Actividades y ejercicios
1º Bachillerato
Matemáticas Generales

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores Marea Verde

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

CAPÍTULO 1: SENTIDO DE LAS OPERACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

0. TE CONVIENE RECORDAR

1. Calcula:
   a) –20 + 15 b) –2 · (–20 + 15) c) –20 : (10 – 2(–20 + 15))
   d) (–80 –20 : (10 – 2(–20 + 15))) · (3 – 2 · 3^2)
2. Calcula:
   a) –10 + 20 : (–5) b) (–10 + 20) : (–5) c) –100 : ((–20) : (–5))
   d) (–100 : (–20)) : (–5) e) $\sqrt{36} \cdot 4$
3. Calcula:
   a) $3-(4\cdot3-2\cdot5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$
   c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot3-3\cdot4)^2-(2-4)^3$
4. Utiliza la calculadora para obtener:
   a) $5.7-(6.79\cdot2.3-2.1\cdot5.6)^2-(3.42-5.9)^3$
   b) $5.76-3.5^2-2.98\cdot(-5.54)-(7.29-9.36)^2$
   c) $70.65-28.54\cdot(3.62-566)^2+2.46\cdot(-3.82)+8.91-(-2.76)^2$
   d) $2.22-(2.77\cdot3.48-39\cdot4.23)^2-(2.45-4.26)^3$

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

5. Realiza las siguientes operaciones:
   a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)
   d) +11ab + (+7) · (+6ab – 8ab) e) –7a^2b – [+4a^2b – (–6a^2b) : (+6)] f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]
6. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:
   a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50
   c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)
7. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?
8. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

9. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

10. Realiza las operaciones:

a) $31.3+5.97$ b) $3.52\cdot6.7$ c) $11.51-4.8$ d) $19.1-7.35$
e) $4.32+32.8+8.224$ f)$46.77-15.6+2.3$ g) $1.16\cdot3.52$ h) $3.2\cdot5.1\cdot1.4$
i) $2.3\cdot4.11\cdot3.5$ j) $4\cdot(3.01+2.4)$ k) $5.3\cdot(12+3.14)$ l)$3.9\cdot(25.8-21.97)$

11. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:
    a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23; d) 2.353535…..
    e) 87.2365656565….; f) 0.9999…..; g) 26.5735735735…

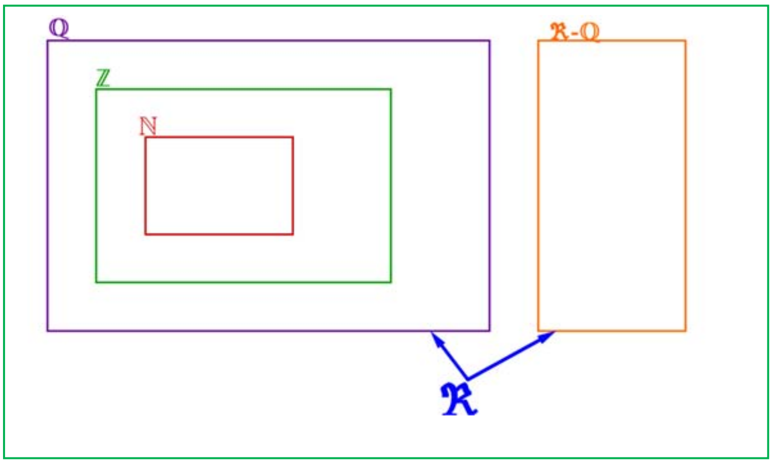
12. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.
    a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11
13. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.
14. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1.4, pues $(1.4)^2$ es distinto de 2; no 1.41 pues $(1.41)^2$ es distinto de 2; ni 1.414, pues $(1.414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.

15. Halla la expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

16. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	$\Re$
–7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212…					
π					
1/2					
1.99999…					

17. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



18. ¿Puedes demostrar que 4.99999… = 5?, ¿cuánto vale 2.5999…? Escríbelos en forma de fracción.

19. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

3. APROXIMACIONES Y ERRORES

20. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

Número	1	2	3	4
1/7				
95 549	100 000			
30 000	$3\cdot 10^4$			
1.9995				2.000

21. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

22. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 6.3 b) 562 c) 562.00

23. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

4. POTENCIAS

24. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

25. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

26. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

27. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.
28. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8\,000}$ factorizando previamente los radicandos
29. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$
30. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$
31. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$
32. Escribe en notación científica:
    a) 400 000 000 b) 45 000 000 c) 34 500 000 000 000 d) 0.0000001 e) 0.00000046
33. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
34. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.
35. Efectúa las operaciones en notación científica:
    a) $0.000481 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $300\,000\,000 - 5.4 \cdot 10^{6} + 7.2 \cdot 10^{5}$
    c) $(2.9 \cdot 10^{5}) \cdot (5.7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3.8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3.5 \cdot 10^{6}) \cdot (8.1 \cdot 10^{-4})$
    e) (4.8 · 10–8) : (3.2 · 10–3) f) (6.28 · 10–5) · (2.9 · 102) : (3.98 · 10–7)

5. INTERPRETACIÓN DE INFORMACIÓN NUMÉRICA EN DOCUMENTOS

RECIBO PARA EL CLIENTE

IVA%	IVA	+ P Neto	= PVP
A 4%	0,17	4,34	4,51
B 10%	3,32	33,20	36,52
C 21%	2,42	11,54	13,96
Suma	5,91	49,08	54,99

36. Comprueba los cálculos usando la calculadora: ¿Cuántos artículos llevan la letra A? ¿Cuánto suma su precio neto? ¿Si se les aplica un IVA súper-reducido del 4 %, a cuánto asciende dicho IVA? ¿Está bien calculado en el recibo adjunto?

37. Lo mismo con los artículos que llevan la letra B, los del IVA reducido del 10 %. ¿Cuántos hay?, ¿A cuánto asciende dicho IVA? ¿Está bien calculado? Lo mismo con los que llevan la letra C. Observa que hay dos, uno de 11.97 y otro de 1.99 que suman 13.96, que es el precio total, de dicho precio, ¿cuánto es el IVA al 21 % y cuánto el precio neto? En efecto en el recibo pone: IVA: 2.42, Precio Neto: 49.08, y la suma de ambas cantidades es 13.96.

38. Busca información sobre los bienes y servicios a los que se aplica cada uno de los tipos de IVA y escribe tres ejemplos en cada caso
39. En las facturas en forma de ticket aparecen los detalles acerca del IVA que se ha aplicado a cada artículo o la suma total del IVA. De acuerdo a la información que has observado en la actividad anterior, calcula el precio final de cada artículo en esta compra, teniendo en cuenta que los precios se muestran sin IVA.

Artículo	Precio Neto	IVA	Precio final
Novela gráfica: “El final del Verano”, Tillie Walden	19.14 €		
Cómic:“Marvel-Verse: Moon Girl”, Natacha Bustos	14.42 €		
Lápices de colores acuarela	20.65 €		
Estuche	14.05 €		

40. Esta imagen corresponde al dorso de una factura de electricidad en la que se detallan todos los conceptos que intervienen en el importe final.

¿Puedes hacer algún comentario sobre todos estos datos?

COMERCIALIZADOR
DE ÚLTIMO RECURSO
Grupo IBERDROLA

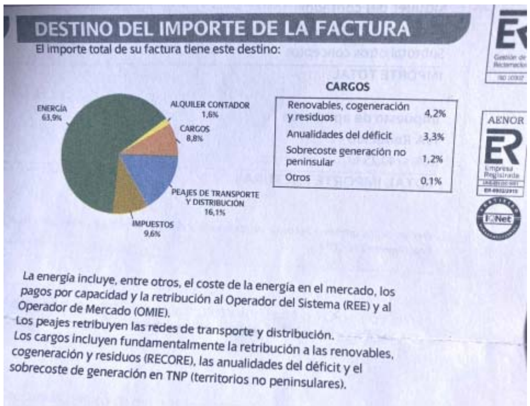
CURENERGÍA COMERCIALIZADOR DE ÚLTIMO RECURSO S.A.U.
CIF A-95554630
Domicilio social: Plaza Euskadi 5, 48009 Bilbao

RESUMEN DE LA FACTURA

Por potencia contratada		7,46 €
Por energía consumida		34,63 €
Impuesto electricidad		0,21 €
Alquiler del contador		0,83 €
IVA Reducido (*)	10% s/43,13 €	4,31 €
TOTAL IMPORTE FACTURA:		47,44 €

41. El resumen de esa factura aparece en la cara A y es el siguiente:
¿Te resulta posible relacionar los cálculos de este resumen con la información anterior?
Veamos más datos que aparecen en las facturas de electricidad.

42. El “Destino del importa de la factura”. A) Haz una lista de dichos Destinos? B) Compara la energía consumida con el total del importe. Haz un porcentaje. C) Intenta discriminar cuántos de dichos Destinos son impuestos.



DESTINO DEL IMPORTE DE LA FACTURA

El importe total de su factura tiene este destino:

CARGOS	
Renovables, cogeneración y residuos	4,2%
Anualidades del déficit	3,3%
Sobrecoste generación no peninsular	1,2%
Otros	0,1%

La energía incluye, entre otros, el coste de la energía en el mercado, los pagos por capacidad y la retribución al Operador del Sistema (REE) y al Operador de Mercado (OMIE).
Los peajes retribuyen las redes de transporte y distribución.
Los cargos incluyen fundamentalmente la retribución a las renovables, cogeneración y residuos (RECORE), las anualidades del déficit y el sobrecoste de generación en TNP (territorios no peninsulares).

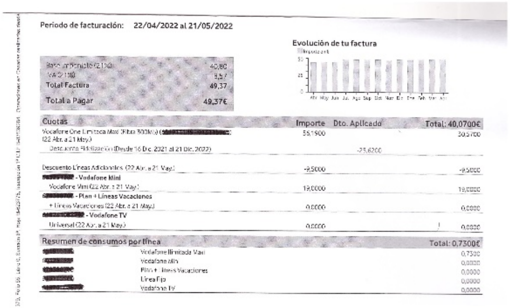
INFORMACIÓN DEL CONSUMO ELÉCTRICO

Su consumo en el periodo facturado ha sido: 100 kWh
Puede consultar su consumo horario en el portal web de su distribuidora (www.i-de.es/clientes).

Su consumo medio diario en este último periodo facturado ha sido: 1,64 €
Su consumo medio diario en los últimos 14 meses ha sido: 1,14 €
Su consumo acumulado del último año ha sido de 1.165 kWh
Las potencias máximas demandadas en el último año han sido 2,87 kW en P1 (punta) y 2,48 kW en P2 (valle).
Lectura actual (real) (9 de febrero de 2022)
Lectura en P1 (punta): 003454 kWh — Consumo en P1: 28 kWh
Lectura en P2 (llano): 004406 kWh — Consumo en P2: 26 kWh
Lectura en P3 (valle): 000506 kWh — Consumo en P3: 46 kWh

INFORMACIÓN SOBRE RECLAMACIONES

43. La “Información sobre el consumo eléctrico”. Una de las dificultades con que nos encontramos es la nomenclatura: P1, es hora punta, P2, llano, y P3, valle. Haz un informe sobre dicho consumo eléctrico.



Periodo de facturación: 22/04/2022 al 21/05/2022

Base imponible (21%)	40,80
IVA (21%)	8,57
Total Factura	49,37
Total a Pagar	49,37€

Cuotas	Importe	Dto. Aplicado	Total: 40,0700€
Vodafone One Ilimitada Maxi (Fibra 300Mb) ([redacted]) (22 Abr. a 21 May.)	55,1900		30,5700
Descuento Fidelización (Desde 16 Dic. 2021 al 21 Dic. 2022)		-25,6200	
Descuento Líneas Adicionales (22 Abr. a 21 May.)	-9,5000		-9,5000
[redacted] - Vodafone Mini			
Vodafone Mini (22 Abr. a 21 May.)	19,0000		19,0000
[redacted] - Plan + Líneas Vacaciones			
+ Líneas Vacaciones (22 Abr. a 21 May.)	0,0000		0,0000
[redacted] - Vodafone TV			
Universal (22 Abr. a 21 May.)	0,0000		0,0000

Resumen de consumos por línea		Total: 0,7300€
[redacted]	Vodafone Ilimitada Maxi	0,7300
[redacted]	Vodafone Mini	0,0000
[redacted]	Plan + Líneas Vacaciones	0,0000
[redacted]	Línea Fija	0,0000
[redacted]	Vodafone TV	0,0000

44. Observa esta factura de telefonía móvil. Comprueba que el total a pagar corresponde a los importes de las diferentes cuotas.

45. Javier quiere renovar su consola por otra más moderna y ha encontrado estas dos ofertas en internet para los mismos productos:

OFERTA 1: Consola 295 €, cable 39.99 €. Y se puede acceder a un descuento de 90 € si entrega su consola usada. Esta opción debe realizarla antes de finalizar el mes.

OFERTA 2: Consola 245 €, cable 34.99 €. La oferta se completa con un regalo de un juego por valor de 25 € y una tarjeta de 20 €.

¿Cuál de las dos ofertas, desde tu punto de vista, es más interesante? Además de realizar los cálculos, ¿puedes añadir una valoración? ¿Qué ventaja supone entregar la propia consola?

46. Lola quiere comprar un nuevo mando para su consola. Busca ofertas en internet y ha encontrado buenas ofertas en mandos inalámbricos entre 25 € y 33 €. Observa que, en la misma página, le ofrecen 120 € si entrega su consola y compra una nueva por 289.99 € y que el importe total de la compra se puede pagar en tres plazos mensuales sin intereses.

Lola hace cuentas y busca en cuanto está valorada su consola en el mercado de segunda mano. El pago aplazado para ella es imprescindible para decidirse a aceptar la oferta, pero tiene dudas de cuánto podría obtener vendiendo su consola.

¿Puedes ayudar a Lola a resolver sus dudas “buceando” en la red? El precio de la consola nueva te orienta sobre el tipo de producto del que se trata en el enunciado.

47. ¿Cuánto vale un tatuaje?

Si estás pensando hacerte un tatuaje has de tener en cuenta las diferentes tarifas que se aplican según tamaño, complejidad del diseño, negro o de varios colores, las sesiones necesarias, etc., y por supuesto el “caché” de quien lo realiza que, como en todos los trabajos artesanos, es un valor intangible que incorpora a sus tarifas.

b) Un tatuador ha realizado quince tatuajes de diferente tamaño y dificultad consiguiendo una recaudación, ya descontado el 21 % de IVA, de unos 8 000 € netos. ¿Puedes elaborar una factura global que refleje los trabajos que ha realizado de acuerdo al total cobrado por los tatuajes?

48. Indica cómo se expresan los decimales y los miles que en estos documentos financieros, facturas, nóminas…

49. En la factura anterior, ¿qué porcentaje se paga de Cuota de la Seguridad Social?

50. Comprueba: a) la suma de los conceptos retributivos. b) Los descuentos.

51. Usa la calculadora y mira si el IRPF está bien calculado.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Realiza las operaciones:
a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8
3. Utiliza la calculadora. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?
4. Utiliza la calculadora. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?
5. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{8}$ m.
6. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.
7. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.
8. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.
9. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.
10. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?
11. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?
12. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.
13. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:
a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo en las decenas.
14. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?
15. ¿Cómo medir el grosor de un folio con un error inferior a 0.0001 cm con la ayuda de una regla milimetrada y la de el/la ordenanza del instituto?, hazlo.
16. ¿Cuántos metros hay de diferencia al calcular el perímetro de la Tierra poniendo $\pi \approx$ 3.14 en lugar de su valor real?, ¿es mucho o poco? Básicamente tienes que hallar el error absoluto y el relativo. *Radio aproximadamente 6 370 km
17. Los antiguos hicieron buenas aproximaciones de Pi, entre ellas citemos a Arquímedes (siglo III a. C.) con 211875/67441 y a Ptolomeo (siglo II d. C.) con 377/120. ¿Cuál cometió menor error relativo?
18. Medir el tamaño de las pantallas en pulgadas (") ya no parece muy buena idea. La medida se refiere a la longitud de la diagonal del rectángulo, así, una televisión de 32" se refiere a que la diagonal mide 32". Eso no da mucha información si no sabemos la proporción entre los lados. Las más usuales en las pantallas de televisión y ordenador son 4:3 y 16:9. Si una pulgada son 2.54 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de una pantalla de 32" con proporción 4:3?, ¿y si la proporción es 16/9? ¿Cuál tiene mayor superficie?
19. Si 100 pulgadas son 254 cm:
    a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19.2 pulgadas y largo/alto = 4/3
    b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9.
20. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡! Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido)).
21. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?
22. Halla un número entero de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.
23. Darío da pasos de 3/5 de metro, su perro Rayo da pasos de ¼ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da

360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?

24. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que le queda el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que le queda las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aún tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Potencias

25. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

26. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

27. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4\right)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

28. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

29. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 128 560 0000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35 000 000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

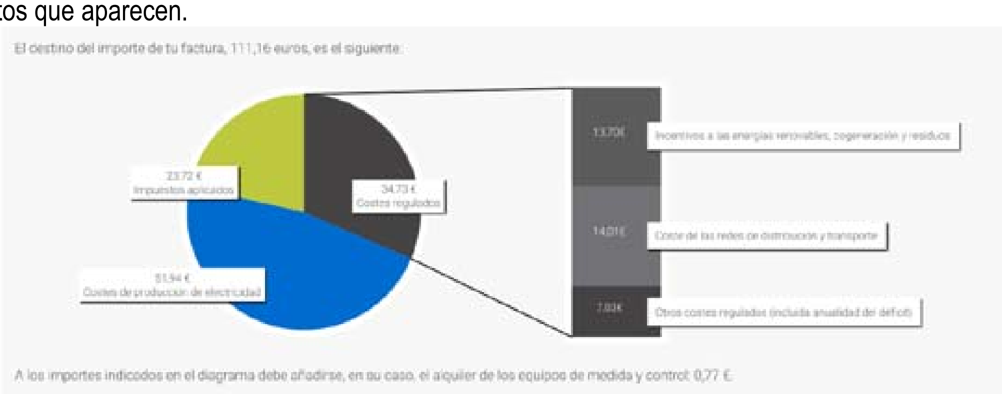
Documentos financieros

SERVICIO	IMPORTE
Internet + Llamadas nacionales gratis + 60 min/mes a móvil gratis + Línea Jazztel	29,3450 €
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	0,0000 €
Base Imponible	29,3450 €
IVA (21%)	6,1625 €
Total a pagar	**35,51 €**

1. En esta factura de telefonía debes comprobar si todos los cálculos son correctos. ¿Qué tipo de IVA se paga? ¿Sobre qué importe se paga dicho IVA?

Internet + Llamadas nacionales gratis + 60 min/mes a móvil gratis + Línea Jazztel	**29,3450 €**
Cuota mensual Pack Ahorro Internet Máxima Velocidad + Llamadas nacionales gratis + 60 min móvil gratis	15,9500 €
* Precio promocional durante 12 meses, después 19,95 euros/mes para siempre	
Descuento Fidelización	-1,5950 €
Cuota mensual de mantenimiento de Línea	14,9900 €
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	**0,0000 €**
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	GRATIS

2. Las facturas de la luz son probablemente las más complicadas pues en ellas aparecen muchos conceptos. Compara dos facturas de la luz diferentes para conocer qué destino tiene la cantidad pagada. Infórmate y escribe un informe. Explica los conceptos que aparecen.



Escribe que se entiende por "Costes regulados", y por "Cargos". En cada caso cuál es el porcentaje de los "Costes de producción de la electricidad"

3. Busca dos facturas y analízalas.
4. Busca una nómina y analízala.
5. Busca una noticia financiera en la prensa y coméntala.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué afirmación es falsa. El número –0.3333333… es un número

   a) real   b) racional   c) irracional   d) negativo

2. Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150; 7/50 tienen una expresión decimal:

   a) periódica, periódica, exacta   b) periódica, exacta, periódica   c) periódica, exacta, exacta

3. La expresión decimal 0.63636363…. Se escribe en forma de fracción como

   a) 63/701   b) 7/11   c) 5/7   d) 70/111

4. Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

   a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4   c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

5. Al efectuar la operación 0.000078 + 2.4 · 10^{-5} se obtiene:

   a) 3.6 · 10^{-10} b) 1.8912 · 10^{-10} c) 10.2 · 10^{-5} d) 18.72 · 10^{-5}

6. El resultado de esta operación es: (0.00098 + 3 · 10^{-6} – 4.2 · 10^{-4}) · 2.5 · 10^{5}

   a) 124.5   b) 2 407.5   c) 107.5   d) 140.75

7. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$

   a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$

8. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$

   a) 1/512;   1/16   y $1/10^{10}$ b) $1/8^3$;   - $1/2^4$ y $1/10^{10}$

9. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83 \cdot 10^{9} + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10}$

   a) $6.86283.10^{12}$ b) $6.86283 \cdot 10^{13}$ c) $6.8623 \cdot 10^{11}$ d) $6.8628 \cdot 10^{12}$

10. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24 \cdot 10^{10}}{6.3 \cdot 10^{-7}}$

    a) $0.8317.10^{17}$ b) $8.317 \cdot 10^{16}$ c) $8.317 \cdot 10^{15}$ d) $83.17.10^{16}$

RESUMEN

Prioridad de las operaciones	1º Paréntesis interiores, 2º Potencias y raíces, 3º Productos y divisiones, 4º Sumas y restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Número Racional	Un número *r* es racional si puede escribirse como *r* = *a/b* con *a, b* enteros y $b \neq 0$.	2; 3/8; —7/2 son racionales. También 0.125 y 2.6777… $\sqrt{2}$ y π no lo son.
Fracción irreducible	Se obtiene dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Numerador y denominador son primos entre sí.	360/840 = 3/7, la última es irreducible.
Conjuntos de números	**Naturales** ➔ N = {1, 2, 3, …}; **Enteros** ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionales** ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionales** ➔ I = $\Re$ – Q; $\Re$= Q∪I	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ *x* = 1.7252525… = 854/495
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1.5; 0.333333333….
Números reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0.333333; π; $\sqrt{2}$
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: se divide el número sin la coma entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales. Expresión decimal periódica: Se multiplica *N* por potencias de *10* hasta conseguir 2 números con la misma parte decimal, se restan y se despeja *N*.	3.175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2.0333… 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183 ➔ *N* = 183/90 = 61/30.
Operaciones con potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican os exponentes.	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Notación científica: operaciones	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números −n para pequeños números	$320\,000\,000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Potencia de exponente negativo o racional	$a^{-n} = 1/a^n$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{-3} = 1/8^3$ $8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Documentos financieros	Una **factura** es un documento mercantil en el que se refleja una compraventa de bienes o servicios, y aparece con detalle la transacción y el IVA aplicado. En una **nómina** aparecen los conceptos retributivos y los descuentos.	

CAPÍTULO 2: RELACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente.
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?
2. Medio kilo de cerezas costó 1.90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.
3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.
4. Completa las siguientes proporciones:
a) $\frac{5}{22}=\frac{45}{x}$ b) $\frac{0,3}{x}=\frac{7}{14}$ c) $\frac{x}{9,5}=\frac{4,7}{1,9}$ d) $\frac{0,05}{100}=\frac{x}{400}$
5. Ordena estos datos para componer una proporción:
a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0.36; 0.06; 0.3; 1.8
6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2.5:

0.5	9	6		20			2.5
			50		8	25	

7. Calcula mentalmente:
a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.
8. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

9. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

2. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

10. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

11. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:
a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8}=\frac{x}{60}$
12. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?
13. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?
14. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?
15. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?
16. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?
17. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1 250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5 823 km?
18. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?
19. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?
20. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:
a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$
21. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?
22. Un depósito de 2 000 litros de capacidad contiene en este momento 1 036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?
23. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

24. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.
25. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.
26. Copia en tu cuaderno y completa:
    a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
    b) Me han descontado el 9 % de una factura de …………….. € y he pagado 280 €.
    c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
27. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?
28. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?
29. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.
30. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

3. PROPORCIONALIDAD INVERSA

31. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

32. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?
33. En un huerto ecológico se utilizan 5 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
34. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1.7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2.3 kilogramos?
35. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?
36. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0.07		8	
Magnitud B	0.25		5		6.4

37. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?
38. Si 16 bombillas originan un gasto de 4 500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?
39. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?
40. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?
41. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?
42. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?
43. Si 4 máquinas fabrican 2 400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7 000 piezas durante 10 horas diarias?

4. REPARTOS PROPORCIONALES

44. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
45. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?

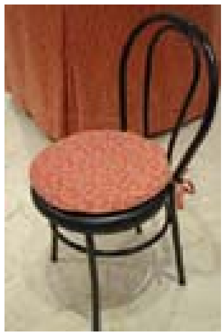
46. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
47. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
48. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
49. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?
50. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?
51. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3 000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?
52. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?
53. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

5. TASAS Y NÚMEROS ÍNDICE

54. Calcula los intereses de un depósito de 15 000 € a tres años con un **TIN del 6 %**
55. ¿Se obtienen los mismos intereses por esos 15 000 €, si consideramos un 2 % cada año en los tres años?
56. ¿Cuántos años deben depositarse 1 500 € al 3 % anual para obtener 90 € de intereses?
57. Calcula la TAE que se aplica a un préstamo de 15 000 € al 9 % TIN anual a devolver mensualmente en 5 años
58. ¿Qué tipo de interés nominal ha dado como resultado una TAE del 7.012 % para un depósito que percibe los intereses trimestralmente
59. Aplica el simulador del Banco de España para calcular la TAE de un préstamo de 12 000 € al 5.8 de tipo nominal con unos gastos de 250 € a amortizar en tres años con periodicidad mensual.
60. Utiliza el simulador para comparar estas dos opciones de préstamo:
    a) 25 000 €, 540 € de gastos, 6.25 TIN, a amortizar en 8 años.
    b) 25 000 €, 400 € de gastos, 6.5 TIN, a amortizar en 8 años.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

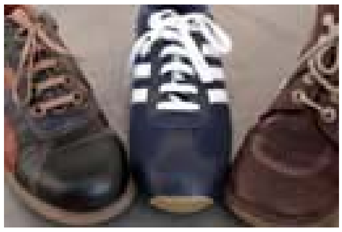
1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
2. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?
3. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?



4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?
5. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?
6. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?
7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15.9			0.01	
Magnitud B		6	0.1		10

8. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
9. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1 500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
10. Si un litro de leche de 0.85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
11. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?



12. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
13. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
14. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?
15. Por liquidar una deuda de 35 000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30 800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
16. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
17. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
18. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?
19. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
20. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?
21. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?
22. Si 15 operarios instalan 2 500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valla?
23. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

24. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.
25. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?
26. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
27. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

28. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
29. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
30. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
31. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
32. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

¿?¿?

33. Calcula los interés a pagar por un préstamo de 5 000 € con un TIN del 4% anual y un año de devolución.
34. Calcula los intereses nominales que pagaremos por esos 5 000 € si el plazo de devolución es de 18 meses con un TIN del 3 % semestral.
35. Solicitamos un préstamos de 2 500 € con un TIN mensual del 2.5 %. Si lo devolvemos justo al mes siguiente, ¿cuántos intereses nominales pagamos?
36. Hemos depositado 6 000 € con una TIN anual del 5%. ¿Qué intereses nominales obtenemos al semestre?
37. Calcula la TAE que se aplica a un préstamo de 15 000 € al 2.5 % anual a devolver en 5 años.
38. Calcula el tipo de interés que se ha aplicado a un préstamo de 6 000 € con una TAE de 4.0625 % anual a pagar en 4 años.

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación
   a) Proporcional directa b) proporcional inversa c) no es proporcional
2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:
   a) 22.4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €
3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699.20€. El importe total de la factura sin descuento era:
   a) 920 € b) 1 220 € c) 880 €
4. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

   a) 612.5; 1000; 0.0005; 0.5 b) 1.25; 2.5; 125; 0.125 c) 62; 500; 0.005; 0.05
5. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:
   a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €.
6. Un artículo que costaba 2 000 € se ha rebajado a 1 750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
   a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %
7. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
   a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas
8. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

   a) 40; 200; 11.5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500
9. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:
   a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t
10. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
   a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

RESUMEN

Concepto	Definición	*Ejemplo*
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son **directamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, k, es la **razón de proporcionalidad directa**.	Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rollos, pues $k = 300/24 = 12.5$, $y = 12.5x$, por lo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rollos.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son **inversamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la **razón de proporcionalidad inversa** k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, por lo que tardarán 2 días.
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2 400 es $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$

Reparto proporcional directo	**Reparto proporcional inverso**
Repartir directamente a 6, 10 y 14, 105 000 € 6 + 10 + 14 = 30 105 000 : 30 = 3 500 6 · 3 500 = 21 000 € 10 ·3 500 = 35 000 € 14 · 3 500 = 49 000 €	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 y 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5 670 : 21 = 270 270 · 10 = **2 700** 270 · 6 = **1 620** 270 · 5 = **1 350**

CAPÍTULO 3: CONTEO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PRINCIPIOS DE COMPARACIÓN Y ADICCIÓN

1. Ya sabes, las matrículas de los coches tienen tres letras y cuatro números.
   a) ¿Cuántas matrículas tienen cuatro unos: 1111?
   b) ¿Cuántas tienen los cuatro números iguales?
   c) ¿Cuántas tienen cuatro unos, 1111, y tres B, BBB?
   d) ¿Cuántas tienen los tres números iguales y las tres letras iguales?

2. ¿Podrías decir cuántas matrículas (de tres letras y cuatro números) existen?

3. ¿Hay más o menos matrículas que empiezan por B que matrículas con todas las letras iguales?

4. Nieves tiene 4 lapiceros, 5 bolígrafos y 10 rotuladores todos distintos de diferentes colores, ¿cuántos estuches diferentes puede formar que tengan un lapicero, un bolígrafo y un rotulador?

2. PRINCIPIOS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

5. María no sabe qué ponerse. Tiene que decidir entre 6 camisetas, 3 pantalones y 2 zapatillas. ¿De cuántas formas podría ir vestida?

6. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

7. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?

3. PRINCIPIO DEL PALOMAR

8. En un jardín hay 1 000 plantas, y ninguna planta tiene más de quinientas hojas. Demuestra que debe haber al menos dos plantas con el mismo número de hojas.

9. En Leganés hay menos de 200 000 habitantes. Y ninguna persona tiene más de un millón de pelos en la cabeza. ¿Podrías asegurar que en Leganés hay al menos dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

10. Dados 5 números naturales distintos, menores que 10, comprueba que se pueden formar tres parejas con ellos (los elementos de las parejas no pueden ser iguales) que tengan la misma diferencia (en valor absoluto).

11. Un cierto satélite del sistema Upsilon Andromedae tiene menos de la mitad de su superficie cubierta por agua. ¿Se podría encontrar algún lugar dónde escavar un túnel que empezara en tierra firme y acabara también en tierra firme?

4. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

12. En el grupo de trabajo de 35 personas, con 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida, se elige al azar una persona, calcula la probabilidad de que tome café o té.

5. COMBINATORIA

13. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

14. Haz diagramas en árbol para calcular:
   a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras?
   b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

15. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

16. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

17. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

18. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?
19. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo, por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?
20. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?
21. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?
22. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).
23. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?
24. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?
25. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?
26. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?
27. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?
28. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?
29. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?
30. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?
31. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?
32. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?
33. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?
34. Juan quiere regalar 3 DVD a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?
35. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?
36. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
37. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

REVISTA

Candado: Con un candado de 5 letras, que pueden repetirse, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer.

Problema: En una probeta hay un cierto número de bacterias. Cada minuto cada bacteria se divide en dos, y igual al minuto siguiente, y así sucesivamente. Al cabo de una hora la probeta está llena de bacterias. ¿Cuándo estaba medio llena?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Principios

1. Si en un restaurante hay posibilidad de escoger 3 primeros, 3 segundos y 2 postres, ¿cuántos menús diferentes se pueden hacer?
2. Hay tres ciudades, A, B, y C. No hay ninguna carretera que una A con B, pero hay 5 que unen A con C, y 2 que unen B con C. a) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a B? b) Hay otra ciudad, D, que también está unida con A y B, con A por 4 carreteas, y con B con 3 carreteas, ¿De cuántas formas se puede ir ahora?
3. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas y lanzamos luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si sacamos dos cartas y un dado? ¿Y si fuesen 3 cartas y 2 dados?
4. En un pueblo hay 3 casas y una fuente. De cada casa sale un camino que la une con la fuente. A) ¿Cuántos caminos hay? B) ¿Y si hay 5 casas y 2 fuentes?
5. Con los dígitos 0, 2, 3, 7 y 8, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
6. Con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
7. Juan conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil, ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 659, que las otras cuatro cifras siguientes eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántos números podrían ser dicho teléfono. Demasiados. Hace memoria y recuerda que las dos últimas cifras son 77. ¿Cuántos llamadas tendría que hacer para acertar?
8. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?
9. Comprueba que en todo grupo de 10 personas hay al menos dos con el mismo número de conocidos dentro del dicho grupo.
10. El número de pelos que tenemos en la cabeza varía con la edad, el sexo, según el color del pelo. Las personas pelirrojas tienen alrededor de 90 000, mientras que morenos y castaños tienen alrededor de 105 000. En el caso del pelo rubio, la cifra sube hasta los 140 000. Podemos asegurar que todos tenemos menos de 200 000 pelos. ¿Podemos asegurar que en España hay más de una persona con el mismo número de pelos? ¿Y en Robledo de Chavela que en 2021 tenía 4 471 habitantes? ¿Y en la provincia de Teruel que en 2021 tenía 134 360 habitantes?

Combinatoria

11. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?
12. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?
13. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?
14. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?
15. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?
16. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?
17. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?
18. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.
19. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

20. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?
21. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 o 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?
22. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?
23. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?
24. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?
25. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?
26. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?
27. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?
28. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?
29. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?
30. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?
31. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?
32. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?
33. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?
34. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?
35. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.
36. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?
37. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

38. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

39. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

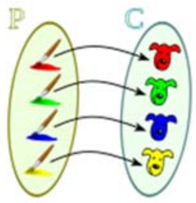
40. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

41. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tiramos dos dados y dos monedas, los resultados distintos que podemos tener son:
   a) 600 b) 288 c) 144 d) 72
2. Con 10 blusas, 2 pantalones y 5 zapatillas, las maneras distintas de poderse vestir, son:
   a) 1 000 b) 200 c) 50 d) 100
3. En el menú del día de un restaurante hay 4 primeros platos, 4 segundos y 4 postres, los diferentes menús que pueden confeccionarse son:
   a) 64 b) 128 c) 32 d) 1 064
4. En un centro escolar se selecciona un grupo de 200 estudiantes que estudian francés o inglés o ambas cosas. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés, y hay 7 que no estudian ninguno de esos idiomas, ya que estudian alemán. ¿Cuántos estudian francés e inglés?
   a) 64 b) 30 c) 220 d) 27
5. Nuestro cuerpo está cubierto de vello. Tenemos como máximo 5 millones de pelos. En Madrid capital en 2018 había 3 223 000 habitantes. ¿Es seguro que hay al menos dos habitantes en Madrid capital con el mismo número de pelos? ¿Qué Principio usas?
   a) Por el Principio del Palomar, no lo podemos asegurar.
   b) Por el Principio del Palomar, sí lo podemos asegurar.
   c) Por el Principio de inclusión exclusión, es seguro
   d) Por el Principio de comparación se asegura que hay más de un millón con el mismo número de pelos.
6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
   a) 58 b) 120 c) 9 d) 192
7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:
   a) 40 320 b) 20 160 c) 5 040 d) 10 080
8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30
9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30
10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
   a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

RESUMEN

Cardinal	El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que tiene. Se representa como card(A)	Card({A, B, C}) = 3
Biyección	Diremos que dos conjuntos A y B son biyectivos si cada elemento de A corresponde con un único elemento de B y recíprocamente.	
Principio de comparación:	Si A está contenido en B entonces A tiene menos elementos que B. Lo mismo ocurre si A es biyectivo con algún subconjunto de C. entonces A tiene más elementos que C.	
Principio de adicción:	Para dos conjuntos (disjuntos): card(A U B) = card(A) + card(B). Para k conjuntos disjuntos: card(A_1 U A_2 U...UA_k) = card(A_1) + card(A_2) +...+ card(A_k)	
Principio del Palomar:	Si metemos N +1 o más palomas, en N palomares entonces algún palomar debe contener dos o más palomas. Si la suma de n o más números es igual a S, entre ellos debe haber al menos uno menor que S/n, y también al menos uno mayor que S/n.	
Principio de Inclusión - Exclusión	Card(A $\cup$ B) = Card(A) + Card(B) – Card(A $\cap$ B)	
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

CAPÍTULO 4: EDUCACIÓN FINANCIERA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3% durante 750 días.
2. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80% durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?
3. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 100 000 euros al 2 % durante un año.
4. Calcula el interés simple de un capital de 20 000€ invertidos durante 6 meses al 5 % anual.
5. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 80 000 euros al 8 % durante 5 meses.
6. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?
7. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.
8. Teniendo un capital inicial de 50 000 € y un capital final de 52 020 €, ¿cuántos años deben pasar para alcanzar dicho capital final al 2 %?
9. Se depositan 2 500 en un banco que reconoce una tasa de interés del 15 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 2 años?
10. Un cliente tiene con su banco cuatro deudas con los siguientes importes: 1 000 €, 1 500 €, 3 000 € y 3 200 €, que vencen respectivamente en 2, 3, 5 y 6 años. El banco le propone sustituir la deuda por una sola a pagar a los 4 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 5 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.
11. Un banco concede un préstamo por 10 000 € para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3 %. Calcula, usando Excel:
    a. Importe de la cuota de amortización constante
    b. Capital pendiente de amortización al principio del segundo año
    c. Anualidad del tercer año
    d. Capital amortizado en los cuatro primeros años
    e. Cuota de interés del segundo año
12. Un cliente necesita 155 400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5 %. Proporciona al cliente su hoja de amortización.
13. Una caja de ahorros concede un préstamo a una familia para comprar un coche deportivo. El capital inicial prestado asciende a 86 432 euros a un tipo de interés del 2,25 % anual durante 10 años. Las cuotas de amortización son constantes. Selecciona la respuesta correcta en cada apartado:
    a. Capital pendiente al final del año 10
       a. 43 216 b. 0 c. 86.432
    b. La cuota de intereses del año 5
       a. 1 166,832 b. 10 587,92 c. 972,36
    c. La anualidad año 6
       a. 9 032,144 b. 9 421,088 c. 9 615,56
    d. La cuota de amortización del año 8
       a. 8 643 b. 8 643,2 c. 5 664
    e. Capital pendiente al principio del año 3
       a. 86 432 b. 77 789 c. 69 146
14. Señala qué bancos son los que no cobran comisiones o las cobran muy reducidas y determina también un par de ejemplos de bancos que cobren altas comisiones.
15. Relaciona cada comisión con su definición:

Comisión de mantenimiento	Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad
Comisión de descubierto	Aplicada por disponer de una tarjeta
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta
Comisión por uso de oficinas	. Aplicada por el banco por estar en números rojos

Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas.	Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias
Comisión por transferencias	Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta
Comisión de administración.	Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta

16. La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:
    - *Si factura menos de 2 500 € al mes, cobrará 3,4% + 0,35 € por cada transacción.*
    - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,9 % + 0,35€ por cada transacción.*
    - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,7 % + 0,35 € por cada transacción.*
    - *Más de 50 000€ al mes, cobrará 2,4 % + 0,35 € por cada transacción.*

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a PayPal de comisiones:
- o *Factura 500 € realizando 2 transacciones.*
- o *Factura 3 000 € realizando 10 transacciones.*
- o *Factura 8 500 € realizando 500 transacciones.*
- o *Factura 76 000 € realizando 600 transacciones.*

17. Una chica desea realizar varias transferencias desde su banca online. La primera de 30 € a su madre, no le urge que le llegue el dinero. La segunda a su casera de 365 €, esta debe llegarle en el mismo día. La tercera para pagar la letra de su coche a su financiera de EE. UU de 250 € que debe llegar a la financiera en menos de 24 horas. Su banco cobra comisiones por realizar transferencias urgentes de 2,5 % si son nacionales y 4 % si lo son al extranjero. Calcula:
    a. El importe total de comisiones que va a pagar.
    b. El importe total que va a pagar.
18. ¿Crees que tiene futuro un negocio como éste en el sistema financiero actual?
19. Busca en Internet algún ejemplo actual de entidades que desarrollan este tipo de banca y escríbelo. Coméntalo en clase con tus compañeros.
20. Si el euro se deprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España?, ¿podrán comprar más o menos en nuestro país? Si el tipo de cambio dólar/euro disminuye desde 1,35 hasta 1,05, ¿qué significa para los europeos?
21. Si el euro se aprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España? Si el tipo de cambio dólar/euro pasa de 1,35 hasta 1,50, ¿qué significa para los europeos?
22. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, soles, bolivianos, yenes y Dirhams.
23. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:
    a) 390 $ b) 4051,5درهم c) 104 800 ¥ (yenes) d) 5 103 Bs
24. Con las equivalencias anteriores. Jessica se quiere comprar una *Tablet*. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la *Tablet*?
25. Con las equivalencias anteriores. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Tayiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe en tu cuaderno dos formas a través de las cuales harías que tu compañero/a, que nunca ha estudiado educación financiera, se conciencie de la importancia de la misma.
2. La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo), recomienda que la educación financiera se enseñe en los centros educativos. Investiga ¿cómo promueve el estudio de la educación financiera? ¿Qué ha creó en 2008 para promover su estudio?
3. Investiga y realiza un informe a ordenador sobre el Día de la Educación Financiera. ¿Qué organismos promueven su celebración en España? ¿cuál es el objetivo de su celebración?
4. Calcula el interés simple de un capital de 5 200 € invertido durante 89 días al 4,25 % anual.
5. Calcula el capital final obtenido a partir de los datos del ejercicio anterior.
6. Calcula el interés simple que producen 1 000 € al 3,05 % durante un año.
7. Calcula el capital que hay que depositar al 0,75 % durante 100 días para obtener un interés simple de 550 €.
8. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 40 € a partir de un capital de 2 000 € al 2 % anual.
9. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 68,75 € a partir de un capital de 5 500 € al 5 % diario.
10. Calcula el capital final obtenido al depositar 9 000 euros al 7,7 % durante 8 meses.

11. Si el capital inicial de un depósito asciende a 105 000 €. El tanto por ciento aplicado es el 5 % a interés compuesto durante 10 años. Calcula el capital final.
12. Al 4 % de interés compuesto durante 9 años, ¿cuál será el capital inicial que tendremos que depositar para obtener un capital final de 43 000 €?
13. Al 2 % de interés compuesto durante 7 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 25 300 €?
14. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.
15. Si se pretende obtener un capital final de 60 500 €, cuánto será el capital inicial que se debe depositar al 3 % durante 3 años para conseguirlo?
16. ¿A qué tipo de interés se deben depositar 2 000 € durante 4 años para conseguir un capital final de 4 000 €?
17. Usando Excel, teniendo un capital inicial de 13 500 € y un 3,5 % de rédito durante 17 años. Calcula:
    a. El interés total al final del año 8.
    b. El capital inicial en el año 13.
    c. El capital final obtenido al finalizar el año 17.
18. Se depositan 13 250 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 25 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 3 años?
19. Se depositan 2 120 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 41 % anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 5 años?
20. Una empresa posee 2 deudas de 15 000 € y 35 000 €, que vencen respectivamente en 5 y 10 años. Pretende sustituir la deuda por una sola a pagar a los 7 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 2 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.
21. Si un banco concede un préstamo por 36 000 € para ser amortizado en 6 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 2 %. Calcula usando fórmulas:
    a. Importe de la cuota de amortización constante
    b. Capital pendiente de amortización al principio del tercer año
    c. Anualidad del cuarto año
    d. Capital amortizado en los dos primeros años
    e. Cuota de interés del tercer año
22. Realiza el ejercicio anterior usando Excel.
23. Una sucursal bancaria de la capital de tu país concede préstamos al 1,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes. Tu amiga solicita un préstamo para poder abrir un negocio. Necesita 52 300 €. Lo puede devolver en 5 años. Realiza el cuadro de amortización del préstamo.
24. La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:
    a. Capital pendiente al final del año 3
       a. 36 610 b. 0 c. 24 321
    b. La cuota de intereses del año 2
       a. 706,05 b. 923,56 c. 346,83
    c. La anualidad año 7
       a. 5 543,8 b. 3 423,03 c. 6 645,32
    d. La cuota de amortización del año 9
       a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675
    e. Capital pendiente al principio del año 3
       a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675

Cuotas de amortización constantes

Problema:

La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:

Capital inicial:	52.300
Tanto por ciento o rédito:	0,015
Número de años:	10
Cuota de amortización A	5230

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	52300
1	6014,5	784,5	5230	5230	47070
2	5936,05	706,05	5230	10460	41840
3	5857,6	627,6	5230	15690	36610
4	5779,15	549,15	5230	20920	31380
5	5700,7	470,7	5230	26150	26150
6	5622,25	392,25	5230	31380	20920
7	5543,8	313,8	5230	36610	15690
8	5465,35	235,35	5230	41840	10460
9	5386,9	156,9	5230	47070	5230
10	5308,45	78,45	5230	52300	0

25. Es completamente legal que los bancos cobren comisión por sacar dinero en ventanilla. A partir de esta frase, contesta:
    a. ¿Por qué crees que lo hacen?
    b. ¿Crees que atenta contra algún tipo de cliente en especial?, ¿ a quién?
    c. En caso de haber contestado si al apartado b, ¿sabes si se está haciendo algo para remediarlo?
26. Para proteger a los mayores ante el abuso por comisiones el Gobierno debe de realizar una serie de acciones. Explica con tus palabras qué significan cada una de estas acciones:
    - Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios.
    - Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca.
    - Desarrollar tecnologías inclusivas
    - Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas
27. Un hombre acude a la ventanilla de su banco a realizar varias operaciones: ingresar dinero a una de sus cuentas, realizar una transferencia urgente a su hijo que vive en Alemania de 1 375 €, otra transferencia no urgente a un cliente suyo por importe de 543 €. Aprovechando que está allí, el banco le dice que debe pagar la comisión por el mantenimiento de sus tarjetas 10 €/anual y la de administración por tener abierta una cuenta con ellos 7 €/anual. Calcula el total de comisiones que ese día paga dicho hombre sabiendo que el importe de realizar transferencias urgentes es de 3,5 % y las no urgentes no suponen un gasto a los clientes.
28. Una entidad bancaria determina que las transferencias tendrán una comisión del 0,4 % de cada importe. Por otro lado, la comisión mínima a cobrar debe ser de 5 €. A partir de estos datos calcula el total a pagar por un cliente que realiza transferencias por valor de:
    a. 4 956 €
    b. 3,5 €
    c. 321 €
    d. 1 879,10 €
29. La plataforma de pago GooglePay cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:
    - *Si factura menos de 1 500 € al mes, cobrará 3,2 % + 0,45 € por cada transacción.*
    - *Si factura entre 1 500 € y 12 000 € al mes, cobrará 2,6 % + 0,40 € por cada transacción.*
    - *Si factura entre 12 001 € y 99 999 € al mes, cobrará 1,8 % + 0,30 € por cada transacción.*
    - *Más de 1 000 000€ al mes, cobrará 0,5 % + 0,25 € por cada transacción.*

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a GooglePay de comisiones:

a. Factura 650 € realizando 7 transacciones.
b. Factura 5 340 € realizando 24 transacciones.
c. Factura 45 520 € realizando 145 transacciones.
d. Factura 111 000 € realizando 430 transacciones.

30. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia 3 000 € a libras, soles, bolivianos, yenes y dirhams.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0,6	1,1	2,5	7	106	8	15

31. Sara ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón si el tipo de cambio es 102 ¥? B) ¿Y al de EE. UU. si el tipo de cambio es 1,1 $? C) ¿Y al de Bolivia si el tipo de cambio es 7 Bs? Realiza los cálculos.
32. Joaquín se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 4 550 ¥ y 0 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil? El tipo de cambio en Estados Unidos es de 1,2 dólares y el de China es de 6 yuanes.
33. En el cuadro siguiente se presentan los tipos de cambio bilaterales de un grupo de monedas respecto al dólar. A partir de esta primera columna, calcúlese el resto de las relaciones entre las monedas utilizando los tipos de cambio cruzados.

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-			
Canadá	0,613	-		
Zona-euro	0,886		-	
Gran Bretaña	1,564			-

34. Hoja Excel de préstamos

Préstamo amortización cuotas

AUTOEVALUACIÓN

1. "Un euro hoy es mejor que…………….mañana".
   a) un dólar hoy b) un dólar mañana c) un coche hoy d) un euro mañana
2. Uno de los principales motivos por los que se cobran intereses es:
   a) la liquidez b) el riesgo c) para tener más dinero d) porque es obligatorio
3. Si depositamos en un banco 3 000 € al 3 % anual, ¿cuánto dinero tendremos al cabo de 20 meses?
   a) 1 200 b) 150 c) 3 150 d) 3 000
4. Un banco concede un préstamo por importe de 3 000 € al 3,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes a devolver en 4 años. ¿Cuál es la cuota de amortización?
   a) 3 000 € b) 650€ c) 1 500 € d) 750 €
5. Qué organismo solicita al Banco de España la revisión de las comisiones cobradas en ventanilla:
   a) La ONU b) La organización de consumidores c) La OCU d) La OCDE
6. Cuanto le costará a un adulto realizar un envío de dinero a través de bizum, si su banco cobra 3,5 % por cada transferencia:
   a) Nada b) El 3,5 % del importe c) El 0,035 € d) 35 €
7. Tomando como referencia las comisiones de PayPal de la actividad propuesta 16, ¿Cuánto pagaría un cliente cobrando 6 754 € realizando 35 transacciones?
   a) 6 754 € b) 50 € c) 323,65 € d) 194,608 €
8. Siguiendo el apartado anterior, ¿Cuánto pagaría si recibe 132 000€ realizando 200 transacciones?
   a) 3 238 € b) 123,23 € c) 423,50 € d) 23,56 €
9. Marina ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 1,2 dólares. ¿Cuántos euros tendrá?
   a) 541,6 € b) 635,3 € c) 780 € d) 345 €
10. Andrés ha vuelto de un viaje de Reino Unido con 50 £ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 0,87 libras. ¿Cuántos euros tendrá?
    a) 54 € b) 57,47 € c) 43,5 € d) 45,3 €

RESUMEN

<table>
<tr><td>Interés simple y compuesto</td><td>El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo</td><td>C = 3 600; r = 4.3 %; t = 8 años
I = $\frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100}$ = 1 238.4 €</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Equivalencias financieras</td><td>Comprobar la equivalencia financiera entre dos capitales, cosiste en comparar dichos capitales situados en diferentes momentos del tiempo</td><td>$$\frac{C_0}{(1+i)^{n_{C0}}} + \frac{C_1}{(1+i)^{n_{C1}}} + \frac{C_2}{(1+i)^{n_{C2}}} \ldots \ldots = \frac{C}{(1+i)^{n_C}}$$</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Préstamos cuotas constantes</td><td>Normalmente la devolución del préstamo se realiza usando la capitalización compuesta y la devolución de este se realiza con periodos equidistantes (meses, trimestres, años, etc.). Lo normal es hacerlo anualmente por eso los reembolsos que se van haciendo reciben el nombre de anualidades.</td><td>
<table>
<tr><th>n
PERIODOS</th><th>a_k
TÉRMINOS AMORTIZATIVOS</th><th>I_k
CUOTA DE INTERESES</th><th>A_k
CUOTA DE AMORTIZACIÓN</th><th>M_k
CAPITAL AMORTIZADO</th><th>C_k
CAPITAL PENDIENTE</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>C_0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_1=A+I_1$</td><td>$I_1=C_0 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_1=A$</td><td>$C_1=C_0-A$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$A_2=A+I_2$</td><td>$I_2=C_1 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_2=2A$</td><td>$C_2=C_1-A$
$C_2=C_0-2A$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$A_3=A+I_3$</td><td>$I_3=C_2 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_3=3A$</td><td>$C_3=C_2-A$
$C_3=C_0-3A$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>)A= C_0</td><td>$M_4=C_0$</td><td>$C_4=0$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Comisiones</td><td>Una comisión bancaria es la cantidad de dinero que una entidad bancaria cobra a sus clientes por prestarles sus servicios</td><td>Un banco por una transferencia de 400 € cobrará 1,4 %. ¿A cuánto asciende la comisión?
400 · 0,014 = 5,6 € se cobrará de comisión</td></tr>
<tr><td>Banca ética</td><td colspan="2">La forman diversas entidades que ofrecen servicios financieros y bancarios de inversión y promoción de iniciativas de carácter social y medioambiental fomentando la responsabilidad social, la sostenibilidad y la transparencia.</td></tr>
<tr><td>Cambio de divisas</td><td>Las unidades monetarias diferentes a las que nosotros usamos son las divisas.</td><td>A lo largo de la unidad cogeremos la definición del BCE, es decir, que el tipo de cambio sea $/€.</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 5: GRAFOS

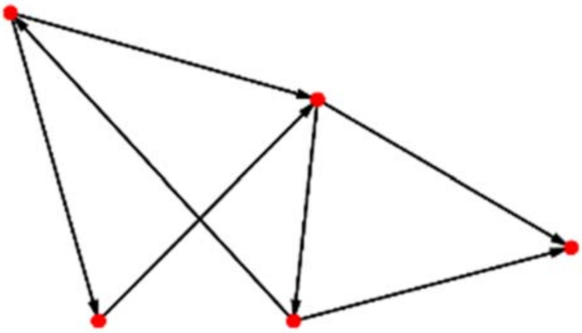
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Inventa un grafo dirigido cualquiera con las siguientes características.

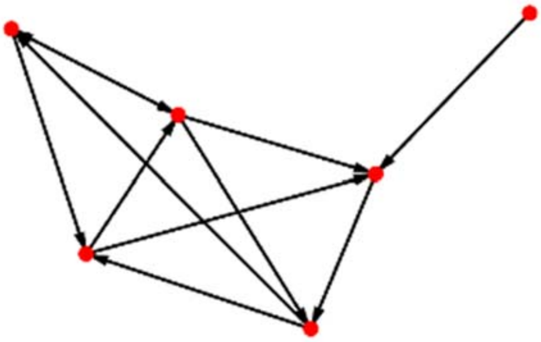
    a) Presenta un total de cinco vértices.
    b) Un vértice tiene grado de emisión 2 y grado de recepción 1.
    c) Un vértice presenta un bucle.
    d) Hay un vértice aislado.

2. Indica el grado de emisión y recepción de cada vértice en los siguientes grafos.

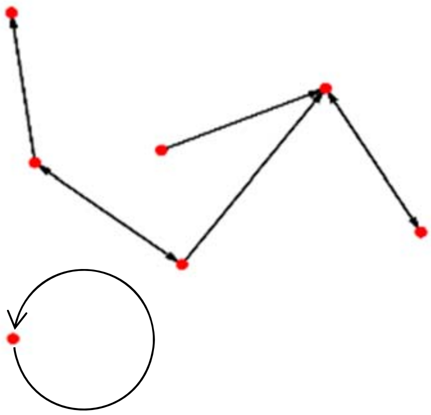
a)



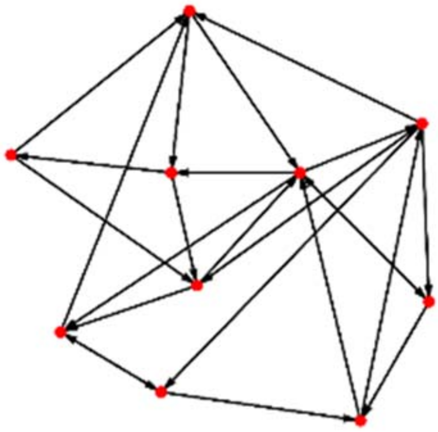
b)



c)

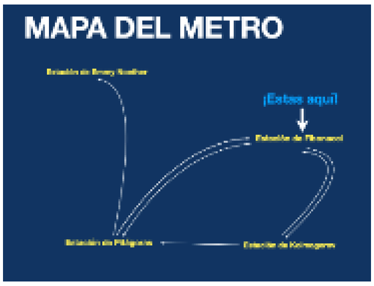


d)



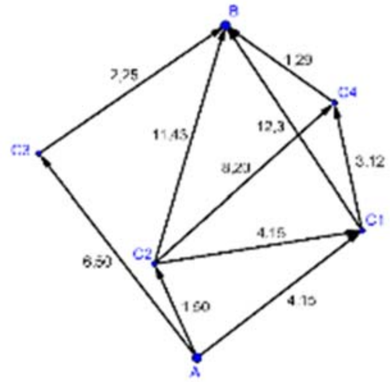
3. Sara trabaja como escritora para un periódico digital y todas las mañanas se levanta, desayuna, se viste y se dirige a la *Estación de metro de Fibonacci* en su ciudad. Cuando llega a la estación le entregan un folleto como este. El señor que le hace entrega del folleto le dice a Sara que para llegar a su trabajo debe llegar a la Estación de *Emmy Noether*.

    a) ¿Qué representa el folleto?
    b) ¿Puede Sara ir directamente a su trabajo o necesita parar primero en otra estación?
    c) Escribe un ejemplo de un circuito elemental.
    d) ¿Cuál es el trayecto con menos paradas que puede seguir Sara?
    e) Halla el grado de emisión y recepción de cada estación. ¿Qué significado tiene?

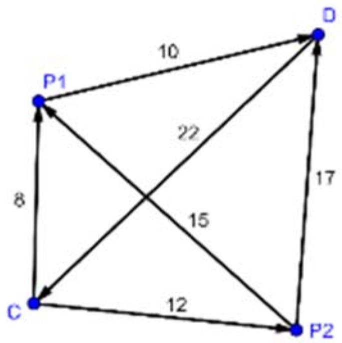


4. Inés quiere hacer el siguiente viaje con su familia: Málaga – Sevilla – Madrid – Valencia – Málaga.
    a) Elabora el grafo que represente dicho viaje. Puedes ayudarte de un grafo anterior.
    b) Escribe la matriz de adyacencia del grafo representado.
    c) Calcula el coste del camino asociado al viaje que quiere realizar Inés. ¿Qué significa dicho coste?
    d) Si la cantidad de combustible gastado por el coche de la familia de Inés viene dictaminado por la función $f(x) = 0.102\,x$, donde $f(x)$ son el total de litros consumidos, y x el total de kilómetros recorridos, determina la cantidad de combustible que se ha gastado durante el viaje.

5. El siguiente grafo muestra la red de carreteras que existe entre dos grandes ciudades y el precio que se debe abonar en un determinado peaje para poder tomar dicha carretera. Halla el precio de todos los posibles caminos que se pueden seguir para llegar desde la ciudad A hasta la ciudad B. ¿Cuál de ellos resulta el más económico?

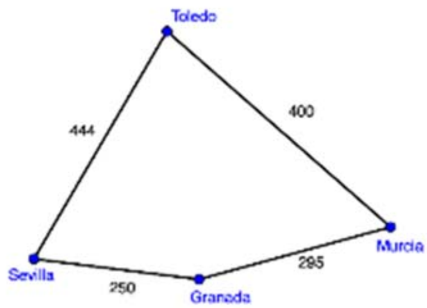


6. Una empresa de repartos debe efectuar la entrega de un determinado pedido. Si el camión de reparto se encuentra en el punto C y el destino es el punto D. Escribe todas las posibles rutas que puede seguir el repartidor para llegar al destino.



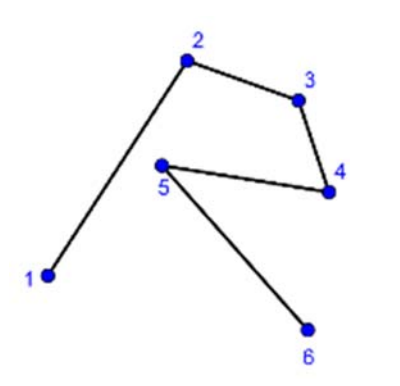
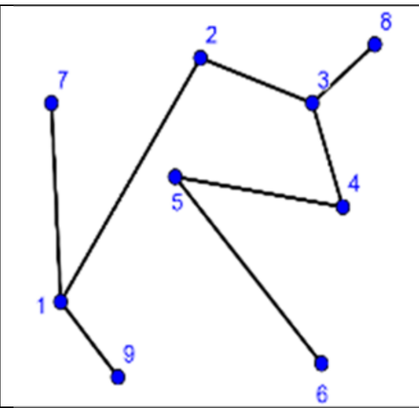
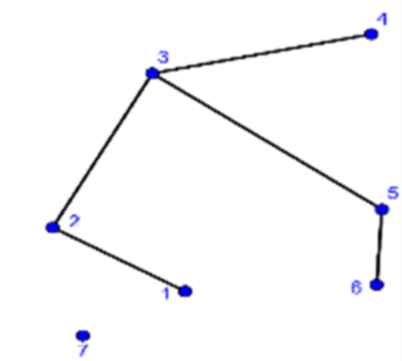
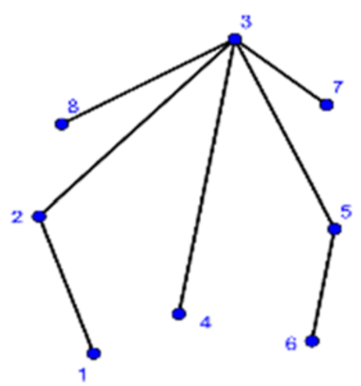
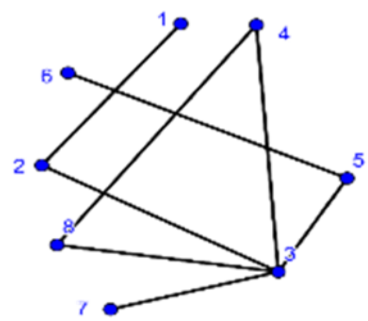
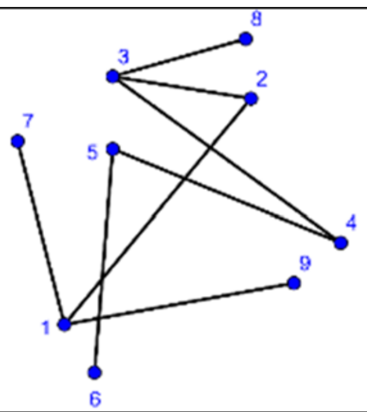
a) Escribe la matriz de adyacencia de dicho grafo.

b) Si la empresa hace un descuento de 0.5 € al importe total por cada hora de retraso en la entrega, y justo en el instante en el cual el repartidor se encuentra en el punto C ya lleva un retraso de media hora, ¿qué descuento se aplicará al producto si el repartidor opta por coger la ruta más rápida? ¿Y si coge la ruta más lenta?

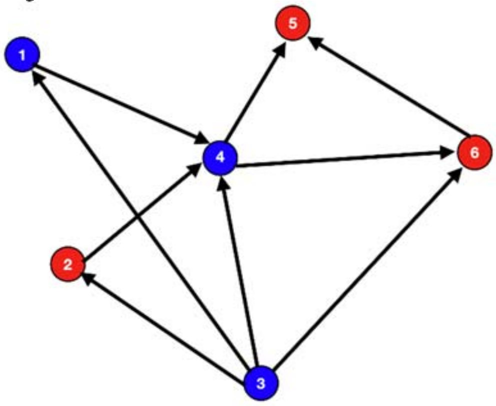


7. Sabiendo que el gasto medio de combustible, en litros, de un determinado coche viene dictaminado por la función $f(x) = 0.093\,x$, donde x son los kilómetros recorridos, elabora un grafo ponderado como este, en el que recojas los litros de combustible que pierde dicho coche al recorrer las diferentes distancias (en kilómetros) entre las ciudades consideradas en el grafo.

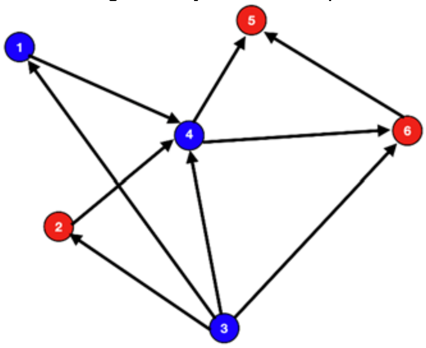
8. Discute qué grafos se corresponden con árboles.

a)		b)		c)	
d)		e)		f)	

9. Completa la matriz de adyacencia del grafo:

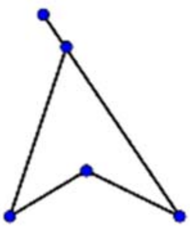


10. Multiplica por sí misma la matriz de adyacencia del grafo adjunto, e interpreta el resultado:

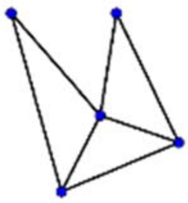


11. De un determinado poliedro convexo sabemos que su número de caras es 10 y su número de aristas es 16. Calcula el número de vértices de dicho poliedro.
12. Sabiendo que el número de caras de un determinado poliedro convexo es 6 y el número de aristas del mismo es 12, ¿cuál es el número de vértices de dicho poliedro? ¿de qué poliedro se trata?
13. Dibuja un grafo euleriano y hamiltoniano. Indica el grado de cada vértice.
14. ¿Puede un grafo contener un ciclo hamiltoniano y no ser conexo al mismo tiempo? ¿Y puede no ser conexo pero contener un camino hamiltoniano?
15. Clasifica los siguientes grafos en eulerianos y hamiltonianos, planos y no planos, dirigidos o no dirigidos y en conexos o no conexos.

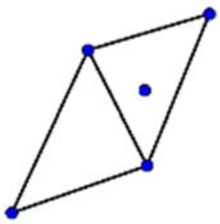
1



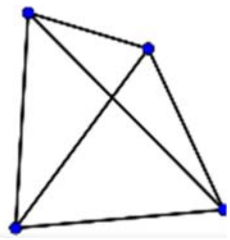
2



3



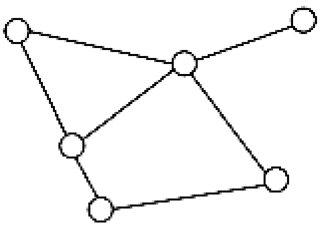
4



16. Realiza un grafo en el que unas las comunidades autónomas españolas que sean vecinas entre sí y realiza una coloración de sus vértices utilizando:
    a) El algoritmo de Welsh y Powel
    b) El algoritmo de Matula, Marble e Isaacson.

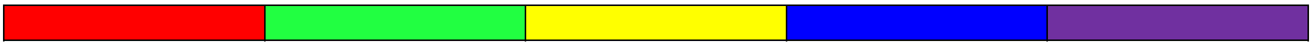
Utiliza el mapa adjunto.

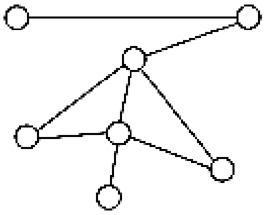
17. Colorea el siguiente grafo por el algoritmo de Welsh y Powel.



18. Colorea los vértices del siguiente grafo por orden creciente de grado utilizando la siguiente paleta de colores.

Paleta de colores



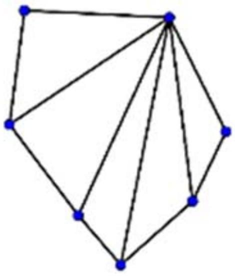


19. Una determinada compañía de telefonía móvil ofrece sus servicios a 5 localidades cercanas, de forma que estas están interconectadas entre sí por la misma compañía. Dibuja el grafo correspondiente a esta situación y coloréalo utilizando la paleta de colores del ejercicio 16.

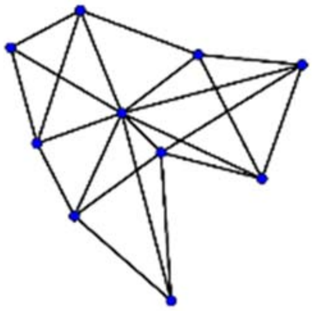
20. Una empresa de mensajería dispone de 6 almacenes repartidos en una misma provincia, tal y como se muestra en la ilustración. Sabiendo que los almacenes se encuentran conectados informáticamente entre sí de la forma 1-2, 1-3, 1-6; 3-4 y 5-6, representa el grafo correspondiente y colorea sus vértices utilizando la paleta de colores del ejercicio 16. Utiliza como criterio para ordenar los vértices la propia numeración de los almacenes y el algoritmo de Matula, Marble e Isaacson.

   ¿Qué representa cada color en el grafo?

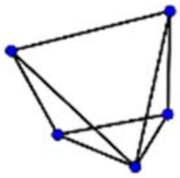
21. Realizar una estimación del índice cromático del siguiente grafo.



22. Realizar una estimación del índice cromático del siguiente grafo.

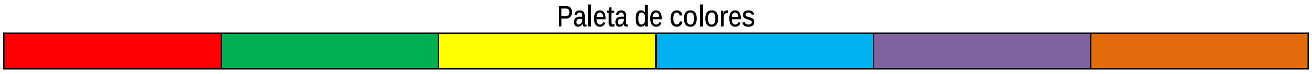


23. Halla el índice cromático del siguiente grafo.



24. Realiza una coloración propia del grafo del ejercicio anterior utilizando la siguiente paleta de colores.

Paleta de colores



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa mediante el grafo adecuado la siguiente situación y contesta razonadamente.

   Situación: *Anabel, María, Lucas, Iván y Sergio son cinco estudiantes de intercambio que mantienen contacto unos con otros de la siguiente forma: Anabel y María pueden mantener contacto, al igual que María con Sergio y con Lucas. Iván en cambio, solo mantiene contacto con Anabel.*

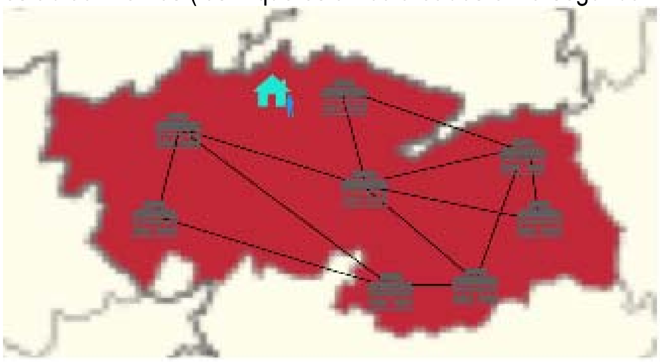
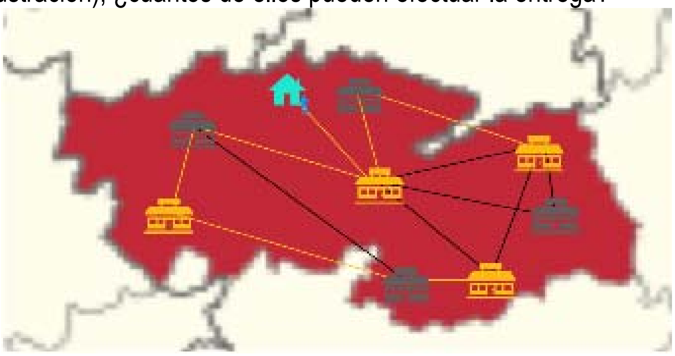
   a) ¿Puede un mensaje de Anabel llegar a Lucas si se permite el reenvío? ¿Y si no se permite?

   b) ¿Puede un mensaje de Iván llegar a todo el grupo de estudiantes si se permite el reenvío?

   c) ¿Qué estudiante tiene más contactos directos?

2. Contesta solo observando las ilustraciones: una reconocida marca de ropa deportiva dispone de un total de 8 establecimientos repartidos por toda la provincia de Toledo como se muestra en la ilustración. Cuando un cliente compra un producto on-line, se habilitan los establecimientos donde ese producto se encuentra en *stock*, y se le asigna el reparto del producto a los establecimientos que se encuentren en <u>contacto directo</u> con el domicilio del cliente.

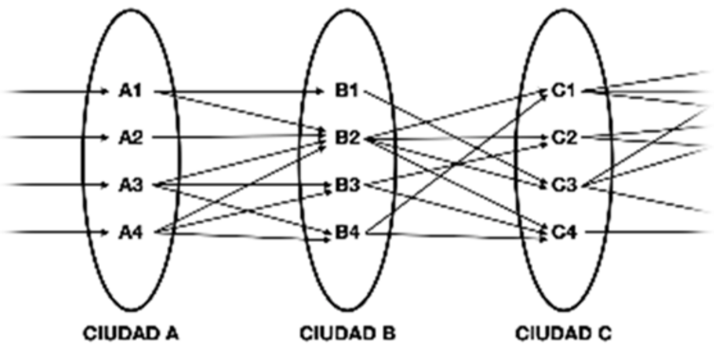
   Si Lucía, una cliente habitual de dicha marca, realiza su compra on-line y el sistema informático web habilita 4 establecimientos (los 4 que están coloreados en la segunda ilustración), ¿cuántos de ellos pueden efectuar la entrega?

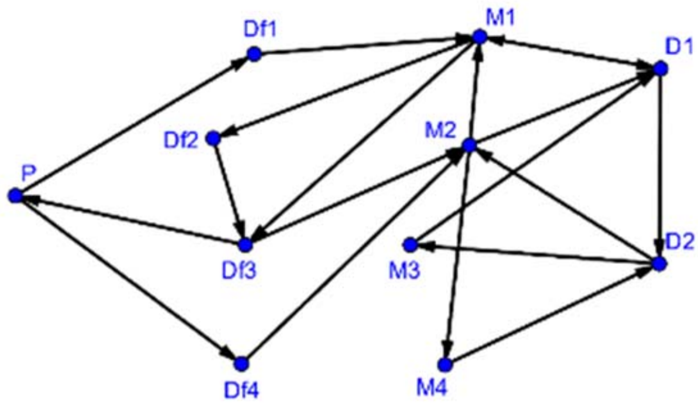
   Suponiendo ahora que el establecimiento que ocupa la posición central no dispone de ese producto, ¿algún establecimiento podría efectuar el envío? En caso afirmativo, indica cuál o cuáles.

3. Durante el transcurso de un partido de baloncesto, se toma la siguiente fotografía. En ese momento, es Francisco quien lleva la pelota. Sabiendo que solo puede tirar a canasta Daniela y que el resto de jugadores solo pueden hacer los pases ahí señalados, ¿de cuántas formas distintas puede llegar el balón a Daniela? ¿Cuál de ellas es más económica? (Entendiéndose por económica aquella que emplee un menor número de pases).

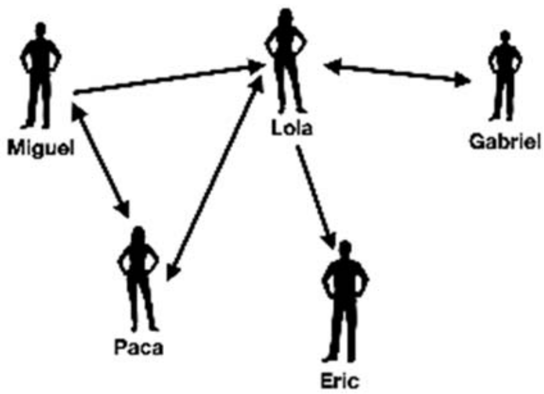
4. Una cierta compañía de viajes dispone de tres centrales distintas, A, B y C, cada uno en tres ciudades distintas (también A, B y C), de tal forma que las centrales se encuentran conectadas entre sí como se muestra en el grafo. ¿Cuál de ellas recibe menos vuelos? ¿Cuál emite más vuelos? ¿De cuántas formas distintas puede llegar un viajero que se encuentre en la central B2 a una central de la ciudad C?



5. El siguiente grafo muestra la jugada seguida por el Arbustos FC, mostrando los pases que se han dado entre los 11 jugadores. ¿Cuál es el grado de recepción de cada delantero? ¿Qué indica dicho valor? ¿Cuál es el grado de emisión del portero? ¿Qué indica dicho valor? ¿Cuál es el jugador que más pases ha efectuado? ¿Se corresponde con el vértice de mayor grado de emisión?



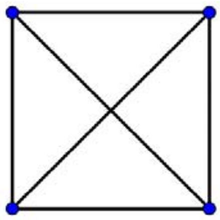
6. Miguel, Paca, Eric, Gabriel y Lola son 5 amigos que se encuentran conectados entre sí a través de una app de mensajería, de la forma en la que se muestra en el grafo. Indica el grado de emisión y recepción de cada uno e indica a qué se refiere dicho valor.

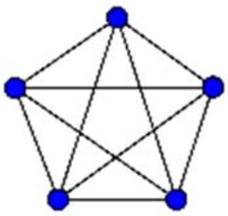


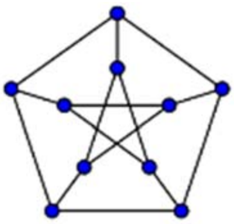
7. Volviendo a la situación del ejercicio anterior, ¿Puede Eric recibir un mensaje de Paca directamente? ¿Y de forma indirecta si se permite el reenvío del mensaje?

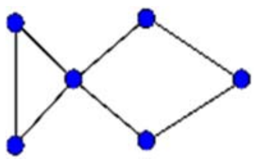
8. ¿Qué grafos k_n tienen todos sus vértices grado par? Justifica tu respuesta.

9. Define qué es un grafo plano y clasifica los siguientes grafos en planos y no planos.

a) 

b) 

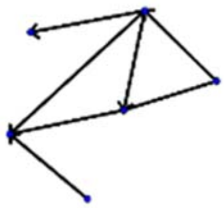
c) 

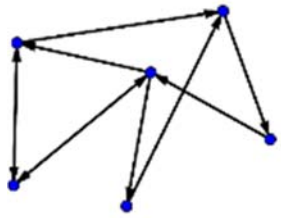
d) 

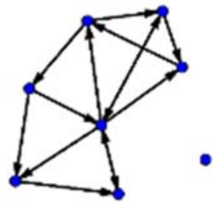
10. Dibuja un grafo que satisfaga las siguientes condiciones.

- Tenga 6 vértices.
- Hay dos vértices aislados.
- Los cuatro vértices restantes tienen la mitad grado par.
- No sea plano.
- El grado presenta un bucle en uno de los vértices aislados.

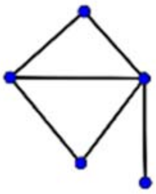
11. Indica el grado de recepción y emisión de cada vértice en cada uno de los grafos siguientes:

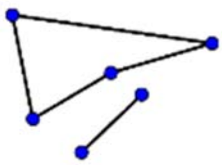
a) 

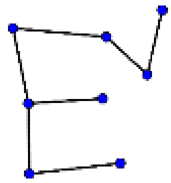
b) 

c) 

12. ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos? Justifica tu respuesta.

a) 

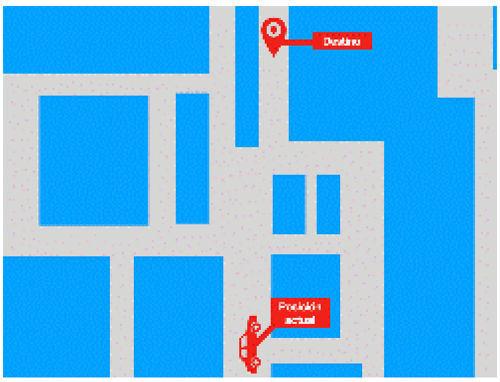
b) 

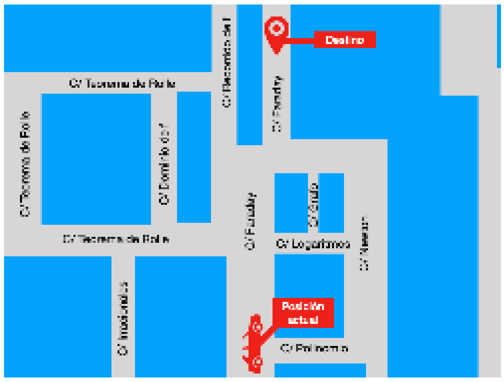
c) 

13. Enumera los vértices en los grafos del ejercicio anterior y señala un camino y un ciclo cuando sea posible en cada uno de ellos.

14. Silvia se encuentra en la estación del metro de Madrid, y le entregan un mapa como el siguiente. Su cometido es llegar a la estación 4. Escribe todos los caminos posibles que puede seguir Silvia. Si más tarde tiene que regresar desde la estación 4 a la estación 1, ¿hay algún ciclo que pueda seguir? En caso afirmativo, ofrecer un ejemplo.

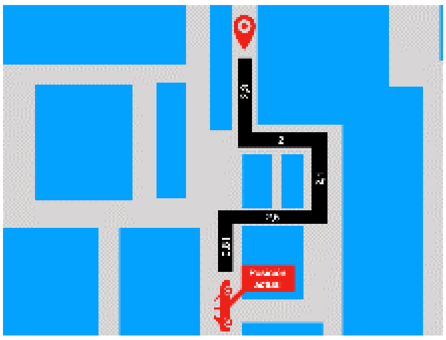
15. Carlos desea llegar a su lugar de trabajo, y para ello utiliza el GPS de su coche, que le muestra una interfaz como la de la imagen, pudiendo él establecer la ruta entre las calles que figuran (en color gris). Señala al menos cuatro rutas que pueda seguir Carlos teniendo en cuenta que las calles son unidireccionales.

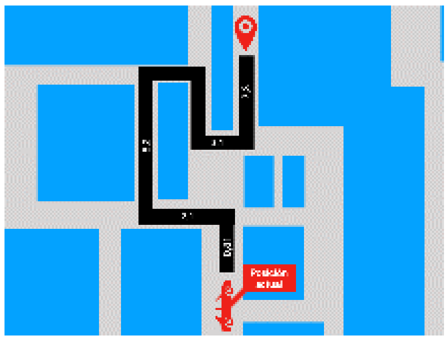


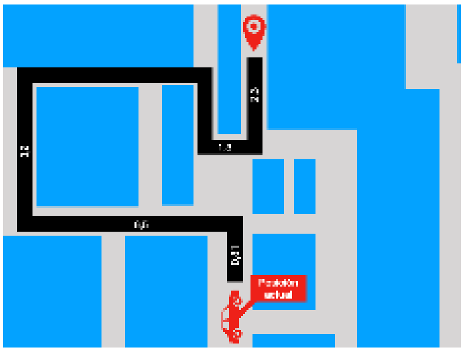
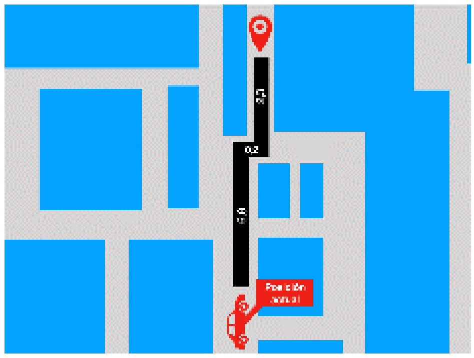


Enumera las calles y representa el grafo correspondiente a las diferentes rutas que puede seguir Carlos.

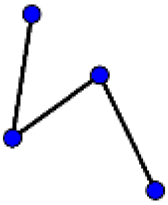
16. Volviendo a la situación del ejercicio anterior, imagina que ahora Carlos no se decide entre las cuatro rutas señaladas en la ilustración anexionada. Por su parte, el GPS ha calculado el tiempo (en minutos) que tardaría Carlos en cruzar cada calle. Calcula el tiempo que emplearía Carlos en cada ruta y señala cuál es la más conveniente. Traslada esta información a un grafo ponderado.



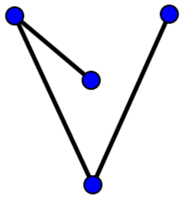


17. Completa los siguientes grafos para satisfacer las condiciones indicadas.

a) 

Completar hasta satisfacer:
1. El grado máximo de los vértices del grafo sea 5.
2. Tenga dos vértices aislados.
3. Sea un árbol.

b) 

Completar hasta satisfacer:
1. Sea un grafo conexo.
2. No presente ningún vértice aislado.
3. Presente un ciclo.
4. Todos los vértices tengan grado par.

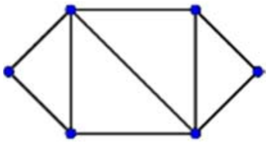
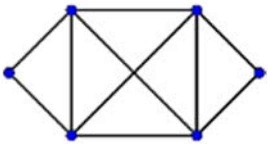
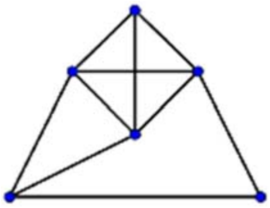
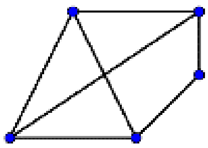
18. Ofrece un ejemplo de un grafo que sea hamiltoniano y euleriano a la vez.

19. Ofrece un ejemplo de un grafo que no sea hamiltoniano ni sea euleriano.

20. Ofrece un ejemplo de un grafo que sea hamiltoniano y no sea euleriano.

21. Ofrece un ejemplo de un grafo que no sea hamiltoniano y sea euleriano.

22. ¿Cuáles de los siguientes grafos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel? ¿Cuáles son conexos?

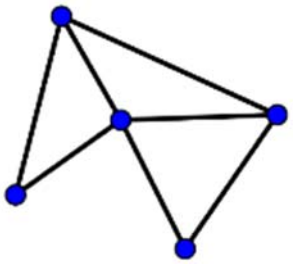
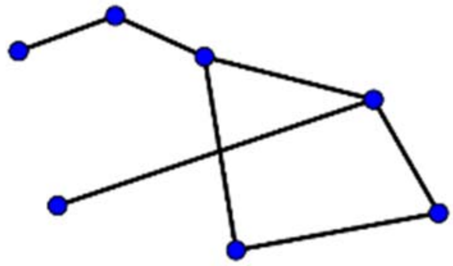
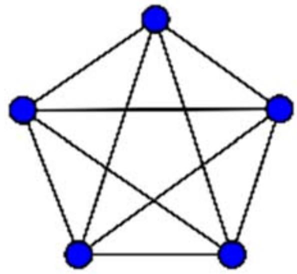
a)  b)  c)  d) 

23. Jorge quiere hacer una ruta en coche por Caspe, Alcañiz, Andorra, Tortosa, Amposta y Morella (municipios españoles de la provincia de Zaragoza). Para planificarla, analiza el siguiente mapa, por el cual se pregunta: ¿es posible hacer la ruta por todos los pueblos, pasando por todas las carreteras señaladas en rojo una única vez?

Responde a la duda de Jorge.

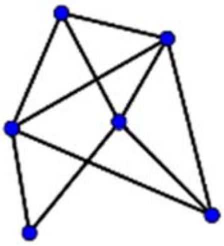
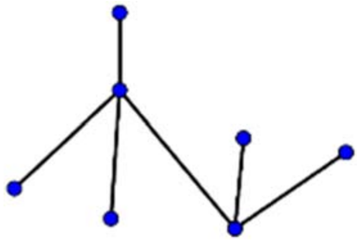
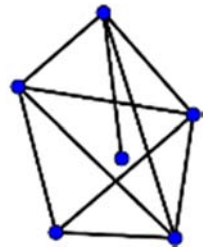
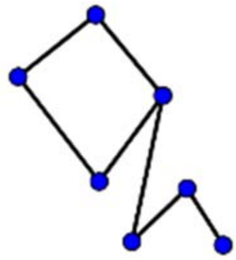
Imagen: Google Maps

24. ¿Qué es un ciclo hamiltoniano? ¿Cuáles de los siguientes grafos presentan un ciclo hamiltoniano?

a)  b)  c) 

25. De los grafos del ejercicio anterior, señala aquellos que contengan un camino hamiltoniano.

26. Clasifica los siguientes grafos en hamiltonianos o no hamiltonianos.

a)  b)  c)  d) 

27. ¿Puede un grafo hamiltoniano no ser conexo? Razona tu respuesta. Incluye algún ejemplo.

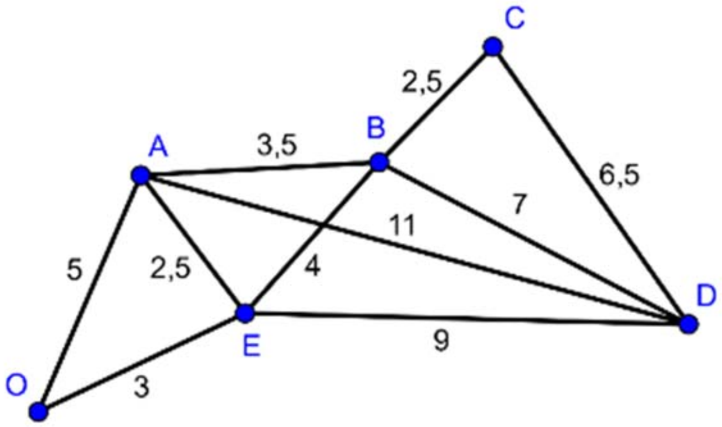
28. Considera un grafo que sea euleriano y hamiltoniano al mismo tiempo, ¿puede no ser conexo? Justifica tu respuesta incluyendo ejemplos.

29. Una hormiga se encuentra en el punto O y se necesita desplazar hasta E. Para ello, dispone de varias rutas alternativas que pasan por diferentes hormigueros. Contesta de forma razonada:

    a) ¿Puede la hormiga llegar al punto de destino y regresar al origen pasando por todos los caminos una única vez? En caso afirmativo, indica la longitud del trayecto total.

    b) ¿Puede la hormiga pasar por todos los hormigueros y regresar a O sin necesidad de pasar por todos los caminos? En caso afirmativo, indicar la longitud de la ruta o rutas que la hormiga puede seguir.

    c) Indicar la ruta óptima en los apartados anteriores (si existen las rutas indicadas).



30. Observa el grafo G y señala como verdaderas (V) o falsas (F) las afirmaciones siguientes.

a) G es un grafo euleriano.

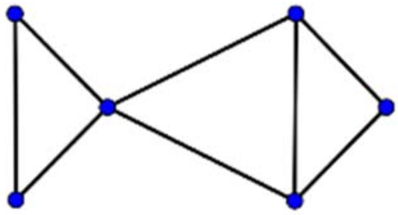
b) G es un grafo hamiltoniano.

c) G es conexo.

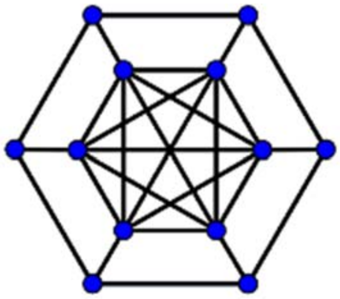
d) G no es plano.

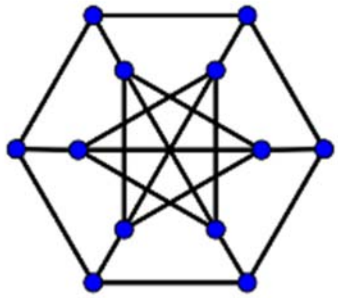
e) G es un árbol.

f) El grado máximo de vértices de G es un número impar.



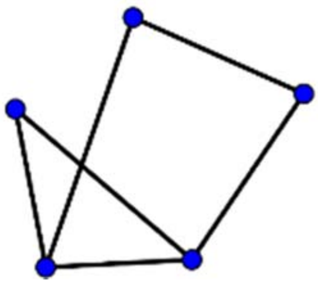
31. Demuestra, de forma razonada, que los dos siguientes grafos no son planos.



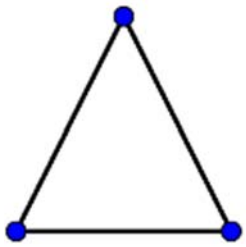


32. ¿Cuáles de los siguientes planos son planos? Realiza una representación adecuada de ellos para justificar tus soluciones.

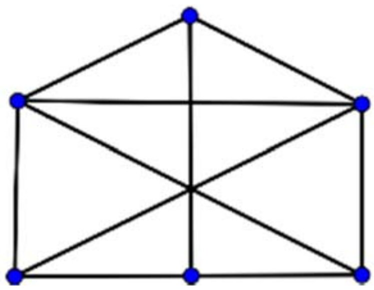
a)



b)



c)

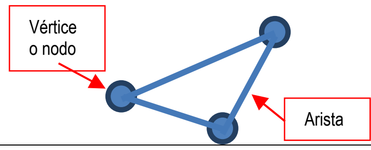


33. ¿Cuál de las siguientes coloraciones no es propia? Justifica tu respuesta.

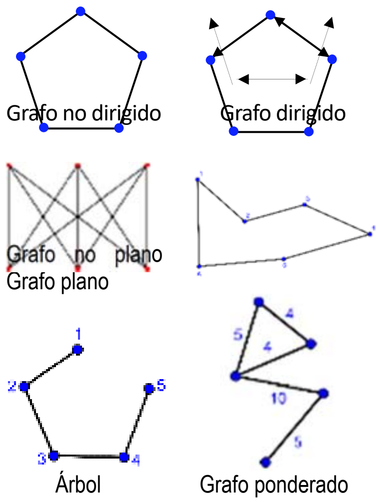
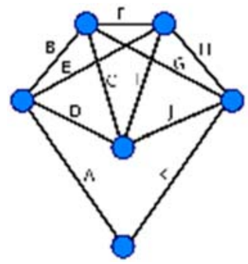
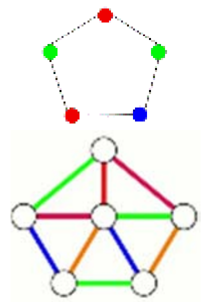
34. Realiza una coloración propia en vértices de G del siguiente grafo. Para ello utiliza la siguiente paleta de colores.

AUTOEVALUACIÓN

RESUMEN

<table>
<tr><td>Definición de grafo</td><td>Un grafo establece una relación entre unos vértices, que se denotan por V y unas aristas, E.
Nomenclatura: $G(V,E)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Tipos de grafos</td><td>Existen dos tipos de grafos (principalmente):
➢ Grafos dirigidos
➢ Grafos no dirigidos

Un grafo puede ser también plano (o no plano) y conexo (o no conexo).

También encontramos otros tipos de grafos como los grafos ponderados, a cuyas aristas se les asocia un valor que llamamos peso o los árboles.</td><td></td></tr>
<tr><td>Caminos y ciclos</td><td>Un camino es la ruta que debemos seguir para llegar desde un vértice inicial a un vértice extremo.
Un ciclo es aquel camino que regresa al vértice de inicio.
En <u>GRAFOS PONDERADOS</u>: Se define como coste o peso de un camino a la suma de los pesos de las aristas que unen los vértices que forman el camino.</td><td>En el árbol de arriba, un camino puede ser $\gamma(1,5)=\gamma(1,2,3,4,5)$, y evidentemente, no tiene ciclos (porque es un árbol). Un ciclo en el grafo plano de arriba puede ser $\gamma(1,1)=\gamma(1,2,3,4,5,6,1)$.</td></tr>
<tr><td>Fórmula de Euler</td><td>$C+V-A=2; \quad C+|V|-|E|=2$</td><td></td></tr>
<tr><td>Grafos eulerianos y hamiltonianos</td><td>• Un circuito o ciclo euleriano es aquel camino que recorre todas las aristas de un grafo y regresa al vértice de partida. Todo grafo que contenga un ciclo euleriano se dice que es un grafo euleriano.
• Un circuito o ciclo hamiltoniano es aquel camino que recorre todos los vértices de un grafo y regresa al vértice de partida. Todo grafo que contenga un ciclo hamiltoniano se dice que es un grafo hamiltoniano.</td><td>
Grafo euleriano y hamiltoniano</td></tr>
<tr><td>Coloración de grafos</td><td>✓ La coloración de grafos es una técnica de etiquetado.
✓ Es una función que asigna un color de una paleta de colores previamente definida a unos vértices (si es coloración en vértices) o a una aristas (si es coloración en aristas).
✓ Diferenciamos dos tipos de coloraciones:
o COLORACIÓN EN VÉRTICES
o COLORACIÓN EN ARISTAS</td><td>
Coloración en vértices y en aristas del grafo completo k_5</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 6: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA.

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:
   a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$
   A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?
2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?
3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].
   Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.
4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (*t*) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (*d*) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión. b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14]. c) ¿Es constante?

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

   a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].
   b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?
   c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.

b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$, donde $B(x)$ indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.
8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.
9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:
   a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$
   A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?
10. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?
11. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.
    Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.
12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia *y* dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x - 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.
13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \le x \le 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \le x \le 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.
14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.
15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece

encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

16. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3... a$. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?
17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.
18. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.
19. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?
20. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica[1], las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.
21. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ y $f'(-7)$.
22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.
24.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:
    a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$
26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:
    a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$
27. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.
28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$
29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{x+2}$
30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \dfrac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.
31. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes $C(x)$ y de la función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \sqrt{\left(4x^5 - 8x^3\right)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{\left(2x^2 + 4x^7\right)^4}$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}\left(x^4 - 6x^3\right)^2}$ b) $y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}$ c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3}$ d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

34. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$
35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.
36. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 20t + 0.5t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?
37. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$, donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

Solución: a) $y' = 10t - 1.2t^2$, $y'(3) = 30 - 10.8 > 0$. Creciente. b) $10t - 1.2t^2 = 0 \rightarrow t(10 - 1.2t) = 0 \rightarrow t = 0$, $10 = 1.2t \rightarrow t = 8.333$. Aproximadamente a poco más de los 8 meses empiezan a descender los ingresos.

38. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?
39. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?
40. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$; b) $y = 5x^4 - 2$; c) $y = 3x^3 + 1$; d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; e) $y = 7x^3 - 3x$.

41. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.
42. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

43. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].
44. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].
45. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio $R = 5$ cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Definición de derivada

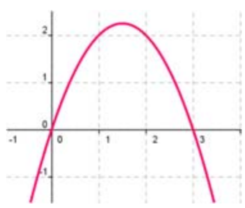
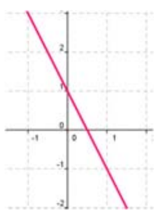
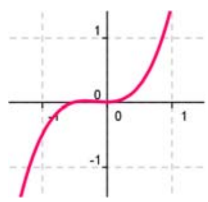
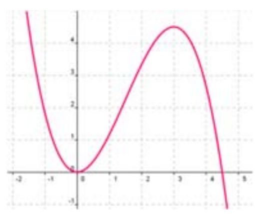
1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.
2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.
4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.
5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$
7. Calcula:
   a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$
8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+3)\cdot(x^2-5x+2)}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}$
9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
   a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$ b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$ c) $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$
10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \dfrac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \dfrac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \dfrac{(8x+5x^2)\cdot(2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \dfrac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$
11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5$ d) $y = (2x^2 + 5x)^9$
12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \sqrt{x^3+5}\cdot(x^7 + 3x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5 \cdot (x^5 - 6x^8)$ d) $y = \dfrac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$
13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = e^{x^5 + 4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3 - 7x^2})^7$ c) $y = e^{(3x^5 + 5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$
14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = cos(x^5 - 7x^3)\cdot sen(x^5 - 7x^3)$ b) $y = cos^7(3x^3 - 5x^2)\cdot sen^5(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos\left(2x^2+4x^7\right)^4}$

Aplicaciones de la derivada

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.
16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
    a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.
17. Indica la pendiente de la recta tangente de:
    a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.
18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:
    a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.
19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.
20. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

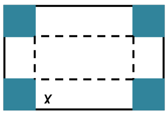





21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?
22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?
23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.
24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.
25. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.
26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.
27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.
29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.
30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.
33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Problemas

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?
35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para t = 90 segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?
36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?
37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

    a) $e = t^2 - 4t + 3$ b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $e = -t^2 + 4t + 3$ d) $e = (3t - 4)^2$
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?
39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?
40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?
42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.
43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.
44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.
45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

   a) $\lim\limits_{b \to x} \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:

   a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

3. La derivada de $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ es:

   a) 15/11 b) –10/25 c) –16/121 d) 1/3

4. La derivada de $y = e^{x^2 + 3}$ es:

   a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

5. La derivada $y = cos(x^3)$ es:

   a) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x^3)$ b) $y' = -sen(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -sen(x^3) \cdot cos(3x^2)$ d) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x)$

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

   a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

   a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

   a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

   a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
   b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
   c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
   d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

    a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (–1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
    c) (6, –324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\quad f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	
Cálculo de derivadas	Si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$. Si $f(x) = x^k$ entonces $f'(x) = kx^{k-1}$ Si $f(x) = g(x) + h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ Si $f(x) = kg(x)$ entonces $f'(x) = kg'(x)$ Si $f(x) = g(x)\cdot h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x)) \Rightarrow h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$	$y = 7x^3 + 2/x^5 \to y' = 21x^2 - 10/x^{-6}$ $y=\sqrt{x}\cdot 2x \to y'=(1/2)\sqrt{x}\,2x+\sqrt{x}\,2$ $y=\dfrac{3x}{x^2-1}\to y'=\dfrac{3(x^2-1)-3x(2x)}{(x^2-1)^2}$ $y=\sqrt{x^3+2} \to y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+2}}\cdot 3x^2$
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto $(0, 0)$: $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0 \to x = 1, x = -1$. ● Para $x < -1$, $y' > 0 \to y$ creciente. ● Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \to y$ decreciente ● Para $x > 1$, $y' > 0 \to y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 \to y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

CAPÍTULO 7: FUNCIONES

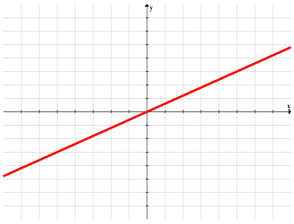
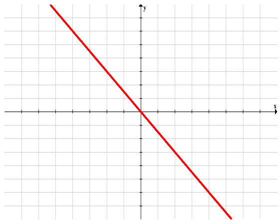
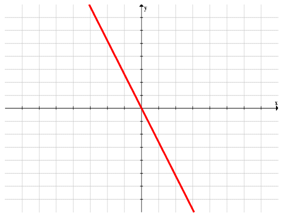
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TIPOS DE FUNCIONES

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:
   a. 71 litros para producir una manzana.
   b. 10 850 litros para producir unos vaqueros.
   c. 4 000 litros para producir una camiseta.

3. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

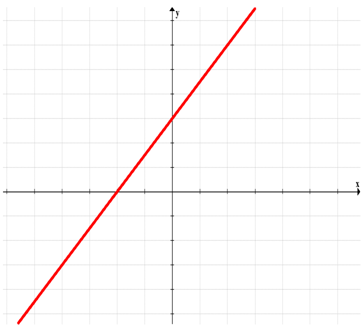
a. 
b. 
c. 

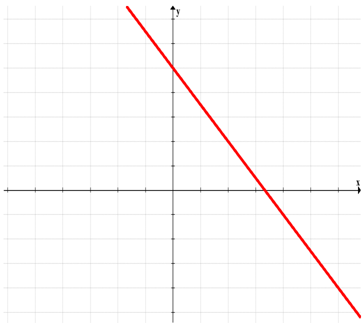
4. Representa las siguientes rectas:

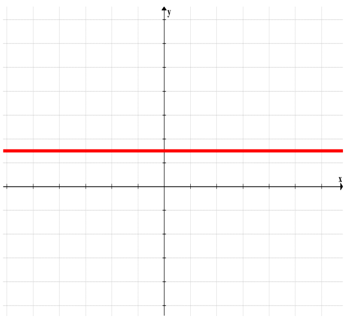
   a. $y=3\cdot x+4$ b. $y=-\frac{3}{7}\cdot x-2$ c. $2x+\cdot 4y=5$

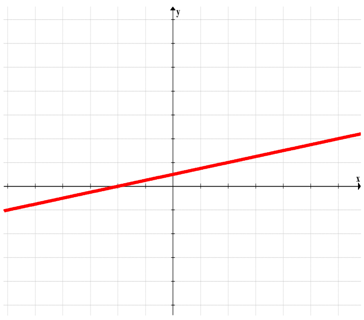
   d. $y=5$ e. $y=0$ f. $y=-3$

5. Halla la expresión de las siguientes rectas:

a.


b.


c.


d.


6. Utiliza GeoGebra para representar las siguientes rectas:

   a. $y=3\cdot x+4$ b. $y=-\frac{3}{7}\cdot x-2$ c. $2x+\cdot 4y=5$

7. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

b. $y = \frac{5}{3}x^2$ c. $y = -3x^2$ d. $y = -\frac{15}{3}x^2$

e. $y = 4.12x^2$ f. $y = -\frac{6}{10}x^2$ g. $y = \frac{7}{8}x^2$

8. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

h. $y = (x+4)^2 - 5$ i. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ j. $y = x^2 - 5$

k. $y = x^2 - 6x + 16$ l. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ m. $y = -x^2 + 12x - 26$

n. $y = x^2 - 10x + 17$ o. $y = -x^2 + 2x - 4$ p. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

9. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$ b) $y = 6x^2 - 24x$ c) $y = -2x^2 + 4x - 2$

d) $y = 2x^2 + 5x - 12$ e) $y = 3x^2 + 6x - 9$ f) $y = -2x^2 + 7x + 3$

g) $y = 7x^2 + 21x - 28$ h) $y = 5x^2 - 9x + 4$ i) $y = -4x^2 - 4x - 1$

10. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones:

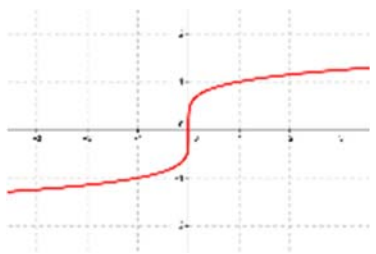
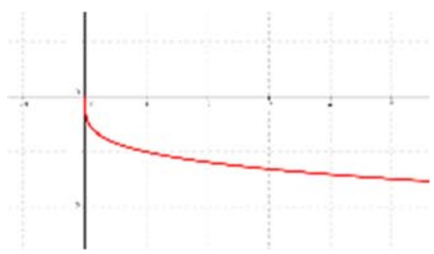
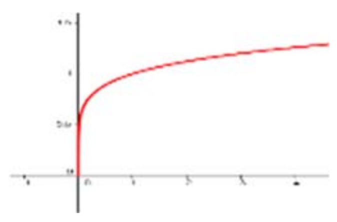
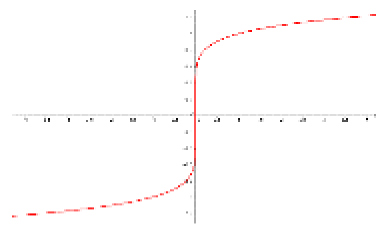
a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

11. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

12. Calcula las imágenes de los números $-3; \frac{-1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$ por la función $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

13. Utiliza la recta anterior ($y = 3.5x + 42$) para obtener el porcentaje de curaciones esperado para una dosis de 7.3 mg.

14. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

15. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.

16. Vuelve a repetir otra vez el ejercicio anterior suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.

17. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

18. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

19. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

20. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 1/3 cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

(a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").
(b) Representa gráficamente estos datos.

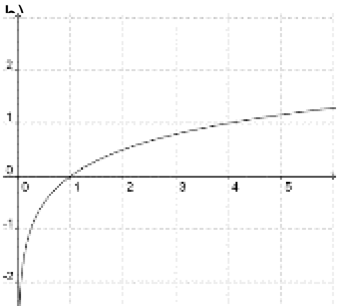
21. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

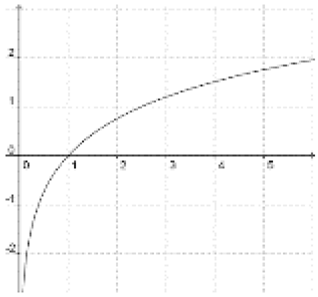
a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{1/3} x$ c) $f(x) = log_{1.5}\, x$

Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, –1), donde a es la base.

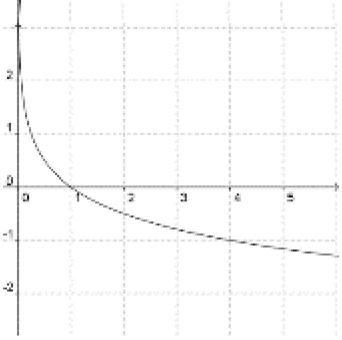
22. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

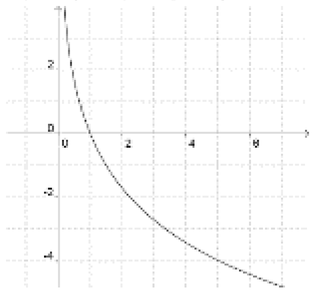
a)





c)





23. Representa gráficamente la función valor absoluto.

24. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ \ x < -4 \\ -x + 2 & si\ \ -4 \le x < 0 \\ 5 & si\ \ 0 \le x \end{cases}$ Puntos: $-6; -4; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 1;\ \frac{3}{2};\ 4$
- $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ \ x < -3 \\ x & si\ \ -3 \le x < 2 \\ \sqrt{x} & si\ \ 2 \le x \end{cases}$ Puntos: $-5; -3; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 2;\ \frac{9}{4};\ 4$

25. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

26. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m^2, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1 500	1 000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.
b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

27. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a)	$(p+q)(x)$	b)	$(q+r)(x)$
c)	$(q+r+s)(x)$	d)	$(s-q)(x)$
e)	$(q-r)(x)$	f)	$(r-p)(x)$
g)	$(f+p)(x)$	h)	$(j-f)(x)$
i)	$(g+k)(x)$	j)	$(m-a)(x)$
k)	$(b+d)(x)$	l)	$(r+m)(x)$
m)	$(p\cdot q)(x)$	n)	$(q\cdot r)(x)$
o)	$(q\cdot r:s)(x)$	p)	$(p:q)(x)$
q)	$(f\cdot p)(x)$	r)	$(j\cdot f)(x)$
s)	$(g:k)(x)$	t)	$(a\cdot b)(x)$
u)	$(p\circ q)(x)$	v)	$(a\circ b)(x)$
w)	$(r\circ s)(x)$	x)	$(f\circ p)(x)$
y)	$(j\circ f)(x)$	z)	$(g\circ k)(x)$

28. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

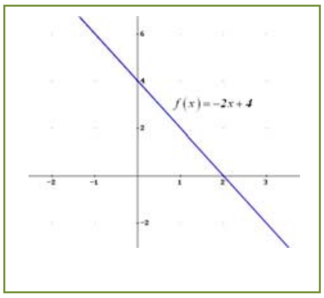
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

FUNCIÓN		INVERSA	FUNCIÓN		INVERSA
a)	$p(x)$		b)	$q(x)$	
c)	$r(x)$		d)	$s(x)$	
e)	$f(x)$		f)	$g(x)$	
g)	$h(x)$		h)	$j(x)$	
i)	$k(x)$		j)	$l(x)$	
k)	$m(x)$		l)	$n(x)$	
m)	$a(x)$		n)	$b(x)$	
o)	$c(x)$		p)	$d(x)$	

29. Calcula la función inversa de:



3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

30. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x^2-3}$		b) $j(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$		d) $k(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$		f) $l(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$		h) $m(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$	

31. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$		b) $q(x)$	
c) $r(x)$		d) $s(x)$	
e) $f(x)$		f) $g(x)$	
g) $h(x)$		h) $j(x)$	
i) $k(x)$		j) $l(x)$	
k) $m(x)$		l) $n(x)$	
m) $a(x)$		n) $b(x)$	
o) $c(x)$		p) $d(x)$	

32. Estudia la simetría del resto de las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante.

33. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x} \;;\; f(x)=\frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4} \;;\; k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}} \;;\; a(x)=L(x+2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abscisas		Ordenadas	Abscisas
a) $p(x)$			b) $q(x)$		

c) $r(x)$			d) $s(x)$		
e) $f(x)$			f) $g(x)$		
g) $h(x)$			h) $j(x)$		
i) $k(x)$			j) $l(x)$		
k) $m(x)$			l) $n(x)$		
m) $a(x)$			n) $b(x)$		
o) $c(x)$			p) $d(x)$		

34. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$f(x)=2^{x-24}\cdot 4^{3x+1}\cdot 8^{-x-1}-1$ $\qquad h(x)=x^3+4x$ $\qquad k(x)=e^{-2x}-22$

$g(x)=-7x^4-x^2+1$ $\qquad j(x)=\sqrt{15x-3\sqrt{-x-9}}$ $\qquad l(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

35. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

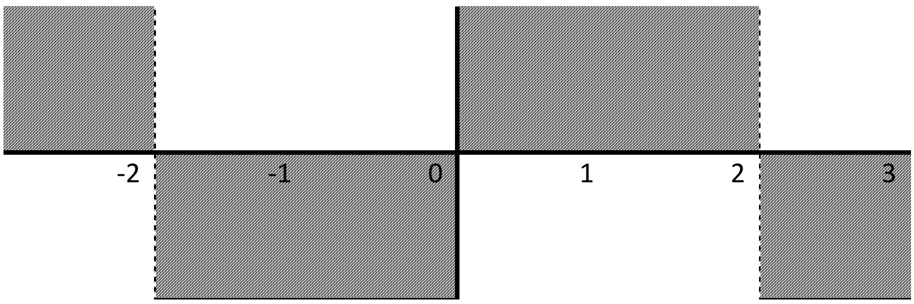
$$a(x)=L\left(x+2\right) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$			b) $q(x)$		
c) $r(x)$			d) $s(x)$		
e) $f(x)$			f) $g(x)$		
g) $h(x)$			h) $j(x)$		
i) $k(x)$			j) $l(x)$		
k) $m(x)$			l) $n(x)$		
m) $a(x)$			n) $b(x)$		
o) $c(x)$			p) $d(x)$		

36. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$$

la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función *f*: $\Re \to \Re$ dada por $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le -1, \\ x^3-x & \text{si } x>-1. \end{cases}$

2. Copia en tu cuaderno y realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=2x^2-x+7 \;;\; r(x)=-x^3+6 \;;\; s(x)=3x^2-x$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2} \;;\; j(x)=\frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \;;\; n(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x)=L(x-2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x-1}{3}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-1\right)$$

a)	$(s+q)(x)$	b)	$(r+p)(x)$
c)	$(p-q)(x)$	d)	$(p+q+r+s)(x)$
e)	$(q-r-s)(x)$	f)	$(p-q+r-s)(x)$
g)	$(g+h)(x)$	h)	$(s-g)(x)$
i)	$(n-k)(x)$	j)	$(g+d)(x)$
k)	$(b-d)(x)$	l)	$(c+s)(x)$
m)	$(s\cdot q\cdot r)(x)$	n)	$(r\cdot p)(x)$
o)	$(q:p)(x)$	p)	$(s:q)(x)$
q)	$(g\cdot h)(x)$	r)	$(s:g)(x)$
s)	$(n\cdot k)(x)$	t)	$(g:d)(x)$
u)	$(s\circ q)(x)$	v)	$(r\circ p)(x)$
w)	$(q\circ p)(x)$	x)	$(g\circ h)(x)$
y)	$(s\circ g)(x)$	z)	$(n\circ k)(x)$

3. Considera la función *f*: $\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y=x^2+1$, $y=\frac{2}{x}$ e $y=x-1$.

5. Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1 \qquad h(x)=2^{-x+1} \qquad k(x)=2^x\cdot 30^{x-1}\cdot 12^{-x+1} \qquad m(x)=\sqrt[4]{-5+2x}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \qquad j(x)=L\left(x^5-1\right) \qquad l(x)=\frac{x^2-9}{x^3+7x^2+15x+9} \qquad n(x)=\left(4x^2-4x+1\right)^{\frac{-1}{3}}$$

   a) Calcula las siguientes composiciones:

$$f\circ h\;;\; g\circ h\;;\; g\circ j\;;\; k\circ h\;;\; g\circ h\circ j\;;\; m\circ j\;;\; l\circ h\;;\; m\circ h\;;\; j\circ h\;;\; l\circ m$$

   b) Calcula $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ y verifica que son las inversas de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

   c) Calcula todos los dominios.

   d) Calcula los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos, viene dada por $h(t)=5+4t-t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.

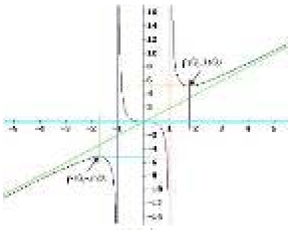
7. Considera las funciones *f*, *g*: $[0, 2\pi] \to \Re$, $f(x)=2\cdot sen(x)$ y $g(x)=sen(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de *f* y de *g*.

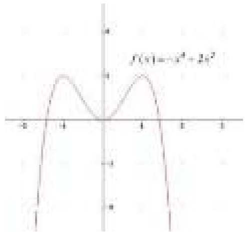
8. Sea la función dada por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que es impar y que pasa por el punto (1, –2).

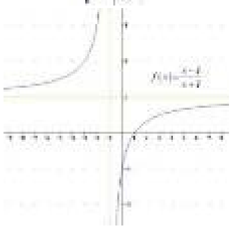
9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$. Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.
10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10 \quad 0 \le t \le 12$.

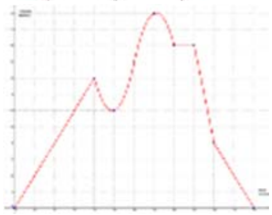
    a) Representa gráficamente la función. b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?
11. Considera la función definida por $f(x) = \frac{2\log x}{x^2}$. Calcula su dominio.
12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.
13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \ge 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.
14. Considera la función definida por $g(x) = |ln(x)|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.
15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{\mathrm{L}x}{x^2}$ ($\mathrm{L}x$ indica logaritmo neperiano de x);

    $g(x) = (1 - x^3)\cos x$ y $h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$.
16. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.
17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a) 

b) 

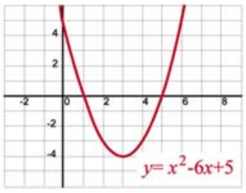
c) 

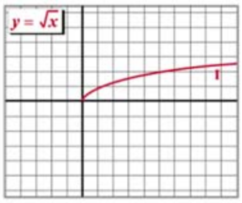
d) 

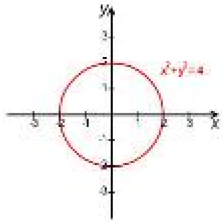
18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x)$ millones de €, siendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.
19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.
    a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
    b) Represente gráficamente la función *h(t)*.
    c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?
    d) ¿En qué instante llega al suelo?

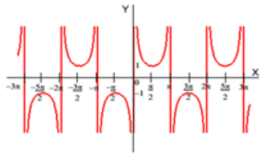
AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) 

b) 

c) 

d) 

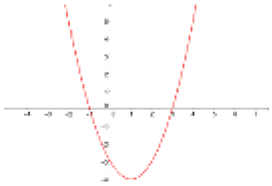
2. La fórmula de la composición fog de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

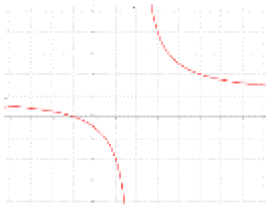
a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

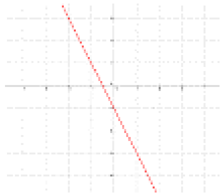
3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

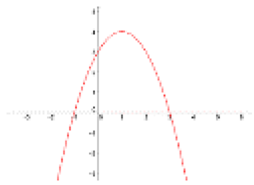
a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

a) 

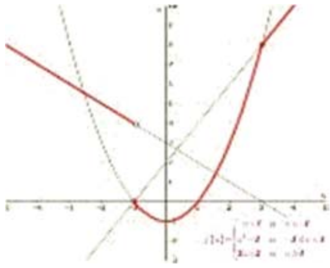
b) 

c) 

d) 

5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

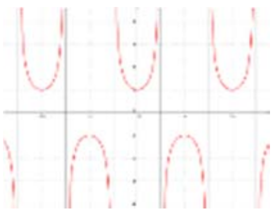
6. El recorrido de la función  es:

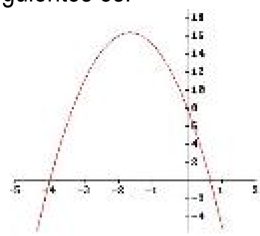
a) $[-1, \infty[$ b) $]-1, \infty[$ c) $]-\infty, -1]$ d) $\Re - \{4\}$

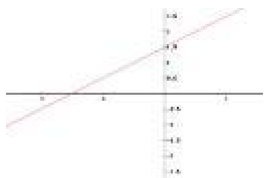
7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ son:

a) No tiene b) $(1,0);(2,0)$ c) $(-1,0);(2,0)$ d) $(0, \ln 3)$

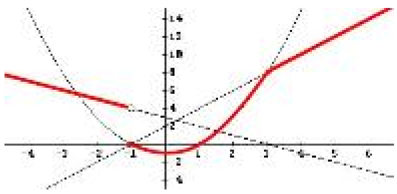
8. La única función impar entre las siguientes es:

a) 

b) 

c) 

d) 

9. El intervalo donde la función  es negativa es:

a) $]-1, 1[$ b) $]-\infty, -1[$ c) $]-\infty, 1]$ d) $]-\infty, 0[$

RESUMEN

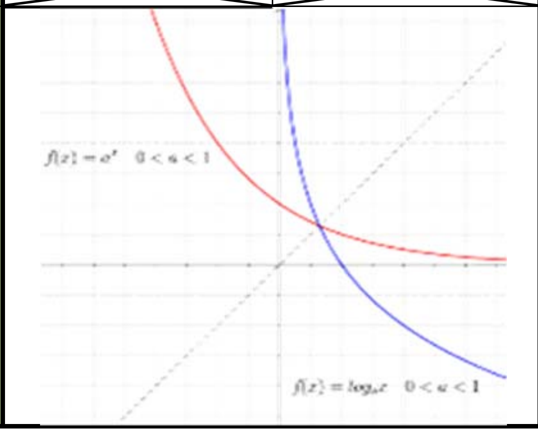
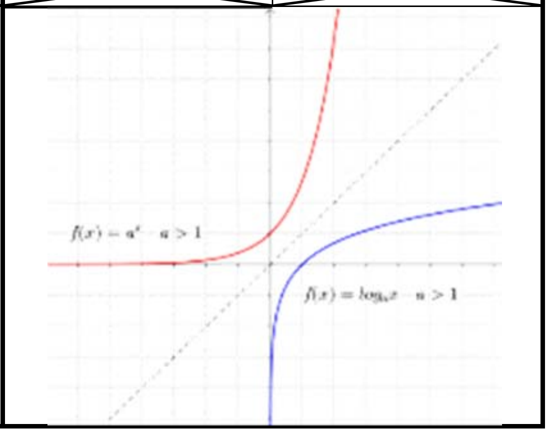
TIPOS DE FUNCIONES		FÓRMULA
ALGEBRAICAS	*Polinómicas*	Polinomio
	Racionales	Cociente de polinomios
	Irracionales	Raíz de una racional
TRASCENDENTES	*Exponenciales*	Exponencial (variable en el exponente)
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)
	Trigonométricas	Trigonométrica (variable como argumento de una razón trigonométrica)
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable

<table>
<tr><th>OPERACIÓN</th><th colspan="4">EJEMPLO: $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=\frac{-3x}{x+1}$</th></tr>
<tr><td>Función suma $f+g$
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$(f+g)(x)=\frac{-3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$</td><td>Función resta $f-g$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
$(f-g)(x)=\frac{3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$</td><td colspan="2">Función producto $f\cdot g$:
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
$(f\cdot g)(x)=\frac{-6}{x+1}$</td><td>Función cociente f/g :
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x+2}{-3x^2}$</td></tr>
<tr><td>Función compuesta</td><td colspan="4">$\underbrace{f\circ g}_{g \text{ compuesto con } f}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{-3x}{x+1}\right) \underset{\text{ponemos } g(x)=\frac{-3x}{x+1}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } f,}{=}} \frac{2}{\left(\frac{-3x}{x+1}\right)}=\frac{2x+2}{-3x}$

$\underbrace{g\circ f}_{f \text{ compuesto con } g}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right) \underset{\text{ponemos } f(x)=\frac{2}{x}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } g,}{=}} \frac{-3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)+1}=\frac{\frac{-6}{\cancel{x}}}{\frac{2+x}{\cancel{x}}}=\frac{-6}{x+2}$</td></tr>
<tr><td>Función inversa f^{-1} :
$\begin{cases} f\circ f^{-1}=I \\ f^{-1}\circ f=I \end{cases}$
Si existe, la inversa es única y su gráfica y la de la función son simétricas respecto a la de la función identidad.</td><td colspan="2">1º Llamamos y a $f(x)$
2º Despejamos x en función de y
3º Cambiamos los papeles de x e y</td><td colspan="2">$g(x)=y=\frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y\cdot(x+1)=-3x \Rightarrow$
$\Rightarrow yx+y=-3x \Rightarrow yx+3x=-y \Rightarrow$
$\Rightarrow x(y+3)=-y \Rightarrow x=\frac{-y}{y+3}$
$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x}{x+3}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES</th></tr>
<tr><td>1) Dominio</td><td colspan="3">Conjunto de valores que <u>tienen</u> imagen.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2) Puntos de corte con los ejes</td><td rowspan="2">Ordenadas (OY)</td><td>$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$</td><td>Operación numérica</td></tr>
<tr><td>$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay</td><td>Nada</td></tr>
<tr><td>Abscisas (OX) -CEROS-</td><td>$f(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots \Rightarrow (x_1,0);(x_2,0);\ldots$</td><td>Ecuación</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3) Simetría</td><td>Par</td><td>$f(-x)=f(x)$</td><td rowspan="2">Operación algebraica</td></tr>
<tr><td>Impar</td><td>$f(-x)=-f(x)$</td></tr>
</table>

FAMILIAS DE FUNCIONES		Racional	Irracional: Índice par	Irracional: Índice impar	Exponencial	Logarítmica	Definida a trozos
Dominio (D)		$\Re$ – {polos}	$\{x \in \Re;$ radicando $\geq 0\}$	$\Re$ – {puntos problemáticos radicando}	$\Re$ – {puntos problemáticos exponente}	$\{x \in \Re;$ argumento $> 0\}$	-Valores de la variable -Puntos problemáticos de cada fórmula $\Re$ – {valores que no toma la variable y puntos problemáticos incluidos en el rango}
Puntos de corte con los ejes	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\,f$ sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al 0
	OX	Numerador = 0	Radicando = 0	Radicando = 0	No hay	Argumento = 1	-Cada fórmula = 0 -Soluciones que pertenecen a su rango
Signo		-Ceros y polos -Estudio del signo en la recta real	Positivo siempre salvo en los ceros	Signo del radicando	Positivo en todo su dominio	$0<a<1$: argumento<1: + argumento>1: - $a>1$: argumento<1: - argumento>1: +	-Ceros, polos y puntos donde cambia la definición -Estudio del signo en la recta real
Simetría	PAR	Todos los grados pares o impares	Nunca	Simetría del radicando	Argumento par	Argumento par	Es tan infrecuente la simetría en este tipo de funciones que no merece la pena estudiarla
	IMPAR	Todos los grados del n^{dor} pares y del d^{dor} impares o viceversa			Nunca	Nunca	

CARACTERÍSTICAS		$0 < a < 1$: a^x	$0 < a < 1$: $\log_a x$	$a > 1$: a^x	$a > 1$: $\log_a x$
Dominio		$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$
Recorrido		$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	(0, 1)	~~(0, 1)~~	(0, 1)	
	Abscisas		(1, 0)		(1, 0)
Signo	*Positivo*	$\Re = (-\infty, \infty)$	(0, 1)	$\Re = (-\infty, \infty)$	$(1, \infty)$
	Negativo		$(1, \infty)$		(0, 1)
Simetría					
DIBUJO					

CAPÍTULO 8: IGUALDAD Y DESIGUALDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

ECUACIONES E INECUACIONES

1. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

2. Dada la siguiente inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

3. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:
   a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
   b) Restar 5: $x - 3 > 7$
   c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
   d) Multiplicar por –5: $-3x \geq 7$
   e) Dividir entre 2: $4x < 10$
   f) Dividir entre –2: $4x \geq 10$
4. Escribe una inecuación que sea cierta para $x = 3$ y falsa para $x = 3.5$.
5. Te puedes ayudar de GeoGebra para representar las rectas, las parábolas o las regiones factibles, así, resolver las inecuaciones
6. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

   a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$ c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$
7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $2x - 3\cdot\frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x\cdot(x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

   d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.
8. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?
9. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.
10. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.
11. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.
12. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?
13. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.
14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

    a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$

    e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$
15. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

    a) $3x^2 - 5x \geq 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $x^2 \leq 0$

    d) $2x^2 > 4x$ e) $2x^2 - 8 > 0$ f) $5x^2 + 5x \geq 0$

    g) $5x^2 - 5 \leq 0$ h) $x^2 - x > 0$
16. Te puedes ayudar de GeoGebra para representar las rectas, las parábolas o las regiones factibles, así, resolver estas inecuaciones.
17. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

    a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

    d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

    g) $x^2 + x + 3 \geq 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$
18. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

    a) $x^2 + x - 6 > 0$ b) $x^2 - x - 12 \leq 0$ c) $x^2 - x - 20 < 0$

    d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$ e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

    g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$ h) $2x^2 + x - 15 < 0$

19. Calcula los valores de *x* para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{-x^2+4}$ c) $\sqrt{x^2+5x+6}$ d) $\sqrt{x^2-5x+6}$

20. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x+5)(2x-5) \le 11$ b) $(2x-5)(4x-3)-(x-10)(x-2) \ge 51$ c) $\frac{3x-2}{x} \le \frac{5-2x}{x+6}$

21. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para comprobar la solución de todos los ejercicios anteriores.

22. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0$

23. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4+5x^2-36=0$ b) $x^4-21x^2+12\,100=0$ c) $x^4-45x^2+234=0$ d) $x^4-37x^2+36=0$.

24. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$.

25. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$.

26. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$ c) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES LINEALES

27. Represente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -y+3x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y=9 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

28. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{cases}$

29. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

30. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

32. Resuelve el sistema anterior: $\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2.5y-1.5z=210 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

33. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?
34. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
35. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.
36. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?
37. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

38. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice “La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90”. Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?
39. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?
40. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

    El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.
    El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.
    El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

41. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0,5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?
42. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1.2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?
43. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?
44. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?
45. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes: $x+2y<3$: $-x+3y>4$; $2x-y\le -2$; $-x-y\ge 0$. Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.
46. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+2y\ge 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ x-y>-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 2x+y<1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ x+y>1 \end{cases}$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

47. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?
48. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?
49. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?
50. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1 000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.
51. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.
52. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.
53. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.
54. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes:

$$x+2y<3 \qquad -x+3y>4 \qquad 2x-y\le -2 \qquad -x-y\ge 0$$

Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

55. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+2y\ge 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ x-y>-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 2x+y<1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ x+y>1 \end{cases}$$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

56. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

57. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

58. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{array}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{array}\right\}$

59. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

60. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ 2x^2-3y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \\ 5x^2-2y^2=5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-4y=-3 \\ xy=1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{array}{r} x+y-\dfrac{y}{x}=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dada la siguiente inecuación $5 + 3x > 2x + 1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma:
   0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15
2. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:
   i) Sumar 4: $x - 2 > 5$ ii) Restar 6: $x - 4 > 8$ iii) Multiplicar por 6: $5x \geq 10$
   iv) Multiplicar por –4: $-2x \geq 8$ v) Dividir entre 2: $6x < 12$ vi) Dividir entre –2: $20x \geq 60$
3. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:
   a) $2x-3\leq -5$ b) $x-2\leq 3x-5$ c) $12-x\leq -6$ d) $-5x-3\leq -2x+9$
   e) $2(3x-3)>6$ f) $-3(3-2x)<-2(3+x)$ g) $2(x+3)+3(x-1)\leq 2(x+2)$
4. Resuelve:
   a) $\frac{x}{2}-6<4$ b) $\frac{2x}{3}-3\leq -x$ c) $2(3x-2)>3-x$ d) $\frac{2(x+2)}{3}<2x$ e) $\frac{x-4}{4}+2>\frac{x+4}{8}$ f) $\frac{x}{2}-4<x-\frac{x+1}{7}$
5. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:
   a) $(-\infty,-3]$ b) $[4,+\infty)$ c) $(-\infty,5)$ d) $(-2,+\infty)$
6. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:
   a) $\sqrt{2x-6}$ b) $\sqrt{-x+5}$ c) $\sqrt{10-5x}$ d) $\sqrt{-6x-30}$
7. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
   a) $3x^2 - 75 < 0$ b) $-x^2 + 16 \leq 0$ c) $-x^2 + 25 \geq 0$ d) $5x^2 - 80 \geq 0$
   e) $4x^2 - 1 > 0$ f) $25x^2 - 4 < 0$ g) $9x^2 - 16 < 0$ h) $36x^2 + 16 \leq 0$
8. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
   a) $-4x^2 + 5x \leq 0$ b) $3x^2 + 7x \geq 0$ c) $2x^2 < 8x$
   d) $-3x^2 - 6x \geq 0$ e) $-x^2 + 3x < 0$ f) $-5x^2 - 10x \geq 0$
9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
   a) $3x^2 \leq 0$ b) $8x^2 > 0$ c) $-5x^2 < 0$ d)$9x^2 \geq 0$
10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
    a) $x^2 - 1 \leq 0$ b) $-x^2 - 4x \leq 0$ c) $x^2 + 1 \geq 0$ d) $-3x^2 > 30$
    e) $-x^2 - 4 \leq 0$ f) $-3x^2 - 12x \geq 0$ g) $-5x^2 < 0$ h) $x^2 + 9 \geq 0$
11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
    a) $x^2 - 2x > 0$ b) $3x^2 - 3 \leq 0$ c) $5x^2 - 20 \geq 0$ d) $x^2 + 4x > 0$
    e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$ f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$
    g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$ h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x+1)$
12. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:
    a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$ d) $\sqrt{x^2+3x+5}$
    e) $\sqrt{-x^2+12x-36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$
13. Resuelve las siguientes inecuaciones:
    a) $2(x - 1)^2 > 2$ b) $3(x + 1)^2 \leq -12$ c) $-x^2 < 2$
    d) $4(x - 2)^2 > 1$ e) $-5(x + 4)^2 \leq 0$ f) $9(x + 1)^2 \leq 81$
14. Resuelve las siguientes inecuaciones:
    a) $x(2x - 3) - 3(5 - x) > 83$ b) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ c) $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 > 130$
    d) $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) \geq 40$ e) $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) < 214$
    f) $8(2 - x)^2 > 2(8 - x)^2$ g) $\frac{x^2-6}{2}-\frac{x^2+4}{4}\geq 5$ h) $\frac{5x-3}{x}\leq\frac{7-x}{x+2}$
15. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:
    a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$
16. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:
    a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$
17. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

18. Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$ se pide:

    a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.
    b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

19. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$ se pide:

    a) Discute y resuelve, cuando sea posible.
    b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:
    i) una solución ii) muchas soluciones iii) no tenga solución

20. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
21. Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1 550 euros.
22. La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?
23. Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?
24. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:
    - Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
    - Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
    - Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

    Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?
25. Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.
26. Una persona invirtió 72 000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5 520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.
27. Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?
28. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
29. En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

    a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

30. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son "m" euros/litro). También recuerda que:
    - la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
    - el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
    - el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.

    a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de "m") para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

    b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de "m". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

31. En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

    a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

    b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

32. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

    a) $x+y-7\le 0$ b) $2x-y+3\ge 0$ c) $y\ge 3$ d) $x\le 5$ e) $x\ge 0$ f) $y\le 0$

33. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}3x+4y\le 9\\ 2x-y\ge 12\end{cases}$ b) $\begin{cases}y+3x-7\le 0\\ y-6x+11\le 0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2y\le 10 & x\ge 0\\ x+y\ge 10 & 0\le y\le 5\end{cases}$

CURIOSIDADES Y REVISTA

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

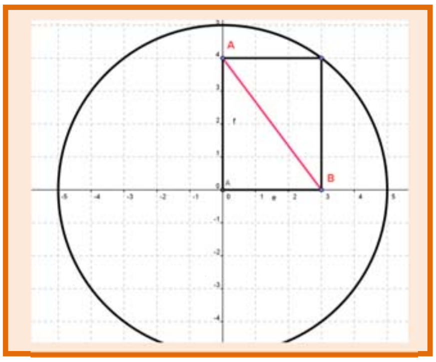
Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

La invitación

Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?
Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?
Solución: Pesa un kilo.



Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de x, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$
$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow x \geq 4$.
¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tiene como solución $x = 2$ la inecuación siguiente:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

2. La solución de la inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ es:

a) $x < -10/17$ b) $x > -3/5.1$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$

3. La **solución** de la ecuación $2(x - 3) - 3(x^2 - 4) = 1$ es:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

4. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

5. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

6. La solución del sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ es:

a) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ c) $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$ d) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

8. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

a) (1, 2) b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

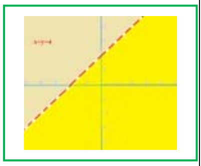
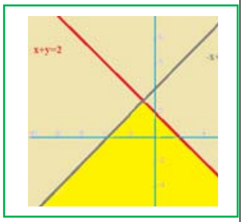
9. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$
c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

10. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$

RESUMEN

Propiedades de las ecuaciones	Si $a = b$, $\forall c \Rightarrow a + c = b + c$ $\forall c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$	$3x + 2 = 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 = 5 - 2 \Leftrightarrow 3x = 3$ $3x = 3 \Leftrightarrow 3x : 3 = 3 : 3 \Leftrightarrow x = 1$
Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Ecuaciones e inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	Si $a < b$: $\forall c \Rightarrow a + c < b + c$ $\forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ $\forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ $3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ $-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ $3 - x < 2 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Se usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	Compatible determinado: Una única solución. Las rectas son secantes: Compatible indeterminado: Infinitas soluciones, rectas coincidentes: **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas:**	
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. Reducción: sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados. Método de Gauss: Para sistemas lineales de dos o más ecuaciones	
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$. Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

CAPÍTULO 9: PROGRAMACIÓN LINEAL

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROGRAMACIÓN LINEAL

$$\begin{cases} r_1 : x + y \le 80 \\ r_2 : 30x + 20y \le 1800 \\ r_3 : x \ge 0 \\ r_4 : y \ge 0 \end{cases}$$

1. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:

   a) $z = 2x + 4y \to \text{Máx}$ b) $z = 4x + 3y \to \text{Mín}$ c) $z = 4x + 3y \to \text{Máx}$

2. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

$$\text{f.o. } f(x,y) = 2x + 3y \quad \text{s.a.} \begin{cases} x + y \ge 2 \\ 2x + 3y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } f(x,y) = x + 3y \quad \text{s.a} \begin{cases} 2x + 5y \le 300 \\ x + y \le 90 \\ x \ge 0 \\ y \ge 15 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z = x + y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 2x + 3y \le 120 \\ x \ge y \\ 0 \le x \le 45 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z = 1{,}5x + 2y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 3x + 4y \ge 12 \\ x \ge y \\ 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 10 \end{cases}$$

2. PROBLEMAS RESUELTOS

3. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x + 2y \le 6 \\ 4x + 3y \le 12 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$ y analiza si los puntos $(0, 2)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$ y $(5, 6)$ al conjunto de soluciones del sistema anterior.

4. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x + 3y \le 9 \\ x + y \ge 10 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$ y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

5. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \le 15 \\ 2x + y \le 9 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

   y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

6. Sea S la región del plano definida por

$$y \ge 2x - 4 \qquad y \le x - 1 \qquad 2y \ge x \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

   a) Representa la región S y calcula las coordenadas de sus vértices
   b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

7. Se consideran la función $f(x;y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \le 0 \qquad x + y \le 6 \qquad x \ge 0 \qquad y \le 3$$

   a) Representa la región S.
   b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región S y obtén los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

8. Minimiza $z = -3x - 2y$ sujeta a

$$-2x + y \le 2 \qquad x - 2y \le 2 \qquad x \ge 0 \qquad y \le 3$$

   a) Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.
   b) Si se añade la restricción: $x + y \ge 10$, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.

9. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1 600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

CURIOSIDADES. REVISTA

10. Intenta utilizar GeoGebra para volver a resolver los problemas de las actividades realizadas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1) Maximizar la función $z = 3x + 3y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

2) Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$ sometida a las restricciones

$$y \le 4 \qquad x \le 3 \qquad x - y \le 3 \qquad x - y \ge 0$$

3) Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta.

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7.5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

4) Desde dos almacenes A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diaria y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste de transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado, en euros por tonelada, en el cuadro adjunto.

	M_1	M_2	M_3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

5) Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20 000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

6) En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

7) Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3 000 unidades y menor que 6 000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción?

b) Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

8) Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8 000 y 15 000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10 000, 7 000 y 6 000 piezas respectivamente.

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2
- La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2
- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1

9) Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0.3 mg de vitaminas y 4.5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0.2 mg de vitaminas y 1.5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

10) Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40 % de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.
   a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
   b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?

11) Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20 % de las piezas que se coloquen sean jardineras.
   a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
   b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

12) Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de 1 100 m^2 para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m^2. El aparcamiento ha de tener como poco 300 m^2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m^2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m^2, y el área recreativa 45 euros por m^2.
   a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
   b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?

13) Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos.
   a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual?
   b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?

14) Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.
   Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.
   a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.
   b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

15) En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0.25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0.5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?

16) Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9 000 euros y el modelo B a 12 000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36 000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

AUTOEVALUACIÓN

1.- Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

a) $5x+2y<7$ b) $5x+2y\le 7$ c) $5x+2y=7$ d) $5x+2y\ge 7$

2.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotado:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

3.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

4.- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice

b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

c) La región factible determina la función objetivo.

d) En un programa lineal se optimiza la región factible.

5.- Una nueva granja estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

6.- Para este problema la función objetivo es:

a) $3x+4y\rightarrow$Mín b) $x+y\rightarrow$Máx c) $x+y\rightarrow$Mín d) $3x+4y\rightarrow$Máx

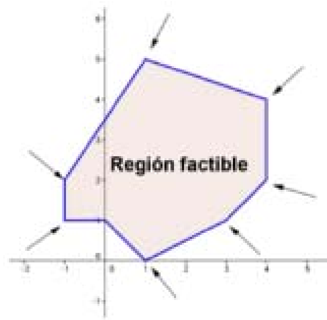
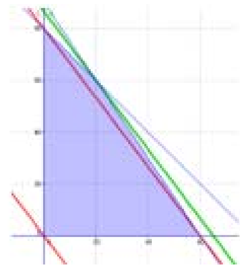
7.- Para este problema las restricciones son:

a) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x>y \end{cases}$

8.- Resuelve el problema e indica si la solución es:

a) No tiene solución. b) 100 patos y 100 gansos. c) 233 patos y ningún ganso. d) Ningún ganso y 175 patos.

RESUMEN

Sistemas de inecuaciones lineales	Un sistema de inecuaciones lineales es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.	$\begin{cases} x+y \leq 80 \\ 30x+20y \leq 1800 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$
Programación lineal	Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende optimizar (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales. La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.	$\text{f.o.}: f(x,y) = a \cdot x + b \cdot y \to \text{Máx o mín}$ $s.a.: \begin{cases} a_1 x + b_1 y \neq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \neq c_2 \\ \dots \\ a_k x + b_k y \neq c_k \end{cases}$
Teorema fundamental	En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.	
Método algebraico de resolución	El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.	
Método gráfico de resolución	En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Sobre la región factible se representan las rectas de nivel asociadas a la función objetivo ($ax+by=k$) y se ve cuál es la que toma un valor k óptimo.	
Tipos de soluciones	- Factibles con solución única. - Factibles con solución múltiple, - Factible no acotada. - No factible.	

CAPÍTULO 10: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

PROBABILIDAD

11. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
    a) El número de habitantes de las provincias españolas.
    b) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
    c) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
    d) Saber si el próximo año es bisiesto.
12. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar*".
13. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas*".
14. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados*.
15. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos. ***Por ejemplo:*** Vamos a comprobar la Ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$:

    $A \cap B = \{6\} \rightarrow (A \cap B)^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
    $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow A^C = \{1, 3, 5\}$; $B = \{3, 6\} \rightarrow B^C = \{1, 2, 4, 5\}$; $A^C \cup B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
16. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C, $(A \cup B)^C$, $A^C \cup B^C$.
17. Utiliza un diagrama de *Venn* para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.
18. Considera ahora un diagrama de *Venn* con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas A que toman té, 27 que toman café B y 2 personas que no toman ninguna bebida: $(A \cup B)^C$. A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Escríbelo en función de A y B, y represéntalo en el diagrama de *Venn*. B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café. D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B. E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras e indícalo en el diagrama. F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.
19. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
20. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
21. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.
22. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.
23. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.
24. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.
25. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.
26. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.
27. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.
28. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?
29. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

30. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un oro* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar oro*, y B = *sacar un oro* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar oro en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar oro* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar oro* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos oros*? ¿Y la de sacar un solo *oro*? ¿Y la de sacar al menos un oro?
31. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *oros*" y la de "*no sale ningún oro*".
32. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.
33. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A\cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

34. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.

(b) La probabilidad de que no ocurra B.

(c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

(d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

35. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

(a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

(b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B?

36. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(A \cup B)$ = 7/15, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B.

37. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$

Calcular: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$.

38. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$, $P(A \cup B)=\frac{1}{2}$.

Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$

Nota. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

39. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N)$ = 0.4.
40. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0.02 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.

41. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: *A*, *B* y *C*. Si falla *A* se pone *B* en funcionamiento, y si también falla *B* empieza a funcionar *C*. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.99$; $P(B) = 0.96$ y $P(C) = 0.97$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

42. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

43. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0.3		0.4
Accidente con sólo daños materiales (*M*)			
Totales	0.7		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

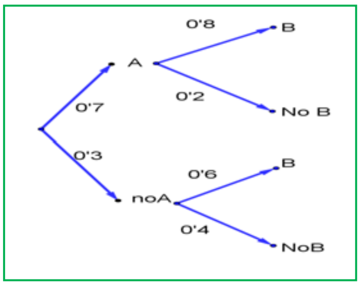
c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

44. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (*C*) o urbanos (*U*), pero que ahora los clasificamos en leves (*L*), graves (*G*) o mortales (*M*). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

45. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No *A* = $\overline{A}$	
B	0.3	0.1	0.4
No *B* = $\overline{B}$	0.5	0.1	0.6
	0.8	0.2	1

46. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después el otro diagrama de árbol.



47. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.
    (a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.
    (b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

48. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

    a) El segundo caramelo sea de fresa.
    b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

49. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

    a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.
    b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

50. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre *A* no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre *B* ni el 10 % de los atendidos por el sastre *C*. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre *A*, el 30 % al *B* y el 15 % restante al *C*. Calcúlese la probabilidad de que:
    a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.
    b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre *A*.

51. Tenemos dos urnas, *A* y *B*. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *A*?

52. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

53. Se tienen 3 cajas, *A*, *B* y *C*. La caja *A* tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja *B* tiene 10 bolas con una bola negra. La caja *C* tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja *C*.

54. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0.4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

55. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:
    a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.
    b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

56. Tres máquinas *A*, *B* y *C* fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina *A* sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en *B* es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en *C* es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina *A*, 30 de la *B* y 75 de la *C*.
    a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.
    b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina *B*?

57. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?
c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?
d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

58. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio *A*, 70 alumnos del colegio *B* y 50 alumnos del colegio *C*. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio *A*, el 90 % de los del colegio *B* y por el 82 % de los del colegio *C*.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?
    (b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio *B*?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?
2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.
3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.
5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.
6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.
7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.
8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!
9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.
10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.
11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.
12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.
13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.
14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.
15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.
16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.
17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.
18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?
19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. El enunciado del teorema de *Bayes* es:

a) $P(A_i / C) = \dfrac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{P(C)} = \dfrac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(C / A_k) \cdot P(A_k)}$

b) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B / A_2) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$

c) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_3)}{P(B)}$

d) $P(A_i / A) = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$

7. En una urna hay 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas. Llamamos A al suceso sacar una bola roja, y B a sacar una bola negra. Los sucesos A y B son:

a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

8. Sacamos una carta de una baraja. Llamamos A al suceso sacar un rey y B a sacar una sota. Los sucesos A y B son:

a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o sucesos posibles. Un suceso es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	P(5) = 1/6. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	*1.* $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. *3.* Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Propiedades de la Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Sucesos dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. P(5 $\cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 = 2/36
Teorema de la probabilidad total	$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$	
Teorema de Bayes	$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$	

CAPÍTULO 11: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16			16	0.4
19	15			
22	6	0.15	37	0.925
25				

2. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60		60
[10, 20[		0.4	
[20, 30[	30		170
[30, 40[		0.1	
[40, 50]			200

3. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.
   a) Intención de voto de un partido
   b) Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
   c) Número de calzados
   d) Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
   e) Marcas de cerveza
   f) Número de empleados de una empresa
   g) Altura
   h) Temperatura de un enfermo.

4. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

   10.5 11.2 9.9 15.0 11.4 12.7 16.5 10.1 12.7 11.4 11.6 6.2 7.9 8.3 10.9 8.1 3.8 10.5 11.7 8.4 12.5 11.2 9.1 10.4 9.1 13.4 12.3 5.9 11.4 8.8 7.4 8.6 13.6 14.7 11.5 11.5 10.9 9.8 12.9 9.9

   Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

5. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

   70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

   Determinar:
   a) Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.
   b) Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.
   c) ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?
   d) Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).

6. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

   2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

   a) Construye la tabla de frecuencias con estos datos.
   b) ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?
   c) ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?
   d) ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?
   e) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.
   f) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

7. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebes y se tiene:

   3.2 3.7 4.2 4.6 3.7 3.0 2.9 3.1 3.0 4.5 4.1 3.8 3.9 3.6 3.2 3.5 3.0 2.5 2.7 2.8 3.0 4.0 4.5 3.5 3.5 3.6 2.9 3.2 4.2 4.3 4.1 4.6 4.2 4.5 4.3 3.2 3.7 2.9 3.1 3.5

   a) Construye la tabla de frecuencias.

   b) Si sabemos que los bebes que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?

   c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?

   d) Representa gráficamente la información recibida.
8. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Represента la información mediante un diagrama de sectores
9. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son: 74.001 74.003 74.015 74.000 74.005 74.002 74.005 74.004

   Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.
10. Dada la distribución de datos 38 432 384 343 38 436 38 438 38 440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.
11. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:
    a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000
    b) El salario más frecuente.
    c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
[0,1 500[	2 145
[1 500, 2 000[	1 520
[2 000, 2 500[	840
[2 500, 3 000[	955
[3 000, 3 500[	1 110
[3 500, 4 000[	2 342
[4 000, 5 000[	610
[5 000, 10 000[	328
$\geq$ 10 000	150

12. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

13. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

    Unidad A 97.8 98.9 101.2 98.8 102.0 99.0 99.1 100.8 100.9 100.5

    Unidad B 97.2 100.5 98.2 98.3 97.5 99.9 97.9 96.8 97.4 97.2

    a) Haz una representación gráfica de estas muestras.
    b) Determina las medias y las varianzas.

14. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	*Nº de familias*
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?

d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

15. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	a	32	35	33	b	35

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3.6.

16. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49,61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) Calcula la media y la mediana muestrales.

b) Halla los cuartiles primero y tercero.

c) Halla los percentiles cincuenta y noventa.

d) Calcula el rango muestral.

e) Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

17. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.

6.5 2.1 4.4 4.7 5.3 2.6 4.7 3.0 4.9 8.6 5.0 4.9 4.0 3.4 5.6 4.7 2.7 2.4 2.7 2.2 5.2 5.3 4.7 6.8 4.1 5.3 7.6 2.4 2.1 4.6 4.3 3.0 4.1 6.1 4.2

a) Construye un histograma.

b) Determina los cuartiles.

c) Calcula la media y la desviación típica.

2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. 3. COVARIANZA

18. Los datos siguientes son las calificaciones obtenidas por los estudiantes de un grupo de 25 de 1º de bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y Lengua.

Matemáticas	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Lengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemáticas	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Lengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

a) Escribe la tabla de frecuencias conjunta.

b) Proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en ambas asignaturas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Matemáticas, proporción estudiantes que obtiene más de un cinco en Lengua.

c) ¿Son independientes las calificaciones de Matemáticas y Lengua?

d) Representa gráficamente.

e) Calcula el coeficiente correlación.

19. Para realizar un estudio sobre la utilización de una impresora en un determinado departamento, se midió en un día los minutos transcurridos entre las sucesivas utilizaciones X y el número de páginas impresas Y, obteniéndose los siguientes resultados.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20

X	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	12
Y	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3

a) Escribe la distribución de frecuencias conjunta. Porcentaje de veces que transcurren más de nueve minutos desde la anterior utilización y se imprimen menos de doce páginas. Número de veces que se imprimen menos de doce páginas y transcurren nueve minutos desde la utilización anterior.

b) Frecuencias marginales. Veces que se imprimen como mucho doce páginas. Número de páginas que se imprimen en el 80 % de las ocasiones.

c) Calcula la distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones.

d) Dibuja el diagrama de dispersión.

20. Las estaturas de los 30 niños nacidos en una maternidad durante una semana fueron los siguientes:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Peso	3.2	4.1	4.5	3.0	3.6	2.9	3.8	3.8	3.6	3.9	3.0	3.8	4.1	3.5	4.0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3.1	3.3	3.9	3.7	4.1	4.2	3.5	3.8	3.6	3.4	4.6	3.5	3.6	3.1	4.0

a) Construye una tabla de doble entrada, agrupando los pesos en intervalos de 0.5 kg.

b) ¿Es la estatura independiente del peso?

21. En el examen de una asignatura que consta de parte teórica y parte práctica, las calificaciones de nueve alumnos fueron:

Teoría	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Práctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. Dibuja la nube de puntos. Comenta los resultados.

22. Se desea investigar el ganado caprino y el ganado ovino de un país. En la tabla de doble entrada adjunta se presentan los resultados de un estudio de 100 explotaciones ganaderas, seleccionadas aleatoriamente del censo agropecuario. Se proporcionan las frecuencias conjuntas del número de cabezas (en miles) de cabras X y ovejas Y que poseen las explotaciones.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

a) Halla las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales.

b) Halla el número medio de ovejas condicionado a que en la explotación hay 2000 cabras.

c) Halla el número medio de cabras que tienen aquellas explotaciones que sabemos que no tienen ovejas.

d) Halla la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables.

23. El volumen de ahorro y la renta del sector familias en millones en euros constantes de 2005 para el periodo 2005-2014 fueron.

Años	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

a) Recta regresión del ahorro sobre la renta.

b) Recta de regresión de la renta sobre el ahorro.

c) Para el año 2015 se supone que la renta era de 24.1 millones de euros. ¿cuál será el ahorro esperado para el año 2015?

d) Estudiar la fiabilidad de la predicción anterior.

24. Se midió el tiempo en segundos que tardaron en grabarse los mismos 24 ficheros en un lápiz USB X y en un disco duro exterior Y.

X	1.2	1	1.1	0.5	1.1	1.5	1	1.4	1.4	1.3	0.4	0.3
Y	1.3	1.1	1.2	0.4	1.2	1.4	1.1	1.6	1.6	1.5	0.4	0.3

X	0.3	1.5	1.4	1.1	1.2	1.2	0.4	0.5	1.3	1.5	1.2	0.2
Y	0.3	1.6	1.3	1.1	1.3	1.1	0.4	0.4	1.4	1.6	0.9	0.3

a) Construye la tabla de frecuencias conjunta. ¿Cuál es el porcentaje de ficheros que tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo? ¿Cuántos ficheros tardan en grabarse entre 0.6 y 1.2 segundos en el primer tipo de memoria? ¿Cuánto tiempo tardan como mucho en gravarse al menos el 90 % de los ficheros en el segundo tipo de memoria?

b) Halla la tabla de frecuencias condicionadas de los tiempos del segundo tipo de memoria de aquellos programas que tardaron 1.2 en el primer tipo de memoria. ¿Cuál es la proporción de estos programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria?

c) Representa gráficamente los datos y comenta el resultado obtenido.

d) Si un fichero tarda 0.8 segundos en grabarse en el primer tipo de memoria, ¿cuantos segundos tardara en grabarse en el segundo tipo? Dar una medida de fiabilidad. ¿Confirma esta medida lo comentado en el apartado c)?

25. De un muelle se cuelgan pesos y obtenemos los alargamientos siguientes.

Peso gr ***X***	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Alargamiento cm ***Y***	0	0.5	1	3	5	6.5	8	10.2	12.5	18

Encuentra la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 y 500 gr. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

26. La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cubico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido.

Número de horas	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cubico en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cubico es previsible encontrar cuando transcurran 6 horas? ¿Es buena esta predicción?

27. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía a medida que pasa el tiempo según los datos recogidos en la tabla:

Tiempo: ***h***	8	22	27	33	50
Altura: ***m***	17	14	12	11	6

a) Encuentra el coeficiente correlación entre el tiempo y la altura. Da una interpretación de él.

b) ¿Qué altura se alcanzara cuando hayan transcurrido 40 horas?

c) Cuando la altura alcanza 2 m suena una alarma. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que suene la alarma?

28. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y la tasa de inflación en los meses indicados de un determinado año, va ser:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Tasa inflación	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

a) Representa la nube de puntos.

b) Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.

c) ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística descriptiva unidimensional

1. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante 10 semanas, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6

Calcula:

a) Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

2. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

b) Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.

c) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.

d) Calcula la media y la desviación típica.

e) Calcula la mediana y los cuartiles.

3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

4. Se ha preguntado a 50 estudiantes de 1º de Bachillerato por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

a) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.

b) Haz un histograma.

c) Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.

d) Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

5. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

a) Las medidas de centralización: la media, mediana, moda

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.

d) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

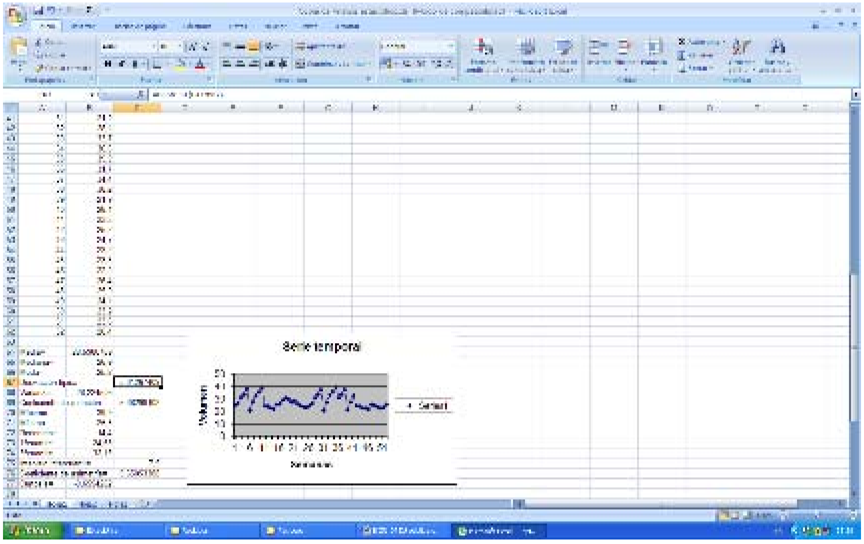
Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52.

Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.

En la casilla A11 un título, por ejemplo, “Residuos sólidos”.

En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.

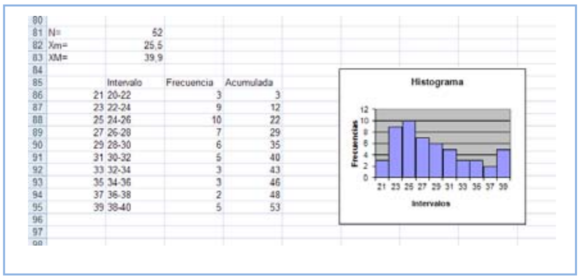
Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



6. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un histograma para mejor determinar su distribución. Para ello:

a) Indica el número total de datos, N, el menor valor: X_m, el mayor valor, X_M, y el recorrido R.

b) La cantidad de barras del histograma, k, se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h, en 2, y el número de barras, k, en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.



80				
81	N=	52		
82	Xm=	25,5		
83	XM=	39,9		
84				
85		Intervalo	Frecuencia	Acumulada
86	21	20-22	3	3
87	23	22-24	9	12
88	25	24-26	10	22
89	27	26-28	7	29
90	29	28-30	6	35
91	31	30-32	5	40
92	33	32-34	3	43
93	35	34-36	3	46
94	37	36-38	2	48
95	39	38-40	5	53
96				
97				

c) Calcula y representa en el histograma los puntos m, $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente

- Vamos a investigar qué ocurre al hacer un cambio de variables. Dijimos que si consideramos $y_i = a + bx_i$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\overline{y} = a + b\overline{x}$.

a) Abre Excel. Introduce los datos: X = 255, 271, 318, 342, 389,... en la columna A, a partir de la fila 11. ¿Qué cambio de variable se ha hecho? Observa: $x = X/10$.

b) En la columna C, a partir de la fila 11 escribe los límites de clase, en la columna D el valor medio, en la columna E vamos a contar las frecuencias absolutas y en la columna F las frecuencias acumuladas. Utiliza la función CONTAR.SI para contar. Por ejemplo, escribe en E11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escribe =E11. En E12 escribe CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la tabla de frecuencias. Escribe títulos en la fila 10.

c) Calcula la media y la desviación típica. Para ello escribe en la fila 3 y 4, columna B, las funciones =PROMEDIO(A11:A63) y =DESVEST(A11:A63). Escribe los resultados con 2 decimales.

d) ¿Cómo obtienes ahora la media y la desviación típica de los datos reales? ¿Cómo deshaces el cambio? Si no lo recuerdas, o no tienes seguridad, investígalo. Calcula la media y la desviación típica, antes y después del cambio. Escribe este resultado, en general, para un cambio de variables lineal $y = ax+b$.

e) Dibuja el histograma. No olvides nunca indicar las unidades en ambos ejes, y toda la información que ayude a comprender el gráfico. Añade siempre el tamaño, N, y los valores de la media y la desviación típica.

f) Discute el resultado. ¿Es grande la dispersión? La distribución, ¿es simétrica?

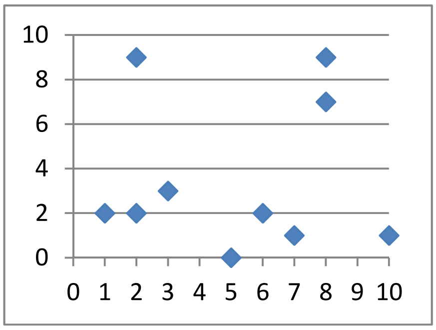
- Otra investigación: Vamos a investigar la distribución de la media. Para ello vamos a tomar muestras de tamaño 5. Utiliza la columna G. En G11 escribe =PROMEDIO(B11:B15), en G12 la media de B16 a B20, y así hasta el final. Tenemos calculadas las 10 medias de muestras de tamaño 5. Calcula la media y la desviación típica de estas medias. Compara con los resultados anteriores. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

Estadística descriptiva bidimensional

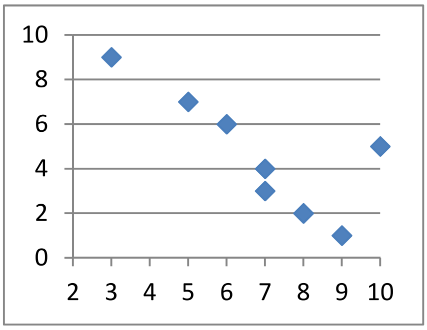
7. En una muestra de 10 personas miramos su color de ojos y pelo y encontramos que hay 5 morenos de ojos marrones, 1 moreno de ojos verdes, 3 rubios de ojos azules y 1 rubio de ojos verdes. A) Representa en una tabla de doble entrada esta situación. B) Escribe la tabla de frecuencias relativas. C) Escribe las frecuencias absolutas y relativas marginales. D) Escribe la distribución de frecuencias condicionadas.

8. Lola ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0.8, 0.85 y 0.03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?

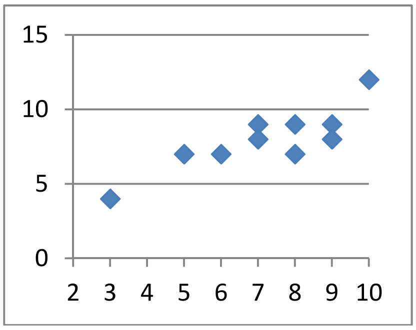
A



B



C



9. En una tienda quieren estudiar las ventas del pan de molde en función del precio. Para ello prueban cada semana con un precio distinto y calculan las ventas realizadas. Han obtenido los siguientes datos:

Precio (euros)	0.5	0.7	1	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
Ventas (medias)	20.2	19.2	18.1	15.3	11.6	6	4	0	0

   a) Representa los datos en un diagrama de dispersión (nube de puntos) e indica a qué conclusiones crees que se va a llegar.
   b) Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación, la recta de regresión y el coeficiente de determinación
   c) Deciden poner un precio de 1.4 euros, ¿cuáles opinas que serían las ventas medias semanales?

10. Una compañía aérea realiza un estudio sobre la relación entre las variables X, tiempo de un vuelo, en horas; e Y, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros, y se han obtenido los siguientes datos.

X (horas)	0´5	1	1.5	2	2.5	3
Y (litros)	2250	3950	5400	7300	8500	10300

   a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.
   b) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpreta los resultados.
   c) Calcula la ecuación de las rectas de regresión.
   d) Calcula el coeficiente de determinación.

11. Preguntamos a 10 estudiantes de 1º de Bachillerato por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Horas semanales de estudio	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Estatura (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Queremos estudiar la relación entre las calificaciones de Matemáticas y las otras tres variables. Para ello dibuja los diagramas de dispersión, y calcula los coeficientes de correlación y determinación. Calcula las rectas de regresión.

12. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Elige una muestra de 10 personas y hazles dos preguntas con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calza, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música, la calificación en Matemáticas de su último examen… Representa los datos obtenidos en una tabla de doble entrada. Haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:
   a) Escribe en tu cuaderno una tabla de doble entrada de frecuencias absolutas, frecuencias relativas. Obtén las distribuciones marginales y condicionadas.
   b) Con las distribuciones unidimensionales, dibuja los diagramas de barras, diagramas de líneas y diagramas de sectores. Calcula las medias, medianas y modas. Calcula las varianzas y las desviaciones típicas. Calcula los cuartiles y los intervalos intercuartílicos.
   c) Con las distribuciones bidimensionales, dibuja un diagrama de dispersión, y calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
   d) Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Utiliza una hoja de cálculo con un ordenador

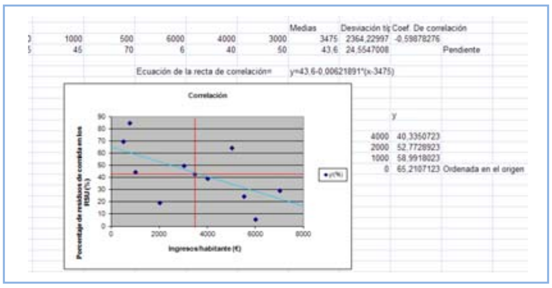
13. El objetivo de esta práctica es estudiar la dispersión entre dos variables, mediante una nube de puntos o diagrama de dispersión, el coeficiente de correlación, la recta de regresión y la regresión cuadrática.

En 10 países se anotan los ingresos medios, en euros, por habitante y año, y el porcentaje medio en los residuos sólidos de comida.

Se obtiene:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

a) Abre una hoja de cálculo. Copia los datos. Calcula la media y la desviación típica de las x, y la media y la desviación típica de las y.



b) Representa la nube de puntos. Selecciona los datos, incluyendo a las medias. Aprieta el botón de asistente de gráficos y elige XY (Dispersión). En títulos escribe como Título del gráfico *Correlación*, en Eje de valores (X) describe la variable x sin olvidar decir las unidades, escribe: *Ingresos/habitante (€),* en Eje de valores (Y) describe la variable y sin olvidar decir las unidades, escribe: *Porcentaje de residuos de comida en los RSU (%)*. En Leyenda elige no mostrar leyenda.

c) Observa que si $x - \overline{x}$ e $y - \overline{y}$ tienen el mismo signo quedan en los cuadrantes I y III y si lo tienen distinto en II y IV. Cuenta los puntos que quedan en los cuadrantes I y III, cuenta los que quedan en los cuadrantes II y IV. Nos puede dar una idea de la correlación. ¿Va a ser positiva o negativa? ¿Es una correlación fuerte o débil? ¿Entre que valores puede variar el coeficiente de correlación? Estima a ojo un valor para esa correlación.

d) Organiza en Excel una hoja de cálculo que te permita calcular la correlación. Escribe los datos en las filas 3 y 4. En L3 y L4 calcula las medias utilizando la función PROMEDIO. En M3 y M4 calcula la desviación típica utilizando la función DESVEST. En N3 calcula el coeficiente de correlación, utilizando la función:

COEF.DE.CORREL(B3:K3;B4:K4)

e) Ahora vamos a mejorar nuestro gráfico. Observa que si colocas al ratón encima de un punto indica las coordenadas. Traza las rectas $x = \overline{x}$, $y = \overline{y}$ que indican las medias. Utiliza para ello la paleta de dibujo. Dibújalas en color rojo.

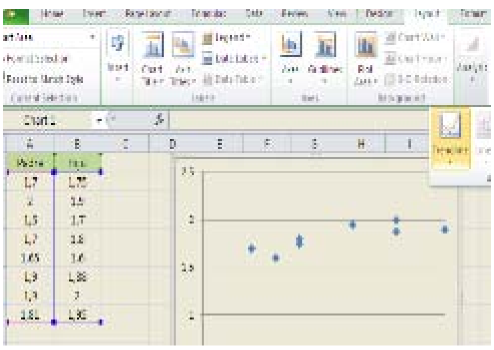
f) La recta de regresión es la recta que hace mínimas las distancias de la nube de puntos. Es la recta: $y = \overline{y} + \rho \dfrac{s_y}{s_x}(x - \overline{x})$.

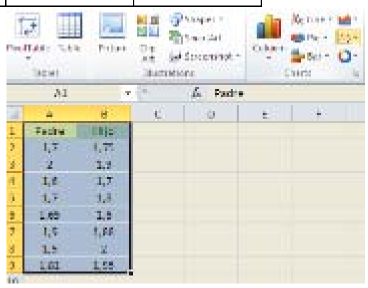
Calcula en N4 la pendiente de la recta. Escribe la ecuación de la recta. Observa el gráfico. ¿Cómo la habrías estimado a ojo? Evalúa la pendiente y la ordenada en el origen.

g) Usa la hoja de cálculo para volver a calcular la recta de regresión, ya aproxima de nuevos la nube con otras funciones, parábola, exponencial, polinómica…

14. Se recoge en una tabla la altura (en metros) de un padre y de la de su hijo con 15 años de edad.

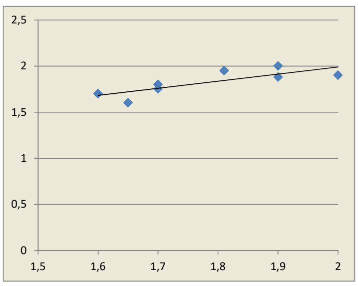
Padre	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Hijo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95





a) Utiliza el ordenador para representar el diagrama de dispersión. Copia los datos en una hoja de cálculo en las columnas A y B. Señala las dos series y elige *insertar gráfico de dispersión*. Automáticamente verás que aparece el diagrama de dispersión (nube de puntos). Juega con las opciones para modificar el título, el formato, la escala de los ejes…

b) Dibuja la recta de regresión. Pincha sobre un punto de la nube, y elige "*Agregar línea de tendencia*". Para que dibuje el ordenador la recta de regresión la línea de tendencia debe ser *Lineal*. En la pantalla que aparece marcamos la casilla que dice: "*Presentar ecuación en el gráfico*" y la casilla que dice "*Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico*". Al final, si lo has hecho bien, el dibujo debe ser más o menos algo similar a esto:



c) Utiliza la recta para determinar que altura del hijo correspondería a una altura del padre de 1.75 m.

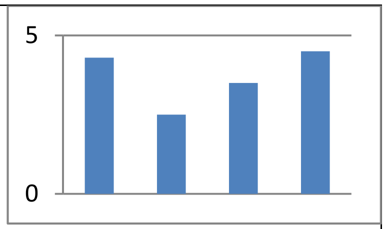
AUTOEVALUACIÓN

Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

1. La media de errores es
   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9
2. La media de tiempos es
   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9
3. La desviación típica de errores es
   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2
4. La desviación típica de tiempos es
   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2
5. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:
   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5.9, 6.1 y 7.3 d) 6, 7 y 8
6. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:
   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6.5, 7.5 y 8.5 d) 6, 7 y 8
7. La covarianza es:
   a) 1.21 b) –1.5 c) –1.4 d) 1.425
8. El coeficiente de correlación es:
   a) 0.8 b) –0.8 c) –0.7 d) 0.7
9. La recta de regresión lineal de los errores sobre el tiempo es:
   a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.71x$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$
10. La recta de regresión lineal del tiempo sobre los errores es:
   a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.7$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

RESUMEN

Histograma	Representación gráfica de los datos agrupados en intervalos.	
Media aritmética	$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$	$\bar{x} = \frac{0\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 21+3\cdot 15+4\cdot 6+5\cdot 1+6\cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2{,}52$
Mediana	Valor tal que en la distribución hay tantos datos menores que él como mayores que él.	
Moda	Dato con mayor frecuencia, el que más veces se repite.	
Varianza	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2$	
Desviación típica	$s = \sqrt{Varianza}$	
Covarianza	$S_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot n_{ij}}{n} = \frac{\sum_i \sum_j x_i \cdot y_i \cdot n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	
Coeficiente correlación	$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{s_x \cdot s_y}$ $\quad -1 \le r \le 1$	
Dependencia lineal	$r = -1$ dependencia funcional lineal negativa $-1 < r < 0$ dependencia negativa $r = 0$ no existe dependencia lineal, ni funcional $0 < r < 1$ dependencia positiva $r = 1$ dependencia funcional lineal positiva	
Recta regresión *Y* sobre *X*	$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^2}(x - \bar{x})$	

CAPÍTULO 12: DISTRIBUCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama en árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.
2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.
3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?
4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cara o cruz (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, ¡que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar! Imagina que lleva 500 euros. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades y sus probabilidades. B) La distribución de probabilidad: Ganancia $(x) \rightarrow$ Probabilidad (x). C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.
5. Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?
6. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:

Sexo del recién nacido:	chica	chico
Probabilidad:	0.485	0.515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

7. Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No lo calcules, sólo plantea como lo calcularías).
8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.
9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1.
10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.
11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.
12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.
13. En el control de calidad de bombillas de bajo consume de una fábrica se ha comprobado que el 90 % son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, varianza y desviación típica.
14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80 % de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?
15. Utiliza la desigualdad de Chebycheff para indicar los intervalos de probabilidad para el juego de apostar a obtener más de 7 al tirar dos dados. (Ayuda: $\mu = -1/6$ y $\sigma \approx 0.986$).
16. En la fábrica de bombillas de bajo consumo con B(500, 0.9) utiliza la desigualdad de Chebycheff para determinar los intervalos tales que $P(a \le x \le b) \ge 0.75$, y que $P(c \le x \le d) \ge 0.89$.
17. En la medicina para la hepatitis C con B(1 000, 0.8) utiliza la desigualdad de Chebycheff para determinar los intervalos tales que la probabilidad de curación sea $P(a \le x \le b) \ge 0.75$, y que $P(c \le x \le d) \ge 0.89$.
18. Calcula A para que $f(x) = A(x^2 - 16)$ sea una función de densidad. Determina el dominio. Calcula la media y la varianza.
19. Un estudio propone una alternativa para el modelado de la demanda diaria de un artículo (en unidades): una distribución uniforme en el intervalo [21, 33]. Se pide calcular la probabilidad de que la demanda diaria sea mayor que 28 unidades.
20. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) $P(z \le 0.37)$; b) $P(z < 1.51)$; c) $P(z \ge 0.87)$; d) $P(z \le -0.87)$; e) $P(0.32 < z < 1.24)$.

21. Se trata a pacientes con trastorno del sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.
22. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m^2 con una desviación típica de 80 mm/m^2. Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m^2. b) La precipitación esté entre 400 y 510 mm/m^2. c) La precipitación sea menor de 300 mm/m^2.
23. En el caso del problema anterior de una $N(450, 80)$ determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.
24. En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alcance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?
25. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿Y de que sea mayor que 800?
26. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70 % de ellas tienen una vida media superior a 1 000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida media sea superior a 1 000 horas?
27. Se investigan a pie de urna las preferencias de votos en la Comunidad de Madrid. De 2 000 encuestas 700 votan al partido X. Cuantos tendrían que votar al partido estudiado para que ganara con un 99 % de confianza.
28. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %.
29. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.
30. Se lanza 600 veces un dado y contamos el número de 5s.

    a) ¿Cuál es el intervalo simétrico respecto de la media con una probabilidad de 0.99?
    b) Lo mismo con una probabilidad del 0.6.
31. Una compañía aérea ha estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan, por lo que venden más billetes que las plazas disponibles. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas (con lo que suelen reservar hasta 270). Calcula la probabilidad de que lleguen 260 pasajeros. En 500 vuelos de dicho avión, ¿en cuántos consideras que habrá exceso de pasajeros?
    (*Ayuda:* Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0.02 \Rightarrow p(x \leq 260) = 1 - p(x > 260) \geq 0.98$).
32. Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
    a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
    b) La altura de un grupo de seis amigos.
33. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 2º de Bachillerato de la Comunidad de Madrid es de* 7.9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?
34. Para estudiar el número de accidentes de una población de mil conductores, de los cuales la mitad tiene carnet de conducir entre 5 y 20 años, la cuarta parte lo tiene más de 20 años y la otra cuarta parte lo tiene menos de 5 años. Se quiere elegir por muestreo aleatorio estratificado proporcional, 50 conductores, ¿cuántos seleccionarías de cada grupo?
35. Piensa en una pregunta y haz un sondeo bien entre las personas de tu clase, de tu centro de estudios o de tu ciudad.
36. Confecciona la ficha de una encuesta. Y de nuevo pásala entre las personas de tu clase, de tu centro de estudios o de tu ciudad. Haz un estudio estadístico cuantitativo con el resultado obtenido.
37. Los parámetros de una distribución son $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 3$. Se extrae una muestra de 400 individuos. Calcula $P(19.9 < \bar{x} < 20.3)$.
38. Los pesos de las ovejas de una cierta ganadería tienen una media de 50 kg con una desviación típica de 4. Elegimos al azar una muestra aleatoria simple de 100 ovejas. A) Determina la probabilidad de que su media sea superior a 51 kg. B) Sea inferior a 56 kg. C) Sea superior a 48 kg. D) Esté entre 48 kg y 52 kg.

39. Una población tiene una media μ = 400 y una desviación típica σ = 20. Extraemos una muestra de 1 000 individuos. Halla el intervalo característico, para una probabilidad de 0.95, de la media muestral. Lo mismo para una probabilidad del 0.99.
40. El peso de una población se estima que tiene de media μ = 70 kg y una desviación típica σ = 10. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 individuos y se pesan todos juntos. Calcula la probabilidad de que dicho peso sea superior a 7 010 kg.
41. En los exámenes de selectividad la proporción de aprobados es del 98 %. Un centro escolar presenta a 78 estudiantes al examen.
    a) ¿Qué distribución sigue la proporción de aprobados?
    b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 3 suspensos.
    c) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya más de 10 suspensos.
    d) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida no haya ningún suspenso.
42. En una fábrica de bombillas de bajo consumo hay que rechazar por defectos al 2 % de la producción. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 bombillas.
    a) ¿Qué distribución sigue la proporción de bombillas defectuosas?
    b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 5 bombillas defectuosas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuanta el números de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.
2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga ganamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿Y en 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?
3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, “suma de puntos obtenidos”. A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?
4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.
5. Si $p(x)$ es la probabilidad de tener x éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$, y $p(x+1)$ es la de obtener $x+1$ éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente: $p(x+1) = \frac{p(x)}{x+1}(n-x)\frac{p}{q}$
6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al dos por 1 a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale un impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale, ¿Te parece un juego equitativo?
7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparece cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si en el segundo, 20, si en el tercero, 40, … y en el n-ésimo, $10 \cdot 2^{n+1}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?
8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0.95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?
9. Calcula A para que la función siguiente sea una función de densidad de probabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ Ax & si\ 0 \le x < 8 \\ A(16-x) & si\ 8 \le x < 16 \\ 0 & si\ x > 16 \end{cases}$$

    a) Dibuja su gráfica y calcula las siguientes probabilidades: $P(x < 5)$; $P(6 < x < 10)$; $P(x > 12)$.
    b) Calcula la media y la desviación típica

10. Calcula A en cada uno de los casos siguientes para que la función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.
    a) $f(x) = Ax^2(x-3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$.
    b) $f(x) = Ax(x-3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$
    c) $f(x) = Ax^3(x-3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$

d) $f(x) = Ax^2(x-3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$

Calcula en cada caso $P(x< 1)$ y $P(x > 2)$.
Determina la media y la varianza. Analiza las diferencias.

11. En una distribución binomial $B(10,\ 0.3)$ calcula $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Determina también la media y la desviación típica.
12. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:
    a) 0 caras, b) 1 cara, c) 2 caras, d) 3 caras
13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(z = 0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1.82)$, d) $P(z > 1.82)$.
14. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.
15. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1.3 < z < 4)$, c) $P(-0.2 < z < 2.34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.
16. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.
17. Calcula en una distribución normal $N(0.5, 0.2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.
18. Calcula en una distribución normal $N(1, 1/2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1.3 < x < 4)$, c) $P(-0.2 < x < 2.34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.
19. En una distribución binomial $B(10,\ 0.3)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Compara con los resultados obtenidos en el ejercicio 9.
20. En una distribución binomial $B(100,\ 0.4)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \leq 50)$, $P(x \geq 50)$ y $P(40 \leq x \leq 50)$.
21. En una distribución binomial $B(1\ 000,\ 0.5)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ y $P(50 \leq x \leq 150)$.
22. En una distribución binomial $B(1000,\ 0.05)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 200)$, $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ y $P(50 \leq x \leq 200)$.
23. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.
24. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0.4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:
    a) María gane alguna vez. b) Raquel gane al menos una vez.
    c) Raquel gane más de la mitad de las partidas. d) María gane 2 partidas.
25. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina las probabilidad de que:
    a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm.
    b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm.
    c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?
26. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que:
    a) Un opositor obtenga 120 puntos.
    b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban?
    c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20 % de los mejores, ¿cuántos puntos de obtener un opositor para aprobar?

AUTOEVALUACIÓN

1. Se lanza un dado tres veces y se anota el números de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:

a) $B(4, 1/6)$ b) $B(4, 1/4)$ c) $B(3, 1/6)$ d) $B(3, 5/6)$

2. En la distribución anterior, la media es:

a) $\mu = 4/6$ b) $\mu = 1/2$ c) $\mu = 15/6$ d) $\mu = 1$

3. Y la varianza es:

a) $\sigma^2 = 15/12$ b) $\sigma^2 = 5/6$ c) $\sigma^2 = 1/36$ d) $\sigma^2 = 5/12$

4. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(z \leq 2.02)$, que vale:

a) $P(z \leq 2.02) = 0.0217$ b) $P(z \leq 2.02) = 0.9772$ c) $P(z \leq 2.02) = 0.0228$ d) $P(z \leq 2.02) = 0.9783$

5. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(0.5 < z < 1.5)$, que vale:

a) 0.3417 b) 0.9332 c) 0.6915 d) 0.2742

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de $P(x < \mu)$ es:

a) -0.4 b) 0.5 c) 0.6 d) No puede saberse

7. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ el valor de $P(x = 0)$ es:

a) 0.11 b) 0.0198 c) 0.00001024 d) 0.8

8. El 2 % de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0.6011 b) 0.7635 c) 0.9357 d) 0.8655

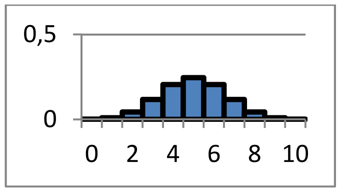
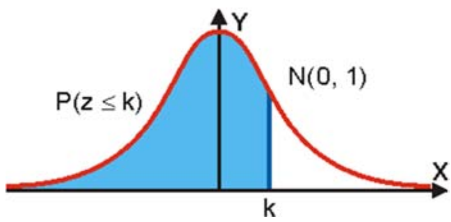
9. Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0.5987 b) 0.4027 c) 0.9357 d) 0.8074

10. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Juegan 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0.0123 b) 0.5 c) 0.8972 d) 0.9877

RESUMEN

<table>
<tr><td>Propiedades de función de cuantía</td><td>1) $p(x) \geq 0$
2) $\Sigma\, p(x) = 1$.</td><td rowspan="2">Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras:
<table><tr><td>Número de caras (x):</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>Función de cuantía ($p(x)$):</td><td>1/4</td><td>1/2</td><td>1/4</td></tr><tr><td>Función de distribución $F(x)$:</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>4/4</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Propiedades de función de distribución</td><td>1) $0 \leq F(x) \leq 1$
2) $F(x)$ es una función creciente
3) $F(x_{Máximo}) = 1$</td></tr>
<tr><td>Esperanza matemática</td><td>$E(x) = \mu = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$</td><td>μ = 0·(1/4) + 1·(1/2) + 2·(1/4) = 1</td></tr>
<tr><td>Varianza y desviación típica</td><td>$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = E(x^2) - E^2(x)$
$\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)}$</td><td>$\sigma^2 = (0-1)^2\cdot(1/4) + (1-1)^2\cdot(1/2) + (2-1)^2\cdot(1/4) = 1/2$.
$\sigma = \sqrt{1/2}$</td></tr>
<tr><td>Distribución binomial</td><td>$B(n,p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$
$E(x) = \mu = n\cdot p$,
$\sigma^2 = n\cdot p\cdot q = n\cdot p\cdot(1-p)$</td><td>
B(10, 1/2).</td></tr>
<tr><td>Distribución normal</td><td>$N(\mu,\sigma) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Aproximación de la binomial a la normal</td><td>Una binomial con $npq \geq 9$ se considera se ajusta bien a una normal de igual media y desviación típica.</td><td></td></tr>
</table>

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)

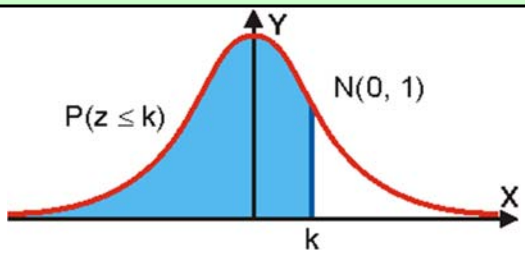


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000