

Matemáticas I

1º Bachillerato

Capítulo 4: Trigonometría

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrights.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alumnado 1º Bachillerato
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1) Expresa en radianes las siguientes medidas: 60° , 120° , 225° , 330° .

$$a) 60^\circ \rightarrow 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$b) 120^\circ \rightarrow 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$c) 225^\circ \rightarrow 225^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

$$d) 330^\circ \rightarrow 330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

2) Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.

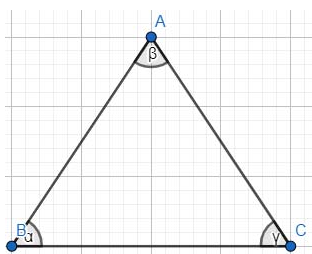
$$a) \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$$

$$b) \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

$$c) \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

$$d) \frac{10\pi}{6} \rightarrow \frac{10\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

3) ¿Cuánto suman en radianes los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?



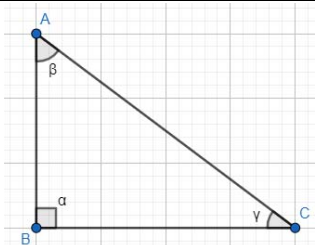
Se tiene en cuenta que $\pi + \beta + \gamma = 180^\circ$, ya que, si descomposiéramos el triángulo y pusiéramos todos los ángulos juntos, obtendríamos un ángulo llano de 180° .

Como nos piden el ángulo en radianes, hay que convertir de grados a radianes, y teniendo en cuenta que 180° es igual a π radianes, se obtiene que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a π radianes. $\rightarrow 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \pi \text{ rad}$

Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que un ángulo recto es la mitad de uno llano ($\alpha = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$), se demuestra que:

$$\rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \quad \rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2} \pi \text{ rad}$$



4) Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿Cuántas vueltas da por minuto?

DATOS

$$V=4\text{m/s} \quad R=2\text{m} \quad \rightarrow \omega = ?$$

$$V = \omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ rad/s} \quad ; \quad \text{en grados:} \quad 2 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{\pi} = 114,6^\circ/\text{s}$$

$$\text{Multiplicamos por 60:} \quad 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 60\text{s} = 120 \text{ rad} \quad 114,6^\circ \cdot 60 = 6786^\circ$$

5) Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2m. ¿Cuánto espacio hemos recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera radio de 0,5m?

DATOS

$$\rightarrow \theta = 3 \text{ rad} \quad R = 2\text{m}/0,5\text{m} \quad x = ?$$

$$x = \theta \cdot R = 3 \cdot 2 = 6\text{m}$$

$$x = \theta \cdot R = 3 \cdot 0,5 = 1,5\text{m}$$

6) Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2m. ¿Cuánto espacio hemos recorrido? ¿Y si tuviera radio 0,5m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

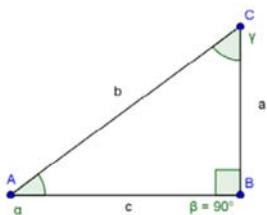
DATOS

$$\rightarrow \theta = 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad} \quad R = 2\text{m}/0,5\text{m} \quad X = ?$$

$$x = \theta \cdot R = \frac{2\pi}{9} \cdot 2 = \frac{4\pi}{9} \text{ m} \quad x = \theta \cdot R = \frac{2\pi}{9} \cdot 0,5 = \frac{\pi}{9} \text{ m}$$

Es más fácil hacerlo con radianes pues la fórmula para calcular la distancia hay que hacerla con radianes.

7. En la figura se verifica el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Utilizando dicho teorema, demuestra la primera relación fundamental.



$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{b} \quad b \cdot \text{sen}\alpha = a$$

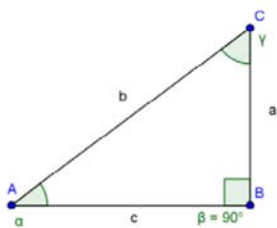
$$\text{cos}\alpha = \frac{c}{b} \quad b \cdot \text{cos}\alpha = c$$

$$\text{Sustituimos en el teorema de Pitágoras: } a^2 + c^2 = b^2$$

$$(b \cdot \text{sen}\alpha)^2 + (b \cdot \text{cos}\alpha)^2 = b^2 \rightarrow b^2 \text{sen}^2\alpha + b^2 \text{cos}^2\alpha = b^2 \rightarrow b^2(\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha) = b^2$$

$$\text{dividiendo entre } b^2 \text{ ambos miembros: } \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

8. Utilizando las definiciones de las razones trigonométricas, demuestra la segunda relación fundamental.



$$\tan \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{dividimos numerador y denominador entre b:}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

9. Utilizando la definición de las identidades, demuestra:

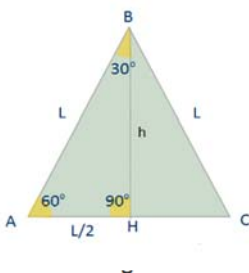
a) $1 + (\tan \alpha)^2 = (\sec \alpha)^2$

$$1 + (\tan \alpha)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

$$1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

10. Comprueba las anteriores relaciones a partir de los ángulos de 30° y 60°



$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} L}{2}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3} L}{2} : L = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{L}{2} : h = \frac{L}{2} : \frac{\sqrt{3} L}{2} = \frac{2L}{2\sqrt{3}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3} L}{2} : L = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

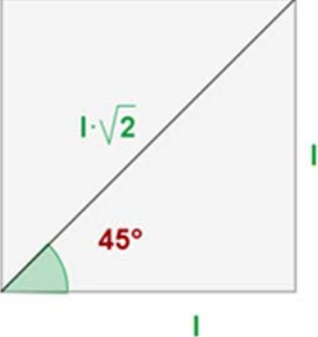
$$\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = h : \frac{L}{2} = \frac{2h}{L} = \frac{2\sqrt{3}L}{2L} : L = \frac{2\sqrt{3}L}{2L} = \sqrt{3}$$

11. Explica, a partir de lo visto en este apartado, porqué el seno y coseno de 45° son iguales, y porqué la tangente vale una unidad.

La diagonal del cuadrado es igual a la hipotenusa de los triángulos formados, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{I^2 + I^2} = \sqrt{2I^2} = I\sqrt{2}$$



$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{I}{I\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{I}{I\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

12. Copia y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

ÁNGULO	SENO	COSENO	TAN	SEC	COSEC	COTAN	CUADRANTE
135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	segundo
120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}/3$	segundo
210	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$	tercer
315	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	cuarto
390	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$	primer
3000	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}/3$	primer
-150	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$	primer

13. Utiliza la calculadora para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360° cuyo seno es de 0,6.

$$\alpha = \arcsen(0,6) = 36,87^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 36,87^\circ = 143,13^\circ$$

14. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360° cuya tangente vale 4.
 $\arctan(4) = 76^\circ$

$$\beta = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 76^\circ = 284^\circ$$

15. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360° y 720° cuyo coseno vale 0,75.

$$\arccos(0,75) = 41^\circ + 360^\circ K$$

$$\alpha = 401^\circ$$

$$\beta = 499^\circ$$

16. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 75° , 120° , 150° , 105° y 135° .

$$\operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec}30^\circ = 2$$

$$\operatorname{sen}60^\circ = \cos30^\circ$$

$$\operatorname{cosec}60^\circ = \sec30^\circ$$

$$\cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos60^\circ = \operatorname{sen}30^\circ$$

$$\sec60^\circ = \operatorname{cosec}30^\circ$$

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}60^\circ = \operatorname{cotg}30^\circ$$

$$\operatorname{cotg}60^\circ = \operatorname{tg}30^\circ$$

$$\operatorname{sen}150^\circ = \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec}150^\circ = \operatorname{cosec}30^\circ = 2$$

$$\cos150^\circ = -\cos30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec150^\circ = -\sec30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}150^\circ = -\operatorname{tg}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cotg}150^\circ = -\operatorname{cotg}30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}120^\circ = \cos30^\circ$$

$$\operatorname{cosec}120^\circ = \sec30^\circ$$

$$\cos120^\circ = -\operatorname{sen}30^\circ$$

$$\sec120^\circ = -\operatorname{cosec}30^\circ$$

$$\operatorname{tg}120^\circ = -\operatorname{cotg}30^\circ$$

$$\operatorname{cotg}120^\circ = -\operatorname{tg}30^\circ$$

$$\operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cosec}45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = 1$$

$$\operatorname{cotg}45^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen}135^\circ = \operatorname{sen}45^\circ \text{ y } \cos45^\circ$$

$$\operatorname{cosec}135^\circ = \operatorname{cosec}45^\circ \text{ y } \sec45^\circ$$

$$\cos135^\circ = -\operatorname{sen}45^\circ \text{ y } -\cos45^\circ$$

$$\sec135^\circ = -\operatorname{cosec}45^\circ \text{ y } -\sec45^\circ$$

$$\operatorname{tg}135^\circ = -\operatorname{tg}45^\circ \text{ y } -\operatorname{cotg}45^\circ$$

$$\operatorname{cotg}135^\circ = -\operatorname{tg}45^\circ \text{ y } -\operatorname{cotg}45^\circ$$

$$\operatorname{sen}75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cosec}75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\cos75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sec75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg}75^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}105^\circ = \operatorname{sen}75^\circ$$

$$\operatorname{cosec}75^\circ = \operatorname{cosec}75^\circ$$

$$\cos105^\circ = -\operatorname{sen}75^\circ$$

$$\sec75^\circ = -\operatorname{cosec}75^\circ$$

$$\operatorname{tg}105^\circ = -\operatorname{cotg}75^\circ$$

$$\operatorname{cotg}75^\circ = -\operatorname{tg}75^\circ$$

17. Comprueba que las razones trigonométricas de 90° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 30° y de 60° .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{1}{2} & \operatorname{cosec} 30^\circ &= 2 & \operatorname{sen} 60^\circ &= \cos 30^\circ & \operatorname{cosec} 60^\circ &= \sec 30^\circ \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \sec 30^\circ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} & \cos 60^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ & \sec 60^\circ &= \operatorname{cosec} 30^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{cotg} 30^\circ &= \sqrt{3} & \operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{cotg} 30^\circ \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos(30^\circ + 60^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ no existe} \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

18. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 15° .

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{6} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 - \sqrt{3})}{6} = (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

19. Comprueba que las razones trigonométricas de 30° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90° y de 60° .

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

20. Demuestra las fórmulas de ángulos complementarios usando las fórmulas de la resta. Es decir, verifica que $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ y los demás usando estas fórmulas. Observa que esta demostración que acabas es más general que la que hicimos antes, porque ahora α no tiene por qué ser agudo.

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos 90^\circ \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

21. Calcula las razones trigonométricas de 22.5° y 11.25° a partir de las razones trigonométricas de 45° .

$$\operatorname{sen} 25.5^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,707}{2}} = \sqrt{0,146} = 0,38$$

$$\operatorname{cos} 25.5^\circ = \operatorname{cos} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,707}{2}} = \sqrt{0,853} = 0,92$$

$$\operatorname{tg} 25.5^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - 0,707}{1 + 0,707}} = \sqrt{0,171} = 0,41$$

$$\operatorname{sen} 11,25^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{22,5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 22,5^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0,92}{2}} = \sqrt{0,04} = 0,2$$

$$\operatorname{cos} 11,25^\circ = \operatorname{cos} \left(\frac{22,5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 22,5^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + 0,92}{2}} = \sqrt{0,96} = 0,97$$

$$\operatorname{tg} 11,25^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{22,5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 22,5^\circ}{1 + \cos 22,5^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0,92}{1 + 0,92}} = \sqrt{0,04} = 0,2$$

22. Comprueba que las razones trigonométricas de 45° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90°

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \operatorname{cos} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \pm 1$$

23) Calcula $\cos(3x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = (\cos 3x + i \sin 3x)$$

Según la cuarta fila de la pirámide de Tartaglia: 1,3,3,1

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(i \sin x) + 3(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x i \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

De donde, igualando,

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) = (\cos^3 x - 3\cos x (1 - \cos^2 x)) = (\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

24) Calcula $\sin(4x)$ en función únicamente de $\sin(x)$ y $\cos(4x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

a) $\sin(4x)$ en función únicamente de $\sin(x)$

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos 4x + i \sin 4x)$$

Según la quinta fila de la pirámide de Tartaglia: 1,4,6,4,1

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^4 &= (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3(i \sin x) + 6(\cos x)^2(i \sin x)^2 + 4(\cos x)(i \sin x)^3 + (i \sin x)^4 = \\ &= \cos^4 x + 4\cos^3 x i \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos x i \sin^3 x + \sin^4 x = \end{aligned}$$

$$= (\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x), \text{ igualando,}$$

$$\sin(4x) = (4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x) = (4\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sin x - 4\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sin^3 x)$$

b) $\cos(4x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

Realizamos el mismo procedimiento que en el apartado a)

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= (\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 = \\ &= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \end{aligned}$$

25. Calcula sin hacer uso de la calculadora

$$\sin(75^\circ) - \sin(15^\circ)$$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en

$$\text{productos: } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin(75^\circ) - \sin(15^\circ) = 2 \cos \frac{(75^\circ + 15^\circ)}{2} \sin \frac{(75^\circ - 15^\circ)}{2} = 2 \cos \frac{(90^\circ)}{2} \sin \frac{(60^\circ)}{2} = 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

26. Utiliza las transformaciones de sumas en productos para poner en función del seno y coseno del ángulo a

a) $\sin(45^\circ + a) + \sin(45^\circ - a)$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en

$$\text{productos: } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

$$2 \sin \frac{(45^\circ + a + 45^\circ - a)}{2} \cos \frac{(45^\circ + a - (45^\circ - a))}{2} = 2 \sin \frac{(90^\circ)}{2} \cos \frac{(2a)}{2} = \sqrt{2} \cos a$$

b) $\cos(120^\circ + a) + \cos(60^\circ - a)$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{(\alpha+\beta)}{2} \cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$$2 \cos \frac{(120^\circ+a+60^\circ-a)}{2} \cos \frac{(120^\circ+a-(60^\circ-a))}{2} = 2 \cos \frac{(180^\circ)}{2} \cos \frac{(60^\circ+2a)}{2} = 2 \cos(90^\circ) \cos(30^\circ + a) = 0$$

c) $\cos(270^\circ - a) - \cos(90^\circ - a)$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$$-2 \sin \frac{(270^\circ-a+90^\circ-a)}{2} \sin \frac{(270^\circ-a-(90^\circ-a))}{2} = -2 \sin \frac{(360^\circ-2a)}{2} \sin \frac{(180^\circ)}{2} = -2 \sin(180^\circ - a) \sin 90^\circ = -2 \sin(180^\circ - a) = -2 \sin a$$

27. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica

a) $\frac{\sin(5a) + \sin(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)}$

Para resolverlo, debemos simplificar denominador y numerador, utilizando la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos

$$\frac{\sin(5a) + \sin(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)} = \frac{2 \sin \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}}{2 \cos \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}} = \frac{2 \sin \frac{(8a)}{2} \cos \frac{(2a)}{2}}{2 \cos \frac{(8a)}{2} \cos \frac{(2a)}{2}} = \frac{2 \sin 4a \cos a}{2 \cos 4a \cos a} = \operatorname{tg} 4a$$

b) $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)}$

Para resolverlo, hacemos como en el apartado a)

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \frac{-2 \sin \frac{(x-y+x+y)}{2} \sin \frac{(x-y-(x+y))}{2}}{2 \sin \frac{(x+y+x-y)}{2} \cos \frac{(x+y-(x-y))}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{(2x)}{2} \sin \frac{(-2y)}{2}}{2 \sin \frac{(2x)}{2} \cos \frac{(2y)}{2}} = \frac{-2 \sin x (-\sin y)}{2 \sin x \cos y} = \operatorname{tg} y$$

28. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica:

a) $\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(3a)}{\operatorname{cos}(5a) + \operatorname{cos}(3a)}$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{(5a+3a)}{2} \operatorname{cos} \frac{(5a-3a)}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{(5a+3a)}{2} \operatorname{cos} \frac{(5a-3a)}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{(5a+3a)}{2}}{\operatorname{cos} \frac{(5a+3a)}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 4a}{\operatorname{cos} 4a} = \operatorname{tg}(4a)$$

b) $\frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{cos}(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}{-2 \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} = \operatorname{tg} x$$

29. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $\cos(3x) = 0$

$$3x = 90^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k$$

$$3x = 270^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{3} = 90^\circ + 120^\circ k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \\ 90^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \\ 330^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$$

b) $\operatorname{tg}(2x) = -1$

$$2x = 135^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} = 67,5^\circ + 180^\circ k$$

$$2x = 315^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{315^\circ + 360^\circ k}{2} = 157,5^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} 67,5^\circ + 360^\circ k \\ 247,5^\circ + 360^\circ k \\ 157,5^\circ + 360^\circ k \\ 337,5^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$$

c) $\operatorname{sen}(4x) = -1$

$$4x = 270^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{4} = 67,5^\circ + 90^\circ k \quad x = \left\{ \begin{array}{l} 67,5^\circ + 360^\circ k \\ 157,5^\circ + 360^\circ k \\ 247,5^\circ + 360^\circ k \\ 337,5^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$$

30. Expresa en radianes las soluciones de la actividad resuelta ($\operatorname{sen}(2x) = 1/2$) y de la actividad propuesta anterior

$\operatorname{sen}(2x) = 1/2$	$x = \left\{ \begin{array}{l} 15^\circ + 360^\circ k \\ 195^\circ + 360^\circ k \\ 75^\circ + 360^\circ k \\ 255^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$	$x = \left\{ \begin{array}{l} \pi/12 + 2k\pi \\ 13\pi/12 + 2k\pi \\ 5\pi/12 + 2k\pi \\ 17\pi/12 + 2k\pi \end{array} \right.$
--------------------------------	---	--

31. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos(5x) - (\cos x) = 0$

$$\cos(5x) - (\cos x) = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{5x+x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{5x-x}{2} \right) = -2 \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(2x) = 0 ; \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$\operatorname{sen} 3x = 0 ; 3x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} = 60^\circ + 120^\circ k$$

$$\operatorname{sen} 2x = 0 ; 2x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{2} = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} 60^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 90^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \end{array} \right.$$

b) $\text{sen}(2x) - \text{sen}(4x) = 0$

$$\text{sen}(2x) - \text{sen}(4x) = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x \cdot \text{sen} x = 0$$

$$\cos 3x = 0 ; 3x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{3} = 120^\circ k$$

$$3x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} = 60^\circ + 120^\circ k$$

$$\text{sen} x = 0 ; x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \\ 60^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 360^\circ k \end{cases}$$

32. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:**a) $\text{sen}(x) + \cos(x) = 1$**

En la circunferencia goniométrica el sen y cos corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, por tanto, su suma no puede ser 1 salvo $\text{sen} x = 0$ y $\cos x = 1$ y viceversa, por tanto,

$$x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = 90^\circ + 360^\circ k$$

También, multiplicando toda la expresión por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sustituyendo, $\cos 45^\circ \cdot \text{sen} x + \text{sen} 45^\circ \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ de donde, $\text{sen}(x+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x+45^\circ = 45^\circ + 360^\circ k , x = 360^\circ k$$

$$x+45^\circ = 135^\circ + 360^\circ k , x = 90^\circ + 360^\circ k$$

b) $\text{sen}(2x) = 2 \cos(x)$

$$2 \text{sen} x \cdot \cos x = 2 \cos x ; \text{sen} x \cdot \cos x = \cos x ; \text{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (\text{sen} x - 1) = 0 ; \cos x = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen} x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 ; x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{sen} x - 1 = 0 ; \text{sen} x = 1 ; x = 90^\circ + 360^\circ k$$

c) $\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$

$$\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = -\cos(2x) - \cos(2x) = 1 ; -2\cos(2x) = 1 ; \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 120^\circ + 360^\circ k ; x = 60^\circ + 180^\circ k, \text{ de donde, } x = 360^\circ k \quad x = 240^\circ + 360^\circ k$$

$$2x = 240^\circ + 360^\circ k ; x = 120^\circ + 180^\circ k \text{ de donde, } x = 120^\circ + 360^\circ k \quad x = 300^\circ + 360^\circ k$$

33. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \operatorname{cos}^2 y = 1 \end{cases}$$

Restamos la 2ª menos la primera $\operatorname{cos}^2 y - \operatorname{sen}^2 y = -1$; $\operatorname{cos} 2y = -1$

$$2y = 180^\circ + 360^\circ k ; y = 90^\circ + 180^\circ k ; y = 90^\circ + 360^\circ k ; y = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$y = 90^\circ ; x + \operatorname{sen}^2 90^\circ = 2 ; x + 1 = 2 ; x = 1$$

$$y = 270^\circ ; x + \operatorname{sen}^2 270^\circ = 2 ; x + 1 = 2 ; x = 1$$

(1, $90^\circ + 360^\circ k$) y (1, $270^\circ + 360^\circ k$) también (1, $90^\circ + 180^\circ k$)

$$\text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones, $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y + \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$$\text{restando la 1ª menos 2ª, } \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y - \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

de donde, $\operatorname{sen}(x + y) = 1$; $x + y = 90^\circ$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{2} ; x - y = 30^\circ \text{ sumando, } 2x = 120^\circ ;$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ k ; y = 30^\circ + 360^\circ k$$

34. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$$

$$x = y + \pi \text{ sustituyendo } \operatorname{sen}(y + \pi) - \operatorname{sen} y = 0$$

$$\operatorname{sen} y \operatorname{cos} \pi + \operatorname{cos} y \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} y = 0 \quad \operatorname{sen} y(-1) + \operatorname{cos} y \cdot 0 - \operatorname{sen} y = 0 ;$$

$$-2\operatorname{sen} y = 0 ; \operatorname{sen} y = 0 ; y = 90^\circ ; y = 270^\circ$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k , y = 90^\circ + 360^\circ k ; x = 90^\circ + 360^\circ k , y = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$\text{c) } \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y ; \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \cdot \operatorname{cos} y = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cos} y \cdot \operatorname{cos} y = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 y = \frac{1}{2} ; \operatorname{cos} y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad y = 45^\circ ; y = 135^\circ ; y = 225^\circ ; y = 315^\circ$$

$$x = 45^\circ , y = 45^\circ ; x = 315^\circ , y = 135^\circ ; x = 225^\circ , y = 225^\circ ; x = 135^\circ , y = 315^\circ$$

35. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \cos(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 180^\circ, \quad x = 90^\circ, \quad y = 0^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 360^\circ, \quad x = 180^\circ, \quad y = 90^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 540^\circ, \quad x = 270^\circ, \quad y = 0^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 360^\circ, \quad x = 180^\circ, \quad y = 270^\circ$$

$$\text{b) } \begin{cases} \text{sen}(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$$

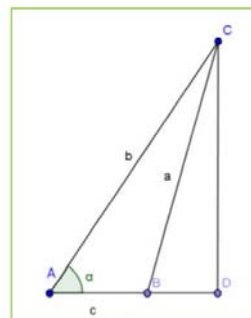
$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 90^\circ, \quad x = 45^\circ, \quad y = 15^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 150^\circ, \quad x = 75^\circ, \quad y = 45^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 210^\circ, \quad x = 105^\circ, \quad y = 315^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 270^\circ, \quad x = 135^\circ, \quad y = 345^\circ$$

36. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras, si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [Pista: los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].



Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C . Esta altura cae fuera del lado AB . Queremos calcular el lado $a = BC$. Por el teorema de Pitágoras es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB . Lo que sí tenemos es $b = AC$, $c = AB$ y el ángulo α . Sabemos que $\text{sen}(\alpha) = CD/AC \Rightarrow CD = AC \text{sen}(\alpha)$. Sabemos también $\text{cos}(\alpha) = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \text{cos}(\alpha)$. Pero, por construcción $AD = AB + BD$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AD - AB$. Recapitulando y escribiendo en función de a , b y c que son los datos originales:

$$CD = AC \text{sen}(\alpha) \Rightarrow CD = b \text{sen}(\alpha)$$

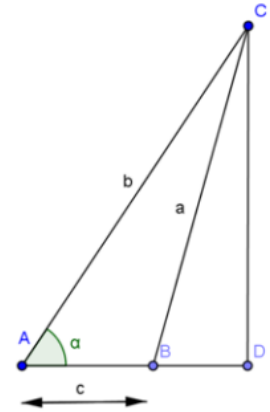
$$DB = AD - AB = b \text{cos}(\alpha) - c$$

Finalmente $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b \text{sen}(\alpha)]^2 + [b \text{cos}(\alpha) - c]^2$. Basta operar un poco:

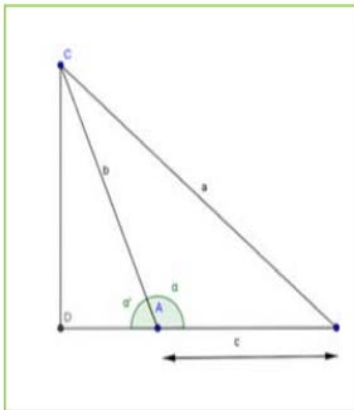
$$a^2 = [b \text{sen}(\alpha)]^2 + [b \text{cos}(\alpha) - c]^2 = b^2 \text{sen}^2(\alpha) + c^2 - 2bc \text{cos}(\alpha) + b^2 \text{cos}^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 \text{sen}^2(\alpha) + b^2 \text{cos}^2(\alpha) + c^2 - 2bc \text{cos}(\alpha) = b^2 [\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha)] + c^2 - 2bc \text{cos}(\alpha)$$

Pero $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.



37. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:



- En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α' . Se cumple que $\text{cos}(\alpha') = -\text{cos}(\alpha)$, ¿por qué?
- Considera el triángulo rectángulo DBC y pon a en función de CD y DB .
- De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b , c y α' .
- Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b , c y α' . Al sustituir el $\text{cos}(\alpha') = -\text{cos}(\alpha)$ tienes el resultado.

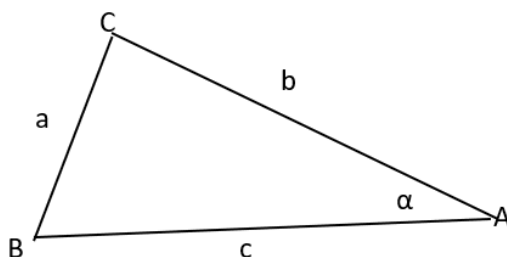
Solución: a) El coseno de α es negativo.

b) $a^2 = CD^2 + DB^2$;

c) $DB = c + b \text{cos}(\alpha')$; $CD = b \text{sen}(\alpha')$;

d) $a^2 = b^2 \text{sen}^2(\alpha') + (c + b \text{cos}(\alpha'))^2 = b^2 \text{sen}^2(\alpha') + c^2 + b^2 \text{cos}^2(\alpha') + 2cb \text{cos}(\alpha')$
 $= b^2 + c^2 + 2cb \text{cos}(\alpha') = b^2 - c^2 + 2cb \text{cos}(\alpha)$

38. Dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medida, pero debería ser muy similar.



1. Escribo la ecuación del teorema del coseno.
2. Sustituyo con los datos del problema.
3. Realizo la operación con ayuda de la calculadora

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ \rightarrow$$

$$a^2 = 27.71644455 \rightarrow a = \sqrt{27.72} = 5.265$$

39. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.

$$a = 7 \quad b = 3 \quad c = 5$$

TEOREMA DEL COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha \rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = -2b \cdot c \cdot \cos\alpha \rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b \cdot c} \rightarrow \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0.5 \rightarrow$$

$$\alpha = \arccos(0.5) = 60^\circ \rightarrow \text{En el 2º cuadrante es } 120^\circ \rightarrow A = 120^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta \rightarrow b^2 - a^2 - c^2 = -2a \cdot c \cdot \cos\beta \rightarrow$$

$$\cos\beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a \cdot c} \rightarrow \frac{3^2 - 7^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = -\frac{13}{14} \rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) = 158.21^\circ \rightarrow \text{su opuesto es } 21.79^\circ \rightarrow B = 21.79^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot a \cdot \cos\gamma \rightarrow c^2 - b^2 - a^2 = -2b \cdot a \cdot \cos\gamma \rightarrow$$

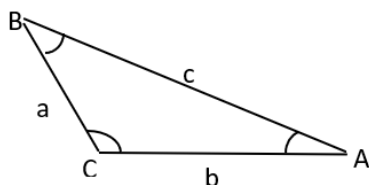
$$\cos\gamma = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b \cdot a} \rightarrow \frac{5^2 - 3^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{11}{14} \rightarrow$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{11}{14}\right) = 141.79^\circ \rightarrow \text{su opuesto es } 38.21^\circ \rightarrow C = 38.21^\circ$$

Los opuestos se sacan restando a 180 el ángulo que te dé el arccos.

40. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones. b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?



$$B = 30^\circ \quad b = 2$$

$$A = \alpha = ? \quad a = ?$$

$$C = \gamma = ? \quad c = 3$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin\gamma} \rightarrow \sin\gamma = \frac{3 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 0.75 \rightarrow$$

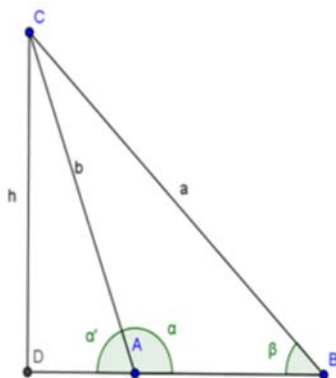
$$\gamma = \text{Arcsen}(0.75) = 48.59^\circ \rightarrow \text{su opuesto} \rightarrow 90 - 48.59^\circ = 41.41^\circ = \alpha$$

TEOREMA DEL COSENO:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \rightarrow a^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 41.41^\circ \rightarrow$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

41. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras, si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [Pista: hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos].



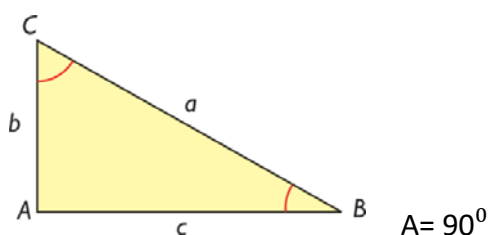
1. Sabemos las ecuaciones por definición.
2. Despejamos 'h' en las dos ecuaciones.
3. Igualamos las ecuaciones que obtenemos y operamos con ellas hasta obtener el resultado final.

$$\text{sen}(\alpha') = \frac{h}{b} ; \text{sen}(\beta') = \frac{h}{a} \rightarrow h = b \text{sen}(\alpha') ; h = a \text{sen}(\beta') \rightarrow$$

$$b \text{sen}(\alpha') = a \text{sen}(\beta') \rightarrow \frac{a}{\text{sen}(\alpha')} = \frac{b}{\text{sen}(\beta')} \rightarrow$$

$$\text{sen}(\alpha') = \text{sen}(\beta')$$

42. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $\text{sen}90^\circ = 1$.



$$\text{sen}B = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}B} ; \text{sen}C = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{c}{\text{sen}C} ; \text{sen}90^\circ = 1 \rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

43. Como antes, dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a

	$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} ; \quad \frac{a}{\text{sen}40^\circ} = \frac{5}{\text{sen}B} = \frac{8}{\text{sen}C}$ $\frac{a}{\text{sen}40^\circ} = \frac{5}{\text{sen}B} ; \quad \frac{5}{\text{sen}B} = \frac{8}{\text{sen}C} ; \quad B + C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
--	--

$$a \cdot \text{sen}B = 5 \cdot 0,64 ; \quad 5 \cdot \text{sen}C = 8 \cdot \text{sen}B ; \quad B + C = 140^\circ$$

$$C = 140^\circ - B \quad \text{sustituimos}$$

$$a \cdot \text{sen}B = 5 \cdot 0,64 ; \quad 5 \cdot \text{sen}(140^\circ - B) = 8 \cdot \text{sen}B$$

$$5 \cdot \operatorname{sen}(140^\circ - B) = 8 \cdot \operatorname{sen}B ; \quad 5 \cdot (\operatorname{sen}140^\circ \cos B - \cos 140^\circ \operatorname{sen}B) = 8 \cdot \operatorname{sen}B$$

$$5 \cdot (0,64 \cdot \cos B - (-0,77) \cdot \operatorname{sen}B) = 8 \cdot \operatorname{sen}B ; \quad 3,2 \cos B + 3,85 \operatorname{sen}B = 8 \cdot \operatorname{sen}B$$

$$\operatorname{sen}B = \frac{3,2}{a} ; \quad 3,2 \cos B - 4,15 \operatorname{sen}B = 0 \quad 3,2 \cos B - 4,15 \frac{3,2}{a} = 0$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} ; \quad 3,2 \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} - 4,15 \frac{3,2}{a} = 0$$

$$3,2 \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} = 4,15 \cdot \frac{3,2}{a} \quad 10,24 \left(1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2\right) = \left(4,15 \cdot \frac{3,2}{a}\right)^2$$

$$10,24 - 10,24 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 = 17,22 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 ; \quad 10,24 = 27,46 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 ; \quad \frac{3,2}{a} = \sqrt{\frac{10,24}{27,46}} = 0,61$$

$$a = \frac{3,2}{0,61} = 5,25 ; \quad \operatorname{sen}B = \frac{3,2}{5,25} = 0,61 ; \quad B = \operatorname{arcsen}0,61 = 37,59^\circ$$

$$C = 140^\circ - 37,59^\circ = 102,41^\circ$$

Con el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ = 27,72 \rightarrow a = \sqrt{27,72} = 5,26$$

44. Un triángulo tiene dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.

Si $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$ $C = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$ el lado $c = 8$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} ; \quad \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen}80^\circ} \rightarrow b = \frac{8 \cdot \operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} \rightarrow b = 7,04 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}40^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen}80^\circ} \rightarrow a = \frac{8 \cdot \operatorname{sen}40^\circ}{\operatorname{sen}80^\circ} \rightarrow a = 5,22 \text{ cm}$$

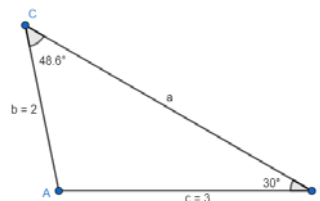
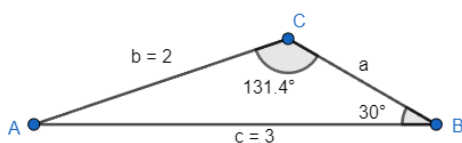
45. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos.

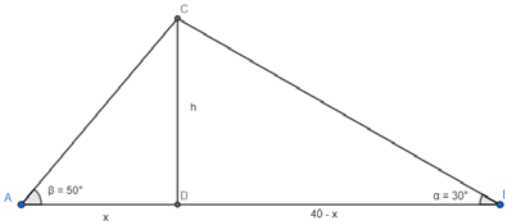
b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?

$$AB \dots c = 3 ; \quad AC \dots b = 2 ; \quad \beta = 30^\circ ; \quad \frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \rightarrow \frac{2}{\operatorname{sen}30^\circ} = \frac{3}{\operatorname{sen}C} \rightarrow \operatorname{sen}C = \frac{3 \cdot \operatorname{sen}30^\circ}{2} \rightarrow \operatorname{sen}C = 0,75 \text{ cm} \rightarrow C = 48,59^\circ ; C = 131,41^\circ$$



46. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?



$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{40-x} \quad ; \quad \operatorname{tg}50^\circ = \frac{h}{x}$$

$$0,58 = \frac{h}{40-x} \quad ; \quad 1,19 = \frac{h}{x}$$

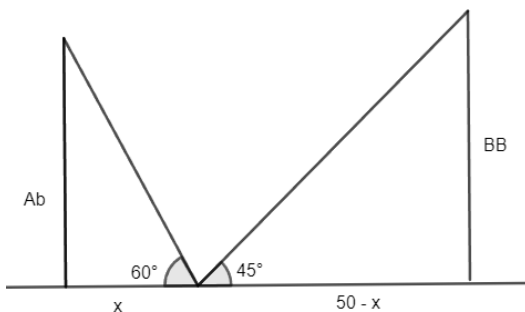
$$0,58(40 - x) = h \quad ; \quad 1,19x = h$$

$$23,2 - 0,58x = h \quad ; \quad 23,2 - 0,58x = 1,19x$$

$$1,77x = 23,2 \quad ; \quad x = \frac{23,2}{1,77} = 13,1\text{m}$$

$$1,19x = h \quad ; \quad h = 1,19 \cdot 13,1 = 15,6\text{m}$$

47. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divide el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60º, y el Big Ben con un ángulo de 45º. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?



$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad \operatorname{tg}60^\circ = \frac{Ab}{x}$$

$$1 = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad 1,73 = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{1,73} \quad ; \quad x = 17,34$$

$$1 = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad 1 = \frac{BB}{50-17,34} \quad ; \quad BB = 32,66$$

El Big Ben mide 32,66 metros. Se encuentra a 17,34 m de la Abadía y 32,66 m del Big Ben.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ hallar las restantes razones trigonométricas del ángulo

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1; \quad \sin^2 a + \frac{5}{9} = 1; \quad \sin^2 a = 1 - \frac{5}{9}; \quad \sin a = \sqrt{\frac{4}{9}} \rightarrow \sin a = \frac{2}{3} \quad ; \quad \sin a = -\frac{2}{3}$$

Nos da dos resultados (del primer y cuarto cuadrante)

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}; \quad \tan a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Volvemos a calcular para el cuarto cuadrante

$$\tan a = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}; \quad \tan a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin a = \frac{2}{3}; \quad \tan a = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{si } \alpha \in I \text{ cuadrante}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin a = -\frac{2}{3}; \quad \tan a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{si } \alpha \in IV \text{ cuadrante}$$

2. Calcula sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a) Sabiendo que $\sin a = 0,2$ es del segundo cuadrante

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$0,2^2 + \cos^2 a = 1; \quad 0,04 + \cos^2 a = 1; \quad \cos a = \sqrt{0,96}; \quad \cos a = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{0,2}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}; \quad \tan a = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} \quad \tan a = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{0,2}; \quad \csc a = 5$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}; \quad \sec a = \frac{-5\sqrt{6}}{12}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a$

$$\cot a = \frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{6}}}; \quad \cot a = -2\sqrt{6}$$

$$\cos a = -\frac{2\sqrt{6}}{5}; \quad \sin a = \frac{1}{5}; \quad \tan a = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\csc a = 5; \quad \sec a = -\frac{5\sqrt{6}}{12}; \quad \cot a = -2\sqrt{6}$$

b) Sabiendo que $\cos a = -0,3$ es del tercer cuadrante

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + (-0,3)^2 = 1 \quad ; \quad \sin^2 a + 0,09 = 1 \quad ; \quad \sin a = \sqrt{0,91} \quad ; \quad \sin a = -\frac{\sqrt{91}}{10}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\frac{\sin a}{\cos a}$

$$\tan a = \frac{-\frac{\sqrt{91}}{10}}{-\frac{3}{10}} \quad ; \quad \tan a = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1/\sin a$

$$\csc a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{91}}{10}} \quad \csc a = -10\sqrt{91}/91$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1/\cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-0,3} \quad ; \quad \sec a = -\frac{10}{3}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1/\tan a$

$$\cot a = \frac{1}{\frac{\sqrt{91}}{3}} \quad ; \quad \cot a = \frac{3\sqrt{91}}{91}$$

$$\cos a = -0,3 \quad ; \quad \sin a = -\frac{\sqrt{91}}{10} \quad ; \quad \tan a = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

$$\csc a = -10\sqrt{91}/91 \quad ; \quad \sec a = -\frac{10}{3} \quad ; \quad \cot a = \frac{3\sqrt{91}}{91}$$

c) Sabiendo que $\tan a = 2$ es del primer cuadrante

Para calcular el coseno, utilizamos $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$$1 + 2^2 = \sec^2 a \quad ; \quad 5 = \sec^2 a \quad ; \quad \sqrt{5} = \sec a \quad ; \quad \sqrt{5} = \frac{1}{\cos a} \quad ; \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \quad ; \quad \sin^2 a + \frac{1}{5} = 1 \quad ; \quad \sin a = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad ; \quad \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1/\sin a$

$$\csc a = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \quad ; \quad \csc a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1/\cos a$

$$\sec a = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad ; \quad \sec a = \sqrt{5}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1/\tan a \quad ; \quad \cot a = \frac{1}{2}$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \tan a = 2$$

$$\csc a = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \sec a = \sqrt{5} \quad ; \quad \cot a = \frac{1}{2}$$

3. Sabiendo que $\sin a = -\frac{4}{5}$ (tercer cuadrante) halla el coseno y la tangente

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \quad ; \quad \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \quad ; \quad \cos a = \sqrt{\frac{9}{25}} \quad ; \quad \cos a = -\frac{3}{5}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\frac{\sin a}{\cos a}$

$$\tan a = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \quad ; \quad \tan a = \frac{4}{3}$$

4. Sabiendo que $\tan x = \frac{1}{3}$ (primer cuadrante) calcula:

a) $\tan(180^\circ - x) = -\tan(x) = -\frac{1}{3}$

b) $\sin(180^\circ + x)$

Para calcular el coseno, utilizamos $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{10}{9} = \sec^2 x \quad ; \quad \sqrt{\frac{10}{9}} = \sec x \quad ; \quad \frac{\sqrt{10}}{3} = \sec x \quad ; \quad \cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1 \quad \sin^2 x + \frac{9}{10} = 1 \quad \sin x = \sqrt{0,1} \quad ; \quad \sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin(180^\circ + x) = -\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

c) $\cos(360^\circ - x)$

$$\cos(360^\circ - x) = \cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

5. Sabiendo que $\sin a = 0,5$ ($a \in II$ c) calcula las otras razones

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$0,5^2 + \cos^2 a = 1 \quad 0,25 + \cos^2 a = 1 \quad \cos a = \sqrt{0,75} \quad \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \tan a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{0,5} \quad \csc a = 2$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \sec a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a$

$$\cot a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \cot a = -\sqrt{3}$$

$$\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin a = 0,5 \quad ; \quad \tan a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc a = 2 \quad ; \quad \sec a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \cot a = -\sqrt{3}$$

6. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $3 \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \quad ; \quad 3 - 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$$

$$3 - 2\cos^2 x + \cos x = 0 \quad \text{Ecuación de segundo grado}$$

$$a = -2; \quad b = 1; \quad c = 3$$

Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ calculamos

$$\cos x = -1; \quad \cos x = \frac{3}{2} \quad \text{Hacemos el Arco coseno comprobamos en ambos resultados}$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ K \quad ; \quad \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow x \text{ no existe}$$

$$\text{b) } \tan x = \sqrt{2} \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} \cos x$$

$$\text{Usamos } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \sqrt{2} (\cos x)^2$$

$$\sin x = \sqrt{2}(1 - \sin^2 x)$$

$$\text{Usamos } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x ; \sin x - \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin^2 x = 0 ; \text{ Ordenamos y usamos } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = \sqrt{2}; b = 1; c = -\sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin x = -\sqrt{2} \quad \text{Hacemos el Arco seno comprobamos en ambos resultados}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ K \quad \text{y} \quad x = 135^\circ + 360^\circ K$$

$$\sin x = -\sqrt{2} \rightarrow x \text{ no existe}$$

7. Demuestra las siguientes identidades

$$\text{a) } (\operatorname{tg} x) \cdot (\cos x) = \operatorname{sen} x$$

$$(\operatorname{tg} x) \cdot (\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$$

$$\text{b) } \operatorname{cotg}^2 x - 1 = \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x - 1$$

$$\text{c) } \operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sec}^2 x$$

$$\text{d) } 1 + \cos(2x) = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sec}^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x =$$

$$= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos(2x).$$

$$\text{e) } \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

8. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{cosec} a \cdot \cos(a - b) = \operatorname{cosec} b$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cosec} a ; \quad \cos(a - b) = \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{cosec} a \cdot \cos(a - b) = \operatorname{sen} a (\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{sen} b) + \operatorname{cosec} a (\operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{cosec} b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{sen} b + \operatorname{cosec}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b + \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b + \operatorname{cosec}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b = \operatorname{cosec} b (\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{cosec}^2 a) = \operatorname{cosec} b \cdot 1 = \operatorname{cosec} b$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{\cos x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\cos 2a - 3\operatorname{sen}a + 1 = 0$

$$\cos 2a - 3\operatorname{sen}a + 1 = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a - 3\operatorname{sen}a + \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 0$$

$$2\cos^2 a - 3\operatorname{sen}a = 0 \rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 a) - 3\operatorname{sen}a = 0 \rightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2 a - 3\operatorname{sen}a = 0$$

$$\operatorname{sen}a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)2}}{2(-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4}; \operatorname{sen}a = -2, \operatorname{sen}a = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}a = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 30^\circ + 360^\circ k; a_2 = 150^\circ + 360^\circ k$$

b) $\operatorname{sen}x + \cos x = 0$

$$\operatorname{sen}x + \cos x = 0; \operatorname{sen}x = -\cos x \quad x = 135^\circ + 360^\circ k; x = 315^\circ + 360^\circ k$$

10. Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cot^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cot^2 x} \rightarrow \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

b) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

11. Demuestra que son ciertas

a) $\frac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

$$\frac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{2\operatorname{sen}x}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}} = \frac{2\operatorname{sen}x}{\frac{2\operatorname{sen}x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{2\operatorname{sen}x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen}x \cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

b) $\frac{1 - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} &= \frac{(1 + \operatorname{sen}^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{(1 + \operatorname{sen}^2 x)\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{sen}^2 x = 1 + (1 - \cos^2 x) = \\ &= 1 + 1 - \cos^2 x = 2 - \cos^2 x \end{aligned}$$

12. Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \operatorname{tg}^2(\alpha) \quad ; \quad \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \frac{\sec^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \operatorname{tg}^2(\alpha)$

b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1 + \operatorname{sen}(\alpha)} = 1 - \operatorname{sen}(\alpha)$

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} = \frac{(1-\sin^2\alpha)}{1+\sin(\alpha)} = \frac{(1-\sin(\alpha))(1+\sin(\alpha))}{(1+\sin(\alpha))} = 1 - \sin(\alpha)$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos x \cdot \cos 2x + \cos^2 x = 0$

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

a) $\cos x \cdot \cos 2x + \cos^2 x = 0$; $\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^2 x = 0$; $\cos^3 x - \cos x \sin^2 x + \cos^2 x = 0$;

$$\cos^3 x - \cos x(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x = 0$$

$$2\cos^3 x - \cos x + \cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \quad ; \quad \cos x = 0 \quad ; \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0, \quad x = 90^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad ; \quad \cos x = -1 \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1, \quad x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 60^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 300^\circ + 360^\circ k$$

b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$; $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$; $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$; $\operatorname{sen} x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$$\operatorname{sen} x = 0, \quad x = 0^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$1 - 2\cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = 45^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 315^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = 135^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 225^\circ + 360^\circ k$$

14. Demuestra que son ciertas las igualdades:

a) $\cos(\alpha - \beta) - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\operatorname{sec} \beta}$ b) $\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{cosec} \alpha = 0$

a) $\cos(\alpha - \beta) - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{cosec} \alpha =$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \frac{1}{\cos \beta} = \cos \alpha \frac{1}{\operatorname{sec} \beta} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sec} \beta}$$

b) $\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{sen}(270^\circ) \operatorname{cosec} \alpha - \cos(270^\circ) \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha =$

$$= (-1) \operatorname{cosec} \alpha - 0 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = 0$$

15. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\alpha + 1 = 4\cos \alpha$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\cos 2\alpha + 1 = 4\cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) + 1 - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow$$

$$2\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow 2\cos \alpha(\cos \alpha - 2) = 0 \rightarrow \cos \alpha - 2 = 0, \text{ no es posible}$$

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha = 90^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad \alpha = 270^\circ + 360^\circ k$$

16. Resuelve la ecuación trigonométrica $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x = 1$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x = 1 \rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + \cos^2 x = 1 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$$

$$3\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}} ; x = 54,74^\circ + 360^\circ k ; x = 305,26^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}} ; x = 125,26^\circ + 360^\circ k ; x = 234,74^\circ + 360^\circ k$$

17. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2x + \cos x = 0,2$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\cos 2x + \cos x = 0,2 \rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0,2 \rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0,2 \rightarrow$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1,2 = 0 ; \cos x = 0,5639 ; \cos x = -1,063 \text{ no válida}$$

$$\cos x = 0,5639 \quad x = 55,67^\circ + 360^\circ k ; x = 304,33^\circ + 360^\circ k$$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$

$$\operatorname{sen}(x) \cdot (\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$$

Solución1: $\operatorname{sen}(x) = 0$

Solución2: $\operatorname{sen}(x) = 1$

$$\operatorname{arcsen} 0 = 0^\circ \rightarrow 360^\circ k$$

$$\operatorname{arcsen} 1 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$$

b) $\cos(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$

$$\cos(x) + 1 - \cos^2(x) = 1$$

$$-\cos^2(x) + \cos(x) = 0 \rightarrow \cos(x) \cdot (-\cos(x) + 1) = 0$$

Solución 1: $\operatorname{arc} \cos 0 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

Solución 2: $\operatorname{arc} \cos 1 = 0^\circ \rightarrow 360^\circ k$

c) $3\operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{sec}^2(x)$

$$3\operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{sec}^2(x) \rightarrow \frac{3 \cdot \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \rightarrow \frac{3 \cdot (1 - \cos^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$3 \cdot (1 - \cos^2(x)) = \cos(x) \rightarrow -3 \cdot \cos^2(x) - \cos(x) + 3 = 0$$

Solución 1: $\operatorname{Cos}(x) = 1,17$ No existe

Solución 2: $\operatorname{Cos}(x) = -0,83 \rightarrow \operatorname{arc} \cos(-0,83) = 146^\circ \rightarrow 146^\circ + 360^\circ k$

$$180^\circ - 146^\circ = 34^\circ \rightarrow 34^\circ + 360^\circ k$$

d) $\operatorname{sen}(2x) = 0,5$

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} 30^\circ \rightarrow 2x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 15^\circ + 180^\circ k$$

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} 150^\circ \rightarrow 2x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 180^\circ k$$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $x + \operatorname{sen}^2 y = 2$

$x + \operatorname{cos}^2 y = 1$

$x + 1 - \operatorname{cos}^2(y) = 2 \rightarrow \operatorname{cos}^2(y) = x - 1$

$x + \operatorname{cos}^2 y = 1$ sustituimos lo anterior en esta ecuación

$x + x - 1 = 1 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

1ª ec: $1 + 1 - \operatorname{cos}^2 y = 2 \rightarrow -\operatorname{cos}^2 y = 0 \rightarrow y = -\operatorname{arc} \operatorname{cos} 0 = -90^\circ \rightarrow y = -90^\circ + 360^\circ k$

2ª ec: $1 + \operatorname{cos}^2 y = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 y = 0 \rightarrow y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} 0 = 90^\circ \rightarrow y = 90^\circ + 360^\circ k$

$x + 1 - (1 - x) = 2 \rightarrow x + 1 - 1 + x = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

b) $\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4}$ sumamos y restamos

$\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) + \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$; $\operatorname{sen}(x + y) = 1$; $x + y = 90^\circ$

$\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) - \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$; $\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{2}$; $x - y = 30^\circ, x - y = 150^\circ$

Sumamos y si $2x = 120^\circ$, $x = 60^\circ$ y si $2x = 240^\circ$, $x = 120^\circ$ por tanto,

$x = 60^\circ + 360^\circ k$, $y = 30^\circ + 360^\circ k$; $x = 120^\circ + 360^\circ k$, $y = -30^\circ + 360^\circ k$

c) $\operatorname{cos}(x) + \operatorname{cos}(y) = 1$

$\operatorname{cos}(x + y) = 1$

$x + y = 0 \rightarrow y = -x$

$\operatorname{cos}(x) + \operatorname{cos}(-x) = 1 \rightarrow \operatorname{cos}(x) + \operatorname{cos}(x) = 1 \rightarrow 2\operatorname{cos}(x) = 1 \rightarrow \operatorname{cos}(x) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{1}{2} = 60^\circ \rightarrow 60^\circ + 360^\circ k$

$\operatorname{cos} 60^\circ + \operatorname{cos} y = 1 \rightarrow \operatorname{cos} y = 1 - 0,5 \rightarrow \operatorname{cos} y = 0,5 \rightarrow \operatorname{arc} \operatorname{cos} 0,5 = 60^\circ \rightarrow 60^\circ + 360^\circ k$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}(45^\circ + 2x) = \operatorname{sen} 60^\circ \rightarrow 45^\circ + 2x = 60^\circ \rightarrow 2x = 15^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 7,5^\circ + 180^\circ k$

$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \rightarrow \operatorname{sen}(45^\circ + 2x) = \operatorname{sen} 120^\circ \rightarrow 45^\circ + 2x = 120^\circ \rightarrow 2x = 75^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 37,5^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(30^\circ) = 0$

$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 30^\circ \rightarrow 3x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 10^\circ + 120^\circ k$

$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \rightarrow 3x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 50^\circ + 120^\circ k$

c) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{cos}(x)$

$2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(x) = 2 \cdot \operatorname{cos}(x) \rightarrow \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(x) - \operatorname{cos}(x) = 0 \rightarrow \operatorname{cos}(x) \cdot (\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$

Solución 1: $\operatorname{cos}(x) = 0 \rightarrow \operatorname{arc} \operatorname{cos} 0 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

Solución 2: $\operatorname{sen}(x) = 1 \rightarrow \operatorname{arc} \operatorname{sen} 1 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

21. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\operatorname{sen}(x) + \operatorname{cos}(x))^2 + (\operatorname{sen}(x) - \operatorname{cos}(x))^2$

$(\operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(x) + \operatorname{cos}^2(x)) + (\operatorname{sen}^2(x) - 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(x) + \operatorname{cos}^2(x)) =$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \operatorname{cos}^2(x) = 2 \cdot (\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x)) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \operatorname{cos}2a)}$$

$$\frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a))} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{1 + \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{1 + \operatorname{cos}^2(a) - 1 + \operatorname{cos}^2(a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)} = 1$$

$$\text{c) } \frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot (1 - \operatorname{sen}^2(x))}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

$$\text{d) } \frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{tg}(2a) - \operatorname{tg}(a)}$$

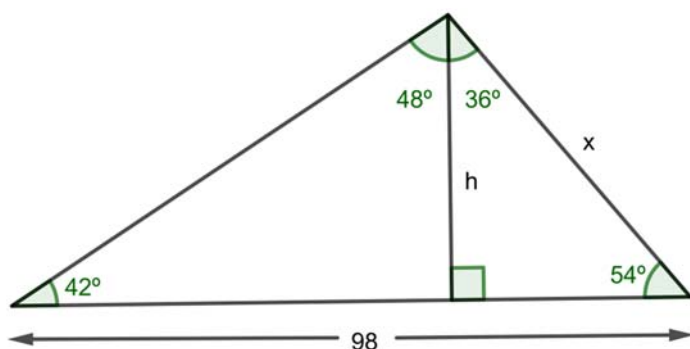
$$\frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{\operatorname{sen}(2a)}{\operatorname{cos}(a)} - \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)} - \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a) \cdot (\operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}(a))}{\operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}}} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}(a)} = \frac{\operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}^2(a)}$$

$$\text{e) } \frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{cos}(x+y) - \operatorname{cos}(x-y)}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) - \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)) - (\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) + \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))}{(\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)) - (\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))} = \frac{-2 \cdot (\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))}{-2 \cdot (\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))} = \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{cotg}(x)$$

22. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 metros. Calcula la altura de la antena.

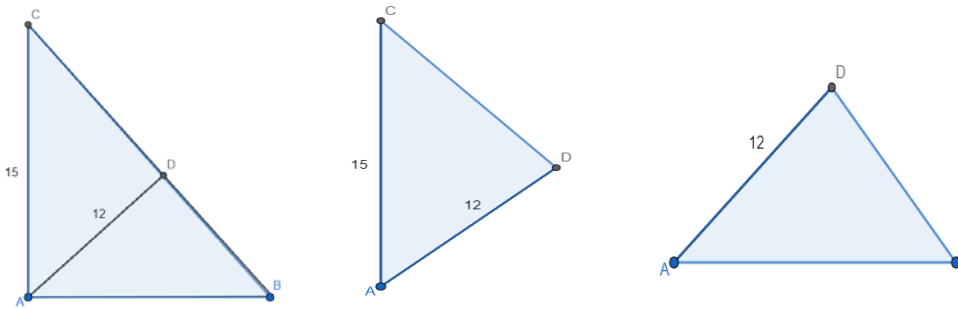


$$48 + 36 = 84$$

$$\frac{\sin(84)}{98} = \frac{\sin(42)}{x}; x = \frac{98 \cdot \sin(42)}{\sin(84)} = 65,94; h = 65,94 \cdot \sin(54) = 53,3 \text{ m}$$

La altura mide 53,3 m

23. Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto AC = 15cm. y la altura relativa a la hipotenusa AD = 12cm.



En el triángulo CAD: $\operatorname{sen} C = \frac{12}{15} = 0,8$; $C = 53,13^\circ$ como $D = 90^\circ$; ángulo CAD = $36,87^\circ$

$$\operatorname{sen} CAD = \frac{CD}{15}, \operatorname{sen} 36,87^\circ = \frac{CD}{15}; 0,6 = \frac{CD}{15}; CD = 0,6 \cdot 15 = 9$$

En el triángulo ABC: rectángulo en A, como $C = 53,13^\circ$, $B = 36,87^\circ$

En el triángulo DAB: rectángulo en D,

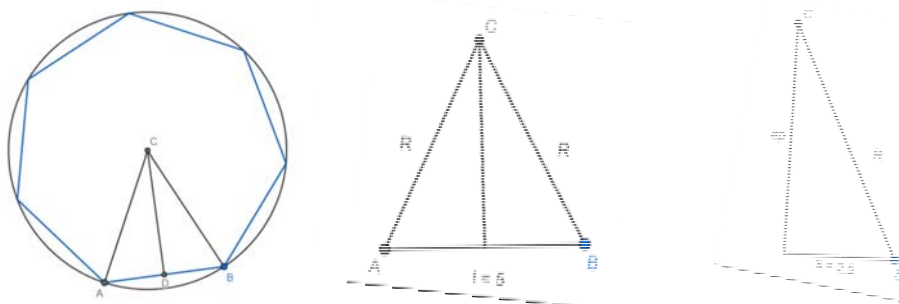
$$\operatorname{tg} B = \frac{12}{DB}, \operatorname{tg} 36,87^\circ = \frac{12}{DB}; 0,75 = \frac{12}{DB}; DB = \frac{12}{0,75} = 16$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{12}{AB}, \operatorname{sen} 36,87^\circ = \frac{12}{AB}; 0,6 = \frac{12}{AB}; AB = \frac{12}{0,6} = 20$$

$$CB = CD + DB = 9 + 16 = 25$$

Hipotenusa: 25, catetos: 15 y 20, ángulos: $C = 53,13^\circ$ y $B = 36,87^\circ$

24. Calcular el área de un heptágono regular, inscrito en una circunferencia, de 35cm de perímetro. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.



Segmentamos el heptágono en 7 partes: $\frac{35}{7} = 5\text{cm}$, $\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25'$

Partimos el triángulo isósceles obtenido en dos rectángulos: $\frac{5}{2} = 2,5\text{cm}$, $\frac{51^\circ 25'}{2} = 25^\circ 42'$

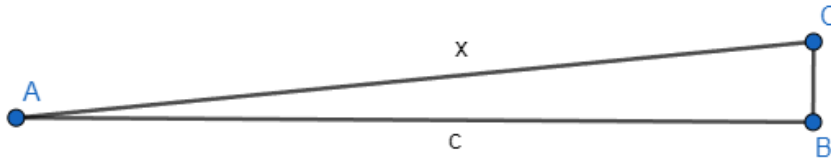
$\cos 25^\circ 37' = \frac{x}{R} = \frac{2,5}{R} \rightarrow R = \frac{2,5}{\cos 25^\circ 42'} = 2,78\text{cm}$ es el radio de la circunferencia.

$90^\circ = 25^\circ 47' + \delta \rightarrow \delta = 90^\circ - 25^\circ 42' = 64^\circ 58'$

Determinamos la apotema: $\operatorname{sen} 25^\circ 37' = \frac{ap}{R} = \frac{ap}{2,78} \rightarrow ap = 2,78 \cdot \operatorname{sen} 25^\circ 37' = 1,2\text{cm}$

$$\text{área} = \frac{p \cdot ap}{2} \rightarrow \frac{35 \cdot 1,2}{2} = 21 \text{ cm}^2$$

25. En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m cada 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m. ¿Cuánto hemos andado por la carretera?



Si hemos subido 100 metros en vertical, hemos hecho 2000 metros en horizontal, $c = 2000$

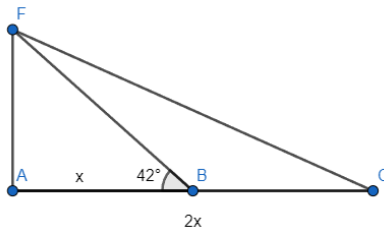
$$\operatorname{tg} A = \frac{100}{2000} = 0,05 \rightarrow A = \operatorname{tg}^{-1} 0,05 = 2,86^\circ$$

El ángulo con la horizontal de la carretera es de $2,86^\circ$.

$$\cos A = \frac{2000}{x} \rightarrow x = \frac{2000}{\cos 2,86^\circ} = 2002,49 \text{ m}$$

Hemos andado 2.002,49 metros.

26. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42 grados. ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de la distancia?

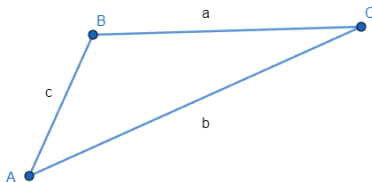


$$\tan 42^\circ = 0,9 = \frac{h}{x}$$

$$\tan C = \frac{h}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,45$$

$$C = \tan^{-1} 0,45 = 24^\circ 13'$$

27. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: $A = 55^\circ$, $B = 98^\circ$, $a = 7,5 \text{ cm}$. Resuélvelo.



$$A = 55^\circ, B = 98^\circ, a = 7,5 \text{ cm}$$

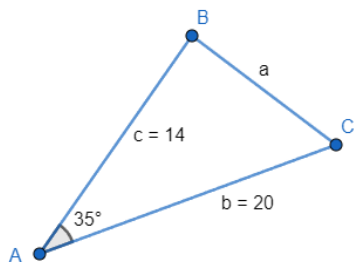
$$A + B + C = 180^\circ \rightarrow 55^\circ + 98^\circ + C = 180^\circ$$

$$C = 27^\circ$$

$$\frac{7,5}{\sin 55^\circ} = \frac{c}{\sin 27^\circ} \rightarrow \sin 55^\circ \cdot c = 7,5 \cdot \sin 27^\circ \rightarrow c = \frac{7,5 \cdot \sin 27^\circ}{\sin 55^\circ} = 4,157 \text{ cm}$$

$$\frac{7,5}{\sin 55^\circ} = \frac{b}{\sin 98^\circ} \rightarrow b \cdot \sin 55^\circ = 7,5 \cdot \sin 98^\circ \rightarrow b = \frac{7,5 \cdot \sin 98^\circ}{\sin 55^\circ} = 9,066 \text{ cm}$$

28. En un triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos $A = 35^\circ$, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm. Resuélvelo.



$$A = 35^\circ \quad c = 14 \text{ cm} \quad b = 20 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \rightarrow$$

$$a^2 = 20^2 + 14^2 - 2 \cdot 20 \cdot 14 \cdot \cos 35 = 137,27 \rightarrow$$

$$a^2 = \sqrt{137,27}, \quad a = 11,726 \text{ cm}$$

$$20^2 = 14^2 + 11,716^2 - 2 \cdot 14 \cdot 11,716 \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{20^2 - 14^2 - 11,716^2}{-2 \cdot 14 \cdot 11,716} = -0,20339$$

$$B = \cos^{-1}(-0,20339) = 101,7^\circ$$

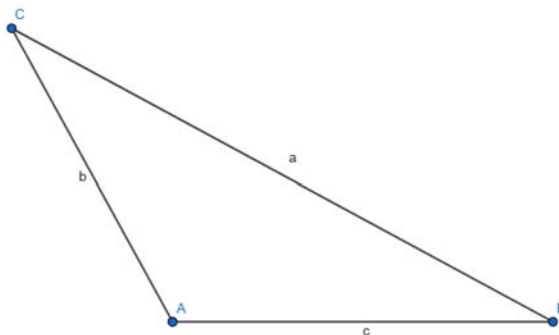
$$C = 180^\circ - 35^\circ - 101,7^\circ = 43,3^\circ$$

Método alternativo: podemos usar el teorema del seno para calcular C porque seguro que es agudo (ya que no es el opuesto al lado más largo):

$$\frac{14}{\sin C} = \frac{11,716}{\sin 35}; \sin C = \frac{14 \cdot \sin 35}{11,716} = 0,6854; C = \sin^{-1} 0,6854 = 43,3^\circ$$

$$B = 180^\circ - 35^\circ - 43,3^\circ = 101,7^\circ$$

29.- Halla los ángulos de un triángulo del que se conocen los tres lados: $a=37$ cm, $b=42$ cm y $c=68$ cm



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow 37^2 = 42^2 + 68^2 - 2 \cdot 42 \cdot 68 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$1369 = 1764 + 4624 - 5712 \cdot \cos \alpha \Rightarrow 5712 \cdot \cos \alpha = 5019 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5019}{5712} \Rightarrow \cos \alpha = 0,878$$

$$\arccos(0,878) \Rightarrow \alpha = 28^\circ 31'$$

$$\frac{37}{\sin 28^\circ 31'} = \frac{42}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = (42 \cdot \sin 28^\circ 31') / 37 = 0,54; \arccos(0,54) \Rightarrow \beta = 32^\circ 41'$$

$$32^\circ 41' + 28^\circ 31' = 61^\circ 12' \Rightarrow 180^\circ - 61^\circ 12' \Rightarrow \gamma = 118^\circ 48'$$

Para hacer este ejercicio, he tenido que hacer el teorema del coseno para averiguar el seno de alfa, y así conseguir el valor de alfa. Después, he utilizado el teorema de los senos para averiguar el valor de beta. Por último, solo he tenido que restarle a 180° la suma de los dos ángulos anteriores para averiguar el valor de gamma

30.- Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo = milla/hora; milla = 1850m)

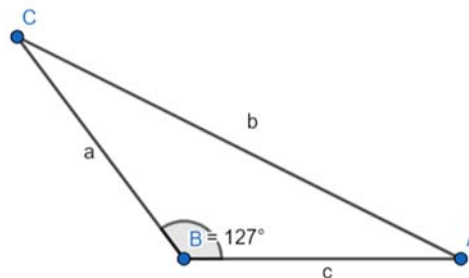
Barco A: $17 \text{ nudos} \cdot 5 \text{ horas} = 85 \text{ millas} \Rightarrow 85 \text{ millas} \cdot 1850 \text{ metros} \Rightarrow c = 157.250 \text{ metros}$

Barco C: $26 \text{ nudos} \cdot 3,5 \text{ horas} = 91 \text{ millas} \Rightarrow 91 \text{ millas} \cdot 1850 \text{ metros} \Rightarrow a = 168.350 \text{ metros}$

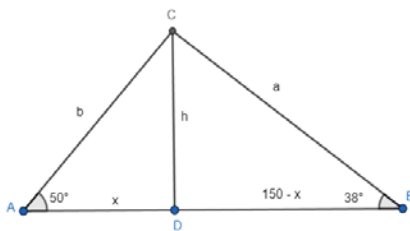
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \gamma \Rightarrow b^2 = 157.250^2 + 168.350^2 - 2 \cdot 157.250 \cdot 168.350 \cdot \cos 127^\circ \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{157.250^2 + 168.350^2 - 2 \cdot 157.250 \cdot 168.350 \cdot \cos 127^\circ} \Rightarrow \quad \mathbf{b = 291.432,7}$$

$291.432,7\text{m} > 150\text{km}$ No podrán ponerse en contacto



31.- Dos amigos están en una playa a 150m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38° . ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?



$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \quad ; \quad \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{h}{150 - x}$$

$$h = x \operatorname{tg} 50^\circ \quad ; \quad h = (150 - x) \operatorname{tg} 38^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 50^\circ = (150 - x) \operatorname{tg} 38^\circ$$

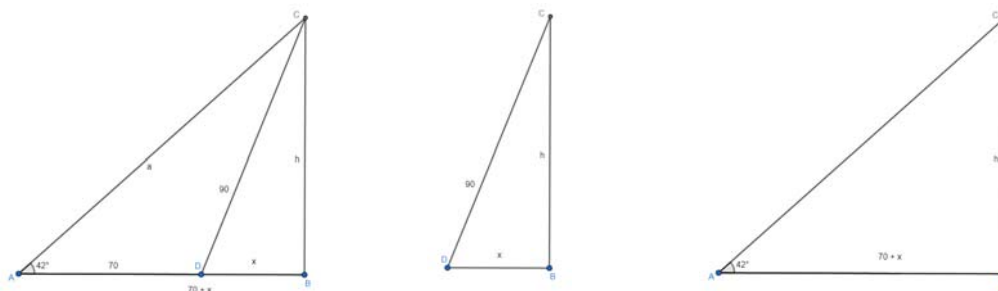
$$x \cdot 1,19 = (150 - x) \cdot 0,78$$

$$1,96x = 117 \quad ; \quad x = 59,7$$

$$\cos 50^\circ = \frac{x}{b} = \frac{59,7}{b} \quad ; \quad \mathbf{b = \frac{59,7}{\cos 50^\circ} = 92,88\text{m}}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{150 - x}{a} = \frac{90,3}{a} \quad ; \quad \mathbf{a = \frac{90,3}{\cos 38^\circ} = 114,6\text{m}}$$

32.- Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 70 metros. El cable más corto mide 90 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 42° . Calcula:



a) La medida del otro cable:

En el triángulo DBC: $90^2 = x^2 + h^2$

En el triángulo ABC: $tg42^\circ = \frac{h}{70+x}$; $h = tg42^\circ(70+x) = 63 + 0,9x$

$90^2 = x^2 + h^2$; $90^2 = x^2 + (63 + 0,9x)^2 = x^2 + 3969 + 113,4x + 0,81x^2$

$8100 = x^2 + 3969 + 113,4x + 0,81x^2$; $1,81x^2 + 113,4x - 4131 = 0$; $x = 25,8 \text{ metros}$

$h = 63 + 0,9x$; $h = 63 + 0,9 \cdot 25,8 = 66,22 \text{ metros}$

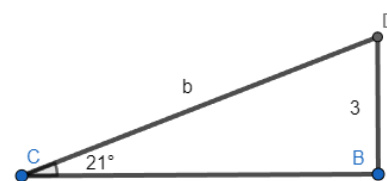
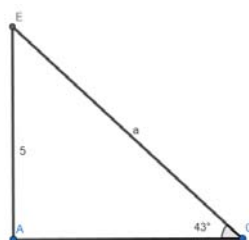
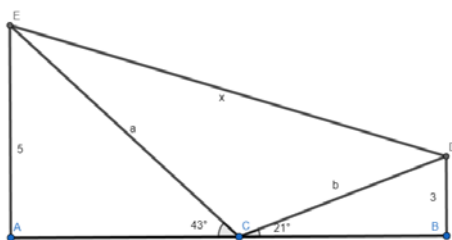
En el triángulo ABC: $sen42^\circ = \frac{h}{a}$; $0,67 = \frac{66,22}{a}$; $a = \frac{66,22}{0,67} = 98,84 \text{ metros}$

El otro cable mide 98,84 metros

b) La distancia del globo al suelo

la distancia del globo al suelo, altura, es de 66,22 metros

33.- Desde un faro se ve un barco A con un ángulo de 43° con la costa, y el barco B con 21° . El barco B está a 3 km de la costa, y el A a 5 km. Calcula la distancia entre los barcos



En el triángulo EAC : $sen43^\circ = \frac{5}{a}$; $a = \frac{5}{sen43^\circ} = 7,33$

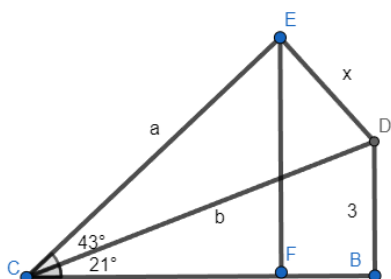
En el triángulo CBD : $sen21^\circ = \frac{3}{b}$; $b = \frac{3}{sen21^\circ} = 8,37$

$43^\circ + 21^\circ + C = 180^\circ$; $C = 116^\circ$

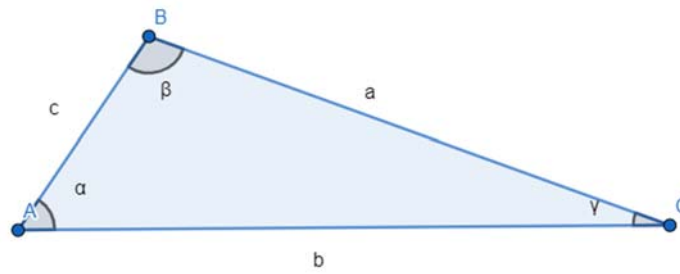
En el triángulo ECD: $x^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cosC$; $x^2 = 7,33^2 + 8,37^2 - 2 \cdot 7,33 \cdot 8,37 \cdot cos116^\circ$

$x^2 = 177,58$; $x = 13,33$ La distancia entre los barcos es de **13,33 km**.

De forma semejante se haría según la propuesta de los apuntes



34. Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 140 m y 200 m y el ángulo comprendido entre ambos es de 35° . Calcula el perímetro y la superficie de la finca.



$$a=140m \quad b=200m \quad \gamma = 35^\circ \quad \text{¿ } c?$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \\ c^2 &= 140^2 + 200^2 - 2(140)(200)(\cos 35^\circ) \\ c^2 &= 19600 + 40000 - 56000 \cdot \cos 35^\circ \\ c &= \sqrt{59600 - 56000 \cdot \cos 35^\circ} \\ c &= 117,16m \end{aligned}$$

$$P_{\text{triángulo}} = a + b + c \quad \text{¿ } P? \quad P = 140 + 200 + 117,16 \quad P = 457,16m$$

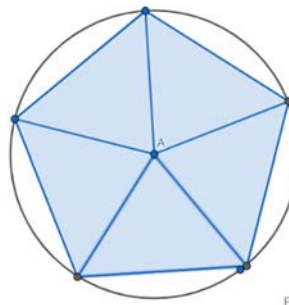
$$\text{Fórmula de Herón } \text{área} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad , \quad \text{siendo } s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{457,16}{2} = 253,58$$

$$\text{área} = \sqrt{253,58 \cdot (253,58 - 140) \cdot (253,58 - 200) \cdot (253,58 - 117,16)} = 8030 \text{ m}^2$$

35 calcula el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

Para realizar este ejercicio tenemos que:

- 1) Dibujar el pentágono inscrito en la circunferencia
- 2) Dividir el pentágono en 5 triángulos tal y como se muestra, pues si realizamos esto, al conocer el radio de la circunferencia podemos conocer el valor de dos de los lados de los triángulos



- 3) Calcular el valor del ángulo interior del triángulo teniendo en cuenta que se trata de un triángulo isósceles podemos saber el valor de los otros dos ángulos.
- 4) Para conocer el ángulo interior de un pentágono se realiza la siguiente operación:

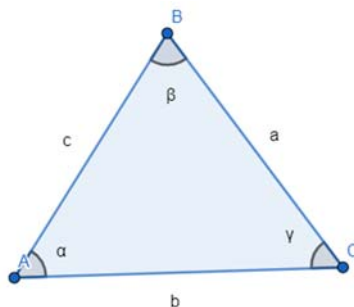
$$\text{ángulos interiores} = \frac{360^\circ}{\text{número de triángulos}} \quad \text{ángulos interiores} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Para calcular los ángulos que no son interiores, como se trata de un triángulo isósceles podemos

realizar la siguiente operación

$$\text{ángulos exteriores} = \frac{180 - (\text{ángulo interior})}{2}$$

$$\text{ángulos exteriores} = \frac{180 - (72)}{2} = 58^\circ$$



Para calcular el perímetro necesitamos calcular b y multiplicarlo por 5

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

$$b = \frac{c \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma}$$

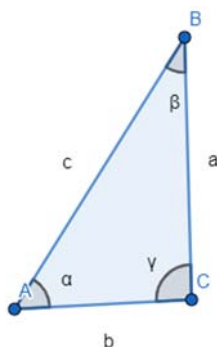
$$b = \frac{3 \cdot \text{sen}72^\circ}{\text{sen}54^\circ} \rightarrow 3,52\text{cm}$$

$$P = \text{lateral} \cdot n^\circ \text{ de lados}$$

$$P = 3,52 \cdot 5$$

$$P = 17,6\text{cm}$$

Para calcular el área calculamos la altura del triángulo (h es la apotema del pentágono)



$$b = \frac{3,52}{2}$$

$$c = 3\text{cm}$$

$$\text{¿} a? (a = h)$$

$$c^2 = b^2 + h^2$$

$$h^2 = c^2 - b^2$$

$$h^2 = 3^2 - 1,76^2$$

$$h = \sqrt{5,9}$$

$$h = 2,42\text{cm}$$

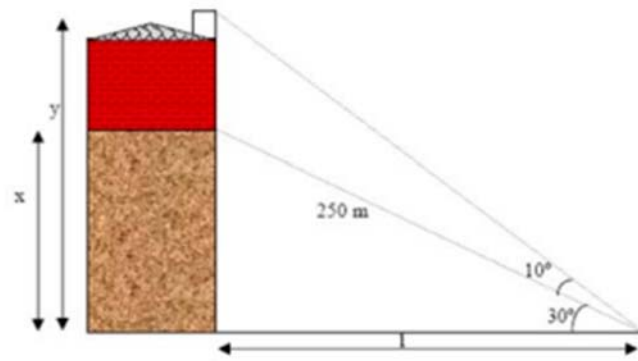
$$A_{\text{pentágono}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{17,6 \cdot 2,42}{2} = 21,29\text{cm}^2$$

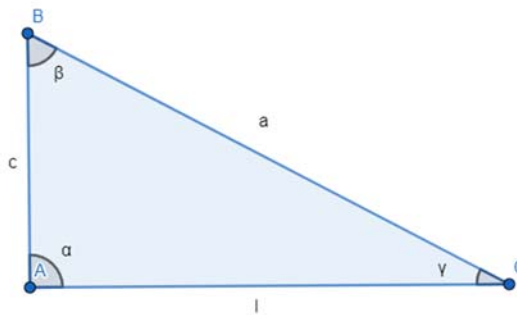
36. Calcula la altura del edificio:

Para calcular la altura del edificio:

- 1) Se divide el problema en dos triángulos
- 2) Se calcula l en el primer triángulo
- 3) Como l es igual en los dos triángulos, una vez calculada a partir del primer triángulo, aplicamos la definición de tg en el segundo, y calculamos la altura



$$l = 250 \cdot \cos 30^\circ \qquad l = 216m$$



Calculamos β

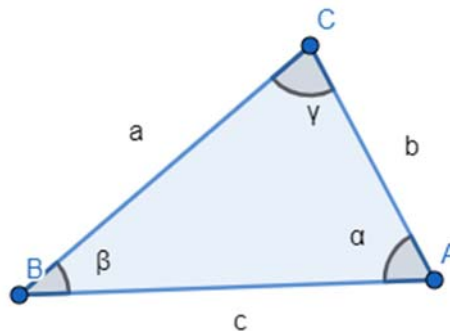
$$\beta = 180 - (90 + 40) \qquad \beta = 50^\circ$$

$$tg = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$tg\beta = \frac{l}{c} \qquad c = \frac{l}{tg\beta} \qquad c = \frac{216}{tg50} \qquad c = 181,24m$$

El edificio mide $181,24m$

37. Dos personas A y B distan entre sí 200 m y ven un globo que está situado entre ambas. La primera persona lo ve con un ángulo de 30° y la segunda con un ángulo de 60° .



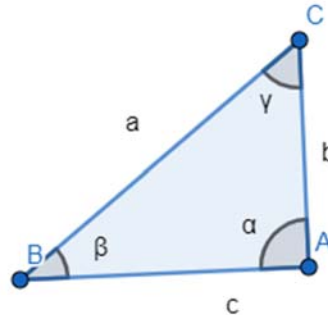
$$c = 200m \qquad \beta = 30^\circ \qquad \alpha = 60^\circ$$

a) ¿A qué distancia está B del globo?

$$\gamma = 180 - (90) \quad \gamma = 90^\circ$$

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \quad a = \frac{200 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} \quad a = 173,2m$$

b) ¿A qué altura está el globo?



$$\beta = 30^\circ \quad \alpha = 90^\circ \quad a = 173,2m$$

¿b?

$$b = a \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \quad b = 173,2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \quad b = 86,6m$$

c) Una persona que esté situada dentro del globo ¿Con qué ángulo ve a A y B?

¿Con qué ángulo ve a la persona B?

Calculamos γ en el triángulo del apartado b

$$\gamma = 180^\circ - (a + b) \quad \gamma = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) \quad \gamma = 60^\circ$$

¿Con qué ángulo ve a la persona A?

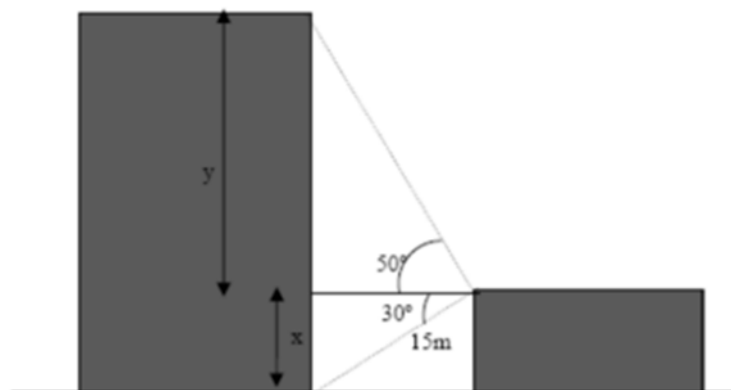
Para saber el ángulo con el que la persona A es vista, tenemos que restarle al ángulo total menos el ángulo con el que es vista b

$$x = 90^\circ - 60^\circ \quad x = 30^\circ$$

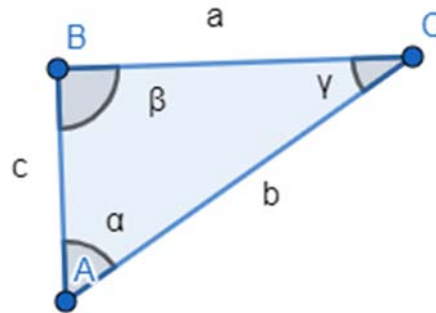
La persona A, es vista con un ángulo de 30°

La persona B, es vista con un ángulo de 60°

38. Calcula la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo.



$$\text{Altura total} = x + y$$



$$c = x \quad b = 15m \quad \gamma = 30^\circ \quad \beta = 90^\circ$$

¿c?

$$c = b \cdot \text{sen} \gamma$$

$$c = 15 \cdot \text{sen} 30^\circ$$

$$c = 7,5m$$

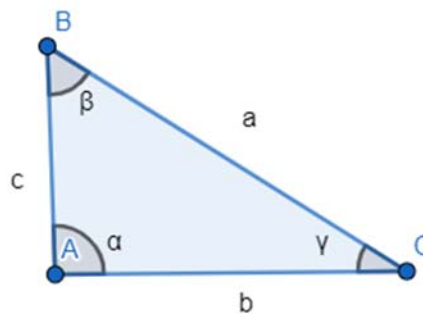
$$x = 7.5m$$

¿a?

$$a = b \cdot \text{cos} \gamma$$

$$a = 15 \cdot \text{cos} 30^\circ$$

$$a = 13m$$



$$c = y \quad \gamma = 50^\circ \quad \alpha = 90^\circ \quad b = 13m$$

Calculamos β

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ)$$

$$\beta = 40^\circ$$

$$\text{tg} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\text{tg} \beta}$$

$$c = \frac{13}{\text{tg} 40^\circ} \rightarrow 15,49m$$

$$y = 15,49m$$

Calculamos la altura total

$$A_{\text{total}} = x + y$$

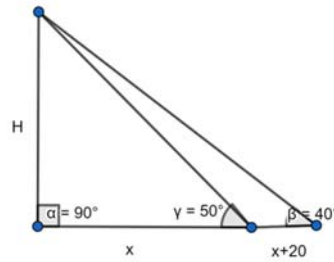
$$A = 7,5 + 15,49$$

$$A = 22,99m$$

El edificio mide aproximadamente 23m de altura

39. Deseamos medir la altura de un edificio. Si lo observamos desde un punto A lo vemos con un ángulo de 50° . Ahora bien, si lo contemplamos desde 20m más lejos el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la

altura del edificio? ¿A qué distancia está el punto B de dicho edificio?



$$\tan 50^\circ = \frac{H}{x} \rightarrow x \cdot \tan 50^\circ = H$$

$$\tan 40^\circ = \frac{H}{x+20} \rightarrow \tan 40^\circ (x+20) = H \rightarrow x \cdot \tan 40^\circ + 16,78 = H$$

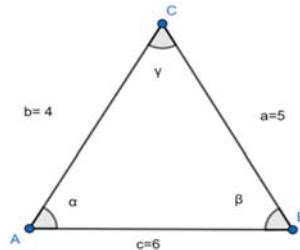
Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones, lo resolveremos por el método de igualación:

$$x \cdot \tan 40^\circ + 16,78 = x \cdot \tan 50^\circ \quad 0,3526x = 16,78 \quad x = 47,59m$$

$$\tan 50^\circ = \frac{H}{47,59} \quad H = 56,72m$$

Solución: la distancia con el punto B es de 47,59m y la altura es de 56,72m

40. Calcula todos los ángulos de un triángulo de lados 4,5 y 6. ¿Hay más de una solución? Si hay más de una, calcúlalas todas, si hay una sola, explica por qué.



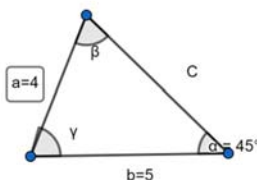
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \quad \cos\alpha = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = -\frac{5^2 - 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = 0,5625 \rightarrow \alpha = \arccos 0,5625 = 55,77^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} ; \frac{5}{\operatorname{sen}55,77^\circ} = \frac{4}{\operatorname{sen}\beta} ; \operatorname{sen}\beta = \frac{4 \cdot \operatorname{sen}55,77^\circ}{5} = 0,66 \rightarrow \beta = \operatorname{arcsen} 0,66 = 41,41^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \frac{5}{\operatorname{sen}55,77^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen}\gamma} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{\operatorname{sen}55,77^\circ \cdot 6}{5} ; \gamma = 82,81^\circ$$

41. Justifica que hay EXACTAMENTE DOS triángulos con lados $a = 4$, $b = 5$ y ángulo α (el opuesto al lado a) igual a 45° .



Utilizamos el teorema del seno para obtener β

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad \frac{4}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen}\beta} \quad \operatorname{sen}\beta = 0,8838 \quad \beta_1 = \operatorname{arcsen} 0,8838 = 62,11^\circ$$

$$\gamma_1 = 180 - (62,11 + 45) = 72,89^\circ$$

Para obtener el valor de c volvemos a hacer el teorema del seno:

$$\frac{4}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen}72,89^\circ} \rightarrow c = 5,406\text{cm}$$

Este es un triángulo, pero a partir del mismo $\operatorname{sen}\beta = 0,8838$, podemos obtener otro triángulo a partir del 2º cuadrante:

$$\beta_2 = 180^\circ - 72,89^\circ = 117,89^\circ \quad \gamma_2 = 180^\circ - (117,89^\circ + 45^\circ) = 17,11^\circ$$

$$\frac{4}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen}17,11^\circ} \quad c = 1,664\text{cm}$$

42. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\alpha = 45^\circ$, $b = 50\text{m}$, $a = 40\text{m}$

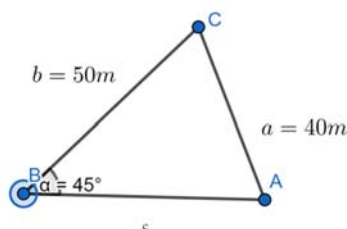
b) $\beta = 30^\circ$, $a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$

c) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $b = 20\text{m}$

d) $\alpha = 45^\circ$, $b = 10\text{m}$, $c = 6\text{m}$

e) $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$

a) $\alpha = 45^\circ$, $b = 50\text{m}$, $a = 40\text{m}$



Primeramente averiguamos el seno de β mediante el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}a} = \frac{b}{\operatorname{sen}b} \quad \frac{40}{\operatorname{sen}45^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen}\beta} \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}45^\circ \cdot 50}{40} = 0,88 \rightarrow \beta = \operatorname{arcsen}0,88 = 62,11^\circ$$

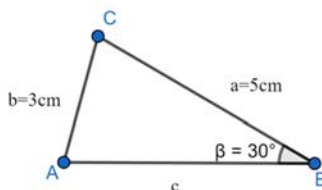
Al tener el valor de β y el valor de α podremos averiguar el valor de γ :

$$\gamma = 180^\circ - (62,11^\circ + 45^\circ) = 72,89^\circ$$

Para averiguar el lado c del triángulo, aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad c^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos72,89^\circ \quad c = 54,06\text{cm}$$

b) $\beta = 30^\circ$, $a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$



Primeramente averiguamos el seno de α mediante el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}a} = \frac{b}{\operatorname{sen}b} \quad \frac{5}{\operatorname{sen}a} = \frac{3}{\operatorname{sen}30} \quad \operatorname{sen}a = 56,44^\circ$$

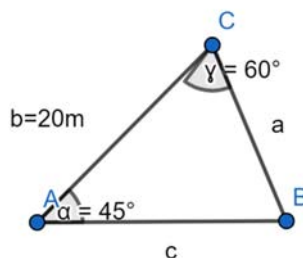
Al tener el valor de β y el valor de α podremos averiguar el valor de γ :

$$\gamma = 180^\circ - (56,44^\circ + 30^\circ) = 93,56^\circ$$

Para averiguar el lado c del triángulo, aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos93,56^\circ \quad c = \sqrt{35,86} = 6\text{cm}$$

c) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $b = 20\text{m}$



El primer paso es restar 180° a los ángulos $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

$$\beta = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

El siguiente paso es averiguar a mediante el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} \quad \frac{a}{\text{sen}45^\circ} = \frac{20}{\text{sen}75^\circ} \quad a = \frac{\text{sen}45^\circ \cdot 20}{\text{sen}75^\circ} = 14,64\text{m}$$

Para averiguar c realizamos el teorema del coseno

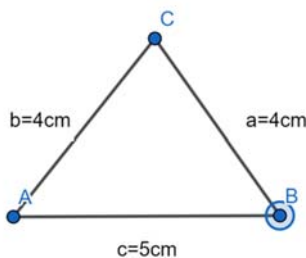
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad c^2 = 14,64^2 + 20^2 - 2 \cdot 14,64 \cdot 20 \cdot \cos60^\circ \quad c = 17,93\text{m}$$

d) $\alpha = 45^\circ$, $b = 10\text{m}$, $c = 6\text{m}$

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} \quad \frac{10}{\text{sen}\beta} = \frac{6}{\text{sen}45^\circ} \quad \text{sen}\beta = 1,178$$

No existe el triángulo ya que el seno es mayor que 1

e) $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$



En este caso, el triángulo resultante es un triángulo isósceles, por lo que:

$$\cos\alpha = \frac{2,5}{4} = 0,625 \quad \alpha = 51,32^\circ$$

Ahora calculamos el seno del ángulo β

$$\text{sen}\beta = \frac{2,5}{4} \quad \beta = 38,68^\circ$$

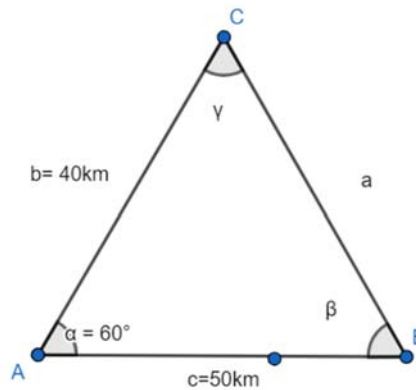
Hemos de multiplicar este resultado por 2 ya que solo es la mitad del ángulo

$$\beta = 38,68^\circ \cdot 2 = 77,36^\circ$$

Para averiguar el ángulo restante restamos los dos ángulos obtenidos a 180°

$$\gamma = 180^\circ - (51,32^\circ + 77,36^\circ) = 51,32^\circ$$

43. Comenzamos en una ciudad A y observamos un cartel. La ciudad B está a 50 Km y la ciudad C a 40 Km. Medimos el ángulo que forman las dos carreteras y resulta ser de 60° . ¿A qué distancia está B de C? Desde la ciudad B ¿Con qué ángulo se ven las otras dos ciudades? [En otras palabras: si consideramos el triángulo ABC, ¿cuánto vale el ángulo que corresponde al vértice B?]



Para hallar la distancia que hay entre las ciudades B y C debemos realizar el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad a^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ \quad a = 45,82 \text{ km}$$

Para hallar el ángulo que corresponde al vértice B utilizamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow \frac{45,82}{\sin 60^\circ} = \frac{40}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = 0,756 \rightarrow \beta = \arcsen(0,756) = 49,11^\circ$$

Solución: la distancia entre las ciudades B y C es de 45,82km, y el ángulo correspondiente al vértice B es 49,11°

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula las siguientes razones trigonométricas sin hacer uso de la calculadora.

- a) $\text{Sen}(-750^\circ)$
 b) $\text{Tg}(570^\circ)$
 c) $\text{Cos}(20\pi/3)$

a) $\text{Sen}(-750^\circ) = -\text{sen}(750^\circ) = -\text{sen}(30^\circ) = -1/2$

Solución: $-1/2$

PASOS:

1º Simplificar el ángulo negativo usando la simetría par/impar de las funciones trigonométricas.

2º Hallar el ángulo en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

3º Utilizar la tabla de valores trigonométricos.

b) $\text{Tg}(570^\circ) = \text{tg}(210^\circ) = \sqrt{3}/3$

Solución: $\sqrt{3}/3$

PASOS:

1º Hallar el ángulo en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

2º Utilizar la tabla de valores trigonométricos.

c) $\text{Cos}(20\pi/3) = -1/2$

Solución: $-1/2$

PASOS:

1º Calcular el valor trigonométrico.

2. A partir de las razones trigonométricas de la suma calcula las siguientes razones trigonométricas:

- a) $\text{Sen}(105^\circ)$
 b) $\text{Cos}(75^\circ)$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA:

1º $\text{Sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \text{cos}(b) + \text{cos}(a) \cdot \text{sen}(b)$

2º $\text{Cos}(a+b) = \text{cos}(a) \cdot \text{cos}(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$

3º $\text{Tg}(a+b) = \text{tg}(a) + \text{tg}(b) / 1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)$

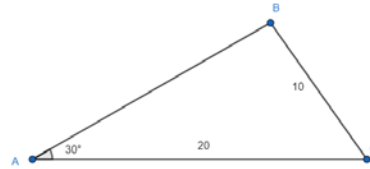
a) $\text{Sen}(105^\circ) = \text{Sen}(45^\circ + 60^\circ) = \text{Sen}(45^\circ) \cdot \text{Cos}(60^\circ) + \text{Cos}(45^\circ) \cdot \text{Sen}(60^\circ) = \sqrt{2}/2 \cdot 1/2 + \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{2} / 4$

Solución: $\sqrt{6} + \sqrt{2} / 4$

b) $\text{Cos}(75^\circ) = \text{Cos}(30^\circ + 45^\circ) = \text{Cos}(30^\circ) \cdot \text{Cos}(45^\circ) - \text{Sen}(30^\circ) \cdot \text{Sen}(45^\circ) = \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 - 1/2 \cdot \sqrt{2}/2$
 $= \sqrt{6} - \sqrt{2} / 4$

Solución: $\sqrt{6} - \sqrt{2} / 4$

3. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos $a = 10\text{cm}$, $b = 20\text{cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$. Calcula los demás datos del triángulo. Calcula el área del triángulo.

**TEOREMA DEL SENO:**

$$a / \text{sen } A = b / \text{sen } B = c / \text{sen } C$$

$$10 / \text{sen } 30^\circ = 20 / \text{sen } B ; \text{sen } B = 20 \cdot \text{sen } 30^\circ / 10 = 1 \longrightarrow B = \text{arccos}(1) = 90^\circ$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + C = 180^\circ ; C = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos C$$

$$c^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ = 17,32 \text{ cm}$$

ÁREA DEL TRIANGULO:

$$\text{BASE} \cdot \text{ALTURA} / 2$$

$$10 \cdot 17,32 / 2 = 86,6 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES:

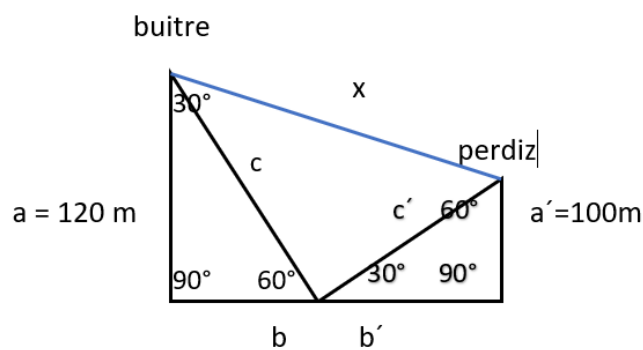
$$B = 90^\circ$$

$$C = 60^\circ$$

$$c = 17,32 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = 86,6 \text{ cm}^2$$

4. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60° . En la misma dirección, pero formando un ángulo de 30° vuela una perdiz a 100m de altura. Si el buitre quiere comerse a la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?



$$\text{sen } \alpha = \text{cateto opuesto} / \text{hipotenusa}; \text{sen } 60^\circ = 120 / c; c = 120 / \text{sen } 60^\circ = \mathbf{138, 56m}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cateto opuesto} / \text{hipotenusa}; \text{sen } 30^\circ = 100 / c'; c' = 100 / \text{sen } 30^\circ = \mathbf{200m}$$

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad c^2 + c'^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{(138,56)^2 + (200)^2} = 243\text{m}$$

Solución: no puede cazar a la perdiz porque están a 243m.

5. **Calcula sin utilizar la calculadora el resto de las razones trigonométricas (seno, coseno) de α , sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante.**

Utilizamos la fórmula: $\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$$(1/2)^2 + 1 = 1/\cos^2\alpha; \quad 1/4 + 1 = 1/\cos^2\alpha; \quad 5/4 = 1/\cos^2\alpha; \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{4/5}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{4/5} = -2\sqrt{5}/5 \text{ (porque el coseno en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante es negativo)}$$

Utilizamos la fórmula: $(\text{sen } \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (-\sqrt{4/5})^2 = 1; \quad (\text{sen } \alpha)^2 = 1 - (-\sqrt{4/5})^2; \quad (\text{sen } \alpha)^2 = 1 - 4/5; \quad (\text{sen } \alpha)^2 = 1/5 = \pm\sqrt{1/5}$$

$$\text{Sen } \alpha = -\sqrt{1/5} = -\sqrt{5}/5 \text{ (porque el seno en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante es negativo).}$$

6. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $6 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad

$$6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \right)^2 + \cos x = 1 \quad ; \quad 3 \cdot (1 + \cos x) + \cos x = 1 \quad ; \quad 4 \cos x = -2$$

$$\cos x = \frac{-2}{4} \rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$$

Como el coseno es negativo el ángulo puede estar en el 2º cuadrante o en el 3º

$$\cos 60^\circ = 0,5$$

$$2^\circ \text{ cuadrante: } 180^\circ - 60^\circ; x = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$3^\circ \text{ cuadrante: } 180^\circ + 60^\circ; x = 240^\circ + 360^\circ k$$

b) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$

1. Elevo toda la ecuación al cuadrado para quitar la raíz

$$(\text{sen } x + \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2$$

2. La raíz se va con el exponente

$$(\text{sen } x + \cos x)^2 = 2$$

3. Aplico la formula del cuadrado de una suma que es "cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo".

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2$$

4. Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por lo cual:

$$1 + 2\text{sen } x \cdot \cos x = 2$$

5. Sabemos que $\text{sen}(2a) = 2\text{sen } a \cdot \cos a$

$$2\text{sen } x \cdot \cos x = 1 \quad \text{sen } 2x = 1$$

$$2x = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$$

SOLUCIÓN

$$x = 45^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 225^\circ + 360^\circ k$$

7. Resuelve los siguientes sistemas

a) EC1: $\text{sen}x + \text{sen}y = 1$

EC2: $x + y = \pi$

1. Despejo x en la EC2: $x = \pi - y$

2. sustituyo x en la EC1:

$$\text{sen}(\pi - y) + \text{sen}y = 1 \quad \text{sen}\pi \cdot \cos y - \cos \pi \cdot \text{sen}y + \text{sen}y = 1$$

3. sabemos que: $\text{sen}\pi = 0$ y que $\cos \pi = -1$

sustituyendo $0 - (-1) \cdot \text{sen}y + \text{sen}y = 1$

$$2\text{sen}y = 1 \quad \text{sen}y = \frac{1}{2}$$

$$y = 30^\circ + 360^\circ k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad ; \quad y = 150^\circ + 360^\circ k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} - 2\pi k \quad ; \quad x = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$$

SOLUCIONES: Si $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi k$ $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; si $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$ $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

b) EC1 $\text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

EC2 $\text{sen}x - \text{sen}y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Hacemos $X = \text{sen}(x)$ $Y = \text{sen}(y)$

$$X + Y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$X - Y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

sumamos las 2 ecuaciones :

$$2X = \sqrt{3}, \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{sustituyendo o restando las ecuaciones} \quad Y = \frac{1}{2}$$

$$X = \text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad Y = \text{sen}(y) = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$y = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = 150^\circ + 360^\circ k$$

c) EC1: $x + y = \frac{\pi}{2}$

EC2: $\text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Despejando x en la primera ecuación : $x = \frac{\pi}{2} - y$ sustituyendo en la segunda

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ; \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(y) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(y) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos(y) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

SABIENDO QUE $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ y entonces $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

$$\sqrt{1 - \text{sen}^2 y} + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$1 - \text{sen}^2 y = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \text{sen}y\right)^2$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 y - \sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} y + \frac{3}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2 y = \sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} y - \frac{1}{2}$$

$$2a^2 - \sqrt{6} \cdot a - \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = y_1 = 75^\circ + 360^\circ k$$

$$105^\circ + 360^\circ k$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = y_2 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$165^\circ + 360^\circ k$$

8. Demuestra las siguientes igualdades

a) $\cos(x + y + z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z$

Tomando $\cos(x + y + z)$

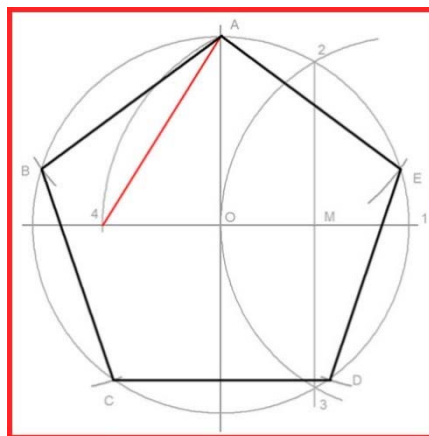
$$\begin{aligned} \cos((x + y) + z) &= \cos(x + y) \cdot \cos z - \operatorname{sen}(x + y) \cdot \operatorname{sen} z = \\ &= (\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y) \cdot \cos z - (\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y) \cdot \operatorname{sen} z = \\ &= \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z - (\operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z + \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z) = \\ &= \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a)(\cos a)} = 4 \cdot \cos a$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a)(\cos a)} = \frac{(2\operatorname{sen} a \cdot \cos a)^2}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a} = \frac{4\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a} = 4 \cos(a)$$

VERDADERO

9. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en un circunferencia de 30cm de radio. calcula su área.



$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{l}{30}$$

PARA CALCULAR EL LATERAL/LADO

$$30 \cdot \operatorname{sen}36^\circ = \frac{\ell}{2}$$

$$2 \cdot 30 \cdot \operatorname{sen}36^\circ = \ell$$

$$\ell = 35,27\text{cm}$$

PARA CALCULAR EL ÁREA DEL PENTÁGONO

$$ap = \cos36^\circ \cdot 30 = 24,27\text{cm}$$

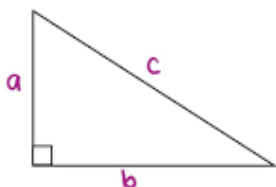
PARA CALCULAR EL PERÍMETRO

$$p = 35,27 \cdot 5 = 176,35\text{cm}$$

PARA CALCULAR EL ÁREA

$$A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{176,35 \cdot 24,27}{2} = 2.140\text{cm}^2 = 21,40\text{m}^2$$

10. En las señales de tráfico indican la pendiente de la carretera la información que nos dan es el porcentaje de subida en función del avance del coche. Calcula el ángulo para una pendiente del 15 por ciento.



$$\alpha = ? \quad c=100 \quad a=15 \quad ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{15}{100} = 0,15 \quad \alpha = 8,63^\circ$$