{20} - \frac{200}{200}; \qquad P(I \cap F) = 1/10$$

Como la probabilidad es $1/10$, de 200 personas 20 alumnos estudian inglés y francés.

b)

	estudiantes	inglés	francés	ambos	alemán	italiano
probabilidad	200	150	70	40	¿?	¿?
	200/200	3/4	7/20	1/5	¿?	¿?



Luego 150- 40= 110 solo estudian inglés

Y 70-40= 30 solo estudian francés

Por tanto, 110 que estudian inglés más 30 que estudian francés más 40 que estudian ambos idiomas = 180 estudiantes de inglés, francés o ambos.

200 estudiantes menos 180= 20 estudian otros idiomas (alemán e italiano).

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar un número impar.

b) No sacar un 3.

c) Sacar un número mayor que 3.

d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar.

e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

$$Regla\ de\ Laplace: P(suceso) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$$

a) $probabilidad\ de\ que\ salga\ impar = \frac{números\ impares}{número\ de\ caras} = 3/6 = 1/2$

b) $probabilidad\ de\ que\ salga\ 3 = \frac{número\ 3}{número\ de\ cara} = 1/6$

c) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ mayor\ que\ 3 = \frac{número\ mayor\ que\ 3}{número\ de\ caras} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

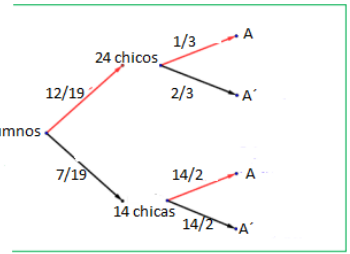
d) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ impar\ mayor\ que\ 3 = \frac{número\ impar\ mayor\ que\ 3}{número\ de\ caras} = \frac{1}{6}$

e) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ mayor\ que\ 3\ o\ impar = \frac{5}{6}$

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar.

a) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules.

b) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.



C= elegir chico

a) $P(C \cap A) = P(C)P(A/C);$

$P(C \cap A) = \left(\frac{12}{19}\right)\left(\frac{1}{3}\right);$

$P(C \cap A) = \frac{4}{19}$

b) Chicas con ojos azules ½ de 14 = 7

Chicos con ojos azules 1/3 de 24 = 8, en total hay 15 con ojos azules

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = \frac{24}{38} + \frac{15}{38} - \frac{8}{38} = \frac{31}{38}$$

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

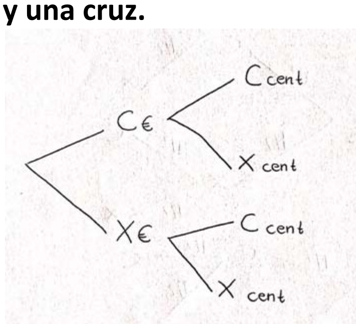
Juan→ $2x$ Jorge→ x Antonio → $2x$

Como la suma de las probabilidades ha de ser 1, 5x = 1 x = $\frac{1}{5}$

P(Juan) = $\frac{2}{5}$ P(Jorge) = $\frac{1}{5}$ P(Antonio) = $\frac{2}{5}$

P(Juan o Jorge) = P(Juan) + P(Jorge) = $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, al ser incompatibles.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.



a)$P(cara\ €) = \frac{1}{2}$

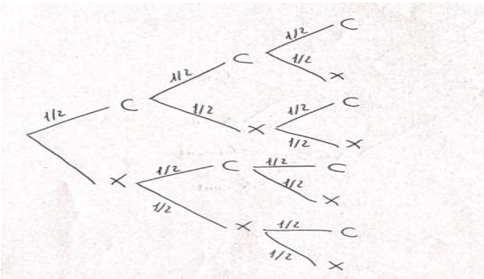
b)$P(C€ \cap X) + P(X \cap Cct) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c)$P(C€ \cap X) + P(X \cap Cct) + P(C€ \cap Cct) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

d)$P(X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

e)$P(C \cap X) + P(X \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.



A) $P(X \cap X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

B) Si la probabilidad de que no salga ninguna cara es de 1/8, la probabilidad de que salga al menos una cara es 1 – probabilidad de ninguna cara = 1 - 1/8 = 7/8

C) $P(C \cap C \cap X) + P(C \cap X \cap C) + P(X \cap C \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, ... sea 12.

Solución:
La siguiente tabla representa la suma de los valores de ambos dados:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Regla de Laplace: $\mathrm{P(A)} = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables\ A}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles}$

$\mathrm{P(1)} = 0$; $\mathrm{P(2)} = \frac{1}{36}$; $\mathrm{P(3)} = \frac{2}{36}$; $\mathrm{P(4)} = \frac{3}{36}$; $\mathrm{P(5)} = \frac{4}{36}$; $\mathrm{P(6)} = \frac{5}{36}$;

$P(7)=\frac{6}{36}$; $P(8)=\frac{5}{36}$; $P(9)=\frac{4}{36}$; $P(10)=\frac{3}{36}$; $P(11)=\frac{2}{36}$; $P(12)=\frac{1}{36}$

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que Galileo!

Regla de Laplace: $P(A)=\frac{n^{o}\ casos\ favorables\ A}{n^{o}\ casos\ posibles}$

Con tres dados, el nº de casos posibles son 6^3, o lo que es lo mismo 216

a) Para calcular $P(9)$: Considerando que el 3er dado puede tomar valores del 1-6, los que pueden ser válidos para sumar 9 son representados en la siguiente tabla, en la que aparecen las sumas de los valores de los otros dos dados (el resto de los valores se descartan):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	-	-	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)
2	-	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)
3	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-
4	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-	-
5	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-	-	-
6	7 (+2)	8 (+1)	-	-	-	-

Por lo tanto, de los 216 casos posibles, se tiene que 25 son favorables para $P(9)$ y según Laplace:

$$P(9)=\frac{25}{216}$$

b) Para calcular $P(10)$: Al igual que en el caso anterior, el 3er dado toma valores del 1-6; se representan en la tabla los posibles valores que puedan sumar 10 (Los que no cumplen dicha condición se descartan):

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)
2	-	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)
3	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)
4	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-
5	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-	-
6	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-	-	-

Por lo tanto, de los 216 casos probables, para $\mathrm{P}(10)$ son favorables 27 y según Laplace:

$$\mathrm{P}(10) = \frac{27}{216}$$

Luego es más probable que salga suma 10

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par", B al suceso "Salga cruz y un número impar" y al suceso C "Salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

Solución:

$$\text{Regla de Laplace: } \mathrm{P(A)} = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ faborables\ A}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles}$$

La siguiente tabla representa tanto los valores tomados por el dado como las caras de la moneda:

	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
X	X1	X2	X3	X4	X5	X6

$\mathrm{A} = \{\text{cara y par}\}$; $\quad \mathrm{B} = \{\text{cruz e impar}\}$; $\quad \mathrm{C} = \{\text{nº Primo}\}$

a) $\mathrm{P(A)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $\quad \mathrm{P(B)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $\quad \mathrm{P(C)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

b) $\mathrm{P(A \cap B)} = 0$, son incompatibles; $\mathrm{P(A \cap C)} = \frac{1}{6}$ Compatibles; $\mathrm{P(B \cap C)} = \frac{3}{6}$ Compatibles

***10.* Lanzamos una moneda 50 veces, ¿Qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Justifica la respuesta.**

- La probabilidad de los dos casos es la misma porque la moneda no guarda los datos de sus tiradas, es decir, no tiene memoria.

11. **Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y obtener cruz al tirar una moneda.**

- C → Salir cara. - X → Salir cruz.

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{C}) = 2 \cdot \mathrm{P}\,(\mathrm{X}) \rightarrow \; P(C) + P(X) = 1$$

$$2P(X) + P(X) = 1 \rightarrow \; 3P(X) = 1 \; \rightarrow \; P(X) = \frac{1}{3} \; ; \; P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\cdot\, P(C) = \frac{2}{3} \qquad \cdot\, P(X) = \frac{1}{3}$$

12. **Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.**

· Chico 1,2,3 = probabilidad x cada uno · Chica 1,2 = probabilidad 2x cada una

Calculamos cuánto vale x. $7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

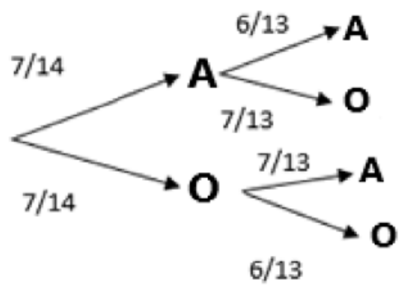
Por tanto, la probabilidad de que gane un chico el torneo es 1/7.

13. Siete parejas, cinco de chico-chica, una de chico-chico y otra de chica-chica, están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. B) Sean pareja. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja. d) No haya ninguna pareja.

A = {Que sea chica} O = {Que sea chico}

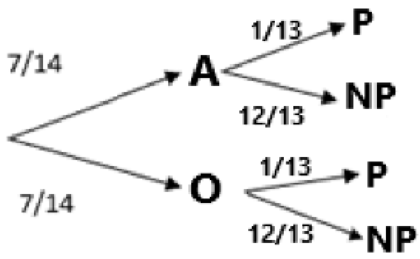
P = {Que sean pareja} NP = {Que no sean pareja}

a)



$$P(O \cap A) = P(A)P(O/A) + P(O)P(A/O) = \frac{7}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

b)



$P(P) = P(A \cap P) + P(O \cap P) = P(A)P(P/A) + P(O)P(P/O) = \frac{7}{14} \cdot \frac{1}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

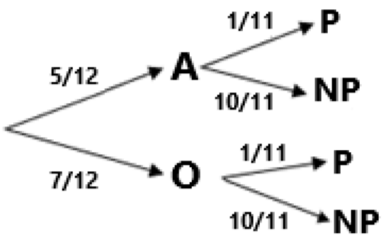
c) La probabilidad de al menos una pareja es igual a la suma de la probabilidad de que haya una pareja más la probabilidad de que haya dos parejas,

P(1P) es el apartado b) P(1P) = $\frac{1}{13}$

P(2P) = P(1P) · P(2P/1P) = $\frac{1}{13}$ · (*)

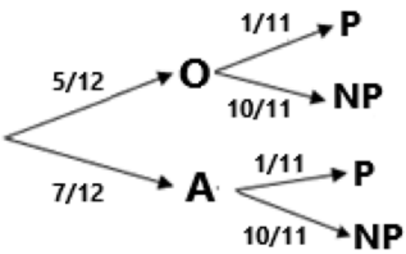
Para calcular la probabilidad de que haya una segunda pareja cuando ya ha salido la primera hay que estudiar 3 casos:

1. La pareja eran 2 chicas



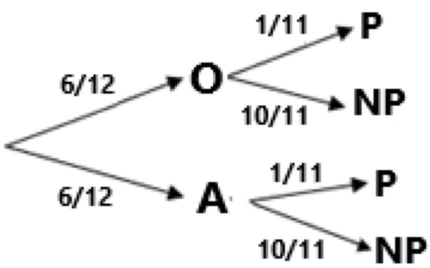
P(2P/1P) $= P(A \cap P) + P(O \cap P) = P(A)P(P/A) + P(O)P(P/O) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$

2. La pareja eran 2 chicos



P(2P/1P) $= P(O \cap P) + P(A \cap P) = P(O)P(P/O) + P(A)P(P/A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$

3. La pareja eran chica-chico



P(2P/1P) $= P(O \cap P) + P(A \cap P) = P(O)P(P/O) + P(A)P(P/A) = \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$

Las tres probabilidades son iguales luego su suma es $3 \cdot \frac{1}{11} = \frac{3}{11}$

Tenemos que la probabilidad pedida es:

P(al menos 2 parejas) = P(1P) + P(2P) = P(1P) + P(1P) · P(2P/1P) = $\frac{1}{13}+\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{11}=\frac{14}{13\cdot 11}=0{,}098$

d) No haya ninguna pareja

P(ninguna pareja) = 1 – P(al menos 1P) = $1-0{,}098=0{,}902$

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

1	2x
2	x
3	2x
4	x
5	2x
6	x
9x = 1; x = 1/9	

A={número impar}   B={número par}   C={número primo}

a) $P(A)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

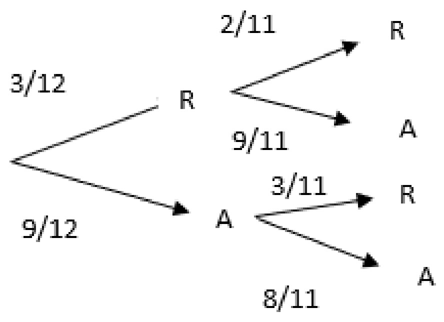
b) $P(C)=P(1)+P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

c) $P(A\cap C)=\{1,3,5\}=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

d) $P(A\cup C)=\{1,2,3,5\}=P(1)+P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no

R={Que sea rubia}   A={No ser rubia}



a) $P(R\cap R)=P(R)P(R/R)=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5}{132}$

b) $P(al\ menos\ 1\ sea\ rubia)=1-P(A\cap A)=1-P(A)P(A/A)=1-\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}=\frac{5}{11}$

c) $P(A \cap A) = P(A)P(A/A) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}$

d) $P(A \cap R) + P(R \cap A) = P(A)P(R/A) + P(R)P(A/R) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{22}$

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

A) Realizamos un diagrama cartesiano donde se indican los posibles valores de cada dado al lanzarlos:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles.}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B)

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles.}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

C)

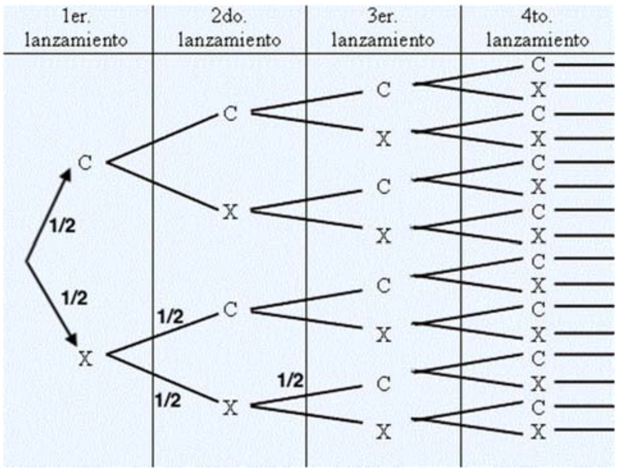
Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles.}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

A) **Salga cara antes del cuarto lanzamiento**: Será la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento ($\frac{1}{2}$) o que salga cara en el segundo lanzamiento, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$ o que salga cara en el tercer lanzamiento, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$$P(A)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$



B) **Salga cara después del octavo lanzamiento**: El camino seguido corresponde al que sale X en ocho lanzamientos y en el noveno sale cara. Como la probabilidad de que salga X es siempre ½, y la que salga cara también es ½, la probabilidad de que salga cara después del octavo lanzamiento es:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$$

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

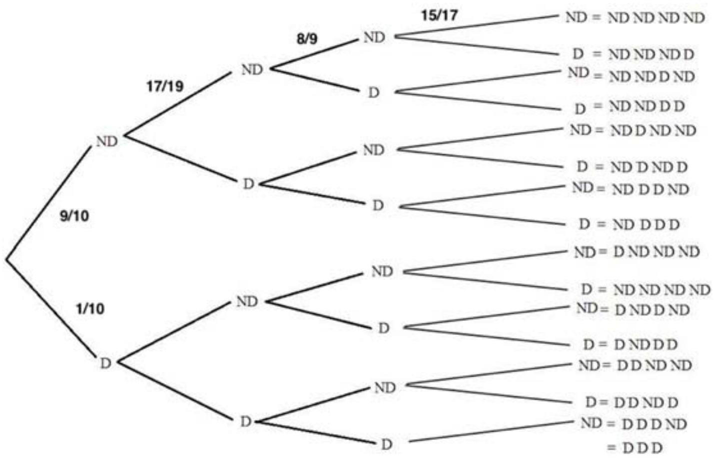
1º saca: $P(D)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$P(ND)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

2ª saca: $P(ND/ND)=\frac{17}{19}$

3ª saca: $P(ND/ND)=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

4ª saca: $P(ND/ND)=\frac{15}{17}$



P(ND)= $\frac{9}{10}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{17}=\frac{12}{19}$

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Se realiza el diagrama cartesiano para ver las sumas de las caras superiores de los dos dados. Se analizan cuántas dan 7 y de éstas cuántas ha salido un 3 en alguno de los dados:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P(A)= $\frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

COMBINATORIA

20. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Solución: 5 nadadores, $P_5 = 5! = 120$; 8 nadadores $P_8 = 8! = 40\,320$.

21. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Solución: Hay $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras de hacerse la fotografía.

Y hay 2 formas de ordenarse, primero chica o chico y P_2 formas de ordenarse entre ellas y ellos luego hay $2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! \cdot 2! = 8$ maneras de hacerse la fotografía alternando chicos y chicas.

22. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Solución: $P_9 = 9! = 363\,880$ maneras de introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes.

23. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Solución: $P_7 = 7! = 5040$ formas de llegar a la meta.

La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040.

24. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Solución: Hay $P_5 = 5! = 120$ números distintos de 5 cifras diferentes.

Si empiezan por 5 hay $P_4 = 4! = 24$ números.

Si empiezan por 5 y terminan por 7 hay $P_3 = 3! = 6$ números.

25. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

Solución: Se pueden formar $P_3 = 6$ banderas distintas con 3 franjas y 3 colores.

Con 6 colores se pueden formar $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ banderas distintas con tres franjas.

Y si no es preciso que las franjas tengan colores distintos tenemos $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ banderas diferentes.

26. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

Solución: Hay $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ números de 3 cifras distintas.

Son impares la mitad pues del 1 al 6 la mitad son pares y la otra mitad impares, por tanto hay 60. Para calcular los múltiplos de 4 analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64. En total tenemos 7 formas de ser múltiplo de 4, como las cifras a utilizar han de ser distintas, nos quedan 4 en cada caso para poner en las centenas por tanto, tenemos $7 \cdot 4 = 28$ múltiplos de 4.

27. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

Solución: $VR_{6,34} = 6^{34}$.

La suma: En las unidades hay igual número de 1, que 2… que 6, Por tanto hay 6^{34}, Las unidades suman $6^{34}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 6^{34}\cdot 21$. Lo mismo suman las cifras de las decenas, centenas… Por tanto la suma total valdrá: $6^{34}\cdot$ (1034 + 1033 + … + 10 + 1)·21.

28. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

Solución: María tiene $V_{7,6}$ = 5 040 para ordenar las películas entre los 7 días de la semana.

Si sólo va 3 días al cine el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.

29. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

Solución: Tenemos $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números con 4 dígitos formados por las 6 cifras, como hay que empiezan por 0, $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, tenemos 360 – 60 = 300 números de cuatro cifras. Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir $2\cdot V_{5,3} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$ números.

30. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ó 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Solución: Con una secuencia de 8 dígitos se pueden formar $VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes.

Con una secuencia de 16 dígitos se pueden formar $VR_{2,16} = 2^{16}$ = 65 536 bytes.

Y con solo 4 dígitos sólo podríamos formar $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ bytes, no podemos escribir las letras del alfabeto.

31. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

Solución: si estuvieran numeradas del 1 al 8 habría P_8 = 8! Formas de ordenarlas pero al no estar numeradas, hemos contado 4! formas de colocar las blancas como distintas que en realidad son iguales y lo mismo con las negras luego tenemos $\frac{8!}{4!\cdot 4!} = \binom{8}{4} = C_{8,4} = 70$ formas de ordenarlas.

32. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

Solución: Como no importa el orden para hacer las mezclas, se pueden hacer $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ mezclas diferentes.

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Solución: Hay $C_{30,2} = \binom{30}{2} =$ 4 060 maneras de elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30. Solución abierta, según tu grupo.

34. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Solución: Hay $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$ productos.

Sólo uno es entero, $2 \cdot 3 \cdot 7$

Tenemos que poner fijo el 1/3 y nos quedan 3 enteros para coger 2 luego hay $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$ productos cuyo resultado es un número racional

Tenemos que fijar π y nos quedan 4 para coger 2, $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ productos cuyo resultado es un número irracional.

35. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

Solución: $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$.

36. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

Solución: Se trata de las formas de coger 3 entre los 9, pues en el otro grupo ya quedan 6, luego hay $C_{9,3} = \binom{9}{3} = 84$ formas.

37. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Solución: Hay $C_{15,2} = \binom{15}{2} = 105$ posibilidades.

Si has estudiado 10 temas, quedan 5 sin estudiar luego hay $C_{5,2} = \binom{5}{2} = 10$ posibilidades de que no te sepas ninguno de los dos temas.

La probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas es 10/105 = 0,09.

La probabilidad de no saber 1 tema es $\frac{5\cdot 10}{105} = \frac{10}{21}$, sacar 1 de los 5 que no hemos estudiado y sacar 1 de los 10 estudiados.

38. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Solución: $C_{7,4} = \binom{7}{4} = 35$ opciones.

39. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Solución: Hay $C_{12,4} = \binom{12}{4} = 495$ sucesos en los que se obtienen 4 éxitos.

Se tiene éxito en el último tiro si se han acertado 3 de los 11 anteriores, luego son $C_{11,3} = \binom{11}{3} = 165$.

40. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Solución: Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener 12 resultados, 2 resultados de la moneda por 6 del dado.

Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ resultados.

Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos $2^3 \cdot 6^2 = 288$ resultados.

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

Solución: Se trata de escoger 2 personas entre x que hay para que se saluden, si hubo 91 apretones $C_{x,2} = \binom{x}{2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{2!(x-2)!} = \frac{x\cdot(x-1)}{2\cdot 1} = 91$, $x\cdot(x-1) = 2\cdot 91$, $x^2 - x - 182 = 0$

$x = 14$, $x = -13$, ; había 14 personas.

Para 45 apretones, $C_{x,2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{2!(x-2)!} = \frac{x\cdot(x-1)}{2\cdot 1} = 45$, $x\cdot(x-1) = 2\cdot 45$, $x^2 - x - 90 = 0$

$x = 10$, $x = -9$, ; había 10 personas.

42. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Solución: Con 4 cifras podemos formar $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ contraseñas.

No tienen ningún número repetido $V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$, por lo tanto tienen algún número repetido 10 000 – 5 040 = 4 960 contraseñas.

Tienen un número repetido dos veces: para el repetido podemos cualquiera de los 10, coger los 2 números restantes sin repetir hay $C_{9,2}$ y las formas de colocar los 4 números escogidos es P_4 pero el que está repetido no nos da una disposición diferente por cambiar sitio luego hay que dividir entre 2, nos salen: $10 \cdot C_{9,2} \cdot (P_4/2) = 10 \cdot \frac{9!}{2!\cdot 7!} \cdot \frac{4!}{2} =$ 4 320 contraseñas.

43. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Solución: (Partimos de que el número de teléfono tiene 9 cifras) Si sólo recuerda el comienzo, 656, le faltan 4 que son menores que 5, (0, 1, 2, 3, 4), luego hay $C_{5,4}$ formas de coger 4 de 5 posibles, y todavía hay otras 2 cifras que pueden ser cualquiera de las 10, como en total hay 6 cifras que le faltan estas se pueden ordenar de P_6 formas, por tanto son $C_{5,4} \cdot 10 \cdot 10 \cdot P_6$ = 360 000 número posibles. Las posibilidades de acertar: 1/360000;

Si además recuerda el 77 del final, como las 4 que le faltan son menores que 5 y distintas, tenemos V5,4 = 120 posibilidades, luego la probabilidad de acertar con una llamada es 1/120.

44. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Solución: En las 2 primeras la letra correspondía a la provincia del vehículo. Con M 123456 había $VR_{10,6} = 10^6$ = 1 000 000 matrículas diferentes para cada provincia.

Con M 1234 AB había $VR_{10,4} \cdot 27 \cdot 27 = 10^4 \cdot 729$ = 7 290 000 distintas para cada provincia, (esto no es exacto pues no se usaban todas las letras)

Y con 1234 BCD hay $VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3$ = 80 000 000 placas diferentes, (no se usan las vocales ni la Q ni la Ñ)

45. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

Solución: Cada set lo puede ganar cualquiera, pero al llegar a **7** Juana o Juan seguro que ha ganado 4.

46. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Solución: Hay que seleccionar 3 de 7 y 2 de 4 luego tenemos $C_{7,3} \cdot C_{4,2} = 35 \cdot 6 = 210$.

Si yo soy un experto: $C_{6,2} \cdot C_{4,2} = 15 \cdot 6 = 90$.

47. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

Solución: Tenemos 8 estaciones y debemos escoger de 2 en 2, teniendo en cuenta que el billete de A a B es distinto del de B a A, es decir, disposiciones ordenadas, por tanto, $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$.

En el caso de la distancia, si son iguales de A a B y de B a A, por tanto, $C_{8,2} = 28$.

48. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Solución: El padre tiene 3 turnos y la madre 2 luego hay $3 \cdot 2 = 6$ combinaciones posibles, de éstas hay 2, cuando entran ambos a las 8, que no lo pueden llevar, por tanto la probabilidad de no poder llevar al hijo es de $2/6 = 1/3$. De los 365 días del año restamos sábados y domingos, $54 \cdot 2 = 108$, nos quedan 257, $257 \cdot 1/3 = 85{,}66…$ unos 86 días no lo pueden llevar, o también un mes de cada 3.

49. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Solución: Las posibilidades son acertar las 3 tiradas o acertar 2 tiradas o acertar 1 tirada o no acertar ninguna tirada: $C_{10,3} + C_{10,2} + C_{10,1} + C_{10,0} = 120 + 45 + 10 + 1 = 176$.

Si la primera no se acierta, nos quedan $C_{10,2} + C_{10,1} + C_{10,0} = 45 + 10 + 1 = 56$.

50. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

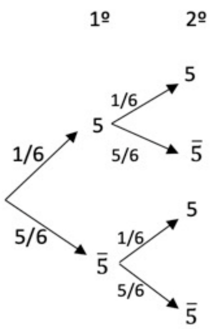
Solución: Cada vez que se inicia un baile hay 6 chicas para elegir luego: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 64 = 1296$ formas distintas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 35/36 d) 30/36

A = Al menos un 5



$$P(A) = P(5 \cap 5) + P(5 \cap \bar{5}) + P(\bar{5} \cap 5)$$

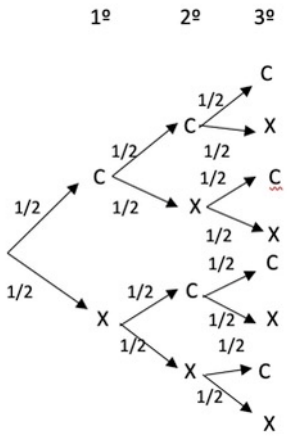
$$P(A) = P(5) \cdot P(5/5) + P(5) \cdot P(\bar{5}/5) + P(\bar{5}) \cdot P(5/\bar{5})$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

b) 11/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras.

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8



A = exactamente sacar dos caras

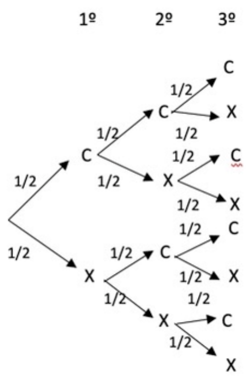
$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/C) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/X) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/C)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

c) 3/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) ½ b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8



A = sacar al menos 2 caras

$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(C/CC) + P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/CC) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/CX) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/XC)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

a) 1/2

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

O = $\{Sacar\ oro\}$, M = $\{Salir\ múltiplo\ de\ 2\}$

$P(O) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$, $P(M) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$P(O \cup M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{10} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{d)1/4}$

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es siempre correcta:

$\mathbf{a)\ P(A) + P(noA) = 1} \longrightarrow$ Siempre es correcta porque son sucesos contrarios que, al sumarlos, forman el total, 1. La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso.

$\mathbf{b)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \longrightarrow$ Solamente es correcta cuando los eventos son incompatibles, es decir, que no pueden realizarse a la vez.

c) $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \longrightarrow$ Solamente es correcta si los sucesos son independientes. La probabilidad del segundo suceso no depende de lo que se ha obtenido en el primero.

Respuesta a)

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

a) 58 b) 120 c) 96 d) 192

En primer lugar se pueden poner 4 cifras, no entra el 0, y en los 3 restantes se escogen de entre las 4 que quedan, luego, $4 \cdot V_4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$

c) 96

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:

a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080

$$P_8 = 8! = 40320$$

a) 40320

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$$

b) 10

9. **Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?**

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

Para que sean impares deben acabar en 1, 3 o 5, luego para la cifra de las unidades hay 3 cifras, para las 2 restantes tenemos para escoger 5 cifras: $3 \cdot V_5^2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

a) 60

10. **Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?**

a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

Para las unidades tenemos 3 cifras y para las 2 restantes tenemos 6 y se pueden repetir luego: $3 \cdot VR_6^2 = 3 \cdot 6^2 = 108$

b) 108

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I
1º Bachillerato
Capítulo 8: Distribuciones de Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

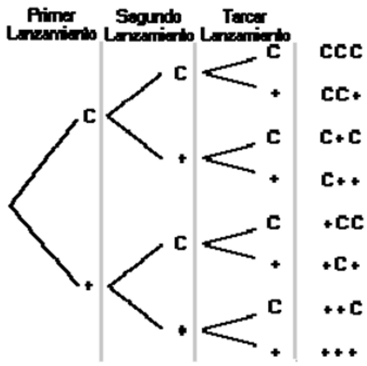
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

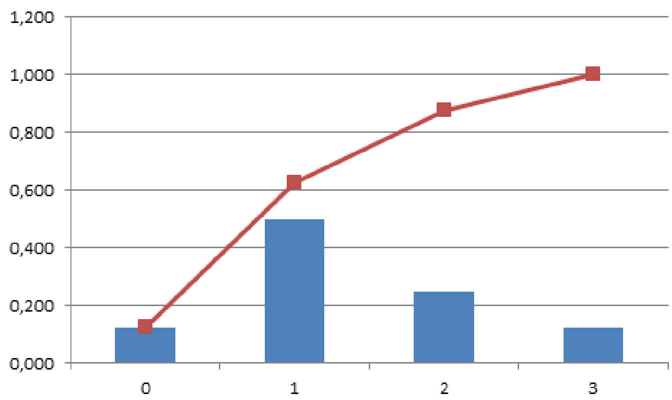
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

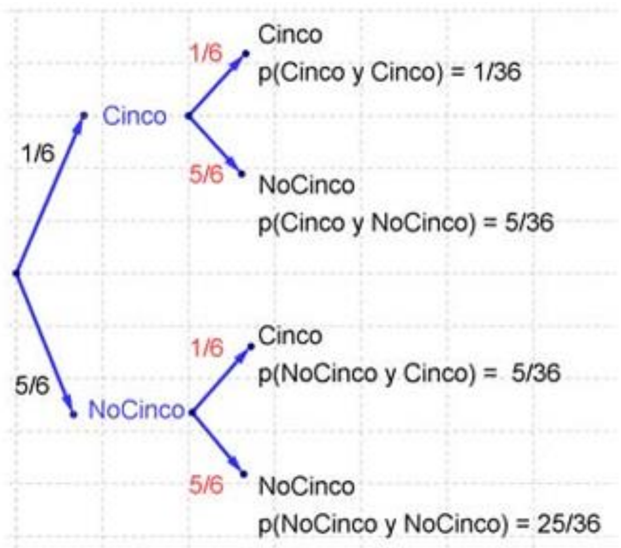
1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama en árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.



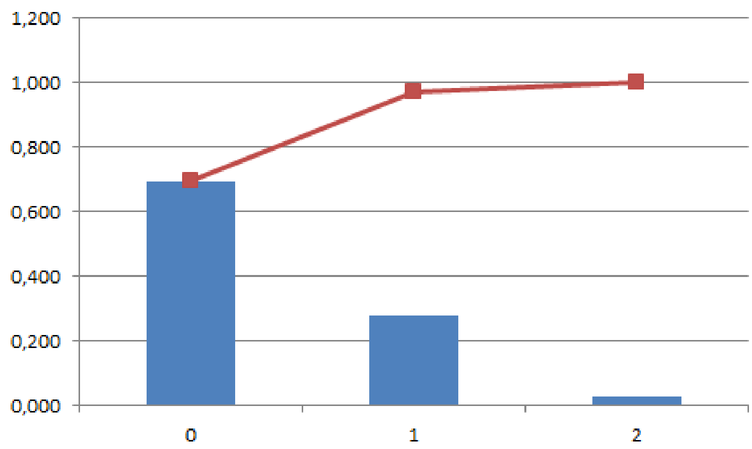
Caras	P_i	F
0	1/8	1/8
1	1/2	5/8
2	1/4	7/8
3	1/8	1



2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.



Número 5	p_i	F
0	25/36	25/36
1	10/36	35/36
2	1/36	1



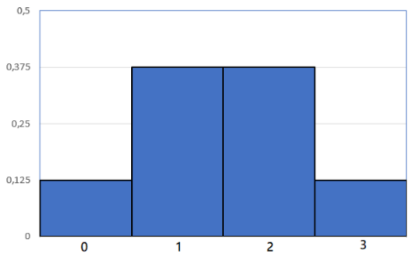
3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

caras	0	1	2	3
probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8
Ganancia	-1	0	1	3

$$E(x) = (-1)\left(\frac{1}{8}\right) + 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

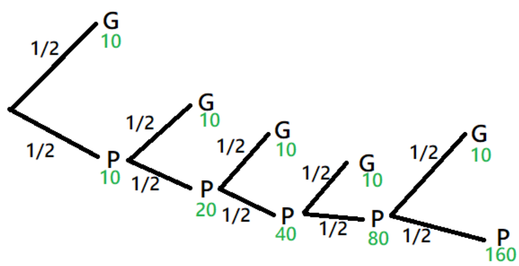
$$100 \cdot \frac{1}{2} = 50€$$

Esperamos ganar 50€



4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cruz o cara (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar. Imagina que lleva 500 €. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades. B) La distribución de probabilidad: $Ganancia(x) \rightarrow Probabilidad(x)$. C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

A)



B)

Apuesta	10	20	40	80	160	320, No puede apostar
Pierde	-10	-30	-70	-150	-310	
Gana Tiene	10	10	10	10	10	
Probabilidad	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	

C) Es un juego ventajoso para los creadores de ese juego ya que tendrán muchas ganancias. No es un juego ventajoso para nuestro jugador ya que en caso de que gane solo ganaría 10 euros y recupere el dinero que ya tenía él desde el principio.

D) $P(ganar\ 10€) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots.$

Se trata de la suma de una progresión geométrica de razón ½, $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

No puede perder los 500€ pues en la 5ª jugada ya ha perdido 310€ y no puede apostar más.

5. **Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?**

1º. Se hace una tabla:

	Sale 7	< 7	> 7
Ganancia	*3x – x = 2x*	*x – x = 0*	*x – x = 0*
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$

2º. Multiplicamos las ganancias por las probabilidades y el resultado que salga mayor es el más favorable. Sea x la cantidad apostada.

- 2·x €·6/36 = 1/3 x €
- 0 €·15/36 = 0€

La mejor estrategia es apostar por el 7 ya que su esperanza de que salgas beneficiado es superior a las otras posibilidades.

6. **Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:**

Sexo bebé	**chica**	**chico**
Probabilidad	**0,485**	**0,515**

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

1º. Lo más importante es decir a que llamas x.

X: nacer chicas, X sigue una B(10, 0,485)

2º. Luego aplicamos la fórmula de distribución binomial y obtenemos el resultado.

$$P(x = 7) = \binom{10}{7} \cdot (0{,}485)^7 \cdot (0{,}515)^3 = 0{,}1034$$

La probabilidad de que nazcan 7 niñas de los 10 bebés que van a nacer es un 0,1034.

7. **Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No calcules, soló plantea como lo calcularías).**

1º. Lo más importante es decir a que llamas X.

X: `$Hogar\ que\ utiliza\ la\ marca\ de\ tomate\ frito$´ $\rightarrow$ B(20, 0,12)

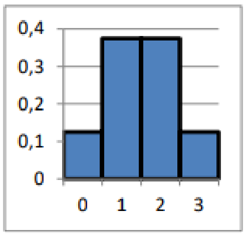
$$P(6 < x < 15) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) +$$
$$+P(x=11) + P(x=12) + P(x=13) + P(x=14) =$$
$$= \binom{20}{7} \cdot 0{,}12^7 \cdot 0{,}88^{13} + \binom{20}{8} \cdot 0{,}12^8 \cdot 0{,}88^{12} \binom{20}{9} \cdot 0{,}12^9 \cdot 0{,}88^{11} + \binom{20}{10} \cdot 0{,}12^{10} \cdot 0{,}88^{10} +$$
$$+ \binom{20}{11} \cdot 0{,}12^{11} \cdot 0{,}88^9 + \binom{20}{12} \cdot 0{,}12^{12} \cdot 0{,}88^8 + \binom{20}{13} \cdot 0{,}12^{13} \cdot 0{,}88^7 + \binom{20}{14} \cdot 0{,}12^{14} \cdot 0{,}88^6$$

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento

- Definimos la variable: $x \rightarrow sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$
- Calculamos la **media:** $\mu = np \rightarrow \mu = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- Calculamos la desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} \rightarrow \sigma = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1

- Definimos la variable: $x \rightarrow salir\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$



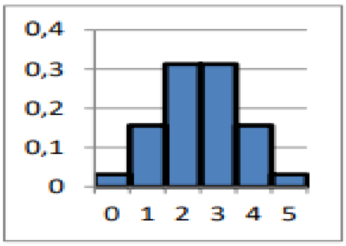
n = 3. B(3, 1/2).

a) $P(x < 1) = p(x = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

- Definimos la variable: $x \rightarrow sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$



$n = 5$. $B(5, 1/2)$.

a) $P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

b) $P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}$

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

DATOS

n = 15 k = nº de caras

p(éxito) = $\frac{1}{2}$ = p q = P(fracaso) = 1 – p = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

FÓRMULA

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

RESPUESTA:

$$P(x < 5) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) =$$
$$= \binom{15}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} +$$
$$+ \binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

DATOS

n = 15 k = número de 5s > 10 p = $\frac{1}{6}$ q = 1 – p = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

FÓRMULA

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

SOLUCIÓN:

$$P(x > 10) = P(x = 11) + P(x = 12) + P(x = 13) + P(x = 14) + P(x = 15) =$$

$$= \binom{15}{11}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{4} + \binom{15}{12}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{12}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3} + \binom{15}{13}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{13}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2} +$$
$$+ \binom{15}{14}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{14}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \binom{15}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{15}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$$

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consumo de una fábrica se ha comprobado que el 90% son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

DATOS

n=500 p = 0,9 q = 1 − p = 1 – 0,9 = 0,1 B(n , p) = B(500 , 0,9)

FÓRMULAS

Media: $\mu = n\cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n\cdot p\cdot q$ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{\sigma^2}$

RESPUESTA:

$\mu = 500\cdot 0{,}9 = 450$ $\sigma^2 = 500\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 = 45$ $\sigma = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80% de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

DATOS

n= 1000 p = 0,8 B(n , p); B(1000 , 0'8)

FÓRMULA

$E(x) = \mu = n\cdot p$

RESPUESTA:

$\mu = 1000\cdot 0{,}8 = 800$ Esperamos que se produzcan 800 curaciones.

15. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) $P(z \leq 0{,}37)$; Buscamos en la primera columna el 0,3, y el 0,07 lo buscamos en la primera fila. Obtenemos que $P(z \leq 0{,}37)$ = **0,6443**

b) $P(z < 1{,}51)$; Buscamos en la primera columna el 1,5, y el 0,01 lo buscamos en la primera fila. Obtenemos que $P(z < 1{,}51)$ = **0,9345**

c) $P(z \geq 0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq 0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0{,}1922}$

d) $P(z \leq -0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq -0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0{,}1922}$

e) $P(0{,}32 < z < 1{,}24)$; calculamos $P(0{,}32 < z < 1{,}24) = P(z < 1{,}24) - P(z < 0{,}32)$.
Buscamos en la tabla y obtenemos 0,8907 - 0,6217 = **0,269**

16. Se trata a pacientes con trastorno de sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

X: tener trastorno del sueño, X→N (290, 30)

$$P(X>300)=P\left(Z>\frac{300-290}{30}\right)=\ P(Z>0{,}33)=1-P(Z\leq 0{,}33)=1-0{,}6293=0{,}3707$$

$$\underline{0{,}3707\cdot 100=\mathbf{37{,}07\%}}$$

17. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m² con una desviación típica de 80mm/m². Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m². b) La precipitación este entre 400 y 510 mm/m². c) La precipitación sea menor de 300 mm/m².

$$\mu=450\text{ mm / m}^2;\qquad \sigma=80\text{ mm / m}^2\qquad X\sim N(450,80)$$

a) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 500)\rightarrow \mathrm{Z}\sim \mathrm{N}(0{,}1)$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\geq\frac{\mathrm{x}-\mu}{6}\right)\rightarrow P\left(Z\geq\frac{500-450}{80}\right)=P(Z\geq 0{,}625)=1-P(Z\leq 0{,}625)=$$
$$=1-0{,}7324=0{,}2676$$

b) $\mathrm{P}(400\leq \mathrm{X}\leq 510)\rightarrow Z\sim N(0{,}1)$

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{x}_1-\mu}{6}\leq \mathrm{Z}\leq\frac{\mathrm{x}_2-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{400-450}{80}\leq Z\leq\frac{510-450}{80}\right)=P(-0{,}635\leq Z\leq 0{,}75)=$$
$$=P(Z\leq 0{,}75)-P(Z\leq -0{,}625)=P(Z\leq 0{,}75)-\big(1-P(Z\geq 0{,}625)\big)=$$
$$=0{,}7734-0{,}2676=0{,}5058$$

c) $\mathrm{P}(\mathrm{x}<300)\rightarrow Z\sim N(0{,}1)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}<300)=P\left(Z<\frac{300-450}{80}\right)=P(Z<-1{,}875)=1-P(Z<1{,}875)=$$
$$=1-0{,}9693=0{,}0307$$

18. En el caso del problema anterior de una N(450, 80) determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos (μ – σ, μ + σ), (μ – 2σ, μ + 2σ), (μ – 3σ, μ + 3σ).

A) (μ – σ, μ + σ)

(450 - 80, 450 + 80) = (370, 530) ;

$$\mathrm{P}(370\leq \mathrm{Z}\leq 530)=\mathrm{P}\left(\frac{370-450}{80}\leq \mathrm{Z}\leq\frac{530-450}{80}\right)=\mathrm{P}(-1\leq \mathrm{Z}\leq 1)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 1)-\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq -1)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 1)=0{,}8413\quad;\quad \mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq -1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 1)=1-0{,}8413=0{,}1587$$

Luego P(μ – σ < x < μ + σ) = 0,8413 – 0,1587 = 0.6826

B) (μ – 2σ, μ + 2σ)

(450 - 2·80, 450 + 2·80) ; $\mathrm{P}(290\leq \mathrm{Z}\leq 610)=$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{290-450}{80}\leq \mathrm{Z}\leq\frac{610-450}{80}\right)=\mathrm{P}(-2\leq \mathrm{Z}\leq 2)=\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 2)-\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq -2)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 2)=0{,}9772\qquad \mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq -2)=1-\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leq 2)=1-0{,}9772=0{,}0228$$

Luego P(μ – 2σ < x < μ + 2σ) =0,9772 – 0,0228 = 0.9544

C) (μ – 3σ, μ + 3σ)

(450 - 3·80, 450 + 3·80) ; $\mathrm{P}(210\leq \mathrm{Z}\leq 690)=$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{210-450}{80} \le \mathrm{Z} \le \frac{690-450}{80}\right) = \mathrm{P}(-3 \le \mathrm{Z} \le 3) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 3) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -3)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \le -3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013 \qquad \mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 3) = 0{,}9987$$

Luego $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0{,}9987 - 0{,}0013 = 0.9974$

19. En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22 s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

<u>X: segundos necesarios para alcanzar la velocidad punta.</u> $\mu = 20$ $\sigma = 2$

a) $P(x = 25) \to P(24{,}5 \le x' \le 25{,}5) \to \ tipificamos \to P\left(\frac{24{,}5-20}{2} \le z \le \frac{25{,}5-20}{2}\right) =$
$P(2{,}25 \le z \le 2{,}75) = P(z \le 2{,}75) - P(z \le 2{,}25) = 0{,}9970 - 0{,}9878 = 0{,}0092$

b) $P(x \le 25) \to tipificamos \to P\left(z \le \frac{25-20}{2}\right) = P(z \le 2{,}5) = 0{,}9938$

c) $P(18 \le x \le 22) \to tipificamos \to P\left(\frac{18-20}{2} \le z \le \frac{22-20}{2}\right) = P(-1 \le z \le 1) = P(z \le 1) -$
$P(z \le -1) = P(z \le 1) - [1 - P(z \le 1)] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8413 - 0{,}1587 =$
$0{,}6826$

d) $\mathrm{P}(\mathrm{x} \ge 20) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{x} \le 20) \to \mathrm{tipificamos} \to 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{z} \le \frac{20-20}{2}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{z} \le 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $P(x \le 20) \to tipificamos \to P\left(z \le \frac{20-20}{2}\right) = P(z \le 0) = \frac{1}{2}$

20. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿y de que sea mayor de 800?

a) $x \to salir\ cara$ $\quad n = 1000$ $\quad p = \frac{1}{2}$

$$\mu = np = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{10}$$

$$x \rightsquigarrow B\left(1000, \frac{1}{2}\right) \qquad z \rightsquigarrow N\left(500, 5\sqrt{10}\right)$$

$\mathrm{P}(\mathbf{400} < \mathbf{x} < \mathbf{600}) \to \mathrm{P}(400{,}5 \le \mathrm{x}' \le 599{,}5) \to \mathrm{tipificamos}$

$$\to \mathrm{P}\left(\frac{400{,}5 - 500}{5\sqrt{10}} \le \mathrm{z} \le \frac{599{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = \mathrm{P}(-6{,}29 \le \mathrm{z} \le 6{,}29) = \mathrm{P}(\mathrm{z} \le 6{,}29) - \mathrm{P}(\mathrm{z} \le -6{,}29)$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{z} \le 6{,}29) - \mathrm{P}(\mathrm{z} \ge 6{,}29) = P(z \le 6{,}29) - [1 - P(z \le 6{,}29)] = 1 - 0 = 1$$

$$P(x > 800) = P(x' \ge 800{,}5) \to tipificamos \to P\left(z \ge \frac{800{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P(z \ge 19) =$$

$= 1 - P(z \leq 19) = 1 - 1 = 0$

21. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70% de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida sea superior a 1000 horas?

X: bombilla cuya vida media es superior a 1000 horas. $X \rightsquigarrow B(50,\ \ 0{,}7)$

$$n = 50 \qquad p = \frac{70}{100} \qquad \begin{array}{c} \mu = np = 50 \cdot \frac{70}{100} = 35 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{70}{100}\left(1 - \frac{70}{100}\right)} = \frac{\sqrt{42}}{2} \end{array}$$

a) $P(20 < X < 30) \to P(20{,}5 \leq X' \leq 29{,}5) \to tipificamos \to P\left(\frac{20{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}} \leq Z \leq \frac{29{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) =$

$= P(-4{,}47 \leq z \leq -1{,}69) = P(z \leq -1{,}69) - (z \leq -4{,}47) = P(z \geq 1{,}69) - (z \geq 4{,}47) =$

$= [1 - P(z \leq 1{,}69)] - [1 - P(z \leq 4{,}47)] = P(1 - 0{,}9545) - (1 - 1) = 0{,}0455 - 0 = 0{,}0455$

b) $P(x > 45) \to P(x' \geq 45{,}5) \to tipificamos \to P\left(x \geq \frac{45{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) = P(x \geq 3{,}24) =$

$= 1 - P(x \leq 3{,}24) = 1 - 0{,}9994 = 0{,}0006$

22. Una compañía aérea ha estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan, por lo que venden más billetes que las plazas disponibles. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas (con lo que suelen reservar hasta 270). Calcula la probabilidad de que lleguen 260 pasajeros. En 500 vuelos de dicho avión, ¿en cuántos consideras que habrá exceso de pasajeros?

X: Personas que reservan billete y no se presentan, $X \rightsquigarrow B(270,\ \ 0{,}05)$ o también,

X: Personas que reservan billete y se presentan, $X \rightsquigarrow B(270,\ \ 0{,}95)$, utilizamos ésta:

$P(X = 260) = \binom{270}{260} \cdot 0{,}95^{260} \cdot 0{,}005^{10} = 0{,}0755$

Habrá exceso de pasajeros si se presentan 261, 262, … , 270

La probabilidad pedida será la suma de las probabilidades: desde n = 261, hasta n = 270

$P(X\ lleguen\ más\ de\ 260) = \sum_{n=261}^{270} P(X = n) = \sum_{n=261}^{270} \binom{270}{n} \cdot 0{,}95^{n} \cdot 0{,}005^{270-n} \approx 0{,}13$

En 500 vuelos: 500 · 0,13 = 65,

En 500 vuelos aproximadamente habrá exceso de viajeros en 65 vuelos

23. Rehaz los cálculos de la actividad resuelta anterior para un nivel de confianza del 99 %.

Actividad a la que se refiere el ejercicio:

- *En una población de 8 millones de votantes elegimos una muestra aleatoria de* 2 000 *de la que* 700 *personas nos afirman que van a votar a un determinado partido. ¿Qué podemos asegurar sobre el número de votos que recibirá dicho partido?*

Como 700/2 000 = 0.35, una primera respuesta podría ser que 0.35 · 8 000 000 = 2 800 000 votos, pero ¿qué confianza podemos tener de ese resultado?.

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, $1 - \alpha$. Sea $\alpha = 0.05$ y $1 - \alpha = 0.95$.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media $\mu = np = 2\,000 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\,000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea:

$$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \ge 0.95$$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \le X \le \mu + k\sigma + 0.5) \ge 0.95$$

Tipificamos:

$$P(\frac{-k\sigma-0.5}{\sigma} \le Z \le \frac{+k\sigma+0.5}{\sigma}) \ge 0.95.$$

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma+0.5}{\sigma} \ge 1.96$, por lo que $k\sigma + 0.5 \ge 1.96\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que: $0.3280 \le p \le 0.3719$, es decir que la proporción de votantes debe estar entre el 33 % y el 37 %.

Respuesta al ejercicio

Como 700/2000 = 0.35, una primera respuesta podría ser que 0.35 · 8000000 = 2800000 votos, pero ¿qué confianza podemos tener de ese resultado?.

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, $1 - \alpha$. Sea $\alpha = 0.01$ y $1 - \alpha = 0.99$.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media $\mu = np = 2000 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea: $P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \ge 0.99$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$P(\mu - k\sigma - 0.5 \le X \le \mu + k\sigma + 0.5) \ge 0.99$.

Tipificamos: $P(\frac{-k\sigma-0.5}{\sigma} \le Z \le \frac{+k\sigma+0.5}{\sigma}) \ge 0.99$.

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma+0.5}{\sigma} \ge 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \ge 2.58\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que: $P(2796519 \le x \le 2803480) \ge 0.99$.

24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

600/1000 = 0.6 ; $\alpha = 0.05$ y $1 - \alpha = 0.95$

Tenemos una distribución binomial de media $\mu = n \cdot p = 1\,000 \cdot p$ y

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1\,000 \cdot p \cdot (1-p)}$

Calculamos la probabilidad de que el número de personas que cocina con gas de la muestra sea:

$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.95$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0.5) \geq 0.95$$

Tipificamos:

$$P\left(\frac{\mu - k\sigma - 0.5 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + k\sigma + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-k\sigma - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.95.$$

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma} \geq 1.96$, por lo que $k\sigma + 0.5 \geq 1.96\sigma$.

Debemos sustituir μ y α en función de p

Consideramos p = 600/1000 = 0.6 ; $\sigma = \sqrt{1\,000 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 15.49$

$k\sigma + 0.5 \geq 1.96\sigma$, $k \cdot 15.49 + 0.5 \geq 1.96 \cdot 15.49$, $15.49k = 29.86$, $k = 1.93$

Nos queda, $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.95$,

$P(1000 \cdot 0.6 - 1.93 \cdot 15.49 \leq X \leq 1000 \cdot 0.6 + 1.93 \cdot 15.49) \geq 0.95$

$P(570.11 \leq X \leq 629.9) \geq 0.95$, esto representa que $57\,\% \leq p \leq 63\%$

Aplicado a los dos millones: $0.57 \cdot 2000000 = 1\,140\,000$

$0.63 \cdot 2000000 = 1\,259\,791$

Podemos decir con un nivel de confianza del 95% que entre 1 140 000 y 1 259 791 familias utilizan cocina de gas

25. Se lanza 600 veces un dado y contamos el número de 5s. a) ¿Cuál es el intervalo simétrico respecto de la media con una probabilidad de 0,99? b) Lo mismo con una probabilidad del 0.6.

a) Consideramos que p = 1/6

Tenemos una distribución binomial de media $\mu = n \cdot p = 600 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot p \cdot (1-p)}$

Calculamos la probabilidad de que el número de 5s de la muestra sea:

$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.99$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0.5) \geq 0.99$$

Tipificamos:

$$P\left(\frac{\mu - k\sigma - 0.5 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + k\sigma + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-k\sigma - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.99.$$

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma} \geq 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma$.

Debemos sustituir μ y α en función de p

Como p = 1/6 ; $\sigma = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 9.13$

$k\sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma$, $k \cdot 9.13 + 0.5 \geq 2.58 \cdot 9.13$, $9.13k = 23.05$, $k = 2.52$

Nos queda, $P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \ge 0.95$,

$$P\left(600 \cdot \frac{1}{6} - 2.52 \cdot 9.13 \le X \le 600 \cdot \frac{1}{6} + 2.52 \cdot 9.13\right) \ge 0.99$$

$P(77 \le X \le 123) \ge 0.99$

Con un nivel de confianza del 99% podemos decir que al lanzar 600 veces un dado han salido entre 77 y 123 veces el número 5

b) Consideramos p = 1/6

Tenemos una distribución binomial de media $\mu = n \cdot p = 600 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot p \cdot (1-p)}$

Calculamos la probabilidad de que el número de 5s de la muestra sea:

$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \ge 0.60$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \le X \le \mu + k\sigma + 0.5) \ge 0.60$$

Tipificamos:

$$P\left(\frac{\mu - k\sigma - 0.5 - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu + k\sigma + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-k\sigma - 0.5}{\sigma} \le Z \le \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.60$$

1 – 0.60 = 0.40, 0.40/2 = 0.20 , 1 – 0.20 = 0.80, debemos buscar dentro de la tabla de la normal tipificada el valor más próximo a 0.80 y ver qué valor le corresponde Z, en este caso, 0.84

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma + 0.5}{\sigma} \ge 0.84$, por lo que $k\sigma + 0.5 \ge 0.84\sigma$.

Debemos sustituir μ y α en función de p

Como p = 1/6 ; $\sigma = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 9.13$

$k\sigma + 0.5 \ge 0.84\sigma$, $k \cdot 9.13 + 0.5 \ge 0.84 \cdot 9.13$, $9.13k = 7.17$, $k = 0.79$

Nos queda, $P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \ge 0.60$,

$$P\left(600 \cdot \frac{1}{6} - 0.79 \cdot 9.13 \le X \le 600 \cdot \frac{1}{6} + 0.79 \cdot 9.13\right) \ge 0.60$$

$P(92.79 \le X \le 107.2) \ge 0.99$

Con un nivel de confianza del 60% podemos decir que al lanzar 600 veces un dado han salido entre 93 y 107 veces el número 5

26. En una actividad anterior vimos que en una compañía aérea se había estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas. ¿Qué número de reservas n puede aceptar la compañía admitiendo una probabilidad del 0,02 para que el número de reservas supere al número de plazas? (Ayuda: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0.02 \Rightarrow p(x \le 260) = 1 - p(x > 260) \ge 0.98$).

Se cumple que $p(x \le 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{n}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{n-i} \ge 0.98$. Probando con $n > 260$, se cumple que el primer n en el que la probabilidad baja de 0,98 es 268:

$p(x \le 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{268}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{268-i} = 0.95\ldots$ Por tanto $n = 267$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuenta el número de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

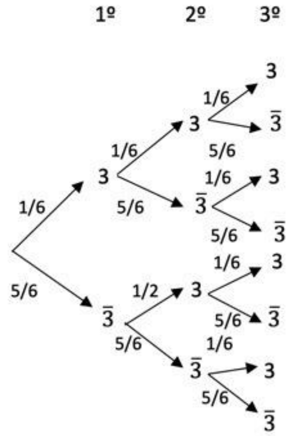
Con un diagrama de árbol podemos calcular las siguientes probabilidades:
X = número de treses que se obtiene.

X_0 (ningún tres) = $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

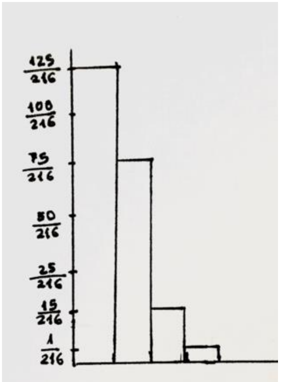
X_1(un tres) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$

X_2 (dos treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$

X_3 (tres treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$



Xi	Pi	F
0	$\frac{125}{216}$	$\frac{125}{216}$
1	$\frac{25}{72}$	$\frac{25}{27}$
2	$\frac{5}{72}$	$\frac{215}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	$\frac{216}{216}=1$
	1	



$$\bar{x}=\sum Xi\cdot Pi\Longrightarrow\bar{x}=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{25}{72}+2\cdot\frac{5}{72}+3\cdot\frac{1}{216}=0{,}5$$

$$\sigma=\sqrt{\sum Pi\cdot x_i^2-\bar{x}^2}=\sqrt{\left(0^2\cdot\frac{125}{216}+1^2\cdot\frac{25}{72}+2^2\cdot\frac{5}{72}+3^2\cdot\frac{1}{216}\right)-0{,}5^2}=0{,}6455$$

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga sacamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿En 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

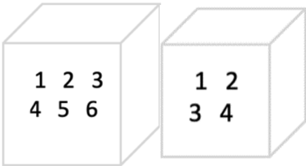
Caras	Pi	Ganancia
0	$\frac{1}{16}$	-3
1	$\frac{4}{16}$	2
2	$\frac{6}{16}$	7
3	$\frac{1}{216}$	12
4	$\frac{1}{16}$	17
	1	

- Una jugada = $-3\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{4}{16}+7\cdot\frac{6}{16}+12\cdot\frac{4}{16}+17\cdot\frac{1}{16}=7{,}3€$

- 20 jugadas = 7,3€ $\cdot\,20=146€$

- 100 jugadas =7,3€ $\cdot\,100=730€$

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, "suma de puntos". A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

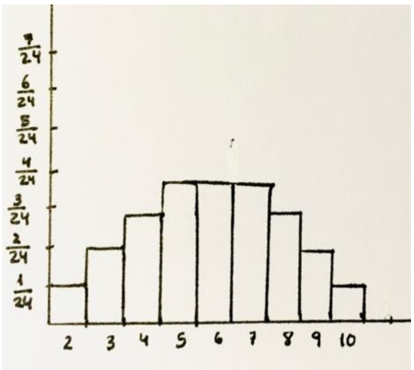
nº≤5

nº>5

Xi	Pi
2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
4	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
6	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
7	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
8	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
9	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
10	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
	1

Xi	Pi	Ganar
nº>5	$\frac{14}{24}$	10 €
nº<5	$\frac{10}{24}$	-10 €

$$E(x) = 10\cdot\frac{14}{24} + (-10)\cdot\frac{10}{24} = 1{,}66$$



No es un juego equitativo ya que la esperanza es un número distinto de cero (en este caso positivo), por lo que se espera que gane más el jugador que la banca.

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

Distribución binomial: B~(10, $\frac{1}{5}$); n= 10, p= $\frac{1}{5} = 0{,}2$, q= $\frac{4}{5} = 0{,}8$

Expresión para todas las posibilidades: $P(X = x) = \binom{10}{x}\cdot 0{,}2^x \cdot 0{,}8^{10-x}$

Probabilidad de que haya 9 o 10 con estudios superiores:

$$P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9\cdot 0{,}8^1 + \binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}\cdot 0{,}8^0 = 0{,}0000042$$

Existe un 0,0000042 de probabilidad de que, al coger 10 ciudadanos, 9 o 10 de ellos tengan estudios superiores.

5. Si p(x) es la probabilidad de obtener x éxitos en una distribución binomial B(n, p), y p(x+1) es la de obtener x+1 éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente:

$$\mathbf{P(x+1) = \frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}}$$

$$p(x+1) = \binom{n}{x+1} \cdot p^{x+1} \cdot q^{n-x-1} = \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!} \cdot p^{x+1} \cdot q^{n-x-1} =$$

$$= \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!} \cdot p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q} = \frac{n!(n-x)}{x!(x+1)(n-x)\cdot(n-x-1)!} \cdot p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q} =$$

$$\frac{n!(n-x)}{x!(x+1)(n-x)!} \cdot p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \cdot p \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{(n-x)}{(x+1)} = p(x) \cdot \frac{(n-x)p}{(x+1)q};$$

Por tanto: $p(x+1) = \frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al 2 por uno a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale. ¿Te parece un juego equitativo?

$p(ganar\ 10) = \frac{18}{37}$ $\quad p(perder\ 10) = \frac{19}{37}$

$$E(x) = 10 \cdot \frac{18}{37} - 10 \cdot \frac{19}{37} = -\frac{10}{37}$$

No es equitativo ya que al ser negativa la esperanza es favorable para la banca.

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparezca cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si sale en el segundo, 20, si en el tercero, 40…y en el n-ésimo , $\mathbf{10 \cdot 2^{n+1}}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

$p(10) = \frac{1}{2}$ $\quad p(20) = \frac{1}{4}$ $\quad p(40) = \frac{1}{8}$ $\quad p(80) = \frac{1}{16}$ $\quad p(160) = \frac{1}{32}$

$$E(x) = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{8} + 80 \cdot \frac{1}{16} + 160 \cdot \frac{1}{32} = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$$

Por tanto, si al lanzar una moneda 5 veces la ganancia media es de 25 euros, cuando se lance 10 veces será 5·10 = 50 euros.

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0,95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

Se trata de una distribución binomial $B\left(1000, \frac{1}{6}\right)$ cuyos parámetros son:

Media: $\mu = n \cdot p;\ \mu = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166{,}6$ $\qquad$ Varianza: $V = n \cdot p \cdot q = 1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 138{,}88$

Desviacion tipica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{138{,}88} = 11{,}78$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \le k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$, para k=2 :

$$P(\mu - 2\cdot\sigma \le x \le \mu + 2\cdot\sigma) \ge 0{,}95 \rightarrow P(166{,}6 - 2 \cdot 11{,}78 \le x \le 166{,}6 + 2 \cdot 11{,}78) \ge 0{,}95$$

$P(143{,}04 \le x \le 190{,}16) \ge 0{,}95$ $\quad$ El intervalo sería $(144,\ \ 191)$

Esperamos entre 144 y 191 veces salga 5 con una probabilidad superior al 0,95.

9. En una distribución binomial $B(10,\ 0,3)$ calcula $P(x=0)$, $P(x\neq 0)$, $P(x=10)$, $P(x=7)$. Determina también la media y la desviación típica.

$$B(10,\ 0{,}3) \qquad p=0{,}3 \qquad n=10$$

$$Probabilidad\ de\ éxito = p \qquad Probabilidad\ de\ fracaso = q = 1-p = 1-0{,}3 = 0{,}7$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$

$P(x=0)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{10}=0{,}02824$

$P(x\neq 0)=1-P(x=0)=1-0{,}02824=0{,}97176$

$P(x=10)=\binom{10}{10}\cdot 0{,}3^{10}\cdot 0{,}7^0=0{,}0000059$

$P(x=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 0{,}7^3=0{,}009$

$$\mu=n\cdot p=10\cdot 0{,}3=3 \qquad \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7}=1{,}449$$

10. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:
$\mathbf{a)\ P(x=0),\ \ b)\ P(x=1),\ \ c)\ P(x=2),\ \ d)\ P(x=2)}$

X: salir cara $\qquad B\left(5,\frac{1}{2}\right) \qquad p=\frac{1}{2} \qquad n=5$

$a)\ P(x=0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$b)\ P(x=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$

$c)\ P(x=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

$d)\ P(x=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

11. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes: $N(0{,}1)$

$\boldsymbol{a)P(z=0)}=0$

$\boldsymbol{b)P(z<0)}=0{,}5$

$\boldsymbol{c)P(z=1{,}82)}=0$

$\boldsymbol{d)P(z>1{,}82)}=1-P(z\leq 1{,}82)=1-0{,}7939=0{,}2061$

12. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z>4)=1-P(z<4)=1-1=0$

b) $P(z<4)=1$

c) $P(z>1)=1-P(z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

d) $P(z<1)=0{,}8413$

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(1<z<2)=P(z<2)-P(z<1)=0{,}9772-0{,}8413=0{,}1359$

b) $P(-1{,}3<z<4)=P(z<4)-\big(1-P(z<1{,}3)\big)=1-(1-0{,}9032)=0{,}9032$

c) $P(-0{,}2<z<2{,}34)=P(z<2{,}34)-\big(1-P(z<0{,}2)\big)=0{,}9904-(1-0{,}5793)=0{,}5697$

d) $P(-1<z<1)=P(z<1)-\big(1-P(z<1)\big)=0{,}08413-(1-0{,}8413)=0{,}6826$

14. Calcula en una distribución normal $N(1,2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x>4) \to Tipific. \to P\left(z>\frac{4-1}{2}\right) = P(z>1{,}5) = 1-P(z<1{,}5) = 1-0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(x<4) \to Tipificamos \to P\left(z<\frac{4-1}{2}\right) = P(z<1{,}5) = 0{,}9332$

c) $P(x>1) \to Tipificamos \to P\left(z>\frac{1-1}{2}\right) = P(z>0) = 1-P(z<0) = 1-0{,}5 = 0{,}5$

d) $P(x<1) \to Tipificamos \to P\left(z<\frac{1-1}{2}\right) = P(z<0) = 0{,}5$

15. Calcula en una distribución normal N(0,5, 0,2) las probabilidades siguientes:

a) $P(x>4)$

$$P\left(z>\frac{4-0.5}{0.2}\right) = P(z>17.5) = 1-[P(z<17.5)] = 1-1 = 0$$

b) $P(x<4)$

por el apartado a) $P\left(x<\frac{4-0.5}{0.2}\right) = 1$

c) $P(x>1)$

$$P\left(z>\frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z>2.5) = 1-P(z<2.5) = 1-0.9938 = 0.0062$$

d) $P(x<1)$

$$P\left(z<\frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z<2.5) = 0.9938$$

16. Calcula en una distribución normal $N(1\,,\frac{1}{2})$ las probabilidades siguientes:

a) $P(1<x<2)$

$$P(1<x<2) = P\left(\frac{1-1}{\frac{1}{2}}<z<\frac{2-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(0<z<2) = P(z<2)-P(z<0) =$$
$$= 0.9772-0.5 = 0.4772$$

b)) $P(-1.3<x<4)$

$$P(-1.3<x<4) = P\left(\frac{-1.3-1}{\frac{1}{2}}<z<\frac{4-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4.6<z<6) = P(z<6)-P(z<-4.6) =$$
$$= 1-[1-P(z<4.6)] = 1-(1-1) = 1-0 = 1$$

c) $P(-0.2<x<2.34)$

$$P(-0.2<x<2.34) = P\left(\frac{-0.2-1}{\frac{1}{2}}<z<\frac{2.34-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-2.4<z<2.68) =$$
$$= P(z<2.68)-P(z<-2.4) = 0.9963-[1-P(z<2.4)] = 0.9963-0.0082 = 0.9881$$

d)) $P(-1<x<3)$

$$P(-1<x<3) = P\left(\frac{-1-1}{\frac{1}{2}}<z<\frac{3-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4<z<4) = P(z<4)-P(z<-4)$$
$$= 1-[1-P(z<4)] = 1-(1-1) = 1-0 = 1$$

17. En una distribución binomial $B(10,\ 0,3)$ calcula la media, la desviación típica, y mediante aproximación a la normal determina $P(x=0), P(x\neq 0), P(x=10), P(x=7)$.

$B(10\,,0.3)$ $\quad E = n\cdot p \to E = 10\cdot 0.3 = 3 \quad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} \to \sigma = \sqrt{10\cdot 0.3\cdot 0.7} = 1.45$

$$B(10\,,0.3) \to\to N(3, 1.45)$$

a) $\mathbf{P(x=0)}$

$P(x=0)=P(-0.5\le x\le 0.5)=P\left(\frac{-0.5-3}{1.45}\le z\le\frac{0.5-3}{1.45}\right)=P(-2.14\le z\le -1.72)=$
$=P(z\le -1.72)-P(z\le -2.41)=\left[1-[P(z\le 1.72]\right]-\left[1-[P(z\le 2.41)]\right]=$
$=[1-0.9573]-[1-0.9920]=0.0347$

b) $\mathbf{P(x\neq 0)}$

$P(x\neq 0)=1-P(x=0)=1-0.0347=0.9653$

c) $\mathbf{P(x=10)}$

$P(x=10)=P(9.5\le x\le 10.5)=P\left(\frac{9.5-3}{1.45}\le z\le\frac{10.5-3}{1.45}\right)=P(4.48\le z\le 5.17)=$
$=P(z\le 5.17)-P(z\le 4.48)=0-0=0$

d) $\mathbf{P(x=7)}$

$P(x=7)=P(6.5\le x\le 7.5)=P\left(\frac{6.5-3}{1.45}\le z\le\frac{7.5-3}{1.45}\right)=P(2.41\le z\le 3.10)=$
$=P(z\le 3.10)-P(z\le 2.41)=0.9990-0.9920=0.007$

18. En una distribución binomial B(100, 0.4) calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina P(x > 40), P(x ≤ 50), P(x ≥ 50) y P(40 ≤ x ≤ 50).

μ = 100 · 0,4 = 40, σ = 4,898;

$\mathbf{P(x>40)}=\mathrm{P}\left(z\ge\frac{40{,}5-40}{4{,}898}\right)=P(z\ge 0{,}102)=1-P(z\le 0{,}102)=1-0{,}5398=0{,}4602$

$\mathbf{P(x\le 50)}=\mathrm{P}\left(z\le\frac{50{,}5-40}{4{,}898}\right)=P(z\le 2{,}14)=0{,}9838$

$\mathbf{P(x\ge 50)}=\mathrm{P}\left(z\ge\frac{49{,}5-40}{4{,}898}\right)=P(z\ge 1{,}94)=1-P(z\le 1{,}94)=1-0{,}9738=0{,}0262$

$\mathbf{P(40\le x\le 50)}=P(39{,}5\le x'\le 50{,}5)=\mathrm{P}\left(z\le\frac{50{,}5-40}{4{,}898}\right)-\mathrm{P}\left(z\le\frac{39{,}5-40}{4{,}898}\right)=$
$=P(z\le 2{,}14)-P(z\le -0{,}1)=0{,}9838-[1-P(z\le 0{,}1)]=0{,}9838-0{,}4602=0{,}5236$

19. En una distribución binomial B(1000, 0,5) calcula la media y la desviación típica, y mediante la ***aproximación a la normal determina*** $\boldsymbol{P(x<200), P(x=150), P(x<150)}$ ***y*** $\boldsymbol{P(50\le x\le 150)}$

Pasamos de distribución binomial a distribución normal:

B(1000, 0.5) → N(μ, σ) $\boldsymbol{\mu}=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}=1000\cdot 0{,}5=500$ $\mathbf{q}=1-\mathrm{p}=1-0{,}5=0{,}5$

$\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{\mu\cdot\mathrm{q}}=\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}=15{,}81$; $\mathbf{N(500,\ 15{,}81)}$

- $\mathbf{P(x<200)}=P(x'\le 199{,}5)=\mathrm{P}\left(z\le\frac{199{,}5-500}{15{,}81}\right)=P(z\le -19{,}01)=P(z\ge 19{,}01)=1-P(z\le 19{,}01)=1-1=0$

- $\mathbf{P(x=150)}=P(149{,}5\le x'\le 150{,}5)=\mathrm{P}\left(z\le\frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right)-\mathrm{P}\left(z\le\frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right)=$
$P(z\le -22{,}1)-P(z\le -22{,}17)=P(z\ge 22{,}1)-P(z\ge 22{,}17)=[1-P(z\le 22{,}1)]-[1-P(z\le 22{,}17)]=(1-1)-(1-1)=0$

- $\mathbf{P(x < 150)} = P(x' \leq 149{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \leq -22{,}17) = P(z \geq 22{,}17) = 1 - P(z \leq 22{,}17) = 1 - 1 = 0$

- $\mathbf{P(50 \leq x \leq 150)}$ = $P(49{,}5 \leq x' \leq 150{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right) - \mathrm{P}\left(z \leq \frac{49{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \leq -22{,}1) - P(z \leq -28{,}49) = P(z \geq 22{,}1) - P(z \geq 28{,}49) = [1 - P(z \leq 22{,}1)] - [1 - P(z \leq 28{,}49)] = (1-1) - (1-1) = 0$

20. En una distribución binomial *B(1000, 0,05)* calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina *P(x > 200), P(x = 200), P(x < 200)* y *P(50 ≤ x ≤ 200).*

B(1000, 0,05) → $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$; $\mu = np = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}95} = 6{,}89$; $\mathrm{N}(50,\ 6{,}89)$

- $\mathrm{P}(x > 200)$

  $$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{200{,}5 - 50}{6{,}89} = 21{,}84$$

  $\mathrm{P}(x > 200) = 1 - \mathrm{P}(x < 200) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 21{,}84) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(x = 200)$

  $\mathrm{P}(x = 200) = \mathrm{P}(199{,}5 \leq x' \leq 200{,}5)$

  $z = \frac{x' - \mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$; $z = \frac{x' - \mu}{\sigma} = \frac{200{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}84$

  $\mathrm{P}(199{,}5 \leq x' \leq 200{,}5) = \mathrm{P}(21{,}69 \leq Z \leq 21{,}84) =$

  $= \mathrm{P}(Z \leq 21{,}84) - \mathrm{P}(Z \leq 21{,}69) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(x < 200)$

  $\mathrm{P}(x < 200) = \mathrm{P}(x' \leq 199{,}5) = \mathrm{P}(Z \leq 21{,}69) = 1$

  $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$

- $P(50 \leq x \leq 200)$

  $P(50 \leq x \leq 200) = P(x \leq 200) - P(x \leq 50) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{200{,}5-50}{6{,}89}\right) - P\left(Z \leq \frac{50{,}5-50}{6{,}89}\right) =$

  $= (Z \leq 21{,}69) - P(Z \leq 0{,}07) = 1 - 0{,}5279 = 0{,}4721$

21. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

X: móvil defectuoso. $n = 10$; P(móvil defectuoso) = $p = 0{,}01$; X→$B(10,\ 0{,}01)$

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$; $\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}99} = 0{,}3146$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X=0)=\binom{10}{0}0{,}01^{0}(1-0{,}01)^{10}=0{,}9044$

$P(X=1)=\binom{10}{1}0{,}01^{1}(1-0{,}01)^{9}=0{,}09135$

$P(X=2)=\binom{10}{2}0{,}01^{2}(1-0{,}01)^{8}=0{,}00415$

$P(X\leq 2)=0{,}9044+0{,}09135+0{,}00415=0{,}9999$

$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-0{,}9999=0{,}0001$: Probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

22. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0,4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:
a) María gane alguna vez.
b) Raquel gane al menos una vez.
c) Raquel gane más de la mitad de las partidas.
d) María gane 2 partidas.

a) X: ganar María. $n=6$; P(ganar María) = $p=0{,}4$; X→$B(6,\ 0{,}4)$; $q=1-p=1-0{,}4=0{,}6$

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}046656=0{,}9533$: Probabilidad de que María gane alguna vez.

$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^{0}(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$

b) X: ganar Raquel. $n=6$; P(ganar Raquel) = $p=0{,}6$; X→B(6, 0,6)

$q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}004096=0{,}995904$:

Probabilidad de que Raquel gane alguna vez.

$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}6^{0}(1-0{,}6)^{6-0}=0{,}004096$

c) X: ganar María. (Datos apartado a)

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^{0}(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$

$P(X=1)=\binom{6}{1}0{,}4^{1}(1-0{,}4)^{6-1}=0{,}1866$

$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^{2}(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$

$P(X<3)=0{,}54424$: Probabilidad de que Raquel gane más de la mitad de las partidas.

d) X: ganar María. (Datos apartado a)

$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^{2}(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$: Probabilidad de que María gane 2 partidas.

23. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina la probabilidad de que:

a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm.

P (x > 190) = P (z > $\frac{190-180}{15}$) = P (z > $\frac{10}{15}$) = P (z > 0,$\hat{6}$) = 1 – P (z ≤ 0,$\hat{6}$) = 1 – 0,7354 = 0,2646

Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura superior a 190 cm es de 0,2646.

b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm.

P (x < 160) = P (z < $\frac{160-180}{15}$) = P (z < $\frac{-20}{15}$) = P (z < -1,$\hat{3}$) = P (z > 1,$\hat{3}$) = 1 – P (z ≤ 1,$\hat{3}$) =

= 1 – 0,982 = 0,0918

Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura menor a 160 cm es de 0,0918.

c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

P (160 ≤ x ≤ 190) = P (x ≤ 190) – P (x ≤ 160) = P (z ≤ $\frac{190-180}{15}$) – P (z ≤ $\frac{160-180}{15}$) =

=P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≤ -1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≥ 1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – [1 - P (z ≤ 1,$\hat{3}$)] =

= 0,7357 – 0,0918 = 0,6439

Solución: La proporción de personas que tienen una estatura media comprendida entre 160 cm y 190 cm es del 64,39 %.

24. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que:

a) Un opositor obtenga 120 puntos.

P (119,5 ≤ x ≤ 120,5) = P (x ≤ 120,5) – P (x ≤ 119,5) = P (z ≤ $\frac{120,5-100}{10}$) – P (z ≤ $\frac{119,5-100}{10}$) =

= P (z ≤ $\frac{20,5}{10}$) – P (z ≤ $\frac{19,5}{10}$) = P (z ≤ 2,05) – P (z ≤ 1,95) = 0,9798 – 0,9744 = 0,0054

La probabilidad de que un opositor obtenga 120 puntos es de 0,0054.

b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban?

P (x > 120) = P (z > $\frac{120-100}{10}$) = P (z > $\frac{20}{10}$) = P (z > 2) = 1 – P (z ≤ 2) = 1 – 0,9772 = 0,0228

Hallamos el porcentaje de 0,0228:

0,0228 · 100 = 2,28%

Aprueban el 2% de opositores.

c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20% de los mejores, ¿cuántos puntos debe obtener un opositor para aprobar?

Si aprueban solo el 20%, entonces el porcentaje de no aprobados es 1 – 0,2 = 0,8

Calculamos P (x ≤ k) = 0,8

Buscamos dentro de la tabla 0,8 → 0,85

Para hallar k: $\frac{k-\mu}{\sigma} = 0,85$ $\frac{k-100}{10}$ = 0,85 k – 100 = 8,5 k = 108,5

Un opositor debe obtener 108,5 puntos para aprobar.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Se lanza un dado tres veces y se anota el número de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:**

   a) $\boldsymbol{B(4,1/6)}$ **b)** $\boldsymbol{B(4,1/4)}$ **c)** $\boldsymbol{B(3,1/6)}$ **d)**$\boldsymbol{B(3,5/6)}$

$$P(A) = \frac{n^{\circ}\, casos\, favorables}{n^{\circ} casos\, posibles} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

La respuesta es la opción **c)** $\boldsymbol{B(3;1/6)}$

2. **En la distribución anterior, la media es:**

   a) $\boldsymbol{\mu = 4/6}$ **b)** $\boldsymbol{\mu = 1/2}$ **c)** $\boldsymbol{\mu = 15/6}$ **d)** $\boldsymbol{\mu = 1}$

$$\mu = n \cdot p \rightarrow \mu = 3 \cdot 1/6 = 1/2 \rightarrow \boldsymbol{\mu = 1/2}$$

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{\mu = 1/2}$

3. **Y la varianza es:**

   a) $\boldsymbol{\sigma^2 = 15/12}$ **b)** $\boldsymbol{\sigma^2 = 5/6}$ **c)** $\boldsymbol{\sigma^2 = 1/36}$ **d)** $\boldsymbol{\sigma^2 = 5/12}$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \rightarrow \sigma^2 = 3 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 5/12 \rightarrow \boldsymbol{\sigma^2 = 5/12}$$

La respuesta es la opción **d)** $\boldsymbol{5/12}$

4. **Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad** $\boldsymbol{P(z \leq 2,02)}$ **que vale:**

   a) $\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,0217}$ **b)** $\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,9772}$

   b) $\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,0228}$ **d)** $\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0,9783}$

$$P(z \leq 2{,}02) = 0.9783$$

Se busca el número dos en las filas y el 0,02 en las columnas y encontramos el valor para la probabilidad.

La respuesta es la opción **d)**$\boldsymbol{P(z \leq 2,02) = 0.9783}$

5. **Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad de** $\boldsymbol{P(0,5 < z < 1,5)}$ **es:**

   a) $\boldsymbol{0,2417}$ **b)** $\boldsymbol{0,9332}$ **c)** $\boldsymbol{0,9332}$ **d)** $\boldsymbol{0,2742}$

$$\boldsymbol{P(0,5 < z < 1,5)} \rightarrow P(z < 1{,}5) - P(z < 0{,}5) = buscamos\ en\ la\ tabla\ de\ distribución\ y$$

$$P(z < 1{,}5) - P(z < 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

$$P(0{,}5 < z < 1{,}5) = 0{,}2417$$

La respuesta es la opción **a)** $\boldsymbol{0,2417}$

6. **Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de P(x<** $\boldsymbol{\mu}$**) es:**

   a) -0,4 **b) 0,5** **c) 0,6** **d) no puede saberse**

Como la función es simétrica y su área es 1, al estar $\boldsymbol{\mu}$ en el centro, la P(x < $\boldsymbol{\mu}$) = 0,5

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{0,5}$

7. **En una distribución binomial B(10, 0,3) el valor de P(x = 0) es:**

   a) 0,11 **b) 0,028** **c) 0,00001024** **d) 0,8**

B(10, 0,3) ; P(x=0) = $\binom{10}{0} 0{,}3^0 (1 - 0{,}3)^{10-0} = 0{,}028$

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{0,028}$

8. El 2% de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0,6011 **b) 0,7635** **c) 0,9357** **d) 0,8655**

X: ser defectuosa X→B(2000, 0,02) μ = n·p = 2000·0,02 = 40

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}02 \cdot (1 - 0{,}02)} = 6{,}26$

X se aproxima a una N(μ, σ) → N(40, 6,26)

P(X<50) = P(X´≤49,5) = P(Z≤ $\frac{49{,}5-40}{6{,}26}$) = P(z≤1,52) = 0,9357

La respuesta es la opción **c) 0, 9357**

9. Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5% de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0,5987 **b) 0,4027** **c) 0,9357** **d) 0,8074**

X: ser defectuoso X→B(10, 0,05)

P(x = 0) = $\binom{10}{0}$·$0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10-0} = 0{,}5987$

La respuesta es la opción **a) 0, 5987**

10. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Jugadas 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0,0123 **b) 0,5** **c) 0,8972** **d) 0,9877**

X: ganar María X→B(4, 0,66)

P(x = 0) = $\binom{4}{0} \cdot 0{,}66^0 \cdot (1 - 0{,}66)^{4-0}$ =0,013

P(x ≥ 1) = 1 – P(x < 1) = 1 – P(x = 0) = (1 - 0,013) = 0,9877

La respuesta es la opción **d) 0, 9877**