

MATEMÀTIQUES I:

1r BATXILLERAT

Capítol 2: Àlgebra

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-060661

Fecha y hora de registro: 2015-01-10 17:30:14.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autors: José Antonio Encabo de Lucas i Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)

Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

1. POLINOMIS

- 1.1. DEFINICIÓ, TERMES, GRAU, VALOR NUMÈRIC
- 1.2. OPERACIONS AMB POLINOMIS
- 1.3. REGLA DE RUFFINI. TEOREMA DEL RESIDU
- 1.4. ARRELS D'UN POLINOMI
- 1.5. FACTORIZACIÓ DE POLINOMIS
- 1.6. FRACCIONS ALGEBRAIQUES

2. EQUACIONS I INEQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

- 2.1. RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE PRIMER GRAU
- 2.2. RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE SEGON GRAU
- 2.3. RESOLUCIÓ D'INEQUACIONS DE PRIMER GRAU I LA SEVA INTERPRETACIÓ GRÀFICA
- 2.4. RESOLUCIÓ D'INEQUACIONS DE SEGON GRAU

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

- 3.1. RESOLUCIÓ PEL MÈTODE DE GAUSS
- 3.2. DISCUSSIÓ DE SISTEMES APLICANT EL MÈTODE DE GAUSS
- 3.3. PROBLEMES D'EQUACIONS LINEALS
- 3.4. SISTEMES D'INEQUACIONS LINEALS I LA SEVA INTERPRETACIÓ GRÀFICA

Resum

En aquest capítol sobre Àlgebra repassarem conceptes relacionats amb polinomis, equacions i inequacions, per a endinsar-nos en els sistemes d'equacions, la seva resolució i representacions gràfiques, basant-nos en el "*Mètode de Gauss*", mètode de resolució de sistemes d'equacions, matemàtic molt important en Àlgebra ja que fou el primer en donar una demostració del teorema fonamental de l'Àlgebra: "*Tota equació algebraica de grau n té n solucions*".

Seguirem amb les inequacions i sistemes d'inequacions que tenen interessants aplicacions.



Karl Friedrich Gauss

1. POLINOMIS

1.1. Definició. Termes. Grau. Valor numèric

Recordeu que:

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres reals i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre real que multiplica a la indeterminada o indeterminades; la indeterminada o indeterminades conformen la **part literal** del monomi.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel grau més gran dels seus monomis.

Exemples:

 $\frac{1}{7} \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 + 8$ és un polinomi de grau 3 en la variable x .

 $-5 \cdot y^4 + 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x$ és un polinomi de grau 4 en les indeterminades x i y .

 $3 \cdot x^2 \cdot y^3 - 2 + 5 \cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y .

 $8x - 9 \cdot y + 3 \cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x , y i z .

Tant en aquesta secció com en la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres reals.

Diem que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de grau més gran és igual a 1.

Els termes d'un polinomi venen determinats pel nombre de monomis que tingui el polinomi.

Recordeu que:

Monomi: *mono: un, nomi: terme*: 1 terme.

Binomi: *bino: 2 dos, nomi: terme*: 2 termes.

Trinomi: *trino: tres, nomi: terme*: 3 termes.

Quadrinomi: *quadri: quatre, nomi: terme*: quatre termes.

A partir de quadrinomi se'ls denomina polinomis. *Poli: diversos, nomi: termes*.

Així per exemple:

 $4y^3 + 3y - 7$ està format per 3 monomis $4y^3$, $3y$, -7 i per tant té **tres termes**.

 $-3y^4 + 8x^2 + 5x$ està format per 3 monomis, $-3y^4$, $8x^2$ y $5x$, i per tant té 3 termes.

Si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre real el **valor numèric** del polinomi per a aquest valor determinat de la variable.

Si hem anomenat p un polinomi, l'avaluació de p en, per exemple, el nombre -5 la denotem per $p(-5)$, i llegim " p de menys cinc" o " p en menys cinc". Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x , podem referir-nos-hi com p o $p(x)$ indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entès com una manera concreta d'assignar a cada nombre real un altre nombre real.

Exemples:

✚ Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ ens trobem amb el nombre

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

✚ El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ per a $y = -1$ és

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

1.2. Operacions amb polinomis

Ja sabeu que:

Suma de polinomis

Com que un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis d'igual part literal.

Exemples:

✚ La suma dels polinomis $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ i $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ és el polinomi

$$\begin{aligned} \left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) &= (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) = \\ &= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4 \end{aligned}$$

✚ $(7x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 9x - 8) = (7x^2 + 2x^2) + (-5x + 9x) + (3 - 8) = 9x^2 + 4x - 5$

✚ En el següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre l'altre.

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 5x + 6 \\ + \quad -9x^5 \quad \quad + 4x^3 + 11x^2 - 9x - 7 \\ \hline -7x^5 + 6x^4 + 7x^3 \quad \quad -4x - 1 \end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'ordre en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p + q \equiv q + p$$

Exemple:

$$\begin{aligned} (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) &= -x^3 + (4x^2 + x^2) + (-2x - 3x) + (7 + 1) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8 \\ (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (4x^2 - 2x + 7) &= -x^3 + (x^2 + 4x^2) + (-3x - 2x) + (1 + 7) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8 \end{aligned}$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. N'hi ha prou amb agrupar-los de dos en dos:

$$(p + q) + r \equiv p + (q + r)$$

Exemple:

$$\begin{aligned} (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 5x + 2) + (x + 6) &= (2x^3 - 2x^2 + 2 + x^4 + 7x^2 + 5x + 2) + (x + 6) = \\ &= (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 5x + 2) + (x + 6) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 8 \end{aligned}$$

També:

$$\begin{aligned} (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 5x + 2) + (x + 6) &= (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 5x + 2 + x + 6) = \\ &= (2x^3 - 2x^2 + 2) + (x^4 + 7x^2 + 6x + 8) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 10 \end{aligned}$$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat peculiar: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest darrer. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el **polinomi zero**.

Exemple:

$$\begin{aligned} (5x^3 + 4x^2 - 3x + 1) + 0 &= 0 + (5x^3 + 4x^2 - 3x + 1) = (5x^3 + 4x^2 - 3x + 1) \\ 0 + (-7x^3 + 3x + 7) &= (-7x^3 + 3x + 7) + 0 = -7x^3 + 3x + 7 \end{aligned}$$

Element oposat. Cada polinomi en té associat un altre, al que anomenarem el seu **polinomi oposat**, tal que la suma de tots dos és igual al polinomi zero. Trobem el polinomi oposat a un de donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

El polinomi oposat a $p \equiv -3x^4 + 5x^3 + 2x - 7$ és $3x^4 - 5x^3 - 2x + 7$, que denotarem com " $-p$ ".
Ratifiquem que la seva suma és el polinomi zero:

$$(-3x^4 + 5x^3 + 2x - 7) + (3x^4 - 5x^3 - 2x + 7) = (-3x^4 + 3x^4) + (5x^3 - 5x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Resta de polinomis

Recordem que el polinomi *oposat* a un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon amb multiplicar pel nombre " -1 " el polinomi original. D'aquesta forma el polinomi oposat a p és

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural la **operació diferència, o resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat a un de donat:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

La resta consisteix a sumar a un polinomi l'oposat d'un altre.

Exemple:

Donat el polinomi: $p \equiv 2x^4 - 3x^2 + 6$ i el polinomi: $q \equiv -7x^4 + 6x^2 + 7$.

Anem a restar $p - q$:

El procés és el mateix que per a la suma, l'únic que canvia és que a p li sumem l'oposat de q .

És a dir, canviem q de signe i el sumem a p :

$$(2x^4 - 3x^2 + 6) - (-7x^4 + 6x^2 + 7) = (2x^4 - 3x^2 + 6) + (7x^4 - 6x^2 - 7) = 9x^4 - 5x^2 - 1.$$

Recordem que l'oposat a q és $-q$, $(7x^4 - 6x^2 - 7)$.

Exemple:

$$\begin{aligned} (-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) &= (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) = \\ &= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

Activitats proposades

- Feu la suma i resta dels següents polinomis:
 - $x^2 - 2$
 - $3x^4 + x^3 - 1$
- Feu les següents sumes de polinomis:
 - $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$
 - $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$
- Escriviu el polinomi oposat a cadascun dels següents polinomis:
 - $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$
 - $-7x^3 - 6x + 5$
 - $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$
- Considereu els polinomis $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Trobeu els valors que pren cadascun d'ells en $x = -2$, és a dir, calculeu $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudieu si existeix alguna relació entre aquests tres valors.
- Obtingueu el valor del polinomi $p \equiv -x - 5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. Quin valor pren el polinomi oposat a p en $x = 3$?
- Realitzeu les següents diferències de polinomis:
 - $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$
 - $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$
 - $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Producte de polinomis

Una altra operació que podem fer amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com que aquesta pren valors en els nombres reals, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte de nombres reals, en particular la propietat distributiva del producte respecte la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resollem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

a) $6x^2 \cdot (-2x^4) = 6 \cdot (-2) \cdot x^{2+4} = -12x^6$

b) $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

c) $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

d) $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$

e) $(3x - 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) = 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$

f) $(x + 6) \cdot (x^2 - 2x) = (x + 6) \cdot x^2 + (x + 6) \cdot (-2x) = (x^3 + 6x^2) + (-2x^2 + 12x) = x^3 + 6x^2 - 2x^2 + 12x$

Exemple:

✚ També podem materialitzar el producte de polinomis tal i como multipliquem nombres enters:

$$\begin{array}{r}
 -2x^3 + x + 4 \\
 \times \quad x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 -2x^3 \quad + x + 4 \\
 6x^4 \quad - 3x^2 - 12x \\
 -2x^5 \quad + x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 -2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 4
 \end{array}$$

Activitats proposades

7. Efectueu els següents productes de polinomis:

a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$

d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

8. Multipliqueu cadascun dels següents polinomis per un nombre de manera que obtingueu polinomis mòncics:

a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$

9. Calculeu i simplifiqueu els següents productes:

a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$ c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$

d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'ordre en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemple:

$$\text{✚} (2x^2 - 7) \cdot (-x^4 + x^2) = 2x^2 \cdot (-x^4 + x^2) - 7 \cdot (-x^4 + x^2) = -2x^6 + 2x^4 + 7x^4 - 7x^2 = -2x^6 + 9x^4 - 7x^2$$

$$(-x^4 + x^2) \cdot (2x^2 - 7) = -x^4 \cdot (2x^2 - 7) + x^2 \cdot (2x^2 - 7) = -2x^6 + 7x^4 + 2x^4 - 7x^2 = -2x^6 + 9x^4 - 7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. N'hi ha prou agrupant-los de dos en dos:

$$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$$

Exemple:

$$\begin{aligned} &((4x^2 - 2) \cdot (-3x + 1)) \cdot (-x^3 + x) = (-12x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \cdot (-x^3 + x) = \\ &= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x \end{aligned}$$

També:

$$\begin{aligned} &(4x^2 - 2) \cdot ((-3x + 1) \cdot (-x^3 + x)) = (4x^2 - 2) \cdot (3x^4 - 3x^2 - x^3 + x) = \\ &= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x \end{aligned}$$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: al multiplicar-lo per qualsevol altre ens dona aquest darrer. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat*.

Exemple:

$$\text{✚} 1 \cdot (-8x^2 - 2x + 3) = (-8x^2 - 2x + 3) \cdot 1 = -8x^2 - 2x + 3$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(8x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x))$$

tenim dues opcions per conèixer el resultat:

a) fer la suma i, després, multiplicar

$$\begin{aligned} (8x^2 - x) \cdot ((-2x + 11) + (x^3 - 4x)) &= (8x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 11) = \\ &= 8x^5 - 48x^3 + 88x^2 - x^4 + 6x^2 - 11x = 8x^5 - x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 11x \end{aligned}$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cadascun dels sumands i, després, sumar:

$$\begin{aligned} (8x^2 - x) \cdot ((-2x + 11) + (x^3 - 4x)) &= (8x^2 - x) \cdot (-2x + 11) + (8x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) = \\ &= (-16x^3 + 88x^2 + 2x^2 - 11x) + (8x^5 - 32x^3 - x^4 + 4x^2) = 8x^5 - x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 11x \end{aligned}$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte la suma ens diu que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **treure factor comú**.

Exemple:

$$6x^6 - 10x^4 - 22x^3 + 2x^2 = (3x^4 - 5x^2 - 11x + 1) \cdot 2x^2$$

Activitats proposades

10. Feu els següents productes de polinomis:

a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$

b) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

11. De cadascun dels següents polinomis extraieu algun factor que sigui comú als seus monomis:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

b) $24x^4 - 30x^2$

Productes notables de polinomis

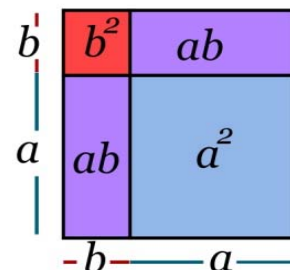
En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen freqüentment. Podem exposar-los de moltes formes. Tal i com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en algun cas concret, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret això no farà més que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, a l'efectuar els càlculs oportuns:

$$\text{✚} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

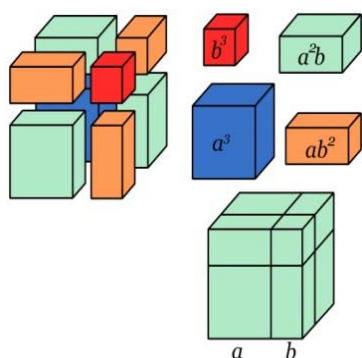
Comproveu la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la figura.



$$\text{✚} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Observeu la figura i connecteu-la amb la igualtat..



$$\text{✚} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ratifiqueu la igualtat amb els cubs i primes de la figura.

$$\text{✚} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Podem observar que, en cadascun dels desenvolupaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cadascun dels monomis.

Exemples:

$$a) \quad (a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$$

$$b) \quad (x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$c) \quad (7x+5)^2 = (7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 5 + (5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$$

$$d) \quad (x-3y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

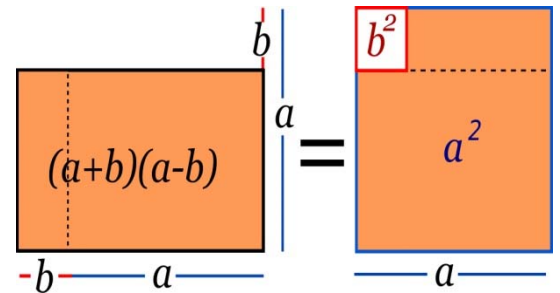
$$e) \quad (4x-5)^3 = (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3 = 64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$$

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté a l'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observeu les figures i connecteu-les amb la igualtat.



Exemples:

a) $(a+5) \cdot (a-5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$

b) $(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

c) $(3x+4) \cdot (3x-4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$

d) $(-3x-5) \cdot (-3x+5) = (-1) \cdot (3x+5) \cdot (-3x+5) = (-1) \cdot (5+3x) \cdot (5-3x) =$
 $= (-1) \cdot (5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Activitats proposades

12. Realitzeu els càlculs:

a) $(2+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x+2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x^2+2)^3$

13. Obtingueu les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

14. Desenvolpeu les següents potències:

a) $(2x-5y)^2$

b) $(3x+y/3)^2$

c) $(5x^2-5/x)^2$

d) $(3a-b)^2$

e) $(a^2+b^2)^2$

f) $(3/5y-2/y)^2$

15. Expresses com a quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraïques:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$

b) $9x^2 - 6x + 1$

c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$

e) $a^4 - 2a^2 + 1$

f) $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectueu aquests productes:

a) $(4x^2+3y) \cdot (4x^2-3y)$

b) $(2x^2+8) \cdot (2x^2-8)$

c) $(-x^2+3x) \cdot (x^2+3x)$

Divisió de polinomis

Ja sabeu que:

Analitzem detingudament la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, D (dividend) entre d (divisor, diferent de 0), en surten dos, el quocient (c) i el residu (r). Tots quatre estan lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r = 0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient c , tal que el residu r sigui un nombre menor que el divisor d , i major o igual a zero. Fixem-nos que, sense aquesta exigència per al residu r , podem triar arbitràriament un valor per al quocient c el qual ens subministra el valor associat com a residu r .

En efecte, si tenim com a dividend $D = 672$ i com a divisor $d = 12$, "si volem" que el quocient sigui $c = 48$ el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 672 - 12 \cdot 48 = 672 - 576 = 96$$

I la connexió entre aquests quatre nombres és

$$672 = 12 \cdot 48 + 96$$

Aquesta última "lectura" de la divisió de nombres enters ens guiarà a l'hora de dividir polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà uns altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També aquí pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau caldrà que sigui menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Tal i com passa amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cadascuna de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de forma que el grau d'aquests polinomis residu va descendant fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem acabat. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

- ✚ Anem a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$. Com que el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

➤ **Primera etapa:**

Par poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com que el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de grau més gran de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació de $c(x)$, el seu monomi e grau més gran:

$$c_1(x) = 3x^2$$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ - 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | \quad 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 \end{array}$$

Com que aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, més gran que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu no és el definitiu; cal continuar.

➤ **Segona etapa:**

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, sorgit com a residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Igual que abans, el grau de $r(x)$ hauria de ser 1 o 0. Com que el terme de grau més gran de $r_1(x)$, $8x^3$, surt del producte $q(x) \cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient contingui el monomi

$$c_2(x) = 4x$$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x) : -4x^2 - 9x - 2$

Com que aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu no és el definitiu; cal continuar.

➤ **Primera i segona etapa:**

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ - 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ - 8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline - 4x^2 - 9x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | \quad 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 + 4x \end{array}$$

➤ *Tercera etapa:*

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Com en cada pas el grau de $r(x)$ hauria de ser 1 o 0. El terme de grau més gran de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x) \cdot c_3(x)$, per la qual cosa

$$c_3(x) = -2$$

I el tercer residu $r_3(x)$ és: $-11x + 4$

Com que aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu sí és el definitiu. Hem acabat:

➤ *Les tres etapes:*

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \\
 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\
 \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \\
 -4x^2 - 9x - 2 \\
 \underline{4x^2 - 2x + 6} \\
 -11x + 4
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 | \quad 2x^2 - x + 3 \\
 \hline
 3x^2 + 4x - 2
 \end{array}$$

Conclusió: Al dividir el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ i com a polinomi residu $r(x) = -11x + 4$.

Activitats proposades

17. Dividiu els següents polinomis:

- a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$
- b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$
- c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$
- d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$
- e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

18. Trobeu dos polinomis tals que al dividir-los aparegui $q(x) = x^2 - x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 - 1$ com a residu.

1.3. Regla de Ruffini. Teorema del residu

Donada la importància que té la divisió de polinomis quan el polinomi divisor és de la forma $x - \alpha$, és convenient agilitzar tals divisions.

Som davant l'anomenada **regla de Ruffini**, un algoritme que ens proporciona tant el quocient como el residu que resulten de dividir un polinomi qualsevol entre un altre de la forma $x - \alpha$.



Paolo Ruffini

Vegem-ho amb un exemple:

Considerem el polinomi $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Anem a dividir-lo entre $x + 2$.

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 + x + 3 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \quad 3x^2 - 10x + 21 \\
 -10x^2 + x + 3 \\
 \underline{10x^2 + 20x} \quad 21x + 3 \\
 -21x - 42 \\
 -39
 \end{array}$$

DIVISIÓ PER RUFFINI

Exemple. Efectueu la següent divisió entre polinomis.

Escriviu el dividend en termes del quocient i el residu.

$$(4x^3 - x^2 - 3x + 1) \div (x - 2)$$

Solució:

	4	-1	-3	1	
		+8	+14	+22	
	4	+7	+11	+23	RESIDU
C(x) =	$4x^2$	$+7x$	$+11$		

Coeficients del dividend, polinomi de grau 3

Un grau menys al quocient

Coeficients del polinomi quocient, de grau 2

Vegem com han sorgit tant el polinomi quocient com el residu. Que el grau del dividend sigui tres i que el divisor sigui de grau u imposa que el quocient tingui grau dos i que el residu sigui un nombre real. El quocient consta de dels monomis $3x^2$, $-10x$ i 21 , els quals coincideixen amb els monomis de grau més gran de cadascun dels dividends després de disminuir els seus graus en una unitat: $3x^2$ procedeix de $3x^3 - 4x^2 + x + 3$ (el dividend inicial), $-10x$ ve de $-10x^2 + x + 3$ i, per últim, 21 de $21x + 3$. Aquest fet, coincidència en el coeficient i disminució del grau en una unitat, es deu a que el divisor, $x + 2$, és mònic i de grau u.

Seguidament, anem a tenir en compte únicament els coeficients del dividend, per ordre de grau, 3, -4, 1 y 3; quant al divisor, com que és mònic i de grau u, n'hi ha prou amb considerar el seu terme independent, +2, però com que el resultat de multiplicar els monomis que van conformant el quocient pel divisor hem de restar-lo a cadascun dels dividends, atenent a aquest canvi de signe, en lloc del terme independent, +2, operarem amb el seu oposat, -2, nombre que, a la vegada, és l'arrel del divisor $x + 2$ i sobre el qual pesa la pregunta de si és o no arrel de $p(x)$.

Aquest darrer concepte el veurem més endavant de manera detallada quan definim arrel d'un polinomi.

Anem a comparar-lo amb el procés de la divisió convencional i veurem que és igual:

✚ *Primer pas de la divisió:*

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 + x + 3 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \\
 -10x^2 + x + 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | \quad x + 2 \\
 \hline
 3x^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \quad -4 \quad 1 \quad 3 \\
 -2 \quad | \quad -6 \\
 \hline
 3 \quad -10 \quad | \quad
 \end{array}$$

Apareix en el quocient el monomi $3x^2$ (coeficient 3), el qual provoca la “desaparició” de $3x^3$ en el dividend i l’aparició del monomi $-6x^2$ (coeficient $-6 = (-2) \cdot 3$). Després d’operar (sumar) ens trobem amb $-10x^2$ (coeficient $-10 = (-4) + (-6)$) i, en el quocient $-10x$.

✚ *Segon pas. El dividend passa a ser $-10x^2 + x + 3$.*

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 + x + 3 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \\
 -10x^2 + x + 3 \\
 \underline{10x^2 + 20x} \\
 21x + 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | \quad x + 2 \\
 \hline
 3x^2 - 10x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \quad -4 \quad 1 \quad 3 \\
 -2 \quad | \quad -6 \quad 20 \\
 \hline
 3 \quad -10 \quad 21 \quad | \quad
 \end{array}$$

La irrupció en el quocient del monomi $-10x$ (coeficient -10) provoca la “desaparició” de $-10x^2$ en el dividend i l’aparició del monomi $20x$ (coeficient $20 = (-2) \cdot (-10)$). Després d’operar (sumar) ens trobem amb $21x$ (coeficient $21 = 1 + 20$) i, en el quocient 21.

✚ *Tercer pas. El dividend passa a ser $21x + 3$.*

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 4x^2 + x + 3 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \\
 -10x^2 + x + 3 \\
 \underline{10x^2 + 20x} \\
 21x + 3 \\
 \underline{-21x - 42} \\
 -39
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | \quad x + 2 \\
 \hline
 3x^2 - 10x + 21
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3 \quad -4 \quad 1 \quad 3 \\
 -2 \quad | \quad -6 \quad 20 \quad -42 \\
 \hline
 3 \quad -10 \quad 21 \quad | \quad -39
 \end{array}$$

Tenim en el quocient el terme independent 21. Aquest provoca l’eliminació de $21x$ en el dividend i l’aparició del terme $-42 = (-2) \cdot 21$. Després d’operar (sumar) ens trobem amb el residu $-39 = 3 - 42$.

En cadascun dels passos figura, a la part dreta, el mateix que s’ha fet en la divisió convencional, però amb l’avantatge que tot és més àgil degut a que únicament es fan servir nombres reals: els coeficients dels diversos polinomis que intervenen.

Exemple:

✚ Dividim el polinomi $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4$ entre $x+3$:

$$\begin{array}{r}
 -1 \quad 2 \quad 0 \quad 5 \quad 4 \\
 -3 \overline{) \quad +3 \quad -15 \quad +45 \quad -150} \\
 \hline
 -1 \quad +5 \quad -15 \quad +50 \quad \underline{-146}
 \end{array}$$

Activitats proposades

19. Useu la regla de *Ruffini* per fer les següents divisions de polinomis:

- a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$
- b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$
- c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$
- d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

20. Estudieu si és possible usar la regla de *Ruffini*, d'alguna forma, per dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre $2x + 3$.

Teorema del residu

El teorema del residu és molt útil per trobar els valors numèrics dels polinomis sense necessitat de substituir directament en ells la incògnita pel nombre que es tracti. Fent ús d'aquest teorema podem trobar les arrels dels polinomis, procés que s'haurà de fer amb molta freqüència en el que segueix.

L'enunciat del teorema és el següent:

Teorema del residu. El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.

D'aquesta forma podrem saber prèviament si una divisió serà exacta sense necessitat d'efectuar-la.

Demostració:

Tal i com vam veure en l'apartat de la divisió de polinomis, al dividir un polinomi $D(x)$ entre un altre, $d(x)$, la relació que s'estableix és:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

on $c(x)$ i $r(x)$ són respectivament, el quocient i el residu de la divisió. En aquest cas estem dividint entre $x - a$, és a dir, el divisor és $d(x) = x - a$. Per tant

$$D(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x)$$

Trobem el valor numèric del polinomi $D(x)$ per a $x = a$, substituïm la x per a :

$$D(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(a)$$

I, per tant, $D(a) = r(a) = r$, que és precisament el que volíem demostrar.

Exemple:

✚ Dividim el polinomi $p(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ entre $x + 3$:

$$\begin{array}{r} -1 \quad +3 \quad 0 \quad 5 \quad 4 \\ -3 \mid \quad +3 \quad -18 \quad +51 \quad -168 \\ \hline -1 \quad +6 \quad -18 \quad +56 \mid -164 \end{array}$$

El quocient és $-x^3 + 6x^2 - 18x + 56$ i el residu -164

$$p(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x + 4 = (x + 3) \cdot (-x^3 + 6x^2 - 18x + 56) + (-164)$$

Si avaluem $p(x)$ en $x = -3$ no pot donar zero, però quin valor resulta?

$$p(-3) = (-3 + 3) \cdot (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 - 18 \cdot (-3) + 56 + (-164) = 0 + (-164) = -164$$

Naturalment hem obtingut el residu anterior, que veiem que coincideixen, el valor numèric del polinomi i el residu de la divisió.

Activitats proposades

21. Utilitzeu la regla de *Ruffini* per conèixer el valor del polinomi $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.

1.4. Arrels d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x)$ direm que un número real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p , si a l'avaluar p en $x = \alpha$ obtenim el número 0, això és, si

$$p(\alpha) = 0$$

Exemple:

✚ Considerem el polinomi $s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$.

- o El número 2 és una arrel de $s(x)$, ja que

$$s(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 16 - 8 = 16 + 8 - 16 - 8 = 0$$

- o Una altra arrel de $s(x)$ és el número -1 :

$$s(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 8 = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (+1) + 8 - 8 = -2 + 2 + 8 - 8 = 0$$

- o En canvi, el número 1 no és una arrel de $s(x)$:

$$s(1) = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 8 = 2 + 2 - 8 - 8 = 4 - 16 = -12 \neq 0$$

- o Tampoc és arrel de $s(x)$ el número 0:

$$s(0) = 2 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 8 = 0 + 0 - 0 - 8 = -8 \neq 0$$

Càlcul de les arrels d'un polinomi

Exemples:

✚ Comprovem, mitjançant la regla de Ruffini, que $\alpha = \frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^2 - 3x + 1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

✚ Per conèixer les arrels del polinomi $x^2 - 2$ hem d'estudiar si hi ha algun nombre real α tal que l'anul·li, és a dir, per al qual es tingui que

$$\alpha^2 - 2 = 0$$

$$\alpha^2 = 2$$

$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

Així, el polinomi de grau dos $x^2 - 2$ té dues arrels diferents, que són nombres irracionals.

✚ *Ja sabem que hi ha polinomis sense arrels, com per exemple $x^2 + 4$.*

Per tal de facilitar la comprensió dels conceptes i resultats d'aquest assumpte la majoria dels nombres que han aparegut fins ara, coeficients, arrels, etc., han estat nombres enters. Per descomptat que podem trobar-nos amb polinomis amb coeficients racionals, o irracionals, o amb polinomis amb arrels donades per una fracció o un nombre irracional. També existeixen polinomis sense arrels.

Apreciem que la regla de *Ruffini* ens informa sobre si un nombre concret és o no arrel d'un polinomi. Naturalment, quan som davant d'un polinomi, i ens interessa conèixer les seves arrels, no és possible efectuar una prova amb cada nombre real per a determinar quins són arrel del polinomi. En el pròxim paràgraf destacarem certs "nombres candidats" a ser arrel d'un polinomi.

A l'hora de buscar les **arrels enteres d'un polinomi** disposem del següent resultat:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seves **arrels enteres**, si en tingués, es troben necessàriament entre els divisors enters del seu terme independent a_0 .

Procedim a la seva demostració. Suposem que un cert nombre enter α és una arrel del polinomi. Tal nombre ha d'anul·lar-lo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha = -a_0$$

$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha + a_1) = -a_0$$

$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la darrera igualtat, el nombre del costat esquerre és enter, perquè està expressat com una suma de productes de nombres enters. Per tant, el nombre del costat dret, $\frac{-a_0}{\alpha}$, també és enter. Al ser també enters tant $-a_0$ com α , deduïm que α és un divisor de a_0 .

Exemples:

✚ Determinem, d'acord amb l'anterior resultat, quins nombres enters són candidats a ser arrels del polinomi $7x^3 + 23x^2 - 2x - 6$:

Tals nombres enters candidats han de ser divisors de -6 , el terme independent del polinomi. Per tant, els únics nombres enters que poden ser arrel del polinomi són:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

✚ Les úniques possibles arrels enteres del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ també són:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

En aquest cas 2 i -3 són arrels enteres del polinomi.

Podem afirmar un resultat més general sobre classes de nombres i arrels d'un polinomi:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seves **arrels racionals**, si en té, tenen necessàriament per numerador algun divisor del terme independent, a_0 , i per denominador algun divisor del coeficient del terme de grau més gran, a_n .

Exemples:

- ✚ En el polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ els nombres racionals candidats a ser les seves arrels tenen per numerador un divisor de -6 i per denominador un divisor de 2 . Per tant, els únics nombres racionals que poden ser arrel del polinomi són:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm 2}{2} = \pm 1, \frac{\pm 3}{2}, \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

A més de 2 i -3 , també és arrel $-\frac{1}{2}$; els altres no ho són.

- ✚ Les úniques possibles arrels racionals del polinomi $2x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 4x - 3$ són:

$$\pm 1, \pm 3, \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm 3}{2}$$

En aquest cas cap d'aquests nombres és arrel del polinomi.

Activitats proposades

22. Feu servir la regla de Ruffini per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:

- a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$
- b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
- c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$
- d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyaieu, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser-ne arrels i, després, determineu quins ho són:

- a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$
- b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
- c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$
- d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comproveu que $-\frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

25. Per a cadascun dels següents polinomis indiqueu quins nombres racionals són candidats a ser-ne arrels i, després, determineu quins ho són:

- a) $3x^2 + 4x - 5$
- b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

1.5. Factorització de polinomis

Tot polinomi de grau n té com a molt n arrels reals, alguna de les quals pot aparèixer repetida entres aquests no més de n nombres reals.

Basant-nos en el càlcul de les arrels d'un polinomi anem a realitzar el procés de descomposició d'un polinomi en forma de producte d'altres polinomis més senzills (Factorització d'un polinomi):

Ens basarem en el següent enunciat:

La *condició necessària i suficient* per tal que un polinomi $P(x)$ sigui divisible per $(x - a)$ és que a sigui una arrel de $P(x)$.

Podem reescriure aquest resultat de la següent forma:

Un polinomi $P(x)$ és divisible per $(x - a) \Leftrightarrow a$ és una arrel de $P(x)$.

Demostrem-ho:

Si $P(x)$ és divisible per $(x - a) \Rightarrow a$ es una arrel de $P(x)$: **Condició necessària**

En efecte: $P(x)$ divisible per $(x - a) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow P(a) = 0$ (pel teorema del residu) $\Rightarrow a$ és arrel de $P(x)$

Si a és una arrel de $P(x) \Rightarrow (x - a)$ divideix $P(x)$: **Condició suficient**

En efecte: a arrel de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$ (pel teorema del residu).

El residu de la divisió de $P(x)$ entre $(x - a)$ és 0 $\Rightarrow (x - a)$ divideix $P(x)$ per la definició d'arrel.

Com a conseqüència immediata es té: si a és una arrel de $P(x) \Rightarrow P(x) = c(x)(x - a)$

El polinomi donat queda descompost en forma de producte de dos factors. Repetint el procés per a $c(x)$, aquest es pot descompondre de nou i així successivament.

Arribem al resultat general: donat el polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ les n arrels del qual són $x_1, x_2, \dots, x_n$, el polinomi es pot descompondre factorialment de la següent forma:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Diem que un polinomi és **reductible** si admet una factorització mitjançant polinomis de grau inferior al seu. En cas contrari el polinomi serà **irreductible**.

Exemple:

✚ Descompondre factorialment el polinomi: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Com que el coeficient de x^3 és 1, tal i com vam veure en l'apartat de càlcul d'arrels d'un polinomi, les possibles arrels racionals, si existeixen, han de ser divisores de 2. Per tant poden ser: +1, -1, +2, -2.

Comprovem si 1 és arrel. Apliquem el teorema de *Ruffini*:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & 5 & -2 & \\ & 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Per tant, 1 és arrel i tenim:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolem ara l'equació $x^2 - 3x + 2 = 0$, i resulta $x = 1$ y $x = 2$.

Per tant, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ i en definitiva, el polinomi tindrà la següent descomposició factorial: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$ essent les seves arrels $x_1 = 1$, doble i $x_2 = 2$.

Hi ha polinomis que no admeten arrels, és a dir, que no s'anul·len mai.

Exemples:

- ✚ El polinomi $t(x) = x^2 + 4$ no té arrels donat que a l'avaluar-lo en qualsevol nombre real α sempre ens dona un valor estrictament positiu i, per tant, diferent de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 4 > 0$$

A més, aquest polinomi de grau dos, $t(x) = x^2 + 4$, és un polinomi irreductible perquè, al no tenir arrels, no podem expressar-lo com a producte de polinomis de grau més petit.

- ✚ Un altre polinomi sense arrels reals és $u(x) = (x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1) = x^4 + 2x^2 + 1$.

Activitats proposades

26. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α .

- Si α és una arrel de $p_1(x)$, és també arrel del polinomi suma $p_1(x) + p_2(x)$?
- Si α és una arrel de $p_1(x)$, és també arrel del polinomi producte $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
- Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4 \cdot p_1(x)$?

27. Construïu un polinomi de grau 4 que tingui tres arrels diferents.

28. Determineu un polinomi de grau 4 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

29. Construïu un polinomi de grau 4 de forma que tingui una única arrel.

30. Conjectureu, i després demostreu, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admet el número 0 com a arrel.

31. Demostreu una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Admet el número 1 com a arrel.

32. Determineu les arrels de cadascun dels següents polinomis:

- | | | | |
|-------------|---------------|-------------------|------------------|
| a) $x + 5$ | b) $-x + 3$ | c) $7x - 5$ | d) $-3x - 11$ |
| e) $-7x$ | f) $x^2 - 8x$ | g) $4x^2 - x - 3$ | h) $x^3 - 4x$ i) |
| $x^3 + 25x$ | | | |

1.6. Fraccions algebraiques

Una **fracció algebraica** és una expressió de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0$$

on tant $P(x)$ com $Q(x)$ són polinomis.

Exemples:

✚ Així són fraccions algebraiques les següents expressions:

$$\frac{7x^3 - 2x}{6x^2 + 5x - 9} \quad \frac{4x^2 - 9x}{2x^2 + 33} \quad \frac{3x^2y + 2xy^2}{7xy}$$

Són expressions algebraiques, són **fraccions algebraiques**. En general, no són un polinomi. Només ho és en el cas molt particular en què el denominador és un nombre real diferent de zero, això és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que les expressions anteriors no són un polinomi: qualsevol polinomi pot tenir un valor numèric per a qualsevol nombre real x . No obstant això aquestes expressions no poden ser avaluades per als valors que anul·len el denominador.

✚ Podríem creure que la següent fracció sí que és un polinomi:

$$\frac{-3x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-3x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -3x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí és un polinomi, ja que es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x = 0$. No obstant això, aquesta fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluades en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor.

Són **expressions equivalents** on ambdues tenen sentit.

Simplificació de fraccions algebraiques

De la mateixa manera que es fa amb les fraccions numèriques, per a simplificar fraccions algebraiques es descomponen numerador i denominador en factors, simplificant, posteriorment, aquells que són comuns.

Exemple:

✚ Una fracció algebraica com $\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6}$ pot ser simplificada gràcies a que el numerador i el denominador admeten factoritzacions en què algun polinomi és present en totes dues.

$$\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6} = \frac{(x^2 + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)}{(x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)} = \frac{x + 3}{(x + 2) \cdot (x + 1)}$$

Com ja hem apuntat en d'altres ocasions, les expressions final i inicial no són idèntiques però sí que són equivalents en tots aquells valors per als quals ambdues tenen sentit, això és, per a aquells en què no s'anul·la el denominador.

Operacions amb fraccions algebraiques

Les operacions amb fraccions algebraiques es realitzen de la mateixa forma que les respectives operacions amb fraccions numèriques.

Donat que les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potencia, nombres reals, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres reals.

- **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions algebraiques hem d'aconseguir que tinguin el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-ho, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Producte.** N'hi ha prou amb multiplicar els numeradors i denominadors enter sí:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Exemple:

- En una suma de fraccions algebraiques com aquesta

$$\frac{3x-2}{x^2+x} + \frac{4}{x^2-x-2}$$

podem trobar un denominador comú en les fraccions a partir de la descomposició de cada denominador:

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x^2+x} + \frac{4}{x^2-x-2} &= \frac{3x-2}{x \cdot (x+1)} + \frac{4}{(x+1) \cdot (x-2)} = \frac{(3x-2) \cdot (x-2)}{x \cdot (x+1) \cdot (x-2)} + \frac{4 \cdot x}{(x+1) \cdot (x-2) \cdot x} = \\ &= \frac{(3x-2) \cdot (x-2) + 4x}{x \cdot (x+1) \cdot (x-2)} = \frac{3x^2 - 4x + 4}{x \cdot (x+1) \cdot (x-2)} \end{aligned}$$

Convé destacar que en el resultat final s'ha optat per deixar el denominador factoritzat. D'aquesta forma, entre d'altres qüestions, s'aprecia ràpidament per a quins valors de la indeterminada aquesta fracció algebraica no admet ser avaluada.

Activitats proposades

33. Simplifiqueu, si és possible, les següents expressions:

a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$

c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

34. Simplifiqueu les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$

b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$

c) $\frac{x^2y + 3xy^2}{4xy}$

d) $\frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3b - ab}$

35. Realitzeu les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

a) $\frac{5}{-3x+12} + \frac{x+2}{x^2-4x}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1}$

36. Efectueu els següents càlculs:

a) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{4}{x}$

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1}$

c) $\frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1}$

d) $\frac{x-2}{x^2+3x} : \frac{x-2}{x+3}$

37. Realitzeu les següents operacions alterant, en cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} - \frac{3x+2}{x^2}$

b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{8}{x+3}$

38. Comproveu les següents identitats simplificant l'expressió del costat Esquerra de cada igualtat:

a) $\frac{8a^4b^3}{2a^2b^2} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6a^2b^2 + 8a^2b - 10ab}{2ab^2 + 16a^2b} = \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a}$

2. EQUACIONS I INEQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

En aquest apartat anem a centrar-nos en la resolució d'equacions i inequacions de primer i segon grau i en la seva interpretació gràfica, per a exposar seguidament els sistemes d'equacions i inequacions i la seva aplicació a les Ciències i a les Ciències Socials.

Ja sabeu que:

2.1. Resolució d'equacions de primer grau

Recordeu que:

La tècnica per a resoldre una equació de primer grau consisteix sempre en transformar l'equació inicial en una altra d'equivalent fins a aconseguir aïllar la incògnita en el primer membre:

Exemple:

✚ Resoldre l'equació: $\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$

➤ *Primer pas: Suprimir els denominadors.*

El mínim comú múltiple dels denominadors és 6, multipliquem per 6 tota l'equació.

$$\frac{6 \cdot 7(x-1)}{3} + \frac{6 \cdot 5x}{6} = 6 \cdot 1 - \frac{6 \cdot x}{2} \Rightarrow 14(x-1) + 5x = 6 - 3x$$

➤ *Segon pas: Efectuar els parèntesis:*

$$14x - 14 + 5x = 6 - 3x$$

➤ *Tercer pas: Transposar termes i simplificar:*

$$14x + 5x + 3x = 6 + 14 \Rightarrow 22x = 20$$

➤ *Quart pas: aïllar la incògnita, i simplificar el resultat.*

$$x = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

➤ *Cinquè pas: Comprovar la solució.*

Substituïm el resultat obtingut a l'equació donada i comprovem que es verifica la igualtat.

Recordeu que:

Les equacions permeten resoldre molts tipus de problemes.

El tractament habitual davant d'un problema concret és el següent:

1. Plantejar una equació que concordi amb l'enunciat.
2. Resoldre l'equació
3. Comprovar el resultat i interpretar-lo

Exemple:

✚ La suma de tres nombres enters consecutius és 108. Quins són aquests nombres?

Anomenem x al menor. Els tres nombres, al ser consecutius, seran:

1r nombre: x

2n nombre: $x+1$

3r nombre: $x+2$

Plantegem ara l'equació corresponent a l'enunciat: la suma ha de ser 108. Per tant:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 108$$

Els parèntesis, en aquest cas, no són necessaris per la propietat associativa de la suma de nombres reals. S'hi han posat, exclusivament, per fer més clara l'equació que estem escrivint.

Eliminem els parèntesis i agrupant termes ens queda:

$$x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow x + x + x = 108 - 1 - 2 = 105 \Rightarrow 3x = 105$$

Aïllant la incògnita:

$$x = \frac{105}{3} = 35.$$

Per tant els nombres són 35, 36 i 37, la suma dels quals és 108.

2.2. Equacions de segon grau

Ja sabeu que:

Una equació de segon grau és la que té com a forma general la següent:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0.$$

Una equació té tantes solucions com el seu grau.

Ja sabeu que al ser de grau 2 tindrà 2 solucions o 1 o cap en els nombres reals.

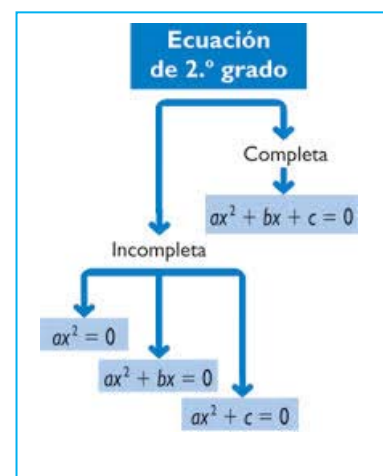
Segons com sigui l'equació de segon grau les seves solucions es poden trobar:

Cas 1: El coeficient de x és 0: $b = 0$:

En aquest cas l'equació és de la forma: $ax^2 + c = 0$.

Per trobar les solucions n'hi ha prou amb aïllar x :

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$



Exemple:

 Resoldre l'equació: $2x^2 - 8 = 0$

S'aïlla x^2 : $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$

Cas 2: El terme independent és 0: $c = 0$

L'equació és ara de la forma:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Per resoldre-la n'hi ha prou amb treure x factor comú:

$$ax + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En aquest cas sempre una de les dues solucions serà $x = 0$.

Els casos 1 i 2 són **equacions de segon grau incompletes**, que també es poden resoldre aplicant la fórmula general. Això no obstant és més ràpid resoldre-les de la manera que acabem d'exposar.

Cas 3: Resolució analítica d'una equació de segon grau completa:

Solució gràfica d'una equació de son grau: Considerem la funció

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

La seva representació gràfica és una paràbola, on les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són els dos punts de tall d'aquesta amb l'eix d'abscisses.

Solució analítica d'una equació de segon grau completa: Partint de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ anem a obtenir el valor de x :

Passem el terme independent al segon membre quedant expressat de la següent forma:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multipliquem tota l'equació per $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumem b^2 a ambdós membres:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer membre és el quadrat del binomi $2ax + b$. Per tant:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraiem l'arrel quadrada

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Passem b al segon membre i dividim entre $2a$, amb què obtenim el següent resultat:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per tant:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

És la fórmula general per calcular les dues solucions de l'equació de segon grau.

Particularitats:

El radicand, $b^2 - 4ac$, rep el nom de **discriminant** de l'equació. Es representa amb la lletra grega Δ . Segons el signe del discriminant poden donar-se tres casos:

- $\Delta > 0$: L'equació té les dues solucions x_1 i x_2
- $\Delta = 0$: L'equació té una única **solució doble**, les dues solucions de l'equació són iguals:

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$: El radicand és negatiu, l'equació no té arrels reals (l'arrel dona lloc a un nombre complex no real).

Exemple:

✚ Resoldre l'equació:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

La seva solució gràfica és una paràbola amb el vèrtex cap avall al tenir positiu el coeficient de x^2 , como hem representat aquí.

Anem a veure que les seves solucions analítiques són els punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

Comprovem-ho:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$. Aplicant la fórmula general de resolució d'una equació de segon grau completa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2,$$

que coincideixen amb els punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

Exemple:

✚ Anem a considerar ara un exemple d'una equació de segon grau amb el coeficient de x^2 negatiu $-x^2 + 4x + 5$ la representació gràfica del qual és una paràbola amb el vèrtex cap amunt:

Como en l'exemple anterior apliquem la fórmula general de resolució d'equacions de segon grau, l'equació és:

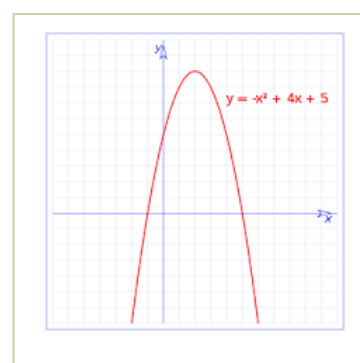
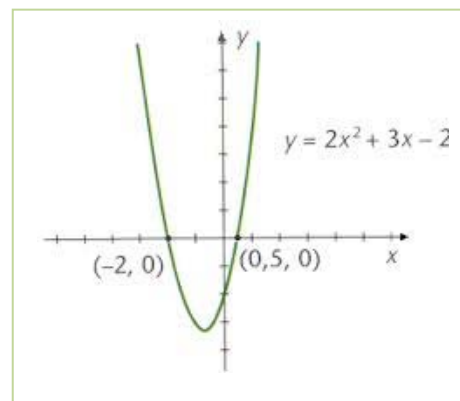
$$-x^2 + 4x + 5$$

La solució de la qual és:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 5,$$

que coincideixen amb el tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

Suma i producte de les solucions en una equació de segon grau



Anem a calcular ara a què és igual la suma i el producte de les dues arrels d'una equació de segon grau..

Anomenem:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

les dues solucions o arrels.

Vegem en primer lloc a què és igual la suma d'ambdues:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + -b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

És a dir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Vegem ara el producte:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

És a dir:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Fórmula de Cardano:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Les igualtats anteriors ens permeten resoldre el problema invers a l'habitual: enlloc de trobar les solucions o arrels donada una equació, podem, sabent quines són les solucions d'una equació, trobar l'expressió de l'equació.

En efecte, considerem l'equació de segon grau de sempre, de solucions x_1 i x_2 :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividint tota l'equació pel coeficient de x^2 :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Equació equivalent a la donada.

Fixant-nos en aquesta equació, veiem que el coeficient de la x és igual a la suma de les dues arrels amb el signe contrari, mentre que el terme independent és igual al producte de les arrels..

Com a conseqüència: si les dues arrels d'una equació de segon grau són x_1 i x_2 , l'equació és:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Exemple:



✚ Les dues arrels d'una equació de segon grau són $x_1 = 1/2$ i $x_2 = 2/3$. Quina és l'equació?

Sumant les dues arrels tenim: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$. L'anomenem s .

Multipliquem les dues arrels i tenim: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. L'anomenem p .

Per la fórmula anterior obtenim que l'equació és: $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$.

Si traiem denominadors l'equació queda: $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

✚ Una altra forma de resoldre aquest tipus de problemes és fer ús de la factorització de polinomis que hem estudiat en pàgines anteriors.

Considerem l'equació de segon grau completa $ax^2 + bx + c = 0$ de solucions x_1 i x_2 .

Sabem que aquesta primera equació és equivalent a aquesta altra: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

En conseqüència, el polinomi corresponent a la mateixa és: $p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

Té com a arrels els nombres x_1 i x_2 i la seva descomposició factorial és:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

Si efectuem el producte, podem escriure l'equació corresponent:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Es poden plantejar múltiples problemes de la vida real i d'aplicació a altres ciències.

Les pautes a seguir són les mateixes que les de les equacions de primer grau.

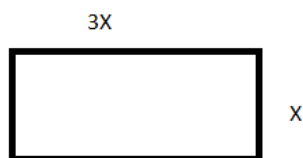
Vegem-ne un exemple:

Exemple:

✚ Volem sembrar de gespa una parcel·la rectangular de 27 m^2 , de manera que un dels costats de la mateixa sigui el triple de l'altre. Quines són les dimensions de la parcel·la?

Anomenant x al costat més petit del rectangle, l'altre, al ser el triple, mesurarà $3x$.

Donat que l'àrea del rectangle és igual al producte de la base per l'altura:



$$3x \cdot x = 27 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9$$

Per tant les dues solucions d'aquesta equació són $x = 3$ y $x = -3$.

Però donat que no té sentit que una longitud sigui negativa per a una parcel·la, la única solució vàlida és $x = 3 \text{ m}$. Segons això les dimensions de la parcel·la són 3 m i 9 m .

Equacions biquadrades

S'anomenen equacions **biquadrades** a les equacions del següent tipus:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Són equacions de quart grau, en què la incògnita apareix elevada únicament a potències parells. Al ser de quart grau, tindrà 4 solucions.

El procés general per a resoldre aquest tipus d'equacions és fer un canvi de variable.

Fent $t=x^2$ tindrem l'expressió següent:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Aconseguint convertir l'equació de quart grau en una equació de segon grau fàcil de resoldre, d'aquí que l'haguem inclòs com una equació de segon grau particular.

Es resol l'equació de segon grau com a tal i una vegada resolta cal realitzar un darrer pas:

Hem trobat el valor de t , però la incògnita és x . Amb la qual cosa hem de desfer el canvi efectuat:

$$\text{Si } x^2 = t \Rightarrow x = \pm \sqrt{t}$$

Exemple:

 Resoldre l'equació $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

Efectuant el canvi $x^2 = t$, l'equació es converteix en:

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

Que resollem per a t :

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{4}{3}$$

És a dir, les dues solucions d'aquesta equació són $t_1 = 1$ i $t_2 = -4/3$, desfem el canvi:

$$x^2 = t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = t = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Aquesta darrera solució no és un nombre real, ja que una arrel quadrada d'un negatiu no té solució real. Es troba dins dels nombres imaginaris que ja coneixem del capítol anterior..

En definitiva, les quatre solucions de l'equació biquadrada són:

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i; x_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Activitats proposades

39. Resoleu les següents equacions:

$$\text{a) } \frac{2x-4}{3x-2} = \frac{4}{7}$$

$$\text{b) } \frac{x+8}{x-1} - \frac{x+4}{x+1} = \frac{12x}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} + 4x + \frac{x+1}{3} = x + \frac{151}{12}$$

40. Resoleu:

$$\text{a. } \frac{x^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

$$\text{b. } \frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$$

$$\text{c. } 4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$$

$$\text{d. } 80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$$

41. Sumant set unitats al doble d'un nombre més les 3/2 del mateix obtenim com a resultat el sèxtuple del nombre menys 23. De quin nombre es tracta?

42. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 metres. Traceu una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quines són les longituds dels segments en què la paral·lela divideix al costat de 54 m?

43. Volem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300 000 €. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?

2.3. Resolució d' inequacions de primer grau i la seva interpretació gràfica

Una **inequació** és una desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites.

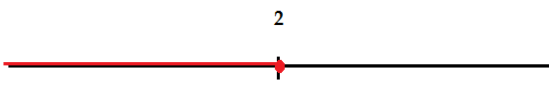
El **grau** d'una inequació és el major dels graus a què estan elevades les seves incògnites.

Així,

$4 \geq x + 2$ i $x + y \geq 2$ són inequacions de primer grau, mentre que $x^2 - 5 \geq x$ és de segon grau.

Resoldre una inequació consisteix a trobar els valors que la verifiquen. Aquests es denominen **solucions** de la inequació.

Per exemple:

$$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$$


Inequacions equivalents

Dues inequacions són **equivalents** si tenen la mateixa solució.

A vegades, per a resoldre una inequació, resulta convenient trobar-ne una altre d'equivalent més senzilla.

A tal efecte, es poden realitzar les següents transformacions:

$+$ Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la inequació.

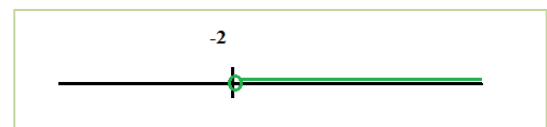
$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

$+$ Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre positiu.

$$5x < 5 \Leftrightarrow 5x : 5 < 5 : 5 \Leftrightarrow x < 1$$

$+$ Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre negatiu i canviar l'orientació del signe de la desigualtat.

$$x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$$



Inequacions de primer grau amb una incògnita

Una inequació de primer grau amb una incògnita es pot escriure de la forma:

$$ax > b, ax \geq b, ax < b \text{ o bé } ax \leq b.$$

Per a resoldre la inequació en la majoria de casos convé seguir el següent procediment:

1r) **Treure denominadors**, si n'hi ha. A tal efecte, es multipliquen els dos membres de la inequació pel m.c.m. dels denominadors.

2n) **Treure els parèntesis**, si n'hi ha.

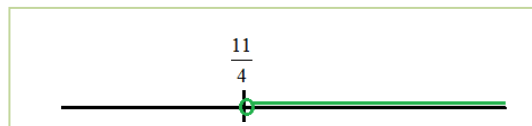
3r) **Transposar** els termes amb una x a un membre i els nombres a l'altre.

4t) **Reduir** termes semblants.

5è) **Aïllar** x .

Exemple:

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{3} - \frac{(x-8)}{6} &> \frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-5) - (x-8)}{6} > \frac{3(3-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-5) - (x-8) > 3(3-x) \\ \Leftrightarrow 2x - 10 - x + 8 &> 9 - 3x \Leftrightarrow 2x - x + 3x > 10 - 8 + 9 \Leftrightarrow \\ 4x > 11 &\Leftrightarrow x > \frac{11}{4} \\ x &\in \left(\frac{11}{4}, +\infty \right) \end{aligned}$$



Activitats proposades

44. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \geq 5x + 7$

45. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

46. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

47. Escriviu una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty)$ d) $(-\infty, 2)$

48. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible calcular les següents arrels:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

2.4. Resolució d'inequacions lineals de segon grau

Una inequació de segon grau amb una incògnita es pot escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

fent servir qualsevol dels quatre signes de desigualtat.

Per a resoldre-la, calculem les solucions de l'equació associada, les representem sobre la recta real, quedant per tant la recta dividida en tres, dos o un interval, depenent del fet que l'equació tingui dos, una o cap solució.

En cadascun d'ells, el signe del polinomi es manté constant, i per tant bastarà determinar el signe que té el polinomi per a un valor qualsevol de cadascun dels intervals. Per saber si les solucions de l'equació verifiquen la inequació, bastarà amb substituir-la en la mateixa i comprovar-ho..

Exemple:

 Representeu gràficament la paràbola

$$y = x^2 + 2x - 3$$

i indiqueu en quins intervals és $x^2 + 2x - 3 > 0$.

Observeu en la gràfica que la paràbola pren valors negatius entre -3 i

1. La solució de la inequació és:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

El punt -3 no és solució, ni tampoc el punt 1 , ja que el problema té una desigualtat estricta, $>$.

Si tingués la desigualtat $\geq$, $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, la solució seria:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

Si fos $x^2 + 2x - 3 < 0$, la solució seria: $x \in (-3, 1)$. Si fos $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, la solució seria: $x \in [-3, 1]$.

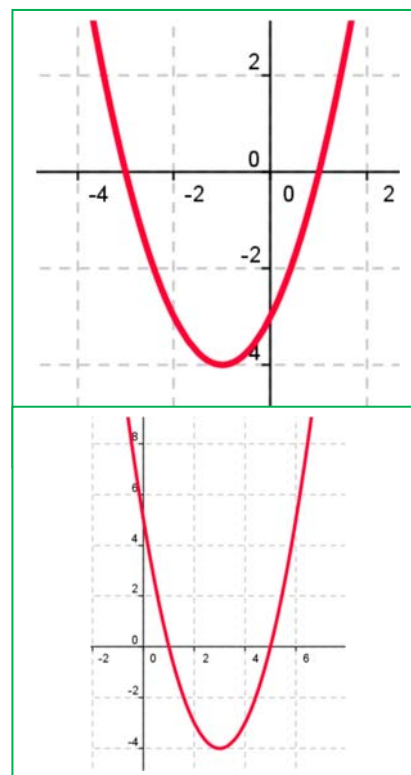
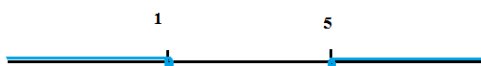
Exemple:

$$\text{pencil icon } x^2 - 6x + 5 \geq 0$$

Les arrels de $x^2 - 6x + 5 = 0$ són $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signe de $x^2 - 6x + 5$	+		-		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Per tant, la solució és $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Activitats proposades

49. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} x^2 - 1 \geq 0 & \text{b)} x^2 - 4 \leq 0 & \text{c)} x^2 - 9 > 0 & \text{d)} x^2 + 4 \geq 0 \\ \text{e)} 2x^2 - 50 < 0 & \text{f)} 3x^2 + 12 \leq 0 & \text{g)} 5x^2 - 45 > 0 & \text{h)} x^2 + 1 \geq 0 \end{array}$$

50. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^2 + x \leq 0 & \text{b)} x^2 - 5x > 0 & \text{c)} x^2 \leq 8x \\ \text{d)} x^2 \leq 3x & \text{e)} 2x^2 - 3x > 0 & \text{f)} 5x^2 - 10x < 0 \end{array}$$

51. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

$$\begin{array}{l} \text{a)} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \text{b)} -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \\ \text{c)} x^2 + 9x + 14 > 0 \\ \text{d)} x^2 - 6x + 9 \leq 0 \\ \text{e)} -x^2 - 4x - 5 < 0 \\ \text{f)} x^2 + 8x + 16 > 0 \\ \text{g)} x^2 + x + 3 \geq 0 \\ \text{h)} 2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \end{array}$$

52. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

$$\begin{array}{l} \text{a)} x^2 + x - 6 > 0 \\ \text{b)} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ \text{c)} x^2 - x - 20 < 0 \\ \text{d)} x^2 + 5x - 14 \geq 0 \\ \text{e)} -2x^2 + 3x + 2 > 0 \\ \text{f)} 3x^2 + 2x - 1 \leq 0 \\ \text{g)} 5x^2 - 7x - 6 \geq 0 \\ \text{h)} 2x^2 + x - 15 < 0 \end{array}$$

53. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible obtenir les següents arrels:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt{x^2 - 1} & \text{b)} \sqrt{-x^2 + 4} & \text{c)} \sqrt{x^2 + 5x + 6} & \text{d)} \sqrt{x^2 - 5x + 6} \end{array}$$

54. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

$$\begin{array}{l} \text{a)} (2x + 5)(2x - 5) \leq 11 \quad \text{b)} (2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50 \quad \text{c)} } \frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 3} \end{array}$$

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Els sistemes d'equacions lineals és un sistema d'equacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat, no podent aparèixer el producte de dues d'elles.

És un conjunt d'equacions que s'han de verificar per als mateixos valors de les incògnites, anomenats **solucions**.

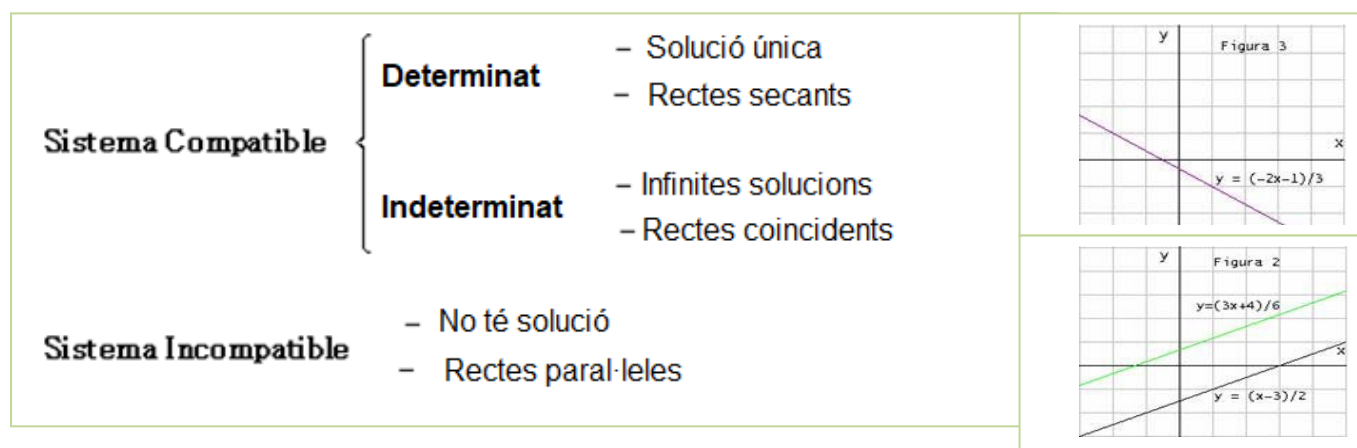
Resoldre un sistema és trobar els valors que, substituïts en les incògnites, compleixin totes les equacions a la vegada.

Es classifiquen atenent a criteris diversos: nombre d'equacions o d'incògnites, tipus de les solucions ...

Els sistemes d'equacions lineals atenent al tipus de solució es classifiquen segons si tenen solució o no. Els que tenen solució s'anomenen *compatibles* i els que no en tenen, *incompatibles*. Els compatibles poden ser

- **Compatible determinat:** si té una sola solució
- **Compatible indeterminat:** si té més d'una solució (en tenen infinites)

Sistemes d'equacions i possibles rectes en el pla:



Anem a repassar els tres mètodes elementals de resolució de sistemes lineals amb dues equacions i amb dues incògnites, que són:

Exemple

✚ Resoldrem el següent sistema:

$$5x - y = 3$$

$$2x + 3y = 8$$

♦ Mètode de substitució

El procés consisteix en aïllar una de les incògnites d'una de les equacions i substituir-la en l'altra..

Aïllem, per exemple, la y de la primera equació:

$$\underline{y = 5x - 3}$$

I la substituïm en la segona:

$$2x + 3(5x - 3) = 8 \Rightarrow x = 1$$

I, per tant $y = 2$

♦ Mètode d'igualació

S'aïlla la mateixa incògnita de les dues equacions, igualant posteriorment ambdues expressions.

Aïllem, per exemple, la y en ambdues equacions:

$$\underline{5x - y = 3}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow y = 5x - 3$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

Igalant:

$$5x - 3 = \frac{8 - 2x}{3} \Rightarrow x = 1$$

Posteriorment, per trobar y es substitueix el valor trobat de x en una de les dues equacions inicials, i es calcula el corresponent valor de y .

♦ Mètode de reducció

Aquest mètode consisteix a transformar alguna de les equacions en d'altres d'equivalents de manera que al sumar-les o restar-les s'elimini una de les incògnites.

Multiplicant la primera equació per 3, obtenim el sistema equivalent següent:

$$\left. \begin{array}{l} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 15x - 3y = 9 \\ 2x + 3y = 8 \end{array} \right\}$$

I sumant les dues equacions s'obté $17x = 17$ i per tant $x = 1$.

Posteriorment, per trobar y es substitueix el valor trobat de x en una de les dues equacions inicials, i es calcula el corresponent valor de y :

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow 2(1) + 3y = 8 \Rightarrow y = 2.$$

Gràficament les equacions amb dues incògnites representen una recta al pla.

En el cas anterior, l'equació: $y = 5x - 3$ i l'equació: $y = \frac{8-2x}{3}$ són dues rectes al pla.

Exemple:

Resoleu analíticament i gràfica el sistema d'equacions
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Dues rectes són secants si tenen només un punt en comú. Al resoldre el sistema que formen les seves equacions obtenim una solució que es correspon amb les coordenades del punt de tall.

Resolució analítica:

Resolem el sistema per reducció:

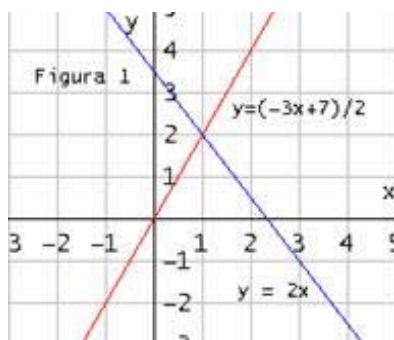
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a(2) \end{matrix} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 7x = 7 \\ x = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \cdot 1 + 2y = 7 \\ y = 2 \end{matrix} \quad \text{Sol: } (1, 2)$$

Resolució gràfica:

Fem la taula de valors de cadascuna de les equacions.

Representem les dues rectes que formen el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} 1^a \quad 3x + 2y = 7 &\rightarrow y = \frac{-3x+7}{2} \rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 1 \\ y & 3,5 & 2 \end{matrix} \\ 2^a \quad y = 2x &\rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 2 \end{matrix} \end{aligned}$$



3.1. Resolució pel mètode de Gauss



GAUSS: Font Google

El mètode de Gauss està basat en el mètode de reducció, també anomenat de cascada o de triangulació..

L'avantatge que té aquest mètode és que és fàcilment generalitzable a sistemes amb qualsevol nombre d'equacions i d'incògnites..

Aquest mètode consisteix a obtenir, per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites, un sistema equivalent la primera equació del

qual tingui tres incògnites; la segona, dues; i la tercera, una. S'obté així un sistema triangular de la forma següent:

Transformaciones realizadas con las operaciones a) y b)

Recordeu que:

Un sistema és equivalent a un altre si ambdós tenen les mateixes solucions.

Donat un sistema amb equacions complicades, el canviem per un altre que tingui les mateixes solucions que el donat (sistema equivalent) i que tingui equacions més senzilles

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ 0 + B'y + C'z = D' \\ 0 + 0 + C''z = D'' \end{cases}$$

La resolució del sistema és immediata; en la tercera equació calculem sense dificultat el valor de z , portem aquest valor de z a la segona equació i obtenim el valor de y , i amb ambdós valors calculem el valor de x amb la primera equació.

Exemple:

✚ Resoleu, aplicant el mètode de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

El procés és el següent:

1. S'elimina la incògnita x a la segona i tercera equació, sumant a aquestes la primera equació multiplicada per 2 i per 1, respectivament, quedant el sistema:

$$\begin{aligned} & x + 4y + 3z = -1 \\ E2 - 2E1 & \quad 0 - 11y - 8z = 3 \\ E3 + E1 & \quad 0 + 6y + 7z = 1 \end{aligned}$$

2. Suprimim la incògnita y de la tercera equació sumant-li, prèviament multiplicada per 11, la segona equació multiplicada per 6:

$$\begin{array}{rcl} & x + 4y + 3z = -1 & \\ & 0 - 11y - 8z = 3 & \\ 11E3 + 6E2 & 0 + 0 + 29z = 29 & \end{array}$$

3. Es resol el sistema esglaonat començant per la tercera equació:

$$29z = 29 \Rightarrow z = \frac{29}{29} \Rightarrow z = 1$$

Ara, a la segona equació:

$$-11y - 8(1) = 3 \Leftrightarrow -11y = -11 \Leftrightarrow y = -1$$

I, finalment, a la primera:

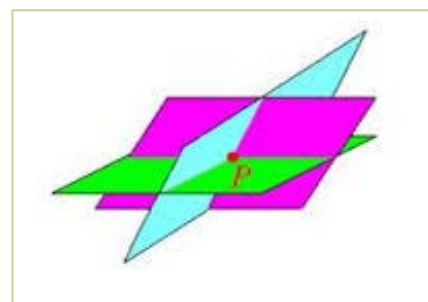
$$x + 4(-1) + 3 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0$$

La solució del sistema és:

$$x = 0, y = -1, z = 1$$

Geomètricament, com que cada equació lineal amb tres incògnites representa un pla, podem dir que els tres plans es tallen en el punt $(0, -1, 1)$, que és l'únic punt comú a tots tres.

És un sistema **compatible determinat**.



3.2. Discussió de sistemes aplicant el mètode de Gauss

Discutir un sistema consisteix a explicar raonadament les seves possibilitats de solució depenent del valor dels seus coeficients i termes independents. En els sistemes esglaonats la discussió es fa a partir de l'equació més senzilla, que suposarem que és la última.

Partim del sistema inicial

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad (E1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad (E2)$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \quad (E3)$$

que transformem en un altre d'equivalent, de la forma:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad (E1)$$

$$0 + a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \quad (E'2)$$

$$0 + 0 + a''_{33}z = b''_3 \quad (E''3)$$

A tal efecte s'elimina la incògnita x de la segona (E2) i les incògnites x i y de la tercera equació (E3).

Així, estudiant la tercera equació del segon sistema, $a''_{33}z = b''_3$, es determinen les possibilitats de solució del sistema inicial, verificant-se:

- Si $a''_{33} \neq 0$ el sistema és **compatible determinat**, ja que sempre es pot trobar una solució única començant a resoldre el sistema per la tercera equació.
- Si $a''_{33} = 0$ i $b''_3 = 0$ el sistema és **compatible indeterminat**, ja que l'equació E3 desapareix (queda $0z = 0$, que es verifica per a qualsevol valor de z resultant així un sistema amb dues equacions i tres incògnites), el sistema anterior queda:

$$\begin{array}{lll} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z \\ 0z = 0 & & \end{array}$$

Per resoldre aquest sistema hem de suposar coneguda la incògnita z i trobar les altres en funció d'ella. (A la pràctica, sol fer-se $z = k$.)

- Si $a''_{33} = 0$ i $b''_3 \neq 0$ el sistema es **incompatible**, ja que l'equació E3 queda $0z = b''_3 \neq 0$, que evidentment és absurda, ja que qualsevol valor de z multiplicat per 0 ha de donar 0.

Exemple:

✚ Discutiu i trobeu la solució del sistema:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$-x + 3y - z = -2$$

$$2x - y + 4z = 6$$

Fent servir el mètode de Gauss es té:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$-x + 3y - z = -2$$

$$2x - y + 4z = 6$$

$$\Leftrightarrow E2 + E1$$

$$E3 - 2E1$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$\Leftrightarrow 5y + 2z = 2$$

$$\Leftrightarrow -5y - 2z = -2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E3 + E2$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$5y + 2z = 2$$

$$0z = 0$$

Com que l'equació E3 s'ha anul·lat el sistema és **compatible indeterminat**, ja que té menys equacions que incògnites. Tindrà infinites solucions, podent-les expressar totes en funció d'una d'elles.

El sistema és equivalent a:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$5y + 2z = 2$$

$$x + 2y = 4 - 3z$$

$$\Leftrightarrow$$

$$5y = 2 - 2z$$

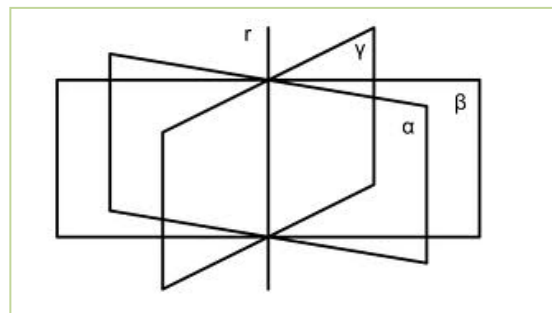
Aïllant y en $E2$, resulta $y = \frac{2-2z}{5}$. Substituint en $E1$:

$$x + 2 \cdot \left(\frac{2-2z}{5} \right) = 4 - 3z \Leftrightarrow x = 4 - \frac{4-4z}{5} - 3z \Leftrightarrow x = \frac{16-11z}{5}$$

Fent $z = k$, la solució és:

$$x = \frac{16-11k}{5}; y = \frac{2-2k}{5}; z = k$$

Geomètricament, les solucions del sistema anterior representen tres plans amb infinits punts comuns alineats segons una recta.



Activitats resoltes:

✚ Resoleu pel mètode de *Gauss* el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \end{cases}$$

Eliminen x a la 2a i 3a equació. A tal efecte fem: $E2 - 2E1$ y $E3 - 3E1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ -5y + z = -4 \end{cases}$$

Eliminem y a la 3a equació, a tal efecte fem: $E3 - E2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

La última equació $0 = 1$ és un absurd que ens diu que el sistema és **incompatible, sense solució**.

Geomètricament, els plans que representen les equacions no tenen cap punt en comú.



✚ Resoleu, aplicant el mètode de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

El procés és el següent:

1. S'elimina la incògnita x a les equacions segona i tercera, sumant a aquestes la primera equació multiplicada per -2 i 1 , respectivament: $E2 - 2E1$; $E3 + E1$, quedant el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

2. Suprimim la incògnita y de la tercera equació sumant a aquesta, prèviament multiplicada per 11 , la segona multiplicada per 6 : $11E3 + 6E2$.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 0 + 29z = 29 \end{cases}$$

3. Es resol el sistema esglaonat començant per la tercera equació:

$$29z = 29 \Rightarrow z = 1.$$

Ara, a la segona equació:

$$-11y - 8 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

I finalment, a la primera:

$$x + 4 \cdot (-1) + 3(1) = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0.$$

La solució del sistema és:

$$x = 0, y = -1, z = 1.$$

Activitats proposades

55. Resoleu pel mètode de Gauss els sistemes:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

56. Discutiu i resoleu, si és possible, el següent sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

57. Discutiu i resoleu quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t = -7 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 4x - y + 3z + 12t = 0 \end{cases}$$

3.3. Problemes d'equacions lineals

Es poden plantejar problemes de la vida diària que es poden resoldre aplicant el mètode de *Gauss*, ja que donen lloc a sistemes de més de dues equacions i incògnites.

Abans de resoldre un problema donarem uns consells que aniran bé per a una resolució ràpida i eficaç.

Recordeu que

En la resolució del problema no importa tant arribar a obtenir la solució del problema com el **procés** seguit en la mateixa, que és el que realment ens ajuda a potenciar la nostra forma de pensar. Per començar hem de familiaritzar-nos amb el problema, comprenent l'enunciat i adquirint una idea clara de les dades que hi intervenen, les relacions entre ells i el que es demana.

En la fase de familiarització amb el problema s'han de tenir en compte les pautes següents:

Abans de fer tracteu d'entendre.

Preneu-vos el temps necessari.

Actueu sense presses i amb tranquil·litat.

Imagineu-vos els elements del problema i jugueu-hi.

Poseu en clar la situació de partida, la intermèdia i a la que heu d'arribar..

Busqueu estratègies per resoldre el problema i una vegada trobada dueu-la a terme.

Reviseu el procés i traieu-ne conclusions: el resultat que hem obtingut, fem la comprovació i observem que verifica les condicions imposades pel problema.

Exemple:

- ✚ Esbrina quants homes, dones i nens hi ha en una reunió sabent que: si hi hagués un nen més, hi hauria el mateix nombre de nens que d'homes i dones junts. Si hi hagués 8 dones més, el nombre d'aquestes doblaria a la suma d'homes, homes i nens. El triple del nombre d'homes més el nombre de dones és igual al nombre de dones més 5.

Si anomenem x el nombre d'homes, y el nombre de dones i z el nombre de nens, obtindrem el sistema següent:

$$\begin{cases} z + 1 = x + y \\ y + 8 = 2(x + z) \\ 3x + y = z + 5 \end{cases}$$

Passem les incògnites al primer membre i obtenim el següent sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

Anem a resoldre'l aplicant el mètode de *Gauss*:

Eliminem x a la 2a i 3a equació. Fem $E2-2E1$; $E3-3E1$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0 - 3y + 4z = 6 \\ 0 - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

La 3a equació és simplificable, la dividim entre 2, quedant $E3/2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Eliminem y a la 3a equació. Fem $-3E3+E2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obtenim així un sistema en forma esglaonada molt senzill de resoldre. De la 3a equació obtenim el valor de z : $z = 3$. Substituint $z = 3$ a la 2a equació:

$$-3y + 4(3) = 6 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

Substituint els valors de y i de z obtinguts a la 1a equació:

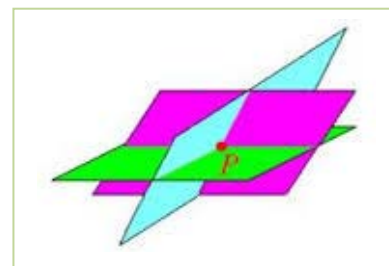
$$x + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$$

És un sistema **compatible determinat** amb solució única:

$x = 2$ homes, $y = 2$ dones, $z = 3$ nens.

Comprovem el resultat. En efecte un nen més, 4, és igual al nombre de dones més homes, $2 + 2$. 8 dones més, 10, dobla el nombre de dones i nens: $2(2 + 3)$. El triple del nombre d'homes, 6, més el nombre de dones, $6 + 2 = 8$, és igual al nombre de nens més, $3 + 5$.

Geomètricament són tres plans que es tallen en el punt $(2, 2, 3)$, que és l'únic punt comú als tres.



Activitats proposades

58. Comprem 8 kg de cafè natural i 5 kg de cafè torrefacte, pagant 66 €. Calculeu el preu del quilo de cada tipus de cafè, sabent que si mesclem meitat i meitat el quilo resulta a 5 €.
59. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la del seu germà. La suma de les edats dels nens i de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?
60. Volem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val quatre vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?
61. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest número se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues. trobeu el nombre en qüestió.

3.4. Sistemes d'inequacions lineals

Un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites és un conjunt de dues o més inequacions, que s'han de satisfer alhora.

Per a la seva resolució, es pot procedir de la següent forma:

- Es resol cada inequació per separat.
- El **conjunt solució** del sistema, també anomenat **regió factible**, està formada per les solucions comuns a totes les inequacions.

Exemple:

✚ Prenem com a exemple el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1r Representem la regió solució de la primera inequació.

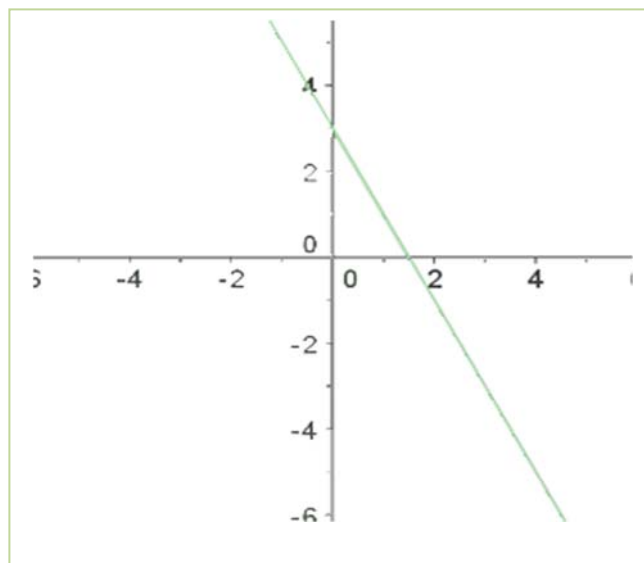
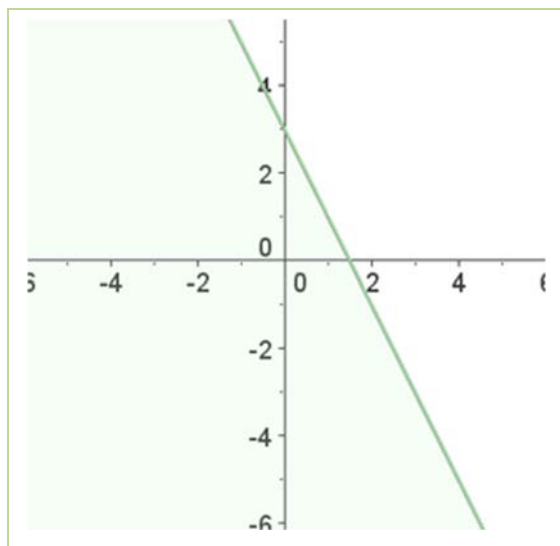
Transformem la desigualtat en igualtat.

$$2x + y = 3$$

Donem a una de les dues variables dos valors, amb el que obtenim dos punts.

$$x = 0; \quad 2 \cdot 0 + y = 3; \quad y = 3; \quad (0, 3)$$

$$x = 1; \quad 2 \cdot 1 + y = 3; \quad y = 1; \quad (1, 1)$$



Al representar i unir aquests punts obtenim una recta.

Prenem un punt, per exemple el (0, 0), el substituïm a la desigualtat. Si es compleix, la solució és el semiplà on es troba el punt, si no la solució serà l'altre semiplà.

$$2x + y \leq 3$$

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \quad 0 \leq 3 \quad \text{Sí}$$

El semiplà que està ombrejat és la solució de la primera inequació.

Fem el mateix amb la segona inequació:

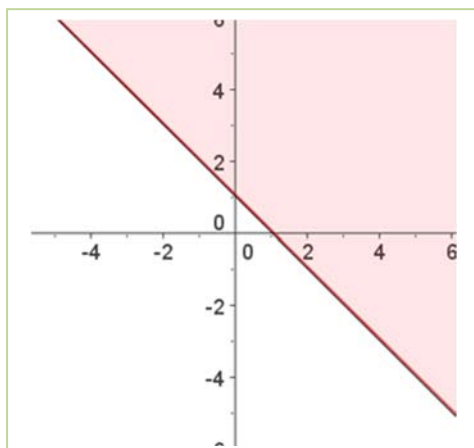
2n Representem la regió solució de la segona inequació.

$$x + y = 1$$

$$x = 0; \quad 0 + y = 1; \quad y = 1; \quad (0, 1)$$

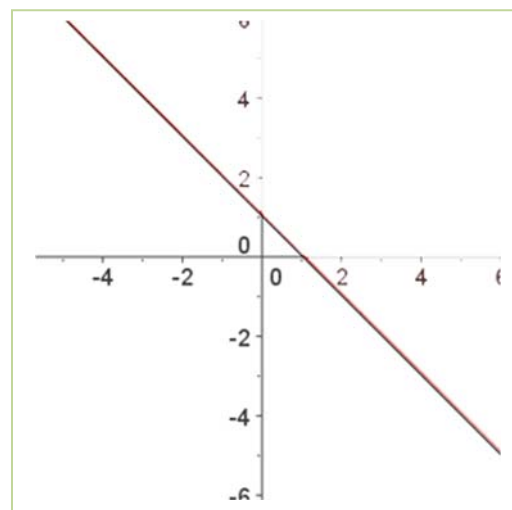
$$x = 1; \quad 1 + y = 1; \quad y = 0; \quad (1, 0)$$

Prenem un punt, el (0, 0) per exemple i el substituïm a la inequació, com que no es compleix la desigualtat serà el semiplà on no hi ha el punt.

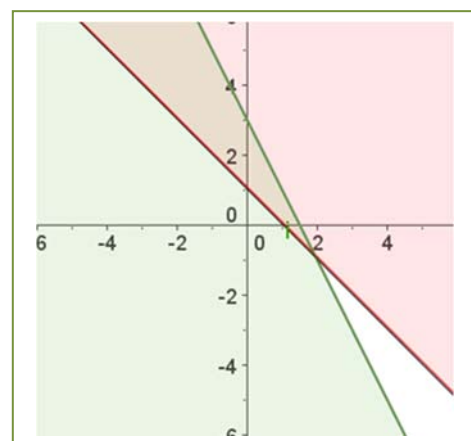


$$x + y \geq 1$$

$$0 + 0 \geq 1 \quad \text{No}$$



3r La solució és la intersecció de les regions solució.



Activitats resoltes:

Resoleu el següent sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

Conjunt de solucions de la primera inequació:

$$2x - y = -3 \Leftrightarrow y = 2x + 3.$$

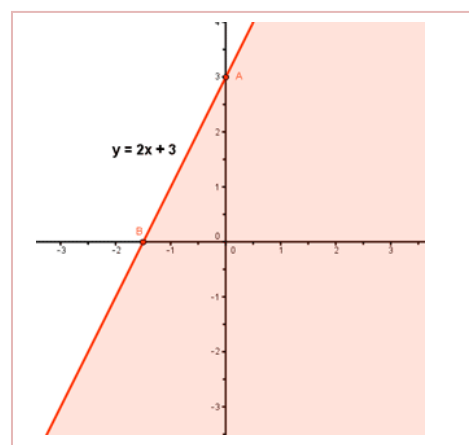
Punts de tall de la recta amb els eixos:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2x + 3 = 3 \Rightarrow A = (0, 3)$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -3/2 \Rightarrow B = (-3/2, 0)$$

Provem amb punts a ambdós costats de la recta per veure quin compleix la inequació:

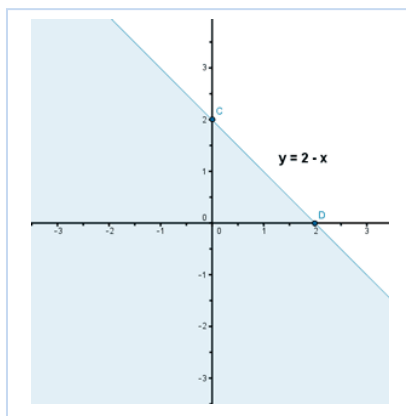
$$(0, 0), \quad 2x - y \geq -3 \Rightarrow 0 \geq -3 \quad \text{Sí}$$



Com que es compleix la desigualtat per al punt proposat la regió factible és el semiplà al qual pertany el punt referit.

Conjunt de solucions de la segona inequació:

$$x + y = 2 \quad y = 2 - x$$



Punts de tall de la recta amb els eixos:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 - x = 2 \Rightarrow C = (0, 2)$$

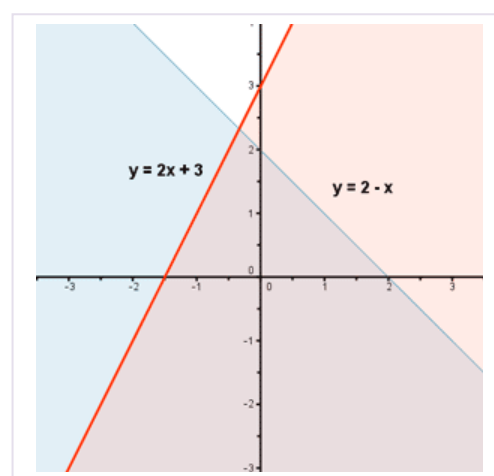
$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D = (2, 0)$$

Provem amb punts a ambdós costats de la recta per veure quina regió verifica la inequació:

$$(0, 0), \quad x + y < 2 \Rightarrow 0 < 2$$

Com que es compleix per al punt donat el semiplà escollit és en el qual hi ha el punt.

El conjunt de solucions del sistema, o regió factible, està format per aquells punts que compleixin ambdues equacions, per tant, la solució és la intersecció d'ambdós semiplans:



Activitats proposades

62. Trobeu la regió factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resoleu els següents sistemes d'inequacions:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$$

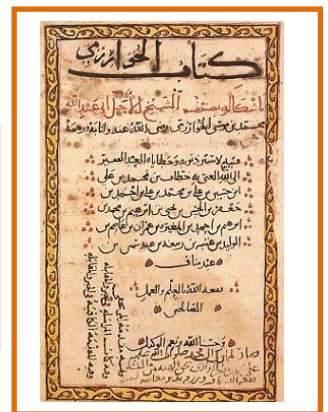
CURIOSITATS. REVISTA

L'origen de l'Àlgebra

L'origen de l'Àlgebra no és a Grècia, és a Bagdad, cap a l'any 773, amb la seva Casa de la Saviesa, un observatori i una biblioteca. Els llibres arribaven en diverses llengües i calgué traduir-los a l'àrab. Llibres de tot tipus, científics, filosòfics... En aquella època Bagdad era la nova Alexandria governada pel califa *Harún al-Raschid*, que promogué la cerca de manuscrits.



El matemàtic més important fou al-Khwarizmi. Si llegiu en veu alta aquest nom us sonarà semblant a algoritme, paraula que se'n deriva. Nasqué en el que avui és Uzbekistan. Va escriure el primer llibre d'Àlgebra (الجبر, al-jbr) paraula que en àrab significa col·locar, recompondre.



Pretenia convertir l'obscur en clar i el complex en simple.

Cervantes, al Quixot, parla d'un *algebrista* que arreglava ossos trencats o dislocats.

Fins aleshores s'havia treballat amb nombres coneguts, però al-Khwarizmi diu "*aquella cosa que busco, l'anomenaré, però com que no la conec, l'anomenaré cosa*". I cosa en àrab es diu شيء *xay*. El que es fa en àlgebra és utilitzar la cosa, la incògnita, com si es conegués, i s'intenta descobrir-la.

La noció d'equació es deu a al-Khwarizmi. Amb elles no resol un problema numèric concret sinó una família de problemes. És una igualtat entre dues expressions on almenys en una d'elles hi ha una incògnita.

Ell i els seus seguidors van resoldre equacions de primer, segon i tercer grau.

Àlgebra elemental és la part de l'àlgebra que s'ensenya generalment als cursos de Matemàtiques, resolent equacions i com a continuació de l'aritmètica.

Àlgebra abstracta és el nom donat a l'estudi de les **estructures algebraiques**.

Història de l'Àlgebra a Europa

Al segle XIII *Leonardo de Pisa*, fill de Bonaccio, **Fibonacci**, aprengué àrab. Va escriure *Liber abaci*, i va portar les xifres àrabs (o hindús) a Europa.



En 1494 **Luca Pacioli** va escriure la primera obra d'àlgebra impresa. No aporta coneixements nous però recull els coneguts. Anomenava **cosa** a la incògnita.



Fins a **Tartaglia** (1499 – 1557) no es torna sobre problemes com la solució de les equacions de **tercer** grau.

En un desafiament es proposen problemes com aquests:

- “Troba un nombre que sumat a la seva arrel cúbica doni 6”
- “Reparteix 100 monedes entre dues persones sabent que a la primera li correspon l'arrel cúbica de la segona”
- “Es presta un capital amb la condició que es torni al final d'un any amb uns interessos de l'arrel cúbica del capital. Es tornen 800 monedes, quant es va prestar”



En 1572 **Raffaello Bombelli** publica *Àlgebra*, on comença a fer servir els nombres complexos.

Euler (1707 – 1783) anomena *i* la unitat imaginària.

Es resolen equacions per radicals (com sabeu resoldre l'equació de segon grau). Són equacions formades per polinomis de primer, segon, tercer... grau. Es discuteix sobre el nombre de solucions, trobant estrany que una equació de tercer grau pogués tenir més d'una solució.

Fou **Karl Gauss** (1777 – 1855) qui, amb el **teorema fonamental de l'àlgebra**, va deixar resolt el problema del nombre de solucions d'una equació algebraica: **Una equació algebraica de grau n té sempre n arrels en els complexos.**

Niels Henrik Abel (1802 – 1829) demostrà la impossibilitat de resoldre per radicals l'equació general de cinquè grau.

RESUM

Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$ Grau 3
Grau d'un polinomi	El grau més gran dels seus monomis	
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6; q = x^2 + 4.$ $p + q = x^2 - 3x + 10;$ $p - q = -x^2 - 3x + 2;$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24.$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen dos altres polinomis, el polinomi quocient ($c(x)$) i residu ($r(x)$), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend ($p(x)$) i divisor ($q(x)$)	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$ $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(q(x))$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	
Teorema del residu	El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.	
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és una arrel , o un zero , del polinomi P , si a l'avaluar P en $x = \alpha$ obtenim el nombre 0, és a dir, si $p(\alpha) = 0$	2 és arrel de $-3x + 6$. 1 i -3 són arrels de $x^2 + 2x - 3$
Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-lo com a producte de dos altres polinomis de grau més petit	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$ $= (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Fraccions algebraïques	És una fracció d'expressions polinòmiques	$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Resolució d'equacions de 1r grau	Són igualtats algebraïques amb una sola incògnita i de grau u.	$\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$
Resolució d'equacions de 2n grau	Igualtats algebraïques amb una sola incògnita i elevada al quadrat.	$-x^2 + 4x + 5$ La solució és: $x_1 = -1; x_2 = 5$
Resolució d'inequacions de 1r grau	Desigualtats algebraïques amb una sola incògnita de grau u.	$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2}$
Resolució d'inequacions de 2n grau	Desigualtats algebraïques amb una sola incògnita, elevada al quadrat.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ La solució és l'interval (1, 5).
Sistemes d'equacions lineals, pel mètode de Gauss	Els sistemes d'equacions lineals són equacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat, no podent aparèixer el producte d'elles. Resolució pel mètode de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$
Sistemes d'inequacions lineals	Els sistemes d'inequacions lineals són inequacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat.	

EXERCICIS I PROBLEMES**Polinomis:**

1. Estudieu si hi ha nombres reals en què les següents expressions no poden ser avaluades:

a) $\frac{7x-9}{(x+3) \cdot (2x-16)}$

b) $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

2. Calculeu quant ha de valer la lletra m per tal que el valor numèric de l'expressió algebraica següent sigui -2 per a $x = 0$.

$$\frac{x^3 - mx + 4}{(x^4 - 1)(mx + 2)}$$

3. Considerem els polinomis $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$, $q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ y $r(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Realitzeu les següents operacions:

a) $p+q+r$

b) $p-q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

4. Efectueu les divisions de polinomis:

a) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ entre $3x^2 + 2x - 5$

b) $6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5$ entre $x^3 + 3x + 5$

5. Assenyaleu sense fer la divisió, si les següents divisions són exactes o no:

a) $\frac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x-3}$

b) $\frac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x-2}$

c) $\frac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x-1}$

6. Construïu un polinomi de grau 2 tal que el nombre 4 en sigui arrel.

7. Escriviu dos polinomis de graus diferents i que tinguin en comú les arrels 2 i 3..

8. Construïu un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.

9. Trobeu un polinomi $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

10. Trobeu les arrels enteres o racionals dels següents polinomis:

a) $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$

b) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

c) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

11. Descomponeu els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

$3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

$5x^3 + 5x^2 + x - 1$

$2x^3 + x^2 + 6x - 3$

$3x^3 - 6x^2 + x - 2$

12. Realitzeu les operacions entre fraccions algebraiques:

$$\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

13. Analitzeu si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o del producte *suma per diferència*. En tal cas expresseu la seva procedència.

$x^2 - 6x + 9$

$x^4 + 8x^2 + 16$

$x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$

$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 36$

$5x^2 + 1$

$5x^2 - 11$

$x^4 - 3y^2$

14. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

a) $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)}$

b) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \frac{x+a}{x-a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b}$

16. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

$$a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a-y}}$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$c) \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{y}} \cdot \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$$

Equacions, inequacions i sistemes

17. Resoleu les següents equacions:

$$a) \frac{3x-1}{2x-4} = \frac{5}{9}$$

$$b) \frac{x}{2} + 5 = \frac{3x}{6} - 7$$

$$c) \frac{5}{x+1} = \frac{5x}{x-1} - 2$$

18. Resoleu les següents equacions indicant quantes solucions tenen i quines són:

$$a) \frac{16x^3 - 7}{2x^2 - 3} = 5 + 8x$$

$$b) x^4 + 8x^2 - 12 = 0$$

$$c) 80x^4 - 48x^2 + 7 = 0$$

$$d) \frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1$$

19. El catet més gran d'un triangle rectangle és una unitat més gran que el catet més petit. La hipotenusa és tres unitats més gran que el catet més petit. Es demana:

- Escriviu l'expressió algebraica que resulta d'aplicar el teorema de Pitàgores.
- Calculeu la hipotenusa i els catets.

20. En una competició de bàsquet a doble volta participen dotze equips. Cada partit guanyat val 2 punts i els partits perduts, 1 punt (no hi pot haver empats). Al final de la competició, un equip té 36 punts. Quants partits ha guanyat?

21. Una capsa de forma cúbica s'omple amb un cert nombre de cubets d'un centímetre cúbic i sobren 71 cubets; però si tots els cubets que hi ha es posen en una altra capsa que té un centímetre més per cada aresta, en falten 200 per omplir-la. Calculeu les longituds de les arestes de les dues capsas i el nombre de cubets que hi ha.

22. Les tres xifres d'un nombre sumen 24. Si a el nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 198; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues. Trobeu el nombre.

23. Volem trobar les edats d'una família formada pels pares i dos fills. Si sumem les edats de tres en tres obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascú?

24. Resoleu:

$$a) \frac{x}{3} - 9 < 2$$

$$b) \frac{5x}{7} - 7 \leq -5x$$

$$c) 4(2x-3) > 1-7x$$

$$d) \frac{3(x+4)}{5} < 2x$$

$$e) \frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6}$$

$$f) \frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$$

25. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible calcular les següents arrels:

a) $\sqrt{3x-6}$

b) $\sqrt{-x+3}$

c) $\sqrt{15-3x}$

d) $\sqrt{-6x-24}$

26. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $2x^2 - 8 < 0$

b) $-x^2 + 25 \leq 0$

c) $-x^2 + 49 \geq 0$

d) $5x^2 - 45 \geq 0$

e) $9x^2 - 1 > 0$

f) $16x^2 - 9 < 0$

g) $49x^2 - 36 < 0$

h) $121x^2 + 100 \leq 0$

27. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $-2x^2 + 50x \leq 0$

b) $7x^2 + 3x \geq 0$

c) $2x^2 < 8x$

d) $-2x^2 - 24x \geq 0$

e) $-7x^2 + 14x < 0$

f) $-5x^2 - 30x \geq 0$

28. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $5x^2 \leq 0$

b) $7x^2 > 0$

c) $-2x^2 < 0$

d) $6x^2 \geq 0$

29. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible obtenir les següents arrels:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$

b) $\sqrt{x^2+2x+1}$

c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$

e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$

f) $\sqrt{x^2+6x-27}$

g) $\sqrt{1-4x^2}$

30. Resoleu els següents sistemes pel mètode de *Gauss* i discutiu el resultat:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y + t = 3 \\ x + z - t = 1 \\ y + z + t = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y + 5z = 13 \\ x + y - 4z = -6 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 6 \\ 6x - 6y + 2z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - 2z = -2 \\ 8x - y - 4z = -4 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x - 2y + 3z + 4t = 6 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ x - y + 3z + 2t = 5 \\ 3x - y + 2z - 3t = 1 \end{cases}$$

AUTOAVALUACIÓ

1. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x=2$, $y=-1$, $z=-1$ és:
 - a) 17 b) 15 c) -3 d) -5
2. Al dividir el polinomi $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$ el polinomi residu resultant:
 - a) ha de ser de grau 2. b) pot ser de grau 2.
 - c) ha de ser de grau menor que 2. d) cap de les anteriors.
3. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres
 - a) té tres arrels reals b) té més de tres arrels reals
 - c) té tres arrels complexes d) té alguna arrel real.
4. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre, tingui exactament tres arrels reals, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?
5. Té com a solució $x=2$ la següent inequació:
 - a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$
6. La inequació $x^2 \leq 4$ té per solució:
 - a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
7. La solució de la inequació $|-x+7| \leq 8$ és:
 - a) $[-1, 15]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$
8. Els valors possibles de x en l'expressió $\sqrt{5x-9}$ són:
 - a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$
9. La solució de la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ és:
 - a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$
10. Justifiqueu la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents afirmacions:
 - a) La regla de Ruffini serveix per a dividir dos polinomis qualssevol.
 - b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.
 - c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.
 - d) La regla de Ruffini és un algoritme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.