



Exercicis i Problemes.

2º Batxillerat de Ciències.

Matemàtiques II

www.apuntesmareaverde.org.es

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i dels autors

Traducció: IES Binissalem (Balears)

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en <http://www.dmrighs.com>



Índex

CAPÍTOL 1: MATRIUS.....	2
CAPÍTOL 2: DETERMINANTS.	10
CAPÍTOL 3: SISTEMES D'EQUACIONS.....	23
CAPÍTOL 4: GEOMETRIA EN L'ESPAI - VECTORS.	30
CAPÍTOL 5: RECTES I PLANS A L'ESPAI	36
CAPÍTOL 6: GEOMETRIA MÈTRICA EN L'ESPAI	43
CAPÍTOL 7: LÍMITS I CONTINUÏTAT.....	52
CAPÍTOL 8: DERIVADES	60
CAPÍTOL 9: REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS.....	74
CAPÍTOL 10: INTEGRALS	80
CAPÍTOL 11: PROBABILITAT I COMBINATÒRIA	89
CAPÍTOL 12: DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT	105

CAPÍTOL 1: MÀTRIS.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. CONCEPTE DE MÀTRIU

- Utilitza matrius per a representar la informació següent: Un agricultor cultiva enciams, taronges i melons. Durant l'any 2014 ha arreglat mils enciams, 2000 quilos de taronges i 500 melons. En els anys anteriors la seva producció ha sigut de 500, 1000 i 400 respectivament. Per cada enciam rep un cèntim, per cada quilo de taronges 3 cèntims i per cada meló 5 cèntims. Escriu la matriu dels seus guanys de l'any 2014.
- Analitza els següents elements del teu entorn i determina si són matrius o no:
 - Un calendari.
 - La classificació de la Lliga de futbol (o qualsevol altre esport).
 - El disc dur d'un ordinador.
 - Un armari on es guarda una col·lecció de copes.
 - Els lineals d'un supermercat.
 - Una pantalla de televisió.
 - El bitllet de la Loteria Primitiva, de la Quiniela i de l'Euromilió.
 - Les bústies d'una vivenda.
 - Els pupitres d'una classe.
- Proposa altres elements del teu entorn que siguin matrius o puguin representar-se per mitjà de matrius.

2. OPERACIONS AMB MÀTRIS

- Escriu tres matrius fila.
- Escriu tres matrius columna.
- Escriu tres matrius quadrades de dimensió 2, 3 i 4 respectivament.
- Escriu la matriu unitat de dimensió 2, 3 i 4.
- Escriu la matriu nul·la de dimensió 2, 3 i 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- Donades les matrius

$$a) A + 3B \quad b) 2A + B - 5C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Donades les matrius

- Calcula les matrius inverses, si existeixen, de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Resol l'equació matricial $M \cdot X + N = P$ essent:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calcula el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. - Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula:
- a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3 \cdot A + 5 \cdot B - 6 \cdot C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. - Per als matrius calcula $A \cdot B$ i $B \cdot A$. És commutatiu el producte?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. - Calcula els productes possibles entre les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. - Donades les matrius calcula $3 \cdot A^t - B^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. - Per als matrius

possible: a) $A + B$ b) $3 \cdot A - 4 \cdot B$ c) $A \cdot B$ d) $A \cdot D$ e) $B \cdot C$ f) $C \cdot D$ g) $A^t \cdot C$

6. - És possible que per a dues matrius A i B no quadrades puguin existir $A \cdot B$ i $B \cdot A$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. - a) Calcula A^{50} i A^{97} per a la matriu

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Troba els valors de a i b perquè la matriu A commute amb la matriu

8. - Calcula A^n , per a $n \in \mathbb{N}$, sent A les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. - És diu que dues matrius A i B commuten si $A \cdot B = B \cdot A$. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ troba les matrius B que commuten amb A .

10. - Troba totes les matrius, de l'ordre corresponent, que commuten amb les matrius: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}, \quad D = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

11. - Siguin les matrius

cada un dels productes $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$, $C \cdot E$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$$

12. - Siguin dues matrius d'ordre 2×3 , en els que x , i , z denoten valors numèrics desconeguts.

- a) Determina, raonadament, els valors de x , i , $z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

- b) És possible el càlcul d' $A \cdot B$? Raona la resposta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. - Segui la matriu calcula, si existeixen, les matrius següents:

- a) Una matriu X , tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Una matriu Y tal que

14.- Calcula les matrius inverses, si existeixen, dels matrius següents:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

15.- Donades les matrius

calcula $(AB)^t$ i $(AB)^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16.- Donada la matriu

- a) Troba la matriu inversa de A
b) Comprova que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Troba una matriu X tal que $A \cdot X = B$, sent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.- Calcula la matriu inversa de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

18.- Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ obté, si és procedent, } (B \cdot A)^{-1}.$$

19.- Siguin les matrius

- a) Calcula la matriu inversa d' $A \cdot B$
b) Troba el producte de la inversa de B per la inversa de A. Quina relació existeix entre la matriu de l'apartat anterior i aquesta matriu? Justifica la resposta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20.- Essent comprova que $A^t = A^{-1}$ i calcula $(A \cdot A^t)^{2003}$.

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21.- Siguin les matrius:

- a) Troba C^{-1} i D^{-1}
b) Calcula la matriu inversa de $C \cdot D$
c) Comprova que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

22.- Resol l'equació matricial $M \cdot X + N = P$ essent

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

23.- Siguin les matrius

- a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$
b) Determina la matriu X perquè $X \cdot A = A + I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24.- Siguin les matrius Resol l'equació $X \cdot A \cdot B - X \cdot C = 2 \cdot C$

25. - Calcula el rang de les matrius següents: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. - Calcula el rang dels següents matrius segons els valors del paràmetre a :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

27. - Determina les matrius A i B que son solucions del sistema següent:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

28. - Obtenir les matrius X i Y que verifiquen els següents sistemes matricials.

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

30. - Utilitzant els operacions elementals per files, obté matrius triangulars equivalents a les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

31. - En una acadèmia d'idiomes s'imparteixen anglès i alemany en quatre nivells i dues modalitats: grups reduïts i grups normals. La matriu

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$$

expressa el nombre de persones, segons el tipus de grup, on la primera columna correspon als cursos d'anglès, la segona als d'alemany i les files, als nivells primer, segon, tercer i quart respectivament. Els columnes de la matriu

$B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix}$ reflecteixen el tant per u d'estudiants (comú per a ambdós idiomes) que segueixen curs reduït (primera fila) i curs normal (segona fila) per a cada un dels nivells.

a) Obtenir la matriu que proporciona el nom d'estudiants per modalitat i idioma.

b) Sabent que l'acadèmia cobra 30 euros per persona en grups reduïts i 20 euros per persona en grup normal, trobar la quantitat que obté l'acadèmia en cada un dels idiomes.

32. - Tres escriptors presenten un editor, a l'acabar l'enciclopèdia, la minuta que s'arreplica en la taula adjunta:

	Hores de treball	Conferències donades	Viatges
Escriptor A	40	10	5
Escriptor B	80	15	8
Escriptor C	100	25	10

l'editor paga l'hora de treball a 75 euros, la conferència a 300 euros i el viatge a 250 euros. Si només pensa pagar, respectivament, el 30 %, el 20 % i el 10 % del que correspondria a cada escriptor, quina despesa tendria l'editor?

33. - Una fàbrica produeix dos models de rentadores, A i B , en tres terminacions: N , L i S . Produeix del model A : 400 unitats en la terminació N , 200 unitats en la terminació L i 50 unitats en la terminació S . Produeix del model B : 300 unitats en la terminació N , 100 en la L i 30 en la S . La terminació N porta 25 hores de taller i 1 hora d'administració. La terminació L porta 30 hores de taller i 1,2 hores d'administració. La terminació S porta 33 hores de taller i 1,3 hores d'administració.

a) Representa la informació en dues matrius.

b) Troba una matriu que expressi els hores de taller i d'administració empleades per a cada un dels models.

34. - Siguin A i B dues matrius del mateix ordre, i λ un nombre. Se sap que $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$. Justifica el resultat.

35. - Siguin A i B dues matrius quadrades de la mateixa grandària. Si A i B son simètriques, analitza si, llavors, també ho és el seu producte $A \cdot B$.

Si la resposta és afirmativa, justifica-ho; en cas contrari, dóna un contraexemple que ho confirmi.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

36. - Segui la matriu M , sent r i s dos números reals tals que $r \cdot s \neq 1$.
Calcula M^2 , M^3 , M^4 i M^{2k} per a $k \in \mathbb{N}$.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

37. - Segui el conjunt de matrius definit per:

a) Comprova que si $A, B \in M$, també $A + B \in M$ i $A \cdot B \in M$

b) Troba totes les matrius $C \in M$, tals que $C^2 = C$.

38. - És diu que una matriu quadrada A és ortogonal si és verifica que $A \cdot A^t = I$ on A^t és la matriu transposició de A i I és la matriu identitat. Si A i B son dues matrius ortogonals de la mateixa grandària, analitza si $A \cdot B$ és una matriu ortogonal.

39. - Considera les matrius A , B i C definides com:

$$A_{3 \times 3} = (a_{ij} = i + j), \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$B_{2 \times 3} = (b_{ij} = i - j), \forall i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

$$C_{3 \times 2} = (c_{ij} = 2i + j), \forall i = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

a) Construïx els tres matrius.

b) Troba les transposades A^t , B^t i C^t i determina quina (o quines) de les matrius és simètrica.

c) Analitza quins dels productes $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$ o $C \cdot C$ poden realitzar-se.

d) Determina el rang de les tres matrius A , B i C .

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

40. - Donada la matriu: en la que és verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2 .

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprova que $P^2 = P$.

d) Comprova que $P \cdot M = M \cdot P = O$.

RESUM

Definició de matriu	Taula de números ordenats	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
Dimensió d'una matriu	El nombre de files (m) i el nombre de columnes (n)	La dimensió de la matriu anterior és 2×3 .
Igualtat de matrius	Dues matrius son iguals si tenen la mateixa dimensió i si els termes que ocupen la mateixa posició son iguals	$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$
Tipus de matrius	Matriu fila: $(31 \ 4 \ -5)$ Matriu columna: $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$; Matriu triangular de dimensió 2×2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Matriu diagonal: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriu escalar: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriu unitat: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Suma de matrius	Se sumen els elements que ocupen la mateixa posició: $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
Producte d'un real per una matriu	És una altra matriu d'elements els de la matriu multiplicats pel número: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$	$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$
Producte de matrius	$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij}) \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \left \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right.$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$
Matriu inversa	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/13 & 3/13 \\ 5/13 & -2/13 \end{pmatrix}$

Matriu transposició	S'obté canviant files per columnes.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Rang d'una matriu	Nombre de files o columnes de la matriu que són linealment independents , és a dir, que no es poden obtenir a partir de les altres files o columnes de la mateixa matriu.	El rang de la matriu $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ és 1.

AUTOAVALUACIÓ

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- La dimensió de la matriu A és:

a) 3

b) 2

c) 2 x 3

d) 3 x 2

2.- La matriu A és:

a) una matriu fila

b) quadrada

c) transposició

d) rectangular

3.- La suma dels matrius A i B és:

$$a) A+B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad b) A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix} \quad c) A+B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad d) A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

4.- El producte 3A és:

$$a) 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad b) 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -9 \end{pmatrix} \quad c) 3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix} \quad d) 3A+B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$$

5.- Indica quina afirmació és certa

a) Les matrius A i B es poden multiplicar

b) Les matrius A i B no es poden multiplicar

c) Ambdues tenen matriu inversa

d) Les seves matrius transposades són iguals

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Donades les matrius

6.- La matriu identitat és la matriu:

a) C;

b) D;

c) E;

d) F.

7.- El producte dels matrius E i F és:

$$a) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix} \quad b) EF = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix} \quad c) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 13 & 9 \end{pmatrix} \quad d) EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$$

8.- La matriu inversa de la matriu F és:

$$a) F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c) F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad d) F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.- La matriu transposada de la matriu F és:

$$a) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d) F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10.- El rang de la matriu C és:

a) 3

b) 2

c) 1

d) no en té

APÈNDIX: PROBLEMES DE MATRIUS EN ELS P.A.A.U.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Sigui la matriu

a) Comprova que verifica $A^3 - I = O$, amb I la matriu identitat i O la nul·la. b) Calcula A^{13} . c) Basant-te en els apartats anteriors i sense recórrer al càlcul d'inverses, troba la matriu X que verifica la igualtat $A^2 \cdot X + I = A$

(2) a) Defineix rang d'una matriu.

b) Una matriu de 3 files i 3 columnes té rang 3. Com varia el rang si llevem una columna? Si suprimim una fila i una columna, podem assegurar que el rang de la matriu resultant valdrà dos?

(3) Sigui A una matriu ($m \times n$)

a) Hi ha una matriu B tal que $B \cdot A$ sigui una matriu fila? Si existeix, quin ordre té?

b) Es pot trobar una matriu B tal que $A \cdot B$ sigui una matriu fila? Si existeix, quina ordre té?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Busca una matriu B tal que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ sent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(4) Donada la matriu i el vector, és demana obtenir raonadament:

a) El vector X tal que $A \cdot X = 0 \cdot X$.

b) Tots els vectors X tals que $A \cdot X = 3 \cdot X$.

c) Tots els vectors X tals que $A \cdot X = 2 \cdot X$.

(5) Sigui I i A les matrius quadrades següents:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Es demana calcular, explicant tots els passos necessaris:

a) Les matrius A^2 i A^3 .

b) Els nombres reals a i b per als quals es verifica $(I + A)^2 = a \cdot I + b \cdot A$.

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) Donada l'equació matricial: on B és una matriu quadrada de grandària 2×2 , és demana:

a) Calcula el valor o valors de a per als que aquesta equació té solució.

b) Calcula B en el cas $a = 1$.

(7) Una matriu 2×2 és diu que és triangular si el primer element de la seva segona fila és 0. Troba totes les matrius triangulars B tals que

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(8) Comprova raonadament que:

a) Si el producte de dues matrius quadrades A i B és commutatiu, llavors es dedueix que el producte dels quadrats d'aquestes matrius és igual al quadrat del producte d'aquestes matrius.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

b) La matriu satisfà la relació $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = O$, sent I i O , respectivament, les matrius d'ordre 3×3 unitat i nul·la.

c) Calcula raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat, els valors a i b que fan que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$, sabent que la matriu A verifica la igualtat $A^2 = 3 \cdot A + 2 \cdot I$.

(9) a) Calcula les matrius reals quadrades d'ordre 3, X i Y , que satisfan els equacions: $\begin{cases} 2 \cdot X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$ on:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si X i Y son les matrius anteriors, calcula $(2 \cdot X + Y) \cdot X - (2 \cdot X + Y) \cdot (2Y)$.

(10) Calcula tots els valors reals x, y, z, t per als quals es verifica $A \cdot X = X \cdot A$, on

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(11) Tenim les matrius

a) Calcula la matriu inversa de A .

b) Calcula la matriu $B = A \cdot (A + 4 \cdot I)$.

c) Determina els números reals que compleixen: $A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I$, $A^2 = z \cdot A + t \cdot I$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$$

(12) Siguin les matrius:

dues matrius d'ordre (2×3) en els que x, y i $z \in \mathbb{R}$ denoten valors numèrics desconeguts.

a) Determina, raonadament, els valors de x, y i $z \in \mathbb{R}$ de manera que $B = A$.

b) És possible el càlcul de $A \times B$? Raona la resposta

(13) Sigui $6 \cdot A + 2 \cdot I = B$ una expressió matricial, on B denota la matriu quadrada d'ordre (2×2) : $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i I és la matriu identitat d'ordre corresponent:

a) Quina dimensió té la matriu A ?

b) Determina els elements que integren la matriu A , això és, $a_{ij} \in A_{\times q}$.

c) Calcula $A + 2 \cdot I$.

(14) Siguin A i B dues matrius desconegudes. Resol el següent sistema d'equacions:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

(15) Siguin X i Y dues matrius desconegudes. Resol el següent sistema d'equacions:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \quad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(16) S'anomena "traça" d'una matriu a la suma dels elements del seu diagonal principal. Troba A , matriu de grandària (2×2) , sabent que la traça d' $A \cdot A^t$ és zero.

(17) Sigui A una matriu que té tres files; sigui B la matriu que resulta de substituir en A la 1a fila per la suma de les altres dues. Què ha d'ocórrer entre les files de A perquè A i B tenguin el mateix rang?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(18) Donades les matrius

es demana:

a) Trobar els condicions que han de complir a, b i c perquè és verifiqui $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Per a $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

(19) Denotam per M^t la matriu transposada d'una matriu M . Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A \cdot B)^t$ i $(B \cdot A)^t$.

b) Determina una matriu X que verifiqui la relació $\frac{1}{2}X + (A \cdot B)^t = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(20) Calcula totes les matrius X tals que $A \cdot X + B = X$, on:

(21) Calcula dos nombres naturals a i b menors que 10 i tals que la següent matriu tenguin rang 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

CAPÍTOL 2: DETERMINANTS.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. CONCEPTE DE DETERMINANT

1. Calcula els següents determinants:
- a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$
2. Calcula els següents determinants:
- a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

2. PROPIETATS DELS DETERMINANTS

- Comprova que ocorre en un determinant d'ordre tres quan fas **dues** permutacions de files.
- Comprova que ocorre en un determinant d'ordre dos quan fas una permutació de files seguida d'una permutació de columnes.
- Comprova que ocorre en un determinant d'ordre tres quan fas dues permutacions de files.
- Comprova que ocorre en un determinant d'ordre tres quan fas una permutació de files seguida d'una permutació de columnes.
- Raona per què aquesta propietat pot deduir-se de la propietat número 5.
- Comprova en un determinant d'ordre 3 que la propietat es verifica també quan hi ha dues columnes iguals. Fes-ho de dues formes diferents: desenvolupant el determinant i utilitzant la propietat del determinant de la matriu transposició.
- Demuestra aquesta propietat per a determinants d'ordre tres.
- Comprova que el valor del segon determinant, obtingut del primer amb la transformació indicada, és el mateix que el del determinant de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_3 + C_1 + 2C_2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}_i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}_i$$

11. Comprova aquesta propietat per a les següents matrius quadrades d'ordre tres: a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_i; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}_i$$

12. Raona si és possible que per a dues matrius A i B existeixin els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$, però no es verifiqui que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$.
13. Donades dues matrius A i B , quadrades i de la mateixa dimensió, raona si les següents expressions són certes o no:

- a) $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + B^2$ f) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2$
- b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ g) $|(A+B)^2| = |A|^2 + |B|^2 + 2 \cdot |A| \cdot |B|$
- c) $(A-B)^2 = (A-B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ h) $|(A-B)^2| = |A|^2 - |B|^2$
- d) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$ i) $|(A-B)^2| = |A|^2 + |B|^2 - 2 \cdot |A| \cdot |B|$
- e) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ j) $|(A+B) \cdot (A-B)| = |A|^2 - |B|^2$

3. CÀLCUL DE DETERMINANTS PELS ELEMENTS D'UNA LÍNIA

14. Calcula per adjunts el valor d'aquest determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

15. Troba el valor de que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

16. Per a les matrius A i B de l'exemple, determina: a)

$|A|$ i $|B|$; b) $[\text{Adj}(A)]^t$ i $[\text{Adj}(B)]^t$; c) $A \cdot [\text{Adj}(A)]^t$ i

$$B \cdot [\text{Adj}(B)]' . \text{ Què observes?}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. a) Calcula la matriu adjunta de:
c) Què observes?

b) Troba $|C|$, $[\text{Adj}(C)]'$ i efectua el producte $C \cdot [\text{Adj}(C)]'$.

4. MATRIU INVERSA:

18. Comprova per als exemples anteriors que $A \cdot A^{-1} = I$ i $B \cdot B^{-1} = I$

EXERCICIS I PROBLEMES.

1.- Calcula els determinants de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$

2.- Prova, sense desenvolupar, que els determinants de les següents matrius són nuls:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

3.- Demosta sense desenvolupar que els determinants són múltiples de 15.

4.- Prova sense desenvolupar que els determinants següents són múltiples d'11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

5.- Comprova, a partir de les propietats dels determinants, que $A_1 = 0$ i que $A_2 = 5$.

$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

6.- Sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ calcula, sense desenvolupar, el valor de $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

7.- Sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sense desenvolupar:

$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$

8.- Quin serà l'ordre d'una matriu quadrada A si sabem que el seu determinant val -5 i que el determinant de la matriu $3 \cdot A'$ val -1215 ?

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

9.- Justifica, sense realitzar cap càlcul, que

10.- Donades les matrius A i B d'ordre 4×4 amb $|A| = 3$, $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$, $|(AB^{-1})^t|$.

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$$

11.- Obté, en funció de a , b i c el valor del determinant:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

12.- Demuestra que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

13.- Donada la matriu es demana:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resol l'equació següent: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

14.- Sigui una matriu Simètrica $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ el determinant de la qual és $-\frac{1}{3}$. Comprova si és verdader o fals

$ -3A = 9$	$\frac{ A \cdot A^t }{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3 \times 3}$	$4 A - 7 A^t = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$
$ 4A - A^t = -3^2$	$ A^{-1} = -3^{-1}$	$\frac{ 3A - A^t }{ 3A^t + A } = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9} A^{-1} - 6 A^t ^2 = 1$	$ 3^{-2} A^t = -\frac{1}{3^7}$

Si són falses, indica la resposta correcta.

15.- Siguien les matrius A i $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ tals que $|A| = -3^{-2}$ i $|B| = 3$. Amb aquestes dades calcula de forma raonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$;

$$|A| \cdot |B|^{-1}; |3B^{-1} \cdot A|; |3A \cdot B^t|; |(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$$

16.- Siguien F_1, F_2, F_3 i F_4 les quatre files d'una matriu quadrada A , el determinant val de les quals -2 . Es demana calcular de forma raonada:

$$-\frac{3A}{2}$$

a) El determinant de la matriu

b) El determinant de la matriu inversa de A .

$$\frac{A^2}{6}$$

c) El determinant de la matriu

d) El determinant d'una matriu les files del qual són: $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

17.- Per als determinants

a) Troba els menors complementaris dels elements α_{11} , α_{23} , α_{32} i α_{12} , quan existeixin.

b) Troba els adjunts dels dits elements, quan existeixin.

18.- a) La matriu A verifica $A^2 = A$. Troba els possibles valors del determinant de A .

b) La matriu A verifica que $A \cdot A^t = I$. Troba els possibles valors del determinant de A .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

19.- Donada la matriu

a) Aplicant la regla de Sarrus.

b) Desenrotllant pels elements de la 3a fila i de la 2a columna.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

20.- Donades les matrius

determinants: $|A \cdot B|$, $|C|$, $|A^t \cdot B^t|$, $|C \cdot B \cdot A|$, $|C|^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3x \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x - 3$$

21.- Resol les equacions següents: a)

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$$

22.- Resol les equacions següents: a)

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

23.- Resol la següent equació $|A - x \cdot I| = 0$, sent

I la matriu unitat.

24.- Troba els determinants de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

25.- Aplicant propietats, calcular el valor del determinant:

a) Indicant els passos a realitzar, fins a arribar a un d'ordre 2.

b) Desenrotllant pels elements d'una línia.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$$

26.- Comprovar el valor dels següents determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

27.- Calcula el determinant:

- 28.- Calcula els determinants següents:
- a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
- b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$
- 29.- Resol les equacions següents:
- a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$
- b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$
- 30.- Resol les equacions següents:
- a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$
- b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$
- 31.- Troba les matrius inverses de les matrius:
- a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$
- 32.- Sent les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) És cert que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?
- b) Calcula, si és possible, la inversa d' $A \cdot B$.
- 33.- Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ troba els valors de t per als quals A no té inversa.
- 34.- Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, esbrina per a què valors de λ existix A^{-1} , i calcula-la para $\lambda = -3$.
- 35.- Calcula la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 36.- Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
- a) Comprova si és una matriu regular o inversible. En cas afirmatiu, troba la seva inversa.
- b) Descompon la matriu M en suma de dues matrius, una simètrica i una altra antisimètrica.
- c) Descompon $|M|$ en suma de dos determinants $|P|$ i $|Q|$, tals que els seus elements siguin tots no nuls i que el valor d'un d'ells sigui nul.
- d) Comprova si: $|M| = |P| + |Q|$ i $|M| = |P| \cdot |Q|$
- e) Resol l'equació: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$
- 37.- ¿Per a quins valors de a la matriu $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no té inversa? Troba la inversa para $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

38.- a) ¿Per a quins valors del paràmetre a no és invertible la matriu A ?

b) Per als valors de a trobats calcular els determinants de $A \cdot A^t$ i de $A^t \cdot A$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

39.- Sigui C la matriu

a) ¿Per a què valors de m no té inversa la matriu C ?

b) Calcula la inversa de C per a $m = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

40.- Donada la matriu

on x és un número real, troba:

a) Els valors de x per als que la matriu A posseïssa inversa.

b) La inversa de A per a $x = 2$.

c) Amb $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ perquè la matriu $b \cdot A$ tenguin determinant 1.

43.- Donades les matrius A, B i $C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, planteja la resolució de les següents equacions utilitzant la matriu inversa:

a) $X \cdot A = B$

b) $B \cdot X - 2B = 3X$

c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

44.- Calcula totes les matrius diagonals d'ordre dos que coincideixen amb la seva inversa. Si A és una d'aquestes matrius, calcula el seu quadrat.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

45.- a) Troba, si existeix, la matriu inversa de M .

b) Calcula la matriu X que compleix $X \cdot M + M = 2M^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

46.- Donades les matrius:

a) Quins valors de a fan singular la matriu C ?

b) Quines dimensions ha de tenir la matriu B perquè l'equació $A \cdot B \cdot C = D$ tenguin sentit?

c) Calcula B per al valor $a = 1$.

47.- Resol les equacions següents:

a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

48.- Troba el rang de les matrius següents: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

49.- Troba el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

50.- Troba el rang de les matrius en funció del paràmetre:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

51. - Determina el rang de les matrius següents en funció del paràmetre corresponent:

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

52.- Donada la matriu

a) Resol l'equació $\det(A) = 0$

b) Calcula el rang de la matriu A segons els valors de x .

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

53. - Donades les matrius

a) Discuteix el rang de A segons els valors de m .

b) Quines dimensions ha de tenir la matriu X perquè sigui possible l'equació $A \cdot X = B$?

c) Calcula X per a $m = 0$.

54.- Resol les equacions:

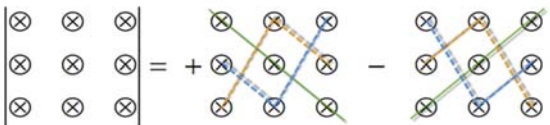
$$\text{a) } A \cdot X = B \text{ sent } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}_i \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B \cdot X = C, \text{ sent } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A \cdot X = B + 2C \text{ sent } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_i, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}_i, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A \cdot X + B = 2C \text{ sent } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_i, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_i, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RESUM

Definició de determinant	El determinant d'una matriu quadrada A és el nombre real que s'obté mitjançant $\det(A) = A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{i(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$	
Determinant d'ordre dos	$\det(A) = A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$
Determinant d'ordre tres. Regla de Sarrus		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 18 - 45 - 6 - 4 = -21$
Menor complementari	Menor complementari de l'element a_{ij} , α_{ij} , és el determinant d'ordre $n - 1$ que s'obté en eliminar la fila i i la columna j .	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
Adjunt d'un element	Adjunt de l'element a_{ij} , A_{ij} , és el menor complementari α_{ij} , precedit de + o - segons la suma dels subíndexs $i + j$ sigui parell o senar. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ A_{33} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{cases}$
Matriu adjunta	S'anomena matriu adjunta de la matriu A a la matriu formada pels adjunts de la matriu A , i se representa per $\text{Adj}(A)$.	$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$
Desenvolupament per adjunts	El determinant d'una matriu és igual a la suma dels productes dels elements d'una línia pels seus adjunts corresponents.	$ A_3 = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \end{cases}$
Matriu inversa	$A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot [\text{Adj}(A)]^t$ Si el determinant de A no és nul:	
Menor d'una matriu	Menor d'ordre k és el determinant format per la intersecció de k files y k columnes de la matriu.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$
Rang d'una matriu	Rang (o característica) d'una matriu és l'ordre del menor de major ordre no nul	El rang de la matriu anterior és dos, perquè $M_2 = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

AUTOAVALUACIÓ

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- El valor del determinant de la matriu A és:

a) 4

b) 0

c) -4

d) 8

2.- L'adjunt B_{23} del determinant de la matriu B és:

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

a) 0

c) -4

3.- El valor del determinant de la matriu B és:

a) 4

b) 0

c) 8

d) -8

4.- El rang de B és:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

5.- La matriu inversa de A és:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Donades les matrius:

6.- La matriu inversa de la matriu F és:

a) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.- El rang de la matriu C és:

a) 3

b) 2

c) 1

d) no en té

8.- La matriu de determinant nul és:

a) C

b) D

c) E

d) F

9.- El determinant de la matriu $5CD$ val:

a) 5

b) 0

c) 15

d) 1

10.- El rang de la matriu CF és:

a) 3

b) 2

c) 1

d) no en té

APÈNDIX: PROBLEMES DE DETERMINANTS EN LA P.A.U.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Considera les matrius

- Pot existir una matriu C de manera que es puguin realitzar els productes $A \cdot C$ i $C \cdot B$? Si és possible, proporciona un exemple. Si no és possible, explica per què.
- Calcula $(B - I)^2$.
- Determina els valors de x que verifiquen $|A| = -7|I|$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(2) Donats els nombres reals a, b, c i d , es considera la matriu

Prova que el polinomi $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ és $p(x) = x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det(A)$, on $\text{tr}(A)$ és la traça de la matriu A , és a dir, la suma dels elements de la diagonal de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Considera la matriu

- Troba el determinant de la matriu A .
- Troba el determinant de la matriu $3 \cdot A$.
- Troba el determinant de la matriu $(3 \cdot A)^3$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) Donades les matrius quadrades

- Calcula les matrius $(A - I)^2$ i $A \cdot (A - 2 \cdot I)$.
- Justifica raonadament que
 - Hi ha les matrius inverses de les matrius A i $(A - 2 \cdot I)$.
 - No hi ha la matriu inversa de la matriu $(A - I)$.
- Determina el valor del paràmetre real λ , per al que es verifica que $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2 \cdot I)$.

(5) Considera la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \sec \theta & \text{tg } \theta & 0 \\ \text{tg } \theta & \sec \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia per a què valors de θ la matriu A té inversa.

b) Busca, si és possible, la matriu inversa de A quan $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) Es donen les matrius

Obté raonadament:

- Tots els valors reals k per als que la matriu $B = A - k \cdot I$ té inversa.
- La matriu inversa B^{-1} quan $k = 3$.
- Les constants reals α i β per a les que es verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2 I$.
- Comprova raonadament que la matriu $P = I - M$ compleix les relacions: $P^2 = P$ i $M P = P M$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$$

(7) Donat el número real a es considera la matriu

- Obté els valors del número real a per als que la matriu A té inversa.
- Busca, si és possible, la matriu inversa de A quan $a = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$$

(8) Es considera la matriu

- Obté el polinomi $p(x) = \det(A)$.
- Si $c = 0$, busca les arrels de $p(x)$ depenent de a i b .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Es consideren les matrius:

- Calcula, si és possible, la matriu inversa de la matriu A .
- Resol, si és possible, l'equació matricial $X \cdot A = B$.

(10) Utilitzant les propietats dels determinants:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot (a-4) \cdot (a+2)$$

a) Verifica que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(11) Sigui

- Calcula la seva inversa, si existeix.
- Troba la regla de càlcul de les successives potències A^n de A .
- Resol l'equació

$$x \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(12) Es considera una matriu quadrada A d'ordre tres que verifica l'equació $A^2 = 6 \cdot A - 9 \cdot I$, on I és la matriu identitat.

- Expressa A^4 com a combinació lineal d' I i A .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Estudia si la matriu B verifica l'equació $B^2 = 6 \cdot B - 9 \cdot I$.
- 2) Determina si B té inversa i, si la té, calcula-la.

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

(13) Donada la matriu

- Resol l'equació $\det(A) = 0$.
- Calcula el rang de la matriu A segons els valors de x .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(14) Sigui

- Calcula les matrius que verifiquen la relació $|A| = |A + I|$ (I és la matriu identitat).
- Calcula totes les matrius diagonals que no posseïen inversa i que verifiquen la relació anterior.
- Es verifica per a qualsevol parell de matrius B i C la relació $|B + C| = |B| + |C|$? Si no és cert posa un contraexemple.

$$\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$$

(15) Sigui la matriu

- Calcula el valor del seu determinant en funció de a .
- Troba la seva inversa, si existeix, quan $a = 1$.

(16) Aplicant les propietats dels determinants (i sense desenvolupar, ni aplicar la regla de Sarrus) respon raonadament a les preguntes següents:

- Com varia el determinant d'una matriu d'ordre 3 si es multiplica cada element a_{ij} de la matriu per 2^{i-j} ?
- La matriu, d'ordre 4, $A = (a_{ij})$ amb $a_{ij} = i + j$, té inversa?

(17) Aplicant les propietats dels determinants i sense utilitzar la regla de Sarrus, calcula raonadament les arrels de l'equació polinòmica:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

. Enuncia les propietats utilitzades.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

(18) Donada la següent matriu d'ordre n :

- Calcular el determinant de la matriu A_2 .
- Calcular el determinant de la matriu A_3 .
- Calcular el determinant de la matriu A_5 .

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(19) Donada la matriu:

- Determina el rang de M segons els valors del paràmetre a .
- Determinar per a què valors de a hi ha la matriu inversa de M . Calcula aquesta inversa per a $a = 2$.

(20) Troba una matriu X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, sent:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(21) Calcula els valors de b per als quals la matriu A té inversa.

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

(22) Resol l'equació següent:

(23) Obté raonadament:

- El determinant d'una matriu quadrada B de dues files, que té matriu inversa i verifica l'equació $B^2 = B$.
- El determinant d'una matriu quadrada que té tres files i que verifica l'equació:
, Sabentque el determinant de A és positiu.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(24) Donada la matriu

$\sqrt{2}$. Calcula raonadament els determinants de les següents matrius, indicant explícitament les propietats utilitzades en el seu càlcul:

a) $\frac{1}{2} T$

b) M^4

c) TM^3T^{-1}

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(25) Donades les matrius

- Obté raonadament el valor de x perquè el determinant de la matriu $A(x)$ sigui 6.
- Calcula raonadament el determinant de la matriu $2A(x)$.
- Demuestra que la matriu $B(y)$ no té matriu inversa per a cap valor real de i .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(26) Es dona la matriu

- Obté raonadament el rang o característica de la matriu A en funció dels valors de m .

- b) Explica per què és invertible la matriu A quan $m=1$.
 c) Obté raonadament la matriu inversa A^{-1} de A quan $m=1$, indicant els distints passos per a l'obtenció de A^{-1} . Comprova que els productes AA^{-1} i $A^{-1}A$ donen la matriu identitat.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(27) Donades les matrius escrivint tots els passos utilitzats. calcula raonadament el valor dels determinants següents

a) $|A+B|$ i $\frac{1}{2}|(A+B)^{-1}|$ b) $| (A+B)^{-1}A |$ i $|A^{-1} \cdot (A+B)|$ c) $|2ABA^{-1}|$ i $|A^3B^{-1}|$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{pmatrix}$$

(28) Donada la matriu

a) Calcula, en funció de a , li determinant de la matriu $A(a)$, escrivint els càlculs necessaris.

b) Determina, raonadament, els números reals a , per als que el determinant de la matriu inversa $A(a)$ és igual a $\frac{1}{66}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(29) Donades les matrius quadrades

- a) Justifica que la matriu A té inversa i obtenir raonadament la matriu inversa de A , incloent-hi en la resposta tots els passos.
 b) Calcula, raonadament, el determinant de la matriu $3A^{-1}$, incloent-hi en la resposta tots els passos realitzats.
 c) Obté raonadament els valors reals x, i, z que verifiquen l'equació:

$$x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 = B.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(30) Donada la matriu

- a) Calcula $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$ on I és la matriu identitat.
 b) Obté la matriu transposició de la matriu A .
 c) Raona si hi ha la matriu inversa de A i, si és el cas, calcula-la.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(31) Tenim les matrius reals

- a) Justifica que hi ha la matriu inversa de A , calcula-la i calcula el determinant de A^{-1} .
 b) Calcula el determinant de la matriu B , $B = A(A + 4 \cdot I)$.
 c) Determina els números reals x, i, z, t que compleixen:

$$A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I, \quad A^2 = z \cdot A + t \cdot I.$$

CAPÍTOL 3: SISTEMES D'EQUACIONS.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. Analitza i resol, quan sigui possible, els sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + 2x = 11 \end{cases}$

2. Escribe en forma matricial i troba la matriu ampliada dels sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + 2x = 11 \end{cases}$

3. Per als sistemes anteriors, calcula el determinant de la matriu A que has obtingut i utilitza l'expressió:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

per a intentar resoldre'ls.

4. Per als sistemes anteriors, analitza quina relació existeix entre el valor del determinant de la matriu A i la classificació com a Sistema Compatible o Sistema Incompatible que vas fer en la primera activitat proposada.

5. Per als sistemes anteriors, determina el rang de la matriu ampliada que has obtingut i analitza quina relació existeix entre el dit rang, el de la matriu A i la classificació com a Sistema Compatible Determinat, Sistema Compatible Indeterminat o Sistema Incompatible.

6. Decideix quins dels següents sistemes pot resoldre's amb aquesta metodologia matricial:

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 3x \\ 2x + y = 3 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. Donades les següents matrius A , B i A^* , determina els sistemes lineals associats:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$; c) $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Escribe en forma matricial i troba la matriu ampliada dels sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3x + y + 5 \\ 2x - 3y + 15 = 3x + 2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y = 4 + x + y \\ 3 - x + 2y = y - x \end{cases}$; c) $\begin{cases} 12 + x - 4y = 3 - 2x + 4y \\ 7 - y + 4x = 7 + y - x \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5 = 3x + 3y \\ 3 = x - y \end{cases}$

9. Raona quins valors ha de tenir el paràmetre m perquè el sistema sigui compatible determinat, compatible indeterminat o incompatible:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ mx - 3y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + y = m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx + y = 6 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y + 6x = 33 \\ 3y + mx = 11 \end{cases}$

10. Determina si els sistemes següents són equivalents o no:

a) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x + y = -2 \\ x + 3y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$ i $\begin{cases} x - 9y + 5z = -3 \\ x + 3y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

11. Determina el valor de m perquè els sistemes següents siguin equivalents:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + my = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ i $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = m \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$

12. Analitza i resol per mitjà del mètode de Gauss els sistemes següents:

a) $\begin{cases} -x + 2y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 5z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 6z = -22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + 3y + 3z = 2 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ -2x - 3y - 3z = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - 3y - 3z = 5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + 6z = 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} w - x + y + z = 5 \\ w + x - y - z = 3 \end{cases}$

13. Resol el sistema anterior i comprova que l'aspirant haurà de contestar 50 preguntes correctament, 30 erròniament i deixar 10 preguntes sense contestar per a aconseguir els 210 punts.

EXERCICIS I PROBLEMES

1. – Resol els següents sistemes aplicant el mètode d'eliminació o de Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} -x + 2y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 5z = -4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - 2y + 3z = -14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 6z = -22 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 2x + 6y - z = -9 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} -4x + 3y = -5 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = -4y \\ 5 + 2y = 3x \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y + 2z = -3 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y - 4z = 3 \end{cases} \end{array}$$

2. – Donats els sistemes: a)

a) Expressa'ls en forma matricial i comprova que són sistemes de Cramer.

b) Resol-los utilitzant la matriu inversa i aplicant la regla de Cramer.

3. – Discuteix i resol, quan sigui possible, els sistemes següents:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -4x - 6y = -6 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 9x - 6y = 6 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases} \end{array}$$

4. – Resol els següents sistemes aplicant, si és possible, la Regla de Cramer:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} -x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = 7 \\ 4x + y - z = -1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - 3y + z = -29 \\ 3x + y - 5z = 21 \\ -x + 2y - 4z = 32 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2z = m - 1 \end{cases} \end{array}$$

5. – Discuteix i resol els sistemes en els casos que sigui possible: a)

$$\begin{cases} (a+2)x + (a-1)y - z = 3 \\ ax - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

6. – Donat el sistema

a) Estudia la seva compatibilitat segons els valors de a .

b) Resol-ho per al cas $a = -1$.

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

7. – Donades les equacions: es demana:

a) Afegeix una equació perquè el sistema resulte ser incompatible.

b) Afegeix una equació perquè el sistema resulte ser compatible determinat.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

8. – Donat el sistema d'equacions es demana:

a) Discuteix i resol, quan sigui possible.

b) Afegeix una equació lineal perquè el sistema resultant tenguí:

i) una solució

ii) moltes solucions

iii) no tenguí solució

9. – Discuteix i resol quan sigui possible els següents sistemes homogenis:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2x + 3y - 4z = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} y = x + 3z - y \\ x = z - 2y + x \\ z = x - 2y - 2z \end{cases} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10. – Siguin les matrius

a) Calcula cada un dels tres productes $A \cdot B$, $E \cdot D$, $D \cdot E$.

b) Si $C - 2AB = -D$ planteja un sistema de 2 equacions i 2 incògnites (representades per x , i) en funció de m . ¿Per a quins valors de m el sistema té solució? És sempre única?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

11. – Siguin les matrius

- a) Sabent que $(AB - C)D = 2E$, planteja un sistema de 3 equacions i 3 incògnites (representades per x, y, z) en funció de a .
 b) Per a algun valor de a el sistema té solució única?
 c) Para $a = 0$ troba una solució del sistema amb $z \neq 0$

12. – El caixer automàtic d'una determinada entitat bancària només admet bitllets de 50, 20 i de 10 €. Els divendres depositen en el caixer 225 bitllets per un import total de 7000 €. Esbrina el nombre de bitllets de cada valor depositat, sabent que la suma del nombre de bitllets de 50 i de 10 euros és el doble que el nombre de bitllets de 20 euros.
13. – Es disposa de tres bitlletes A, B i C amb bitllets de 10, 20 i 50 euros respectivament. Si passem 5 bitllets de B a A, el nombre de bitllets en aquesta és igual a la suma dels altres dos, però si passem 10 bitllets de A a C, el nombre de bitllets en aquesta també és igual a la suma dels altres dos. Esbrina quants bitllets hi ha en cada bitlleta si se sap que en total hi ha 1550 euros.
14. – La suma de les tres xifres d'un número és 18. La xifra de les unitats és igual a la suma de les desenes més les centenes. Si s'inverteix l'ordre de les xifres el número augmenta en 594 unitats. De quin número es tracta?
15. – Un examen de Matemàtiques II consistirà en un test de 60 preguntes. Per cada encert es donaran 5 punts, per cada fallada es llevaran 2 punts i per cada pregunta no contestada es llevarà 1 punt. Per a aprovar cal obtenir almenys 150 punts. Quantes preguntes caldrà contestar correctament per a obtenir els 150 punts i que el nombre de fallades més el quintuple del nombre de preguntes no contestades sigui igual al nombre d'encerts?
16. – En el mercat podem trobar tres aliments preparats per a moixos que es fabriquen posant, per quilo, les següents quantitats de carn, peix i verdura:
- Aliment Migato: 600 g de carn, 300 g de peix i 100 g de verdura
 - Aliment Catomeal: 300 g de carn, 400 g de peix i 300 g de verdura
 - Aliment Comecat: 200 g de carn, 600 g de peix i 200 g de verdura
- Si volem oferir al nostre moix 470 g de carn, 370 g de peix i 160 g de verdura per quilo d'aliment, quin percentatge de cada un dels compostos anteriors hem de mesclar per a obtenir la proporció desitjada?
17. – Calcula les edats d'una família (pare, mare i filla), sabent que entre els tres sumen 70 anys, que fa quatre anys l'edat del pare era set vegades l'edat de la filla i que d'aquí a quinze anys l'edat de la filla serà la quarta part de la suma de les edats del pare i de la mare.
18. – Una persona va invertir 72000 € repartits en tres empreses i va obtenir 5520 € de beneficis. Calcular la inversió realitzada en cada empresa sabent que en l'empresa B va fer el triple d'inversió que en la A i C juntes, i que els beneficis de les empreses van ser del 10 % en l'empresa A, el 8 % en l'empresa B i el 5 % en l'empresa C.
19. – Es tenen tres tipus de cafè: el de la classe A, que costa 6 €/kg, el de classe B, que costa 8 €/kg i el de la classe C que costa 10 €/kg. Es desitja fer una mescla per a vendre 80 kg de cafè a 7 €/kg. Quants kg de cada classe s'han de posar si del primer tipus ha d'entrar el doble del segon més el tercer?
20. – Calcula les edats actuals d'una mare i els seus dos fills, sabent que fa 14 anys l'edat de la mare era 5 vegades la suma de les edats dels fills en aquell moment, que d'aquí a 10 anys l'edat de la mare serà la suma de les edats que els fills tindran en aquest moment i que quan el fill major tenguí l'edat actual de la mare, el fill menor tindrà 42 anys.
21. – En una farmàcia es comercialitzen 3 tipus de xampú d'una certa marca: normal, amb vitamines i anticàsca. Se sap que el preu a què es ven el normal és de 2 euros i el de vitamines és de 3 euros. Es desconeix el preu a què es ven l'anticàsca. D'altra banda, els diners totals obtingut per les vendes dels 3 tipus de xampú el mes passat va ser de 112 euros i els diners obtingut en vendes amb el xampú normal va ser 56 euros inferior als diners totals obtingut en vendes amb la resta. A més, els diners totals obtingut en vendes amb el xampú de vitamines i l'anticàsca va ser el mateix que el que haguera obtingut venent 28 unitats de l'anticàsca i cap dels altres.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció del preu desconegut del xampú anticàsca, que pots cridar per exemple m) on les incògnites (x, y, z) siguin les unitats venudes el mes passat de cada tipus de xampú.
 b) Què pots concloure sobre el preu del xampú anticàsca a partir d'un estudi de la compatibilitat del sistema?
 c) Si se sap que el nombre d'unitats venudes de l'anticàsca va ser 20, utilitza el resultat de l'apartat (b) per a calcular les unitats venudes dels altres 2.
22. – En el trajecte que hi ha entre sa casa i el treball, un individu pot repostar gasolina en tres estacions de servei (A, B i C). L'individu recorda que aquest mes el preu de la gasolina en A ha sigut de 1,20 euros/litre i el preu de la gasolina en B de 1,18 euros/litre, però ha oblidat el preu en C. (Suposem que són "m" euros/litre). També recorda que:
- la suma del gasto en litres de gasolina en les estacions A i B va superar en 46,80 € al gasto en C.
 - el nombre de litres de gasolina consumits en B va ser el mateix que en C.
 - el gasto de litres en A va superar al de B en 12,60 euros.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de "m") per a determinar els litres consumits en cada gasolinera.
 b) Estudiar la compatibilitat del sistema en funció de "m". Pots donar algun preu a què sigui impossible haver venut la gasolina en la gasolinera C?
23. – En una cafeteria els ocupants d'una taula van abonar 4 € per 2 cafés, 1 torrada i 2 refrescos, mentres que els d'una altra taula van pagar 9 € per 4 cafés, 3 torrades i 3 refrescos.
- a) Quant han de pagar els clients d'una tercera taula si han consumit 2 cafés i 3 torrades?
 b) Amb les dades que es donen, es pot calcular quant val un café? Justifica les respostes.

RESUM

		Exemples
Sistema d'equacions lineals	Se denomina sistema de m equacions lineals amb n incògnites al conjunt de relacions: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$
Sistema homogeni	Un sistema d'equacions lineals es diu que es homogeni quan el terme independent de totes les equacions és igual a zero.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$
Sistemes equivalents	Dos sistemes amb el mateix nombre d'incògnites, encara que no tinguin el mateix nombre d'equacions, es diu que són equivalents si tenen les mateixes solucions , és a dir, qualsevol solució del primer és solució del segon, i viceversa.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = -2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ Verifiquen $x = 1$; $y = 2$
Expressió matricial d'un sistema	Tot sistema pot expressar-se com a producte de matrius en la forma $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x + y = 15 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}; A \cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Ressolució per inversa	$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El teorema de Rouchè-Fröbenius diu: "La condició necessària i suficient per a que un sistema de m equacions i n incògnites sigui compatible (que tinguí solució) és que el rang de la matriu dels coeficients sigui igual al rang de la matriu ampliada".	$\begin{cases} \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \text{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \text{rg}(A) < \text{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La solució d'un sistema es pot calcular com: $x_i = \frac{\Delta_i}{ A } \quad \text{Si } A \neq 0$ On Δ_i és el determinant que resulta de substituir la columna de la incògnita i -èsima per la matriu de termes independents.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \frac{20}{10} = 2 \quad y = \frac{10}{10} = 1$

AUTOAVALUACIÓ

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z + 2y = 5 \\ 2y - x + z = 11 \end{cases}$$

Donat el següent sistema d'equacions:

1.- La seva matriu de coeficients és:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- La seva matriu ampliada és:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

3.- Si aplicam el mètode de Gauss la nova matriu ampliada obtinguda és:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

4.- El sistema és:

a) compatible determinat b) compatible indeterminat c) incompatible d) té tres solucions

$$\begin{cases} 2x - y = -4y \\ 5 + 2y + z = 3x \end{cases}$$

Donat el següent sistema d'equacions

5.- La seva forma matricial és:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

6.- A l'afegir l'equació indicada el sistema és compatible determinat

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

7.- A l'afegir l'equació indicada el sistema és compatible indeterminat

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

8.- A l'afegir l'equació indicada el sistema és incompatible

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $x + y + z = 7$

9.- Indica l'afirmació que és correcta:

- a) Els sistemes homogenis tenen sempre infinites solucions.
- b) Dos sistemes són equivalents si coincideix alguna de les seves solucions.
- c) Un sistema és compatible si i només si el rang de la matriu dels coeficients coincideix amb el rang de la matriu ampliada.
- d) Tots els sistemes es poden resoldre pel mètode de Cramer.

APÈNDIX: PROBLEMES DE MATRIUS EN LES P.A.A.U.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 11 \end{cases}$$

- (1) Donat el següent sistema d'equacions: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 11 \end{cases}$ a) Obté el seu matriu de coeficients. b) Calcula el determinant de la matriu anterior. c) Sense resoldre el sistema, raonar si tindrà solució única.
- (2) En el primer curs d'un centre de la Universitat d'Oviedo s'han matriculat 352 alumnes dividits en tres titulacions distintes. En la tercera titulació hi ha la tercera part d'alumnes que en la primera, i la diferència d'alumnes que hi ha entre la primera titulació i la segona és inferior en dos alumnes al doble dels alumnes que hi ha en la tercera.
- a) Establix un sistema d'equacions amb les condicions del problema, en funció del nombre d'alumnes en cada titulació, i obtinga el nombre d'alumnes que hi ha en cada titulació.
- b) Calcula el determinant de la matriu del sistema.
- (3) En un partit de bàsquet femení, l'equip de la Universitat d'Oviedo va guanyar al d'una altra universitat espanyola amb un marcador 64 a 48. El marcador obtingut per l'equip guanyador es va aconseguir per mitjà de canastres de dos punts, triples (canastres de tres punts) i tirs lliures (canastres d'un punt). El nombre de tirs lliures va ser dos més que cinc vegades el nombre de triples. A més, el nombre de canastres de dos punts va ser dos més que el nombre de tirs lliures. A) Planteja el sistema d'equacions resultant de l'anterior. B) ESCRI la matriu ampliada del sistema obtingut en A). C) Quantes canastres de cada tipus va ficar l'equip de la Universitat d'Oviedo?
- (4) Cada acció de BBA ha donat un guany de 6 euros i cada acció de NKO ha donat un guany de m euros. Un inversor havia comprat accions d'ambdós tipus, la qual cosa li va suposar un guany total de 800 euros, però està penedit de la seva inversió, perquè si haguera comprat la mitat d'accions de BBA i el doble de NKO, el seu guany total hauria sigut de 1150 euros.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de m) on les incògnites x e i siguin el nombre d'accions comprades de cada tipus. Basant-te en un estudi de la compatibilitat del sistema, hi ha algun valor de m per al que el sistema tenguí més d'una solució?
- b) Si el guany per cada acció de NKO va ser de 5 euros, quantes accions de NKO havia comprat?
- (5) Una botiga ven bosses de caramels a 2 euros cada una i bosses de gominoles a 4 euros cada una. La recaptació d'un determinat dia per aquests dos conceptes ha ascendit a 200 euros i se sap que el nombre de bosses de caramels que han venut aquest dia és m vegades el nombre de bosses de gominoles.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de m) on les incògnites x e i siguin el nombre de bosses de cada tipus que s'han venut aquest dia. Basant-te en un estudi de compatibilitat del sistema anterior, és possible que s'hagen venut el doble de bosses de caramels que de gominoles?
- b) Suposant que s'han venut el triple de bosses de caramels que de gominoles, quantes bosses de gominoles s'han venut?
- (6) Un tren realitza un viatge directe entre dues capitals. El viatge ho realitza per dos tipus de vies, per la primera circula sempre a 100 Km/h i per la segona circula sempre a m Km/h. El recorregut total del viatge és de 1240 Km i la duració del mateix és d'11 hores.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de m) on les incògnites x e i siguin el nombre d'hores que circula per cada tipus de via. Basant-te en un estudi de la compatibilitat del sistema anterior, és possible que la velocitat a què circula pel segon tipus de via sigui també de 100 Km/h?
- b) Suposant que la velocitat a què circula pel segon tipus de via és 120 Km/h, quant temps ha estat circulant pel primer tipus de via?
- (7) Una acadèmia d'idiomes dóna classes d'espanyol a un total de m alumnes, entre els de Nivell Bàsic i els de Nivell Avançat, amb els que recapta 3000 euros. Els alumnes de Nivell Bàsic paguen m euros al mes, mentres que els de Nivell Avançat paguen el doble.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de m) on les incògnites x e i siguin el nombre d'alumnes de cada tipus en les classes d'espanyol de l'acadèmia. Basant-te en un estudi de compatibilitat del sistema anterior, és possible que els alumnes de Nivell Bàsic paguen 40 euros al mes?
- b) Si els alumnes de Nivell Bàsic paguen 50 euros al mes, quants alumnes de Nivell Avançat hi ha?
- (8) En Joan i en Lluís són dos amics que en total tenen 10 fills. Un tercer amic, en Xavier, té m fills més que en Joan i m vegades els d'en Lluís.
- a) Planteja un sistema d'equacions (en funció de m) on les incògnites x i y siguin el nombre de fills d'en Joan i d'en Lluís. ¿Per a quins valors de m el sistema anterior té solució? En cas d'existir solució, és sempre única?
- b) Si en Xavier té el doble de fills que en Lluís, quants de fills té en Lluís?
- (9) Un grup de persones es reuneix per a anar d'excursió, juntant-se un total de 20 entre homes, dones i nins. Comptant homes i dones junts, el seu número resulta ser el triple del nombre de nins. A més, si hi hagués anat una dona més, el seu número igualaria al d'homes.
- a) Plantejar un sistema per a esbrinar quants homes, dones i nins han anat d'excursió.
- b) Resoldre el problema.
- (10) Considera el sistema $\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$ a) Estudia la seva compatibilitat segons els distints valors del número real a .
- b) Resol-ho, si és possible, en el cas $a=1$.

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

(11) Donat el sistema

a) Estudia la seva compatibilitat segons els valors de a .

b) Resol-ho quan $a=0$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(12) La matriu ampliada associada a un cert sistema d'equacions lineals és:

a) Obtenir les equacions del sistema.

b) Calcular el rang de la matriu formada pels coeficients del sistema.

c) Sense resoldre el sistema, deduir raonadament si admet solucions i en quin nombre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i la de termes independents} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$$

(13) La matriu dels coeficients d'un sistema és

a) ¿Per a quin valor o valors de a el sistema no té solució?

b) Per a un cert valor de a un individu va trobar 2 solucions del sistema. Què valia a ? Tenia més solucions el sistema?

c) Troba un valor de a per tal que el sistema tingui solució única i, per a aquest valor, resol-ho.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(14) Siguin les matrius

a) Calcular les matrius $(A \cdot B) + C$ i $3D$

b) Sabent que $(AB) + C = 3D$, plantejar un sistema d'equacions per a trobar els valors de x, y, z .

c) Estudiar la compatibilitat del sistema. Quantes solucions té?

d) Trobar, si és possible, una solució.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(15) Siguin les matrius

a) Siguin el sistema de 3 equacions amb tres incògnites la matriu de coeficients del qual és A i de termes independents B . Pot per a algun valor de a no tenir solució aquest sistema? ¿Per a què valors de a el sistema té solució única?

b) Si la matriu de coeficients és A però la de termes independents és C , és possible que per a algun valor de a el sistema no tingui solució? Troba un valor de a per al qual el sistema tingui més d'una solució i calcula dues d'elles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}, \quad D = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

(16) Siguin les matrius

a) Calcula cada un dels tres productes $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$.

b) Si $AB + C = D$ planteja un sistema de 2 equacions i 2 incògnites (representades per x, i) en funció de m . ¿Per a quins valors de m el sistema té solució? És sempre única?

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

(17) Siguin les matrius

a) Si $AB - C = D$, planteja un sistema de 2 equacions i 2 incògnites (representades per x, i) en funció de a .

b) Per a quins valors de a el sistema té solució? És sempre única? Troba una solució per a $a = 1$ amb $y \neq 1$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

(18) Siguin les matrius

a) Sabent que $AB = 2C - D$, planteja un sistema de 3 equacions i 3 incògnites (representades per x, i, z) on a és un cert valor desconegut.

b) Si es sabés que el sistema té solució, podríem descartar algun valor de a ?

c) Si es sabés que el sistema té solució única, podríem descartar algun valor de a ?

d) Hi ha algun valor de a per al qual el sistema tingui més d'una solució?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

(19) Siguin les matrius

a) Sabent que $(AB - C)D = 2E$, planteja un sistema de 3 equacions i 3 incògnites (representades per x, y, z) en funció de a .

b) Per a algun valor de a el sistema té solució única?

c) Per a $a = 0$ troba una solució del sistema amb $z \neq 0$

(20) Troba totes les solucions d'un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites de què es coneix que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ i $(0,0,3)$ són solucions i el rang de la matriu dels coeficients és major o igual que 2.

CAPÍTOL 4: GEOMETRIA EN L'ESPAI - VECTORS.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. GEOMETRIA DEL PLA

Calcula les components i el mòdul d'un vector d'origen $A(-1, 1, 2)_i$ extrem $B(3, 1, -4)$.

Donats els punts $P = (2, 2, 3)$, $Q = (1, 0, 5)_i$, $R = (-2, 3, 4)_i$ els vectors $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicant si el resultat és punt o vector:

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

Donats tres punts genèrics, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)_i$, $R = (r_1, r_2, r_3)$, demostra:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)_i$, $\vec{w} = (7, 2, -1)$ calcula:

a) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$ b) $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{w}$ c) $3\vec{u} - 2(\vec{v} + \vec{w})$

Donats els punts $A(0, -2, 6)_i$, $B(4, 8, -4)$, determina el punt mitjà del segment AB.

Comprova si els punts $A(3, 2, 1)$, $B(4, 4, -2)_i$, $C(4, -1, 3)$ estan alineats.

Determina si són linealment independents o no els conjunts de vectors següents:

$A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, amb $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)$.

$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, amb $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 4, 0)$.

$C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$ amb $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)_3$, $\vec{x} = (0, 0, 1)$

2. PRODUCTE ESCALAR

Calcula el producte escalar dels vectors $\vec{u} = (0, 1, -3)_i$, $\vec{v} = (-3, 4, 6)$

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. - Donats els vectors lliures:



a) Representa els vectors: $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$; $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$.

b) Troba un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

2. - Donats $\vec{a} = (2, -1)_i$, $\vec{b} = (-3, m)_i$, troba el valor de m perquè siguin linealment dependents.

3. - Comprova si són o no linealment independents els vectors següents:

a) $\vec{x} = (-2, 3)_e$, $\vec{y} = (6, -9)$ b) $\vec{x} = (-1, -2, 3)_i$, $\vec{y} = (-2, 0, 1)_i$, $\vec{z} = (2, -4, 5)_i$, $\vec{t} = (3, 2, -4)_i$

c) $\vec{x} = (2, 1, 0, -1)_i$, $\vec{y} = (1, -3, -1, 0)_i$, $\vec{z} = (3, -2, -1, 1)_i$

4. - a) Donats els vectors $\vec{x} = (1, 3, -2)_e$, $\vec{y} = (3, m, -6)_e$, troba el valor de m perquè els dos vectors siguin linealment independents.

b) Si $m = -2$, es pot expressar el vector $\vec{z} = (-1, 8, 1)_e$ com a combinació lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

5. - Donats els vectors $\vec{u} = (-3, 4, 0)_i$, $\vec{v} = (1, -2, 2)_i$, $\vec{w} = (0, -m, 1)_i$, calcula el valor de m perquè el vector $\vec{u}$ es pugui expressar com a combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

6. - Donats els vectors $\vec{x} = (1, -2, 0)_i$, $\vec{y} = (3, -1, 2)_i$, $\vec{z} = (-m, -1, -2)_i$, troba el valor de m perquè els tres vectors siguin linealment dependents. En aquest cas, expressa $\vec{z}$ com a combinació lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

7. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, 1, m)_i$, $\vec{v} = (0, m, -1)_i$, $\vec{w} = (1, 2m, 0)_i$, determina el valor de m perquè:

a) Siguin linealment independents.
combinació. c) Siguin coplanaris.

b) El vector $\vec{v}$ es pugui expressar com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{w}$, i troba aquesta

8. - Els vectors $\vec{x} = (1, 0, 0)_i$, $\vec{y} = (-1, 0, 1)_i$, $\vec{z} = (2, 1, 1)_i$, formen una base de V^3 ? En cas afirmatiu:

a) Troba les components del vector $\vec{u} = (3, -2, 5)_i$ respecte d'aquesta base. b) Troba les components en la base canònica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ del vector $\vec{v}$, si les seves coordenades en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ són 2, -3 i 2 respectivament.

9. - Troba un punt C que estigui alineat amb A i B , i un altre punt D que no ho estigui.

10. - D'un segment $\overline{AB}$, el punt B té de coordenades $(-2, 0, 6)_i$ i el punt mitjà del segment té de coordenades $M(-3, 2, 2)_i$. Troba les coordenades del punt A i divideix el segment $\overline{AM}$ en quatre parts iguals.

11. - D'un segment $\overline{AB}$, se sap que $\overline{AB} = (3, -4, -2)_i$ i que el punt mitjà del segment té de coordenades $M(-1, 0, 3)_i$. Troba les coordenades de A i B i divideix el segment $\overline{AB}$ en 3 parts iguals.

12. - Donats els punts $A(2, 0, 1)_i$, $B(0, -2, 3)_i$, troba dos punts C i D que estiguin alineats amb A i B , de manera que un d'ells (C) estigui situat entre ambdós i l'altre (D) estigui situat a l'esquerra de A .

13. - Dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ se sap que $|\vec{u}| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$ i els dos vectors formen un angle de 120° . Troba $|\vec{v}|$, $\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}$ i $\text{proy}_{2\vec{v}} \vec{u}$.

14. - Pot haver-hi dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tals que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ sent $|\vec{u}| = 3$ i $|\vec{v}| = 2$?

15. - Donats els vectors $\vec{u} = (2, -3, 6)_i$, $\vec{v} = (3, -6, 2)_i$, calcula:

a) El producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. b) El mòdul de $\vec{u}$ i el mòdul de $\vec{v}$. c) L'angle format per ells.

d) L'angle format per $\vec{u}$ i $\vec{u} - \vec{v}$. e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tingui mòdul 3. Quantes solucions hi ha?

$$\vec{u} = (1, -2, 2)_i, \vec{v} = (4, -4, -2)_i$$

16. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, -2, 2)_i$, $\vec{v} = (4, -4, -2)_i$, calcula: a) El producte escalar $2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$. b) El mòdul de $\vec{u}$ i el mòdul de $\vec{v} - \vec{u}$. c) L'angle format pels vectors $\vec{u}$ i $\vec{u} + \vec{v}$. d) El cosinus director de $\vec{v}$. e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ i que tingui mòdul 6.

17. - Calcula les components d'un vector $\vec{v}$ que tingui la mateixa direcció que el vector $\vec{u} = (4, -2, 1)_i$ i el seu mòdul sigui 3 i les d'un altre vector $\vec{w}$ que sigui unitari però amb sentit oposat al vector $\vec{u}$. Quins són el cosinus director de $\vec{u}$?

18. - El cosinus director del vector $\vec{u}$ són: $\cos \alpha = 0,2$, $\cos \beta = 0,3$ i $\cos \gamma = 0,87$. Si $|\vec{u}| = 6$, quins són els seus components?
19. - Un vector $\vec{u}$ forma amb els vectors $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ de la base ortonormal angles de 45° i 60° , i amb el vector $\vec{u}_1$ un angle agut. Si $|\vec{u}| = 4$, determina les components del vector $\vec{u}$.
20. - Determina, si és possible, el valor de m de manera que $\vec{u} = (m, -2, 3)$ i $\vec{v} = (-1, m, 1)$ siguin: a) Paral·lels. b) Perpendiculars
21. - a) Calcula el valor de m perquè els vectors $\vec{u} = (-1, m, 4)$ i $\vec{v} = (m, -3, 2)$ siguin perpendiculars.
b) Quin angle formaran per als $m = 0$ vectors $(\vec{u} + 2\vec{v})$ i $(\vec{u} - \vec{v})$?
22. - De dos vectors ortogonals se sap que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 7$ i $|\vec{u} + \vec{v}| = 5$. Troba $|\vec{u}|$ i $|\vec{v}|$.
23. - Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tals que $|\vec{u}| = 16$ i $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 24$, calcula el mòdul de $\vec{v}$.
24. - Donats els vectors $\vec{u} = (2, 3, 8)$ i $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ calcula: a) Les components d'un vector unitari de la mateixa direcció que $\vec{v}$. b) Un vector de la mateixa direcció que $\vec{v}$ i el mòdul del qual sigui igual a la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. c) Un vector perpendicular a ambdós i de mòdul 2.
25. - Sigui $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ una base de vectors tal que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 1$ i a més verifica que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 3$ i $\vec{v} \cdot \vec{w} = 12$. Calcula el valor de m perquè i $\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$ siguin ortogonals.
26. - Donats els vectors $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, -2)$ i $\vec{c} = (1, -3, 2)$, determina un vector unitari (de mòdul 1) que sent coplanari amb $\vec{a}$ i $\vec{b}$, sigui ortogonal (perpendicular) a $\vec{c}$.
27. - Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són tals que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ i $|\vec{u} + \vec{v}| = 7$. Quin angle formen?
28. - Siguin $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors tals que $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ i $|\vec{v}| = 4$. Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle de 30° , troba: a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ i $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$
b) $|\vec{u} - \vec{v}|$ i $|2\vec{u} - \vec{v}|$ c) L'angle que formen els vectors $(\vec{u} - \vec{v})$ i $(2\vec{u} - \vec{v})$
29. - Determina, si és possible, el valor de α de manera que els vectors $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ i $\vec{v} = (1, -2, -\alpha)$:
a) Siguin paral·lels. b) Siguin perpendiculars. c) Formin un angle de 60° .
30. - Troba tots els vectors de mòdul 3 que formen un angle de 30° amb $\vec{u} = (1, -1, 1)$ i de 135° amb $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.
31. - Troba tots els vectors de mòdul 6 que formen un angle de 90° amb $\vec{u} = (1, -1, 0)$ i 45° amb $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.
32. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ i $\vec{w} = (2, -1, -2)$, calcula:
a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w} \times \vec{v}|$ i $|(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}|$ b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$ i $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
33. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, 4, -8)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ i $\vec{w} = (2, 1, -1)$ troba:
a) $|\vec{v}|$ i $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v} \times \vec{w}|$ i $|(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v}|$
34. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 3)$, $\vec{v} = (4, 0, -3)$ i $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$, calcula:
a) $|\vec{w}|$, $|\vec{w} \times \vec{v}|$ i $|\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})|$ b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$, $\vec{v} \times (\vec{u} - \vec{w})$ i $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$
35. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, -1, 1)$ i $\vec{v} = (2, 3, 4)$ calcula: a) El mòdul de $\vec{u}$ i de $\vec{v}$ i l'angle que formen.
b) El producte vectorial de $\vec{u}$ i de $\vec{v}$. c) Un vector unitari que sigui ortogonal a $\vec{u}$ i $\vec{v}$. d) L'àrea del paral·lelogram que té per costats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
36. - Donats els vectors $\vec{u} = (-1, m, 2)$, $\vec{v} = (2, -1, -4)$ i $\vec{w} = (3, -1, -5)$, es demana: a) El valor de m perquè els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tinguin distinta direcció. b) El valor de m perquè els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin ortogonals. c) Un vector que tingui mòdul $3\sqrt{6}$ i que sigui perpendicular als vectors $\vec{v}$ i $2\vec{v} - \vec{w}$.
37. - Donats els vectors $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ i $\vec{w} = (1, 2m, 0)$, determina el valor de m perquè: a) Siguin linealment independents. b) El vector $\vec{v}$ es pugui expressar com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Troba aquesta combinació. c) Siguin coplanaris. d) L'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ valgui $125 u^2$.
38. - En un sistema de referència ortogonal $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, on $|\vec{u}_1| = 1$, $|\vec{u}_2| = 2$ i $|\vec{u}_3| = 2$, tenim els vectors

$\vec{a} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$, $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. Amb aquestes dades es demana: a) $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2$, $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3$,

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ i angle que formen $\vec{a}$ i $\vec{b}$. c) $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3$, $\vec{u}_3 \times \vec{u}_1$, $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, $\vec{b} \times \vec{a}$ i àrea del triangle determinat per $\vec{a}$ i $\vec{b}$. d) Repeteix els apartats anteriors en el cas de ser un sistema de referència ortonormal.

39. - Troba un vector $\vec{x}$ que tengui de mòdul 3, i tal que si $\vec{y} = (3, -3, 0)$ verifiqui: $\vec{x} \times \vec{y} = (6, 6, 3)$.

40. - Siguin $A(m-2, m, -5)$, $B(m, 1, -5)$, $C(-1, 3, m)$ els vèrtexs d'un triangle ABC . Quant val m perquè el triangle sigui rectangle en B ?

41. - Els vèrtexs d'un triangle ABC són $A(\lambda, 2, -1)$, $B(5, 3, -4)$, $C(7, \lambda, -2)$. Quant val λ perquè el triangle sigui rectangle en B ?

42. - Dos vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són $A(1, 1, 1)$, $B(0, 2, 0)$. Si $O(0, 0, 1)$ és el centre de dit paral·lelogram, troba les coordenades dels altres dos vèrtexs i l'àrea del paral·lelogram.

43. - Donats els punts $A(-4, 2, -1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, m, 3)$, es demana trobar el valor de m perquè els tres punts:

a) estiguin alineats. b) formin un triangle rectangle on $\hat{B} = 90^\circ$. c) formin un triangle isòsceles, sent $\hat{A}$ l'angle desigual. d) formin un triangle d'àrea $\sqrt{52} u^2$.

44. - Donats els punts $A(1, 1, -1)$, $B(-1, -1, 0)$, $C(3, m, -2)$, es demana: a) Trobar per a què valors del paràmetre m estan alineats.

b) Trobar si hi ha valors de m per als quals A , B i C són tres vèrtexs d'un paral·lelogram d'àrea $2\sqrt{5} u^2$ i, en cas afirmatiu, calcular-los. c) Trobar per a què valor de m formaran un triangle rectangle en B , i calcular l'àrea.

45. - Donats els punts $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$, $D(1, 1, 1)$ calcula: a) L'àrea i el perímetre del triangle de vèrtexs A , B i C . b) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són A , B , C i D . c) El volum del paral·lelepípede determinat per eixos quatre punts. d) L'àrea d'una de les cares laterals.

46. - Segui la piràmide de vèrtexs $A(0, 1, -1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(-1, 1, 0)$, $D(1, -2, 2)$, calcula: a) L'àrea del paral·lelogram determinat pels punts A , B i C . b) L'àrea de cada cara. c) El seu volum.

AUTOAVALUACIÓ

1. Donats els vectors de components $(1, 3, 12)$ i $(3, x, 16)$, indica el valor de x perquè els dos vectors siguin linealment dependents.
a) 6 b) 9 c) -3 d) -6

2. El mòdul del vector d'origen $A(2, 3, 12)$ i extrem $B(2, 0, 12)$ és:

a) $\sqrt{82}$ b) 25 c) $\sqrt{41}$ d) 5

3. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ el vector $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ té de components:

a) $(15, 15, 15)$ b) $(9, 15, 15)$ c) $(15, 15, 15)$ d) $(15, 12, 15)$

4. Donats els punts $A(4, -1, 5)$, $B(2, 7, -5)$, les coordenades del punt mitjà del segment AB són:

a) $(3, 3, 0)$ b) $(6, 16, 10)$ c) $(3, 4, 0)$ d) $(6, 14, 10)$

5. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, el seu producte escalar és:

a) 15 b) -15 c) -3 d) -6

6. Donat el vector $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ indica quin dels vectors $\vec{u}$ és ortogonal a ell:

a) $\vec{u} = (1, -3, 5)$ b) $\vec{u} = (1, -2, 5)$ c) $\vec{u} = (1, 2, 7)$ d) $\vec{u} = (2, 5, 5)$

7. Donats els punts $A(4, -1, 5)$, $B(2, 7, -5)$ i $C(6, 17, 16)$ l'àrea del triangle construït sobre ells és:

a) 150 b) 201 c) 30 d) $\sqrt{201}$

8. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, el seu producte vectorial és:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15, -30, -15)$ b) $\vec{u} \times \vec{v} = (15, 15, 15)$ c) $\vec{u} \times \vec{v} = (-15, 30, -15)$ d) $\vec{u} \times \vec{v} = (15, -30, 15)$

9. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$, el seu producte mixt és:

a) 160 b) 45 c) 115 d) 0

10. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$, el volum del paral·lelepípede construït sobre ells és:

a) 60

b) 45

c) 15

d) 0

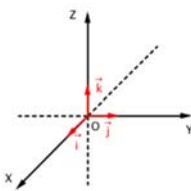
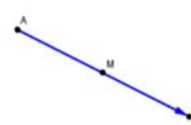
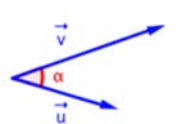
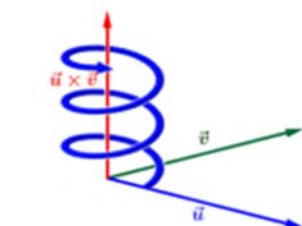
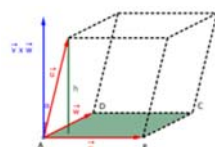
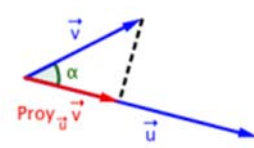
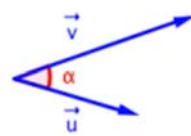
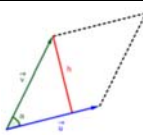
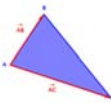
APÈNDIX: PROBLEMES DE VECTORS EN LES P.A.A.U.

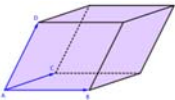
- (1) Busca l'àrea del polígon de vèrtexs $A(4,7,8)$, $B(2,3,4)$, $C(-1,-2,1)$, $D(1,2,5)$.
- (2) Les coordenades dels punts mitjans dels costats d'un triangle ABC són $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$.
a) Obté les coordenades dels vèrtexs A , B i C del triangle. b) Troba l'àrea del triangle.
- (3) Els punts $P(2,0,0)$, $Q(0,4,2)$ són dos vèrtexs d'un triangle isòsceles. Obté les coordenades del tercer vèrtex sabent que el punt és de la forma $R(x,0,20)$. És única la solució?
- (4) Es considera el paral·lelepípede que té com a vèrtexs de la cara inferior els punts $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$, $D(2,0,-1)$ amb A i C vèrtexs oposats. Sigui $A'(-3,1,0)$ el vèrtex adjacent a A en la cara superior. Calcula:
a) Els vèrtexs de la cara superior. b) El volum del paral·lelepípede.
- (5) Siguin els punts $A(x,4,3)$, $B(1,2,2)$, $C(-1,0,1)$. a) ¿Per a quins valors de x els punts no formen un triangle?
b) Amb $x=1$ calcula l'àrea del triangle que formen els punts.
- (6) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ són vectors de l'espai, indica quin o quines de les següents expressions no tenen sentit:
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$ $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$
- (7) Siguin $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tres vectors linealment independents. Indica quin o quins dels següents productes mixtos val zero:
 $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$ $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$ $[\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}]$
- (8) Assenyala si les següents afirmacions són verdaderes o falses. En cas de ser certes, justifica-les; en cas contrari, posa exemples que ho confirmen. a) El producte mixt de tres vectors qualssevol no nuls és sempre diferent de zero. b) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ són tres vectors de l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$ no nuls que satisfan la condició $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, llavors es verifica que $\vec{b} = \vec{c}$.
- (9) Donats els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tals que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ i $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ calcula la següent suma de productes escalars: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- (10) Donats els punts $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,4)$, $D(2,-6,2)$: a) Prova que el quadrilàter $ABCD$ és un trapezi (té dos costats paral·lels) i troba la distància entre els dos costats paral·lels. b) Troba l'àrea del triangle ABC .
- (11) És sempre cert que $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$? En cas afirmatiu, justifica-ho; en cas contrari, posa un exemple que ho confirmi.
- (12) Donats els punts $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$, $D(0,1,4)$ calcula: a) L'àrea del triangle de vèrtexs A , B i C . b) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són A , B , C i D .
- (13) a) Demostra que si tres vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ són perpendiculars entre si llavors es verifica: $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2$ on $|\vec{w}|$ denota el mòdul del vector $\vec{w}$.
b) Donats els vectors $\vec{v}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,0,1)$ troba un vector $\vec{v}_3$ tal que: $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2$
c) Donat el vector $\vec{v} = (1,2,3)$, troba els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ que compleixin les tres condicions següents:
a) $\vec{v}_1$ té les seves tres coordenades iguals i no nul·les; b) $\vec{v}_1$ és perpendicular a $\vec{v}_2$ c) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
- (14) Els punts $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram.
a) Troba les coordenades del quart vèrtex D i calcula l'àrea del dit paral·lelogram.
b) Classifica el paral·lelogram pels seus costats i pels seus angles.
- (15) Siguin A , B i C tres punts de l'espai tridimensional que verifiquen la relació $\overrightarrow{CB} = -3 \cdot \overrightarrow{AB}$.
a) Calcula el valor que agafa k en l'expressió $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$
b) Si $A(1,2,-1)$, $B(3,6,9)$, troba les coordenades del punt C que complix la relació de partida.
- (16) Es consideren els punts $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$, $C(1,-1,a)$.
a) Comprova que no estan alineats, sigui quin sigui el valor que prengui el paràmetre a .
b) Troba l'àrea del triangle que determinen els tres punts.
- (17) Resol la següent equació vectorial: $\vec{x} \times (2,1,-1) = (1,3,5)$ sabent que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$.

(18) Donats els vectors $\vec{u} = (a, 1+a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$, $\vec{w} = (1, a, 1)$, es demana:

- Determina els valors de a perquè els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment dependents.
- Estudia si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depèn linealment dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ per al cas $a = 2$.
- Justifica raonadament si para $a = 0$ es complix la igualtat $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

RESUM

Base d'un sistema de vectors	Se diu que el conjunt de vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ formen una base de l'espai, i se denota per $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ quan verifiquen: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ són linealment independents. - Qualsevol altre vector es pot escriure com a combinació lineal d'ells: $\vec{v} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{u}_n$	
Punt mig d'un segment	Donats dos punts $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$, el punt mig del segment AB és: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$	
Producte escalar de vectors	Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, s'anomena producte escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al nombre real que resulta en multiplicar el producte dels seus mòduls pel cosinus de l'angle que formen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos \alpha$	
Producte vectorial de vectors	Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, s'anomena producte vectorial, $\vec{u} \times \vec{v}$, al vector: - De mòdul $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \sin \alpha$ - Direcció perpendicular a $\vec{u}$ i $\vec{v}$ - Sentit indicat per la regla de Maxwell	
Producte mixt de tres vectors	S'anomena producte mixt de tres vectors, $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$, al nombre real que resulta de multiplicar escalarment a $\vec{u}$ pel vector resultant del producte vectorial de $\vec{v}$ i $\vec{w}$: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$	
Projecció d'un vector sobre un altre	El producte escalar de dos vectors no nuls $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és igual al producte del mòdul d'un d'ells per la projecció de l'altre sobre ell: $\text{Proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v} \cdot \cos \alpha$	
Angle entre vectors	l'angle entre dos vectors es calcula amb la fórmula: $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} } \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$	
Àrea d'un paral·lelogram	L'àrea del paral·lelogram definit per dos vectors es calcula amb la fórmula: Àrea = $\vec{u} \times \vec{v}$	
Àrea d'un triangle	L'àrea del triangle definit per dos vectors es calcula amb la fórmula: $\text{Àrea} = \frac{1}{2} \cdot \vec{u} \times \vec{v} $	

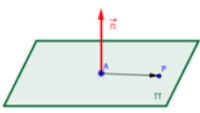
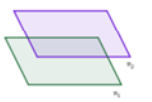
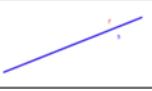
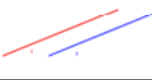
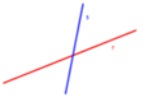
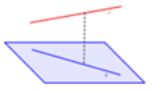
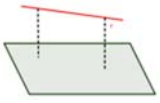
Volum d'un prisma	El volum del paral·lelepípede definit per tres vectors es calcula amb la fórmula: $\text{Volumen} = \left \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right $	
Volum d'un tetraedre	El volum del tetraedre definit per tres vectors es calcula amb la fórmula: $\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right $	

CAPÍTOL 5: RECTES I PLANS A L'ESPAI

ACTIVITATS PROPOSADES

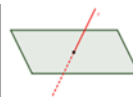
1. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua e implícitas de la recta que pasa por el punto $A(-1, -4, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-3, -1, 5)$
2. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua e implícitas de la recta que pasa por el punto $A(4, -3, -2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-1, 0, 6)$
3. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua e implícitas de la recta que pasa por el punto $A(0, 1, 0)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (-2, 0, 0)$
4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(3, -4, 1)$
5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3, -2, 6)$ y $B(1, -5, 7)$
6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1, 6)$ y $B(7, -2, -1)$

RESUM

Vector normal del pla	S'anomena vector normal del pla $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ al vector $\vec{n} = (A, B, C)$ que és perpendicular al pla.	
Posicions relatives de dos plans Plantejat el sistema d'equacions format per les equacions dels dos plans $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. Sigui M la matriu de coeficients y M^* la matriu ampliada amb els termes independents. $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$		
Plans coincidents	$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 1 < \text{n}^\circ \text{ incògnitas} \Rightarrow S.C.I.$	
Plans paral·lels	$\text{rg}(M) = 1 \neq \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.I.$	
Plans secants	$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 < \text{n}^\circ \text{ incògnitas} \Rightarrow S.C.I.$	
Posicions relatives de dues rectes Consideram les rectes r i s , que vendran determinades per un punt i un vector director: $r: \begin{cases} P(p_1, p_2, p_3) \\ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} Q(q_1, q_2, q_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$		
Rectes coincidents	$\text{Rang} \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} = 1$	
Rectes paral·leles	$\text{Rang} \vec{u}, \vec{v} = 1$ i $\text{Rang} \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} = 2$	
Rectes secants	$\text{Rang} \vec{u}, \vec{v} = 2$ i $\text{Rang} \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} = 2$	
Rectes que es creuen	$\text{Rang} \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ} = 3$	
Posicions relatives d'una recta i un pla Consideram la recta r , donada per les equacions implícites, i un pla π , donat per la seva equació general: $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad \pi: A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ Sigui M la matriu de coeficients y M^* la matriu ampliada del sistema format per sus equacions. $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$		
Recta continguda en el pla	$\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.C.I.$	
Recta i pla paral·lels	$\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.I.$	

**Recta i plano
secants**

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.C.D.$$



EXERCICIS I PROBLEMES.

- a) Troba l'equació de la recta que passa pel punt $A(1, -1, -2)$ i té com a vector director $\vec{u} = (1, -2, 3)$. Expressa aquesta recta de totes les formes possibles. b) Pertany el punt $B(3, -5, 4)$ a aquesta recta? I el punt $C(-2, 5, -7)$? c) Troba el valor de m i n perquè el punt $D(m, -7, 2n)$ pertanyi a aquesta recta.
- Expressa de totes les formes possibles la recta que passa pels punts $A(0, -1, 0)$ i $B(1, 1, 0)$. Trobar un punt C que estigui alineat amb A i B , i un altre punt D que no ho estigui.
- Donats els punts $A(2, 0, 1)$ i $B(0, -2, 3)$, es demana: a) Expressa de totes les formes possibles la recta que passa per ambdós punts. b) Troba dos punts C i D que estiguin alineats amb A i B , de manera que un d'ells (C) estigui situat entre ambdós i l'altre (D) estigui situat a l'esquerra de A .
- Expressa de totes les formes possibles les següents rectes:

a) $r: \begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b) $s: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ c) $r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d) $s: \begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases}$
- Expressa de totes les formes possibles la recta $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ i a més troba: a) Un punt d'aquesta recta tal que la seva segona coordenada sigui -4 . b) Un punt d'aquesta recta tal que la suma de les seves coordenades valgui 2 .
- Expressa de totes les formes possibles la recta d'equació $r: \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1}$ i troba un punt de la mateixa la primera coordenada del qual sigui -4 .
- Troba les equacions dels eixos OX , OY , OZ i expressa-la de totes les formes possibles.
- Troba l'equació de la recta que passa pel punt $A(2, 1, -1)$ i és paral·lela: a) A l'eix OY . b) A la recta d'equació $r: \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$. Expressa-la de totes les formes possibles.
- Donada la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ es demana: a) Expressa aquesta recta de totes les formes possibles. b) Troba un punt d'aquesta recta tal que la suma de les seves coordenades valgui 4 . c) Troba l'equació d'una recta s que sigui paral·lela a la recta r i que passi pel punt $B(1, -2, 0)$.
- Expressa de totes les formes possibles la recta $r: \begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ i troba l'equació d'una recta s que passant pel punt $B(1, -2, -1)$ tenguí com a vector director el de la recta r .
- Expressa de totes les formes possibles l'equació del pla $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$ i troba 3 punts d'aquest pla que estiguin alineats.
- Troba l'equació del pla (expressar-ho de totes les formes possibles) en els casos següents: a) Passa pel punt $A(3, 2, -1)$ i té com a vectors directores $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{v} = (2, 0, -1)$. b) Passa pels punts $A(1, 2, 0)$ i $B(-1, 1, 2)$ i un dels seus vectors directores és $\vec{u} = (1, -2, -1)$. c) Passa pels punts $A(0, -2, 1)$, $B(-2, 0, -1)$ i $C(1, -2, 0)$.
- Troba les equacions dels plans OXY , OXZ , OYZ i expressa'ls de totes les formes possibles.
- Troba les equacions paramètriques del pla que passa pel punt $P(8, 9, 1)$ i és paral·lel a les rectes:

$$s: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$$
- Troba l'equació del pla que passa pel punt $A(-2, 0, 1)$ i conté la recta r d'equació $r: \frac{x}{2} = y-1 = 2-z$.
- Expressa de totes les formes possibles l'equació del pla que passa per l'origen de coordenades i conté la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.
- Expressa de totes les formes possibles l'equació del pla que passa per l'origen de coordenades i conté la recta $r: -x+2=3y=1-z$.
- Troba l'equació del pla que conté el punt $M(-1, 2, 1)$ i la recta $r: \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$.

19. - Calcula per a quin valor de m els punts $A(1, m, 2)$, $B(2, 3, m)$; $C(-1, -9, 8)$ estan alineats. En el cas que $m=0$ troba l'equació del pla que conté aquests punts. Pertany el punt $M(2, 1, -2)$ a l'esmentat pla?
20. - Troba el pla que conté a la recta $r: \begin{cases} y=1+x \\ z=-1-2x \end{cases}$ i és paral·lel a $s: \frac{x+1}{3} = 1-y = \frac{z}{3}$.
21. - Calcula m i n perquè la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$ estigui continguda en el pla π , l'equació del qual és $\pi: mx + 2y - 4z - 2n = 0$.
22. - Estudia la posició relativa de les rectes $r: \begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ i $s: x+2 = -2y = z-1$, i troba l'equació del pla que les conté.
23. - Troba la posició relativa, segons els valors de m i n , de les rectes: $r: \frac{x+m}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{n}$ i $s: \begin{cases} -x+y-z=-2 \\ 2x+4y-3z=5 \end{cases}$
24. - Estudia la posició relativa de les següents rectes i plans:
- a) $\begin{cases} r: \frac{x-1}{2} = -y+2 = \frac{z}{2} \\ \pi: x+4y+z+2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases} -x+3y-z+2=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} r: \begin{cases} -x+2y+z-4=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} r: \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-2} \\ \pi: x-4y-z-4=0 \end{cases}$
25. - Estudia la posició relativa dels següents plans:
- a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+4y-6z=-4 \\ \pi_2: x-2y+3z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1: 2x-y+z=1 \\ \pi_2: -6x+3y-3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \pi_1: x-y+3z=4 \\ \pi_2: -2x+3y-z=3 \\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \pi_1: 3x-y+z=-1 \\ \pi_2: x+y-5z=1 \\ \pi_3: 2x-3y-z=-1 \end{cases}$
26. - Estudia, segons els valors de λ , la posició relativa dels següents plans:
- a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2 \\ \pi_2: x-2y+\lambda z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1: -x+2y+z=2 \\ \pi_2: x+\lambda y-2z=1 \\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \pi_1: x-y+2z=4 \\ \pi_2: 2x+y+z=3 \\ \pi_3: 3x+\lambda y+6z=-8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \pi_1: x+\lambda y-z=2 \\ \pi_2: 2x-y+\lambda z=5 \\ \pi_3: x+10y-6z=1 \end{cases}$
27. - Estudia, segons els valors de λ , la posició relativa de les següents rectes i plans, calculant (quan sigui possible), el punt d'intersecció.
- a) $\begin{cases} r: x+1 = -y-2 = \frac{z}{2} \\ \pi: x-3y+\lambda z+2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x+y-2z+4=0 \\ x-y+z-4=0 \end{cases} \\ \pi: x+4y+\lambda z-2=0 \end{cases}$
28. - Donades les rectes $r: \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{-1}$ i $s: x+1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ es demana: a) Posició relativa d'ambdues rectes. b) Equació del pla que conté aquestes rectes.
29. - Donades les rectes r i s d'equacions $r: x=y=z$ i $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$. a) Estudia la seva posició relativa. b) Troba la recta que talla a r i s i és paral·lela a la recta $t: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, -1)$.
30. - Donats els plans $\pi_1: 3x+2y-z=6$ i $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, troba l'equació d'una recta r que passant pel punt $M(1, 0, -1)$ és paral·lela als dos plans.
31. - Donades les rectes r i s d'equacions $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{m}$, $s: x+1 = -y = z-2$, trobar: a) El valor de m perquè ambdues rectes es tallin. b) Per a aquest valor de m , el pla π que conté a r i s . c) L'equació de la recta que passa pel punt $M(1, 1, 1)$ i és perpendicular al pla π .
32. - Donada la recta $r: \begin{cases} x-y+3z+4=0 \\ -2x+y-z+2=0 \end{cases}$ i el pla $\pi: 4x-my+5z-n=0$ calcula:
- a) Valors de m i n perquè la recta i el pla siguin: i) paral·lels ii) perpendiculars iii) la recta estigui continguda en el pla.
- b) Per a $m=-1$ i $n=2$, el punt d'intersecció de la recta i el pla.
- c) Punt d'intersecció de la recta r , amb el pla OYZ .
33. - Donades les rectes $r: \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{-1}$ i $s: x+1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, calcula l'equació de la recta que passa pel punt $M(-1, 1, 1)$ i és perpendicular a ambdues rectes.

34. - Donades les rectes $r: \begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ i $s: \frac{x-2}{2} = y-1 = \frac{z+1}{2}$, es demana: Posició relativa d'ambdues rectes. Equació de la recta que passa per $M(-1, -1, 0)$ i és perpendicular a ambdues rectes.
35. - Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts $A(1, 0, -1)$, $B(1, 1, 0)$ i el tercer vèrtex és el punt de tall del pla OXZ amb la recta $r: x = 2y + 2 = z - 1$.
36. - Donats els punts $A(-1, 2, 0)$, $B(-3, 3, -1)$ i $C(1, a, 1)$, es demana: Calcula el valor de a perquè els tres punts estiguin alineats. Per a $a = -1$, calcula el perímetre del triangle que tenguim de vèrtexs els dits punts, així com la seva àrea i el valor de l'altura corresponent al vèrtex A . Troba l'equació d'una mediana.
37. - Els punts $P(0, 1, 0)$ i $Q(-1, 1, 1)$ són dos vèrtexs d'un triangle, i el tercer vèrtex S pertany a la recta $r: \{x = 4, z = 1\}$. A més, la recta que conté els punts P i S és perpendicular a la recta r . a) Determina les coordenades de S . b) Calcula l'àrea del triangle PQS .
38. - Els punts $A(0, -2, 0)$ i $B(-1, 0, 1)$ són dos vèrtexs d'un triangle isòsceles. a) Obté les coordenades de l'altre vèrtex C , sabent que pertany a la recta $r: \{y = -5, z = 0\}$. b) Troba el valor de l'angle desigual.

AUTOAVALUACIÓ

1. Una equació de la recta que passa pel punt $A(0, 1, 2)$ i té per vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$ és:
- a) $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t \cdot (0, 1, 2)$; b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$; c) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$; d) $2x - 3y + 1 = 0$
2. Una equació de la recta que passa pels punts $A(3, 1, 2)$ i $B(2, 4, 7)$ és:
- a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + t \cdot (2, 4, 7)$; b) $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$; c) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-7}{5}$; d) $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 + 9t \end{cases}$
3. El vector director de la recta $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ és:
- a) $(1, -1, 0)$; b) $(1, 0, 1)$; c) $(-1, 1, 1)$; d) $(1, 1, 1)$
4. Una equació del pla que passa pel punt $A(3, 1, 2)$ i té com a vectors directores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (0, 1, 0)$ és:
- a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(2, 4, 7) + \mu(0, 1, 0)$; b) $3x - z = 11$; c) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + 4\lambda + \mu \\ z = 2 + 7\lambda \end{cases}$
5. Una equació del pla que passa pel punt $A(3, 1, 2)$ i conté a la recta $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(0, 0, 1)$ és:
- a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(2, 1, 1) + \mu(0, 0, 1)$; b) $x = 3$; c) $y = 1$; d) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases}$
6. Una equació del pla que passa pel punt $A(3, 1, 2)$ i de vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ és:
- a) $(x, y, z) = (3, 1, 2) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1)$; b) $z = 2$; c) $y = 1$; d) $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \mu \end{cases}$
7. Una equació del pla que passa pels punts $A(3, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 7)$ és:
- a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1$; b) $x - z = 3$; c) $x + z = 7$; d) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 7\mu \end{cases}$
8. Els plans $x - z = 3$ i $x + z = 7$ són:
- a) coincidents; b) paral·lels; c) secants; d) ortogonals
9. Les rectes $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ i $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 + 10t \end{cases}$ són:
- a) coincidents; b) paral·lels; c) secants; d) s'encreuen

10. El pla $x - z = 3$ i la recta $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ són:
a) la recta està continguda en el pla; b) paral·lels;

c) secants;

d) ortogonals

APÈNDIX: PROBLEMES DE RECTES I PLANS EN LES P.A.A.U.

- (1) Els punts $P(1,1,0)$ i $Q(0,2,1)$ són dos vèrtexs contigus d'un rectangle. Un tercer vèrtex pertany a la recta $r: \{y=0, z=1\}$. a) Determina els vèrtexs d'un rectangle que verifiqui les condicions anteriors. b) Quina posició relativa hauria de tenir la recta r i la que conté al segment $\overline{PQ}$ perquè la solució fos única? Raona la resposta.
- (2) Els punts $P(1,-1,1)$ i $Q(3,-3,3)$ són dos vèrtexs oposats d'un quadrat que està contingut en un pla perpendicular al pla d'equació $x+y=0$. a) Determina els vèrtexs restants. b) Calcula l'equació de la recta que passa pels vèrtexs calculats. c) Calcula el perímetre del quadrat construït.
- (3) Es considera el paral·lelepípede els vèrtexs de del qual la cara inferior són els punts $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$ i $D(2,0,-1)$ amb A i C vèrtexs oposats. Sigui $A'(-3,1,0)$ el vèrtex adjacent a A en la cara superior. Calcula:
a) Les equacions dels plans que contenen a les cares inferior i superior. b) Els vèrtexs de la cara superior. c) El volum del paral·lelepípede.
- (4) Els punts $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$, $C(2,3,0)$ i D formen un paral·lelogram. Calcula: a) Les coordenades del vèrtex D oposat a B . b) L'àrea del paral·lelogram. c) L'equació de la recta que passa pel punt mitjà del segment $\overline{AC}$ i és perpendicular al pla que conté al paral·lelogram.
- (5) Sigui el pla $\pi: \{x=2+t, y=s, z=1-2s+2t\}$ i la recta $s: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z$. a) Troba la posició relativa dels mateixos. b) Troba l'equació de la recta r que passa pel punt $P(-1,0,2)$, és paral·lela al pla π i és perpendicular a la recta s .
- (6) Donats els punts $A(1,1,0)$ i $B(0,0,2)$ i la recta $r: \{x=1, y=1+\lambda, z=1+\lambda\}$, troba: a) Un punt $C \in r$ de manera que el triangle ABC sigui rectangle amb l'angle recte en C . b) El pla π que passa per A i B i és paral·lel a r .
- (7) Considera les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z$ i $s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z$. a) Dóna la seva posició relativa. b) Obté, si és possible, un pla paral·lel a s que contingui a r .
- (8) Donat el punt $A(1,1,1)$ i la recta $r: \begin{cases} x-y=-1 \\ y-z=1 \end{cases}$, calcula: a) Un vector $\vec{u}$ director de la recta r . b) El pla π que conté a la recta r i al punt A . c) La recta s que passa pel punt A , està continguda en el pla π anterior, i la seva direcció és perpendicular a la de la recta r .
- (9) Sigui el pla $\pi: ax+2y-4z=b$ i la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$. a) Amb $a=1$, estudia la posició relativa de la recta i el pla. b) Seguint amb $a=1$, calcula b perquè el punt $(3,1,-3)$ pertanyi a la recta i al pla. c) Determina els valors de a i b perquè la recta r estigui continguda en el pla π .
- (10) Un pla π determina sobre la part positiva dels eixos OX , OY i OZ tres segments de longituds 2, 3 i 4 metres respectivament. a) Troba l'equació del pla π . b) Troba l'equació de la recta r que conté als punts $A(2,0,3)$ i $B(0,6,a)$ i estudia la posició relativa de π i r segons els valors de a . c) Per al cas $a=2$, troba el punt on es tallen π i r .
- (11) Es consideren la recta r que passa pels punts $P(1,2,3)$ i $Q(1,-1,3)$, i el pla π que conté als punts $A(1,0,1)$, $B(2,-1,3)$ i $C(4,1,0)$. Calcula: a) Les equacions implícites de r i π . b) La posició relativa de r i π .
- (12) Es considera la recta $r: \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$. a) Determina el pla π que conté a r i passa per l'origen de coordenades. b) Troba l'equació de la recta perpendicular a π que passa pel punt $(1,0,1)$.
- (13) Es consideren les rectes $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = z+1$ i $s: \{x=1+t, y=m+3t, z=-1+3t\}$. a) Calcula m perquè les rectes es tallin en un punt. b) Per a aquest m troba el punt de tall.
- (14) Troba l'equació del pla que passa pel punt $P(1,1,2)$ i és paral·lel a les rectes: $r: \begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$ i $s: \begin{cases} 2x-2y=4 \\ y-z=-3 \end{cases}$.
- (15) Troba una equació del pla que passa per l'origen de coordenades, és paral·lel al pla determinat pel punt $P(1,-1,0)$ i la recta que passa pel punt $Q(2,2,2)$ i té vector director $\vec{v}=(1,2,3)$.
- (16) Considera els plans $\pi_1: 2x-y+z=0$ i $\pi_2: z-3=0$. a) Estudia la posició relativa de π_1 i π_2 . b) Troba, si és possible, una recta paral·lela a π_1 i π_2 que passi pel punt $(2,2,-1)$.

- (17) Troba els plans que passant per $A(0,2,0)$ i $B(0,0,2)$, tallen a l'eix OX en un punt C tal que l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C sigui 6.
- (18) Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts de tall del pla $x + y - 2z - 1 = 0$ amb els eixos de coordenades.
- (19) Donat el pla d'equació $\pi: x - 2y + 2z + 7 = 0$, els punts $A(0,1,2)$, $C(-1,m,2)$ i sigui B el peu de la perpendicular traçada des del punt A al pla. a) Determina el valor de m perquè el triangle ABC sigui rectangle en B i calcula la seva àrea. b) Troba els dos angles restants del dit triangle.
- (20) Donat el punt $A(1,-1,1)$ i els plans $\pi_1: 2x + y - z + 4 = 0$ i $\pi_2: x - 2y + z - 2 = 0$, troba: a) L'equació de la recta que passa pel punt A i és paral·lela als plans π_1 i π_2 . b) L'àrea del triangle els vèrtexs dels quals són els punts on el pla π_2 talla als eixos. c) El volum del tetraedre de vèrtex el punt A i de base el triangle de l'apartat anterior.
- (21) Troba el volum del tetraedre que té com a vèrtexs el punt $A(1,1,1)$ i els punts en què el pla $\pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$ talla als eixos de coordenades.
- (22) Donada la recta $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = z-1$ i el pla $\pi: x + ay - z + 2 = 0$, trobar el valor de a perquè: a) La recta sigui paral·lela al pla. b) La recta talli al pla. c) La recta sigui perpendicular al pla. d) El volum del tetraedre que té com a vèrtexs l'origen de coordenades i els punts on el pla talla als eixos valgui $\frac{1}{2} u^3$.
- (23) Donats els plans $\pi_1: 2x + z - 1 = 0$ i $\pi_2: x + z + 2 = 0$ i $\pi_3: x + 3y + 2z - 3 = 0$ es demana: a) Obté les equacions paramètriques de la recta determinada per π_1 i π_2 . b) Calcula el si de l'angle que la recta de l'apartat anterior forma amb el pla π_3 .
- (24) Donats el pla $\pi_1: 2x - y = 2$ i la recta $r: \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$ a) Estudia la posició relativa de r i π . b) Determina el pla que contingui a r i és perpendicular a π . c) Determina la recta que passa per $A(-2,1,0)$, talla a r , i és paral·lela a π .
- (25) Siguin les rectes: $r: x-2 = \frac{y-1}{k} = z+1$ i $s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. a) Troba k perquè r i s siguin coplanàries. b) Per al valor anterior de k , troba l'equació del pla que contingui ambdues rectes. c) Per al valor anterior de k , troba l'equació de la recta perpendicular comú a les rectes donades.
- (26) Troba una equació cartesiana del pla que contingui a la recta $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$ i és perpendicular al pla $\pi: 2x + y - z = 2$.
- (27) Per a cada valor del paràmetre real a , es consideren els tres plans següents:
 $\pi_1: x + y + az = 2$ $\pi_2: x + ay + z = -1$ $\pi_3: ax + y + z = 3$
 Es demana: a) Calcula els valors de a per als quals els tres plans anteriors contenen una recta comuna. b) Per als valors de a calculats, troba unes equacions cartesianes d'aquesta recta comuna.
- (28) Donats el pla $\pi: x + 3y - z = 1$ i la recta $s: \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$
 a) Troba l'equació general del pla π' que contingui a r i és perpendicular a π .
 b) Escribeu les equacions paramètriques de la recta intersecció dels plans π i π' .
- (29) Donats els punts $A(1,0,1)$ i $B(0,2,0)$, i el pla $\pi: x - 2y - z - 7 = 0$, determina el pla que és perpendicular al pla π i passa pels punts A i B .
- (30) Donades les rectes: $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$ i $s: \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$
 a) Troba el valor de k perquè les dues rectes estiguin contingudes en el mateix pla.
 b) Per al valor de k obtingut en l'apartat anterior, determina l'equació general del pla que les contingui.
- (31) Calcula les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $P(3,-1,0)$ i talla perpendicularment a la recta $s: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$.

CAPÍTOL 6: GEOMETRIA MÈTRICA EN L'ESPAI

ACTIVITATS PROPOSADES

1. ANGLES EN L'ESPAI

1. Realitza en el teu quadern els dotze dibuixos i comprova les relacions vectorials descrites en la taula anterior:

r i s coincidents	r i s paral·leles	r i s secants	r i s es creuen
r i π coincidents	r i π paral·lels	r i π secants	r i π perpendiculars
π i π' coincidents	π i π' paral·lels	π i π' secants	π i π' perpendiculars

2. PROJECCIONS ORTOGONALS

2. Troba la projecció ortogonal del punt $P(0, 3, 1)$ sobre la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$.
3. Troba la projecció ortogonal del punt $P(4, 0, 3)$ sobre el pla $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$.
4. Troba la projecció ortogonal de la recta r sobre el pla π , sent: $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$ i $\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$.

4. DISTÀNCIES A L'ESPAI

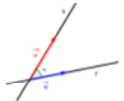
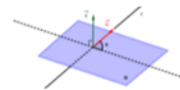
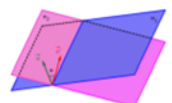
5. Calcula la distància del punt $A(0, 3, -4)$ al punt $B(-2, 0, 5)$.
6. Determina les coordenades dels punts que disten 4 del punt $C(2, -1, 1)$.
7. Determina les coordenades dels punts que disten R del punt $C(0, 0, 0)$.
8. Determina les coordenades dels punts que equidisten dels punts $A(0, 0, 0)$ i $B(0, 0, 2)$.
9. Calcula la distància del punt $P(0, -1, 0)$ a la recta $r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$.
10. Calcula la distància del punt $P(0, -3, -2)$ al pla $\pi: 3x - 2y - 4z + 1 = 0$.
11. Calcula la distància entre els plans: $\pi: x - y - 3z = 2$ i $\pi': -x + 2y - z = 1$.
12. Calcula la distància entre els plans: $\pi: x - y - 3z = 2$ i $\pi': x - y - 3z = 5$.
13. Calcula la distància entre els plans: $\pi: x - y - 3z = 2$ i $\pi': 2x - 2y - 6z = 4$.
14. Calcula la distància entre els plans: $\pi: -2x + 4y - 2z = 7$ i $\pi': -x + 2y - z = 1$.
15. Calcula la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{4}$ i el pla $\pi: 2x + y + 5 = 0$.
16. Troba la distància entre les rectes $r: \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.
17. Troba la distància entre les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ i $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.
18. Troba la distància entre les rectes $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ i $s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$.
19. Troba la distància entre les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ i $s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

RESUM

Donades les rectes r i s , i els plans π y π' definits pels següents vectors directores, normals i de posició:

	Recta r	Recta s	Pla π	Pla π'
Vector de posició	punt A	punt B	punt P	punt Q
Vector...	...director $\vec{u}$	...director $\vec{v}$	...normal $\vec{n}$	...normal $\vec{n}'$

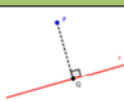
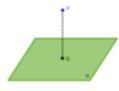
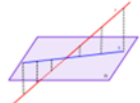
Angles a l'espai

Angle entre dues rectes	$\alpha(r, s) = \arccos \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$	
Angle entre recta i pla	$\alpha(r, \pi) = \arcsin \frac{ \vec{u} \cdot \vec{n} }{ \vec{u} \cdot \vec{n} }$	
Angle entre dos plans	$\alpha(\pi, \pi') = \arccos \frac{ \vec{n} \cdot \vec{n}' }{ \vec{n} \cdot \vec{n}' }$	

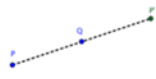
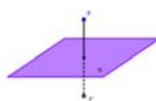
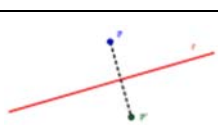
Paral·lelisme, perpendicularitat i posicions relatives

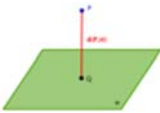
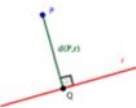
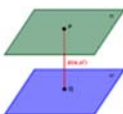
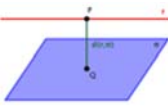
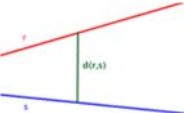
	Coïncidents	Paral·lels	Secants	Perpendiculars	Es creuen
r i s	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \vec{AB} = \vec{0}$	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \vec{AB} \neq \vec{0}$	$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0$
r i π	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y $\vec{n} \times \vec{AP} = \vec{0}$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ y $\vec{n} \times \vec{AP} \neq \vec{0}$	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	$\vec{u} \times \vec{n} = \vec{0}$	—
π i π'	$\vec{n} \times \vec{n}' = \vec{0}$ y $\vec{n} \times \vec{PQ} = \vec{0}$	$\vec{n} \times \vec{n}' = \vec{0}$ y $\vec{n} \times \vec{PQ} \neq \vec{0}$	$\vec{n} \times \vec{n}' \neq \vec{0}$	$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$	—

Projeccions ortogonals

D'un punt sobre una recta	$\text{Proy}(P, r) = Q, \vec{PQ} \perp r$	
D'un punto sobre un pla	$\text{Proy}(P, \pi) = Q, \vec{PQ} \perp \pi$	
D'una recta sobre un pla	$\text{Proy}(r, \pi) = s, \begin{cases} s \subset \pi \\ \pi_{rs} \perp \pi \end{cases}$	

Punts simètrics

D'un punt respecte d'un altre punt	$P' \Rightarrow \vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PQ}$	
D'un punt respecte d'un pla	$P' \Rightarrow \vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PQ}, Q = \text{Proy}(P, \pi)$	
D'un punt respecte d'un pla	$P' \Rightarrow \vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PQ}, Q = \text{Proy}(P, r)$	

Distàncies		
Entre dos punts	$d(A, B) = \overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$	
D'un punt a un pla	$d(P, \pi) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
D'un punt a una recta	$d(P, r) = \frac{ \vec{v} \times \overline{AP} }{ \vec{v} }$	
Entre dos plans	$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') \text{ si } \begin{cases} \pi \parallel \pi' \\ P \in \pi \end{cases}$	
D'una recta a un pla	$d(r, \pi) = d(P, \pi) \text{ si } \begin{cases} r \parallel \pi \\ P \in r \end{cases}$	
Entre dues rectes	$d(r, s) = \frac{ \overline{AB}, \vec{u}, \vec{v} }{ \vec{u} \times \vec{v} }$	

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. - Estudia la posició relativa de les rectes $r: \frac{x}{2} = y + 2 = \frac{z+2}{1}$ i $s: x = -y + 1 = -2z$ i calcula: a) El punt d'intersecció. b) L'equació del pla que les conté. c) L'angle que formen les rectes.
2. - Donats els plans $\pi_1: 3x + 2y - z = 6$ i $\pi_2: -2x + y + 3z - 6 = 0$, es demana: a) Estudiar la seva posició relativa. b) Trobar l'angle que formen eixos dos plans. c) Trobar l'equació d'una recta s que passant pel punt $N(-2, 1, 3)$ és perpendicular a π_2 .
3. - Troba la projecció vertical del punt $A(5, -2, -3)$ sobre el pla $\pi: 2x + y - 2z + 4 = 0$.
4. - Troba la projecció de la recta $r: -x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1$ sobre el pla $\pi: x + y + 2z - 2 = 0$, així com l'angle que formen la recta i el pla.
5. - Obtenir les coordenades del punt simètric de $A(0, -2, 2)$ respecte de la recta $r: 1 - x = y + 1 = z$.
6. - Obté les coordenades del punt simètric de $A(3, 1, 2)$ respecte del pla $\pi: x + y - z + 4 = 0$.
7. - Obté les coordenades del punt simètric de $A(0, 2, -1)$ respecte de: a) La recta $r: 1 + x = y + 2 = 1 - z$ b) El pla $\pi: x - y + z + 1 = 0$.
8. - a) Troba l'equació del pla que passa pel punt $A(1, -3, 3)$ i és perpendicular a la recta que passa pels punts $B(3, 0, -1)$ i $C(1, -1, 0)$. b) Obté les coordenades del punt simètric de C respecte del pla.
9. - Donat el punt $A(-1, 2, 0)$ i la recta $r: x + 1 = -\frac{y}{2} = 2 - z$, es demana trobar: a) L'equació de la recta s que passa pel punt A i talla perpendicularment a la recta r . b) El punt d'intersecció d'ambdós rectes r i s . c) Les coordenades del punt simètric de A respecte de la recta r .
10. - Calcula la distància del punt $M(-1, 1, 3)$: a) Al punt $N(1, -1, 2)$ b) Al pla $\pi: 2x - y - z - 3 = 0$ c) A la recta $r: x - 1 = 2y + 1 = 2 - z$.
11. - Donats els plans $\pi_1: 3x - 2y + z = 4$ i $\pi_2: \{x = 2 - \lambda + 3\mu, y = -\lambda + 4\mu, z = -1 + \lambda - \mu\}$, estudia la seva posició relativa i calcular la distància entre ells.
12. - Trobar la posició relativa de les rectes $\begin{cases} r: -2x = y - 3 = 2z + 2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ i calcular la distància entre elles.
13. - Donades els parells de rectes, a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ s: \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{-z + 1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z + 1 \\ s: \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{2} \end{cases}$. a) Estudia la posició relativa. b) Calcula la distància entre elles.
14. - Troba la projecció de la recta $r: -x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1$ sobre el pla $\pi: -x + 3y + 3z - 3 = 0$, així com la distància que hi ha entre la recta i el pla.
15. - Donada la recta $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 1 - 3x \end{cases}$, es demana: a) Troba l'equació de la recta s que passant pel punt $A(-1, 0, 1)$ és paral·lela a la recta r . b) Calcula la distància que hi ha entre elles. c) Troba l'equació del pla que passa pel punt $M(-2, 0, 1)$ i conté a la recta r .
16. - Troba l'equació d'un pla π que conté a la recta $r: \begin{cases} x - 4y + z + 3 = 0 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ i dista 2 unitats de l'origen de coordenades.
17. - Donats el pla i la recta: $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ i $r: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. a) El punt d'intersecció de la recta r amb el pla π . b) L'angle que formen la recta r i el pla π . c) L'equació d'un pla π' perpendicular al pla π i que contingui a la recta r .
18. - Donats els plans $\pi_1: x - y = 2$ i $\pi_2: x + y - 2z - 4 = 0$, es demana: a) Equació d'una recta que passi pel punt $A(0, 1, 1)$ i sigui paral·lela als plans π_1 i π_2 . b) Valor de m i n sabent que el punt $C(m, 0, n) \in \pi_2$ i dista $\sqrt{2}$ unitats del pla π_1 .
19. - Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$ i el tercer vèrtex és el punt de tall del pla OYZ amb

la recta $r: \frac{x+2}{2} = y-2 = \frac{z+2}{-1}$.

20. - Troba la projecció de la recta $r: \frac{x+2}{2} = y-2 = \frac{z+2}{-1}$ sobre el pla determinat per l'origen de coordenades i els punts $A(-1,0,1)$ i $B(0,1,1)$.

AUTOAVALUACIÓ

$$\left. \begin{array}{l} x = 4-t \\ r: y = -3+t \\ z = 2 \end{array} \right\} ; s: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{-1} \text{ és:}$$

- L'angle format per les rectes $r: \frac{x+2}{2} = y-2 = \frac{z+2}{-1}$ i $s: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{-1}$ és:

a) $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{50}}$; b) $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}$; c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{28}}$; d) $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}}$
- L'angle format pels plans $\pi: 3x - y + 2z - 1 = 0$ i $\pi': x + 2y - z - 5 = 0$ és:

a) $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$; b) $\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{4}}$; c) $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}$; d) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{11}}$
- La projecció ortogonal del punt $P(0, 0, -1)$ sobre la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ és:

a) $(\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7})$; b) $(\frac{-2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7})$; c) $(\frac{11}{14}, \frac{9}{14}, \frac{13}{14})$; d) Cap dels anteriors
- La projecció ortogonal del punt $P(0, 0, -1)$ sobre el pla $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ és:

a) $(\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-4}{7})$; b) $(1, -2, -2)$; c) $(\frac{4}{14}, \frac{-8}{14}, \frac{20}{14})$; d) Cap dels anteriors
- El simètric del punt $P(1, -1, 1)$ respecte del punt $Q(0, -1, 2)$ és:

a) $(1, -3, 5)$; b) $(-1, -1, 3)$; c) $(-3, -3, 4)$; d) Cap dels anteriors
- El simètric del punt $P(1, -1, 1)$ respecte de la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ és:

a) $(\frac{29}{7}, \frac{19}{7}, \frac{17}{7})$; b) $(\frac{15}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7})$; c) $(\frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7})$; d) Cap dels anteriors
- La distància del punt $A(0, 1, 0)$ al punt $B(-1, 0, 2)$ és:

a) 6; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2}$; d) Cap dels anteriors
- La distància del punt $A(0, 1, 0)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ és:

a) $\frac{\sqrt{98}}{14}$; b) $\frac{\sqrt{89}}{14}$; c) $\frac{\sqrt{37}}{14}$; d) Cap dels anteriors
- La distància del punt $A(0, 1, 0)$ al pla $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ és:

a) $\frac{1}{14}$; b) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; d) Cap dels anteriors
- La distància entre els plans $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ i $\pi': 5x - y + 2z - 3 = 0$ és:

a) 0; b) $\frac{2}{\sqrt{30}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{14}}$; d) Cap dels anteriors

APÈNDIX: PROBLEMES DE GEOMETRIA MÈTRICA EN LES P.A.A.U.

- (1) Considera les rectes $r_1: \begin{cases} x-z=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ i $r_2: \begin{cases} x+y=1 \\ 2y-z=-1 \end{cases}$. a) Estudia la posició relativa de r_1 i r_2 . b) Troba, si és possible, un pla paral·lel a r_1 que continga a r_2 . c) Troba la distància entre r_1 i r_2 .
- (2) Considera el punt $P(-1,0,1)$ i el pla $\pi: x-y+z+2=0$. Calcula:
a) Les equacions d'una recta que passi pel punt P i sigui perpendicular al pla π .
b) La distància d del punt P al pla π .
- (3) Considera els punts $A(1,2,-3)$ i $O(0,0,0)$. a) Dóna l'equació d'un pla π_1 que passi per A i O , i sigui perpendicular a $\pi_2: 3x-5y+2z=11$. b) Troba la distància del punt mitjà de A i O a π_2 .
- (4) Considera el pla $\pi: x-y+z=-1$ i el punt $P(1,0,1)$.
a) Obté el punt P' simètric de P respecte de π .
b) Troba el punt de tall del pla π amb la recta que passa per P i P' .
- (5) Sigui s la recta que passa pels punts $A(1,1,0)$ i $B(0,1,0)$. Considera la recta $r: \begin{cases} y=0 \\ z=2 \end{cases}$.
a) Escribeu unes equacions cartesianes de la recta s .
b) Dóna la posició relativa de les rectes r i s .
c) Obté la distància entre r i s .
- (6) Considera un moviment en l'espai tal que a cada punt de coordenades (a,b,c) el mou al punt de coordenades $(a+b, a+b+c, a+b)$.
a) Busca el conjunt de punts que es mouen a l'origen de coordenades.
b) Dóna una equació del pla π que determinen els punts de l'apartat (a) i el punt $(1,1,1)$.
c) Busca la distància de l'origen de coordenades al pla π .
- (7) Sigui el punt $P(-1,2,0)$ i el pla $\pi: 2x-3y+z=8$. Calcula:
a) Les equacions d'una recta que passi pel punt P i sigui perpendicular al pla π .
b) La distància d del punt P al pla π .
c) L'equació d'un altre pla, paral·lel a π i diferent d'ell, que donares de P la mateixa distància d .
- (8) Es consideren els punts en l'espai $A(1,-1,1)$ i $B(2,2,2)$.
a) Troba el punt mitjà de A i B .
b) Dóna l'equació del pla respecte al qual A i B són punts simètrics.
- (9) Considera el pla $\pi: x+y-z=0$ i la recta $r: \begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.
a) Troba la posició relativa de la recta i el pla.
b) Troba una recta perpendicular a ambdós.
c) Busca la mínima distància entre la recta i el pla donats.
- (10) a) Determina el valor de k perquè els punts $A(0,2,1)$, $B(1,-2,0)$, $C(2,0,3)$ i $D(1,1,k)$ es troben en el mateix pla.
b) Troba la distància de l'origen de coordenades al pla determinat pels punts A , B i C .
- (11) Donat el punt $O(0,0,0)$, busca un punt O' de l'espai tal que la recta que passa per O i O' sigui perpendicular al pla π d'equació $x+y+z=3$ i les distàncies de O a π i de O' a π coincideixin.
- (12) Es consideren la recta i pla següents:
$$r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-5-5t \\ z=-3+2t \end{cases} \quad \pi_1: x+2y+3z-1=0 \quad \pi_2: x+2y+4z-2=0$$

a) Determina la posició relativa de la recta respecte a cada un dels plans.
b) Determina la posició relativa dels dos plans.
c) Calcula la distància de r al pla π_2 .
- (13) a) Obté la posició relativa dels plans π_1 , que passa pels punts $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(0,0,-1)$, i π_2 , que passa per

$$A'(3,0,0), B'(0,6,0) \text{ i } C'(0,0,-3).$$

b) Busca la mínima distància entre els plans anteriors.

(14) Siguin el punt $P(-1,2,0)$ i el pla $\pi: x + y - z + 2 = 0$. Calcula:

- a) L'equació d'una recta que passi pel punt P i talli al pla π .
b) La distància del punt P al pla π .

(15) Es consideren el pla π_1 que passa pels punts $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(0,0,-1)$, i el pla π_2 que passa pels punts $P(3,0,0)$, $Q(0,6,0)$ i $R(0,0,-3)$. Calcula: a) Les equacions generals o implícites de π_1 i π_2 . b) La posició relativa de π_1 i π_2 . c) La distància entre π_1 i π_2 .

(16) Considera els punts $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ i $C(0,0,-1)$. a) Dóna les equacions de la recta r que passa per B i C .
b) Calcula el pla π que passa per A i és perpendicular a r . c) Troba el punt de tall entre r i π . c) Obté el punt simètric de A respecte de r .

(17) Siguin el punt $P(-1,2,0)$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$. Calcula: a) L'equació del pla π perpendicular a r passant per P . b) El punt d'intersecció entre r i π . c) La distància del punt P a la recta r .

(18) Donat el punt $A(0,1,2)$ i el pla $\pi: x - y + z - 4 = 0$. a) Calcula la recta r perpendicular al pla π que passa pel punt A . b) Troba el punt d'intersecció entre r i π . c) Troba el punt simètric de A respecte de π .

(19) Es consideren els punts $A(2,-1,1)$ i $B(-2,3,1)$. a) Troba els punts C i D que dividixen al segment $\overline{AB}$ en tres parts de la mateixa longitud. b) Troba el pla respecte al qual els punts A i B són simètrics.

(20) Es denota per r la recta $x - 6 = y - 7 = \frac{z - 4}{-2}$ i per P el punt de coordenades $(1,0,1)$. a) Troba l'equació del pla que passa per P i és perpendicular a r . b) Troba el punt de r més pròxim a P i troba la distància de P a r .

(21) Es denota per rs la recta $x - 1 = 1 - y = z - \frac{1}{2}$ i sigui s la recta que passa per $A(1,0,1)$ i $B(1,2,0)$.
a) Estudia si les rectes r i s es tallen i, si es tallen, trobe el punt d'intersecció.
b) Troba l'equació del pla que contingui a r i és paral·lel a s .
c) Troba el punt de r que equidista de A i B .

(22) Siguin les rectes $r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - kz = 2 \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$. a) Estudia si per a algun valor de k les rectes són paral·leles.
b) Estudia si per a algun valor de k les rectes són perpendiculars. c) Troba la distància del punt $A(1,1,1)$ a la recta s .

(23) Donats els punts $A(2,2,0)$, $B(0,0,2)$ i $C(0,1,2)$.
a) Troba el pla π que contingui als tres punts.

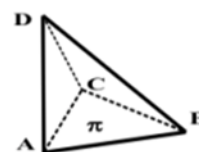
b) Calcula un punt P que estigui a distància de $2\sqrt{2}$ unitats del pla π i del punt mitjà del segment $\overline{AB}$.

c) Considerant $D(2,1,1)$ calcula el volum del tetraedre limitat pels punts A , B , C i D .

(24) Siguin el tetraedre de la figura format per $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ i $D(\alpha,3,1)$. Calcula:

- a) L'àrea del triangle limitat pels punts A , B i C .
b) L'equació del pla π que passa pels punts A , B i C .
c) El valor de α per tal que el vector $\overrightarrow{AD}$ sigui perpendicular al pla π .
d) Per a $\alpha = 5$, el punt D' simètric de D respecte al pla π .

(25) Siguin el punt $A(1,0,0)$ i el pla $\pi: 2x + y - z = 1$. Troba:



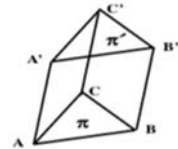
- a) L'equació de la recta que passa per A i és perpendicular a π .
 b) L'equació del pla π' que passa per A i no talla a π .
 c) La distància entre els dos plans.

(26) Siguin els punts $A(-1,1,0)$ i $B(0,1,1)$. Determina:

- a) Les equacions paramètriques de la recta r que unia els punts.
 b) L'equació del pla π que passa per A i és perpendicular a la recta r .
 c) La distància del punt B al pla π .

(27) Sigui el prisma triangular (triangles iguals i paral·lels) de la figura, amb $A(1,-1,0)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-1)$ i $A'(1,-1,\alpha)$. Calcula:

- a) L'equació del pla π que passa pels punts A , B i C .
 b) El valor de α per tal que el pla π' , que conté els punts A' , B' i C' , disti una unitat del pla π .
 c) Per $\alpha = 1$, el pla π' i el volum del prisma.



(28) Els punts $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$, $C(2,3,0)$ i D formen un paral·lelogram. Calcula:

- a) Les coordenades del vèrtex D oposat a B .
 b) L'àrea del paral·lelogram.
 c) L'equació de la recta que passa pel punt mitjà del segment $\overline{AC}$ i és perpendicular al pla que conté al paral·lelogram.

(29) Es considera el paral·lelepípede els vèrtexs de del qual la cara inferior són els punts $A(-1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(3,0,0)$ i $D(2,0,-1)$ amb A i C vèrtexs oposats. Sigui $A'(-3,1,0)$ el vèrtex adjacent a A en la cara superior. Calcula: a) Les equacions dels plans que contenen a les cares inferior i superior. b) Els vèrtexs de la cara superior. c) El volum del paral·lelepípede.

(30) Donada la recta r d'equació $x+1 = y-2 = \frac{z-3}{4}$ i el punt $P(1,2,1)$. Calcula:
 a) L'equació de la recta que passa per P , és perpendicular a r i es recolza en r .
 b) Les coordenades del punt Q simètric de P respecte a r .

(31) Sigui el punt $A(1,2,0)$ pertanyent a un pla π . Calcula: a) L'equació del pla π sabent que $P(0,0,-2)$ pertany a la recta perpendicular a π que passa pel punt A . b) L'equació d'un pla la distància de la qual a π sigui de 3 unitats. c) Un punt B pertanyent a π i al pla $\pi': 2x - y = 0$ que està a distància $\sqrt{45}$ de A .

(32) Sigui la recta $r: \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 6x - 3y + 10z = 6 \end{cases}$.

- a) Calcula les coordenades dels punts P i Q que pertanyen a la recta i disten 5 unitats de l'origen de coordenades.
 b) Sigui M el punt mitjà del segment d'extremes P i Q . Calcula les seves coordenades.
 c) Justifica per què de tots els punts de la recta r , M és el més pròxim a l'origen de coordenades.

(33) Els punts $P(1,1,0)$ i $Q(0,2,1)$ són dos vèrtexs contigus d'un rectangle. Un tercer vèrtex pertany a la recta $r: \{y=0, z=1\}$.

- a) Determina els vèrtexs d'un rectangle que verifiqui les condicions anteriors.
 b) Quina posició relativa hauria de tenir la recta r i la que conté al segment $\overline{PQ}$ perquè la solució fós única? Raona la resposta.

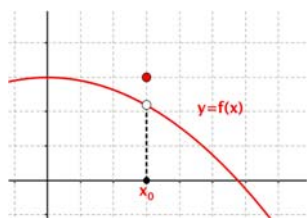
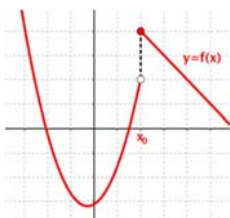
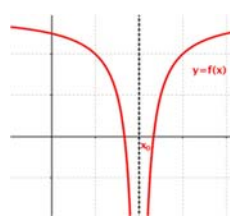
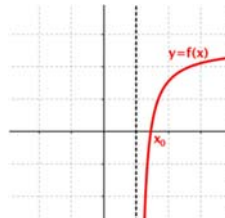
(34) Donat el tetraedre amb un vèrtex O sobre l'origen de coordenades i els altres tres A , B i C sobre els semieixos positius OX , OY i OZ respectivament, es demana trobar:

- a) Les coordenades de A , B i C sabent que el volum del tetraedre és $\frac{8}{3} u^3$, que les arestes OA i OB tenen la mateixa longitud i que l'aresta OC té doble longitud que OA .
 b) L'equació de l'altura del tetraedre corresponent a la cara ABC .
 c) La distància entre les rectes AC i OB .
 d) L'angle que formen les arestes AC i AB .

- (35) Donats els punts $A(-3,1,2)$, $B(1,-1,0)$ i $C(-1,0,0)$, es demana:
- Comprovar si estan alineats, i, en cas contrari, calcular el perímetre i l'àrea del triangle.
 - Trobar el valor de l'altura corresponent al vèrtex A .
 - Calcular el valor de l'angle corresponent al vèrtex B .
 - Trobar l'equació d'una de les tres mitjanes.
- (36) Donat un triangle de vèrtexs $A(2,1,1)$, $B(0,5,3)$ i $C(4,3,1)$, troba: a) El perímetre. b) L'àrea. c) El valor de l'altura corresponent al vèrtex A . d) L'equació d'una mediana. e) L'equació d'una mediatriu. f) L'equació d'una altura.
- (37) Sabent que l'equació d'un pla és $\pi: x + 2y - 2z + 4 = 0$:
- Troba l'equació d'un pla π' paral·lel al pla π i que donares una unitat del punt $Q(1,0,-1)$.
 - Troba la distància entre ambdós plans π i π' .
 - Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts on el pla π talla als eixos de coordenades.
- (38) Donat el pla $\pi: x + y + z = 1$, la recta $r: (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda \cdot (0, 1, 1)$, i el punt $P(1, 1, 0)$:
- Troba l'equació de la recta s que sigui perpendicular a r i passi per P .
 - Troba el punt P' , simètric de P respecte de r .
 - Troba el punt P'' , simètric de P respecte de π .
- (39) Es considera el tetraedre els vèrtexs del qual són $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ i $D(0,1,3)$.
- Troba l'àrea del triangle ABC i el volum del tetraedre $ABCD$.
 - Calcula la distància de D al pla determinat pels punts A , B i C .
 - Troba la distància entre les rectes AC i BD .
- (40) Siguin els punts $A(1,0,2)$ i $B(1,1,-4)$.
- Troba les coordenades dels punts P i Q que dividixen al segment AB en tres parts iguals.
 - Si P és el punt de l'apartat anterior més pròxim al punt A , determina l'equació del pla π que conté a P i és perpendicular a la recta AB .
- c) Determina la posició relativa del pla π i la recta $r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$
- (41) Troba els punts de la recta: $r: \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ la distància al pla dels quals $\pi: 3x + 4y = 4$ és igual a $\frac{1}{3}$ u.
- (42) Donats els punts $P(1,1,3)$ i $Q(0,1,0)$, es demana: a) Troba tots els punts R tals que la distància entre P i R sigui igual a la distància entre Q i R . Descriu aquesta conjunta de punts. b) Troba tots els punts S continguts en la recta que passa per P i Q que verifiquen: $\text{dist}(P, S) = 2 \cdot \text{dist}(Q, S)$ on "dist" significa distància.
- (43) Donats el pla $\pi: 3x + 2y - z + 10 = 0$ i el punt $P(1,2,3)$, es demana: a) Trobar l'equació de la recta r perpendicular al pla π que passa pel punt P . b) Trobar el punt Q intersecció de π amb r . c) Trobar el punt R intersecció de π amb l'eix OY . d) Trobar l'àrea del triangle PQR .

CAPÍTOL 7: LÍMITS I CONTINUÏTAT

RESUM

Entorn d'un punt	Entorn de centre a i radi δ , $E(a, \delta)$, és l'interval obert $(a - \delta, a + \delta)$: $E(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; x - a < \delta\}$		
Límit d'una funció en un punt	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E(L, \varepsilon), \exists E(x_0, \delta); \forall x \in E(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$ o també: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$		
Límit lateral d'una funció en un punt	Límit per l'esquerra: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{ si } 0 < x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$ Límit per la dreta: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \text{ si } 0 < x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$		
Operacions amb límits	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f \pm g](x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \pm M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f \cdot g](x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f](x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot L \quad \forall k \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f}{g} \right](x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = L^M$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$	
Indeterminacions	Un límit indeterminat és aquell que implica fer operacions el resultat de les quals no es pot precisar. $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{+\infty}, \infty^0 \text{ y } 0^0$		
Continuïtat	Una funció $y = f(x)$ és continua en un punt $x = x_0$ si: 1. Existeix $f(x_0)$, és a dir, $x_0 \in \text{Dom} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 2. Existeix $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, és a dir, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 3. Els dos valors anteriors coincideixen.		
Tipus de discontinuïtat			
DISCONTINUÏTAT EVITABLE	DISCONTINUÏTAT NO EVITABLE		
	1ª ESPECIE		2ª ESPECIE
	Salt finit	Salt infinit	
			

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} 2 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-5} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{10}} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{10}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{13}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{13}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} x^6 & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6}
 \end{array}$$

2. – Troba els límits següents:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7})^x & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{x}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{\frac{1}{x}} \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} & \text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} \\
 \text{r) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x & \text{s) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x & \text{t) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{u) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} & \text{w) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2}
 \end{array}$$

3. – Troba els límits següents:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2}
 \end{array}$$

4. – Determina el límit d'aquestes funcions:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x + x^2 - x^3) \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x - 4}{2}\right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} \\
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)(2x - 3) & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3 + 1} & \text{l) } \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8) & & & \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{3x^3 - 7x + 1} & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35} & \text{o) } \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4} & & &
 \end{array}$$

5. – Determina els límits d'aquestes funcions:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3}
 \end{array}$$

6. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{x^3}\right] & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-2}}{5}\right] & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^5}{3}\right] & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{x^5} \right] & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \right]^x \\ & & & \text{k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} \quad \text{l)} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right]$$

7. – Resol els límits següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} \right) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{1 - 2x} : \frac{5x^3}{x^2 + 12} \right) & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right) \end{array}$$

8. – Troba els següents límits de funcions:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2} \right) \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)^x & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 1)^2 + 4x] \end{array}$$

9. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 - 7x + 2] & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x^2 - 5x + 2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} [4x^4 - 7x + 5] \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} [-3x^5 + 2x - 4] & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 + 3x - 2] & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{-2x^2 + 4x - 3} \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{2x} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}}{\sqrt[3]{4x^2 + 5}} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5} \\ \text{j)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{7x^4 - 2x^2} & \text{k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 3} & \text{l)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1 - x^3} \end{array}$$

10. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + 4x}) \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x}) \end{array}$$

11. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x-1} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{6x+2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x} \right)^{3x+2} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x+1} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} \end{array}$$

12. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} \right] & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{3}{x + 2} \right] & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} \right] \end{array}$$

13. – Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4^x) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2-1} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{x^2-3x} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3^{-x}) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)] \end{array}$$

14. – Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} \sqrt{x^2+1} \right]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{9x^2+2x-3} - 3x \right]$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) \right]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+2}{x+1} - \frac{x^2+1}{x} \right]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} \right]^{\frac{x^2}{2}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4-3x}{5-3x} \right]^{x-3}$$

15. - Resol els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{3x+3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$$

16. - Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$$

17. - Calcula aquests límits:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-3}{(x-1)^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{(x-1)^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$$

18. - Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3}{x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3}{x+2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$$

19. - Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{x^3+1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-3x^2}{x^2+x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$$

20. - Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3+27}{x^2-9} \right]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1} \right]$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2-4}{x+1} \cdot \frac{x^2+4}{x^2-2x} \right]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$$

21. - Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{|x-3|}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} [x-1]^{\frac{3}{x-2}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2+4}{x+4} \right]^{\frac{x}{x-1}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-2}{x^2-1} \right]$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cdot x^2 + 2x}{x^3 \cdot 3} \right]$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x-2}{5x+3} \right]^{3x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2+2} \right) \right]$$

22. - Calcula els límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2 + \ln x}{3 + \ln x^2} \right)^{\frac{-3}{x-1}}$$

b)

23. – Calcula els límits laterals i el límit, quan existeixi, de les següents funcions en els punts que s'indiquen:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \leq x \end{cases} \text{ en } x=3$$

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \text{ en } x=1$$

b)

24. – Troba el valor dels límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 2}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 4x}{4^{\frac{1}{x}} + 3x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}} + 3x^2 + 1}{5^{\frac{3}{x}} - 3 + 2x}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{4}{x}} - 2x^2 + 3}{3^{\frac{1}{x}} - 3 - 2x}$$

d)

25. – Calcula el valor dels límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{2 - x + 1}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

26. – Donada la funció alguna discontinuïtat?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

calcula: a)

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

d)

Té

27. – Estudia la continuïtat de les funcions següents:

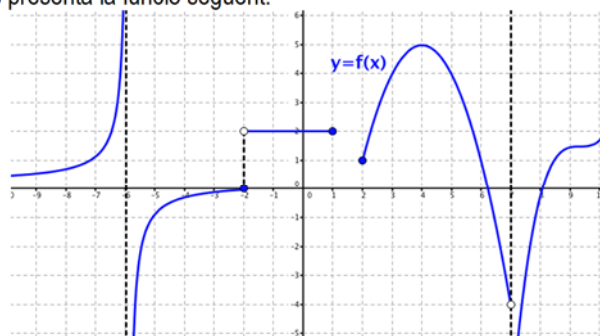
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

b)

28. – Classifica les discontinuïtats que presenta la funció següent:



29. – Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a)

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-5}{\sqrt{x+1}} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

b)

30. – Estudia la continuïtat de les funcions:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$$

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = |x-3|$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ en l'interval } (2,5).$$

31. – Estudia la continuïtat de la funció

32. – Estudia la continuïtat de les funcions:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-3 & \text{si } x > -1 \end{cases} \\
 \text{c)} & f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-1}{1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases} \\
 \text{e)} & f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \\
 \text{g)} & f(x) = |x^2 - 6x + 5| \\
 \text{b)} & f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < -1 \\ x^2+4x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x+11 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \text{d)} & f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \text{f)} & f(x) = \begin{cases} -5 - \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
 \text{h)} & f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x \leq 5 \\ \ln e^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}
 \end{array}$$

33. – Determina el valor de a perquè aquesta funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

34. – Determina el valor del paràmetre b perquè la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

sigui contínua en tot el seu domini.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

35. – Troba el valor de k perquè la funció

sigui contínua en $x = -2$.

36. – Calcula m, n, p i q perquè la següent funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x < -8 \\ -2m+3 & \text{si } -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ px & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

37. – Calcula k , en cada cas, de manera que les següents funcions siguin contínues en tot $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \\
 \text{b)} & f(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

38. – L'espai recorregut per un mòbil en funció del temps ve donat per la funció següent:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 3t+a & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si } 5 < t \end{cases}$$

Determina els valors de a i b , perquè la funció sigui contínua en $t = 2$ i $t = 5$.

39. – Un comerciant vol vendre un determinat producte, i per a això cobra 6 € per cada unitat. No obstant això, si se li encarreguen més de 10 unitats, disminueix el preu per unitat, i per cada x unitats cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{600+ax^2} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Troba el valor de a de manera que el preu variï de forma contínua al variar el nombre d'unitats que es compren.

b) A quant tendeix el preu d'una unitat quan es compren "moltíssimes" unitats?

40. – Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3a+3^x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2+2^x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{b-2^{-x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Troba a i b perquè la funció sigui contínua. b) Calcula: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x)$. c) Si $a = 0$ i $b = \frac{1}{8}$, estudia les discontinuïtats.

41. – La funció $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ pren valors de signe contrari en els extrems de l'interval $[-1,2]$, no obstant això, no té cap arrel en el dit interval. Contradiu això el teorema de Bolzano?

42. – Comprova que la funció $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ té almenys una arrel en l'interval $[1,2]$.

43. – Demuestra que la funció $f(x) = -2x^3 + 3x - 8$ talla a l'eix d'abscisses en l'interval $[-2,2]$. Es podria dir el mateix de la funció

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1} \quad ?$$

44. – Si $f(x)$ és contínua en l'interval $[-3,2]$, on $f(-3) < 0$ i $f(2) = 5$. Es pot assegurar que la funció $g(x) = f(x) - 2$ té almenys un zero en l'interval $[-3,2]$?

45. – Dibuixa la gràfica d'una funció que s'ajusti a les condicions següents:

- Contínua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $f(1) = 0$
- Discontinuitat de salt finit en $x = 5$ i de salt infinit en $x = 7$
- $f(-2) = 0$

46. – Dibuixa la gràfica d'una funció $f(x)$ tal que:

- $\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$
- $f(-4) = 2$, $f(0) = 1$, $f(5) = 0$, $f(7) = -5$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -3 & \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4 & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -2 & \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

AUTOAVALUACIÓ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 7x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Els límits de la funció a l'esquerra de 0 i a la dreta de 0 valen:
a) 0, 0 b) 3, 7 c) 2, 3 d) No hi ha perquè $f(x)$ no està definida en 0

2) El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3^x - 3^2}{3^{x+1}} \right)$ val:
a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$

3) El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x - 5}{x - x^2 + 2} \right)$ val:
a) 0 b) 3 c) ∞ d) $-5/2$

4) El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})$ val:

- a) 0 b) 3 c) ∞ d) 7
- 5) El límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x}$ val: a) 0 b) 4 c) ∞ d) $-1/4$
- 6) Perquè la funció $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + a & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sigui contínua a ha de valdre: a) 3 b) -1 c) 17 d) $1/2$
- 7) Indica quina de les següents funcions té una asymptota vertical en $x = 2$.
a) $f(x) = \log(x - 2)$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ d) $f(x) = \sin(\cos(x - 2))$
- 8) Indica quina de les següents funcions té una asymptota horitzontal $y = 2$.
a) $f(x) = \log(x - 2)$ b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 2}$ c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ d) $f(x) = \tan(\cos(x - 2))$
- 9) Indica quin dels següents límits NO val 0.
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{27} + 5}{e^x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 2}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 3}}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^x - 5}$
- 10) Els punts de discontinuïtat de la funció $g(x) = |x^2 - 9|$ són:
a) 0 i 3 b) 3 i ∞ c) Cap d) 0, 3 i 9

APÈNDIX: PROBLEMES DE LÍMITS EN LES P.A.A.U.

1.- Calcula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

2.- Donat $a \in \mathbb{R}$, es considera la funció $f(x)$ Determina els valors de a per als que la funció és contínua.

$$F(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.- Donada la funció $F(x)$, respon raonadament a les següents qüestions.

a) ¿Per a quins valors de a la funció $F(x)$ és contínua en $x = 1$?

b) Si $F(x)$ és contínua quan $x \rightarrow x_0$ llavors no existeix $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$, és cert?

4.- S'ha investigat el temps (T , en minuts) que es tarda a realitzar una certa prova d'atletisme en funció del temps d'entrenament dels

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5) \cdot (x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

esportistes (x , en dies), obtenint-se que:

a) Justifica que la funció T és contínua en tot el seu domini.

b) Per molt que s'entreni un esportista, serà capaç de fer la prova en menys d'1 minut? i en menys de 2?

5.- El rendiment d'un estudiant en un examen d'una hora de duració ve donat per la següent expressió ($f(x)$ representa el rendiment, en tant

$$f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,6 \\ 180(1-x) & \text{si } 0,6 < x \leq 1 \end{cases}$$

per cent, en l'instant x , mesurat en hores):

a) És el rendiment una funció contínua del temps?

b) En quins moments augmenta i en quins moments disminueix el rendiment? Quan obté el major rendiment i quin és aquest rendiment?

6.- L'energia que produeix una placa solar ve descrita per la següent corba en funció del temps transcorregut des que es fa de dia ($f(x)$ és

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{1024}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

l'energia produïda a les x hores d'haver sortit el sol):

a) Estudia la continuïtat de la funció f en el seu domini.

b) En quin moment del dia la placa produeix més energia? Quant produeix en aquest moment?

7.- El temps que un empleat tarda a realitzar una tasca varia durant els quatre primers mesos de contracte segons la seva experiència. Així, la funció que relaciona el temps empleat a realitzar la tasca amb l'experiència de l'operari és ($f(x)$ representa el temps, en hores, que

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x-4)^2 + 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

tarda a realitzar la tasca un empleat que porta contractat un temps x , mesurat en mesos):

Representa gràficament la funció f . És el temps necessari per a realitzar la tasca una funció contínua del temps d'experiència? b) En quin moment el temps necessari per a realitzar la tasca és mínim? Quant temps li porta finalitzar la tasca en aquest instant? Aconseguir l'empleat finalitzar la tasca en menys de 3 hores en algun moment durant els primers quatre mesos de contracte?

8.- Un proveïdor cobra l'oli segons el volum de la comanda. Així, la funció que relaciona l'import de la comanda amb el volum del mateix és

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 < x < 30 \\ 2x + 30 & \text{si } 30 \leq x \end{cases}$$

$f(x)$ (en euros), d'una comanda de x litres d'oli):

a) És l'import una funció contínua del volum de la comanda? b) Estudia els intervals de creixement i decreixement de la funció i representa-la gràficament.

$$f(x) = \begin{cases} 110 + 12x + 6x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 350 - \frac{450}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

9.- La velocitat d'un cotxe de carreres ve donada per l'expressió següent:

on x representa el

temps, en segons, i $f(x)$ representa la velocitat del cotxe, en km/h. a) És la velocitat una funció contínua del temps? b) Disminueix la velocitat del cotxe en algun instant?, es podrien aconseguir els 350 km/h de velocitat amb aquest cotxe?

CAPÍTOL 8: DERIVADES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. CONCEPTE DE DERIVADA

1. Fent ús de la definició de derivada comprova que la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = a$ és igual a $f'(x) = \left(\frac{-1}{a^2}\right) \cos \frac{1}{a}$ si a és diferent de 0.
2. Utilitzant la definició de derivada comprova que les derivades de les següents funcions en els punts indicats és el valor donat:

$$f(x) = x^3 \text{ en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12.$$

$$g(x) = x + 2 \text{ en } x = a \Rightarrow g'(a) = 1.$$

$$h(x) = x^2 \cos x \text{ en } x = 0 \Rightarrow h'(0) = 0.$$

$$r(x) = \frac{3x+4}{2x-1} \text{ en } x = 1 \Rightarrow r'(1) = -11.$$

1. Estudia la derivabilitat en $x = 0$ de $f(x) = [x^3]$ (Selectivitat Juny 1995)

2. Donada la funció $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$, on $\ln$ significa logaritme neperià, definida per a $x > 1$ troba un punt $(a, f(a))$ tal que la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt sigui paral·lela a l'eix OX .
Selectivitat. Setembre 05. Opció B
3. Donada la funció $f(x) = 6x^2 - x^3$. Troba un valor $a > 0$ tal que la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$ sigui paral·lela a la recta $y = -15x$.
Selectivitat. Curs 06/07. Model. Opció B
4. Es considera la funció $f(x) = x^2 + m$, on $m > 0$ és una constant. a) Per a cada valor de m troba el valor $a > 0$ tal que la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$ passi per l'origen de coordenades. b) Troba el valor de m perquè la recta $y = x$ sigui tangent a la gràfica de $f(x)$.
Selectivitat. Juny 07. Opció A
5. Un cotxe recorre una distància e , en quilòmetres, a les t hores, sent $e = 22t + 0,4t^2$. Determina la seva funció velocitat i la seva funció acceleració. És constant l'acceleració? Si segueix a aquesta velocitat, en quin instant sobrepassa la velocitat màxima permesa de 120 km/h?
6. Al llançar un objecte verticalment cap amunt l'altura (en metres) i , que aconsegueix als x segons és: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocitat als $x = 0, x = 1, x = 3$ i $x = 4$ segons. Determina també l'altura de la pedra a aquests segons. Quina és l'altura màxima aconseguida per l'objecte?
7. Un cotxe recorre una distància i , en un temps x donat en hores, donada per l'equació: $y = 0,1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocitat que porta el cotxe per a $x = 1,5$ hores.
8. Comprova que la derivada n -èsima de les següents funcions és la indicada:

$f(x) = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}} \right)$
$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$	$f(x) = \cos ax \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$
$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$	$f(x) = \cos^2 x \Rightarrow f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$

9. Si f i g són dues funcions derivables en tot punt, i se sap que $f(1) = 2, f(2) = 5, g(1) = 1, g(2) = 6, f'(1) = 3, f'(2) = 6, f''(6) = 4, g'(1) = 1, g'(2) = 3, g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.
10. Siguin $u(x)$ i $v(x)$ dues funcions derivables en un punt x . Prova que el seu producte $u(x) \cdot v(x)$ és derivable obtenint l'expressió de la seva derivada:
 $D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
(Selectivitat Setembre 1995)

2. CÀLCUL DE DERIVADES

11. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\text{a) } y = \sqrt[6]{5x^{11}}; \quad \text{b) } y = \frac{\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt{x}}{3x^3 + 7}; \quad \text{c) } y = \frac{(3x^4 - 4) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}; \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x + 5}.$$

12. Calcula les derivades de les funcions següents: a) $y = \sqrt{\frac{2x^3 - 7x^9}{4x^5 + 6}} (3x^7 - 5x^5)^3$

$$\text{b) } y = \sqrt{\frac{(x^3 + 5x)(4x^3 - 6x)}{2x^4 - 5x}} \quad \text{c) } y = \sqrt{\left(\frac{3x^4 + 5x^2}{4x^2 - 6x^5}\right)^4} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{5 + \sqrt{5x - \frac{5}{x^5}}}$$

13. Calcula les derivades de les funcions següents: a) $f(x) = \lg \frac{1 + e^{3x}}{1 - e^{3x}}$

$$b) f(x) = (2-3x)sh(2-3x) \quad c) f(x) = tg \frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x} \quad d) f(x) = \frac{senx - x \cos x}{\cos x + x senx}$$

14. Ja saps que la funció tangent es defineix com el quocient entre el sinus i el cosinus, les funcions hiperbòliques es defineixen

utilitzant la funció exponencial. Comprova les derivades de la taula següent de $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ i de } th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

$f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x)$	$y = tg(f(x)) \Rightarrow y' = (1 + tg^2(f(x))) \cdot f'(x)$	$y = tg(x^3) \Rightarrow y' = (1 + tg^2(x^3)) \cdot (3x^2)$
$f(x) = sh(x) \Rightarrow f'(x) = ch(x)$	$y = sh(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot ch(f(x))$	$y = sh(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{ch(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ch(x) \Rightarrow f'(x) = sh(x)$	$y = ch(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot sh(f(x))$	$y = ch(\ln(x)) \Rightarrow y' = \frac{sh(\ln(x))}{x}$
$f(x) = th(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - th^2(x)$	$y = th(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot (1 - th^2(f(x)))$	$y = th(x^4) \Rightarrow y' = (4x^3) \cdot (1 - th^2(x^4))$

15. Utilitza derivació logarítmica per a calcular les derivades de les funcions següents:

$$a) y = (3x)^{x^5 - 9x^3} \quad b) y = ((2x+7)^{5x^2 - 6x^2}) \quad c) y = (x + e)^{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad d) f(x) = (x^x)^x$$

16. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$a) y = \arcsen \sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}} \quad b) y = e^{\arccos \sqrt{6x+8}} \quad c) y = sen(\arctg \frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}) \quad d) y = \arccos \frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$$

17. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$a) y = \arg sh \sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}} \quad b) y = \sqrt{2e^{\arg ch \sqrt{7x+3}}} \quad c) y = sh(\arg th \frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}) \quad d) y = \arg ch \frac{senx}{\sqrt{5-3sen^2 x^2}}$$

3. APLICACIONS DE LA DERIVADA

1

18. Es considera la funció: $f(x) = \frac{1}{2} + senx - \cos x$. Es demana: Comprova l'existència de, almenys, un punt $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Suggeriment: Utilitza el teorema de Rolle). Demosta que en c hi ha un punt d'inflexió.

Selectivitat. Curs 05/06. Model. Opció B

19. Sigui: $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ a) Estudia la continuïtat i derivabilitat de f en $x = 0$. B) Estudia quan es verifica $f'(x) = 0$. Ja que $f(1) = f(-1)$, hi ha contradicció amb el Teorema de Rolle en l'interval $[-1, 1]$? Selectivitat. Curs 08/09.

$$20. \text{ Calcula } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{senx(1-senx)}{\cos^2 x}$$

(Selectivitat Setembre 1998)

$$21. \text{ Calcula } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

(Prova prèvia Selectivitat 1999)

$$22. \text{ Calcula } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$$

sabent que $f(x)$ una funció real de variable real, derivable i amb derivada contínua en tots els seus punts i tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. (Selectivitat Setembre 02. Opció B)

23. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y = x^3 - 3x$. Com és en $x = 0$? en $x = 2$? en $x = -2$?

24. Calcula els màxims i mínims de les funcions següents:

$$a) y = x^4 - 1 \quad b) y = 3x^3 + 9 \quad c) y = 4x^4 - 2x^2 + 5 \quad d) y = 9x^3 - 3x^2$$

25. La velocitat de propagació d'una ona de longitud x en aigües profundes ve donada per la fórmula $v = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$ en què a és una constant coneguda. Comprova que la longitud que correspon a un mínim de velocitats $x = a$.

26. Demosta que la suma de dos sumands positius, el producte de la qual és constant, és mínima quan aquests són iguals.

27. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en l'interval $[-5, 5]$ i en l'interval $[1, 4]$.

28. Determina els màxims i mínims de les funcions següents: a) $y = |x - 9|$; b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

29. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció $f(x) = |x + 2|$ en l'interval $[-4, 4]$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

30. Es considera la funció: . Contesta, raonadament, les preguntes següents:

- a) És contínua en el punt $x = 0$? b) És derivable en el punt $x = 0$? c) Aconsegueix algun extrem? (Selectivitat)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

31. Es considera la funció real de variable real definida per . Determinar els seus màxims i mínims relatius. Setembre 02. Opció A. Selectivitat

32. Sabent que una funció $f(x)$ té com derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Troba els intervals de creixement i decreixement de f . b) Troba els màxims i mínims relatius de f . c) És el punt $x = 4$ un punt d'inflexió de f ? Justifica raonadament la resposta. Setembre 04. Opció A

33. Determina els màxims, mínims i punts d'inflexió de les funcions següents:

- a) $y = x^3 - x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^6 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

$$\frac{1}{4 - x^2}$$

34. Es considera la funció $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$. a) Indicar el domini de definició de la funció f i les seves asymptotes. b) Trobar els extrems relatius de la funció f i els seus intervals de concavitat i convexitat. c) Dibuixar la gràfica de f i trobar el seu màxim i el seu mínim absolut en l'interval $[-1, 1]$. Selectivitat Opció A

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

35. Sigui la funció definida en l'interval tancat i fitat $[-2\pi, 2\pi]$. Es demana: a) Calcular els punts de l'interval donat on f aconsegueix els seus valors màxim i mínim absoluts. b) Dibuixar la gràfica de la funció f en l'interval donat. Selectivitat.

Setembre 03. Opció A

36. Sigui la funció $f(x) = 2x |4 - x|$. Estudia la seva continuïtat i derivabilitat. Dibuixa la seva gràfica. Selectivitat. Setembre 03.

$$f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{4x^2 + 1}$$

37. Es considera la funció . Calcula les asymptotes, el màxim i el mínim absoluts de la funció $f(x)$. Selectivitat Juny 04. Opció A

38. Es desitja fabricar envasos amb forma d'ortocedre de base quadrada de manera que el volum sigui de dos litres i la superfície empleada sigui mínima.

39. Determina les dimensions d'un con de volum mínim inscrit en una esfera de radi $R = 5$ cm. (Ajuda: L'altura del con és igual a $R + x$, i el radi de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

40. Calcula la base i l'altura del triangle isòsceles de perímetre 8 i àrea màxima. (Juny 04. Opció A Selectivitat)

RESUM

Definició de derivada	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangent	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangent a $y = x^3 + 2x$ en el punt $(0, 0)$: $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Teorema de Rolle	$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ existeix $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.	
Teorema del valor mitjà	$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) . Existeix $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Regla de L'Hôpital	f i g derivables en un entorn del punt $x = a$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ i existeix $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ existeix $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.	
Creixement i decreixement	Si $f'(a) > 0$ llavors $y = f(x)$ és creixent a $x = a$. Si $f'(a) < 0$ llavors $y = f(x)$ es decreixent a $x = a$.	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$. Per $x < -1$, $y' > 0 \rightarrow y$ creixent. Per $-1 < x < 1$, $y' < 0 \rightarrow y$ decreixent Per $x > 1$, $y' > 0 \rightarrow y$ creixent

Màxims i mínims	Si $(a, f(a))$ és un màxim o un mínim de $y = f(x)$ i existeix $f'(a)$ llavors $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ llavors $(a, f(a))$ és un punt crític. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$ llavors $(a, f(a))$ és un mínim. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$ llavors $(a, f(a))$ és un màxim. Si $(a, f(a))$ és un punt d'inflexió de $y = f(x)$ i existeix $f''(a)$ llavors $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ còncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$. $y'(-1) = 0, y''(-1) < 0$, per tant $(-1, 2)$ és un màxim relatiu. $y'(1) = 0, y''(1) > 0$, per tant $(1, -2)$ és un mínim relatiu. $(0, 0)$ és un punt d'inflexió
-----------------	---	---

EXERCICIS I PROBLEMES.

Concepte de derivada

- Pensa en un exemple de funció no derivable i que sí que sigui contínua.
- Utilitza la definició de derivada per a calcular la derivada de la funció $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5 \dots$. Pots obtenir la derivada en $x = 0$? Raona la resposta.
- Es considera la funció $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica quin o quins de les següents afirmacions són certes, raonant la resposta.
 - f és derivable en $x = 1$, perquè les derivades laterals s'anul·len en aquest punt.
 - f ni és contínua en $x = 1$ ni derivable en el dit punt.
 (Selectivitat Setembre 1994)
- Quants punts hi ha en la funció $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tinguin derivada? Justifica la resposta. (Selectivitat 1995)
- Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punt $x = 5$.
- El perfil d'una certa muntanya té la forma d'una paràbola: $y = 0'03x - 0'002x^2$, on x e i es mesuren en km. Escriu l'equació de la recta tangent per a $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ km.
- Al caure un cos en el buit la distància d (en metres), recorreguda als t segons ve donada aproximadament per l'expressió: $d = 5t^2$. (L'expressió és $d = (1/2)gt^2$, on g és l'acceleració de la gravetat terrestre, aproximadament de $9'8$) a) A quina velocitat arribarà al sòl un persona que en un incendi es cas a la lona dels bombers i vesprada 8 segons a arribar a ella? b) A quina velocitat arribarà si es llança des d'una altura de 20 metres?
- Un vehicle espacial s'enlaira d'un planeta amb una trajectòria donada per: $y = 30x - 0'5x^2$ (x e y en km). La direcció del vehicle ens la proporciona la recta tangent en cada punt. Determina la direcció del vehicle quan està a 4 km de distància sobre l'horitzó.
- Un determinat gas ocupa un volum de 3 m^3 a una pressió de 3 Newtons per m^2 . Segons la llei de Boyle a cada pressió exercida sobre el gas correspon un volum donat per $V = 10/P$. Quina és la taxa de variació instantània del volum quan la pressió és de 9 Newtons per m^2 . I quan és de 18 Newtons per m^2 ? És la meitat?
- Calcula les rectes tangents de les gràfiques de les funcions següents en els punts indicats:
 - $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.
 - $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.
 - $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.
- Determina les coordenades dels punts de la gràfica $y = x^3 - 3x + 2$ en els que la seva tangent sigui paral·lela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.
- Determina la recta tangent de la gràfica de la funció $y = \sqrt[3]{4x^3}$ en $x = 0$.
- Determina les rectes tangents a la funció $f(x) = 4x^3 - 12x$ en els punts en què el pendent és 12. Quin és el menor valor que pot tenir el pendent a aquesta corba? En quins punts s'aconsegueix?
- Determina els coeficients a, b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx + c$, que passa pel punt $A(1, 2)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $O(0, 0)$.
- Determina els coeficients a, b i c perquè les funcions $f(x) = x^3 + bx + c$ i $g(x) = cx - x^2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $A(1, 0)$.
- Determina el coeficient a , perquè la funció $f(x) = x^2 + a$, sigui tangent a la recta $y = x$.

Càlcul de derivades

Si ja saps derivar, pots no fer aquests exercicis.

17. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - x^3$

18. Calcula: a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$ c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$
19. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$ c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2) \cdot (x^2 - 3x + 1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+3)}{(x^2 - 3)}$

20. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{(x-3) \cdot (2x-4)}{x+5} & \text{b) } y = \frac{(2x^2+5) \cdot (7x-3)}{5x-8} & \text{c) } y = \frac{(2x+3x^2) \cdot (4x^5-5)}{6x+7} \\ & & \text{d) } y = \frac{5(x+2) \cdot (4x-6)}{2(x+5) \cdot (6x+3)} \end{array}$$

21. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\text{a) } y = (x^3+5) \cdot (8x^6-7); \quad \text{b) } y = (9x^3-3) \cdot (7x^4+6);$$

22. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x-2}{x+2}; & \text{b) } y = \sqrt{x-2} \cdot (6x^3-3x); & \text{c) } y = \frac{4x^3-7x^2}{8x^4-4x^3}; \\ & & \text{d) } y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4} \end{array}$$

23. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = (x^6-5x^2)^9 & \text{b) } y = (2x^4-7x^6)^5 & \text{c) } y = \sqrt{(2x^7-6x^5)^3} \\ & & \text{d) } y = \sqrt[5]{(3x^4+6x^9)^7} \end{array}$$

24. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \sqrt{2x^3+3} \cdot (4x^7+6x^2)^6 & \text{b) } y = \frac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4} & \text{c) } y = (7x^3+3)^5 \cdot (4x^5-8x^8) \\ & & \text{d) } y = \frac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2} \end{array}$$

25. Utilitza derivació logarítmica per a calcular les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = (5x)^{x^5-3x^2} & \text{b) } y = (3x+6)^{(4x^2+2x^3)} & \text{c) } y = e^{(3x^5-6x^2)^5} \\ & & \text{d) } y = \sqrt[3]{(5x+1)(3x^4-4x^5)^3} \end{array}$$

26. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = e^{x^5+7x^2} & \text{b) } y = (e^{3x^2-5x})^7 & \text{c) } y = e^{(4x^5+8x^2)^5} \\ & & \text{d) } y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}} \end{array}$$

27. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \ln((5x^5-3x^3)^{12}(3x+1)) & \text{b) } y = \ln \sqrt{(2x^3+5x^2)^3} & \text{c) } y = \ln \sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}} \\ & & \text{d) } y = \ln \sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2} \end{array}$$

28. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{llll} f(x) = \frac{5 \cos(x)}{1+3 \sin(x^2)} & f(x) = \sin(5 \operatorname{sh}^3 3x) & f(x) = \operatorname{ch}(3 \operatorname{sh}(2x)) & f(x) = \operatorname{th}(5x+7x^2) \end{array}$$

29. Recorda la definició de cosecant: $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Demosta que: $(\operatorname{cosec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

30. Recorda la definició de secant: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demosta que: $(\sec(x))' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

31. Recorda la definició de cotangent: $\cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$. Demosta que: $(\cotg(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

32. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = 7 \sin(x^7-7x^3) & \text{b) } y = 5 \sin^5(4x^4-5x^5) & \text{c) } y = \sin^6(x) \cdot \cos^4(x) \\ & & \text{d) } y = \sqrt[3]{\sin^5(3x^4+5x^7)} \end{array}$$

33. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \sin \frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}} & \text{b) } f(x) = (2x-3x^2) \operatorname{ch}(5x-7x^2) & \text{c) } f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{16-9 \sin x}}{4+3 \cos x} \\ & & \text{d) } f(x) = \frac{\operatorname{sh} x - 3x \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 3x \operatorname{sh} x} \end{array}$$

34. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)} & \text{b) } f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{2-7x^2}{2+7x^2} & \text{c) } f(x) = 5 \arccos \frac{3 \sin x + 5}{5-3 \sin x} \\ & & \text{d) } f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{5 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} \end{array}$$

35. Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \operatorname{arcsen}(7e^{2x-3}) & \text{b) } y = \ln(\sqrt{5 \operatorname{arcsen}(3x+2)}) & \text{c) } y = \operatorname{arctg}(\ln \sqrt[3]{4x-5}) \\ & & \text{d) } y = \operatorname{arcsen}(3 \operatorname{tg}(5 \sin(4x-2))) \end{array}$$

36. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = \arctg \sqrt{\frac{7+2\sin x}{7-2\sin x}}$ b) $y = e^{\arcsen \sqrt{2x-5}}$ c) $y = \cos(3\arcsen \frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}})$ d) $y = \arcsen \frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}$

37. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = \log(x^3 - 5x^5)^8$ b) $y = \log_2(8x^2 - 3x^3)^2$ c) $y = \ln \sqrt{\frac{(3x^6 - 7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln \sqrt[4]{(3x^3 + 5x^9)^7}$

38. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = \cos(e^{x^5} + \ln(4x^3))$ b) $y = 7\cotg^5(5x^3 - 3x^2)$ c) $y = \senet(\cos^2(\tg(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(3x+2))^4}$

39. Calcula les derivades de les funcions següents:

a) $y = \operatorname{argsh} \sqrt{5x^2 + 2}$ b) $y = \ln(\operatorname{argth}(5x-3))$ c) $y = \operatorname{argch}(e^{3x-6})$ d) $y = \operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(2x+1))$

Aplicacions de la derivada

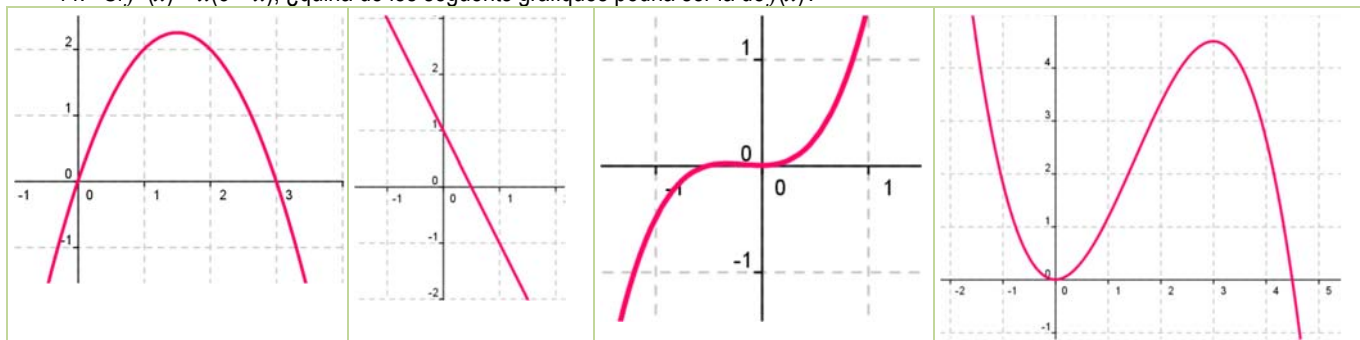
40. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ (Juny 03. Opció A Selectivitat 2003)

41. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$ (Juny 03. Opció A Selectivitat 2003)

42. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$ (Curs 13/14. Opció A Selectivitat)

43. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\sen(3x)}{x^2}$ (Juny 14. Opció A Selectivitat)

44. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿quina de les següents gràfiques podria ser la de $f(x)$?



45. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

46. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

47. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula els seus màxims i mínims i fes un esbós de la seva gràfica.

48. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

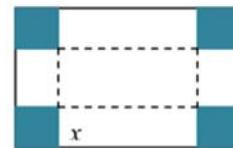
49. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

50. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en l'interval $[-5, 3]$ i en l'interval $[1, 5]$.

51. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció $f(x) = |x+4|$ en l'interval $[-4, 4]$.

PROBLEMES

1. L'espai recorregut, en metres, per un vehicle als t segons de passar per un control de radar, ve donat per: $y = 8t + 0.3t^2$. Quina velocitat portava al passar pel control? I als 3 segons? Si continua així, en quin moment passarà dels 120 km/h?
2. Sabent que l'acceleració és la derivada de la funció velocitat, calcula l'acceleració del vehicle de l'exercici anterior als $t=1$ segons, i als $t = 6$ segons. Com és l'acceleració? És constant o variable?
3. La distància, d , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la Terra als t segons, ve donada aproximadament per $d = 5t^2$. Si cau un pern des de la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que està a 57 m d'altura), a quina velocitat arribaria a terra? I si caigués des de la segona plataforma (que està a 115m)? I des de la tercera plataforma (que està a 274 m)?
4. S'ha llançat des de la superfície de la Lluna una pedra verticalment cap amunt amb una velocitat de 24 m/s, i aconsegueix una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina l'acceleració de la gravetat en la superfície de la Lluna. B) ¿Fins a quina altura arriba la pedra? C) Quant temps tarda a aconseguir aquesta altura? D) Durant quant temps roman la pedra en l'aire? E) Es deixa caure ara la pedra per una encletxa i tarda 20 segons a arribar al fons, quina profunditat té l'encletxa?
5. La distància, d , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la Lluna als t segons, ve donada aproximadament per $d = 0.83t^2$. Quina velocitat duria un objecte que caigués en caiguda lliure a la Lluna al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? A la Lluna s'està construint una antena de transmissió sobre una base de formigó que podria esquarterar-se si caigués un pern a una velocitat de 20 m/s. Per a garantir que això no passi, quina ha de ser l'altura de l'antena?
6. La distància, d , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la superfície de Mart als t segons, ve donada aproximadament per $d = 1.86t^2$. Quina velocitat portaria un objecte que caigués en caiguda lliure a Mart al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina l'acceleració de la gravetat a Mart.
7. La distància, d , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la superfície de Júpiter als t segons, ve donada aproximadament per $d = 1.86t^2$. Quina velocitat portaria un objecte que caigués en caiguda lliure a Júpiter al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina l'acceleració de la gravetat en Júpiter.
8. La funció $e = f(t)$ indica l'espai recorregut, e , en metres, per un cos en el temps t (en segons). Determina en cada cas la funció velocitat i la funció acceleració:
9. $e = t^2 - 4t + 3$ $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ $e = -t^2 + 4t + 3$ $e = (3t - 4)^2$
10. Un dipòsit cilíndric de 10 metres de diàmetre s'omple d'aigua a 0.3 m^3 per minut. A quina velocitat varia l'altura d'aigua als 2 minuts? I als 5 minuts?
11. Volem construir caixes usant cartolines rectangulars de 20 cm per 25 cm. Per a això es talla en cada cantó un quadrat de costat x , i es doblega. Quin valor ha de tenir el costat del quadrat, x , retallat perquè les caixes continguin un volum màxim? Ajuda: Hauràs d'escriure el volum de les caixes en funció de x .
12. Uns barrils per a emmagatzemar oli són cilíndrics i tenen una capacitat de 200 litres. Si es desitja construirlos de manera que la seva superfície lateral sigui mínima, quant ha de mesurar la seva altura i el radi de la seva base?



AUTOAVALUACIÓ

1. La funció $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ és contínua i derivable en tota la recta real si:

- a) $b = -6, d = 3$ b) $b = 3, d = -1$ c) $b = 6, d = -3$ d) $b = -3, d = 2$

2. Amb els valors de b i d de l'apartat anterior verifica la funció $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ les condicions del teorema de Rolle en l'interval $[-1, 1]$, pel que s'anul·la la derivada en el punt d'abscissa:

- a) $x = -1$, b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

3. Verifica la funció $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ les condicions del teorema del valor mitjà en l'interval $[0, 3]$ en el punt d'abscissa:

- a) $x = -3/8$, b) $x = 7/6$ c) $x = 10/3$ d) $x = 5/3$

4. En quin dels límits següents **no** es pot aplicar la regla de l'Hôpital:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x}{5x^2 + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$

5. L'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = \tan x^2 - 2x^3$ en $x=0$ és:

- a) $y = x$ b) $y = x + 8$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + x$

6. La funció $y = 3\sin x - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ és:

- a) còncava b) té un punt d'inflexió de tangent horitzontal
c) convexa d) té un punt d'inflexió de tangent obliqua

7. La funció $y = 3\sin x - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ és:

- a) creixent b) decreixent c) aconsegueix un mínim d) aconsegueix un màxim

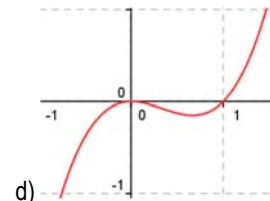
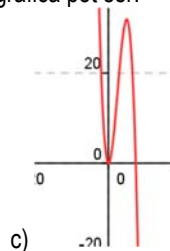
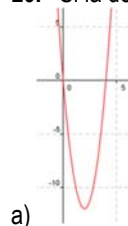
8. Si la derivada d'una certa funció és: $i' = (x - 4)(x + 2)$ llavors els intervals de creixement i decreixement de aquesta funció són:

- a) $x < -2$, decreixent; $-2 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent
b) $x < -2$, decreixent; $-2 < x < 4$, creixent; $x > 4$, decreixent
c) $x < -2$, creixent; $-2 < x < 4$, creixent; $x > 4$, decreixent
d) $x < -2$, creixent; $-2 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent

9. La funció $y = 3x^2 - 2x^3$ té un punt d'inflexió en:

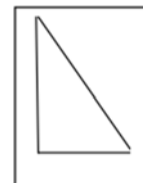
- a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

10. Si la derivada d'una certa funció és: $i' = 3(x - 4)x$ llavors la seva gràfica pot ser:

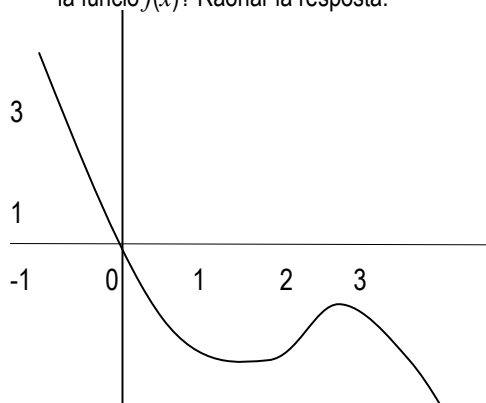


PROBLEMES DE SELECTIVITAT.

- La rampa d'un tobogan, d'aquests pels que baixen els petits en els parcs infantils, està fabricat empalmant dos trams, dues peces metàl·liques. Quina precaució cal prendre a l'empalmar les dues peces perquè el descens no presenti dificultat als infants?
- Se sap que un cert tobogan té un tram recte en la seva part alta i un segon tram corb. El tram recte és el segment AB , on $A(-3, 4)$ i $B(0, 1)$. El tram corb comença en B i descendix fins al terra ($y = 0$) on arriba amb tangent horitzontal. Si aquest tram corb és una paràbola $y = ax^2 + bx + c$, trobar aquesta. (Prova prèvia selectivitat 1994)
- Demostri's que si $f(x)$ és una funció derivable en un punt $x = a$, llavors també és derivable en a la funció $F(x) = f(x)^2$, i la seva derivada és $F'(a) = 2f(a) \cdot f'(a)$. (Es demana una demostració directa, no haurà de recórrer-se a resultats semblants, com la derivada d'un producte) (Prova prèvia selectivitat 1994)
- Se sap que $y = f(x)$ i $y = g(x)$ són dues corbes creixents en $x = a$. Analitza's si la corba $y = f(x) - g(x)$ ha de ser llavors creixent en $x = a$. (Si la resposta és afirmativa, justifica-ho; en cas contrari, dóna un contraexemple que ho confirmi). (Selectivitat Juny 1994)
- Defineix derivada d'una funció f en un punt a . Aplicant la definició de derivada, demostrar que si f és derivable i periòdica, de període T , llavors la seva derivada f' també és periòdica de període T . (Selectivitat Juny 1994)
- En la figura es representa una escala AB , l'extrem inferior de la qual A recorre es desplaça pel terra (recta OA) i l'extrem superior B del qual recorre una paret vertical (recta OB). La longitud de l'escala és $AB = 1$. El punt A s'allunya de O amb velocitat constant c . Es demana: a) Sense fer cap càlcul, indicar quant val la velocitat de B en el moment en què $OA = OB$. b) Trobar la velocitat v del punt B en funció de la distància x (OA) c) La velocitat amb què B arriba al punt O . (Prova prèvia selectivitat 1995)
- Dibuixa la gràfica d'una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que compleixi les condicions següents:
 $f'(0) = 0$. $f'(x) > 0$ per a $-1 < x < 0$ $f'(x) > 0$ per a $0 < x < \frac{1}{2}$



- Assenyala altres propietats de la corba que es dibuixi. (Prova prèvia selectivitat 1995)
- Dos línies de tren es tallen perpendicularment. Per cada línia avança una locomotora (de longitud menyspreable) dirigint-se ambdós al punt de tall; les seves velocitats són 60 km/h i 120 km/h i han sortit simultàniament d'estacions situades, respectivament a 40 i 30 km del punt de tall. a) Trobar la distància a què es troben les locomotores, en funció del temps que passa des que inicien el seu recorregut. b) Trobar el valor mínim d'aquesta distància. (Selectivitat Juny 1995)
 - La gràfica de la figura correspon a la primera derivada d'una funció $f(x)$. Què pot dir-se sobre els possibles màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$? Raonar la resposta. (Selectivitat Setembre 1996)



- Trobar els màxims i els mínims de la funció $y = e^{x^2}$. (Selectivitat Setembre 1995)

- L'acceleració d'un mòbil que descriu una trajectòria rectilínia és (formulada en funció del temps t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sap que per a $t = 0$ el mòbil està aturat en la posició $x = 5$. a) Per a quins valors de t és 0 la velocitat del mòbil? b) Trobar la variació de la velocitat en l'interval de temps $[4, 8]$ i l'espai recorregut en aquest interval. c) Trobar la funció de posició d'aquest mòbil. (Selectivitat Setembre 1995)

- Si $f(x)$ la funció definida per les expressions $f(x) = \begin{cases} 3\sin x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$. a) Calcular n perquè $f(x)$ sigui contínua en el punt $x = 0$. b) Calcular m i n perquè $f(x)$ sigui derivable en el punt $x = 0$. (Prova prèvia Selectivitat 1996)

- Es considera una caixa sense tapadora (consta de quatre cares laterals i el fons). Sabent que el fons és un quadrat i coneixent que l'àrea total (de les cinc cares) és de 12 cm², trobar les seves dimensions perquè tenguin la major capacitat possible. (Prova prèvia Selectivitat 1996)
- Es considera una finestra com la que s'indica en la figura (La part inferior és rectangular, la superior una semicircumferència). El perímetre de la finestra mesura 6 m. Trobar les dimensions x i y perquè la superfície de la finestra sigui màxima. (Expressar els resultats en funció de π) (Selectivitat Setembre 1996)



- Estudiar la derivabilitat de la funció $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. (Prova prèvia selectivitat 1997)

$$f(x) = \frac{Lx}{x}$$

16. Sigui la funció $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el domini, les asymptotes, els possibles punts de màxim i mínim i fer un dibuix aproximat de la gràfica de la funció. Prova prèvia selectivitat 1997.
17. Sigui la funció $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gràfica de la funció $f(x)$ indicant monotonía, extrems, punts d'inflexió i branques asimptòtiques. Prova prèvia Selectivitat 1998
18. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable en $\mathbb{R}$; siguin a i b dues arrels de la derivada $f'(x)$ tals que entre elles no hi ha cap altra arrel de $f'(x)$. Raonar degudament si pot ocórrer cada una de les possibilitats següents:
 1.- Entre a i b no hi ha cap arrel de $f(x)$
 2.- Entre a i b hi ha una sola arrel de $f(x)$
 3.- Entre a i b hi ha dues o més arrels de $f(x)$. Selectivitat Juny 1997
19. Sigui la funció $f(x) = x|x - 1|$. Es demana:
 a) Fer un dibuix aproximat de la funció.
 b) Estudiar la derivabilitat de la funció en $x = 1$. Selectivitat Setembre 1997
20. Calcular la base i l'altura del triangle isòsceles d'àrea màxima que pot inscriure's en una circumferència de 12 cm de diàmetre. Prova prèvia Selectivitat 1998
21. Dues avionetes es troben situades a les 9 del matí a una distància de 543 quilòmetres, en les posicions que s'indiquen en la figura. L'avioneta A es mou cap al sud a una velocitat de 270 km/h, mentre que l'avioneta B es dirigeix cap a l'oest (en direcció a A), a 300 km/h. 543 km
 a) Escriure les funcions que indiquen les posicions de A i B en cada instant, així com la distància entre ambdós.
 b) A quina hora serà mínima aquesta distància? Selectivitat Juny 1999
22. Es considera un triangle isòsceles la base del qual (el costat desigual) mesura 10 cm i l'altura del qual mesura 6 cm. En ell s'inscriu un rectangle, la base del qual està situada sobre la base del triangle.
 a) Expressar a l'àrea A del dit rectangle en funció de la longitud x de la seva base.
 b) Escriure el domini de la funció $A(x)$ i dibuixar la seva gràfica.
 c) Trobar el valor màxim d'aquesta funció. Selectivitat Setembre 1999
23. Es desitja construir una caixa tancada de base quadrada la capacitat de la qual sigui 8 dm^3 . Esbrinar les dimensions de la caixa perquè la superfície exterior sigui mínima. Selectivitat Setembre 1999
24. Sigui $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$. a) Hi ha algun valor de k per al qual $f(x)$ sigui contínua en $x = 0$? b) Hi ha algun valor de k per al qual $f(x)$ sigui derivable en $x = 0$? c) Determinar les seves asymptotes. Prova prèvia de selectivitat 2000
25. Donats tres números qualssevol r_1, r_2 i r_3 , trobar el número real x que minimitza la funció Selectivitat Setembre 2000
26. Sigui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ d'un polinomi que compleix $f(1) = 0, f'(0) = 2$, i té dos extrems relatius per a $x = 1$ i $x = 2$.
 a) Determinar a, b, c i d . b) Són màxims o mínims els extrems relatius? Selectivitat Juny 2000
27. a) Si és possible, dibuixar de forma clara la gràfica d'una funció contínua en l'interval $[0, 4]$ que tenguí almenys un màxim relatiu en el punt $(2, 3)$ i un mínim relatiu en el punt $(3, 4)$
 b) Si la funció fos polinòmica, quin ha de ser com a mínim el seu grau? Selectivitat Juny 2000
28. Sigui la funció $f(x) = 2x + \sin x$
 a) Determinar si té asymptotes d'algun tipus.
 b) Estudiar la seva monotonía i l'existència d'extrems relatius Selectivitat Setembre 2000
29. Sigui la funció $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$
 a) Determinar els punts de tall de la seva gràfica amb els eixos i els intervals de creixement i decreixement.
 b) Esbossar la gràfica de la funció Selectivitat Setembre 2000
30. Sigui la funció real de variable real definida per $f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 a) Raonar si la funció és contínua en tota la recta real.
 b) Raonar si f és derivable en tota la recta real. Selectivitat: Juny 01. Opció B
31. a) Determinar els extrems relatius de la funció $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibuixar la seva gràfica. b) Trobar les equacions de les dues rectes tangents a la gràfica de f que passen pel punt $P(3, -5)$. Selectivitat: Juny 01. Opció B
32. Sigui $P(x)$ un polinomi de grau 4 tal que:
 i) $P(x)$ és una funció parell.
 ii) Dues de les seves arrels són $x = 1, x = \sqrt{5}$
 iii) $P(0) = 5$
 Es demana: Trobar els seus punts d'inflexió. Dibuixar la seva gràfica. Selectivitat: Setembre 01. Opció B
33. Es considera la funció real de variable real definida per: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$. Trobar l'equació cartesiana de la recta tangent en el punt d'inflexió d'abscissa positiva de la gràfica de f . Selectivitat: Juny 02. Opció A

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

34. Es considera la funció real de variable real definida per:
derivabilitat. B) Trobar l'equació cartesiana de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(3,1)$. Sel: Sep 02. Opció A
35. Sigui $f(x)$ una funció real de variable real, derivable i amb derivada contínua en tots els seus punts i tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$$

$f'(1) = 4$. Es demana: a) Calcular $g'(0)$, sent $g(x) = f(x+f(0))$. B) Calcular

36. Determinar els valors de les constants A, B, C i D per als quals la gràfica de la funció real de variable real $f(x) = A \sin x + B x^2 + C x + D$ té tangent horitzontal en el punt $(0, 4)$ i a més la seva derivada segona és $f''(x) = 3 \sin x - 10$.
Selectivitat: Curs 02/03. Model opció A

37. Es considera la funció real de variable real definida per: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Es demana:
- Trobar els seus màxims i mínims relatius i les seves asímptotes
 - Trobar els punts on la gràfica de f té tangent horitzontal
 - Representar gràficament la funció

Selectivitat: Curs 02/03. Model opció B

$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

Nota: Per a obtenir les asímptotes pot utilitzar-se la igualtat:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

38. a) Dibuixar la gràfica de la funció $g(x) = e^x \cdot x$. b) Calcular el domini de definició de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ i el seu comportament quan x tendeix a ∞ i quan tendeix a $-\infty$. Determinar (si existeixen) els màxims i mínims absoluts de $f(x)$ en el seu domini de definició.
Selectivitat: Juny 03. Opció B

39. Donada la funció $f(x) = 1 - x^2$, es demana:

- Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $P(a, f(a))$, on $0 < a < 1$.
- Troba els punts A i B en què la recta trobada en l'apartat a) talla als eixos vertical i horitzontal respectivament.
- Determina el valor de $a \in (0, 1)$ per al qual la distància entre el punt A i el punt $P(a, f(a))$ és el doble de la distància entre el punt B i el punt $P(a, f(a))$

Selectivitat: Juny 04. Opció B

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

40. Sigui la funció $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. A) Troba els seus màxims i mínims relatius i les seves asímptotes. B) Dibuixa la gràfica de la funció utilitzant la informació obtinguda en l'apartat anterior, tenint en compte, a més que f té exactament tres punts d'inflexió les

abscisses de la qual són $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivament. Selectivitat: Setembre 04. Opció B

41. Es considera la funció $f(x) = \ln(1+x^2)$, on $\ln$ significa Logaritme Neperià. A) Determina els intervals de creixement i decreixement i els intervals de concavitat i convexitat. B) Dibuixa la gràfica de f . C) Calcula les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f en els seus punts d'inflexió. Selectivitat: Curs 04/05. Model opció B

$$\frac{1}{x}$$

42. Donada la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ es demana: a) Troba l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt $(a, f(a))$. B) Troba els punts de tall de la recta tangent de l'apartat a) amb els eixos de coordenades. C) Troba el valor de $a > 0$ que fa que la distància entre els dos punts trobats en l'apartat b) sigui mínima. Selectivitat: Setembre 05. Opció A

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

43. Es considera la funció $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula els extrems locals i globals de la funció $f(x)$.

Selectivitat: Setembre 05. Opció B

$$\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

44. Donada la funció: $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Troba els seus màxims i mínims locals i/o globals.

Selectivitat:

45. a) Troba el punt P en el que es tallen les gràfiques de les funcions: $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = +\sqrt{x^2-3}$. b) Troba les equacions de les rectes tangents en el punt P a cada una de les corbes anteriors i demostra que són perpendiculars. Selectivitat: Curs 05/06. Model. Opció B

$$\frac{2x}{x+1}$$

46. Dibuixa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicant el seu domini, intervals de creixement i decreixement i asímptotes. Selectivitat: Juny 06. Opció A

47. Estudia i representa gràficament la funció $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ Selectivitat: Juny 06. Opció B

$$\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

48. a) Calcular els valors de a i b perquè la funció: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ sigui contínua per a tot valor de x .

Estudia la derivabilitat de $f(x)$ per als valors de a i b obtinguts en l'apartat anterior.

Selectivitat: Setembre 06. Opció A

49. Donada la funció $f(x) = xe^{2x}$, es demana dibuixar la seva gràfica indicant el seu domini, asimptotes, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius, intervals de concavitat i convexitat i punts d'inflexió. Sel. Sep. 06.

50. Dibuixa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicant el seu domini, intervals de creixement i decreixement i asimptotes. Selectivitat: Juny 07. Opció B

51. Troba els màxims i mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció: $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$. Selectivitat Sep. 07. Op A
52. Sigui $g(x)$ una funció contínua i derivable per a tot valor real de x , de la que es coneix la informació següent:
- $g'(x) > 0$ per a tot $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mentres que $g'(x) < 0$ per a tot $x \in (0, 2)$
 - $g''(x) > 0$ per a tot $x \in (1, 3)$ i $g''(x) < 0$ per a tot $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
 - $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$

Tenint en compte aquestes dades es demana:

- Analitza raonadament la possible existència o no existència d'asimptotes verticals, horitzontals o obliques.
- Dibuixa de manera esquemàtica la gràfica de la funció $g(x)$.

Selectivitat: Setembre 07. Opció B

53. Es considera la funció $f(x) = \frac{x}{e^x}$. a) Troba les seves asimptotes i els seus extrems locals. b) Calcula els punts d'inflexió de $f(x)$ i dibuixa la gràfica de $f(x)$. Selectivitat: Curs 07/08. Model. Opció A

54. Es considera la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$. Es demana: Calcula a i b perquè f sigui contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$. Sel

55. Obté els màxims i mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció:

$f(x) = x(\ln(x))^2$, sent $\ln(x)$ el logaritme neperià de x .

Selectivitat: Juny 08. Opció A

56. Donada la funció $f(x) = e^x(x^2 + 1)$. Es demana:

Dibuixa la gràfica de f , estudiant el creixement, decreixement, punts d'inflexió i asimptotes.

Selectivitat: Setembre 08. Opció A

57. Sigui: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. A) Estudia la continuïtat i derivabilitat de $f(x)$. B) Troba els màxims i mínims locals de $f(x)$. C) Dibuixa la gràfica de $f(x)$. Selectivitat: Curs 08/09. Model. Opció A

58. Si la derivada de la funció $f(x)$ és: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obté:

- Els intervals de creixement i decreixement de f .
- Els valors de x en els quals f té màxims relatius, mínims relatius, o punts d'inflexió.
- La funció f sabent que $f(0) = 0$.

Selectivitat: Juny 09. Opció B

59. Donada la funció: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ i } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es demana: a) Troba els valors dels paràmetres a i b per als quals la funció f és contínua en $x = 0$. b) Para $a = b = 1$, estudia si la funció f és derivable en $x = 0$ aplicant la definició de derivada. Selectivitat: Setembre 09. Opció A

60. a) Donada la funció $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, troba el punt o els punts de la gràfica de $f(x)$ en els que el pendent de la recta tangent sigui 1. b) Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $x = 0$. c) Sigui g una funció derivable amb derivada contínua en tota la recta real, i tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demosta que hi ha almenys un punt c en l'interval $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$. Selectivitat: Setembre 09. Opció B

61. Donada la funció: $f(x) = x^3 - x$. a) Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica en el punt $(-1, f(-1))$. B) Determina els punts d'intersecció de la recta trobada en l'apartat anterior amb la gràfica de f . Selectivitat: Curs 09/10.

62. Donada la funció $f(x) = e^x + a e^x$, sent a un número real, estudia els següents apartats en funció de a : a) Troba els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de f . b) Estudia per a què valor, o valors, de a la funció té alguna asimptota horitzontal. Selectivitat: Curs 09/10. Model. Opció A

63. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$. Es demana: a) Estudia els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$. b) Troba els punts d'inflexió de la gràfica de $f(x)$. c) Troba les asimptotes i dibuixa la gràfica de $f(x)$. Selectivitat: Juny 10. FG. Opció A

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

64. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (ln significa logaritme neperià de x), es demana: a) Determina el valor de k perquè la funció sigui contínua en $\mathbb{R}$. b) Troba els punts de tall amb els eixos de coordenades. c) Obté l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 1$.
Selectivitat: Juny 10. FG. Opció B.

65. Donada la funció: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, on ln significa logaritme neperià de x , es demana:

a) Determina el domini de definició de $f(x)$ i les asímptotes verticals de la seva gràfica.

b) Estudia els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.

Selectivitat: Juny 10. FE. Opció A

66. Els punts $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ i $A(a, 0, 0)$ amb $a > 3$, determinen un pla π que talla als semieixos positius d'OY i OZ en els punts B i C respectivament. Calcula el valor de a perquè el tetraedre determinat pels punts A , B , C i l'origen de coordenades tenguí volum mínim.
Selectivitat: Setembre 10. FG. Opció B

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

67. Donada la funció $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$, es demana a) Estudia i obté les asímptotes. b) Estudia els intervals de concavitat i convexitat. c) Representa gràficament la funció.
Selectivitat: Setembre 10. FE. Opció B

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$$

68. Donada la funció $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$, es demana: Obté, si existeixen, els màxims i mínims relatius i les asímptotes de f .

Selectivitat: Curs 10/11. Model. Opció A

69. Troba els valors mínim i màxim absoluts de la funció $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$

Selectivitat: Juny 11.1. Opció A

70. Demostra que l'equació $4x^5 + 3x + m = 0$ només té una arrel real sigui quin sigui el número m . Justifica la respostes indicant quins teoremes uses.
Selectivitat: Juny 11.1. Opció A

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

71. Donada la funció $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$, es demana: a) Determina el valor de a per al que la funció posseeix un mínim relatiu en $x = 1$. Per a aquest valor de a , obté els altres punts en què f té un extrem relatiu. b) Obté les asímptotes de la gràfica de $y = f(x)$ para $a = 1$. c) Esbossa la gràfica de la funció para $a = 1$.
Selectivitat: Juny 11.1. Opció B

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$$

72. Donada la funció $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$, es demana: a) Troba les asímptotes de la gràfica de la funció $y = f(x)$. b) Troba els intervals on f creix i aquells en què f decreix. Determina tots els màxims i mínims locals. c) Esbossa la gràfica de $y = f(x)$ a partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors.
Selectivitat: Juny 11.2. Opció A

73. Trobar el domini de definició de la funció $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Trobar el conjunt de punts en què la funció f té derivada
Selectivitat: Setembre 11. Opció A.

74. Donat el polinomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtenir els valors de a , b i c de manera que es verifiquen les condicions següents: El polinomi $P(x)$ tenguí extrems relatius en els punts d'abscisses $x = -1/3$, $x = -1$. La recta tangent a la gràfica de $P(x)$ en el punt $(0; P(0))$ sigui $y = x + 3$.
Selectivitat: Curs 11/12. Model. Opció A.

75. Trobar a ; b ; c de manera que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ abast en $x = 1$ un màxim relatiu de valor 2, i tenguí en $x = 3$ un punt d'inflexió.
Selectivitat: Juny 12. Opció A

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x + 1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

76. Donades les funcions $f(x) = \frac{3x + \ln(x + 1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $g(x) = (\ln x)^x$, $h(x) = \sin(\pi - x)$ es demana: a) Trobar el domini de $f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Calcular $g'(e)$. c) Calcular, en l'interval $(0; 2\pi)$, les coordenades dels punts de tall amb l'eix d'abscisses i les coordenades dels extrems relatius de $h(x)$.
Selectivitat: Juny 12. Opció B

$$f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

77. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, es demana a) Troba el valor de A perquè $f(x)$ sigui contínua. És derivable per a aquest valor de A ? b) Troba els punts en què $f'(x) = 0$. c) Troba el màxim absolut i el mínim absolut de $f(x)$ en l'interval $[4, 8]$.
Selectivitat: Setembre 12. Opció A

78. Donada la funció $f(x) = x^2 \sin x$, es demana:

a) Determina, justificant la teva resposta, si l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució en l'interval obert $(\pi/2, \pi)$.

b) Obté l'equació de la recta normal a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt $(\pi, f(\pi))$.

Selectivitat: Setembre 12. Opció B

Recorda que la recta normal és la recta perpendicular a la recta tangent en el dit punt.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

79. Donada la funció ; es demana: a) Determinar el valor de a perquè f sigui contínua en $x = 0$.
b) Per a aquest valor de a , estudiar la derivabilitat de f en $x = 0$. c) Trobar, si les té, les asímptotes de la gràfica $y = f(x)$. Selectivitat

80. Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, es demana: a) Troba les asímptotes de la seva gràfica. b) Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$. Selectivitat: Juny 13. Opció A

81. Donada la funció $f(x) = 2 \cos^2 x$ es demana: a) Determinar els extrems absoluts de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. b) Determinar els punts d'inflexió de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Selectivitat: Juny 13. Opció B

82. Donada la funció $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, es demana: a) Troba les asímptotes de la seva gràfica. b) Determina els intervals de creixement i decreixement i calcula els seus punts d'inflexió. c) Esbossa la gràfica de la funció. Selectivitat: Setembre 13. Opció A

83. Donada la funció $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, es demana: Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en $x = 0$. Selectivitat:

84. Donada la funció $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, es demana: a) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i estudia l'existència de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. b) Esbossa la gràfica de $y = f(x)$ determinant els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i les seves asímptotes. Sel

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 6}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

85. Donada la funció , es demana: a) Estudiar la seva continuïtat. b) Estudiar l'existència d'asímptotes de la seva gràfica i, si és el cas, calcular-les. c) Trobar els extrems relatius i esbossar de la seva gràfica. Selectivitat:
86. a) Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció dues vegades derivable. Sabent que el punt d'abscissa $x = -2$ és un punt d'inflexió de la gràfica de $f(x)$ i que la recta d'equació $y = 16x + 16$ és tangent a la gràfica de $f(x)$ en el dit punt, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ i $f''(-2)$: Selectivitat: Juny 14. Opció A

87. Donada la funció $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$, es demana: a) Determina el domini de f i les seves asímptotes. b) Calcula $f'(x)$ i determina els extrems relatius de $f(x)$. Selectivitat: Setembre 14. Opció A

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

88. Donada la funció , es demana: a) Trobar, si existeix, el valor de a perquè $f(x)$ sigui contínua. b) Decidir si la funció és derivable en $x = 0$ per a algun valor de a . Selectivitat: Setembre 14. Opció B

CAPÍTOL 9: REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

ACTIVITATS PROPOSADES

- Estudia les diferències del comportament en l'infinit de les funcions: $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, $g(x) = 5x \cdot e^{x-1}$ i $h(x) = \frac{e^x}{x}$.
- Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificant que $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Analitza el creixement i decreixement de la funció $g(x) = f(e^x)$. Té algun extrem relatiu la funció $h(x) = e^{-f(x)}$? Justifica les respostes.

RESUM

Per a representar una funció seguirem els següents passos:	
1. Domini	Descartarem denominadors nuls, arrels d'ordre parell de nombres negatius i logaritmes l'argument dels quals sigui menor o igual que zero.
2. Talls amb els eixos	Intentarem resoldre: - Tall amb l'eix OY: Si $x = 0 \in \text{Dom } f \Rightarrow (0, f(0))$ - Tall/s amb l'eix OX: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \{(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)\}$
3. Simetria	Direm que: $f(x)$ es parella si $f(-x) = f(x)$, i $f(x)$ té simetria especular respecte a OY. $f(x)$ es imparella si $f(-x) = -f(x)$, i $f(x)$ es simètrica respecte a l'origen.
4. Periodicitat	$f(x) = f(x + T) \forall x \in \text{Dom } f$
5. Asímptotes	Verticals: $x = a$ es una asíntota vertical si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ Horizontals: $y = k$ es una asíntota horitzontal si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$. Obliques: $y = m \cdot x + n$ es una asíntota obliqua si $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^* \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - m \cdot x] \in \mathbb{R}$
6. Monotonia	$f(x)$ es creixent en els intervals on $f'(x) > 0$. $f(x)$ es decreixent en els intervals on $f'(x) < 0$.
7. Punts crítics	Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$ llavors $(a, f(a))$ es un mínim relatiu. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un màxim relatiu.
8. Curvatura	$f(x)$ es còncava en els intervals on $f''(x) > 0$. $f(x)$ es convexa en els intervals on $f''(x) < 0$.
9. Punts d'inflexió	Si la funció $y = f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = a$, i existeix la segona derivada, llavors $f''(a) = 0$

En els casos *degenerats* en els que s'anul·len les derivades successives $f'(a)$ i $f''(a)$, seguirem derivant fins a trobar una derivada n -sima no nul·la, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Llavors:

- Si n = parell, $x = a$ és un màxim **relatiu** si $f^{(n)}(a) < 0$ i un mínim **relatiu** si $f^{(n)}(a) > 0$.
- Si n = imparell, $x = a$ és un **punt d'inflexió**.

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Estudia i representa les funcions següents:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 & \text{b)} f(x) = x^4 + 2x^3 & \text{c)} f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 & \text{d)} f(x) = x - \frac{1}{x} \quad \text{e)} f(x) = \frac{1+x}{1-x} \\ \text{f)} f(x) = \frac{x}{x^2-1} & \text{g)} f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2-4} & \text{h)} f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4} & \text{i)} f(x) = x^2 e^x \quad \text{j)} f(x) = \frac{e^x}{x} \\ \text{k)} f(x) = x^2 e^{-x} & \text{l)} f(x) = \sqrt{x^2-1} & \text{m)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{n)} f(x) = \ln(x^2+1) \quad \text{ñ)} f(x) = \frac{\ln x}{x} \end{array}$$

2. Considera la funció $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$. a) Estudia el seu creixement i troba els seus màxims i mínims. b) Estudia la seva curvatura i obté els seus punts d'inflexió.

3. Troba els màxims, mínims i punts d'inflexió de la funció $f(x) = (x-2)^2(x+1)$. Indica on és creixent, decreixent, còncava i convexa.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \\ |x+3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

4. Representa gràficament i estudia la continuïtat de la funció:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{|x-1|} - 1$$

5. Representa gràficament la funció , estudiant la seva continuïtat.
6. Un gelater ha comprovat que, a un preu de 50 cèntims d'euro la unitat, ven una mitjana de 200 gelats diaris. Per cada cèntim que augmenta el preu, ven dos gelats menys al dia. Si el cost per unitat és de 40 cèntims, a quin preu de venda és màxim el benefici diari que obté el gelater? Quin serà aquest benefici?
7. La producció d'una certa hortalissa en un hivernacle ($Q(x)$ en kg) depèn de la temperatura (x en °C) segons l'expressió $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$. a) Calcula raonadament quina és la temperatura òptima a mantenir en l'hivernacle. b) Quina producció d'hortalissa s'obté?
8. Un hort té actualment 24 arbres, que produeixen 600 fruits cada un. Es calcula que per cada arbre addicional plantat, la producció de cada arbre disminueix en 15 fruits. Quin ha de ser el nombre total d'arbres que ha de tenir l'horta perquè la producció sigui màxima? Quina serà aquesta producció?
9. Un dipòsit obert de llautó amb base quadrada i capacitat per a 4000 litres, quines dimensions ha de tenir perquè la seva fabricació sigui el més econòmica possible?
10. Es vol fabricar una caixa de volum màxim que sigui el doble de llarga que d'ample i que, a més, la suma de l'ample més el llarg més l'alt sigui igual a un metre. Calcula les mesures que ha de tenir la caixa i quin serà el seu volum.
11. Es desitja construir el marc d'una finestra rectangular de 6 m² de superfície. El metre lineal de tram horitzontal costa 2,50 euros i el del tram vertical 3 euros.
- a) Calcula les dimensions de la finestra perquè el cost del marc sigui mínim.
- b) Quin serà aquest cost mínim?
12. Es vol construir un recipient cònic la generatriu del qual mesura 10 cm i que tenguí capacitat màxima. Quin ha de ser el radi de la base?
13. Dos pals de 12 m i 18 m d'altura disten entre si 30 m. Es desitja tendir un cable que uneixi un punt del terra entre els dos pals amb els extrems d'aquests. On cal situar el punt del sòl perquè la longitud total del cable sigui mínima?
14. Determina el radi de la base i l'altura d'un cilindre de 54 cm² d'àrea total perquè el seu volum sigui màxim.
15. En l'oficina central de Correus d'un cert país estan exposades les tarifes del servei de cartes, que són les següents:
 –Cartes fins a 20 grams de pes: 17 cèntims d'euro.
 –Per cada 10 g o fracció d'excés de pes cal afegir 5 cèntims més.
- a) Escriptura la fórmula de la funció $y = f(x)$ (on x representa el pes de cada carta en grams e i el preu que s'ha de pagar per a enviar-la), fins a 50 g.
- b) Representa gràficament la funció i indica en quins punts del seu domini és discontinua i per què.

16. El cost total de producció de x unitats d'un producte és $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Es defineix la funció cost mitjà per unitat com: $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$. Quantes unitats cal produir perquè el cost per unitat sigui mínim?
17. Una franquícia de botigues de moda ha estimat que els seus beneficis setmanals (en milers d'euros) depenen del nombre de botigues que té en funcionament (n) d'acord amb l'expressió: $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$.
Determinar raonadament: a) El nombre de botigues que ha de tenir per a maximitzar els seus beneficis. b) El valor d'aquests beneficis màxims.

18. Sigui la funció $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$. Indica domini, intervals de creixement i decreixement, punts d'inflexió i asímptotes. Realitza la representació gràfica de la mateixa.

19. Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$. Dibuixa la seva gràfica aproximada i analitza la seva continuïtat i derivabilitat. Calcula els màxims i mínims absoluts i relatius de la funció en l'interval $[-8, 8]$.

20. Obté i representa una funció polinòmica de tercer grau $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tengui un mínim en el punt $(1, 1)$ i un punt d'inflexió en el punt $(0, 3)$.
21. La puntuació obtinguda per un estudiant en un examen depèn del temps que hagi dedicat a la seva preparació (x , expressat en

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \frac{2x}{0,2x+3} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

hores) en els termes següents: a) Estudia i representa la funció. Si un estudiant ha dedicat menys de 15 hores a preparar l'examen, justifica que no aprovarà, això és, que obtindrà menys de 5 punts. b) Justifica que la puntuació mai pot ser superior a 10 punts.

AUTOAVALUACIÓ

- El domini de definició de la funció $f(x) = 2 \frac{\sin(x+3)}{x^2-4}$ és:
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$
 - $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pi/2\}$
- Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades de la funció $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$ són:
 - $(-1, 0), (4, 0), (0, -4/3)$
 - $(3, 0), (0, 4)$
 - $(1, 0), (-4, 0), (0, 4/3)$
 - $(1, 0), (4, 0), (0, -4/3)$
- Indica quina de les següents funcions no té cap tipus de simetria:
 - $y = x^2$
 - $y = x^3$
 - $y = e^x$
 - $y = \sin(x)$
- Les asymptotes de la funció $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}$ són:
 - $x = 3, x = 4, y = 1$
 - $x = 2, x = 1, y = 1$
 - $x = -3, x = -4, y = 1/6$
 - $x = 3, x = 4, y = x-2$
- La funció $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x < 0 \\ x^3-12x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ té màxims i mínims en els punts d'abscissa següents:
 - $x = 0, x = 2$
 - $x = 2$
 - $x = 3, x = 2$
 - $x = 0, x = 2, x = -2$
- La funció $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x < 0 \\ x^3-6x^2+1 & x \geq 0 \end{cases}$ té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa:
 - $x = 2$
 - $x = 0$
 - $x = 3$
 - $x = -2$
- Indica quina de les següents afirmacions és falsa:
 - El domini de les funcions polinòmiques és sempre tota la recta real
 - Les funcions definides a trossos mai són contínues
 - Les funcions exponencials estan definides en la mateixa regió que el seu exponent
 - Les funcions: $y = e^x; y = \sin(x); y = \cos(x)$ estan definides en tota la recta real
- La funció $f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no està definida en els intervals indicats:
 - $(1, 2), (3, 4)$
 - $[1, 2], [3, 4]$
 - $[1, 2], (3, 4)$
 - $(1, 2), [3, 4]$
- La funció $f(x) = \ln\left(\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}\right)$ té com a asymptota horitzontal:
 - $y = 0$
 - $y = 1$
 - No en té
 - $y = 1/6$
- La funció $f(x) = 2 \cdot \cos 3x$ té com a amplitud i període:
 - $A = 2, T = 2\pi/3$
 - $A = 3, T = \pi$
 - $A = 4, T = 2\pi/3$
 - $A = 2, T = 2\pi$

APÈNDIX: PROBLEMES DE FUNCIONS EN LES P.A.A.U.

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$$

(1) Considera la funció: . a) Troba els intervals de creixement i decreixement i els seus extrems relatius.

b) Determina les seves asymptotes. c) Dibuixa la gràfica de $y = f(x)$.

(2) Donada la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. a) Calcula els intervals de creixement i decreixement de la funció. b) Troba, si existeixen, els màxims i mínims de la funció. c) Dibuixa aproximadament la seva gràfica.

(3) Es considera la funció real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, on a, b i c són números reals. Troba els valors de a, b i c per als que les rectes tangents a la gràfica de $f(x)$ en els punts d'abscisses $x = 2$ i $x = 4$ siguin paral·leles a l'eix OX , sabent a més que el punt d'inflexió de la gràfica de $f(x)$ està en l'eix OX .

(4) Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 . a) Calcula els valors de a i b perquè la funció sigui derivable en tots els números reals. b) Per a aquests valors de a i b troba els extrems de la funció i dibuixa la seva gràfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ a \cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(5) Sigui la funció . a) Estudia la seva continuïtat en tota la recta real en funció de a . b) Estudia el seu derivabilitat en tota la recta real en funció de a . c) Per a $a = 4$, fes un dibuix aproximat de la seva gràfica.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

(6) Es considera la funció . a) Estudia el domini de definició i calcula les asymptotes. b) Estudia els intervals de creixement, decreixement, concavitat i convexitat. c) Troba els màxims, mínims i punts d'inflexió. d) Esbossa la gràfica de la funció.

(7) Sabent que $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. a) Estudia la seva continuïtat en el punt $x = 0$. b) Usant la definició de derivada calcula, si existeix, la derivada de la funció f en $x = 0$. c) Dibuixa la gràfica de la funció.

(8) Donada la funció $y = 5x \cdot e^{x-1}$. a) Calcula els intervals de creixement i decreixement de la funció. b) Troba, si existeixen, els màxims, mínims i punts d'inflexió. c) Dibuixa aproximadament la seva gràfica.

(9) Sigui $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$. a) Determina el domini de definició, els intervals de creixement i decreixement i els màxims, mínims i punts d'inflexió. b) Troba les asymptotes i representa aproximadament la gràfica de la funció.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \text{ i } x \neq -1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(10) Sigui la funció . a) Troba un valor de la funció en $x = -1$ que la faci continua en aquest punt. b) Analitza la seva continuïtat i derivabilitat en tota la recta real. c) Traça la seva gràfica aproximada.

(11) Representa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ analitzant el domini d'existència, el creixement i el decreixement, els màxims i els mínims, la concavitat i la convexitat, els punts d'inflexió i les asymptotes.

(12) a) Representa gràficament les funcions $f(x) = x^2 - 4x + 3$ i $g(x) = |x|$.

b) Utilitza les gràfiques anteriors per a obtenir les de les funcions $y = f(g(x))$ e $y = g(f(x))$.

(13) Un model simplificat de l'altura a què es troba un projectil condueix a la següent expressió ($f(x)$ representa l'altura, en metres, a la que es troba el projectil als x segons de ser llançat):

$$f(x) = 250 - \frac{250}{x+1} - 10x, \quad 0 \leq x \leq 24$$

a) Dibuixa la gràfica de la funció. En quin instant el projectil comença a caure?

b) Podríem enderrocar amb ell un objecte que vola a 250 metres d'altura?

- (14) a) Calcula per a quin valor de α la funció $f(x) = (x - \alpha)^2 + \cos(x)$ té un extrem en el punt d'abscissa $x = 0$. De quin tipus d'extrem es tracta? b) Per al valor de α calculat, determina els talls de la corba amb els eixos i els dominis de monotonia.

- (15) El temps que un empleat tarda a realitzar una tasca varia durant els quatre primers mesos de contracte segons la seva experiència. Així, la funció que relaciona el temps empleat a realitzar la tasca amb l'experiència de l'operari és ($f(x)$ representa el temps, en hores, que tarda a realitzar la tasca un empleat que porta contractat un temps x , mesurat en mesos):

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x - 4)^2 + 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

- a) Representa gràficament la funció f . És el temps necessari per a realitzar la tasca una funció contínua del temps d'experiència? b) En quin moment el temps necessari per a realitzar la tasca és mínim? Quant temps li porta finalitzar la tasca en aquest instant? Aconsegueix l'empleat finalitzar la tasca en menys de 3 hores en algun moment durant els primers quatre mesos de contracte?
- (16) Per a un determinat model de cotxe la relació existent entre la velocitat a què circula i el consum ve donada a través de la següent expressió ($f(x)$ representa el consum en litres cada 100 km a una velocitat de x km/h):

$$f(x) = 2 + \frac{x}{90} + \frac{90}{x}, x > 10$$

- a) Dibuixa la gràfica de la funció. Quina és la velocitat òptima a què s'ha de circular per a consumir la menor quantitat de combustible possible? b) En algun instant el consum augmenta a l'augmentar la velocitat? És possible conduir amb un consum de 3 litres cada 100 km?
- (17) El percentatge d'ocupació d'una cafeteria entre les 13 i les 21 hores s'explica prou bé per la següent funció ($P(x)$ representa el percentatge d'ocupació a les x hores). $P(x) = (x^2 - 55x) \cdot (x + 1) + 1015x - 5542$, $13 \leq x \leq 21$
- a) Indica els intervals de temps en què l'ocupació creix i aquells en què decreix. b) Dibuixa la funció. Quan s'aconsegueix el percentatge d'ocupació més alt? i el més baix? Quant valen? c) La funció té algun màxim o mínim relatiu que no sigui absolut?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

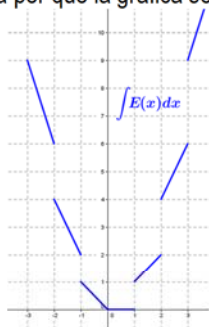
- (18) Donat $a \in \mathbb{R}$, es considera la funció $f(x)$. a) Determina els valors de a per als que la funció és contínua. b) Representa gràficament la funció.

CAPÍTOL 10: INTEGRALS

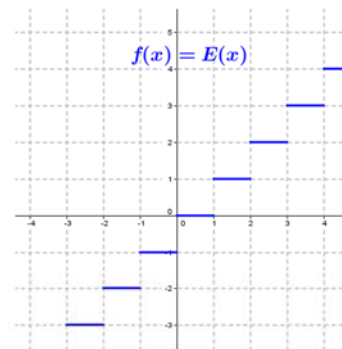
ACTIVITATS PROPOSADAES

1. PRIMITIVA D'UNA FUNCIÓ. LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Calcula les següents primitives: a) $\int 4x^3 dx$, b) $\int 3x^2 dx$, c) $\int 5x^4 dx$, d) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2) dx$
2. Donada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva que verifica $F(0) = 4$.
3. Comprova si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ és una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En cas negatiu, explica per què.
4. Determina els valors de a, b, c i d per als que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ és una primitiva de la funció $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.
5. Al resoldre una primitiva, en Xavier i en Ricard han utilitzat mètodes diferents i, com era d'esperar, han obtingut expressions distintes. Després de revisar-ho moltes vegades i no trobar cap error en els càlculs, li porten el problema a la professora per a veure qui té bé l'exercici. Per a la seva sorpresa, la professora els diu que ambdós tenen bé el problema. Com és possible?
6. Raona per què la gràfica següent:



és una primitiva de la funció "part entera de x ", $E(x)$, (llevat dels punts de discontinuïtat on no és derivable):



3. MÈTODES D'INTEGRACIÓ

7. Calcula les següents primitives utilitzant el canvi indicat:

a) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$

fent $x = t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

haciendo $e^x = t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$

fent $1+2x = t^2$

d) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

haciendo $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$

e) $\int \sin x \cos x dx$

fent $\sin x = t$

f) $\int \sin x \cos x dx$

haciendo $\cos x = t$

8. Tria el canvi de variable que simplifica les integrals següents:

a) $\int \frac{2x^3 + 1}{(x^4 + 2x)^3} dx$

b) $\int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int 2x^3 \sqrt{x^4 - 49} \cdot dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

9. Determina si les següents integrals són immediates o no:

a) $\int \left(4x^3 + 3x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

c) $\int \sin x \cos x dx$

d) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e) $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

f) $\int \frac{\ln(x+1)}{x} dx$

g) $\int \lg x \cos x dx$

h) $\int \frac{(x^2-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $\int e^{x^2} dx$

j) $\int x^2 \cdot e^{x^2} dx$

k) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$

10. Resol les integrals següents:

a) $\int (e^{3x} + e^{2x} + e^x) e^x dx$

b) $\int (\ln x + 2) \frac{dx}{x}$

c) $\int \ln(\cos x) \lg x dx$

d) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$

i) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

j) $\int x \cdot \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} dx$

11. Resol les integrals següents:

a) $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$

b) $\int \ln x dx$

c) $\int x \cos x dx$

d) $\int \arcsin x dx$

e) $\int \sin ax \cdot e^{bx} dx$ amb $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Resol les següents primitives:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

c) $\int \frac{x dx}{(x+1)^2}$

d) $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$

e) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

f) $\int \frac{3x^2 + 1}{(2x-1) \cdot (3x^2 + 2)} dx$

g) $\int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)} dx$

h) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 3}{x^2 + 1} dx$

i) $\int \frac{(x+1) \cdot dx}{(x-1)(x+1)^2(x^2 + 1)}$

j) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

13. Resol les següents primitives:

a) $\int \sin\left(\frac{3}{2}x + 1\right) dx$

b) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$

c) $\int \frac{\cotg x dx}{\sin^2 x}$

d) $\int \frac{\sin 2x dx}{(\cos 2x + 1)^2}$

e) $\int \tg^2 x dx$

f) $\int (\tg^2 x + x + 1) dx$

g) $\int \frac{\cotg x dx}{\sin^2 x}$

h) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin x}$

j) $\int \sin^2 x \cos x dx$

k) $\int \sin^2 x dx$

l) $\int \sin^4 x dx$

m) $\int \cos^4 x dx$

n) $\int \cos(\ln x) dx$

RESUM**QUADRE DE PRIMITIVES**

$\int dx = x + C$ $\int (f(x) \pm g(x) \pm \dots) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \pm \dots$ $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C, n \neq -1$ $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$ $\int \cos[f(x)] f'(x) dx = \sin[f(x)] + C$ $\int \sec[f(x)] \cdot \tg[f(x)] f'(x) dx = \sec[f(x)] + C$ $\int \operatorname{cosec}^2[f(x)] f'(x) dx = -\cotg[f(x)] + C$ $\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{1-f(x)^2}} = \begin{cases} \arcsin[f(x)] + C \\ -\arccos[f(x)] + C \end{cases}$		$\int f'(x) dx = f(x) + C$ $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$ $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$ $\int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos[f(x)] + C$ $\int \sec^2[f(x)] f'(x) dx = \tg[f(x)] + C$ $\int \frac{f'(x) dx}{1+f(x)^2} = \begin{cases} \arctg[f(x)] + C \\ -\operatorname{arccotg}[f(x)] + C \end{cases}$ $\int \frac{f'(x) dx}{f(x)\sqrt{f(x)^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arcsec}[f(x)] + C \\ -\operatorname{arccosec}[f(x)] + C \end{cases}$
Mètode d'integració per canvi de variable	1. $\int g[f(x)] \cdot f'(x) dx \rightarrow t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x) dx \rightarrow \int g(t) dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[f(x)] + C$ 2. $\int f(x) dx \rightarrow x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt \rightarrow \int f[g(t)] g'(t) dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[g^{-1}(x)] + C$	
Mètode d'integració per parts		$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Regla de Barrow		$\int_a^b f(x) dx = (F(x))_a^b = F(b) - F(a)$

Àrea entre una corba i l'eix OX	$A = \int_a^b f(x) dx$
Àrea entre dues corbes	$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$
Volum de revolució en torno a l'eix OX	$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. - Sabent que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ i $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

- 1) $\int x^5 dx$
- 2) $\int \frac{4}{x^5} dx$
- 3) $\int \frac{dx}{x^2}$
- 4) $\int 37 dx$
- 5) $\int 6x^7 dx$
- 6) $\int 5x^{1/4} dx$
- 7) $\int 5\sqrt{x^3} dx$
- 8) $\int (3-2x-x^4) dx$
- 9) $\int (2x^5-5x+3) dx$
- 10) $\int (2+3x^3)^2 dx$
- 11) $\int 2(x^2+2)^3 dx$
- 12) $\int (1-x^3)^2 dx$
- 13) $\int \frac{x^3-x+2}{x^3} dx$
- 14) $\int \left(-4x^{\frac{2}{3}} + 2x \right) dx$
- 15) $\int \left(3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a \right) dx$
- 16) $\int \left(-\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$
- 17) $\int \left(3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2} \right) dx$
- 18) $\int (1-x)\sqrt{x} dx$
- 19) $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$
- 20) $\int \left(5e^x + \frac{2x^3-3x^2+5}{4x^2} \right) dx$
- 21) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$
- 22) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$
- 23) $\int \sqrt{x}(x^3+1) dx$
- 24) $\int \left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}} \right) dx$
- 25) $\int \sqrt{x}(3-5x) dx$
- 26) $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx$
- 27) $\int (3x+4)^2 dx$
- 28) $\int (3x-7)^4 dx$
- 29) $\int x(x^2-4)^3 dx$
- 30) $\int 3x(x^2+2)^3 dx$
- 31) $\int (x^3+2)^2 x^2 dx$
- 32) $\int (x^3+3)x^2 dx$
- 33) $\int (x-2)^{3/2} dx$
- 34) $\int (a+x)^3 dx$
- 35) $\int [(x+2)^3 - (x+2)^2] dx$
- 36) $\int \sqrt{3x+12} dx$
- 37) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$
- 38) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$
- 39) $\int (x^2-x)^4(2x-1) dx$
- 40) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} (1+\sqrt{x})^2 dx$
- 41) $\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2} dx$
- 42) $\int \frac{x dx}{(x^2+4)^3}$
- 43) $\int x\sqrt{x^2-7} dx$
- 44) $\int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx$
- 45) $\int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}} dx$
- 46) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^2} dx$
- 47) $\int \frac{3x dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$
- 48) $\int x \cdot \sqrt[3]{1-x^2} dx$
- 49) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx$
- 50) $\int x^2(x^3-1)^{3/5} dx$
- 51) $\int \sqrt{x^2-2x^4} dx$
- 52) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$
- 53) $\int \sin^3 x \cos x dx$
- 54) $\int x \cos^4 x^2 \sin x^2 dx$
- 55) $\int \frac{x \ln(x^2+3)}{x^2+3} dx$
- 56) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
- 57) $\int \frac{e^x}{2e^x-3} dx$
- 58) $\int \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x dx$
- 59) $\int \frac{\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx$
- 60) $\int \frac{\ln x}{3x} dx$

2. - Sabent que $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ i $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

- 1) $\int \frac{dx}{x+2}$
- 2) $\int \frac{dx}{2x-3}$
- 3) $\int \frac{dx}{x-1}$
- 4) $\int \frac{x dx}{x^2-1}$
- 5) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx$
- 6) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$

- 7) $\int \frac{3x}{x^2+2} dx$ 8) $\int \frac{4}{3x+5} dx$ 9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ 10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$
- 11) $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x} \right) dx$ 12) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$
- 14) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$ 15) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ 16) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$ 17) $\int \operatorname{tg} x dx$
- 18) $\int \cotg x dx$ 19) $\int \frac{5}{x \ln x} dx$ 20) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} dx$
- 21) $\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$ 22) $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$ 23) $\int x \cotg x^2 dx$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

3. - Si , i , calcula:

- 1) $\int 3^x dx$ 2) $\int a^{4x} dx$ 3) $\int e^{-x} dx$ 4) $\int 4e^{3x} dx$
- 5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx$ 6) $\int 4e^{4-x} dx$ 7) $\int x^2 e^{x^3} dx$ 8) $\int (e^x + 1)^2 dx$
- 9) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right)^2 dx$ 10) $\int (e^x + x^6)^2 dx$ 11) $\int e^{-x^2+2} x dx$ 12) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$
- 13) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ 14) $\int x e^{\operatorname{sen} x^2} \cos x^2 dx$ 15) $\int e^{3 \cos 2x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx$
- 16) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx$ 17) $\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x dx$ 18) $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3} \right) dx$
- 19) $\int e^{\operatorname{tg} 2x} \sec^2 2x dx$ 20) $\int \frac{2x}{3} \cdot 3^{3+5x^2} dx$ 21) $\int \frac{x}{2} \cdot 2^{3-5x^2} dx$

4. Sabent que $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$, $\int f'(x) \cdot \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + C$,
i $\int \cos f(x) f'(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + C$ calcula:

- 1) $\int \operatorname{sen}(2x+8) dx$ 2) $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx$ 3) $\int \cos 3x dx$
- 4) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$ 5) $\int \left(\frac{3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{4} \right) dx$ 6) $\int \operatorname{sen} 2x dx$
- 7) $\int e^x \cos e^x dx$ 8) $\int x \cos(2x^2) \cdot \operatorname{sen}(2x^2) dx$ 9) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx$

5. - Si $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$ i $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int [1 + \operatorname{tg}^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \operatorname{tg} f(x) + C$, calcula:

- 1) $\int x(1 + \operatorname{tg} x^2) dx$ 2) $\int (1 + \operatorname{tg} x)^2 dx$ 3) $\int \operatorname{tg}^2 3x dx$

6. - Troba el valor de les següents integrals, usant un canvi de variable:

- 1) $\int (2+5x)^4 dx$ 2) $\int (3+4x)^6 dx$ 3) $\int 6x(3+x^2)^5 dx$
- 4) $\int \left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3} \right] dx$ 5) $\int (\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}) dx$ 6) $\int \left(\frac{e^x - 4}{e^{2x}} \right) dx$
- 7) $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x \cdot dx$ 8) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$ 9) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} dx$

10) $\int x\sqrt{x^2+4} dx$

11) $\int \left(\frac{e^x+3}{e^{2x}} \right) dx$

12) $\int \left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}} \right) dx$

13) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2} dx$

14) $\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x} dx$

15) $\int \sin \sqrt{x} dx$

7. – Troba el valor de les següents integrals, usant el mètode d'integració per parts:

1) $\int 3x \cos x dx$

2) $\int x^2 \cdot \sin x dx$

3) $\int x^2 \ln x dx$

4) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

5) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

6) $\int 2e^x \cdot \cos x \cdot dx$

7) $\int 2e^x \cdot \sin x dx$

8) $\int e^x \cdot \cos 3x dx$

9) $\int \frac{4-2x^2}{x} \cdot \ln x dx$

8. – Troba el valor de les següents integrals racionals:

1) $\int \frac{2}{x^2+1} dx$

2) $\int \frac{3}{2x^2+2} dx$

3) $\int \frac{3}{x-3} dx$

4) $\int \frac{2}{3x^2+3} dx$

5) $\int \frac{5x}{x^2+3} dx$

6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1} dx$

7) $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2} dx$

8) $\int \frac{x+2}{x+1} dx$

9) $\int \frac{x-1}{x+1} dx$

10) $\int \frac{3x-1}{x+3} dx$

11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4} dx$

12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1} dx$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2} dx$

14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2} dx$

15) $\int \frac{2}{x^2-4} dx$

16) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x} dx$

17) $\int \frac{4x+3}{x^2-1} dx$

18) $\int \frac{3x^2}{x^2+6x+9} dx$

19) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6} dx$

20) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4} dx$

21) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x} dx$

22) $\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2} dx$

23) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx$

24) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx$

9. – Troba el valor de les següents integrals definides:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x}$

2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x dx$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$

5) $\int_{-4}^4 |x| dx$

6) $\int_{-1}^1 \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx$

7) $\int_{-1}^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3} \right) dx$

8) $\int_{-2}^2 \left(\frac{3a}{5} - \frac{x}{2} \right) dx$

9) $\int_2^3 \frac{1}{x \cdot (\ln x)^3} dx$

10) $\int_{-2}^0 \left(e^{2x} + \frac{3}{e^{3x}} \right) dx$

11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)^2 dx$

10. – Troba el valor de b perquè es compleixi $\int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = -12$.

11. – Troba l'àrea compresa entre la funció $f(x) = x^2 - 4x$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 1$ i $x = 6$.

12. – Troba l'àrea limitada per la funció $f(x) = 0.5 + \cos x$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = \pi$.

13. – Troba l'àrea de la regió limitada per la funció $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ i l'eix d'abscisses.

14. – Calcula l'àrea de la porció de pla que limiten les corbes $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e $y - x - 1 = 0$.

15. – Troba l'àrea delimitada per les gràfiques: a) $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$; b) $f(x) = x^2 + x + 4$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 5$

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors de a , b i c per als que $F(x) = ax^3 + be^x + c \operatorname{sen} x$ sigui una primitiva de la funció $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5 \cos x$ són:
 a) 1, -7, 5; b) 3, 7, -5; c) 1, -7, -5; d) 3, -7, 5
2. La integral immediata $\int x\sqrt{2x^2+3} dx$ val:
 a) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6} + C$; b) $\frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + C$ c) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{4} + C$; d) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^2}}{6} + C$
3. La integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ val:
 a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$; b) $\operatorname{tg}(\arccos x) + C$; c) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$; d) $\operatorname{arc tg}(\operatorname{arc sen} x) + C$
4. A l'integrar per parts $\int \frac{x \cdot e^{\operatorname{arc sen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ s'obté:
 a) $e^{\operatorname{arc sen} x} \left(\sqrt{1-x^2} \right)$; b) $\frac{1}{2} e^{\operatorname{arc sen} x} \left(x + \sqrt{1-x^2} \right) + C$ c) $e^{\operatorname{sen} x} \left(x - \sqrt{1-x^2} \right) + C$ d) $\frac{1}{2} e^{\operatorname{arc sen} x} \left(x - \sqrt{1-x^2} \right) + C$
5. La integral $\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13} dx$ val: a) $\ln(x^2+4x+13) - \operatorname{arc tg} \frac{x+2}{3} + C$; b) $\ln(x^2+4x+13) - \operatorname{arc tg} \frac{2x+2}{3} + C$; c) $\ln(x^2+4x+13) - \operatorname{arc tg} \frac{x+2}{5} + C$; d) $\ln(x^2+4x+13) - \operatorname{arc tg} \frac{2x+2}{5} + C$
6. La integral $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ val:
 a) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x + C$; b) $-\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$ c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + C$; d) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$
7. La integral definida $\int_0^\pi \cos x dx$ val: a) 1; b) π c) 0; d) -1
8. L'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x) = -x^2 + 4x$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$ val:
 a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3
9. L'àrea compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x) = -x^2 + 4x$ i $g(x) = x$ val:
 a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3
10. El volum del sòlid de revolució generat per $y = x^2$, entre 0 i 2, al girar entorn de l'eix d'abscisses és:
 a) 32π ; b) $16\pi/5$ c) 16π ; d) $32\pi/5$

APÈNDIX: PROBLEMES D'INTEGRALS EN LES P.A.U.

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt[3]{x}}$$

- (1) Calcula una primitiva de la funció
 (2) Calcula:

a) $\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2} dx$

b) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 3x}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(2x) + x \cdot \operatorname{sen} x) dx$

e) $\int e^x \cos 3x dx$

f) $\int \operatorname{arc tan}(3x) dx$

- (3) Calcula fent el canvi de variable $e^x = t$:

a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$

b) $\int \frac{e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x} dx$

- (4) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} + x \cos x) dx$

- (5) a) Troba totes les funcions $f(x)$ la segona derivada de les quals és $f''(x) = xe^x$.
 b) De totes elles, determina aquella la gràfica de la qual passa pels punts $A(0, 2)$ i $B(2, 0)$.

- (6) Considera la funció $-3y = x^3 - 3x^2 + 1$

- a) Determina la recta tangent en el punt en què la funció aconsegueix el seu màxim relatiu.
 b) Dibuixa el recinte limitat per la corba i la recta tangent anterior.
 c) Troba l'àrea del recinte de l'apartat (b).
- (7) Obté l'àrea del recinte tancat per les corbes $y = 1 + \cos x$ e $y = 0$ en l'interval $[-\pi, +\pi]$.
- (8) Considera la funció $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$
 a) Dibuixa el recinte tancat per la gràfica de l'eix OX i les rectes $x=0$ i $x = \frac{\pi}{2}$.
 b) Calcula l'àrea del recinte anterior.
- (9) a) Dibuixa el recinte pla limitat per la paràbola $y = 4x - x^2$ i les tangents a la corba en els punts d'intersecció amb l'eix d'abscisses.
 b) Troba l'àrea del recinte dibuixat en (a).
- (10) Troba l'àrea de la zona del pla limitada per les rectes $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$, i la gràfica de la corba $y = \ln^2(x)$.
- (11) Les gràfiques de les funcions $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ i $g(x) = x^2$ limiten un recinte finit en el pla.
 a) Dibuixa un esquema del recinte.
 b) Calcula la seva àrea.
- (12) Sigui $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, on $\ln x$ significa logaritme neperià de x .
 a) Dibuixa el recinte tancat comprès entre la gràfica de $f(x)$ i la recta $y = 1$.
 b) Calcula l'àrea del recinte anterior.
- (13) Sigui la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \begin{cases} 4x+12 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-4x+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$
 a) Fes un dibuix aproximat de la gràfica de la funció f .
 b) Calcula l'àrea del recinte limitat per la funció f , l'eix d'abscisses i la recta $x = 2$.
- (14) Sigui la paràbola $y = x^2 - 3x + 6$
 a) Troba l'equació de la tangent a la gràfica d'eixa corba en el punt d'abscissa $x = 3$.
 b) Fes un dibuix aproximat del recinte limitat per la gràfica de la paràbola, l'eix OY i la recta tangent trobada anteriorment.
 c) Calcula l'àrea del recinte anterior.
- (15) Donada la funció $f(x) = (x-a)\cos x$, busca el valor del número real a sabent que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} - 2$.
- (16) Considera les corbes $f(x) = x^2 - 3x - 2$ i $g(x) = x^2 - x - 2$.
 a) Troba els seus punts d'intersecció.
 b) Representa el recinte limitat que tanquen entre elles.
 c) Troba l'àrea del recinte limitat per les dues corbes.
- (17) Les corbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i la recta $x = 1$ limiten un recinte finit en el pla.
 a) Dibuixa un esquema del recinte.
 b) Calcula la seva àrea.
- (18) Es considera la corba d'equació $y = x^3 - 2x^2 + x$
 a) Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica d'eixa corba en l'origen.
 b) Dibuixa un esquema del recinte limitat per la gràfica de la corba i la recta trobada.
 c) Calcula l'àrea d'aquest recinte.
- (19) La derivada d'una funció $f(x)$ és $f'(x) = (x+2) \cdot (x^2 - 9)$
 a) Calcula els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims de $f(x)$.
 b) Determina la funció f sabent que $f(0) = \frac{1}{5}$.
- (20) La gràfica de la paràbola $y = 2x^2$ divideix al quadrat de vèrtexs $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ i $D(0,2)$ en dos recintes plans.
 a) Dibuixa la gràfica de la funció i els recintes.
 b) Calcula l'àrea de cada un d'ells.
- (21) a) Calcula la funció $f(x)$ sabent que la seva derivada és $f'(x) = (x-1)e^x$ i que $f(2) = e$.
 b) Demostra que $f(x)$ té un extrem relatiu en un punt de l'eix d'abscisses i raona si és màxim o mínim.

- (22) Les gràfiques de la corba $y = x^3$ i de la paràbola $y = x^2 + 2x$ tanquen un recinte pla.
 a) Dibuixa aquest recinte.
 b) Calcula la seva àrea.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- (23) Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per
 a) Calcula m i n perquè f sigui contínua en tot el seu domini.
 b) Per a eixos valors trobats, calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f i la recta $y = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (24) Sigui la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per
 a) Dibuixa la gràfica de la funció.
 b) Troba l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f i l'eix d'abscisses.

- (25) La corba $y = x^3 - 3x$ i la recta $y = x$ limiten un recinte finit en el pla.
 a) Dibuixa un esquema del recinte.
 b) Calcula la seva àrea.

- (26) La paràbola $x = y^2 + 1$ i la recta $x = 3$ limiten un recinte finit en el pla.
 a) Dibuixa un esquema del recinte.
 b) Calcula la seva àrea.

- (27) La corba $y = x^2 + 3$ i la recta $y = 2x + 3$ limiten un recinte finit en el pla.
 a) Dibuixa un esquema del recinte.
 b) Calcula la seva àrea.

- (28) Es considera la paràbola $y = 6x - x^2$
 a) Calcula l'equació de les rectes tangents a la gràfica de la paràbola en els punts de tall amb l'eix OX .
 b) Dibuixa un esquema del recinte limitat per la gràfica de la paràbola i les rectes trobades anteriorment.
 c) Calcula l'àrea d'aquest recinte.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ e^{x-2} + k^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- (29) Es considera la funció
 a) Determina el valor de $k > 0$ perquè la funció sigui contínua en l'interval $[0, 4]$.
 b) Suposant que $k = 1$, troba la recta tangent en $x = 3$.
 c) Suposant que $k = 1$, troba l'àrea que la funció determina amb l'eix OX , per a $x \in [0, 4]$.

- (30) a) Resol per parts la integral següent: $\int x(1 - \ln x) dx$
 b) De totes les primitives de $f(x) = x(1 - \ln x)$ calcula la que passa pel punt $(1, 3)$.

- (31) La gràfica de la paràbola $y^2 = 8x$ i la recta $x = 2$ tanquen un recinte pla.
 a) Dibuixa aproximadament el dit recinte.
 b) Calcula l'àrea d'aquest recinte.

- (32) La gràfica de la corba $f(x) = \frac{4}{2-x}$ i les rectes $y = 4$ i $x = 0$ tanquen un recinte pla.
 a) Dibuixa aproximadament el dit recinte.
 b) Calcula l'àrea d'aquest recinte.

- (33) Esbossa la gràfica de la paràbola $y = -x^2 + x + \frac{7}{4}$ i troba l'àrea de la regió del pla determinada per la paràbola i la recta que passa pels punts $(0, \frac{1}{4})$ i $(\frac{1}{6}, 0)$.

- (34) Es disposa d'una xapa d'acer que pot representar-se per la regió del pla determinada per la paràbola $y = -x^2 + 4$ i la recta $y = 1$. a) Representa gràficament la xapa i calcula la seva àrea. b) Determina les dimensions del rectangle d'àrea màxima que es pot obtenir a partir d'aquesta xapa amb la condició que un dels seus costats estigui en la recta $y = 1$.

- (35) Representa gràficament les paràboles $y^2 - 4x = 0$ i $x^2 - 4y = 0$ i calcula l'àrea que tanquen.

(36) Es considera la funció $f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 + 1}$. a) Troba els màxims, mínims i punts d'inflexió. b) Per a $x \in [0, 5]$, esbossa la gràfica de la funció i calcula l'àrea compresa entre ella i l'eix X .

(37) Es considera la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. a) Troba les seves asímptotes, màxims i mínims. b) Representa gràficament la funció. c) Troba l'àrea delimitada per la funció i l'eix OX , per a $-1 \leq x \leq 1$.

(38) a) Calcula: $\int x^3 \ln(x) dx$ on $\ln(x)$ és el logaritme neperià de x .

b) Utilitza el canvi de variable $x = e^t - e^{-t}$ per a calcular $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

$$\ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)$$

Indicació: Per a desfer el canvi de variable utilitzar: $t =$

(39) a) Si f és una funció contínua, obtenir $F'(x)$ sent:

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

b) Si $f(1) = 1$ i a més $\int_0^1 f(t) dt = 1$, troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de $F(x)$ en el punt $(1, F(1))$.

(40) Sigui la funció $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$. A) Calcular $\int f(t) dt$. B) Es defineix $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

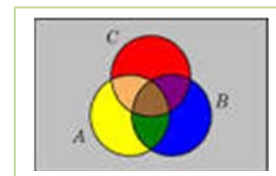
(41) a) Troba l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x) = -\sin(x)$ i l'eix OX entre les abscisses $x = 0$ i $x = 2\pi$. b) Troba el volum del sòlid de revolució que s'obté al fer girar la gràfica de $f(x) = -\sin(x)$ al voltant de l'eix OX entre les abscisses $x = 0$ i $x = 2\pi$.

CAPÍTOL 11: PROBABILITAT I COMBINATÒRIA

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PROBABILITAT

- Indica si són, o no, fenòmens aleatoris:
 - La superfície de les províncies espanyoles.
 - Anotar el sexe del pròxim bebè nascut en una clínica determinada.
 - L'àrea d'un quadrat del que es coneix el costat.
 - Tirar tres daus i anotar la suma dels valors obtinguts.
 - Saber si l'any que ve és bixest.
- Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Escriure en cinc targetes cada una de les vocals i treure una a l'atzar".
- Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Tirar una xinxeta i anotar si cau de punta o no".
- Inventa dos esdeveniments de l'experiment aleatori: *Tirar dues monedes*.
- En el joc de loteria, indica dos esdeveniments respecte a la xifra de les unitats del primer premi.
- Escriu tres esdeveniments aleatoris de l'experiment aleatori treure una carta d'una baralla espanyola.
- Al treure una carta d'una baralla espanyola, anomenem B al succés treure un as i A al succés treure una figura. Escriu els esdeveniments $A \cup B$, $A \cap B$ i $A - B$.
- Sigui A l succés tirar un dau i treure un nombre més gran que 4. Escriu el succés contrari de A .
- Un succés i el seu succés contrari, com són, compatibles o incompatibles? Raona la resposta.
- En l'experiment aleatori, treure una carta d'una baralla espanyola, escriu tres esdeveniments incompatibles amb el succés "treure un as".
- Utilitza un diagrama de Venn per a escriure $A \cup B \cup C$ com a unió de conjunts disjunts.
- Considera ara un diagrama de Venn amb només dos conjunts, i representa en ell la situació següent: Se sap que en un grup de treball de 35 persones, hi ha 15 persones que prenen te, 27 que prenen cafè i 2 persones que no prenen cap beguda.



- Sumen més de 35? Això és perquè hi ha persones que prenen te i cafè, quantes?
 - Quantes persones només prenen te i quantes prenen només cafè?
 - Cridarem A al conjunt de les persones que prenen te, i B al de què prenen cafè. Anomena amb lletres als conjunts següents i indica de quantes persones estan formats: a) Prenen cafè i te. b) No prenen ni cafè ni te. c) Prenen te o bé prenen te. d) Prenen te i no prenen cafè.
 - D'entre les persones que prenen cafè, quantes prenen també te? A aquest conjunt l'anomenem A/B .
 - Quantes persones no prenen cafè? Anomena'l amb lletres.
 - Quantes persones prenen almenys una de les dues begudes? Compara el resultat amb el de les persones que no prenen cap de les dues mesures.
- En el mateix lloc del problema anterior, amb 35 persones, ara s'ha afegit a la màquina de begudes el xocolata (C), i ara se sap que 12 persones prenen només te, que 5 persones prenen te i xocolata però no cafè, que 20 persones no prenen ni te ni xocolata. És possible saber quantes persones prenen almenys una de les tres begudes; quantes, d'entre les que prenen cafè, prenen també xocolata... Investiga si tens dades suficients per a conèixer-ho tot, o has d'ampliar l'enquesta per a conèixer dades noves.
 - Calcula la probabilitat que al treure una carta de la baralla sigui una espasa.
 - Per a saber la probabilitat que un infant de bolquers sigui esquerrà, et basaries en l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?
 - Quina és la probabilitat de no treure un 5 al tirar un dau? I de no treure un múltiple de 3? I de no treure un número menor que 2?
 - En tirar una moneda dues vegades, quina és la probabilitat de no treure cap cara? I de treure almenys una cara? Observa que treure almenys una cara és el succés contrari de no treure cap cara.
 - Fes un diagrama en arbre semblant a l'anterior en el teu quadern amb els esdeveniments A i B : A = treure un as en la primera extracció, $\bar{A}$ = no treure as, i B = treure un as en la segona extracció, $\bar{B}$ = no treure as en la segona extracció. Quina és la probabilitat de treure as en la segona extracció condicionat a no haver-ho tret en la primera? I la de no treure as en la segona extracció condicionat a no haver-ho tret en la primera? Quina és la probabilitat de treure dos asos? I la de treure un sol as?
 - En el diagrama d'arbre anterior indica qual és la probabilitat de "no surten 2 asos" i la de "no surt cap as".
 - En l'experiment "treure tres cartes seguides", quina és la probabilitat de treure tres asos? Primer amb reemplaçament, i després sense reemplaçament.
 - Al tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat que surti un sis doble.
 - Al tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat de treure almenys un 6. *Ajuda:* Potser et sigui més fàcil calcular la probabilitat de no treure cap 6, i utilitzar el succés contrari.
 - Llançam dos daus que no estiguin trucats i anotam els números de la seva cara superior. Considerem el succés A que la suma de les dues cares sigui 8, i el succés B que aquests números difereixin en dues unitats. a) Comprova que $P(A) = 5/36$ (casos favorables: $2 + 6$; $3 + 5$; $4 + 4$; $5 + 3$; $6 + 2$) i que $P(B) = 8/36$ (casos favorables: $(1, 3)$, $(2, 4)$, ...). b) Calcula les probabilitats de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \bar{B})$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. c) Calcula $P(A|B)$; $P(A|\bar{B})$; $P(\bar{A}|B)$.

24. La probabilitat del succés A és $2/3$, la del succés B és $3/4$ i la de la intersecció és $5/8$. Troba: La probabilitat que es verifiqui algun dels dos. La probabilitat que no passi B . La probabilitat que no es verifiqui ni A ni B . La probabilitat que passi A si s'ha verificat B .
Selectivitat. Setembre 96
25. En un supermercat s'ha estudiat el nombre de clients que compren tres productes A , B i C . De l'estudi s'ha obtingut que un 14 % dels clients compra el producte A i un 12 % compra el producte B . A més, un 4 % compra A i B , un 2 % compra A i C i cap client que compri C compra també B . Quants clients compren únicament el producte B ? Sabent que un client ha comprat A , quina és la probabilitat que també hagi comprat C però no B ?
Selectivitat. Curs 96/97
26. Siguin A i B dos esdeveniments associats a un experiment aleatori. Sabent que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ i $P(A \cup B) = 7/15$, trobar: La probabilitat que es verifiqui A i B . La probabilitat que es verifiqui A i no B . La probabilitat que no es verifiqui ni A ni B . La probabilitat que no es verifiqui A , si no s'ha verificat B .
Selectivitat.

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$$

27. Siguin A i B dos esdeveniments aleatoris tals que:

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} / B)$, $P(\bar{B} / A)$.

Selectivitat. Setembre 07

28. Es consideren dos esdeveniments A i B tals que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula raonadament: (a) $P(A \cap B)$.
(b) $P(B)$. (c) $P(\bar{B} / A)$ (d) $P(\bar{A} / \bar{B})$. Nota. $\bar{S}$ denota el succés complementari del succés S . $P(S|T)$ denota la probabilitat del succés S condicionada al succés T .
Selectivitat. Setembre 2012

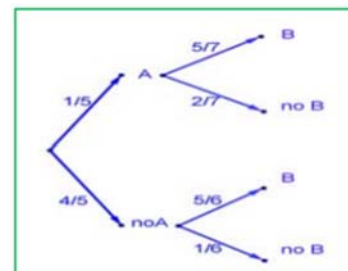
29. Dibuixa en el teu quadern un diagrama en arbre per a tres incendis, i calcula la probabilitat que almenys un hagi sigut intencionat sent $P(I) = 0'6$.
30. En una aeronau s'han instal·lat tres dispositius de seguretat: A , B i C . Si falla A es posa B en funcionament, i si també falla B comença a funcionar C . Les probabilitats que funcione correctament cada dispositiu són: $P(A) = 0'96$; $P(B) = 0'98$ i $P(C) = 0'99$. a) Calcula la probabilitat que fallen els tres dispositius. b) Calcula la probabilitat que tot vagi bé.
31. Una fàbrica de nines rebutja normalment el 0'3 % de la seva producció per fallades deguts a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) A l'agafar dues nines a l'atzar hagi que rebutjar ambdós. b) A l'agafar dues nines a l'atzar hagi que rebutjar només una. c) A l'agafar dues nines a l'atzar no hagi que rebutjar cap d) Verifiquem 4 nines, calcula la probabilitat de rebutjar únicament la tercera nina triada.
32. Llançam una moneda fins que aparegui dues vegades seguides del mateix costat. Calcula les probabilitats que: A) L'experiència acaba al segon llançament. B) Acaba al tercer llançament. C) Acaba en el quart. D) Acaba com a màxim en el quart llançament (és a dir, que acabe en el segon o en el tercer o en el quart llançament).
33. S'ha fet un estudi estadístic sobre accidents de tràfic i s'han determinat les següents probabilitats reflectides en la taula de contingència:

	Accident en carretera (C)	Accident en zona urbana (U)	Total s
Accident amb víctimes (V)	0'27		0'56
Accident amb només danys materials (M)			
Totals	0'58		1

- a) Copia la taula en el teu quadern i completa-la. b) Determina les probabilitats següents: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ i $P(U)$. c) Calcula $P(U|V)$; $P(C|V)$; $P(V|U)$; $P(V|C)$. Són dependents o independents els esdeveniments: accident amb víctimes i accident en carretera?
34. Inventa una taula de contingència considerant que els accidents puguin ser de carretera (C) o urbans (U), però que ara els classificam en lleus (L), greus (G) o mortals (M). Observa que el més important per a confeccionar la taula és que els esdeveniments siguin incompatibles dos a dos.
35. Donada la taula de contingència, construeix dos diagrames d'arbre.

	A	No A = $\bar{A}$	
B	0'4	0'2	0'6
No B = $\bar{B}$	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

36. Donat el diagrama d'arbre del marge, construeix la taula de contingència, i després l'altre diagrama
37. Tenim dues urnes, A i B . La primera amb 8 bolles blanques i 2 bolles negres. La segona amb 4 bolles blanques i 6 bolles negres. Es treu una bolla a l'atzar, d'una de les dues urnes, també a l'atzar i resulta ser negra. Quina és la probabilitat de què provengui de l'urna A ?



38. S'està estudiant un tractament amb un nou medicament, per al que se seleccionen 100 malalts. A 60 se'ls tracta amb el medicament i a 40 amb un placebo. Els valors obtinguts es representen en la taula adjunta

	Medicament (M)	Placebo (no M)	
Curats (C)	50	30	80
No curats (no C)	10	10	20
	60	40	100

S'utilitzen aquests valors per a assignar probabilitats. Calcula: La probabilitat que un malalt curat hagi sigut tractat amb el medicament.

Ajuda: $P(M/C)$ La probabilitat que un malalt curat hagi sigut tractat amb el placebo. *Ajuda:* $P(\bar{M}/C)$.

39. Se sap que en una certa població, la probabilitat de ser home i daltònic és un dotzè i la probabilitat de ser dona i daltònica és un vint-i-cinquè. La proporció de persones d'ambdós sexes és la mateixa. Es tria una persona a l'atzar.
- Si la persona triada és home, trobar la probabilitat que sigui daltònic.
 - Si la persona triada és dona, trobar la probabilitat que sigui daltònica.
 - Quina és la probabilitat que la persona triada pateixi daltonisme? *Selectivitat Juny 94*
40. Una caixa de caramels conté 7 caramels de menta i 10 de maduixa. S'extrau a l'atzar un caramel i se substitueix per dos de l'altre sabor. A continuació s'extrau un segon caramel. Troba la probabilitat que: a) El segon caramel sigui de maduixa. b) El segon caramel sigui del mateix sabor que el primer. *Selectivitat Setembre 2013*
41. En un avió de línia regular hi ha classe turista i classe preferent. La classe turista ocupa les dues terceres parts del passatge i la classe preferent la resta. Se sap que tots els passatgers que viatgen en la classe preferent saben parlar anglès i que el 40 % dels passatgers que viatgen en classe turista no saben parlar anglès. Es tria un passatger de l'avió a l'atzar. a) Calcula la probabilitat que el passatger triat sàpiga parlar anglès. b) Si s'observa que el passatger triat sap parlar anglès, quina és la probabilitat que viatgi en la classe turista? *Selectivitat Setembre 2013*
42. Una botiga de vestits d'home treballa amb tres sastres. Un 5 % dels clients atesos pel sastre A no queda satisfet, tampoc el 8 % dels atesos pel sastre B ni el 10 % dels atesos pel sastre C . El 55 % dels arreglaments s'encarreguen al sastre A , el 30 % al B i el 15 % restant al C . Calcula la probabilitat que: a) Un client no quedi satisfet amb l'arreglament. b) Si un client no ha quedat satisfet, li hagi fet l'arreglament el sastre A . *Selectivitat Juny 2013*
43. En un procés de fabricació de mòbils es detecta que el 2 % surten defectuosos. S'utilitza un dispositiu per a detectar-los que resulta que detecta el 90 % dels mòbils defectuosos, però assenyalava com defectuosos un 1 % que no ho són. A) Calcula la probabilitat que sigui correcte un mòbil que el dispositiu ha qualificat com defectuós. B) Calcula la probabilitat que sigui defectuós un mòbil que el dispositiu ha qualificat com correcte. *Ajuda:* Utilitza primer un diagrama en arbre i després una taula de contingència. *Selectivitat*
44. Es tenen 3 caixes, A , B i C . La caixa A té 10 bolles de les quals 4 són negres. La caixa B té 6 bolles amb una bolla negra. La caixa C té 8 bolles amb 3 negres. S'agafa una caixa a l'atzar i d'eixa caixa es trau una bolla, també a l'atzar. Comprova que la probabilitat que la bolla sigui negra és $113/360$.
45. Tenim una moneda trucada la probabilitat de de la qual obtenir cara és $3/5$ i la de creu és $2/5$. Si surt cara es tria a l'atzar un número de l'1 al 8, i si surt creu, es tria un número de l'1 al 6. Calcula la probabilitat que el número triat sigui imparell. *Selectivitat*
46. A l'analitzar les activitats d'oci d'un grup de treballadors van ser classificats com a esportistes o no esportistes i com a lectors o no lectors. Se sap que el 55% dels treballadors es van classificar com a esportistes o lectors, el 40 % com a esportistes i el 30 % lectors. Es tria un treballador a l'atzar: a) Calcula la probabilitat de sigui esportista i no lector. b) Sabent que el treballador triat és lector, calcula la probabilitat que sigui esportista. *Selectivitat Juny 2013*
47. Tres màquines A , B i C fabriquen pernys del mateix tipus. La probabilitat que un perny fabricat en la màquina A sigui defectuós és 0'01, de que ho sigui un fabricat en B és 0'02 i de que ho sigui si ha sigut manufacturat en C és 0'03 En una caixa es mesclen 120 pernys: 15 de la màquina A , 30 de la B i 75 de la C .
- Calcula la probabilitat que un perny triat a l'atzar no sigui defectuós.
 - Triat un perny a l'atzar resulta defectuós. Quina és la probabilitat que hagi sigut fabricat per la màquina B ? *Selectivitat Curs 2012/13*
48. Una escola de natació ofereix cursos d'iniciació i perfeccionament en les categories prebenjamí (7-8 anys), benjamí (9-10 anys) i aleví (11-12 anys). La següent taula conté la informació amb el nombre de nedadors matriculats en cada curs: *Selectivitat Curs. 2011/12*

	Pre-benjamí	Benjamí	Aleví	Total
Iniciació	120	70	10	200
Perfeccionament	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Es tria a l'atzar un nedador de l'escola. A) Quina és la probabilitat que estigui en el curs d'iniciació? B) Quina és la probabilitat que estigui en el curs de perfeccionament o bé sigui aleví? C) Si el nedador triat és un benjamí, quina és la probabilitat que estigui en el curs de perfeccionament? D) Si el nedador triat està en el curs d'iniciació, quina és la probabilitat que sigui benjamí?

2. COMBINATÒRIA

49. En una carrera competeixen 5 corredors i es van a repartir tres medalles, or, plata i bronze. Fes un diagrama en arbre i comprova que hi ha 60 formes diferents de repartir les medalles.
50. Fes diagrames en arbre per a calcular: a) Quantes paraules de dues lletres (amb significat o sense ell) pots escriure amb les lletres A, B o C, totes distintes. I si poden repetir-se les lletres? b) Quantes paraules de tres lletres que comencen per vocal i acaben per

consonant es poden formar amb les lletres de l'alfabet. (Recorda que hi ha 5 vocals i 22 consonants).

51. N'Aina té 4 camisetes, 2 pantalons i 3 parells de sabatilles. Pot portar una combinació diferent de camiseta, pantalló i sabatilla durant dos mesos (61 dies)? Quants dies haurà de repetir combinació? *Ajuda:* Segur que un diagrama en arbre et resol el problema.
52. De quantes formes poden repartir-se cinc persones, cinc pastissos distints, menjant cada persona un pastís?
53. En una carrera de cavalls participen quatre cavalls amb els números 1, 2, 3 i 4. Quin d'ells pot arribar el primer? Si la carrera està manipulada perquè el número quatre arribi el primer, quins d'ells poden arribar en segon lloc? Si la carrera no està manipulada, de quantes formes distintes poden arribar a la meta? Fes un diagrama en arbre per a respondre.
54. De quantes maneres pots ficar sis objectes distints en sis caixes diferents, si només pots posar un objecte en cada caixa?
55. Quants països formen actualment la Unió Europea? Pots ordenar-los seguint diferents criteris, per exemple per la seva població, o respecte a la seva producció d'acer, o per la superfície que ocupen. De quantes maneres distintes és possible ordenar-los?
56. L'any 1973 havia sis països en el Mercat Comú Europeu. De quantes formes pots ordenar-los?
57. En una oficina de col·locació hi ha set persones. De quantes formes distintes poden haver arribat?

58. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5! \cdot 3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{1!}$; f) $\frac{67!}{676}$.

59. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

60. Expressa utilitzant factorials: a) $5 \cdot 4 \cdot 3$; b) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$; c) $8 \cdot 7 \cdot 6$; d) $10 \cdot 9$.

61. Expressa utilitzant factorials: a) $(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)$; b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$; c) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)$.

62. Escriu en forma de factorial les distintes formes que tenen d'asseure's en una classe els 30 alumnes en els 30 llocs que hi ha. (No ho calculis. El resultat és un número molt gran, per a calcular-ho es necessita un ordinador o una calculadora, i caldria recórrer a la notació científica per a expressar-ho de forma aproximada).

63. Nou ciclistes circulen per una carretera en fila índia. De quantes formes distintes poden anar ordenats?

64. Amb els 10 dígit, quants números distints poden formar-se de 4 xifres?

65. Amb els 10 dígit i les 22 consonants de l'alfabet, quantes matricules de cotxe poden formar-se prenent quatre dígit i tres lletres?

66. Un byte o octet és una seqüència de zeros i uns presos de 8 en 8. Quants bytes distints poden formar-se?

67. Calcula: a) $VR_{5,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{10,2}$; d) $VR_{2,10}$.

68. Expressa amb una fórmula:

- a. Les variacions amb repetició de 4 elements preses de 5 en 5.
- b. Les variacions amb repetició de 8 elements preses de 2 en 2.
- c. Les variacions amb repetició de 7 elements preses de 4 en 4.

69. Quantes paraules de quatre lletres (amb significat o no) pots formar que comencen per consonant i acaben amb la lletra S?

70. Quatre persones van a una pastisseria en què únicament queden cinc pastissos, distints entre si. De quantes formes distintes poden triar el seu pastís si cada una compra un?

71. Amb els 10 dígit es volen escriure números de sis xifres, totes elles distintes. Quantes possibilitats hi ha per a escriure la primera xifra? Una vegada triada la primera, quantes hi ha per a triar la segona? Una vegada triades les dues primeres, quantes hi ha per a la tercera? Quantes possibilitats hi ha en total?

72. Si tens 11 elements diferents i els has d'ordenar de 4 en 4 de totes les formes possibles, quantes hi ha?

73. Amb les lletres A, B i C, quantes paraules de 2 lletres no repetides podries escriure?

74. Amb els dígit 3, 5, 7, 8 i 9, quants números de 4 xifres distintes pots formar?

75. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

76. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

77. Tenim 5 bombons (iguals) que volem repartir entre 7 amics, de quantes formes es poden repartir els bombons si a cap li anem a donar més d'un bombó?

78. En Joan vol regalar 3 DVDs a en Pere dels 10 que té, de quantes formes distintes pot fer-ho?

79. En el joc del pòquer es dona a cada jugador una mà formada per cinc cartes, de les 52 que té la baralla francesa, quantes mans diferents pot rebre un jugador?

80. Afegeix tres files més al triangle de *Tartaglia* de la dreta.

81. Suma els números de cada fila i comprova que la suma dels elements de la fila m és sempre igual a 2^m .

82. Sense calcular-los, indica quant valen $C_{5,3}$, $C_{5,4}$, $C_{5,2}$ i $C_{5,5}$ buscant el seu valor en el triangle.

83. Desenvolupa $(a + b)^6$

84. Desenvolupa a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

85. Calcula el coeficient de x^7 en el polinomi que s'obté al desenvolupar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

86. Expressa amb radicals simplificats el polinomi que s'obté al desenvolupar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			

EXERCICIS I PROBLEMES.

Probabilitat

1. En un col·legi se selecciona un grup de 200 estudiants dels quals tots estudien francès o anglès. D'ells 150 estudien anglès i 70 estudien francès. Quants estudien francès i anglès? En un altre centre escolar s'estudien diversos idiomes: francès, anglès, alemany, italià. Se seleccionen també 200 estudiants dels quals, 150 estudien anglès, 70 francès i 40 ambdós idiomes, quants estudiants d'aquest centre no estudien ni francès ni anglès?
2. Llançam un dau. Calcula la probabilitat de: a) Treure un número imparell. b) No treure un 3. c) Treure un nombre més gran que 3. d) Treure un nombre més gran que 3 i que sigui imparell. e) Treure un nombre més gran que 3 o bé que sigui imparell.
3. En una classe hi ha 24 alumnes i 14 alumnes. La mitat de les alumnes i la tercera part dels alumnes tenen els ulls blaus. Es tria un estudiant a l'atzar. A) Calcula la probabilitat que sigui xic i tenguí els ulls blaus. B) Calcula la probabilitat que sigui xic o tenguí els ulls blaus.
4. N'Antoni, en Joan i en Jordi tenen una prova de natació. N'Antoni i en Joan tenen la mateixa probabilitat de guanyar, i doble a la probabilitat d'en Jordi. Calcula la probabilitat que guanyi en Joan o en Jordi.
5. Llançam dues monedes distintes, una de 50 cèntims i una altra d'un euro. Calcula la probabilitat que: A) En la moneda d'un euro surti cara. B) Surti una cara. C) Surti almenys una cara. D) No surti cap cara. E) Surti una cara i una creu.
6. Llançam tres monedes. Calcula les probabilitats de: A) No surti cap cara. B) Surti almenys una cara. C) Surtin dues cares i una creu.
7. Llançam dos daus i anotam els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que la suma sigui 1, sigui 2, sigui 3, sigui 12.
8. Què és més probable al tirar tres daus, que la suma de les seves cares superiors sigui 9 o sigui 10? Escriu el succés "sigui 9" i el succés "sigui 10" i calcula les probabilitats dels seus esdeveniments elementals. Saps ja més que *Galileu*!
9. Llançam al mateix temps una moneda i un dau. Anomena *A* al succés "Surti cara i un número parell". *B* al succés "Surti creu i un nombre primer" i *C* al succés "surti un nombre primer". Calcula les probabilitats de *A*, *B* i *C*. Com són aquests esdeveniments? Indica quins d'ells són compatibles i quins són incompatibles.
10. Llançam una moneda 50 vegades, què és més probable, obtenir 50 cares seguides o obtenir en les primeres 25 tirades cara i en les 25 següents creu? Raona la resposta.
11. Una moneda està trucada. La probabilitat d'obtenir cara és doble que la d'obtenir creu. Calcula les probabilitats dels esdeveniments obtenir cara i d'obtenir creu al tirar la moneda.
12. Tres nins i dues nines juguen un torneig d'escacs. Tots els nins tenen idèntica probabilitat de guanyar, i totes les niques, també. Però la probabilitat de guanyar una nina és doble de la de guanyar un nin. Calcula la probabilitat que un nin guanyi el torneig.
13. Set parelles de novis són en una habitació. Se seleccionen dues persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: a) Siguin un al·lot i una al·lota. b) Siguin una parella de novis. Ara es trien 4 persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: c) Hi hagi almenys una parella de novis. d) No hi hagi cap parella de novis.
14. Tenim un dau trucat de manera que els números imparells tenen una probabilitat doble a la dels números parells. Calcula les probabilitats de: A) Surti un número imparell. B) Surti un nombre primer. C) Surti un nombre primer imparell. D) Surti un número que sigui primer o sigui senar.
15. En un grup de 12 amigues hi ha 3 rosses. Es trien dues al·lotes a l'atzar. Calcula la probabilitat que: A) Ambdues siguin rosses. B) Almenys una sigui rossa. C) Cap sigui rossa. D) Una sigui rossa i l'altra no.
16. Llançam dos daus i anotam els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que: A) Els números obtinguts siguin iguals. B) Els números obtinguts difereixin en 3 unitats. C) Els números obtinguts siguin parells.
17. Llançam una moneda fins que surti cara. Calcula la probabilitat que: A) Surti cara abans del quart llançament. B) Surti cara després de l'octau llançament.
18. Un lot de 20 articles té 2 defectuosos. Es treuen 4 a l'atzar, quina és la probabilitat que cap sigui defectuós?
19. Es llancen dos daus i la suma de les cares superiors és 7. Quina és la probabilitat que en un dels daus hagi sortit un 3?

Combinatòria

20. Cinc nadadors tiren una carrera. De quantes formes poden arribar a la meta si no hi ha empats? I si són 8 nadadors?
21. Santi, Pepe, Ana i Silvia volen fotografiar-se junts, de quantes maneres poden fer-se la fotografia? Volen situar-se de manera que alternin nins amb nines, de quantes maneres poden ara fer-se la fotografia?
22. De quantes maneres es poden introduir 9 objectes distintes en 9 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa?
23. Set nines participen en una carrera, de quantes formes poden arribar a la meta? No hi ha empats. Quina és la probabilitat d'encertar l'ordre d'arribada a la meta?
24. Quants números distintes i de cinc xifres distintes poden formar-se amb els dígit 3, 4, 5, 6, i 7? Quants poden formar-se si tots comencen per 5? I si han de començar per 5 i acabar en 7?
25. Quantes banderes de 3 franges horitzontals de colors distintes es poden formar amb els colors vermell, groc i morat? I si es disposa de 6 colors? I si es disposa de 6 colors i no cal que les tres franges tinguin colors distintes?
26. Quants números de 3 xifres distintes es poden escriure amb els dígit 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Quants d'ells són imparells? Quants són múltiples de 4?
27. Quants números de 34 xifres, distintes o no, es poden escriure amb els dígit 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Calcula la suma de tots ells.
28. A Maria li encanta el cine i va a totes les estrenes. Aquesta setmana n'hi ha sis, i decideix anar a una cada dia. De quantes formes distintes pot ordenar les pel·lícules? Mala sort. Li anuncien un examen i decideix anar al cine només el dimarts, el dijous i el dissabte.

Entre quantes pel·lícules pot triar el primer dia? I el segon? I el tercer?

29. Amb els dígit 0, 1, 2, 3, 4, 5, quants números de quatre xifres diferents es poden formar? (Observa: Si comença per 0 no és un nombre de quatre xifres). Quants són menors de 3000?
30. El llenguatge de l'ordinador està escrit en seqüències de zeros i uns (dígit binari o bits) de grandària fixa. En el context de la informàtica, aquestes cadenes de bits es denominen paraules. Els ordinadors normalment tenen una grandària de paraula de 8, 16, 32 o 64 bits. El codi ASCII amb el que es representaven inicialment els caràcters per a transmissió telegràfica tenia 7 bits. Després es va aplicar als ordinadors personals, ampliant-ho a 8 bits que és el que es denomina un byte o ASCII estès. Més tard es va substituir per Unicode, amb una longitud variable de més de 16 bits. Quants bytes diferents (8 dígit) es poden formar? En un ordinador la longitud de paraula del qual tingueren 16 dígit, quantes es podrien formar que anessen diferents? Si existís un ordinador la longitud de paraula del qual tingués 4 dígit, es podrien escriure amb ells les lletres de l'alfabet?
31. Tens vuit bolles de la mateixa grandària, quatre blanques i quatre negres, si les col·loques en fila, de quantes formes pot ordenar-les?
32. Amb 4 llunes de pintura de distints colors, quantes mesclures de 2 colors podràs fer?
33. De quantes maneres es pot triar una delegació de 3 estudiants d'un grup de 30? I en el teu propi grup?
34. Quants productes diferents es poden formar amb els números: 2, $\frac{1}{3}$, 7, 5 i π prenent-los de 3 en 3? Quants d'eixos productes donaran com resultat un nombre enter? Quants un número racional no sencer? Quants un número irracional?
35. Quants aliatges de 4 metalls poden fer-se amb 7 tipus diferents de metall?
36. De quantes formes pots separar un grup de 9 estudiants en dos grups de 3 i 6 estudiants respectivament?
37. Una assignatura es compon de 15 temes i es va a realitzar un examen en què surten preguntes de dos temes, quantes possibilitats hi ha per a triar els temes que cauen? Si només has estudiat 10 temes, quantes possibilitats hi ha de que et toquin dos temes que no te sabies? Quina és la probabilitat que et toquin dos temes que no te sàpigues? I la de que et toqui només un tema que no et sàpigues?
38. Quantes opcions hi ha per a triar quatre assignatures entre set optatives?
39. Es juga una partida de tir al plat en què es llancen successivament dotze plats. Quin és el nombre de esdeveniments en què s'obtenen quatre èxits, és a dir s'encerta quatre vegades en el blanc? En el mateix cas anterior, quina és la probabilitat de tenir èxit en l'últim tir?
40. Llançam una moneda i després un dau, Quants resultats distints podem obtenir? I si llançam dues monedes i un dau? I si anessen 3 monedes i 2 daus?
41. En una reunió totes les persones se saluden estretint-se la mà. Sabent que va haver-hi 91 salutacions. Quantes persones hi havia? I si va haver-hi 45 salutacions, quantes persones hi havia?
42. La major part de les contrasenyes de les targetes de crèdit són números de 4 xifres. Quantes possibles contrasenyes podem formar? Quantes tenen algun número repetit? Quantes tenen un número repetit dues vegades?



43. Fa molts anys les plaques de matrícula eren com aquesta: M 677573; després van ser com aquesta: M 1234 AB; i actualment com aquesta: 6068 BPD. Investiga quines avantatges té cada un d'aquests canvis respecte a l'anterior.



44. Na Joana i en Joan juguen al tennis i decidixen que guanya aquell que primer guanyi 4 sets. Quin és el nombre màxim de sets que hauran de disputar? Quants desenvolupaments possibles pot tenir la trobada?
45. Pedro va conèixer ahir una nina. Ho van passar molt bé i ella li va donar el seu número de mòbil, però ell no portava el seu mòbil ni bolígraf. Va pensar que se'n recordaria, però... només recorda que començava per 656, que hi havia unes altres quatre xifres que eren totes diferents entre si i menors que 5. Calcula quantes possibilitats té d'encertar si marca un número. Massa. Fa memòria i recorda que les dues últimes són 77. Quantes possibilitats hi ha ara d'encertar fent una crida?
46. Un club d'alpinistes ha organitzat una expedició al Kilimanjaro formada per 11 persones, 7 experts i 4 que estan en formació. En un determinat tram només poden anar 3 experts i 2 que no ho siguin, de quantes formes pot estar compost aquest equip de 5 persones? Tu ets un expert, i aniràs en aquest tram, quantes formes hi ha ara de compondre-ho?
47. En els bitllets d'una línia d'autobusos van impresos els noms de l'estació de partida i de la d'arribada. Hi ha en total 8 possibles estacions. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir l'empresa d'autobusos? Ara volen canviar el format i només imprimir el preu, que és proporcional a la distància. Les distàncies entre les estacions són totes distintes. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir en aquest cas?
48. Una parella té un fill de 3 anys que entra en la guarderia a les 9 del matí. El pare treballa en una fàbrica que té 3 torns mensuals rotatius: de 0 a 8, de 8 a 16 i de 16 a 24 hores. La mare treballa en un supermercat que té dos torns rotatius mensuals, de 8 a 14 i de 14 a 20 hores. Quants dies a l'any, generalment, no podrà cap dels dos portar al seu fill a la guarderia?
49. Un tir al blanc té 10 cavallets numerats que giren. Si s'encerta a un d'ells s'encén un llum amb el número del cavallet. Tires 3 vegades, de quantes maneres es poden encendre les llums? I si el primer tir no dona a cap cavallet?
50. En una festa hi ha 7 nines i 7 nins. En Joan balla sempre amb n'Anna. En Toni és el més decidit i sempre surt a ballar el primer, de quantes formes pot triar parella en els pròxims 4 balls?

AUTOAVALUACIÓ

1. Al tirar dos daus, la probabilitat de treure almenys un 5 és:
a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36
2. Al tirar 3 monedes, la probabilitat de treure exactament dues cares és:
a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
3. Al tirar 3 monedes, la probabilitat de treure almenys dues cares és:
a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
4. Treiem una carta d'una baralla de 40 cartes, la probabilitat que sigui un or o un múltiple de 2 és:
a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4
5. Indica quina de les afirmacions següents és **sempre** correcta:
a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$
b) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. Amb els dígitos 0, 1, 2, 3, i 4 quants números de quatre xifres es poden formar?
a) 58 b) 120 c) 96 d) 192
7. Huit corredors participen en una carrera, les formes distintes en què poden arribar a la meta són:
a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080
8. Amb 5 llandes de pintura de distint colors, quantes mesclades de 2 colors podràs fer?
a) 60 b) 10 c) 120 d) 30
9. Amb els dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 es poden escriure números imparells de 3 xifres distintes. Quants números diferents es poden escriure?
a) 60 b) 10 c) 120 d) 30
10. Amb els dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 es poden escriure números imparells de 3 xifres (iguals o distintes). Quants números diferents es poden escriure?
a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

RESUM

		Exemples
Esdeveniments	Al dur a terme un experiment aleatori existeixen diferents possibles resultats, successos o esdeveniments possibles . Un succés és un subconjunt del conjunt de possibles resultats.	Tiram un dau. Possibles resultats = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Esdeveniment obtenir <i>múltiple de 3</i> = {3, 6}
Assignació de probabilitats	Una mesura Límit al que tendeixen las freqüències relatives. Regla de Laplace: Si els esdeveniments elementals són equiprobables llavors: $p = \text{casos favorables} / \text{casos possibles}$.	$P(5) = 1/6$. $P(\text{treure múltiple de 3}) = 2/6$
Axiomàtica de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, per a tot A . 3. Si $A \cap B = \emptyset$ llavors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremes de Probabilitat	Succés contrari: $P(X) + P(\text{no } X) = 1$. Probabilitat d'intersecció: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$. Probabilitat d'unió: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	$P(\text{no } 5) = 1 - 1/6 = 5/6$. $P(5 \cup \text{múl. } 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6$ $P(\text{treure primer un 5 i després múltiple de 3}) = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36$
Teorema de Bayes	$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$	
Permutacions	Se considera només l' ordre . $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Se consideren l' ordre i els elements . Els elements poden repetir-se . $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeixen l' ordre i els elements . Els elements NO poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els elements . $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Binomi de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

APÈNDIX: PROBLEMES PROPOSATS EN SELECTIVITAT

1. Juny 94. Opció B (2 punts)

Es llança dues vegades un dau equilibrat amb sis cares. Trobar la probabilitat que la suma dels valors que apareixen en la cara superior sigui múltiple de tres.

2. Curs 94/95. Model Opció A (2 punts)

En un cert institut s'ofereix informàtica i teatre com a assignatures optatives. El grup A consta de 30 estudiants, i els grups B i C tenen 35 cada un. El 60 per cent del grup A ha triat teatre, així com el 20 per cent del grup B i el 40 per cent de la resta han triat informàtica. A) Si es pregunta a un *estudiant* triat a l'atzar, trobar la probabilitat que hagi optat per informàtica. B) Si un estudiant ha triat teatre, calcular la probabilitat que pertanyi al, grup B.

3. Curs 94/95. Model Opció B (3 punts)

Se sap que s'han eliminat diverses cartes d'una baralla espanyola que en té quaranta. La probabilitat d'extreure un as entre les que queden és $\frac{1}{12}$, la probabilitat que surti una copa és $\frac{1}{8}$ i la probabilitat de que no sigui ni as ni copa és $\frac{1}{4}$. A) Trobar la probabilitat que la carta extreta sigui as o copa. B) Calcular la probabilitat que la carta sigui l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?

4. Juny 95. Opció A. (3 punts)

En una ciutat en què hi ha doble nombre d'homes que de dones, hi ha una epidèmia. El 6 % dels homes i l'11 % de les dones estan malalts. Es tria a l'atzar un individu. Calcular la probabilitat de: a) que sigui home. b) que estigui malalt. c) que sigui home, sabent que està malalt.

5. Setembre 95. Opció B. (3 punts)

Una persona despistada té vuit calcetins negres, sis blaus i quatre vermells, tots ells solts. Un dia amb molta pressa, tria dos calcetins a l'atzar. Trobar la probabilitat de: a) que els calcetins siguin negres. b) que els dos calcetins siguin del mateix color. c) que almenys un d'ells sigui vermell. d) que un sigui negre i l'altre no.

6. Setembre 95. Opció B. (2 punts)

Tres persones viatgen en un cotxe. Si se suposa que la probabilitat de nàixer en qualsevol dia de l'any és la mateixa i sabem que cap ha nascut en un any bixest, a) trobar la probabilitat que només una d'elles celebri el seu aniversari aquest dia. B) calcular la probabilitat que almenys dos compleixin anys aquest dia.

7. Curs 95/96. Model Opció A (3 punts)

En una bossa hi ha set bolles numerades d'1 al 7, i en una altra bossa B hi ha cinc bolles numerades del 8 al 12. Es realitza l'experiència composta consistent a prendre una bola a l'atzar de A, anotar la seva paritat i introduir-la posteriorment en la bossa B, a continuació s'extrau a l'atzar una bola de B i s'anota també la seva paritat. A) Calcular la probabilitat que les dues bolles extretes tinguin la mateixa paritat. B) Trobar la probabilitat que la bola extreta de B correspongui a un número imparell.

8. Juny 96. Opció A. (3 punts)

Una urna conté 6 bolles blanques i 4 negres una segona urna B conté 5 bolles blanques i 2 negres. Se selecciona una urna a l'atzar i d'ella s'extrauen 2 bolles sense reemplaçament. Calcular la probabilitat que:

a) Les dues bolles siguin blanques. (b) Les dues bolles siguin del mateix color. (c) Les dues bolles siguin de distint color.

9. Juny 96. Opció B. (2 punts)

D'una baralla de 40 cartes es trien a l'atzar simultàniament 4 cartes. Trobar: a) Probabilitat que s'hagi escollit almenys un rei. b) Probabilitat que tres de les quatre cartes siguin del mateix pal.

10. Setembre 96. Opció A. (2 punts)

La quarta part de les participants en un congrés són espanyoles. La probabilitat que una congressista begui te per berenar si és espanyola és un vuitè i la probabilitat que prengui te si és estrangera, és un terç. Si es tria una congressista a l'atzar: a) quina és la probabilitat que begui te? b) quina és la probabilitat que no sigui espanyola si beu te? c) quina és la probabilitat que sigui espanyola si no beu te?

11. Curs 96/97. Model Opció A (2,5 punts)

Per a realitzar un control de qualitat d'un producte s'examinen 3 unitats del producte extretes a l'atzar i sense reemplaçament d'un lot de 100 unitats. Les unitats poden tenir defectes de dos tipus, A i B. Si en el lot de 100 unitats existeixen 10 unitats amb defectes del tipus A únicament, 8 unitats amb defecte del tipus B únicament, i 2 unitats amb ambdós tipus de defecte, es desitja determinar la probabilitat que en la mostra de tres unitats extretes s'obtinguin en total: a) zero defectes. b) una unitat amb defecte del tipus A i una altra amb defecte del tipus B, o bé una unitat amb ambdós tipus de defecte.

12. Curs 96/97. Model Opció A (3 punts)

Es realitza l'experiència composta consistent a llançar a l'aire un dau i a continuació introduir una nova bola en una urna que conté 2 bolles blanques i 4 negres de manera que si el número obtingut en el dau és parell, s'introdueix en l'urna una bola blanca, i si és imparell, s'introdueix una bola negra. A) Calcular la probabilitat d'obtenir, a l'atzar, bolles blanques al realitzar dues extraccions successives i sense reemplaçament de l'urna, sabent que al llançar el dau hem obtingut un número parell. B) Si s'extrauen simultàniament dues bolles a l'atzar de l'urna després d'haver llançat el dau, quina és la probabilitat que ambdues siguin blanques?

13. Setembre 97. Opció A. (3 punts)

Després d'un estudi realitzat sobre els taxistes d'una ciutat espanyola, s'ha observat que el 70 % té més de 40 anys i d'aquests el 60 % és propietari del vehicle que condueix. També s'ha esbrinat que el percentatge de taxistes que no superant els 40 anys, és propietari del vehicle que condueix es redueix al 30 %. Es demana: a) La probabilitat que un taxista, triat a l'atzar, sigui propietari del vehicle que condueix. b) Es tria un taxista a l'atzar, i es comprova que és propietari del vehicle que condueix, quina és la probabilitat que tingui més de 40 anys?

14. Curs 97/98. Model Opció A (2 punts)

En dues urnes A i B, s'introdueixen dues bolles blanques i una negra, i tres bolles negres i una blanca, respectivament. Se selecciona una

urna a l'atzar, i s'extreu també una bola d'aquesta urna. Quina és la probabilitat que l'urna triada sigui la A, si la bola triada va resultar ser blanca?

15. Curs 97/98. Model Opció B (2 punts)

Es disposa de dues urnes A i B, d'identíc aspecte extern. L'urna A conté 4 bolles vermelles i 2 grogues, mentre que B conté 5 bolles vermelles i 3 grogues. Un individu es dirigeix a una de les urnes i extreu sense reemplaçament dues bolles de la mateixa. Trobar la probabilitat que: a) Ambdues bolles siguin vermelles. b) Les dues bolles siguin del mateix color.

16. Juny 98. Opció A. (2 punts)

Es llança un dau de sis cares, numerades de l'1 al 6, dues vegades consecutives. (a) Calcula la probabilitat que la suma dels resultats sigui igual a 4. (b) Calcula la probabilitat que en el primer llançament hagi eixit un 1, sabent que la suma és 4.

16. Setembre 98. Opció A (3 punts)

En un examen hi ha 3 temes de màxima dificultat, 5 de dificultat mitjana i 2 d'escassa dificultat, dels quals es tria un a l'atzar. La probabilitat que un alumne aprovi l'examen si el tema és de màxima dificultat és d'1/3, si és de dificultat mitjana, 2/5, i si és d'escassa dificultat, 3/4. Troba la probabilitat que l'alumne aprovi l'examen. Troba la probabilitat que el tema triat hagi sigut de màxima dificultat, si l'alumne el va aprovar.

17. Curso98/99. Model Opció A. (2puntos)

D'una urna amb cinc bolles, dues blanques i tres negres, extraïem dues bolles sense reemplaçament. Calcula la probabilitat de cada un dels esdeveniments següents: a) A = Les dues bolles extretes són del mateix color. b) B = Extraïem almenys una bola blanca.

18. Curs 98/99. Model Opció B. (2 punts)

Prenem quatre cartes diferents d'una baralla, dos cincs, un sis i un set. Les cartes es posen boca per avall sobre una taula i les mesclm a l'atzar. Determina la probabilitat que al donar-los la volta, totes les cartes estiguin ordenades en ordre creixent, si els dos cincs són indistingibles.

19. Juny 99. Opció A. (2 punts)

S'escolten tres discos i es tornen a guardar a l'atzar. Quina és la probabilitat que almenys un dels discos hagi sigut guardat en l'embolcall que li corresponia?

20. Juny 99. Opció B. (2 punts)

Es considera una cèl·lula en l'instant $t = 0$. En l'instant $t = 1$ la cèl·lula pot: o bé reproduir-se, dividint-se en dues, amb probabilitat 3/4; o bé morir, amb probabilitat 1/4. Si la cèl·lula es divideix, llavors, en el temps $t = 2$ cada un dels seus dos descendents pot també subdividir-se o morir, amb les mateixes probabilitats d'abans, independentment un d'un altre. A) Quantes cèl·lules és possible que hi hagi en el temps $t = 2$? B) Amb quina probabilitat?

21. Setembre 99. Opció A. (2 punts)

Es llancen dos daus. Calcula la probabilitat de cada un dels esdeveniments següents: (a) A = S'obté cinc en algun dels daus. (b) B = S'obté un doble (els dos daus presenten la mateixa puntuació). (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

22. Setembre 99. Opció B. (2 punts)

Es disposa de tres urnes, la A que conté dues bolles blanques i quatre vermelles, la B amb tres blanques i tres vermelles, i la C amb una blanca i cinc vermelles. (a) Es tria una urna a l'atzar i s'extrau una bola d'ella, quina és la probabilitat que aquesta bola sigui blanca? B) Si la bola extreta resulta ser blanca, quina és la probabilitat de què procedisca de l'urna B?

23. Curs 99/00. Model Opció A (2 punts)

Si es tria un número de telèfon a l'atzar d'una certa ciutat espanyola, la probabilitat que figuri a nom d'un home és 0'7 i de que figuri a nom d'una dona és 0'3. En aquesta ciutat, la probabilitat que un home treballi és 0'8 i de que ho faci una dona és 0'7. Es tria un número de telèfon a l'atzar. Quina és la probabilitat que correspongui a una persona que treballa? Quina és la probabilitat que corresponga a un home, sabent que pertany a una persona que treballa?

24. Curs 99/00. Model Opció B (2 punts)

Un examen consisteix en triar a l'atzar dos temes d'entre els deu del programa i desenvolupar-ne un.

Quina probabilitat té un alumne que sap sis temes d'aprovar l'examen?

Quina probabilitat té el mateix alumne de saber-se un dels dos temes triats i l'altre no?

25. Juny 00. Opció A. (2 punts)

D'una urna amb 4 bolles blanques i 2 negres s'extrauen a l'atzar, successivament i sense reemplaçament, dues bolles. (a) Quina és la probabilitat que les bolles extretes siguin blanques? (b) Si la segona bola ha resultat ser negra, quina és la probabilitat que la primera també ho hagi sigut?

26. Juny 00. Opció B. (2 punts)

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori tals que $P(A) = 0'6$; $P(B) = 0'2$ i $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'7$.

(a) Calcula $P(A \cap B)$ i raona's si els esdeveniments A i B són independents. (b) Calcula $P(A \cup B)$

27. Setembre 00. Opció A. (2 punts)

La probabilitat que en un mes donat un client d'una gran superfície compri un producte A és 0'6; la probabilitat que compri un producte B és 0'5. Se sap també que la probabilitat que un client compri el producte B no havent comprat el producte A és 0'4. A) Quina és la probabilitat que un client hagi comprat només el producte B? b) Quina és la probabilitat que un client no hagi comprat cap dels productes?

28. Setembre 00. Opció B. (2 punts)

Una empresa empra tres bufets d'advocats per a tractar els seus casos legals. La probabilitat que un cas s'hagi de remetre al bufet A és 0'3; de que es remeti al bufet B és 0'5 i de que es remeti al bufet C és 0'2. La probabilitat que un cas remés al bufet A sigui guanyat en els tribunals és 0'6; per al bufet B aquesta probabilitat és 0'8 i per al bufet C és 0'7. a) Calcula la probabilitat que l'empresa guanyi un cas. b) Sabent que un cas s'ha guanyat, determina la probabilitat que l'hagi portat el bufet A.

29. Curs 00/01. Model Opció A. (2 punts)

En una ciutat, la probabilitat que un dels seus habitants censats voti al partit A és 0'4; la probabilitat que voti al partit B és 0'35 i la probabilitat que voti al partit C és 0'25. D'altra banda, les probabilitats que un votant de cada partit llegeixi diàriament algun diari són, respectivament, 0'4; 0'4 i 0'6. Es tria una persona de la ciutat a l'atzar: a) Calcula la probabilitat que llegeixi algun diari. b) La persona triada llig algun diari, quina és la probabilitat que sigui votant del partit B?

30. Curs 00/01. Model Opció B. (2 punts)

Una urna conté 7 bolles blanques, 3 bolles vermelles i 2 bolles negres. Es considera l'experiment aleatori consistent a extreure tres bolles de l'urna, de forma successiva i sense reemplaçament. Siguin els esdeveniments B_1 : La primera bolla és blanca, B_2 : La segona bolla és blanca i B_3 : La tercera bolla és blanca.

- a) Expressa amb ells el succés «Les bolles extretes en primer i tercer lloc són blanques, i l'extreta en segon lloc no».
b) Calcula la probabilitat del succés «Les tres bolles són del mateix color».

31. Juny 01. Opció A. (2 punts)

Una fàbrica produeix tres models de cotxe: A , B i C . Cada un dels models pot tenir motor de gasolina o dièsel. Sabem que el 60 % dels models són de tipus A i el 30 % de tipus B . El 30 % dels cotxes fabricats tenen motor dièsel, el 30 % dels cotxes del model A són de tipus dièsel i el 20 % dels cotxes del model B tenen motor dièsel. Es tria un cotxe a l'atzar. Es demanen les probabilitats dels esdeveniments següents: (a) El cotxe és del model C . (b) El cotxe és del model A , sabent que té motor dièsel. (c) El cotxe té motor dièsel, sabent que és del model C .

32. Juny 01. Opció B. (2 punts)

Tres màquines A , B i C fabriquen perns. En una hora, la màquina A fabrica 600 perns, la B 300 i la C 100. Les probabilitats que les màquines produeixin perns defectuosos són, respectivament, de 0'01 per a A , de 0'02 per a B i de 0'03 per a C . Al finalitzar una hora s'ajunten tots els perns produïts i es tria un a l'atzar. (a) Quina és la probabilitat que no sigui defectuós? (b) Quina és la probabilitat que ho hagi fabricat la màquina A , sabent que no és defectuós?

33. Setembre 01. Opció A. (2 punts)

En un videoclub queden 8 còpies de la pel·lícula A , 9 de la B i 5 de la C . Entren tres clients consecutivament i cada un tria una còpia a l'atzar. Calcula la probabilitat que: (a) Els tres trien la mateixa pel·lícula. (b) Dos trien la pel·lícula A i l'altre la C .

34. Setembre 01. Opció B. (2 punts)

Amb l'objectiu de recaptar fons per a un viatge, els alumnes d'un institut realitzen una rifa amb 500 números. Un alumne compra dos números. (a) Si només hi ha un premi, quina probabilitat té l'alumne que li toqui a ell? (b) Si hi ha dos premis, quina probabilitat té l'alumne que li toqui almenys un d'ells?

35. Curs 01/02. Model Opció A. (2 punts)

Un proveïdor subministra lots de matèria primera i el 5 % d'ells resulta defectuós. Seleccionant a l'atzar 3 lots. (a) Quina és la probabilitat que almenys 2 siguin defectuosos? (b) Quina és la probabilitat que el màxim de lots defectuosos sigui 2?

36. Curs 01/02. Model Opció B. (2 punts)

Una prova per a determinar una certa contaminació en l'aigua presenta els següents resultats en probabilitat: 0'05 de falsos positius, això és, casos en què estant l'aigua lliure de contaminació, el test diu que l'aigua es troba contaminada. Si l'aigua està contaminada, el test ho detecta amb probabilitat 0'99. L'aigua està lliure de contaminació amb probabilitat 0'99. Si es realitza una nova prova i el test indica que hi ha contaminació, calcular la probabilitat que l'aigua estigui lliure de contaminació.

37. Juny02. Opció A. (2 punts)

Es tenen tres caixes iguals. La primera conté 3 bolles blanques, 4 negres; la segona conté 5 bolles negres i, la tercera 4 blanques i 3 negres. a) Es tria una caixa a l'atzar i després s'extrau una bolla, quina és la probabilitat que la bolla extreta sigui negra? b) Si s'extrau una bolla negra d'una de les caixes, quina és la probabilitat de que procedeixi de la segona caixa?

38. Juny02. Opció B. (2 punts)

Es llancen dos daus equilibrats de sis cares tres vegades consecutives: a) Calcular la probabilitat que en els tres llançaments surti el sis doble. b) Calcular la probabilitat que en els tres llançaments surti un doble diferent del sis doble.

39. Setembre02. Opció A. (2 punts)

Una persona desitja jugar en una atracció de fira, on es regala un peluix, si al tirar un dard s'encerta en un blanc. Si només es permet tirar tres dards i la probabilitat d'encertar en cada tirada és 0'3. A) Quina és la probabilitat d'emportar-se el peluix? B) Quina és la probabilitat d'emportar-se el peluix exactament en el tercer llançament? C) I de portar-se'l exactament en el segon?

40. Setembre02. Opció B. (2 punts)

Un dia determinat, en una botiga de roba jove, s'han realitzat 400 vendes pagades amb la targeta de crèdit V i 350 vendes pagades amb la targeta MC. Les vendes restants del dia han sigut abonades en metàl·lic. Es comprova que 150 de les vendes pagades amb la targeta de crèdit V superen els 150 euros, mentre que 300 de les compres pagades amb MC superen aquesta quantitat. S'extrau a l'atzar un comprovant de les vendes del dia pagades amb targeta de crèdit. Quina és la probabilitat que corresponga a una compra superior a 150 euros? Si la compra és inferior a 150 euros, quina és la probabilitat que hagi estat pagada amb la targeta MC?

41. Curs 02/03. Opció A. (2 punts)

Un roser no està en bon estat i, per tant, si es rega té la mateixa probabilitat de mantenir-se que d'assecar-se. La probabilitat que es mantengui si no es rega és 0'25. La probabilitat de no regar el roser és $2/3$. Si el roser s'ha assecat, quina és la probabilitat de no haver-lo regat?

42. Curs 02/03. Opció A. (2 punts)

Sobre els esdeveniments A i B es coneixen les probabilitats següents: $P(A) = 0'7$ $P(B) = 0'5$ $P(A \cap B) = 0,45$

Calcular a) $P(B/A)$ b) $P(A^c \cap B^c) =$

A^c representa el succés complementari del succés A .

43. Juny 03. Opció A (2 punts)

El 45 % del cens d'una certa ciutat vota el candidat A , el 35 % al candidat B i la resta s'absté. Es trien a l'atzar tres persones del cens. Calcular la probabilitat dels esdeveniments següents: (a) Les tres persones voten el candidat A . (b) Dos persones voten el candidat A i l'altra al candidat B . (c) Almenys una de les tres persones s'absté.

44. Juny 03. Opció B (2 punts)

D'una baralla espanyola de quaranta cartes s'extrauen successivament tres cartes a l'atzar. Determinar la probabilitat d'obtenir: (a) Tres reis. (b) Una figura amb la primera carta, un cinc amb la segona i un sis amb la tercera. (c) Un as, un tres i un sis, en qualsevol ordre.

45. Setembre 03. Opció A (2 punts)

Un test per a detectar una substància contaminant en l'aigua, presenta els resultats següents: si l'aigua no està contaminada, succés que ocorre amb una probabilitat igual a 0'99, el resultat del test és que l'aigua està contaminada amb una probabilitat igual a 0'05. Quan l'aigua està contaminada, el test ho detecta amb una probabilitat igual a 0'99. S'ha realitzat una prova i el test indica que hi ha contaminació. Calcular la probabilitat que l'aigua no estigui realment contaminada. Interpretar el valor numèric obtingut.

46. Curs 03/04. Opció A (2 punts)

En un I.E.S. hi ha 156 alumnes matriculats en segon de Batxillerat, dels quals 120 utilitzen el transport escolar. D'aquests últims, la meitat fa ús del menjador del centre, mentre que només 12 dels que no utilitzen el transport escolar acudeixen al menjador. (a) Es tria a l'atzar un alumne de segon de batxillerat, quina és la probabilitat que no assisteixi al menjador? (b) Si l'alumne triat utilitza el transport escolar, quina és la probabilitat que assisteixi al menjador?

47. Curs 03/04. Opció B (2 punts)

En una classe, el 20% dels alumnes aprova llengua, el 30% aprova matemàtiques i el 40% aprova llengua estrangera. Se sap a més que el 12% aprova matemàtiques i llengua estrangera i el 7% aprova llengua i llengua estrangera. Són independents els esdeveniments "aprovar llengua estrangera" i "aprovar llengua"? Són independents els esdeveniments "aprovar matemàtiques" i "aprovar llengua estrangera"?

48. Juny 04. Opció A (2 punts)

Dos experts, E_1 i E_2 , realitzen peritatges per a una certa companyia d'assegurances. La probabilitat que un peritatge hagi sigut realitzada per E_1 és 0'55 i per E_2 és 0'45. Si un peritatge ha sigut realitzat per E_1 , la probabilitat que doni lloc al pagament d'una indemnització és 0'98 i si ha sigut realitzada per E_2 , la probabilitat que doni lloc al pagament d'una indemnització és 0'90. Un sinistre ha suposat a la companyia el pagament d'una indemnització. Trobar la probabilitat que la peritatge hagi sigut realitzada per E_2 .

49. Juny 04. Opció B (2 punts)

En una empresa es produeixen dos tipus de bombetes: halògenes i de baix consum, en una proporció de 3 a 4, respectivament. La probabilitat que una bombeta halògena sigui defectuosa és 0'02 i de que una de baix consum sigui defectuosa és 0'09. Es tria a l'atzar una bombeta i resulta no defectuosa, quina és la probabilitat que sigui halògena?

50. Setembre 04. Opció A (2 punts)

Una certa senyalització de seguretat té instal·lats dos indicadors. Davant d'una emergència els indicadors s'activen de forma independent. La probabilitat que s'activi el primer indicador és 0'95 i de que s'activi el segon és 0'90. (a) Trobar la probabilitat que davant d'una emergència s'activi només un dels indicadors. (b) Trobar la probabilitat que davant d'una emergència s'activi almenys un dels indicadors.

51. Setembre 04. Opció B (2 punts)

En una població, el 40 % són homes i el 60 % dones. En aquesta població el 80 % dels homes i el 20 % de les dones són aficionats al futbol. (a) Calcular la probabilitat que una persona triada a l'atzar sigui aficionada al futbol. (b) Triada a l'atzar una persona resulta ser aficionada al futbol, quina és la probabilitat que sigui dona?

52. Curs 04/05. Opció A (2 punts)

Un escaquista gana una partida amb probabilitat 0'6, l'empata amb probabilitat 0'3 i la perd amb probabilitat 0'1. El jugador juga dues partides. (a) Descriure l'espai mostrat i la probabilitat de cada un dels resultats d'aquest experiment aleatori. (b) Calcular la probabilitat que guanyi almenys una partida.

53. Curs 04/05. Opció B (2 punts)

En un centre d'ensenyança hi ha 240 estudiants matriculats en 2n curs de Batxillerat. La següent taula arreplega la seva distribució per sexe i per opció que es cursa:

	Al·lots	Al·lotes
Tecnològica	64	52
Humanitats i C. Socials	74	50

Si es tria un que cursen 2n de calcular la probabilitat que:

estudiant a l'atzar d'entre els Batxillerat en aquest centre,

(a) No cursi l'opció Científico-Tecnològica. (b) Si és al·lot, cursi l'opció d'Humanitats i Ciències Socials.

54. Juny 05. Opció A (2 punts)

Una caixa amb una dotzena d'ous conté dos d'ells trencats. S'extrauen a l'atzar sense reemplaçament (sense tornar-los després i de manera consecutiva) quatre ous.

(a) Calcular la probabilitat d'extreure els quatre ous en bon estat.

(b) Calcular la probabilitat d'extreure d'entre els quatre, exactament un ou romput.

55. Juny 05. Opció B (2 punts)

En un experiment aleatori consistent a llançar simultàniament tres daus equilibrats de sis cares, es demana calcular la probabilitat de cada un dels esdeveniments següents: "Obtenir tres uns", "Obtenir almenys un dos", "Obtenir tres números distints" i "Obtenir una suma de 4".

56. Setembre 05. Opció A (2 punts)

En un col·lectiu d'inversors borsari, el 20 % realitza operacions via Internet. dels inversors que realitzen operacions via Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. dels inversors borsaris que no realitzen operacions via Internet només un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Es demana:

- (a) Obtenir la probabilitat que un inversor borsari triat a l'atzar en aquest col·lectiu consulti InfoBolsaWeb.
 (b) Si es tria a l'atzar un inversor borsari d'aquest col·lectiu i resulta que consulta InfoBolsaWeb, quina és la probabilitat que realitzi operacions per Internet?

57. Setembre 05. Opció B (2 punts)

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4} \quad \text{Calcular: (a) } P(B/A). \quad (b) \quad P(\bar{A}/B)$$

Siguin A i B dos esdeveniments, tals que

58. Curs 05/06. Opció A (2 punts)

Es disposa de la següent informació relativa als esdeveniments A i B : $P(A) = 0'6$ $P(B) = 0'2$ $P(A \cap B) = 0'12$.

- (a) Calcular les probabilitats dels esdeveniments $(A \cup B)$ i $(A/(A \cup B))$.
 (b) Són incompatibles? Són independents?

59. Curs 05/06. Opció B (2 punts)

Una urna conté dues bolles. L'urna es va omplir tirant una moneda equilibrada a l'aire dues vegades i posant una bolla blanca per cada cara i una bolla negra per cada creu. S'extrau una bolla de l'urna i resulta ser blanca. Trobar la probabilitat que l'altra bolla de l'urna sigui també blanca.

60. Juny 06. Opció A (2 punts)

Una persona cuida del seu jardí però és prou distreta i s'oblida de regar-ho a vegades. La probabilitat que s'oblidi de regar el jardí és $2/3$. El jardí no està en molt bones condicions, així que si se li rega té la mateixa probabilitat de progressar que d'espantllar-se, però la probabilitat que progressi si no se li rega és de $0'25$. Si el jardí s'ha espantllat, quina és la probabilitat que la persona oblidara regar-lo?

61. Juny 06. Opció B (2 punts)

Es considera l'experiment consistent a llançar una moneda equilibrada i un dau equilibrat. Es demana: a) Descriure l'espai mostrat d'aquest experiment. b) Determinar la probabilitat del succés: Obtenir una cara en la moneda i un número parell en el dau.

62. Setembre 06. Opció A (2 punts)

Els tigres d'un cert país procedeixen de tres reserves: el 30 % de la primera, el 25 % de la segona i el 45 % de la tercera. La proporció de tigres albins de la primera reserva és $0'2$ %, mentre que aquesta proporció és $0'5$ % en la segona i $0'1$ % en la tercera. Quina és la probabilitat que un tigre d'aquest país sigui albi?

63. Setembre 06. Opció B (2 punts)

Una urna conté 10 bolles blanques i 5 negres. S'extrauen dues bolles a l'atzar sense reemplaçament. Quina és la probabilitat que siguin del mateix color?

64. Juny 07. Opció A (2 punts)

Segons un cert estudi, el 40 % de les llars europees té contractat l'accés a Internet, el 33 % té contractada la televisió per cable, i el 20 % disposen d'ambdós serveis. Se selecciona una llar europea a l'atzar.

- (a) Quina és la probabilitat que només tenguí contractada la televisió per cable?
 (b) Quina és la probabilitat que no tenguí contractat cap dels dos serveis?

65. Juny 07. Opció B (2 punts)

Els pianistes d'Illa Sordina es formen en tres conservatoris, C1, C2 i C3, que formen al 40 %, 35 % i 25 % dels pianistes, respectivament. Els percentatges de pianistes virtuoses que produeixen aquests conservatoris són del 5 %, 3 % i 4 %, respectivament. Se selecciona un pianista a l'atzar. (a) Calcular la probabilitat que sigui virtuós. (b) El pianista resulta ser virtuós. Calcular la probabilitat que s'hagi format en el primer conservatori (C1).

66. Setembre 07. Opció A (2 punts)

En el departament de làctics d'un supermercat es troben mesclats i a la venda 100 iogurts de la marca A, 60 de la marca B i 40 de la marca C. La probabilitat que un iogurt estigui caducat és $0'01$ per a la marca A; $0'02$ per a la marca B i $0'03$ per a la marca C. Un comprador tria un iogurt a l'atzar.

- (a) Calcular la probabilitat que el iogurt estigui caducat. (b) Sabent que el iogurt triat està caducat, quina és la probabilitat que sigui de la marca B?

67. Juny 2008-Opció A, 2 punts

En un joc consistent a llançar dues monedes indistingibles i equilibrades i un dau de sis cares equilibrat, un jugador gana si obté dues cares i un número parell en el dau, o bé exactament una cara i un nombre més gran o igual que cinc en el dau. a) Calcular la probabilitat que un jugador guanyi. b) Se sap que una persona ha guanyat. Quina és la probabilitat que obtingui dues cares al llançar les monedes?

68. Juny 2008-Opció B, 2 punts

Es consideren dos esdeveniments A i B d'un experiment aleatori, tals que: $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$

- a) Són A i B esdeveniments independents? Raona-ho.

- b) Calcular $P(\bar{A} / \bar{B})$. Nota.- La notació $\bar{A}$ representa al succés complementari de A .

69. Setembre 2008-Opció A, 2 punts

Es consideren dues activitats d'oci: A = veure televisió i B = visitar centres comercials. En una ciutat, la probabilitat que un adult practiqui A és igual a $0'46$; la probabilitat que practiqui B és igual a $0'33$ i la probabilitat que practiqui A i B és igual a $0'15$. a) Se selecciona a l'atzar un adult d'aquesta ciutat. Quina és la probabilitat que no practiqui cap de les dues activitats anteriors? b) Es tria a l'atzar un individu d'entre els que practiquen alguna de les dues activitats. Quina és la probabilitat que practiqui les dues activitats?

70. Setembre 2008-Opció B, 2 punts

Se suposa que els senyals que emet un determinat telègraf són punt i ratlla i que el telègraf envia un punt amb probabilitat $3/7$ i una ratlla amb probabilitat $4/7$. Els errors en la transmissió poden fer que quan s'envia un punt es rebi una ratlla amb probabilitat $1/4$ i que quan s'envia una ratlla es rebi un punt amb probabilitat $1/3$. a) Si es rep una ratlla, quina és la probabilitat que s'hagi enviat realment una ratlla? b) Suposant que els senyals s'envien amb independència, quina és la probabilitat que si es rep punt-punt s'hagi enviat ratlla-ratlla?

71. Juny 2009 Opció A, 2 punts

Es consideren tres esdeveniments A , B , C d'un experiment aleatori tals que:

$$P(A) = 1/2; P(B) = 1/3; P(C) = 1/4; P(A \cup B \cup C) = 2/3; P(A \cap B \cap C) = 0; P(A/B) = P(C/A) = 1/2.$$

(a) Calcula $P(C \cap B)$. (b) Calcula $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notació $\overline{A}$ representa al succés complementari de A .

72. Juny 2009 Opció B, 2 punts

Per a la construcció d'un lluminós de fira se disposa d'un contenidor amb 200 bombetes blanques, 120 bombetes blaves i 80 vermelles. La probabilitat que una bombeta del contenidor no funcioni és igual a $0'01$ si la bombeta és blanca, és igual a $0'02$ si la bombeta és blava i igual a $0'03$ si és vermella. Es tria a l'atzar una bombeta del contenidor. (a) Calcula la probabilitat que la bombeta triada no funcioni. (b) Sabent que la bombeta triada no funciona, calcula la probabilitat que aquesta bombeta sigui blava.

73 Setembre 2009. Opció A, 2 punts

En un cert banc el 30 % dels crèdits concedits són per a habitatge, el 50 % es destinen a empreses i el 20 % són per a consum. Se sap a més que dels crèdits concedits a habitatge, el 10 % resulten impagats, dels crèdits concedits a empreses són impagats el 20 % i dels crèdits concedits per a consum resulten impagats el 10 %. a) Calcula la probabilitat que un crèdit triat a l'atzar sigui pagat. b) Quina és la probabilitat que un crèdit triat a l'atzar s'hagi destinat a consum, sabent que s'ha pagat?

74. Setembre 2009 Opció B, 2 punts

La probabilitat que a un habitant d'un cert poble de la Comunitat de Madrid li agradi la música moderna és igual a $0'55$; la probabilitat que li agradi la música clàssica és igual a $0'40$ i la probabilitat que no li agradi cap de les dues és igual a $0'25$. Es tria a l'atzar un habitant d'aquest poble. Calcula la probabilitat que li agradi: a) Almenys un dels dos tipus de música. b) La música clàssica i també la música moderna. c) Només la música clàssica. d) Només la música moderna.

75. Juny 2010 Fase general. Opció A, 2 punts

Una bossa conté deu monedes equilibrades. Cinc d'aquestes monedes tenen cara i creu altres tres són monedes amb dues cares i les dues restants són monedes amb dues creus. Es tria a l'atzar una moneda de la bossa i es llança. a) Calcula la probabilitat que surti cara en aquest llançament. b) Si en el llançament ha sortit cara, quina és la probabilitat que la moneda triada tenguí cara i creu?

76. Juny 2010 Fase general. Opció B, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori tals que $P(A) = 0'2$ i $P(B) = 0'4$.

- Si A i B són mútuament excloents, determina $P(A \cup B)$. Són a més A i B independents? Raona-ho.
- Si A i B són independents, calcula $P(A \cap B)$. Són A i B a més mútuament excloents? Raona-ho.
- Si $P(A/B) = 0$, calcula $P(A \cap B)$. Són A i B mútuament excloents? Són A i B independents? Raona-ho.
- Si $A \subset B$, calcula $P(A \cap B)$. Són A i B independents? Raona-ho.

77. Juny 2010 Fase específica. Opció A, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori tals que $P(A) = 0'5$; $P(B) = 0'4$; $P(A \cap B) = 1$.

Calcula cada una de les probabilitats següents:

- $P(A \cap B)$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
- $P(A/B)$
- $P(\overline{A} \cap B)$. Nota. $\overline{A}$ representa al succés complementari de A .

78. Juny 2010 Fase específica. Opció B, 2 punts

Es disposa d'un dau equilibrat de sis cares, que es llança sis vegades amb independència. Calcula la probabilitat de cada un dels esdeveniments següents: a) Obtenir almenys un sis en el total dels sis llançaments. b) Obtenir un sis en el primer i últim llançaments i en la resta de llançaments un número diferent de sis.

79. Setembre 2010 Fase general. Opció A, 2 punts

Es consideren tres esdeveniments A , B i C d'un experiment aleatori, tals que: $P(A/C) \geq P(B/C)$, $P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C})$.

Raona quina de les següents desigualtats és sempre certa: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

80. Setembre 2010 Fase general. Opció B, 2 punts

Es consideren els esdeveniments següents: Succés A : L'economia d'un cert país està en recessió.

Succés B : Un indicador econòmic mostra que l'economia del país està en recessió.

Se sap que $P(A) = 0'005$; $P(B/A) = 0'95$; $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0'96$. a) Calcula la probabilitat que l'indicador econòmic mostri que l'economia del país no està en recessió i a més l'economia del país estigui en recessió. b) Calcula la probabilitat que l'indicador econòmic mostri que l'economia del país està en recessió.

81. Setembre 2010 Fase específica Opció A, 2 punts

En una residència universitària viuen 183 estudiants, dels quals 130 utilitzen la biblioteca. D'aquests últims 70 estudiants fan ús de la bugaderia, mentre que només 20 dels que no usen la biblioteca utilitzen la bugaderia. Es tria un estudiant de la residència a l'atzar. a) Quina és la probabilitat que utilitzi la bugaderia? b) Si l'estudiant triat no utilitza la bugaderia, quina és la probabilitat que utilitzi la biblioteca?

82. Setembre 2010 Fase específica Opció B, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori, tals que $P(A) = 0.6$. Calcula $P(A \cap \overline{B})$ en cada un dels casos següents: a) A i B són mútuament excloents. b) $A \subset B$. c) $B \subset A$ i $P(B) = 0.3$. d) $P(A \cap B) = 1$.

83. Curs 2010/11. Model. Opció A, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori tals que la probabilitat que ambdós ocorrin simultàniament és igual a $1/6$ i la probabilitat que no passi cap dels dos és igual a $7/12$. Se sap a més que $P(A/B) = 1/2$. a) Calcula la probabilitat que passi A o B . b) Calcula la probabilitat que passi A .

84. Curs 2010/11. Model. Opció B, 2 punts

En una certa població, la probabilitat que un habitant triat a l'atzar segueixi una dieta d'aprimament és igual a 0.2 . Entre els habitants que segueixen dieta d'aprimament, la probabilitat que un d'ells triat a l'atzar practiqui esport regularment és igual a 0.6 . Entre els habitants que no segueixen dieta d'aprimament la probabilitat que un d'ells triat a l'atzar practiqui esport regularment és igual a 0.3 . Es tria a l'atzar un habitant de la població. a) Calcula la probabilitat que practiqui esport regularment. b) Si se sap que aquest habitant practica esport regularment, quina és la probabilitat que estigui seguint una dieta d'aprimament?

85. Juny 2011. Opció A, 2 punts

En un edifici intel·ligent dotat de sistemes d'energia solar i eòlica, se sap que l'energia subministrada cada dia prové de plaques solars amb probabilitat 0.4 , de molins eòlics amb probabilitat 0.26 i d'ambdós tipus d'instal·lacions amb probabilitat 0.12 . Triat un dia a l'atzar, calcula la probabilitat que l'energia sigui subministrada a l'edifici: a) per alguna de les dues instal·lacions, b) només per una de les dues.

86. Juny 2011. Opció B, 2 punts

En un cert punt d'una autopista hi ha situat un radar que controla la velocitat dels vehicles que passen per aquest punt. La probabilitat que el vehicle que passi pel radar sigui un cotxe és 0.5 , de que sigui un camió és 0.3 i de que sigui una motocicleta és 0.2 . La probabilitat que cada un dels tres tipus de vehicles superi al passar pel radar la velocitat màxima permesa és 0.06 per a un cotxe, 0.02 per a un camió i 0.12 per a una motocicleta. En un moment donat un vehicle passa pel radar. A) Calcula la probabilitat que aquest vehicle superi la velocitat màxima permesa. B) Si el vehicle en qüestió ha superat la velocitat màxima permesa, quina és la probabilitat que es tracti d'una motocicleta.

87. Setembre 2011. Opció A, 2 punts

Se suposa que la probabilitat que neixi una nina és 0.49 i de neixi un nin és 0.51 . Una família té dos fills:

- a) Quina és la probabilitat que ambdós siguin nins, condicionada perquè el segon sigui nin?
b) Quina és la probabilitat que ambdós siguin nins, condicionada perquè almenys un sigui nin?

88. Setembre 2011. Opció B, 2 punts

Es disposen de tres urnes A , B i C . L'urna A conté 1 bolla blanca i 2 bolles negres, l'urna B conté 2 bolles blanques i 1 bolla negra i l'urna C conté 3 bolles blanques i 3 bolles negres. Es llança un dau equilibrat i si surt 1, 2 o 3 es tria l'urna A , si surt el 4 es tria l'urna B i si surt 5 o 6 es tria l'urna C . A continuació, s'extrau una bolla de l'urna triada. a) Quina és la probabilitat que la bolla extreta sigui blanca? b) Se sap que la bolla extreta ha sigut blanca, quina és la probabilitat que la bolla hagi sigut extreta de l'urna C ?

89. Setembre 2011. Opció A, (Reserva) 2 punts

La probabilitat que el jugador A de bàsquet aconsegueixi una canastra de tres punts és igual a $7/9$, i la probabilitat que un altre jugador B aconsegueixi una canastra de tres punts és $5/7$. Cada un d'aquests jugadors realitza un llançament de tres punts.

- a) Calcula la probabilitat que només un dels dos jugadors aconsegueixi un triple.
b) Calcula la probabilitat que almenys un dels dos jugadors aconsegueixi un triple.

90. Setembre 2011. Opció B, (Reserva) 2 punts

Les dades de la taula següent s'han extret de les estadístiques oficials de la prova d'accés a estudis universitaris (fase general) de la convocatòria del curs 2009/2010, en el Districte únic de Madrid:

	Al·lot	Al·lota
Apte	12109	9863
No apte	1717	1223

Es tria un alumne a l'atzar d'entre els que es van presentar a aquesta prova. 1. Quina és la probabilitat que l'alumne triat sigui al·lota o hagi resultat apte? 2. Si l'alumne triat és al·lot, quina és la probabilitat que hagi resultat no apte?

91. Curso 2011/12. Model. Opció A, 2 punts

Una bossa conté dues monedes equilibrades. Una de les monedes té cara i creu i l'altra té dues cares. Es tria a l'atzar una moneda de la bossa i es llança dues vegades consecutives amb independència, observant-se dues cares. Quina és la probabilitat que la moneda triada sigui la moneda de dues cares?

92. Juny 2012. Opció A, 2 punts

En un tribunal de la prova d'accés als ensenyaments universitaris oficials de grau s'han examinat 80 alumnes del col·legi A , 70 alumnes del col·legi B i 50 alumnes del col·legi C . La prova ha sigut superada pel 80 % dels alumnes del col·legi A , el 90 % dels del col·legi B i pel 82 % dels del col·legi C . (a) Quina és la probabilitat que un alumne triat a l'atzar hagi superat la prova? (b) Un alumne triat a l'atzar no ha superat la prova, quina és la probabilitat que pertanyi al col·legi B ?

93. Juny 2012. Opció B, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments d'un experiment aleatori tals que: $P(A \cap B) = 1$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6$, $P(A|B) = 0.5$. Calcula:

(a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B} / \overline{A})$

94. Setembre 2012. Opció A, 2 punts.

Es disposen de 5 caixes opaques. Una conté una bola blanca, dues contenen una bola negra i les altres dues estan buides. Un joc consisteix a anar seleccionant a l'atzar i seqüencialment una caixa no seleccionada prèviament fins a obtenir una que contengui una bola. Si la bola de la caixa seleccionada és blanca, el jugador gana; si és negra, el jugador perd. (a) Calcula la probabilitat que el jugador guanyi. (b) Si el jugador ha perdut, quina és la probabilitat que hagi seleccionat una sola caixa?

95. Curs 2012/13. Model. Opció B, 2 punts

Siguin A i B dos esdeveniments aleatoris tals que $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. a) Determina si són compatibles o incompatibles els esdeveniments A i B . b) Determina si són dependents o independents els esdeveniments A i B . Nota: $\overline{S}$ denota al succés complementari del succés S .

CAPÍTOL 12: DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT

ACTIVITATS PROPOSEADES

1. DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT

- Es llancen 3 monedes i comptam el nombre de cares que surten. Fes un diagrama en arbre. Escriu en una taula la funció de probabilitat i la funció de distribució. Representa la funció de probabilitat en un histograma i amb una línia la funció de distribució.
- Es llancen 2 daus i comptam el número de 5 que apareixen. Fes un diagrama en arbre, escriu en una taula la funció de probabilitat i la funció de distribució, i representa-les gràficament.
- Es llancen 3 monedes. Per jugar ens cobren 1 euro, i per cada cara que aparegui guanyam 1 euro. Escriu una distribució de probabilitat i representa l'histograma. Quant esperes guanyar o perdre en 100 llançaments?
- Una persona aposta 10 euros a un joc de tirar una moneda i que surti cara o creu (o semblant). Si guanya es retira i deixa de jugar. Si perd, aposta el doble, 20 euros. Si guanya es retira. Si perd aposta el doble, 40 euros. I així successivament. Amb aquesta estratègia sempre acaba guanyant 10 euros, però té un defecte, que no porta prou diners per a continuar jugant fins a guanyar! Imagina que porta 500 euros. A) Fes un diagrama d'arbre i calcula totes les possibilitats i les seves probabilitats. B) La distribució de probabilitat: Guany $(x) \rightarrow$ Probabilitat (x) . C) És un joc avantatjós? I per al nostre jugador? D) Calcula la probabilitat de guanyar 10 euros i la de perdre 500 euros.
- Llançam dos daus. Si apostem al 7 i surt, recuperem tres vegades el que aposta. Si apostem que surt menor que 7 i surt, recuperem allò que s'ha apostat, i el mateix si apostem que surt major que 7. Quina és la millor estratègia?
- S'ha comprovat que la distribució de probabilitat del sexe d'un xiquet de bolquers és:

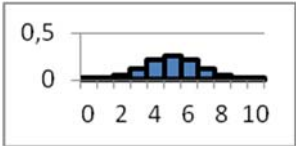
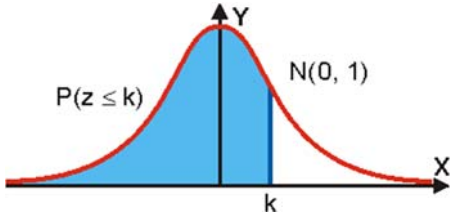
Sexe del nadó:	nina	nin
Probabilitat:	0'485	0'515

En un hospital naixeran avui 10 bebès. Escriu l'expressió de probabilitat que neixin 7 nines.

- S'estima que el percentatge de llars que utilitza una determinada marca de tomàtiga fregida és del 12 %. En una mostra de 20 llars, quina probabilitat hi ha de trobar entre 6 i 15 que ho utilitzen? (No ho calculis, només planteja com ho calcularies).
- Llançam dues monedes i comptam el nombre de cares. Calcula la mitjana i la desviació típica de l'experiment.
- Observa l'histograma de l'experiment de llançar una moneda 3 vegades. Indica les següents probabilitats. A) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor que 1. B) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor o igual a 1
- Observa l'histograma de l'experiment de llançar una moneda 5 vegades. Indica les següents probabilitats. A) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor que 3. B) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor o igual a 3.
- Escriu l'expressió (no ho calculis) de la probabilitat que al llançar una moneda 15 vegades el nombre de cares sigui menor que 5.
- Escriu l'expressió (no ho calculis) de la probabilitat que al llançar un dau 15 vegades el nombre de cincs sigui major que 10.
- En el control de qualitat de bombetes de baix consum d'una fàbrica s'ha comprovat que el 90 % són bones. Es pren una mostra de 500 bombetes. Generalment, quantes seran de bona qualitat? Calcula la mitjana, variància i desviació típica.
- En l'estudi sobre una nova medicina per a l'hepatitis C s'ha comprovat que produeix curacions completes en el 80 % dels casos tractats. S'administra a mil nous malalts, quantes curacions esperarem que es produeixin?
- Utilitza la desigualtat de *Chebycheff* per a indicar els intervals de probabilitat per al joc d'apostar a obtenir més de 7 al tirar dos daus. (Ajuda: $\mu = -1/6$ i $\sigma \approx 0'986$).
- En la fàbrica de bombetes de baix consum amb $B(500, 0'9)$ utilitza la desigualtat de *Chebycheff* per a determinar els intervals tals que $P(a \leq x \leq b) \geq 0'75$, i que $P(c \leq x \leq d) \geq 0'89$.
- En la medicina per a l'hepatitis C amb $B(1000, 0'8)$ utilitza la desigualtat de *Chebycheff* per a determinar els intervals tals que la probabilitat de curació sigui $P(a \leq x \leq b) \geq 0'75$, i que $P(c \leq x \leq d) \geq 0'89$.
- Calcula A perquè $f(x) = A(x^2 - 16)$ sigui una funció de densitat. Determina el domini. Calcula la mitjana i la variància.
- Utilitza la taula de la normal tipificada per a calcular:
a) $P(z \leq 0'37)$; b) $P(z < 1'51)$; c) $P(z \geq 0'87)$; d) $P(z \leq -0'87)$; e) $P(0'32 < z < 1'24)$.
- Es tracten pacients amb trastorn del son amb un tractament que modela el nombre de dies amb una distribució normal de mitja 290 dies i desviació típica 30. Calcula la probabilitat que al prendre una persona a l'atzar el seu tractament duri més de 300 dies.
- En una estació meteorològica que les precipitacions anuals de pluja tenen una mitjana de 450 mm/m² amb una desviació típica de 80 mm/m². Suposam que la variable aleatòria segueix una distribució normal. Calcula la probabilitat que: a) Aquest any que ve la precipitació excedeixi els 500 mm/m². b) La precipitació estigui entre 400 i 510 mm/m². c) La precipitació sigui menor de 300 mm/m².
- En el cas del problema anterior d'una $N(450, 80)$ determina la probabilitat que la variable estigui en els intervals $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.
- En una fàbrica de cotxes es fan proves per a conèixer el temps que tarden els seus vehicles a aconseguir la velocitat punta. Es considera que eixa variable aleatòria temps es distribueix segons una distribució normal de mitja 20 s i desviació típica 2 s. Calcula les probabilitats següents: a) Que un vehicle abast la seva velocitat punta als 25 s. b) Abast la seva velocitat punta en menys de 25 s. c) L'abast entre 18 s i 22s. d) Quina velocitat punta consideres que tindran els vehicles ràpids? e) I els lents?
- Es llança una moneda mil vegades, quina és la probabilitat que el nombre de cares obtingudes estigui entre 400 i 600? I de que sigui major que 800?

25. En una fàbrica de bombetes de baix consum se sap que el 70 % d'elles tenen una vida mitjana superior a 1000 hores. Es pren una mostra de 50 bombetes, quina és la probabilitat que hi hagi entre 20 i 30 la vida mitja de la qual sigui superior a mil hores?, i la probabilitat que hi hagi més de 45 la vida mitja de la qual sigui superior a 1000 hores?
26. S'investiguen a peu d'urna les preferències de vots en la Comunitat de Madrid. De 2000 enquestes 700 voten al partit X. Quants haurien de votar al partit estudiat perquè guanyara amb un 95% de confiança.
27. Refés els càlculs de l'activitat anterior per a un nivell de confiança del 99 %.
28. S'investiguen els hàbits de consum d'una població de dos milions de persones. Es passa una enquesta a mil persones i se'ls pregunta si en el seu domicili es cuina amb gas, dels que 600 responen afirmativament. Què pots afirmar sobre el nombre de persones en què en el seu domicili s'usa gas amb un nivell de confiança del 95 %.
29. Es llança 600 vegades un dau i comptam el número de 5s. a) Quin és l'interval simètric respecte de la mitjana amb una probabilitat de 0'99? b) El mateix amb una probabilitat del 0'6.
30. Un determinat avió de la companyia té 260 places. Quin nombre de reserves n pot acceptar la companyia admetent una probabilitat del 0'02 perquè el nombre de reserves superi al nombre de places sabent que el 5% de les persones que reserven un bitllet no es presenta. (Ajuda: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0'02 \Rightarrow p(x \leq 260) = 1 - p(x > 260) \geq 0'98$).

RESUM

Propietats de funció de probabilitat	1) $p(x) \geq 0$ 2) $\Sigma p(x) = 1$.	Llançam dues monedes i comptam el nombre de cares:												
Propietats de funció de distribució	1) $0 \leq F(x) \leq 1$ 2) $F(x)$ es una función creciente 3) $F(x_{Máximo}) = 1$	<table><tr><td>Nombre de cares (x):</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>Funció de probabilitat (p(x)):</td><td>1/4</td><td>1/2</td><td>1/4</td></tr><tr><td>Funció de distribució F(x):</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>4/4</td></tr></table>	Nombre de cares (x):	0	1	2	Funció de probabilitat (p(x)):	1/4	1/2	1/4	Funció de distribució F(x):	1/4	3/4	4/4
Nombre de cares (x):	0	1	2											
Funció de probabilitat (p(x)):	1/4	1/2	1/4											
Funció de distribució F(x):	1/4	3/4	4/4											
Esperança matemàtica	$E(x) = \mu = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$	$\mu = 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) = 1$												
Variància i desviació típica	$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = E(x^2) - E^2(x)$ $\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)}$	$\sigma^2 = (0-1)^2 \cdot (1/4) + (1-1)^2 \cdot (1/2) + (2-1)^2 \cdot (1/4) = 1/2$. $\sigma = \sqrt{1/2}$												
Distribució binomial	$B(n, p) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$ $E(x) = \mu = n \cdot p, \sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$	 $B(10, 1/2)$.												
Distribució normal	$N(\mu, \sigma) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$													
Aproximació de la binomial a la normal	Una binomial amb $npq \geq 9$ es considera que s'ajusta bé a una normal de igual mitjana i desviació típica.													

EXERCICIS I PROBLEMES.

- Es llança un dau tres vegades i es compta el nombre de tresos que apareixen. Dibuixa l'histograma, la funció de probabilitat i la funció de distribució. Calcula la mitjana i la desviació típica.
- Llançam 4 monedes. Per cada cara que surti guanyam 5 euros, però hem de pagar 3 euros per jugar. Quant esperes guanyar en una jugada? I en 20 jugades? I en 100 jugades?
- Disposem de dues urnes, la primera amb 6 bolles idèntiques numerades de l'1 al 6; la segona amb 4 bolles idèntiques numerades de l'1 al 4. Traiem al mateix temps una bolla de cada urna, i considerem la variable aleatòria, "suma de punts obtinguts". A) Calcula la distribució de probabilitat i dibuixa l'histograma corresponent. B) Si traiem més de 5 punts guanyam 10 euros, i en cas contrari perdem la mateixa quantitat. És un joc equitatiu?
- La població activa d'un cert país es pot dividir en els que tenen estudis superiors i els que no els tenen, sent el primer grup d'un 20 %. Triem 10 persones de la població activa a l'atzar. Escriu l'expressió de totes les possibilitats i les seves probabilitats. Calcula la probabilitat que hi hagi 9 o 10 que tinguin estudis superiors.
- Si $p(x)$ és la probabilitat de tenir x èxits en una distribució binomial $B(n, p)$, i $p(x+1)$ és la d'obtenir $x+1$ èxits, comprova que es

$$p(x+1) = \frac{p(x)}{x+1} (n-x) \frac{p}{q}$$

verifica la següent relació recurrent:

- En una ruleta hi ha 37 números numerats del 0 al 36, dels quals 18 són parells i 18 imparells. Si surt el 0 gana la banca. Juguem al dos per 1 a imparell, apostem 10 euros a imparell, i la banca ens paga 20 euros si surt un imparell, i es queda amb els nostres 10 euros si no surt. Et pareix un joc equitatiu?
- Joc de Sant Petersburg: Es llança una moneda no trucada fins que apareix cara. Si surt en el primer llançament, es guanyen 10 euros, si en el segon, 20, si en el tercer, 40, ... i en el n -èsim, $10 \cdot 2^{n-1}$. Calcula el guany mitjà si només es pot llançar 5 vegades la moneda. I si es pot llançar 10 vegades?
- Llançam un dau no trucat mil vegades i comptam les vegades que surt el número de 5, quin nombre d'èxits esperem amb una probabilitat no inferior al 0'95, és a dir, en l'interval mitjana menys dues vegades la desviació típica i mitja més dues vegades la desviació típica?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ Ax & \text{si } 0 \leq x < 8 \\ A(16-x) & \text{si } 8 \leq x < 16 \\ 0 & \text{si } x > 16 \end{cases}$$

- Calcula A perquè la funció següent sigui una funció de densitat de probabilitat. A) Dibuixa la seva gràfica i calcula les probabilitats següents: $P(x < 5)$; $P(6 < x < 10)$; $P(x > 12)$. B) Calcula la mitjana i la desviació típica.

- Calcula A en cada un dels casos següents perquè la funció $f(x)$ sigui una funció de densitat de probabilitat.

A) $f(x) = Ax^2(x-3)$ sent nul·la per a $x < 0$, i $x > 3$. B) $f(x) = Ax(x-3)^2$ sent nul·la per a $x < 0$, i $x > 3$.

C) $f(x) = Ax^3(x-3)$ sent nul·la per a $x < 0$, i $x > 3$. D) $f(x) = Ax^2(x-3)^2$ sent nul·la per a $x < 0$, i $x > 3$.

Calcula en cada cas $P(x < 1)$ i $P(x > 2)$. Determina la mitjana i la variància. Analitza les diferències.

- En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ calcula $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ i $P(x = 7)$. Determina també la mitjana i la desviació típica.

- Llançam 5 monedes, calcula les probabilitats d'obtenir:

a) 0 cares, b) 1 cara, c) 2 cares, d) 3 cares

- Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

a) $P(z = 0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1'82)$, d) $P(z > 1'82)$.

- Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.

- Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1'3 < z < 4)$, c) $P(-0'2 < z < 2'34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.

- Calcula en una distribució normal $N(1, 2)$ les probabilitats següents:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

- Calcula en una distribució normal $N(0'5, 0'2)$ les probabilitats següents:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

- Calcula en una distribució normal $N(1, 1/2)$ les probabilitats següents:

a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1'3 < x < 4)$, c) $P(-0'2 < x < 2'34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.

- En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i per mitjà de l'aproximació a la normal determina $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ i $P(x = 7)$. Compara amb els resultats obtinguts en l'exercici 9.

- En una distribució binomial $B(100, 0'4)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i per mitjà de l'aproximació a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \leq 50)$, $P(x \geq 50)$ i $P(40 \leq x \leq 50)$.

- En una distribució binomial $B(1000, 0'5)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i per mitjà de l'aproximació a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ i $P(50 \leq x \leq 150)$.

- En una distribució binomial $B(1000, 0'05)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i per mitjà de l'aproximació a la normal determina $P(x >$

200), $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ i $P(50 \leq x \leq 200)$.

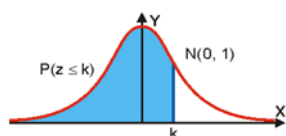
10. Una fàbrica de mòbils ha comprovat que l'1 % de què fabrica són defectuosos. En un control de qualitat es prenen 10 mòbils a l'atzar. Calcula la mitjana i la desviació típica. Calcula la probabilitat que hi hagi més de 2 mòbils defectuosos.
11. La probabilitat que na Maria guanyi a na Raquel en una partida és de 0'4. Juguen 6 partides. Calcula la probabilitat que:
 - a) Na Maria guanyi alguna vegada.
 - b) Na Raquel guanyi almenys una vegada.
 - c) Na Raquel guanyi més de la mitat de les partides.
 - d) Na Maria guanyi 2 partides.
12. Les estatures de les persones d'una certa població es distribueixen segons una normal de mitjana 180 cm i desviació típica 15 cm. Determina les probabilitats que: a) Una persona tingui una estatura superior a 190 cm. b) Una persona tingui una estatura menor a 160 cm. c) Quina proporció de persones tenen una estatura compresa entre 160 cm i 190 cm?
13. En un examen per a entrar en un cos de l'Estat se sap que els punts obtinguts es distribueixen segons una normal de mitja 100 i desviació típica 10 punts. Determina la probabilitat que: a) Un opositor obtingui 120 punts. b) Si per a aprovar és necessari tenir més de 120 punts, Quin percentatge d'opositors aproven? c) Si aproven únicament els que estan entre el 20 % dels millors, quants punts ha d'obtenir un opositor per a aprovar?

AUTOAVALUACIÓ

1. Es llança un dau tres vegades i s'anota el números de quates que apareixen. La distribució de probabilitat que tenim és:
 - a) $B(4, 1/6)$
 - b) $B(4, 1/4)$
 - c) $B(3, 1/6)$
 - d) $B(3, 5/6)$
2. En la distribució anterior, la mitjana és:
 - a) $\mu = 4/6$
 - b) $\mu = 1/2$
 - c) $\mu = 15/6$
 - d) $\mu = 1$
3. La variància és:
 - a) $\sigma^2 = 15/12$
 - b) $\sigma^2 = 5/6$
 - c) $\sigma^2 = 1/36$
 - d) $\sigma^2 = 5/12$
4. Utilitza la taula de la distribució normal estàndard per a calcular la probabilitat $P(z \leq 2'02)$, que val:
 - a) $P(z \leq 2'02) = 0'0217$
 - b) $P(z \leq 2'02) = 0'9772$
 - c) $P(z \leq 2'02) = 0'0228$
 - d) $P(z \leq 2'02) = 0'9783$
5. Utilitza la taula de la distribució normal estàndard per a calcular la probabilitat $P(0'5 < z < 1'5)$, que val:
 - a) 0'3417
 - b) 0'9332
 - c) 0'6915
 - d) 0'2742
6. Sense mirar la taula, ni tipificar la variable, la probabilitat de $P(x < \mu)$ és:
 - a) -0'4
 - b) 0'5
 - c) 0'6
 - d) No pot saber-se
7. En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ el valor de $P(x = 0)$ és:
 - a) 11
 - b) 0'0198
 - c) 0'00001024
 - d) 0'8
8. El 2 % de les pastilles de fre fabricades se sap que són defectuoses. En una caixa amb 2000 pastilles, la probabilitat que hi hagi menys de 50 defectuoses és:
 - a) 0'6011
 - b) 0'7635
 - c) 0'9357
 - d) 0'8655
9. Una fàbrica d'ordinadors ha comprovat que el 5 % dels que fabrica són defectuosos. En un control de qualitat es prenen 10 ordinadors a l'atzar. Determina si la probabilitat que no hi hagi cap defectuós és:
 - a) 0'5987
 - b) 0'4027
 - c) 0'9357
 - d) 0'8074
10. La probabilitat que na Maria guanyi a na Raquel en una partida és 2/3. Juguen 4 partides. Determina si la probabilitat que na Maria guanyi alguna vegada és:
 - a) 0'0123
 - b) 0'5
 - c) 0'8972
 - d) 0'9877

PROBLEMES DE SELECTIVITAT

1. Un àrbitre de futbol ha observat que en el tipus de partits que ell arbitra un 70 % dels penals acaben en gol. Un partit es pretén decidir per mitjà d'una tanda de 10 llançaments de penal per cada equip. El primer equip ja ha llançat els seus penals i ha obtingut 8 gols. A continuació llançarà els seus penals l'altre equip: a) Descric la variable que representa el nombre de gols que aquest equip obtindrà. Quin és el nombre de gols esperat? b) Quina és la probabilitat que faci també 8 gols i es torni a empatar el partit? c) Quina és la probabilitat que guanyi el segon equip, és a dir, de que faci 9 o més gols? Juny 1998 – Selectivitat
2. La despesa total diària d'una família és una variable normal amb mitjana 30 € i desviació típica 6 €. a) Quina és la probabilitat que un dia es gastin més de 36 €? I de que es gastin menys de 12 €? b) Quin percentatge de dies es trobarà la despesa entre 36 € i 42 €? c) Calcula el valor per davall del qual es troben el 80% de les despeses totals diàries de la família. Setembre 1998 – Selectivitat
3. L'Ajuntament d'una certa ciutat ha promogut una campanya per a millorar l'estètica de la mateixa, de manera que en els edificis hi hagi només una antena de televisió per a tots els veïns. El fruit d'aquesta campanya ha sigut que el 80% dels edificis tenen efectivament només una antena. Suposem ara que en un carrer hi ha 15 edificis: a) Descric la variable que representa el nombre d'edificis del carrer que tenen una sola antena. Quants edificis s'espera que tinguin només una antena? b) Quina és la probabilitat que hi hagi 11 edificis amb només una antena? c) Quina és la probabilitat que 14 o més tinguin només una antena? Juny 1999 – Selectivitat
4. En un magatzem de fruita la demanda total diària de pomes (en quilos) segueix una distribució normal de mitja 1.000 i desviació típica 100. a) Calcula el percentatge de dies en què la demanda no supera els 1.100 quilos. b) El magatzem disposa diàriament de 1.200 quilos de pomes. Quina és la probabilitat que un dia la demanda superi aquesta quantitat i no pugui ser atesa? c) Calcula el nombre de quilos de pomes per davall del qual se situen el 95 % de les quantitats totals que se li demanen al magatzem diàriament. Setembre 1999 – Selectivitat
5. Per a un cert model de rentadora s'ha analitzat el temps de funcionament que transcorre sense necessitar revisió tècnica, arribant a la conclusió que aquest temps és una variable Normal de mitja 5.040 hores de rentat amb una desviació típica de 720 hores. a) Calcula la probabilitat que una rentadora d'aquest model no superi les 3.960 hores de rentat sense necessitar revisió. b) Calcula la probabilitat que superi les 6.480 hores sense necessitar revisió. c) Calcula la probabilitat que funcioni sense necessitat de revisió entre 5.760 i 6.120 hores. d) Quin nombre d'hores no supera sense necessitar revisió el 90 % d'aquest tipus de rentadores? Juny 2000 – Selectivitat
6. Una empresa de màrqueting ha realitzat un estudi sobre el llançament al mercat d'una certa beguda refrescant. La conclusió és que la beguda agrada a un 80 % de les persones que la proven. Una vegada realitzat l'estudi, un grup de 12 persones triades a l'atzar va ser convidat a provar la beguda: a) De les 12 persones només a 5 els va agradar la beguda. Si l'estudi de màrqueting és correcte quina és la probabilitat que això hagi succeït? b) Si l'estudi de màrqueting és correcte, quina era la probabilitat que a més de 10 persones els hagués agradat la beguda? c) Si l'estudi de màrqueting és correcte, quina era la probabilitat que a algun dels 12 no li hagués agradat la beguda? Selectivitat
7. Un 30 % dels pacients que acudixen al servei d'urgències d'un hospital no realitzen en realitat una consulta urgent i podien perfectament haver esperat a concertar una cita amb el metge de capçalera. En un matí han acudit 10 pacients al servei d'urgències. a) Quina probabilitat hi ha de que 6 d'ells no realitzen una consulta urgent? b) Quina probabilitat hi ha de que menys de 3 pacients no realitzen una consulta urgent? c) Quina probabilitat hi ha de que algun d'ells no realitzi una consulta urgent? Juny 2002 – Selectivitat
8. En una empresa, els diners percebuts anualment per cada empleat en concepte de dietes segueix una distribució Normal de mitja 1900 euros i desviació típica 250 euros. a) Quina és la probabilitat que un empleat cobri per dietes menys de 1525 euros? Quina és la probabilitat que cobri més de 2400 euros? b) Quin percentatge d'empleats cobraran entre 1525 euros i 2400 euros? c) Se sap que un individu cobra en dietes més que un 70% dels empleats de l'empresa i menys que un 30 %. Quant es porta en dietes? Setembre 2002 – Selectivitat
9. Segons un estudi dut a terme en una certa ciutat fa 2 anys, al 10 % dels jòvens residents en la mateixa li agradava la música clàssica. Es pretén avaluar si aquest estudi continua sent vàlid (de manera que encara en l'actualitat li agradi aquest tipus de música al 10 % dels jòvens de la ciutat). Per a això s'ha realitzat una enquesta a 20 jòvens a l'atzar, resultant que a 4 els agrada la música clàssica. Si l'estudi realitzat fa 2 anys continua sent vàlid: a) Quina era la probabilitat que s'hagués produït el resultat esmentat en l'enquesta als 20 joves? b) Quina probabilitat havia de que la música clàssica li hagués agradat com a màxim a 2 dels 20? c) Quina probabilitat havia de que li hagués agradat a algun dels 20? d) dels 20 enquestats quin era el nombre esperat de joves als que agradaria la música clàssica? Juny 2003 – Selectivitat
10. Una cadena d'establiments comercials ha fet un estudi que xifra en un 48 % el percentatge dels clients que utilitzen per als seus pagaments algun tipus de targeta. En la cua d'una de les seves botigues hi ha 6 clients: a) Quina probabilitat hi ha de que 4 d'ells paguin amb targeta? Quina probabilitat hi ha de que més de 4 paguin amb targeta? b) Quina probabilitat hi ha de que algun d'ells pagui amb targeta? c) Quina probabilitat hi ha de que algun d'ells no pagui amb targeta? Setembre 2003 - Selectivitat

ÀREES SOTA LA DISTRIBUCIÓ DE PROBABILITAT NORMAL ESTÀNDAR, $N(0, 1)$ 

Taula de la UAM: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000