

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Integrales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por: IRENE, CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, NEREA, ISMAEL, AITANA, ROSA, ANDREA, OLIVIA, LUCÍA, NATALIA.
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

Actividades propuestas

1. Calcula el área de la región limitada por cada una de las funciones $f(x)=a$, $g(x)=a \cdot x$ y $h(x)=a \cdot x + b$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x .

$$\begin{aligned} \text{o } \int_0^x a \, dt &= a \cdot t \Big|_0^x = a \cdot x - a \cdot 0 = a \cdot x \\ \text{o } \int_0^x a \cdot t \, dt &= a \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = a \cdot \frac{x^2}{2} - a \cdot 0 = a \cdot \frac{x^2}{2} \\ \text{o } \int_0^x (a \cdot t + b) \, dt &= a \cdot \left(\frac{t^2}{2} + b \cdot t \right) \Big|_0^x = a \cdot \left(\frac{x^2}{2} + b \cdot x \right) - a \cdot 0 = a \cdot \left(\frac{x^2}{2} + b \cdot x \right) \end{aligned}$$

2. Calcula las siguientes primitivas:

$$\text{a) } \int 4x^3 \, dx \quad \text{b) } \int 3x^2 \, dx \quad \text{c) } \int 5x^4 \, dx \quad \text{d) } \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2) \, dx$$

$$\text{a) } \int 4x^3 \, dx = x^4 + C$$

$$\text{b) } \int 3x^2 \, dx = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$$

$$\text{c) } \int 5x^4 \, dx = \frac{5x^5}{5} + C = x^5 + C$$

$$\text{d) } \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2) \, dx = x^5 - x^4 + x^3 + C$$

3. Dada $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifica $F(0)=4$.

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) \, dx = \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x + C$$

Como $F(0)=4$, $F(0) = \frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 + C = 4$, luego $C=4$, de donde,

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + x + 4$$

4. Comprueba si $F(x)=4x^3+2x^2-x+5$ es una primitiva de $f(x)=12x^2+4x+3$. En caso negativo, explica por qué.

Si derivamos $F(x)$ obtenemos $F'(x) = 12x^2 + 4x - 1 \neq f(x)$

Por tanto, $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$

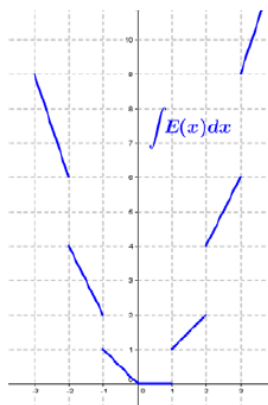
5. Determina los valores de a , b , c y d para los que $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^2-5x+3$.

$$F(x) = \int (4x^2 - 5x + 3) \, dx = 4 \frac{x^3}{3} - 5 \frac{x^2}{2} + 3x + C, \text{ por tanto,}$$

$$a = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{-5}{2}, \quad c = 3, \quad d = C$$

6. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio. Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

7. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función “parte entera de x ”, $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):

$$\int 1 dx = x \quad \int 2 dx = 2x \quad \int 3 dx = 3x \quad \int (-1) dx = -x \quad \int (-2) dx = -2x$$

8. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x = t^{12}$.

$x = t^{12}$, $dx = 12t^{11} dt$, sustituyendo, obtenemos $\int \frac{\sqrt{t^{12}} - \sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 12t^{11} dt$, simplificando,

$$\int \frac{t^6 - t^4}{t^3} 12t^{11} dt = \int (t^6 - t^4) 12t^8 dt = 12 \int (t^{14} - t^{12}) dt = 12 \left(\frac{t^{15}}{15} - \frac{t^{13}}{13} \right) + C$$

$$x = t^{12}, \quad t = \sqrt[12]{x}, \quad \text{deshaciendo el cambio, } \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = 12 \left(\frac{(\sqrt[12]{x})^{15}}{15} - \frac{(\sqrt[12]{x})^{13}}{13} \right) + C$$

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

$e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$ sustituyendo,

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg(t) + C = \arctg(e^x) + C$$

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1+2x = t^2$

$$1 + 2x = t^2, \quad 2dx = 2t dt, \quad dx = t dt, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad t = \sqrt{1 + 2x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int \frac{5\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^4}{\sqrt{t^2}} t dt = 5 \int \frac{(t^2-1)^4}{2^4} dt = \frac{5}{16} \int (t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 4t^2 + 1) dt = \\ &= \frac{5}{16} \left(\frac{t^9}{9} - 4 \frac{t^7}{7} + 6 \frac{t^5}{5} - 4 \frac{t^3}{3} + t \right) + C = \\ &= \frac{5}{16} \left(\frac{(\sqrt{1+2x})^9}{9} - 4 \frac{(\sqrt{1+2x})^7}{7} + 6 \frac{(\sqrt{1+2x})^5}{5} - 4 \frac{(\sqrt{1+2x})^3}{3} + \sqrt{1+2x} \right) + C\end{aligned}$$

d) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ haciendo $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = t, \quad \sqrt{x^2 - 1} = t - x, \quad (\sqrt{x^2 - 1})^2 = (t - x)^2,$$

$$x^2 - 1 = t^2 + x^2 - 2xt, \quad 2xt = t^2 + 1, \quad x = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - (t^2 + 1) \cdot 2}{4t^2} dt = \frac{(2t^2 - 2)}{4t^2} dt = \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt, \text{ de donde,}$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - t^{-3} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln|t| + \frac{t^{-2}}{2} \right) + C$$

Deshaciendo el cambio, $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \left(\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + \frac{1}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} \right) + C$

e) $\int (2 \sin^3 x + 3 \sin^2 x - \sin x + 3) \cos x dx$ haciendo $\sin x = t$

$\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, sustituyendo, nos queda,

$$\int (2t^3 + 3t^2 - t + 3) dt = 2 \frac{t^4}{4} + 3 \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + C = \frac{\sin^4 x}{2} + \sin^3 x - \frac{\sin^2 x}{2} + 3 \sin x + C$$

9. Elige el cambio que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 + 1}{(x^4 + 2x)^3} dx$

$$t = x^4 + 2x, \quad dt = (4x^3 + 2) dx = 2(2x^3 + 1) dx$$

b) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

$$t = \tan x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

$$t = \ln(\ln x), \quad dt = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \frac{1}{x \ln x} dx$$

d) $\int 2x^3 \sqrt{x^4 - 49} \cdot dx$

$$t = x^4 - 49, \quad dt = 4x^3 dx$$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$

$$t^3 = x + 1, \quad 3t^2 dt = dx$$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

$$t = 1 - 4x^2, \quad dt = -8x dx$$

10. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int \left(4x^3 + 3x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$ **SÍ.**

b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ **SÍ** $\left(\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right)$

c) $\int \sin x \cos x dx$ **SÍ**

d) $\int \frac{\ln(x+1)}{x} dx$ **NO**

e) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ **NO**

f) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$ **SÍ** $[x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2]$

g) $\int x^2 \cdot e^{x^2} dx$ **NO**

h) $\int e^{x^2} dx$ **NO**

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (e^{3x} + e^{2x} + e^x) e^x dx$, $t = e^x$, $dt = e^x dx$, $\int (t^3 + t^2 + t) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C = \frac{e^{4x}}{4} + \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

b) $\int x \cdot \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} dx$, $t = e^{x^2}$, $dt = 2xe^{x^2} dx$, $\frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(e^{x^2}) + C$

c) $\int \ln(\cos x) \operatorname{tg} x dx$, $t = \ln(\cos x)$, $dt = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\operatorname{tg} x dx =$
 $= -\int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(\ln(\cos x))^2}{2} + C$

d) $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + C$

i) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + C$

j) $\int (\ln x + 2) \frac{dx}{x} = \frac{(\ln x + 2)^2}{2} + C$

12. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x^2 + x + 1) e^x dx$ $\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x + 1 \rightarrow du = (2x + 1) dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\}$

$\int (x^2 + x + 1) e^x dx = (x^2 + x + 1) e^x - \int (2x + 1) e^x dx =$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (x^2 + x + 1)e^x - [(2x + 1)e^x - \int 2e^x dx] =$$

$$= (x^2 + x + 1)e^x - (2x + 1)e^x + 2e^x + C = (x^2 - x + 2)e^x + C$$

$$b) \int \ln x dx \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} \int \ln x dx = \ln|x| \cdot x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln|x| - x + C$$

$$c) \int x \cos x dx \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\}$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

d) **Curiosidad – idea feliz:** Resuelve la primitiva $\int \cos(\ln x) dx$.

$$\text{Para ello, multiplica y divide el integrando por } x: \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot x dx = \left\langle \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = \dots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \rightarrow v = \dots \end{array} \right\rangle$$

$$I = \int \cos(\ln x) dx = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \rightarrow v = \sin(\ln x) \end{array} \right\}$$

$$= x \sin(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx.$$

$$\int \sin(\ln x) dx = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} \cdot x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \rightarrow v = -\cos(\ln x) \end{array} \right\}$$

$$= -x \cos(\ln x) + \int \cos(\ln x) dx.$$

$$I = x \sin(\ln x) + x \cos(\ln x) - I, \quad 2I = x \sin(\ln x) + x \cos(\ln x)$$

$$I = \frac{1}{2} x (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C$$

13. Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justifica si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:

$$g(x) = e^{2x} - 4x + 8 \quad h(x) = 2e^{2x} - 4x$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4x, \quad f(x) \text{ es una primitiva de } h(x).$$

14. Dada la función $f(x) = (x+1) \cdot (3x-2)$.

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.

$$a) \int (x+1)(3x+2) dx = \int (3x^2 + 5x + 2) dx = 3 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

b) $F'(x) = 3x^2 + 4x \neq f(x)$, no es una primitiva.

15. Dada la función $f(x) = (x+a)\cos x$, donde a es una constante,

a) Encuentra una primitiva de f .

b) Si F es una primitiva de f , ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?

$$a) \int (x+a)\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+a \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\}$$

$$= (x+a)\sin x - \int \sin x dx = (x+a)\sin x + \cos x + C$$

b) Ha de ser $G'(x) = f(x)$, sin embargo, $G'(x) = F'(x) + 2 = f(x) + 2$.

16. Sea $f(x) = x^2 + bx$ donde b es una constante. Encuentra b , sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F .

$$F(x) = \int (x^2 + bx) dx = \frac{x^3}{3} + bx^2 + C$$

$$F(0) = \frac{0^3}{3} + b \cdot 0^2 + C = 2 \quad F(3) = \frac{3^3}{3} + b \cdot 3^2 + C = 20$$

$$C = 2 \quad \text{y} \quad 9 + 9b + C = 20, \text{ de donde, } b = 1 \quad \text{y} \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$$

17. Dada la función $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2}$ ($x \neq 0$), donde a es una constante, encuentra una primitiva de f . Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f , entonces $f'(1) = -2$.

$$F(x) = \int \left(25 - x^2 + \frac{a}{x^2} \right) dx = 25x - \frac{x^3}{3} - \frac{a}{x} + C$$

$$f'(x) = -2x - 2\frac{a}{x^3} \quad f'(1) = -2 \cdot 1 - 2\frac{a}{1^3} = -2 - 2a = -2, \quad a = 0$$

18. Resuelve las siguientes integrales definidas:

$$a) \int_0^6 (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^6 = \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + 6 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0 \right) = 92$$

$$b) \int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) = \frac{8}{3}$$

$$c) \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \left[\left(((\sqrt{3})^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right) - \left((0^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = \frac{7}{3}$$

$$d) \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} [(\ln 5) - (\ln 1)] = \frac{\ln 5}{2}$$

$$e) \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

$$f) \int_1^e \ln x dx = \int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 1$$

19. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c) \cdot (5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

$$\int_0^5 (2x+1)dx = x^2 + x \Big|_0^5 = 30, \quad f(c) = 2c+1, \quad 30 = (2c+1) \cdot 5, \quad c = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

20. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln t}$

La función $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ es continua en $[2, b]$, $g(x) = e^x$ es derivable,

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(e^x)} \cdot e^x$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ejercicio 1:

$$1) \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

$$2) \int \frac{4}{x^5} dx = \int 4x^{-5} dx = 4 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{-1}{x^4} + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$4) \int 37 dx = 37x + C$$

$$5) \int 6x^7 dx = 6 \cdot \frac{x^8}{8} + C$$

$$6) \int 5x^{\frac{1}{4}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 4\sqrt[4]{x^5} + C$$

$$7) \int 5\sqrt{x^3} dx = \int 5x^{\frac{3}{2}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = 2\sqrt{x^5} + C$$

$$8) \int (3 - 2x - x^4) dx = 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + C = 3x - x^2 - \frac{x^5}{5} + C$$

$$9) \int (2x^5 - 5x + 3) dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$$

$$10) \int (2 + 3x^3)^2 dx = \int 4 + 9x^6 + 12x^3 dx = 4x + 9\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^4}{4} + C = 4x + \frac{9x^7}{7} + 3x^4 + C$$

$$11) \int (2 \cdot (x^2 + 2)^3) dx = \int 2 \cdot ((x^2)^3 + (3x^2)^2 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3) dx = \int 2 \cdot (x^6 + 18x^4 + 12x^2 + 8) dx = \\ \int (2x^6 + 36x^4 + 24x^2 + 16) dx = 2 \cdot \frac{x^7}{7} + 36 \cdot \frac{x^5}{5} + 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x + C$$

$$12) \int (1 - x^3)^2 dx = \int 1 - 2x^3 + (x^3)^2 dx = x - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$$

$$13) \int \frac{x^3 - x + 2}{x^3} dx = \int \frac{x^3}{x^3} dx - \int \frac{x}{x^3} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int (1 - x^{-2} + 2x^{-3}) dx = \\ = x + \frac{x^{-1}}{1} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = x + \frac{x^{-1}}{1} - x^{-2} + C$$

$$14) \int (-4x^{\frac{2}{3}} + 2x) dx = -4 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = -\frac{12x^{\frac{5}{3}}}{5} + x^2 + C$$

$$15) \int (3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a) dx = (3a - \frac{1}{3e^2})x + 2 \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$16) \int -\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \int -3x^{-3} + 2 - 3x^{-\frac{1}{2}} dx = -3 \frac{x^{-2}}{-2} + 2x - 3 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ = \frac{3}{2x^2} + 2x - 6\sqrt{x} + C$$

$$17) \int (3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2}) dx = \frac{3x^6}{6} - 12 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{x^6}{2} - \frac{12}{x} + \frac{10x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$$

$$18) \int (1-x)\sqrt{x} dx = \int \sqrt{x} - x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$19) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx = \int \frac{x^3}{x^2} dx + \int \frac{5x^2}{x^2} dx - \int \frac{4}{x^2} dx = \int x dx + \int 5 dx - \int 4x^{-2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$$

$$20) \int (5e^x + \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2}) dx = \int 5e^x dx + \int \frac{2x^3}{4x^2} dx - \int \frac{3x^2}{4x^2} dx + \int \frac{5}{4x^2} dx =$$

$$= \int 5e^x dx + \int \frac{2x}{4} dx - \int \frac{3}{4} dx + \int \frac{5x^{-2}}{4} dx = 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5x^{-1}}{4} =$$

$$= 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4x} + C$$

$$21. \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^2 + 2x + 1) (x^{\frac{-1}{2}}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

$$22. \int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{-1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{4} + 4\sqrt{x} + C$$

$$23. \int \sqrt{x} (x^3 + 1) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}) (x^3 + 1) dx = \int (x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$24. \int (\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}}) dx = \int (x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{\frac{-1}{2}}}{3}) dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot \frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - \frac{4\sqrt{x}}{3} + C$$

$$25. \int \sqrt{x} (3 - 5x) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}) (3 - 5x) dx = \int (3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^5} + C$$

$$26. \int \frac{(x+1) + (x-2)}{\sqrt{x}} dx = \int (x^2 + x - 2) (x^{\frac{-1}{2}}) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{-1}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} +$$

$$C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + C$$

$$27. \int (3x + 4)^2 dx = \int 3(3x + 4)^2 dx = \frac{(3x+4)^3}{3 \cdot 3} + C = \frac{(3x+4)^3}{9} + C$$

$$28. \int (3x - 7)^4 dx = \frac{1}{3} \int 3(3x - 7)^4 dx = \frac{(3x-7)^5}{3 \cdot 5} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$$

$$29. \int x (x^2 - 4)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2x (x^2 - 4)^3 dx = \frac{(x^2-4)^4}{2 \cdot 4} + C = \frac{(x^2-4)^4}{8} + C$$

$$30. \int 3x (x^2 + 2)^3 dx = \frac{3}{2} \int 2x (x^2 + 2)^3 dx = \frac{3(x^2+2)^4}{2 \cdot 4} + C = \frac{3(x^2+2)^4}{8} + C$$

$$31. \int (x^3 + 2)^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^2 3x^2 dx = \frac{(x^3+2)^3}{3 \cdot 3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{9} + C$$



$$32. \int (x^3 + 3) x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 3) 3x^2 dx = \frac{(x^3+3)^2}{3 \cdot 2} + C = \frac{(x^3+3)^2}{6} + C$$

$$33. \int (x - 2)^{3/2} dx = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + C$$

$$34. \int (a + x)^3 dx = \frac{(a+x)^4}{4} + C$$

$$35. \int [(x + 2)^3 - (x + 2)^2] dx = \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + C$$

$$36. \int \sqrt{3x + 12} dx = \frac{1}{3} \int 3(3x + 12)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x+12)^{3/2}}{3 \cdot 3/2} + C = \frac{2\sqrt{(3x+12)^3}}{9} + C$$

$$37. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \int (x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(x+3)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x+3} + C$$

$$38. \int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3} dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$$

$$39. \int (x^2 + x)^4 (2x + 1) dx = \frac{(x^2+x)^5}{5} + C$$

$$40. \int \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})^2 dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})^2 dx = \frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + C$$

$$41. \int \frac{x^3}{(x^4-1)^2} dx = \int x^3 (x^4-1)^{-2} dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 (x^4-1)^{-2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x^4-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{(x^4-1)^{-1}}{-4} + c = -\frac{1}{4(x^4-1)} + c$$

$$42. \int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx = \int x(x^2+4)^{-3} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+4)^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} + c = \frac{(x^2+4)^{-2}}{-4} + c = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$$

$$43. \int x\sqrt{x^2-7} dx = \int x(x^2-7)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2-7)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{3} + c$$

$$44. \int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx =$$

$$\frac{1}{2} \int (2x-2)(x^2-2x+3)^4 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-2x+3)^5}{5} + c = \frac{(x^2-2x+3)^5}{10} + c$$

$$45. \int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}} dx = \int 3x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{3}{14} \int 14x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{14} \cdot \frac{(1+7x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7} + c$$

$$46. \int \frac{8x^2}{(x^3+2)^2} dx = \int 8x^2 (x^3+2)^{-2} dx =$$

$$\frac{8}{3} \int 3x^2 (x^3+2)^{-2} dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{(x^3+2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{8}{3(x^3+2)} + c$$

$$47. \int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx = \int 3x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} \int 2x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{9 \sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{4} + c$$

$$48. \int x \sqrt[3]{1-x^2} dx = \int x(1-x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1-x^2)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3 \sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{4} + c$$

$$49. \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx = \int x^2(x^3+5)^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+5)^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+5)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4 \sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9} + c$$

$$50. \int x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}} dx =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3-1)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c = \frac{5 \sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24} + c$$

$$51. \int \sqrt{x^2-2x^4} dx = \int \sqrt{x^2(1-2x^2)} dx = \int x \sqrt{1-2x^2} dx = \int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \int -4x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{6} + c$$

$$52. \int (e^x+1)^3 e^x dx = \frac{(e^x+1)^4}{4} + c$$

$$53. \int \operatorname{sen}^3 x (\cos x) dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + c$$

$$54. \int x(\cos^4 x^2) \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{1}{2} \int 2x(\cos^4 x^2)(-\operatorname{sen} x^2) dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^5 x^2}{5} + c = -\frac{\cos^5 x^2}{10} + c$$

$$55. \int \frac{x \ln(x^2+3)}{x^2+3} dx = \int \ln(x^2+3) \cdot \frac{x}{x^2+3} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \ln(x^2+3) \cdot \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln^2|x^2+3|}{2} + c = \frac{\ln^2|x^2+3|}{4} + c$$

$$56. \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = \int \cos^{-3} x (\operatorname{sen} x) dx =$$

$$-1 \int \cos^{-3} x (-\operatorname{sen} x) dx = -1 \cdot \frac{\cos^{-2} x}{-2} + c = \frac{\cos^{-2} x}{2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c$$

$$57. \int \frac{e^x}{2e^x-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{2e^x-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|2e^x-3| + c$$

$$58. \int \operatorname{tg}^5 x (\sec^2 x) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + c$$

$$59. \int \frac{\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln|\operatorname{tg} 3x| + c$$

$$60. \int \frac{\ln(x)}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \ln|x| \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln^2|x|}{2} + c = \frac{\ln^2|x|}{6} + c$$

Ejercicio 2

$$1) \int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$$

$$4) \int \frac{x dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C$$

$$5) \int \frac{x}{1-2x^3} dx = \frac{-1}{6} \int \frac{-6x^2}{1-2x^3} = \frac{-1}{6} \ln|2x^3-1| + C$$

$$6) \int \frac{x^2}{1-x^3} dx = \frac{-1}{3} \int \frac{3x^2}{1-x^3} dx = \frac{-1}{3} \ln|x^3-1| + C$$

$$7) \int \frac{3x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+2| + C$$

$$8) \int \frac{4}{3x+5} dx = \frac{4}{3} \int \frac{3}{3x+5} dx = \frac{4}{3} \ln|3x+5| + C$$

$$9) \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| + C$$

$$10) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C$$

$$11) \int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x} \right) dx = \int 3x^{-2} + \frac{2}{x} + x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + 2\ln(x) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -3x^{-1} + 2\ln(x) + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$12) \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(|\ln|x||) + C$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2 \int \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2 \ln(|1-\sqrt{x}|) + C$$

$$14) \int \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{2}{(2x-1)} dx - \int \frac{2}{(2x+1)} dx \right) = \frac{1}{2} \ln(|2x-1|) - \frac{1}{2} \ln(|2x+1|) + C$$

$$15) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C$$

$$16) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+3) + C$$

$$17) \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$$

$$18) \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln(|\sin(x)|) + C$$

$$19) \int \frac{5}{x \ln(x)} dx = 5 \ln(|\ln(x)|) + C$$

$$20) \int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx + \int 1 dx = -\ln(|\cos(x)|) + x + C$$

$$21) \int \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + \sin(x^2)} dx = \ln(|1 + \sin(x^2)|) + C$$

$$22) \int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = -\ln(|\sin(x) + \cos(x)|) + C$$

$$23) \int x \cot x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)} dx = \frac{\ln(|\sin x^2|)}{2} + C$$

Ejercicio 3

Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$,

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

1. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$

2. $\int a^{4x} dx = \frac{1}{4} \int 4(a^{4x}) dx = \frac{a^{4x}}{4 \ln a} + C$

3. $\int e^{-x} dx = -1 \int (-1)(e^{-x}) dx = \frac{-1}{e^x} + C$

4. $\int 4e^{3x} dx = 4 \left(\frac{1}{3}\right) \int 3(e^{3x}) dx = \frac{4e^{3x}}{3} + C$

5. $\int (3x^2 \cdot e^{x^3+2}) dx = e^{x^3+2} + C$

6. $\int (4e^{4-x}) dx = 4 \cdot (-1) \int (-1)(e^{4-x}) dx = -4(e^{4-x}) + C$

7. $\int (x^2 e^{x^3}) dx = \frac{1}{3} \int [3x^2 (e^{x^3})] dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$

8. $\int (e^x + 1)^2 dx = \int [(e^x)^2 + 2(e^x)(1) + 1^2] dx = \int e^{2x} dx + \int 2e^x dx + \int 1 dx =$
 $= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx + \int 2e^x dx + \int 1 dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C$

9. $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int [(e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2] dx$
 $= \int e^{2x} dx + \int 2 dx + \int e^{-2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + C$

10. $\int (e^x + x^6)^2 dx = \int [(e^x)^2 + 2(e^x)(x^6) + (x^6)^2] dx =$
 $= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx + \int 2(e^x)(x^6) dx \text{ (por partes)} + \int x^{12} dx =$
 $= \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720) + \frac{x^{13}}{13} + C -$

$$11. \int e^{-x^2+2} x dx = \frac{-1}{2} \int e^{-x^2+2} (-2x) dx = \frac{-(e^{-x^2+2})}{2} + C$$

$$12. \int \frac{e^{\ln x}}{x} dx = \int \frac{x}{x} dx = \int dx = x + C$$

$$13. \int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \frac{-1}{2} \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} dx = \frac{-1}{2} e^{\frac{1}{x^2}} + C$$

$$14. \int x e^{\sin x^2} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{\sin x^2} \cos x^2 dx = \frac{e^{\sin x^2}}{2} + C$$

$$15. \int (e^{3 \cos 2x} \sin 2x) dx = \frac{-1}{6} \int (-6) (e^{3 \cos 2x} \sin 2x) dx = \frac{-e^{3 \cos 2x}}{6} + C$$

$$16. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx = \frac{1}{5} \cdot 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$$

$$17. \int e^{\cos x} \sin x dx = - \int e^{\cos x} (-\sin x) dx = -e^{\cos x} + C$$

$$18. \int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x-3} \right) dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} x - e^{x-3} + C$$

$$19. \int e^{\tan 2x} \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} \int 2e^{\tan 2x} \sec^2 2x dx = \frac{e^{\tan 2x}}{2} + C$$

$$20. \int \frac{2x}{3} (3^{3+5x^2}) dx = \frac{2}{3} \int x (3^{3+5x^2}) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10} \right) \int 10x (3^{3+5x^2}) dx = \frac{1}{15} \left(\frac{3^{3+5x^2}}{\ln 3} \right) + C$$

$$\int \frac{x}{2} (2^{3-5x^2}) dx = \frac{1}{2} \int x (2^{3-5x^2}) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right) \int (-10x) (2^{3-5x^2}) dx = \frac{-1}{20} \left(\frac{2^{3-5x^2}}{\ln 2} \right) + C$$

Ejercicio 4

Sabiendo que $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int f'(x) \cdot \sin f(x) = -\cos f(x) + C$,

$\int \cos x dx = \sin x + C$ y $\int \cos f(x) \cdot f'(x) = \sin f(x) + C$ calcula:

$$1. \int \sin(2x + 8) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x + 8) 2 dx = \frac{-\cos(2x+8)}{2} + C$$

$$2. \int \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C$$

$$3. \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int 3(\cos(3x)) dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$4. \int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x(\sin x^2) dx = \frac{-\cos x^2}{2} + C$$

$$5. \int \left(\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = \frac{-3 \cos x}{4} - \frac{\sin x}{2} + C$$

$$6. \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int 2(\sin 2x) dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$$

$$7. \int e^x \cos e^x dx = \sin e^x + C$$

$$8. \int x \cos(2x^2) \cdot \sin(2x^2) dx = \frac{1}{4} \int 4x \cos(2x^2) \cdot \sin(2x^2) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x^2) + C$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x) dx = -\cos(\ln x) + C$$

Ejercicio 5

$$1) \int x(1 + \tan x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x(1 + \tan x^2) dx = \frac{1}{2} \tan(x^2) + C$$

$$2) \int (1 + \tan x)^2 dx = \int (1 + \tan^2 x + 2 \tan x) dx = \int ((1 + \tan^2 x) + 2 \tan x) dx = \tan x - 2 \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \tan x - 2 \ln|\cos x| + C$$

$$3) \int \tan^2 3x dx = \int (1 - 1 + \tan^2 3x) dx = \frac{1}{3} \int 3(1 + \tan^2 3x) dx - \int 1 dx = \frac{1}{3} \cdot \tan 3x - x + C$$

Ejercicio 6.

Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

$$1) \int (2 + 5x)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int t^4 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^5}{5} = \frac{(2+5x)^5}{25} + c$$

$$t = 2+5x \quad , \quad dt = 5 dx \rightarrow dx = \frac{1}{5} dt$$

$$2) \int (3 + 4x)^6 dx = \int t^6 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^6 dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^7}{7} = \frac{t^7}{28} = \frac{(3+4x)^7}{28} + c$$

$$t = 3+4x \quad , \quad dt = 4x dx \rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$$

$$3) \int 6x(3 + x^2)^5 dx = \int 6x \cdot t^5 \cdot \frac{1}{2x} dt = \int 3t^5 dt = 3 \int t^5 dt = \frac{3t^6}{6} = \frac{t^6}{2} = \frac{(3+x^2)^6}{2} + c$$

$$t = 3 + x^2 \quad , \quad dt = 2x dx \rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt$$

$$4) \int \left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3} \right] dx = \int \left[\frac{3}{t} \cdot \frac{1}{4} \right] dt + \int \left[\frac{3}{t^3} \cdot \frac{1}{4} \right] dt = \int \left[\frac{3}{4t} \right] dt + \int \left[\frac{3}{4t^3} \right] dt =$$

$$\frac{3}{4} \int \left[\frac{1}{t} \right] dt + \frac{3}{4} \int \left[\frac{1}{t^3} \right] dt = \frac{3}{4} \int \left[\frac{1}{t} \right] dt + \frac{3}{4} \int [t^{-3}] dt = \frac{3}{4} \ln|t| + \frac{3}{4} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{3}{4} \ln|t| - \frac{3t^{-2}}{8} =$$

$$\frac{3}{4} \ln|t| - \frac{3}{8t^2} = \frac{3}{4} \ln|5 + 4x| - \frac{3}{8(5+4x)^2} + c$$

$$t = 5+4x \quad , \quad dt = 4 dx \rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$$

$$5) \int (\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}) dx = \int (\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int (t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{3}}) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}} + \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{\frac{3}{2}} + \frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$t = 3+2x \quad , \quad dt = 2 \, dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

$$6) \int \left(\frac{e^x-4}{e^{2x}}\right) dx = \int \left(\frac{t-4}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{t-4}{t^3}\right) dt = \int \left(\frac{t}{t^3}\right) dt - \int \left(\frac{4}{t^3}\right) dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2}\right) dt - 4 \int \left(\frac{1}{t^3}\right) dt = \int t^{-2} dt - 4 \int t^{-3} dt = \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{4t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{t} + \frac{2}{t^2} = \frac{-1}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} + c$$

$$t = e^x \quad , \quad dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

$$7) \int \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx = \int t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4(x)}{4} + c$$

$$t = \sin(x) \quad , \quad dt = \cos(x) dx \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} dt$$

$$8) \int \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) dx = \int \left(\frac{\sin(x)}{t}\right) \cdot \frac{-1}{\sin(x)} dt = \int \frac{-1}{t} dt = -\ln|t| = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$t = \cos(x) \quad , \quad dt = -\sin(x) dx \rightarrow dx = \frac{-1}{\sin(x)} dt$$

$$9) \int \left(\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)}\right) dx = \int \left(\frac{\cos(x)}{t^4}\right) \cdot \frac{1}{\cos(x)} dt = \int \left(\frac{1}{t^4}\right) dt = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3t^3} = \frac{-1}{3\sin^3(x)} + c$$

$$t = \sin(x) \quad , \quad dt = \cos(x) dx \rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} dt$$

$$10) \int x\sqrt{x^2+4} dx = \int x\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x} dt = \int \left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right) dt = \int \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2}\right) dt = \frac{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{(x^2+4)^2}}{3} + c$$

$$t = x^2 + 4 \quad , \quad dt = 2x \, dx \rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt$$

$$11) \int \left(\frac{e^x+3}{e^{2x}}\right) dx = \int \left(\frac{t+3}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{t+3}{t^3}\right) dt = \int \left(\frac{t}{t^3}\right) dt + \int \left(\frac{3}{t^3}\right) dt =$$

$$\int t \cdot t^{-3} dt + \int 3t^{-3} dt = \int t^{-2} dt + \int 3t^{-3} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + \frac{3t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{t} - \frac{3}{2t^2} = \frac{-1}{e^x} - \frac{3}{2e^{2x}} + c$$

$$t = e^x \quad , \quad dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

$$12) \int \left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}}\right) dx = \int \left(\frac{-t+2}{t^3}\right) \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left(\frac{-t+2}{t^4}\right) dt = \int \left(\frac{-t}{t^4}\right) dt + \int \left(\frac{2}{t^4}\right) dt =$$

$$\int (-t) \cdot t^{-4} dt + \int 2t^{-4} dt = \int (-t^{-3}) dt + \int 2t^{-4} dt = \frac{t^{-2}}{-2} - \frac{2t^{-3}}{3} = \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{2e^{-3x}}{3} + c$$

$$t = e^x \quad , \quad dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

Ejercicio 7.

1) $\int 3x \cos x \, dx =$

$$dv = \cos x \, dx \quad u = 3x \quad ; \quad v = \sin x \quad du = 3 \, dx$$

$$= 3x \cdot (\sin x) - \int \sin x \cdot 3 \, dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x + C$$

2) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx =$

$$dv = \sin x \, dx \quad u = x^2 \quad ; \quad v = -\cos x \quad du = 2x \, dx$$

$$= x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2x \, dx =$$

$$dv = -\cos x \, dx \quad u = 2x \quad ; \quad v = -\sin x \quad du = 2$$

$$= (x^2 \cdot (-\cos x)) - [2x \cdot (-\sin x) - \int (-\sin x) \cdot 2 \, dx] =$$

$$= x^2 \cdot (-\cos x) + 2x \cdot (\sin x) - 2 \cdot (-\cos x) + C =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

3) $\int x^2 \ln x \, dx =$

$$dv = x^2 \, dx \quad u = \ln x \quad ; \quad v = \frac{x^3}{3} \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} \, dx =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

4) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx =$

$$dv = \sqrt{x} \, dx = x^{\frac{1}{2}} \, dx \quad u = \ln x \quad ; \quad v = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3} \, dx =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

5) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx =$

$$dv = x^{-2} \, dx \quad u = \ln x \quad ; \quad v = \frac{x^{-1}}{-1} \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \int \ln x \cdot x^{-2} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-2}}{-1} \, dx =$$

$$= \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\ln x \cdot \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$6) \int 2e^x \cdot \cos x \, dx = \quad (\text{cambios 1})$$

$$2e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2e^x \, dx = \quad (\text{cambios 2})$$

$$= 2e^x \cdot \sin x - [2e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2e^x \, dx] =$$

$$= 2e^x \cdot \sin x - [2e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot 2e^x \, dx] =$$

$$2e^x \cdot \sin x + 2e^x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot 2e^x \, dx \quad (\text{haciendo } \int \cos x \cdot 2e^x \, dx = I)$$

$$I = 2e^x \cdot \sin x + 2e^x \cdot \cos x - I$$

$$2I = 2e^x \cdot \sin x + 2e^x \cdot \cos x$$

$$I = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x + C$$

Cambios 1
 $dv = \cos x \, dx$
 $u = 2e^x$
 $v = \sin x$
 $du = 2e^x \, dx$

Cambios 2
 $dv = \sin x$
 $u = 2e^x$
 $v = -\cos x$
 $du = 2e^x \, dx$

Ejercicio 8

$$1) \int_1^3 \frac{dx}{2x} = \int_1^3 \frac{1}{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln(|x|) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(3)$$

$$2) \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} \, dx = \int_2^3 \frac{1}{2t} \, dt = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{2} \ln(|t|) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln(|x^2-1|) \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln(3^2-1) - \frac{1}{2} \ln(2^2-1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x) \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{3} \, dt = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t) \, dt = \frac{1}{3} (-\cos(t)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} (-\cos(3x)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos(3x)}{3} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos(3 \times \frac{\pi}{4})}{3} - \left(-\frac{\cos(3 \times \frac{\pi}{6})}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$5) \int_{-4}^4 |x| \, dx = \int_{-4}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8 + 8 = 16$$

$$6) \int_{-1}^1 \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) \, dx = \int_{-1}^1 3x^2 \, dx - \int_{-1}^1 2x \, dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \, dx = \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right) \Big|_{-1}^1 = \left(1^3 - 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) - \left((-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)\right) = 3$$

$$7) \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3}\right) \, dx = \int_{-1}^2 \frac{2}{x+2} \, dx - \int_{-1}^2 \frac{3}{x-3} \, dx = (2 \ln(|x+2|) - 3 \ln(|x-3|)) \Big|_{-1}^2 = 10 \ln(2)$$

$$8) \int_{-2}^2 \left(\frac{3a}{5} - \frac{x}{2}\right) \, dx = \int_{-2}^2 \frac{3a}{5} \, dx - \int_{-2}^2 \frac{x}{2} \, dx =$$

$$\left(\frac{3ax}{5} - \frac{x^2}{4}\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{3a \cdot 2}{5} - \frac{2^2}{4} - \left(\frac{3a \cdot (-2)}{5} - \frac{(-2)^2}{4}\right) = \frac{12}{5}a$$

Ejercicio 9

Halla el valor de **b** para que se cumpla $\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = -12$.

1. Se resuelve la integral con la incógnita b:

$$\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = 2b \frac{x^2}{2} - 3 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^b = bx^2 - x^3 \Big|_{-1}^b$$

2. Sustituimos los límites de integración:

$$(b \cdot b^2 - b^3) - (b \cdot (-1)^2 - (-1)^3) = b^3 - b^3 - b - 1 = -b - 1$$

3. Igualamos el resultado a -12:

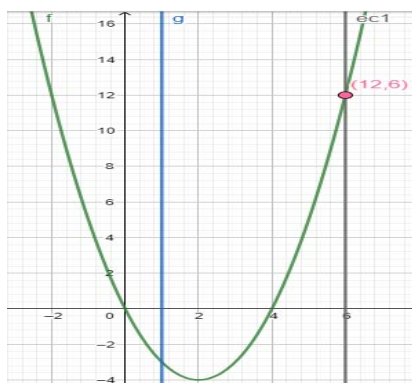
$$-b - 1 = -12 \rightarrow -b = -12 + 1 \rightarrow -b = -11 \rightarrow b = 11$$

Resultado: b=11

Ejercicio 10

Halla el área entre la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje de abscisas, y las rectas $x=1$ y $x=6$.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:

$$f(x) = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

3. Hallamos el área de las dos zonas de áreas obtenidas; de $x=1$ a $x=4$, y de $x=4$ a $x=6$:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 \right) = -9u^2$$

Como es un área tomamos su valor positivo.

$$\int_4^6 (x^2 - 4x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_4^6 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_4^6 = \left(\frac{6^3}{3} - 2 \cdot 6^2 \right) - \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 \right) = \frac{32}{3}u^2$$

4. Sumamos ambas áreas:

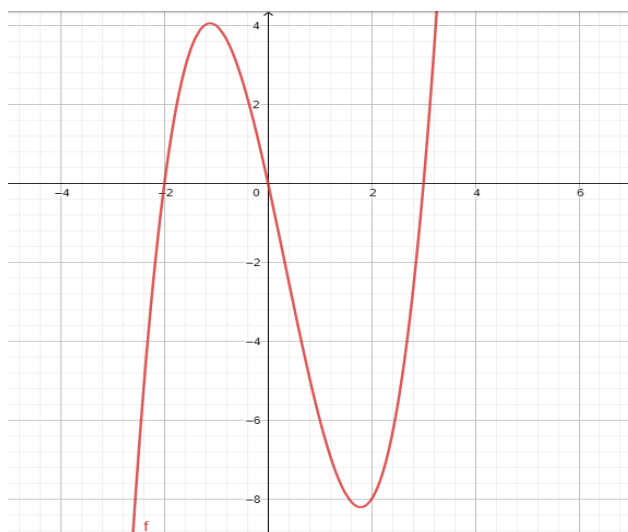
$$\frac{32}{3} + (9) = \frac{59}{3} \text{ u. a.}$$

Resultado: El área es $\frac{59}{3}$ u.a.

Ejercicio 11

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \rightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$$

3. Hallamos el área de las dos zonas obtenidas; de $x=-2$ a $x=0$, y de $x=0$ a $x=3$:

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx - \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx = \\ & \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 = \\ & \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3 \cdot (-2)^2 \right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 \right) = 10,42 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Resultado: El área es $\frac{125}{12}$ u.a.

Ejercicio 12

Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e $y - x - 1 = 0$

Ponemos las ecuaciones en función de x .

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

Igualamos $f(x)$ y $g(x)$ para hallar los puntos de corte: $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = x + 1$

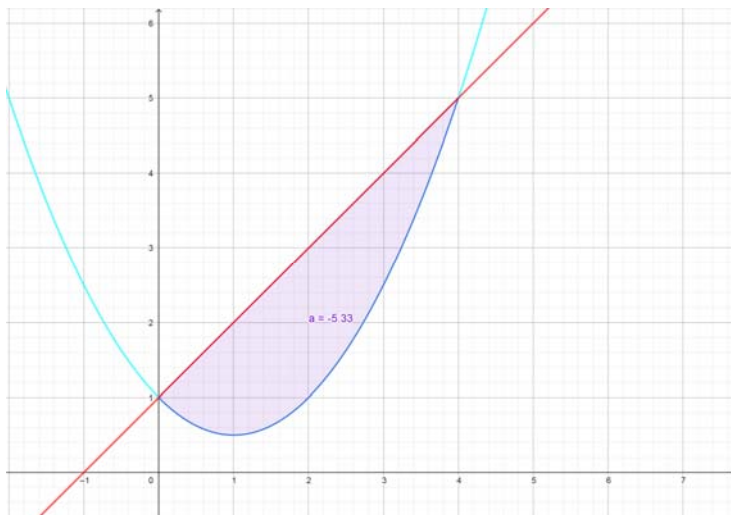
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \quad ; \quad x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad ; \quad \frac{x}{2} = 2 \quad ; \quad x = 2 \cdot 2 \quad ; \quad x = 4$$

Los puntos de corte son $x=0$ y $x=4$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_0^4 \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) - (x + 1) \right) dx \right| = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 - x - 1 \right) dx \right| \\ &= \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{6} - x^2 \right]_0^4 \right| = \left| \left(\frac{4^3}{6} - 4^2 \right) - \left(\frac{0^3}{6} - 0^2 \right) \right| = \left| \left(\frac{64}{6} - 16 \right) - (0) \right| = \\ &= \left| \left(-\frac{16}{3} \right) - 0 \right| = \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{16}{3} \text{ u. a.} = 5,3 \text{ u. a.} \end{aligned}$$



b)

$$f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x^2$$

Igualamos $f(x)$ y $g(x)$ para hallar los puntos de corte:

$$\sqrt{x} = x^2 \quad ; \quad (\sqrt{x})^2 = (x^2)^2 \quad ; \quad x = x^4 \quad ; \quad x^4 - x = 0 \quad ; \quad x(x^3 - 1) = 0$$

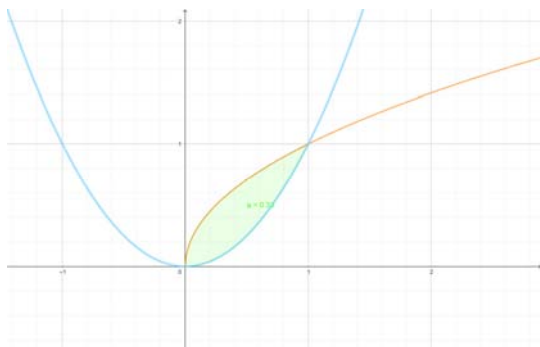
$$x = 0$$

$$(x^3 - 1) = 0 \quad ; \quad x^3 = 1 \quad ; \quad x = \sqrt[3]{1} \quad ; \quad x = 1$$

Los puntos de corte son $x=0$ y $x=1$.

$$\text{Área} = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{2\sqrt{x^3} - x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$\left(\frac{2\sqrt{1^3}-1^3}{3}\right) - \left(\frac{2\sqrt{0^3}-0^3}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3} u. a.$$



c)

$$f(x) = x^2 + x + 4 \quad y \quad g(x) = -x^2 + 2x + 5$$

Iguamos $f(x)$ y $g(x)$ para hallar los puntos de corte:

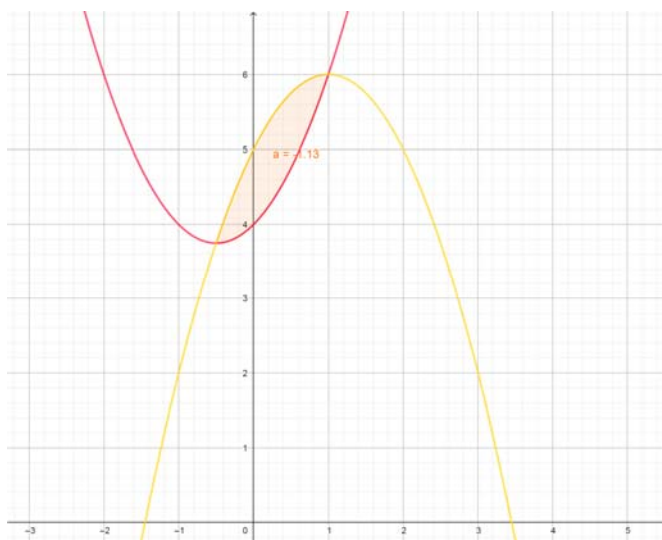
$$x^2 + x + 4 = -x^2 + 2x + 5 \quad ; \quad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Los puntos de corte son $x=1$ y $x=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 ((x^2 + x + 4) - (-x^2 + 2x + 5)) dx \right| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 (x^2 + x + 4 + x^2 - 2x - 5) dx \right| \\ &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x^2 - x - 1) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \right| = \left| \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left(\frac{2 \cdot (-\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \right| \\ &= \left| \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{7}{24}\right) \right| = \left| -\frac{5}{6} - \frac{7}{24} \right| = \left| -\frac{9}{8} \right| = \frac{9}{8} u. a. = 1,125 u. a. \end{aligned}$$



Ejercicio 13

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

1er paso: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \quad \rightarrow \quad x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0; x = -2; x = 3$$

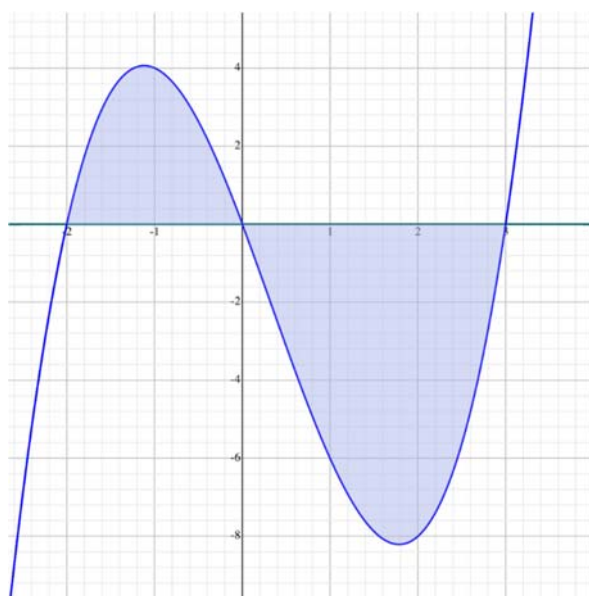
$$g(x) = 0$$

2º paso: Se calcula el área entre las curvas como:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x) dx \right| = \\ &= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \\ &= \left| 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right] \right| + \left| 0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2 \right] \right| = \frac{253}{12} = \mathbf{21,0833 \, u^2} \end{aligned}$$

— $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$
— $g(x) = 0$

**Ejercicio 14**

Calcula el área de la porción del plano que limitan las curvas $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

e $y - x - 1 = 0$ ($y = x + 1$)

1er paso: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \quad g(x) = x + 1 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = x + 1 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = 0$$

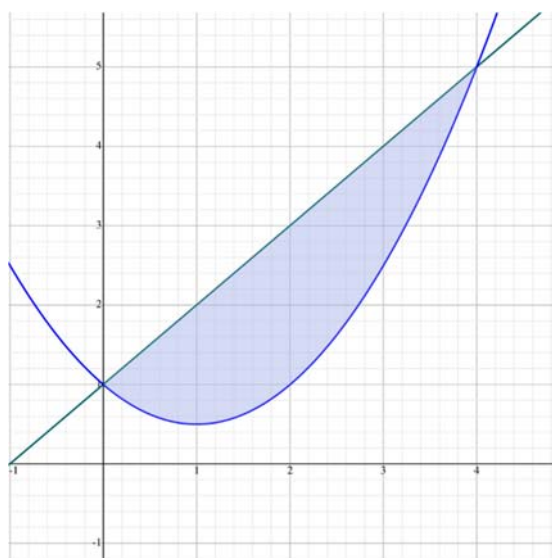
$$x = 0; \quad x = 4$$

2º paso: Se calcula el área entre las curvas como:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) - (x + 1) \right] \, dx \right| = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \, dx \right| = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^4 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4^3}{3} - 4^2 \right) - 0 = \frac{16}{3} = 5,3 \, u^2$$

$$\begin{aligned} \text{---} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ \text{---} g(x) &= x + 1 \end{aligned}$$



Ejercicios Autoevaluación

- 1) Los valores de a, b y c para los que $F(x) = ax^3 - be^x + c \sin x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5 \cos x$ son:

$$F(x) = ax^3 - be^x + c \sin x$$

$$f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5 \cos x$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = 3ax^2 - be^x + c \cos x$$

$$a = 1 \quad b = 7 \quad c = 5$$

La respuesta correcta es la b)

- 2) La integral indefinida $\int x\sqrt{2x^2 + 3} dx$ vale:

$$\int x\sqrt{2x^2 + 3} dx = \int x(2x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int 4x(2x^2 + 3)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(2x^2 + 3)^3}}{6} + C$$

La respuesta correcta es la b)

- 3) La integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ vale:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \int \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} dx$$

$$A(1+x) + B(1-x) = 1$$

$$x=1 \quad 2B = 1 \quad B = \frac{1}{2}$$

$$x=-1 \quad 2A = 1 \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{1+x} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x| dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

La respuesta correcta es la d)

- 4) Al integrar por partes $\int x \cdot \sin x dx$ se obtiene:

$$u = x \quad du = 1 dx$$

$$dv = \sin x \quad v = -\cos x$$

$$\int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot dx$$

$$x \cdot (-\cos x) + \sin x = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

La respuesta correcta es la c)

- 5) La integral $\int (x^2 + 4x + 13) dx$ vale:

$$\int (x^2 + 4x + 13) dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x + C$$

La respuesta correcta es la d)

6) La integral $\int e^x \cos e^x dx$ vale:

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$$

Con esta fórmula podemos ver que la derivada de $f(x)$ en este caso e^x es la misma e^x
 Luego $\int e^x \cos e^x dx = \sin e^x + C$

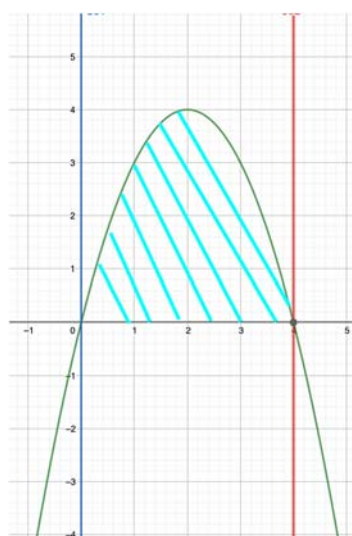
La respuesta correcta es la a)

7) La integral definida $\int_0^\pi \cos x dx$ vale:

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - (\sin 0) = 0$$

La respuesta correcta es la c)

8) Para hallar el área comprendida entre la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=4$, debemos representar dicha función y ver el área que comprende:

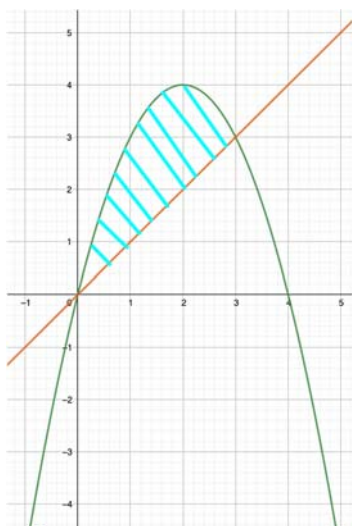


Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta la función con el eje y con las rectas, comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

$$\begin{aligned} \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2} \right) - (0) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la b)

- 9) Para hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$, debemos representar ambas funciones y ver el área que comprenden:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta $f(x)$ con $g(x)$, debemos sacar los puntos de corte y, una vez hallados comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

Puntos de corte: Para hallarlos debemos igualar las funciones y despejar la incógnita "x".

$$-x^2 + 4x = x$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$0 = x(x - 3)$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

Ahora ya podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3$$

$$\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - (0) = \frac{9}{2}$$

La respuesta correcta es la a)

- 10) La regla de Barrow sirve para...:

resolver integrales definidas.

La respuesta correcta es la c)