Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato. Capítulo 5: Derivadas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: María Molero Aparicio

Revisora: Elena Ramírez

Índice

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA DE UNA FUNCIÓN
1.2. CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO
1.3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y FÍSICA DE LA DERIVADA. RECTA TANGENTE
1.4. FUNCIÓN DERIVADA. PROPIEDADES

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO
3.2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS
3.3. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN
3.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN
3.5. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

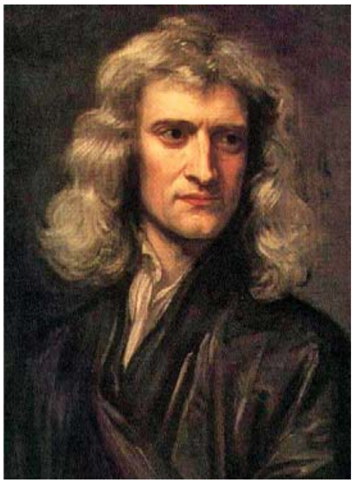
ASOMBROSAS APLICACIONES de la DERIVADA y el CALCULO ¿Realmente son IMPORTANTES LAS DERIVADAS? En este video te mostramos algunas de las aplicaciones de la derivada en diversas áreas de la ciencia y la tecnología. Veremos cómo se utiliza la derivada para optimizar diferentes problemas. También exploraremos cómo la derivada se utiliza en el campo de la inteligencia artificial, para entrenar modelos de aprendizaje automático y mejorar su rendimiento. Además, discutiremos la importancia de las matemáticas para la sociedad y cómo estas herramientas científicas nos ayudan a comprender y resolver problemas importantes en el mundo real. ¡No te pierdas este video interesante y aprende más sobre las aplicaciones

https://www.youtube.com/watch?v=KYvTWs54EgE

Resumen

Cuando la Ciencia ha avanzado suficientemente en un determinado camino, en ocasiones ocurre que al mismo tiempo, pero en dos lugares alejados, fructifica una misma idea. Eso es lo que ocurrió en el siglo XVII, cuando prácticamente al mismo tiempo, *Newton* en Inglaterra y *Leibniz* en Alemania llegaron al concepto de derivada, y con él al de *Cálculo Diferencial*. Esto motivó graves disputas y enfrentamientos sobre quién era el padre de la idea. Ahora se considera que lo fueron ambos.

Leibniz



Isaac Newton

El curso pasado ya has estudiado el concepto de derivada y un buen número de derivadas de distintas funciones. También se utilizó la derivada para estudiar la tendencia de una función, si crecía o decrecía, y para calcular sus máximos y mínimos.

Ahora, que ya tienes los conceptos adquiridos, es el momento de profundizar en ellos y formalizarlos con mayor precisión.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. Tasa de variación media de una función

El curso pasado ya estudiamos los conceptos de tasa de variación y de pasa de variación media de una función que nos sirven para determinar, por ejemplo, la tasa de variación de una población o la velocidad media de un vehículo.

Tasa de variación

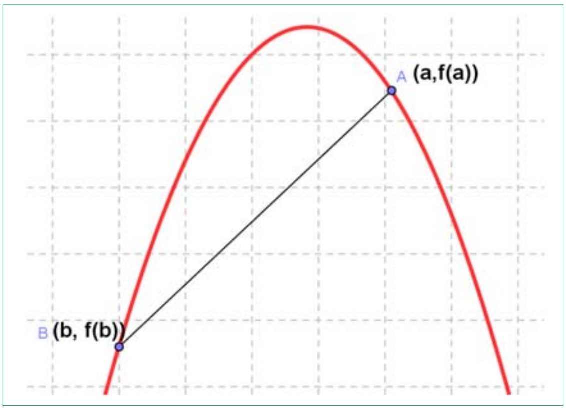
Se define la **tasa de variación** de una función f entre los valores a y b como:

$$TV(a, b) = f(b) - f(a)$$

Tasa de variación media

Se define la **tasa de variación media** de una función f entre los valores a y b como:

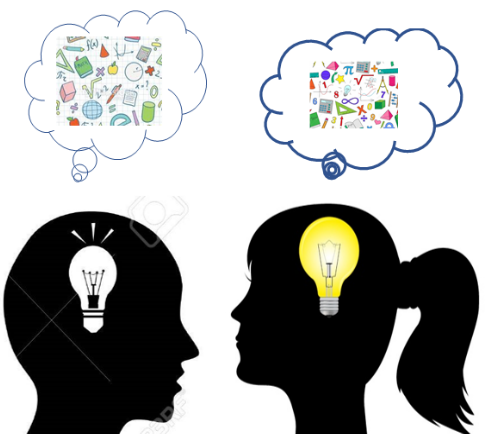
$$TVM(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La tasa de variación media determina la **velocidad media**, si la función f es una función espacio – tiempo, y determina la pendiente o **coeficiente angular de la recta secante** que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

La tasa de variación media de una función f en el intervalo (a, b) coincide con la **pendiente** de la recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Actividades propuestas



1. $C(x) = x^2 + 5x + 1$ es la función de costes donde $C(x)$ indica el coste de fabricación de x unidades. Calcula la tasa de variación media entre 0 y 500 unidades, y la tasa de variación media entre 200 y 800 unidades.

2. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 3x + 2\sqrt{x}$, donde $B(x)$ indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 10 y 50 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 100 y 400 unidades.

3. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = 2x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto, los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 400 y 4000 trabajadores.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Concepto de derivada de una función en un punto

¿Qué son las derivadas? Seguro que has oído hablar de las derivadas y de las funciones o las has estudiado en algún momento. Te explicamos qué son y para qué sirven. Eduardo Sáenz de Cabezón

https://www.youtube.com/watch?v=AzTGmJGIpl8

Del curso pasado ya conoces la definición de derivada. Vamos a recordarla.

Recuerda que:

La derivada de una función en un punto responde al estudio de dos problemas aparentemente distintos: El primero es el estudio del **ritmo de variación** de la función en dicho punto. El segundo es de índole geométrica: la derivada de una función en un punto indica el valor de la pendiente de la recta **tangente** a la gráfica de la función en ese punto.

El estudio de la tasa de variación media nos resultaba insuficiente para resolver determinados problemas.

Por ejemplo: Si un avión (o un coche) sufre un accidente, y los expertos quieren determinar las causas, no les interesa la velocidad media del avión, (o del coche) sino la velocidad instantánea en el momento del accidente.

Otro ejemplo más: Los bomberos utilizan lonas para recoger a las personas que deben saltar de un incendio. Para fabricar la lona y que resista deben conocer la velocidad en el momento del impacto, no la velocidad media de caída.

Definición:

Si X es un intervalo abierto, $f\colon X \to \Re$ una función continua en $a \in X$, se dice que f es **derivable** en a si existe el límite: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y es un número real (es decir, no es infinito).

El valor del límite lo denominamos **derivada** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a)$, $Df(a)$ o por $\dfrac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = DF(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Actividades resueltas

- *Calcula la derivada en el punto $x = 2$ de la función $y = x^2$.*

Sustituyendo los valores de la función $y = x^2$ en la definición resulta que:

$$f(x) = x^2;\ f(2) = 4;$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}$$

Por lo que la solución pasa por resolver este límite.

Recordando lo aprendido sobre límites, vemos que se trata de una indeterminación ya que para e $x = 2$ se anulan el numerador y el denominador.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

De manera que, igual que en otras ocasiones, debemos dividir ambos polinomios. Mediante cualquier método de descomposición mediante raíces, se comprueba que:

$x^2 - 4 = (x - 2)\cdot(x + 2)$ (suma por diferencia, diferencia de cuadrados)

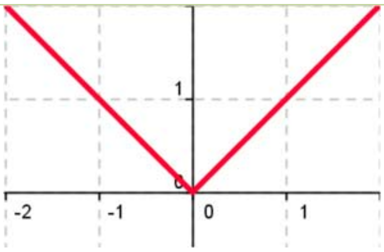
Así que, después de sustituir, el límite sería:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

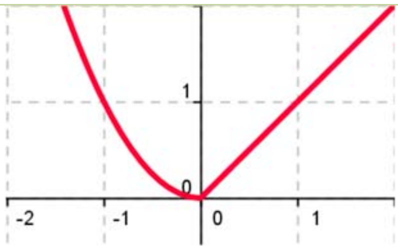
Si *f* es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.

Actividades resueltas

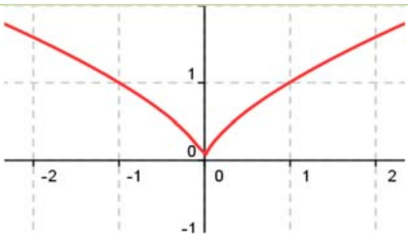
- *Las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación son continuas en todos los puntos, y derivables en todos los puntos excepto en $x = 0$. Observa el comportamiento de la gráfica en dicho punto.*



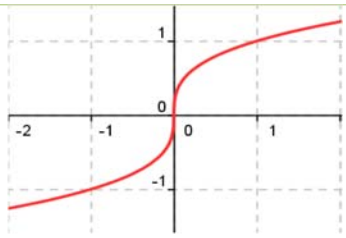
Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen –1 y 1 respectivamente.



Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen 0 y 1 respectivamente.



La función $y = x^{2/3}$ es continua pero no es derivable en $x = 0$.



La función $y = x^{1/3}$ es continua pero no es derivable en $x = 0$.

Actividades propuestas

4. Calcula la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$ teniendo en cuenta la definición de dicha función: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ y comprueba que no es derivable.

5. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) $f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$.

b) $g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.

6. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente

Recuerda que:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es igual a $f'(a)$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a).$$

Ejemplo:

- *Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $y = 2x^3 + 3x$ en $x = 1$ buscamos la recta de pendiente $f'(1)$ que pase por el punto $(1, f(1))$:

  $f(1) = 2\cdot1^3 + 3\cdot1 = 5$; $f'(x) = 6x^2 + 3$; $f'(1) = 6\cdot1^2 + 3 = 9$;

  Ecuación de una recta de pendiente 9 que pasa por el punto (1, 5):

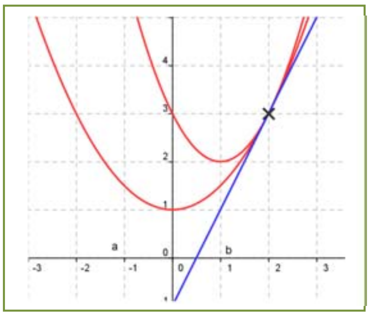
  $$y = 5 + 9(x - 1) = 9x - 4.$$

Actividades resueltas

- *Se consideran las funciones* $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

a) Calcula a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibuja las gráficas de ambas funciones y halla la ecuación de la recta tangente común.



a) Calculamos las derivadas en $x = 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 2ax \Rightarrow$

$f'(2) = 2$, $g'(2) = 4a \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = ½$.

Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 = g(2) = (1/2)4 + b = 2 + b \Rightarrow b = 1$.

b) Recta tangente en (2, 3) de pendiente 2: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$.

Las funciones son parábolas de vértices (1, 2) y (0, 1) respectivamente, que pasan por el punto (2, 3).

Actividades propuestas

7. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

8. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Función derivada. Propiedades

Recuerda que:

Si f es derivable en $X \subset \Re$ se llama **función derivada** de f a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f', Df o $\frac{df}{dx}$.

Por ejemplo

En el caso: $f(x) = x^3$ su derivada en $x = a$ es $f'(a) = 3 \cdot a^2$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3 \cdot x^2$.

Pero a la función derivada podemos volverla a derivar, y obtener así la derivada segunda: $f''(x) = 6 \cdot x$.

Y volver a derivar, obteniendo la derivada tercera: $f'''(x) = 6$. Y la cuarta: $f^{IV)}(x) = 0$. ¿Cuánto vale la derivada 28 de esa función? ¿Sabes hacerla? ¡Claro que sabes! A partir de la derivada tercera todas las derivadas valen cero.

Las derivadas sucesivas se pueden nombrar: f', f'', f''', $f^{IV)}$, …, $f^{n)}$, o también Df, D^2f, D^3f, …, $D^{n)}f$.

Actividad resuelta

- *Calcula la derivada n-ésima de* $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} \Rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Actividades propuestas

9. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x) = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^{n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

Notación diferencial

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en el intervalo $(a, a + h)$ es: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ siendo el numerador el incremento de la función y el denominador el incremento de la variable. *Gottfried Wilhelm Leibniz* utilizó la notación: $\frac{dy}{dx}$ para denotar la derivada de la función y respecto de la variable x, donde dy y dx no son numerador y denominador, sino un todo inseparable. Se lee, derivada de y respecto de x.

Esta notación es útil, sobre todo, si hay distintas variables.

Ejemplo:

- Si $S = 4\pi r^2$ entonces $\frac{dS}{dr} = 8\pi r$.
- Si $V = \pi r^2 h$ entonces $\frac{dV}{dr} = 2\pi r \cdot h$ y $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

La función derivada es lineal

Recuerda que:

La derivada de una **suma** de funciones es la suma de las derivadas de cada una. Es decir:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función:

Si $f(x) = c \cdot g(x)$ entonces $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

Estas dos propiedades, que ya conoces del curso pasado, nos indican que el operador derivada, D, es lineal y permiten escribir: $\mathrm{D}(f+g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g$ $\mathrm{D}(cf) = c\mathrm{D}f$

Operaciones con derivadas

Recuerda que:

Conoces el comportamiento de la derivada con otras operaciones, el producto, cociente, composición….

La derivada del **producto** de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivada del **cociente** de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divididos por el cuadrado del denominador: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

La **regla de la cadena** expresa la derivada de la **composición** de funciones $(f \circ g)(x)$ en términos de las derivadas de f y g: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

o escrito en notación de Leibniz: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Actividades resueltas

- *Calcula la derivada de* $y = (x^7 + 2)^5$.

Para aplicar bien la regla de la cadena es muy importante que comprendas bien la composición de funciones. En la derivada propuesta tenemos la función potencial *"elevar a 5"*, cuya derivada conoces bien $5x^4$, y la función $x^7 + 2$ cuya derivada es $7x^6$.

Aplicamos la regla de la cadena, primero la derivada de la función potencial en el punto $x^7 + 2$, y luego multiplicamos por la derivada de esta función: $y' = 5(x^7 + 2)^4 \cdot 7x^6$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Sabiendo que la derivada de la función $y = sen(x)$ es $y' = cos(x)$ utiliza la regla de la cadena para comprobar que:*

a) $y = sen^2(x) \Rightarrow y' = 2sen(x) \cdot \cos(x)$	b) $y = sen(x^2) \Rightarrow y' = cos(x^2) \cdot 2x$

- *Sabiendo que la derivada de la función* $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *comprueba que:*

c) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$	d) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$
e) $f(x) = (3+x)\sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Actividades propuestas

10. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

11. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto $u(x)\cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: D$[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Otras reglas de derivación

Del curso pasado ya conoces algunas reglas de derivación de funciones. Vamos a repasar algunas y estudiar otras nuevas.

Derivada de la función potencial: La derivada de la función $f(x) = x^k$, para cualquier valor numérico de k, es $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$.

Derivada de la función logaritmo: Si $f(x) = log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$.

Derivada de la función exponencial: Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot ln(a)$.

Derivada de la función seno: Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = cos(x)$.

Derivada de la función coseno: Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = -sen(x)$.

Actividades resueltas

- *Observa cómo se han obtenido las derivadas siguientes:*

Función	$f(x) = x^6$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$f(x) = 1/x = x^{-1}$	$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
Derivada	$f'(x) = 6x^5$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1} = (1/n)x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Calcula las siguientes derivadas y comprueba el resultado:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b) $f(x)=\frac{x^3-x^2+4}{9}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2-2x}{9}$
c) $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	**d)** $f(x)=\ln(x^5-7x^8)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^5-7x^8}\cdot(5x^4-56x^7)$
e) $f(x)=\sqrt{4x}+\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{x^2}$	f) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$
g) $f(x)=(2x-1)(x^2-6x+3)\Rightarrow f'(x)=6x^2-26x+12$	h) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

Derivada de la función logaritmo

Vamos a estudiar la derivada de una función muy interesante, la función logaritmo, y vamos a utilizar una técnica muy útil, la derivación logarítmica, para calcular las derivadas de otras muchas funciones.

Si $f(x) = log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$.

Demostración

Utilizamos la definición de derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x+h)-log_a(x)}{h}=$$

Por las propiedades de los logaritmos: a) $log_a A - log_a B = log_a(A/B)$; b) $k\cdot log_a A = log_a A^k$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0} log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0} log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0} log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}$$

Calculamos el límite, que es un límite tipo e.

Recuerda que $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y que los límites en que la base tiende a 1, y el exponente a infinito se calculan utilizando esta definición del número e.

$$f'(x)=\frac{1}{x}log_a(e)\text{, c.q.d.}$$

Actividades resueltas

Halla la derivada de $f(x) = \ln(x^5 - 7x^3)$

Tenemos que utilizar la derivada de la función logaritmo neperiano ($f(x) = ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$) y la regla de la cadena $f'(g(x)) \cdot g'(x)$, donde $g(x) = x^5 - 7x^3$ y su derivada: $g'(x) = 5x^4 - 21x^2$. Por tanto:

$$f'(x)=\frac{1}{x^5-7x^3}\cdot(5x^4-21x^2)$$

Actividades propuestas

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^5 - 7x^3)^{12}$

b) $y = log_2(3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x - 2}}$

d) $y = \ln\sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Técnica de la derivación logarítmica

Esta técnica consiste en aplicar logaritmos a los dos miembros de la función, y a continuación, derivar.

Actividades resueltas

- *Utilizando derivación logarítmica halla la derivada de* $f(x) = e^{(x^5 - 3x^3)}$

1) Aplicamos logaritmos neperianos: $ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)})$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)}) = (x^5 - 7x^3) \cdot ln(\mathrm{e}) = (x^5 - 7x^3)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 5x^4 - 21x^2$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (5x^4 - 21x^2) = e^{(x^5 - 7x^3)} \cdot (5x^4 - 21x^2).$$

- *Halla la derivada de la* ***función exponencial*** $f(x) = a^x$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(a^x)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(a^x) = x \cdot ln(a)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(a)$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot ln(a) = a^x \cdot ln(a).$$

Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot ln(a)$.

Si $y = e^x$ entonces $y' = e^x$.

La función exponencial $y = e^x$ coincide con su derivada, $y' = e^x$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Halla la derivada de la ***función potencial*** $f(x) = x^k$, $k \in \Re$.

Ya conoces su derivada cuando el exponente es un número natural. Ahora vamos a demostrarlo siendo el exponente cualquier número, negativo, fraccionario… Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(x^k)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{k}{x}$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (k/x) = x^k \cdot (k/x) = kx^{k-1}.$$

Si $y = x^k$ entonces $y' = kx^{k-1}$, $k \in \Re$.

Halla la derivada de la ***función exponencial – potencial:*** $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(g(x)^{h(x)})$
2) Utilizamos las propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(g(x)^{h(x)}) = h(x) \cdot ln(g(x))$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x))$$

Esta fórmula no te la aprendas de memoria. Es preferible aplicar derivación logarítmica en cada caso concreto.

Halla la derivada de la ***función exponencial – potencial:*** $f(x) = x^x$.

Utilizamos la misma técnica. Intenta hacerlo tú solo y luego comprueba si te ha salido bien:

1) Aplicamos logaritmos: $ln(f(x)) = ln(x^x)$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(x^x) = x \cdot ln(x)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = x^x(ln(x) + 1)$$

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno *y que la derivada de la función seno es la función coseno. Calcula las siguientes derivadas utilizando la técnica de derivación logarítmica y comprueba los resultados:*

a) $f(x) = x^{sen(x)} \Rightarrow f'(x) = x^{sen(x)}(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{sen(x)}{x})$	b) $f(x) = \sqrt[tg(x)]{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[tg(x)]{x}(\frac{sen(x)\cos(x) - \ln(x)}{x\cos^2(x)sen^2(x)})$

Actividades propuestas

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}}$; b) $y = \frac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}$; c) $y = \frac{(3x^4-4)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$; d) $y = \frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}$.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3}$

b) $y = \sqrt{\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}$

c) $y = \sqrt{\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}$

d) $y = \sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

b) $f(x) = (2-3x)\log(2-3x)$

c) $f(x) = \log\frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$

d) $f(x) = \frac{senx - x\cos x}{\cos x + xsenx}$

16. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (3x)^{x^5-9x^3}$

b) $y = ((2x+7)^{5x^3-6x^2})$

c) $y = (x+\mathrm{e})^{(4x^5-8x^3)^5}$

d) $f(x) = (x^x)^x$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log_2\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}$

b) $y = e^{\sqrt{6x+8}}$

c) $y = sen(\ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}})$

d) $y = \ln\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.

Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Actividades resueltas

- *Determina si* $y = 2x^2 + 5x - 8$ *es creciente o decreciente en* $x = 3$.

Calculamos la derivada: $y' = 4x + 5$; en $x = 3$: $y'(3) = 4(3) + 5 = 17 > 0$. La función es creciente.

- El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 20 + 4t^2 - 0.3t^3$, donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

Solución:

a) $y' = 8t - 0.9\,t^2$, $y'(3) = 24 - 8.1 > 0$. Creciente.

b) $8t - 0.9t^2 = 0 \rightarrow t(8 - 0.9t) = 0 \rightarrow t = 0,\ 8 = 0.9t \rightarrow t = 8/0.9 \approx 8.89$.

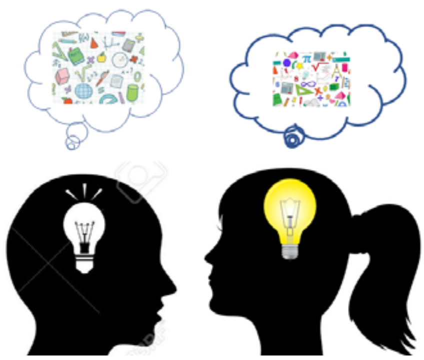
Aproximadamente a poco menos de los 9 meses empiezan a descender los ingresos.

c) La función derivada es una parábola que corta a los ejes en $t = 0$ y en $t = 8/0.9 \approx 8.89$. Antes de $t = 0$ y después de $t = 8/0.9 \approx 8.89$ es negativa. Los ingresos antes de $t = 0$ no tienen sentido. Luego crecen hasta $t = 8/0.9 \approx 8.89$. Y luego son decrecientes en $(8.89, +\infty)$.

Actividades propuestas

18. a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 27x$. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 27x$. c) ¿Cómo son en $x = 0$? d) ¿Y en $x = 3$? ¿Y en $x = -3$?

19. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas, también por trabajador contratado, vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto, los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?



Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Máximos y mínimos

Aprende a averiguar los Máximos y Mínimos de diferentes tipos de funciones. Susi Profe.

https://www.youtube.com/watch?v=aQCB2HUtFMY

Recuerda que:

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo global o absoluto** si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.

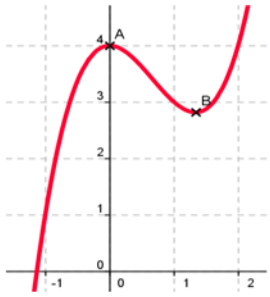
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo global o absoluto** si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no alcanza ni máximos ni mínimos absolutos, pero alcanza un máximo relativo en punto A (0, 4) y un mínimo relativo en el punto B.



Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no tiene máximos absolutos, pero alcanza máximos relativos en x = –1.25 y en x = 0.5.

Tiene tres mínimos que son a la vez absolutos y relativos en x = –2, x = 0 y en x = 1.

Reflexiona:

Imagina una función continua y con derivada continua. Antes de que la función alcance un máximo, debe ser una función creciente, y después del máximo debe ser la función decreciente. Por tanto, antes de un máximo la derivada debe ser positiva, y después debe ser negativa.

En consecuencia, si la función tiene un máximo en un punto a de un intervalo y es derivable en dicho punto, entonces la derivada en el máximo es cero.

Hacemos un razonamiento similar para un mínimo.

Antes de que una función alcance un mínimo, debe ser una función decreciente, y después del mínimo debe ser creciente. Por tanto, antes de un mínimo la derivada debe ser negativa, y después debe ser positiva.

En consecuencia, si la función tiene un mínimo en un punto a de un intervalo y es derivable en dicho

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

punto, entonces la derivada en el mínimo es cero.

Si una función tiene un **máximo o un mínimo** en $(a, f(a))$ y existe $f'(a)$, entonces $f'(a)$ **= 0**.

Se denomina **punto singular o punto crítico** de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada.

Para saber si un punto crítico es un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión de tangente horizontal podemos utilizar alguno de los tres criterios siguientes:

Criterio 1:

Si $f'(a) = 0$, estudiamos los valores de x próximos a a, tanto a la derecha como a la izquierda.

Criterio 2:

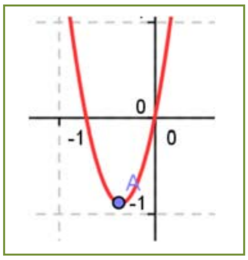
Estudiar el signo de la derivada en puntos x próximos a a, con lo que sabremos si la función crece o decrece en esos puntos.

Criterio 3:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

Actividades resueltas



- *Calcula los máximos y mínimos de la función:* $y = 7x^2 + 5x$.

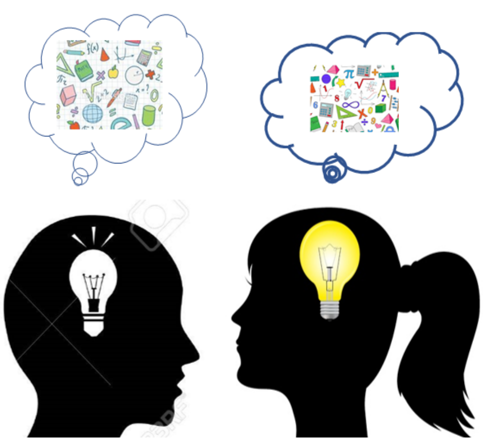
Solución:

Calculamos la derivada y la igualamos a 0: $y' = 14x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/14$.

Para saber si es máximo o mínimo calculamos la derivada segunda: $y'' = 14 > 0$. Es un mínimo.

La función es una parábola de vértice (–5/14, 7(–5/14)2 + 5(–5/14)) ≅ (–0.38, –0.89).

Para $x < -5/14$ la función es decreciente, y para $x > -5/14$, es creciente.



- *La función* $y = 20 + 4t^2 - 0.3t^3$ *indica los ingresos mensuales por un nuevo producto que ha salido al mercado. Calcula cuando los ingresos son máximos y cuando son mínimos.*

Solución:

Calculamos la derivada $y' = 8t - 0.9\, t^2$, $\to 8t - 0.9t^2 = 0 \to t(8 - 0.9t) = 0 \to t = 0$, $8 = 0.9t \to t = 8/0.9 \approx 8.89$. Los puntos críticos son $t = 0$ y $t = 8/0.9$.

Calculamos la derivada segunda $y'' = 8 - 1.8\, t$,

En $t = 0 \to y''(0) = 8 > 0$, es un mínimo.

En $t = 8/0.9 \approx 8.89 \to y''(8/0.9) = 8 - 1.8(8/0.9) = 8 - 16 < 0$, es un máximo.

Por tanto, la función tiene un mínimo local para $t = 0$, en el punto (0, 0) y un máximo local para $t = 8/0.9$, en $(8/0.9, 125.35)$.

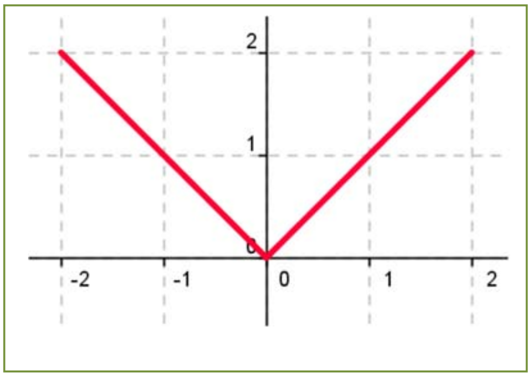
Dos observaciones importantes

1) Pueden existir máximos o mínimos en puntos donde no exista la derivada.

Por ejemplo:

La función valor absoluto de x tiene un mínimo en (0, 0).

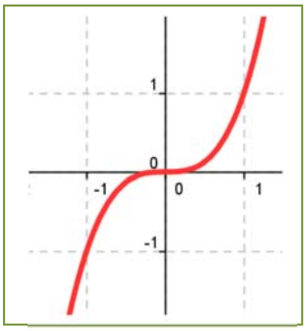
$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x > 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$



Pero la derivada no se anula en (0, 0). No existe. La derivada a la derecha de 0 vale 1, y la derivada a la izquierda vale –1. Son distintas, luego la función **no** es derivable en (0, 0).

2) Pueden existir puntos donde la derivada valga 0 y sin embargo no sean ni máximos ni mínimos.

Por ejemplo:



La función $y = x^3$ de derivada $y' = 3x^2$, que se anula en (0, 0) no tiene en dicho punto ni un máximo, ni un mínimo. La función es siempre **creciente**. Va a tener en (0, 0) un punto de inflexión de tangente horizontal.

Para estar seguros de no perder ninguna posible solución conviene, para determinar todos los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función, buscar:

1) Los puntos donde se anula la derivada: $f'(x) = 0$.

2) Los puntos donde la función no sea derivable.

3) Los valores de $f(x)$ en los extremos del dominio de definición de la función.

Determinar el valor de la función en todos estos puntos y comparamos estos valores.

Actividades resueltas

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, *en el intervalo* [1, 3] *y en el intervalo* [1, 5].

La función es derivable en todos los puntos. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, que se anula en $x = 2$ y en $x = 4$. Ambos valores pertenecen al intervalo [1, 5], por lo que los valores a valorar son: 1, 2, 4 y 5.

En el intervalo [1, 3] el punto $x = 4$ no pertenece, luego tenemos que valorar 1, 2 y 3.

$$f(1) = 16; f(2) = 20; f(3) = 18; f(4) = 16; f(5) = 20.$$

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 18$, en los puntos donde se anula la derivada:

$f''(2) = -6 < 0$; $f''(4) = 6$. En (2, 20) se alcanza un máximo relativo y en (4, 16) un mínimo relativo.

Intervalo [1, 3]: Máximo absoluto y relativo es (2, 20) y mínimo absoluto es (1, 16).

Intervalo [1, 5]: Máximos absolutos es (5, 20) y (2, 20), mínimos absolutos son (1, 16) y (4, 16).

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x|$* en el intervalo [–6, 2].

La función no es derivable en (0, 0). La derivada vale 1 si x es positivo y –1 si x es negativo, por lo que la derivada no se anula en ningún punto. Estudiamos los extremos del intervalo, –6 y 2:

$$f(-6) = |-6| = 6; f(2) = |2| = 2.$$

El mínimo absoluto de la función se alcanza en (0, 0) y el máximo absoluto en (–6, 6). Hay un máximo relativo en (2, 2).

Determinaremos donde una función polinómica es creciente o decreciente (crecimiento), sus puntos críticos (máximos y mínimos), donde es cóncava y/o convexa (curvatura) y sus posibles puntos de inflexión. Para ello, hallaremos la primera y segunda derivada de la función y los puntos donde se anulan. NOTA: Para zanjar definitivamente la polémica con respecto al concepto de CONCAVIDAD o CONVEXIDAD, os comento que es un término relativo y depende desde donde mire la gráfica. Por eso especifico CONCAVA hacia ARRIBA o CONVEXA hacia ABAJO.

https://www.youtube.com/watch?v=5PnzLrfz0Dg

Actividades propuestas

20. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$;

b) $y = 3x^3 + 9$;

c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$;

d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

21. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

22. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–5, 5] y en el intervalo [1, 4].

23. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = |x - 9|$;

b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

24. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–4, 4].

25. Se considera la función: $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) ¿Alcanza algún extremo?

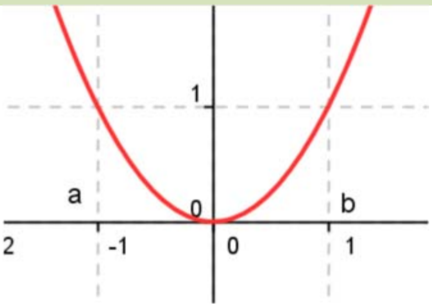
3.3. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función. f es **convexa** ($\cup$) en $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:

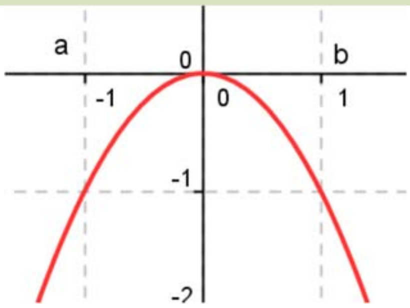
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

f es **cóncava** ($\cap$) en $[a, b]$ si, en las mismas condiciones, se verifica que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$



Convexa ($\cup$)



Cóncava ($\cap$)

Observa que para esta definición no se ha impuesto ser derivable a la función. Si la función es derivable dos veces en el intervalo de estudio se tiene:

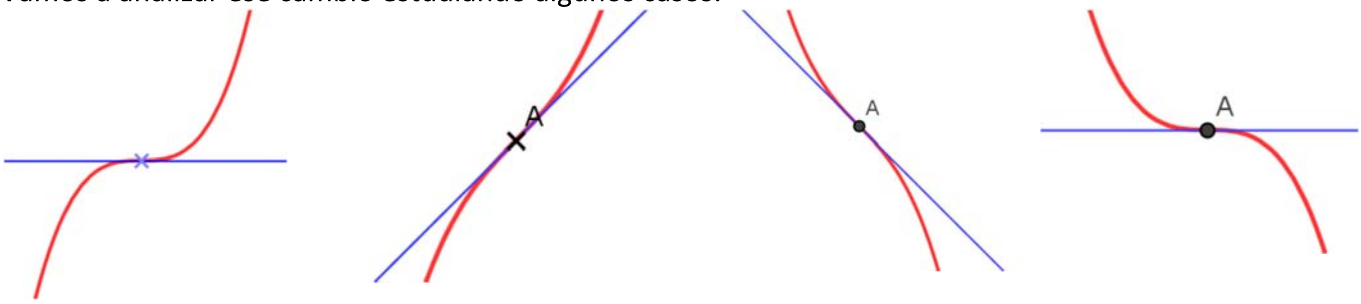
f es **convexa** ($\cup$) en $[a, b]$ $\Leftrightarrow f'$ es estrictamente creciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \geq 0 \\ \Leftarrow f'' > 0 \end{cases}$

f es **cóncava** ($\cap$) en $[a, b]$ $\Leftrightarrow f'$ es estrictamente decreciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \leq 0 \\ \Leftarrow f'' < 0 \end{cases}$

Observa también que si la función es convexa ($\cup$), la gráfica queda por encima de la recta tangente, y si es cóncava ($\cap$), por debajo.

Del mismo modo que en los puntos de la gráfica de una función en los que se anula la derivada primera se produce un cambio, pasa de creciente a decreciente, o viceversa, en los puntos en los que se anula la derivada segunda también se produce una modificación en la gráfica, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Vamos a analizar ese cambio estudiando algunos casos:



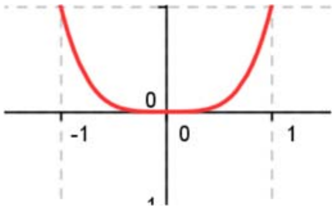
En las cuatro gráficas de arriba hemos señalado un punto y la recta tangente en ese punto. La derivada segunda se anula en los puntos señalados de las cuatro gráficas. Analiza lo que ocurre. Observa que la recta tangente deja a la gráfica unas veces por arriba y otras por abajo. Diríamos que atraviesa la gráfica. Hay un cambio en la concavidad. Esos puntos se llaman **puntos de inflexión**.

Si la función $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces se anula $f''(a)$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si además, como en la primera gráfica y en la cuarta, se anula la derivada primera se dice que tiene un punto de inflexión de tangente horizontal.

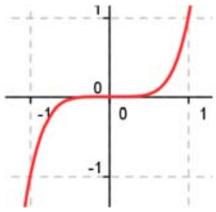
Observa las gráficas siguientes. Hay máximos, mínimos y puntos de inflexión en el origen (0, 0).



$y = x^4$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0;\ y^{iv)}(0) > 0$

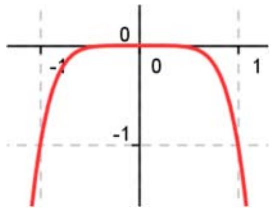
Mínimo



$y = x^5$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = 0;\ y^{v)}(0) \neq 0$

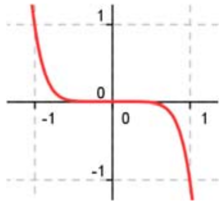
Punto de inflexión de tangente horizontal



$y = -x^6$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = y^{v)}(0) = 0;\ y^{vi)}(0) < 0.$

Máximo



$y = -x^7$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = y^{v)}(0) = y^{vi)}(0) = 0;\ y^{vii)}(0) \neq 0$

Punto de inflexión de tangente horizontal

Las propiedades estudiadas se pueden generalizar con el siguiente teorema:

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función $k + 1$ veces derivable en $[a, b]$ y sea c un punto de (a, b). Entonces:

1) Si $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es impar:

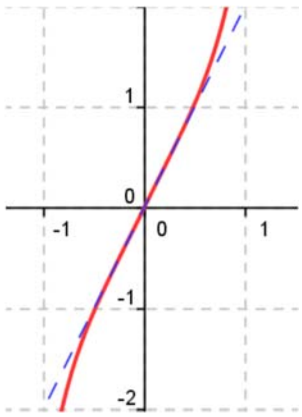
   Si $f^{k+1)}(c) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en c.

   Si $f^{k+1)}(c) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en c.

2) Si $f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es par, entonces f tiene un punto de inflexión en c. Si además $f'(c) = 0$ la tangente del punto de inflexión es horizontal.

Actividades resueltas

- *Determina los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^5 + 2x$.*



Calculamos la derivada segunda $f'(x) = 5x^4 + 2$; $f''(x) = 20x^3$. Se anula en $x = 0$. Calculamos las derivadas sucesivas:

$f'''(x) = 60x^2$; $f^{IV)}(x) = 120x$; $f^{V)}(x) = 120$; $f'''(0) = f^{IV)}(0) = 0$ y $f^{V)}(x) \neq 0$.

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es la quinta, es impar, luego en (0, 2) hay un punto de inflexión, y como no se anula la derivada primera no es un punto de inflexión de tangente horizontal.

La derivada segunda $f''(x) = 20x^3$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, por tanto la función es convexa ($\cup$) si $x > 0$ y cóncava ($\cap$) si $x < 0$.

Actividades propuestas

26. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

27. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$;

c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Representación gráfica de una función

Una de las aplicaciones de la derivada es la representación gráfica de funciones. Vamos a seguir un orden para hacerlo:

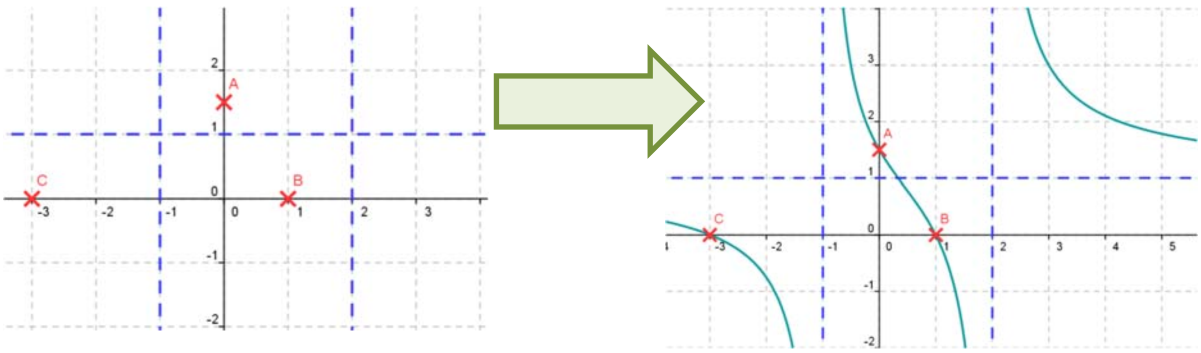
1) Puntos de intersección con los ejes coordenados.
2) Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.
3) Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
4) Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Actividades resueltas

- *Haz un esbozo de la gráfica de la función racional:* $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$

1) ***Puntos de intersección con los ejes coordenados:*** En ocasiones es difícil encontrarlos. En otras es sencillo como en este caso. Para x = 0 $\rightarrow$ y = 3/2, A(0, 3/2) punto de intersección con el eje de ordenadas. La ordenada vale 0 para x = 1 y para x = –3, B(0, 1), C(0, –3) que son los puntos de intersección con el eje de abscisas.
2) ***Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito:*** La función está definida en toda la recta real excepto en los valores que anulan al denominador, donde tenemos dos asíntotas verticales: x = –1 y para x = 2. Cuando x tiende a infinito la y tiende a 1, luego tenemos una asíntota horizontal: y = 1.

En muchas ocasiones con esta información ya somos capaces de hacer un primer esbozo de la gráfica:



- *Haz un esbozo de la gráfica de la función:* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+2}{x+1} & si\ x\le 0\\[2mm] \dfrac{e^x}{x} & si\ x>0\end{cases}$

1. ***Puntos de intersección con los ejes coordenados.***

La rama I no corta al eje de abscisas. La rama II tampoco. Si x = 0 en la rama II tenemos que f(0) = 2, el punto B (0, 2) de la gráfica.

2. ***Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.***

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en {0, –1}

Comportamiento en x = 0: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. A la izquierda de 0 toma el valor 2.

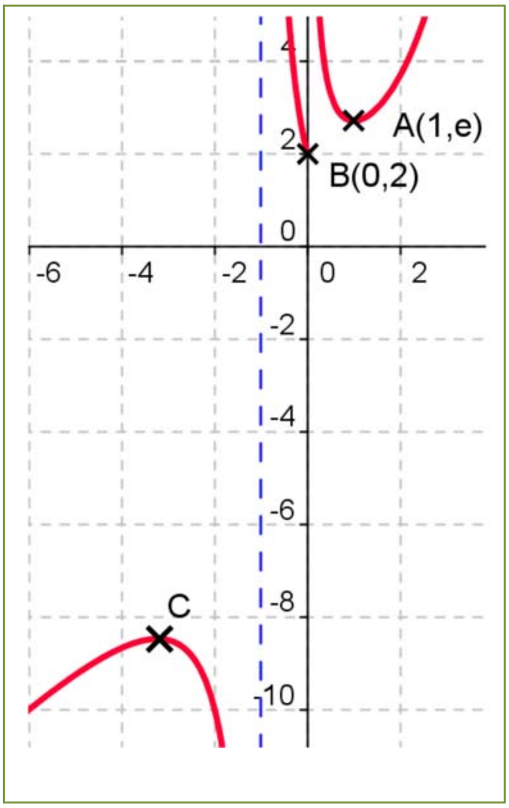
En x = –1 tiene una asíntota vertical.

Comportamiento cuando x tiende a ∞: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ..

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. *Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.'*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} & si\ x<0 \\ \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} & si\ x>0 \end{cases}$$



En x = 0 no es derivable pues no es continua.

Observando el signo de la derivada tenemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{5})$, decreciente en el intervalo $(-1-\sqrt{5}, -1)$, decreciente en (–1, 0), decreciente en (0, 1) y creciente en (1, +∞)

En x = 1 hay un mínimo: A (1, e).

En $x = -1-\sqrt{5}$ hay un máximo, en el punto C de la gráfica.

4. *Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.*

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{(x+1)^3} & si\ x<0 \\ \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} & si\ x>0 \end{cases}$$

La derivada segunda no se anula en la rama I ni en la rama II. No hay puntos de inflexión. Es cóncava (∩) de $(-\infty, -1)$ y convexa (∪) de (–1, 0) y de (0, +∞).

Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Ahora queremos representar gráficamente la función, no hacer un simple esbozo. Es decir, queremos aplicar paso a paso todo lo que hemos aprendido sobre funciones en el dibujo de la gráfica.

- Dominio: Anulamos el denominador:

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

  Por tanto, $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

- Cortes con los ejes:
  - Eje X: $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$
  - Eje Y: ya hemos visto que $y = 0$ cuando $x = 0$.

- Simetría: Las potencias de x son impares, pero hay un término independiente, luego no tiene simetría. Podemos comprobarlo:

$$f(-x) = \frac{2\cdot(-x)}{(-x)+1} == \frac{-2x}{-x+1} = \frac{2x}{x-1} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Regiones de existencia:

  Los cortes con los ejes y el dominio definen los intervalos (–∞, –1), (–1, 0) y (0, +∞).

Intervalo	(–∞, –1)	(–1, 0)	(0, +∞)
$f(x_0)$	$f(-2) = 4$	$f(-0'5) = -2$	$f(1) = 1$
$f(x)$	Positiva	Negativa	Positiva

- Asíntotas:
  - Horizontales: analizamos el límite en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal}$$

  - Verticales: analizamos qué ocurre en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{"0"} = \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

  - Como tiene asíntotas horizontales, no tiene asíntotas oblicuas.

- Monotonía: hallamos la derivada: $f(x) = \dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

  y vemos que nunca se anula. Del dominio definimos los intervalos: $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$.

Intervalo	(–∞, –1)	(–1, +∞)
$f'(x_0)$	$f'(-2) = 2 > 0$	$f'(0) = 2 > 0$
$f(x)$	Creciente ↗	Creciente ↗

  Es siempre creciente.

- Máximos y mínimos: Como la derivada no se anula, no hay máximos ni mínimos relativos.
- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

  que tampoco se anula en el dominio de la función. Consideramos, como antes, los intervalos: (–∞, –1) y $(-1,+\infty)$.

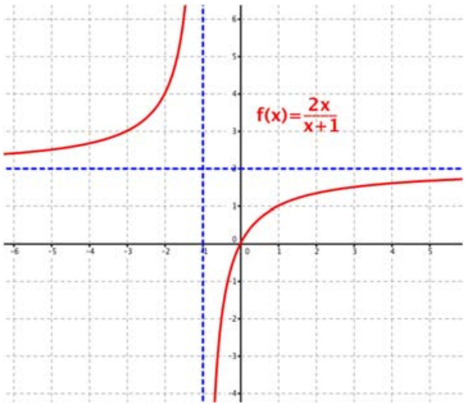
Intervalo	(–∞, –1)	$(-1,+\infty)$
$f''(x_0)$	$f''(-2) = +4 > 0$	$f''(0) = -4 < 0$
$f(x)$	Cóncava	Convexa

- Puntos de inflexión:

  Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Actividad resuelta

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Si sólo nos interesa hacer un esbozo rápido de la gráfica de una función definida con una raíz cuadrada, podemos hacer un esbozo de la función de dentro de la raíz, y teniendo en cuenta que no está definida cuando resulte negativa, aplicar la raíz a lo obtenido.

Ahora queremos hacer paso a paso la representación gráfica de esta función:

- Dominio: Al tener índice par, el radicando ha de ser mayor o igual que cero:

$$x^2-4\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 4 \Rightarrow \begin{cases} x\leq -2 \\ x\geq +2 \end{cases}$$

También podemos factorizar el radicando y analizar los signos:

$$x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$$

Intervalo	(–∞, –2]	(–2, 2)	[+2, +∞)
$(x-2)$	–	–	+
$(x+2)$	–	+	+
x^2-4	+	–	+
$f(x)$	Existe	———	Existe

Por tanto, $\text{Dom} f(x)=\mathbb{R}-(-2,+2)=(-\infty,-2]\cup[+2,+\infty)$

- Cortes con los ejes:
  - Eje X: $f(x)=\sqrt{x^2-4}=0\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow \begin{cases}(-2,\,0)\\(+2,\,0)\end{cases}$
  - Eje Y: $x=0$ no pertenece al dominio, por tanto, no corta al eje OY.
- Simetría: x^2-4 es par, luego $f(x)$ también lo es:

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4}=\sqrt{x^2-4}=f(x)\Rightarrow f(x) \text{ es par}$$

- Regiones de existencia:

Como $f(x)$ es una raíz de orden par, es siempre positiva en su dominio:

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Intervalo	$(-\infty,-2]$	$(-2, 2)$	$[+2,+\infty)$
$f(x)$	Positiva	———	Positiva

- Asíntotas:
  - Verticales: No tiene, ya que x^2-4 es continua en todo $\mathbb{R}$.
  - Horizontales: Analizamos los límites en el infinito

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty \Rightarrow \text{no tiene asíntotas horizontales}$$

  - Como no tiene asíntotas horizontales, analizamos las asíntotas oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-\ldots}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1 \text{ si } x\to+\infty\\ -1 \text{ si } x\to-\infty\end{cases}$$

Entonces:

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}[\sqrt{x^2-4}\mp x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4}\mp x)(\sqrt{x^2-4}\pm x)}{(\sqrt{x^2-4}\pm x)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\pm x\right)}=0$$

Entonces, hay **dos** asíntotas oblicuas:

$y=x$ cuando $x\to+\infty$ e $y=-x$ cuando $x\to-\infty$

- Monotonía: Hallamos la derivada:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Al intentar anularla, obtendríamos $x=0$, que no pertenece al dominio. Entonces:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(+2,+\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-3)=\frac{-3}{\sqrt{5}}<0$	$f'(3)=\frac{+3}{\sqrt{5}}>0$
$f(x)$	Decreciente ↘	Creciente ↗

- Máximos y mínimos:

Como la derivada no se anula en el dominio, no hay máximos ni mínimos relativos.

- Curvatura: Hallamos la derivada segunda:

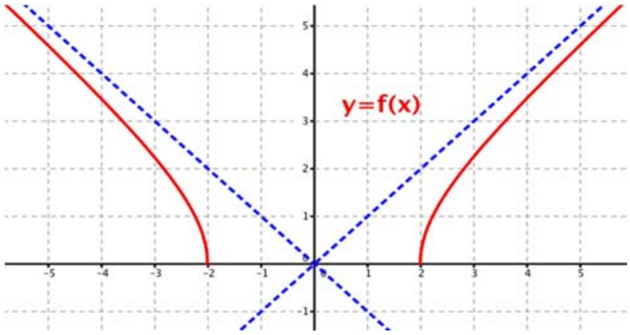
$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\Rightarrow f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}=\ldots=\frac{-4}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$$

que tampoco se anula en el dominio de la función, y se ve fácilmente que es siempre negativa ya que el signo de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto, $f(x)$ es siempre convexa

- Puntos de inflexión:

Como la derivada segunda no se anula, no hay puntos de inflexión.

Con toda la información recopilada podemos dibujar la gráfica de $f(x)$:



Actividades propuestas

28. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, b) $f(x) = \text{cotg } x$, c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$,

d) $f(x) = \sqrt{x+5}$ e) $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$, f) $f(x) = \log(x+1)$.

29. Determina el conjunto imagen (o recorrido) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, c) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

30. Analiza la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

31. Estudia las asíntotas y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$, c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x-2}}$

32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y la concavidad de:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$

33. Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas

b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$. Selectividad. Opción A

34. Sea la función $f(x) = 2x\,|4-x|$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad

b) Dibuja su gráfica.

35. Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

3.5. Problemas de optimización

A los problemas de máximos y mínimos se les suele denominar problemas de optimización.

Actividades resueltas

- *Cortando un mismo cuadrado de las cuatro esquinas de una hoja rectangular de dimensiones a y b se puede construir una caja abierta por la parte superior. Calcula el lado del cuadrado que hay que cortar para que la caja tenga máxima capacidad.*

El volumen de la caja es el producto de los tres lados. Si cortamos las esquinas el rectángulo de longitud b tendrá ahora una longitud $b - 2x$. Lo mismo el de longitud a. La altura es x.

$$V = (b - 2x)(a - 2x)x = 4x^3 - 2bx^2 - 2ax^2 + abx.$$

Para obtener el volumen máximo, derivamos e igualamos a cero.

$$V' = 12x^2 - 4(b + a) + ab = 0 \Rightarrow x = \frac{b + a - \sqrt{b^2 + a^2 - ab}}{6}$$

Por consideraciones geométricas, el valor obtenido es un máximo, pues si el lado del cuadrado vale 0, o si vale la mitad del lado, el volumen de la caja es mínimo, ya que vale 0 pues no se forma caja.

- *Entre todos los cilindros de volumen V dado determina el radio y la altura del de mayor superficie.*

El volumen de un cilindro es igual a: $V = \pi r^2 h$, y su superficie total es igual a $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

La superficie depende de dos variables, el radio y la altura. Como nos dicen que el volumen es dado, despejamos de su expresión por ejemplo la altura, y la sustituimos en la superficie:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Derivamos la superficie respecto a r, e igualamos a cero la derivada:

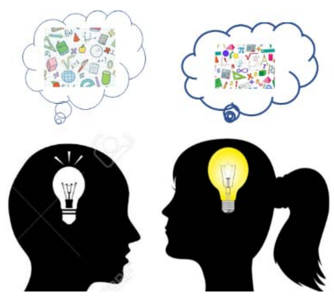
$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

Para saber si ese valor del radio conduce a un máximo o a un mínimo. Hallamos el signo de la derivada segunda:

$$S'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0$$

La solución obtenida nos da una superficie mínima.

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\ ;\ r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$



Actividades propuestas

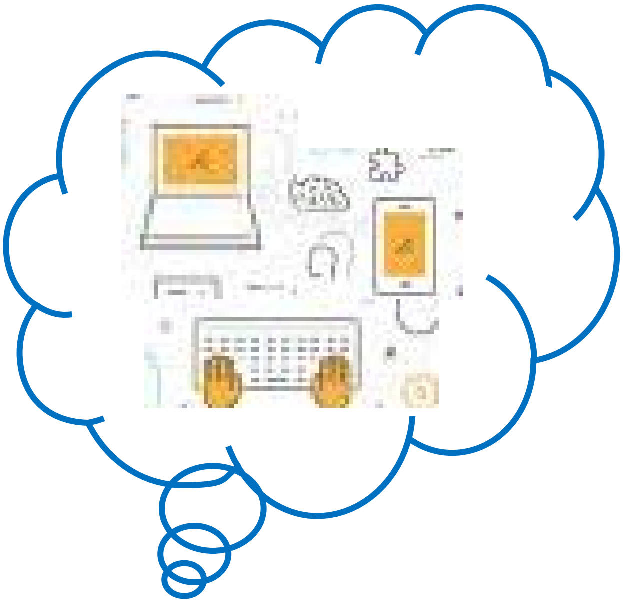
36. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

37. Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

38. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Optimización de funciones con una hoja de cálculo

Vamos a utilizar una hoja de cálculo para aproximar un problema de optimización, en este caso para calcular cuando un volumen es máximo. De forma similar puedes resolver otros problemas similares.



Actividades resueltas

- *En una pastelería es necesario construir cajas con unas planchas de* 60 *cm de largo por* 40 *cm de ancho, cortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas. Si llamamos e al lado de cada uno de los cuadrados que recortamos. ¿Para qué valor de e se obtiene una caja de volumen máximo*?

- Abrimos en una hoja de cálculo la hoja1, dejamos las primeras filas para poner título a la hoja y explicar su contenido. Activamos la celda **A9** y escribimos *Volumen:* y en **B9** la expresión que nos da el volumen de la caja **(60-2*e)*(40-2*e)*e**. En la celda **A10** escribimos **e** y en **B10** su significado. En **A12** escribimos valor inicial de **e**, en **A13** valor final de **e** y en **A14** incremento, en **B12** escribimos el valor 0, en **B13** el valor 20 y en B14 la fórmula **=(B13-B12)/20**.
- En la celda **D11** escribimos *valor de e* y en **E11** *valor de V*, en **D12** insertamos la fórmula **=B12**, en **D13** **=D12+B14** y situados en esta celda arrastramos el controlador de relleno hasta **D32** para copiar esta fórmula.
- En el rango **E12:E32** escribimos las fórmulas que nos permiten obtener el valor del volumen de la caja en función de los valores del rango **D12:D32**, para esto es suficiente escribir en **E12** la fórmula **=(60-2*D12)*(40-2*D12)*D12** y situados en esta celda arrastrar el controlador de relleno hasta **E32**.
- Seleccionamos el rango **E12:E32** y activamos el menú contextual de la barra de estado de la ventana de la aplicación y elegimos Máximo (**MAX**) aparece en esta barra el mayor valor del rango seleccionado que en este caso es 8448 y está en la celda **E20**, la celda **D20** contiene el valor 8 lo que significa que la solución del problema está entre 7 y 9.
- Cambiamos el valor 0 de **B12** por 7 y el de **B13** por 9 y repetimos el apartado anterior. Ahora el valor máximo es 8450,208 y el valor de **e** correspondiente 7,8 que está entre 7,7 y 7,9.
- Repetimos este proceso hasta obtener la solución con tres decimales exactos.
- En algún momento será necesario cambiar el formato de los rangos **D12:E32** y **B12:B14** para aumentar el número de decimales que visualizamos. Para ello es suficiente seleccionar uno de los dos rangos y activar en el menú **Formato** en comando Celdas elegir la pestaña **Número** y en ella la categoría **Número** aumentando los decimales hasta 6 en **Posiciones decimales**. Una vez establecido el formato en uno de los rangos utilizamos la opción **Copiar formato** de la barra de herramientas estándar para copiarlo en el otro. También podemos seleccionar ambos rangos a la vez pulsando la tecla <Control> antes de terminar la primera selección y manteniéndola pulsada hasta comenzar la otra.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- El resultado de la hoja de cálculo después de ponerle título y comentarios debe ser muy similar a la imagen que se muestra a continuación:

MAXIMO DE UNA FUNCION					
**************************************					
Esta hoja de cálculo permite determinar entre que valores					
se encuentra el máximo de una función.					
		PROBLEMA DE LA CAJA			
		======================			
VOLUMEN:	(60-2*e)*(40-2*e)*e				
e:	esquina				
			valor de e	valor de V	
valor inicial:	7,846000		7,846000	8450,446927	
valor final:	7,848000		7,846100	8450,446958	
incremento	0,000100		7,846200	8450,446986	
			7,846300	8450,447012	
			7,846400	8450,447037	
			7,846500	8450,447059	
			7,846600	8450,447079	
			7,846700	8450,447097	
			7,846800	8450,447112	
			7,846900	8450,447126	
			7,847000	8450,447138	
			7,847100	8450,447147	
			7,847200	8450,447154	
			7,847300	8450,44716	
			7,847400	8450,447163	
			7,847500	8450,447164	
			7,847600	8450,447163	
			7,847700	8450,447159	
			7,847800	8450,447154	
			7,847900	8450,447146	
			7,848000	8450,447137	

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Interés de las derivadas

El Análisis y el Cálculo Infinitesimal han sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las derivadas constituyen su parte central, ya que permiten comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio.

Las derivadas sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas, medicina, ciencias sociales e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

Isaac Newton

G. W. Leibniz

Antecedentes

Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1564 – 1642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución las derivadas.

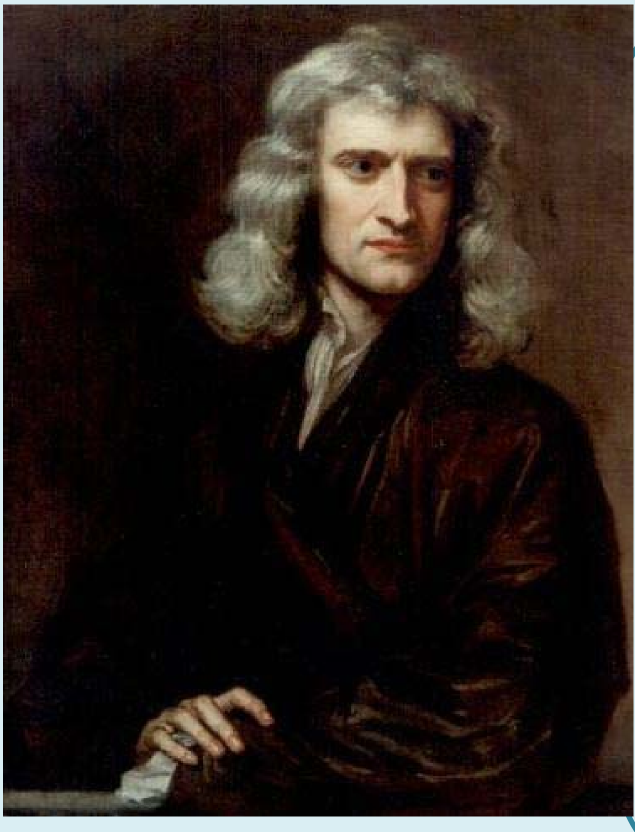
En 1638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1596 – 1650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no se conocía todavía el concepto de derivada), y fue resuelto en 1674 por *Leibniz* y en 1690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

El concepto de derivada comienza con *Isaac Newton* (1642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1646 – 1716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las derivadas son la expresión matemática de las leyes naturales**.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Newton

Isaac Newton (1642 – 1727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Su primera obra impresa: "*Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica*" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de la derivada. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... Indica cómo evoluciona el sistema.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas se pueden expresar mediante derivadas es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues lo publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* en 1684.

Entre sus intereses más profundos se encontraban la alquimia y la religión, temas en los que sus escritos sobrepasan con mucho en volumen a sus escritos científicos. Entre sus estudios alquímicos se encontraban temas esotéricos como la transmutación de los elementos, la piedra filosofal y el elixir de la vida.

En 1693 sufrió una gran crisis psicológica, causante de largos periodos en los que permaneció aislado, durante los que no comía ni dormía. En esta época sufrió depresión y arranques de paranoia. Tras la publicación en 1979 de un estudio que demostró una concentración de mercurio (altamente neurotóxico) quince veces mayor que la normal en el cabello de Newton, la mayoría opina que en esta época Newton se había envenenado al hacer sus experimentos alquímicos, lo que explicaría su enfermedad y los cambios en su conducta.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*derivar*" en el sentido de "*deducir*" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable y depende de otra x, y se conoce la tasa de variación de y respecto de x para cambios muy pequeños de la variable x, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x)\cdot dx$, entonces la determinación de y respecto de x se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Madame de Châtelet

Gabrielle Émilie de Breteuil, (1706 - 1749), marquesa de Châtelet fue una dama francesa que tradujo los "*Principia*" de Newton y divulgó los conceptos del Cálculo en su libro "*Las instituciones de la física*". Era una dama de la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales, y no obstante fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hacen de su época, el siglo de las luces, un periodo excitante.

En sus salones, además de discutir de teatro, literatura, música, filosofía... se polemizaba sobre los últimos acontecimientos científicos. ¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre Ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función?

Mme. de Châtelet, al traducir y analizar la obra de Newton, propagó sus ideas desde Inglaterra a la Europa continental. Quizás, gracias a ella, el determinismo científico de Newton permaneció como idea filosófica hasta mediados del siglo XIX.

Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio. Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor.

Se conserva un retrato al óleo de ella pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras *"adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumento y sus libros de matemáticas..."*. En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Escribió ***Las instituciones de la física***. Convencida de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que no estaba de acuerdo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía entre otras cosas con el estudio. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que es una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, "¡quien dice sabio, dice feliz!".

Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar la Ciencia.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0$ $\to x = 1, x = -1$. • Para $x < -1$, $y' > 0 \to y$ creciente. • Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \to y$ decreciente • Para $x > 1$, $y' > 0 \to y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo. Si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $y = f(x)$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ cóncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 \to$ $y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego (−1, 2) es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego (1, −2) es un mínimo relativo. (0, 0) es un punto de inflexión

Vídeo de un problema de selectividad resuelto: Optimización ejercicios resueltos selectividad PAU. Optimización de funciones ejercicios resueltos aplicaciones de las derivadas, Determinar de entre todos los triángulos isósceles de perímetro 6 , los de área máxima. Profesor10

https://www.youtube.com/watch?v=EVXJfvdSwF4

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x = 1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x = 1 ni derivable en dicho punto

4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto x = 5.

6. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0.5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

7. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.

8. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.

9. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en $x = 0$.

10. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

11. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

12. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).

13. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo de derivadas

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

15. Calcula:

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\dfrac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$

c) $y = \dfrac{6\sqrt{x}}{(x+2)\cdot(x^2-3x+1)}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{x}\cdot(x+3)}{(x^2-3)}$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}$ b) $y = \dfrac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}$

c) $y = \dfrac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \dfrac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)$; c)

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$; b) $y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3 - 3x)$; c) $y = \dfrac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$; d) $y = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$

c) $y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}$ d) $y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3+3}\cdot(4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4}$

c) $y = (7x^3 + 3)^5\cdot(4x^5 - 8x^8)$ d) $y = \dfrac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2}$

22. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5-3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3+2x^2)}$

c) $y = e^{(3x^5-6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(3x^4-4x^5)^3}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3-5x^2})^7$

c) $y = e^{(4x^5+8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5 - 3x^3)^{12}(3x + 1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$

c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{7x^5-5x}{2x-3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2}$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\dfrac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x-3x^2)\ln(5x-7x^2)$

c) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{16-9senx}}{4+3x}$ d) $y = \sqrt{\ln(5x)}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $y = \ln(7e^{2x-3})$

c) $f(x) = 5\ln\dfrac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $y = \ln(\ln\sqrt[3]{4x-5})$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^3 - 5x^5)^8$ b) $y = log_2(8x^2 - 3x^3)^2$

c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}$

Aplicaciones de la derivada

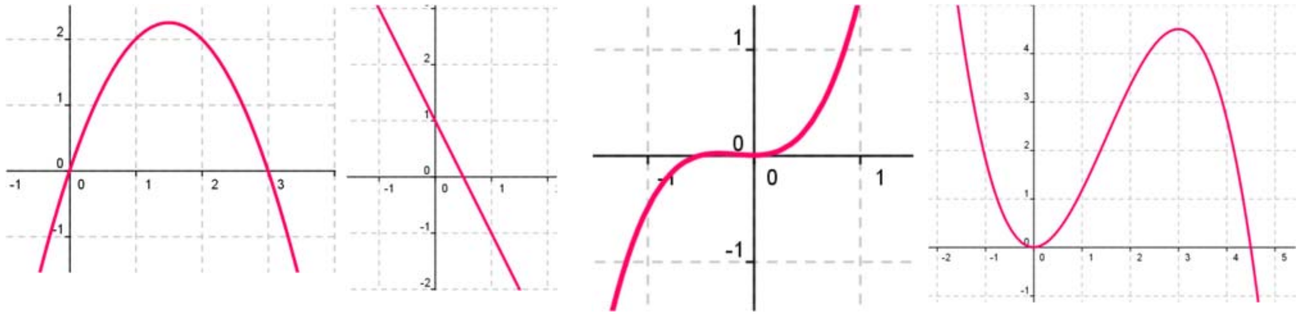
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

32. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

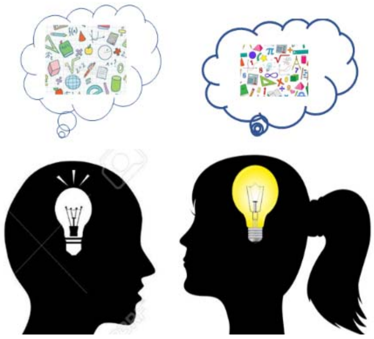


33. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

34. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–5, 3] y en el intervalo [1, 5].

35. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo [–4, 4].

Problemas



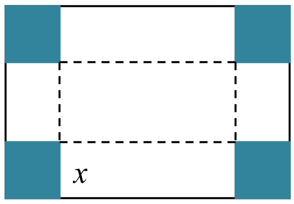
36. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0'3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

Torre Eiffel

37. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0'3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

39. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



40. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La tasa de variación media de la función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en el intervalo [0, 3] es:

a) 15 b) 70 c) 35 d) –35

2. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$ en $x = 1$

a) no existe b) 0 c) –1 d) 1

3. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$ es

a) $e/2$ b) no existe c) $-e/2$ d) e

4. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) $b = -6$, $d = 3$ b) $b = 3$, $d = -1$ c) $b = 6$, $d = -3$ d) $b = -3$, $d = 2$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x$ b) $y = x - 6$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + 6x$

6. La función $y = -7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

7. La función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

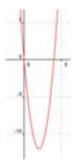
c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

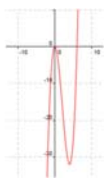
d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

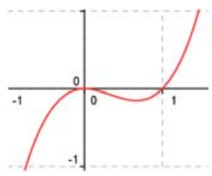
a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:

a) 

b) 

c) 

d) 

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PROBLEMAS RESUELYOS DE SELECTIVIDAD

Vídeo de un problema de selectividad resuelto: Ejercicio selectividad (EVAU/EBAU). Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Madrid 2019. Este vídeo muestra la resolución de un problema típico de selectividad, en el que se realiza el análisis de una función, estudiando sus extremos y curvatura. Además de lo anterior, también pide calcular la función primitiva, que aún no siendo necesaria para efectuar dicho análisis, es pedida en el primer apartado. Derivadas encantadas

https://www.youtube.com/watch?v=ErvbaRSpx-w

OTROS VÍDEOS

https://www.youtube.com/watch?v=NmEy9p1x5-I

https://www.youtube.com/watch?v=5EocMnIFac4

https://www.youtube.com/watch?v=pz8yjIEL6jg

EXÁMENES RESUELTOS

https://www.alfonsogonzalez.es/asignaturas/2_bach_ccss/ejercicios_propuestos_2_bach_ccss/6_derivadas.pdf

Santander

https://www.losagustinos.es/wp-content/uploads/2020/01/Derivadas-2020.pdf

Regla de la cadena

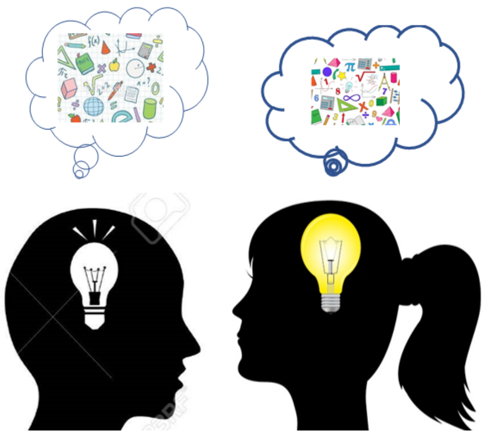
https://www.youtube.com/watch?v=eHLZyRxhVF0

Andalucía

https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/ccss2/4-derivadas-y-aplicaciones/

Puedes ver muchos problemas de selectividad resueltos en SELECTIVIDAD, de distintos años y diferentes comunidades autónomas. También en "Problemas resueltos por el alumnado" tienes problemas de derivadas resueltos por estudiantes de un instituto

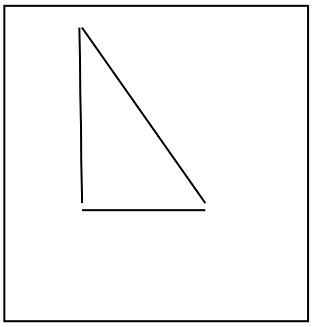
OTROS PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD



1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta.

2. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a)\cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto)
3. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme).
4. Defina derivada de una función f en un punto a. Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f' también es periódica de periodo T.
5. En la figura se representa una escalera AB, cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c. Se pide:



a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$.

b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA)

c) La velocidad con la que B llega al punto O.

6. Dibújese la gráfica de una función de $\Re$ en $\Re$, que cumpla las siguientes condiciones:

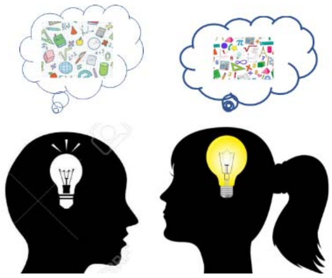
$f'(0) = 0$

$f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$

$f'(x) > 0$ para $0 < x < ½$

Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje.

7. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$.



8. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte.

a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.

b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

9. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo *t*) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$

a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil?

b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [4, 8] y el espacio recorrido en ese intervalo

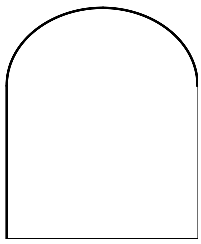
c) Hallar la función de posición de este móvil.

10. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\,\text{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$.

11. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible.



12. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima. Y

13. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asintóticas.

14. Sea la función $f(x) = x\,|x - 1|$ Se pide:

a) Hacer un dibujo aproximado de la función.

b) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$.

c) Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

15. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

16. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

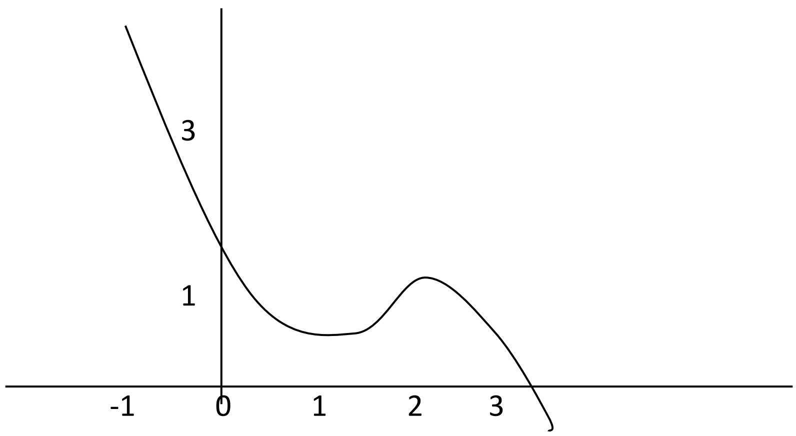
17. Sea f: $\Re \to \Re$ una función derivable en $\Re$; sean a y b dos raíces de la derivada f´(x) tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de f´(x). Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

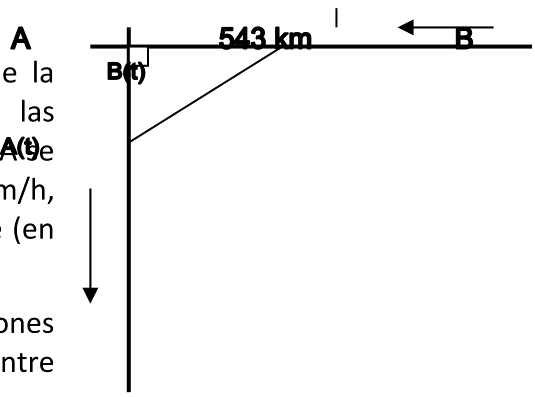
1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$

2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$

3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.

18. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.





19. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.

a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.

b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia)

20. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.

b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.

c) Hallar el valor máximo de dicha función.

21. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.

22. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) Determinar sus asíntotas.

23. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

24. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) Determinar a, b, c y d

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

25. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4)

b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

26. Sea la función $f(x) = 2x + senx$

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos

27. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Esbozar la gráfica de la función

28. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

b) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

29. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica.

b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,- 5)$.

30. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

i) $P(x)$ es una función par.

ii) Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = \sqrt{5}$

iii) $P(0) = 5$

a) Hallar sus puntos de inflexión.

b) Dibujar su gráfica.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

31. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

a) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

32. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2} & si \quad x\geq 2\\ x(x-2) & si \quad x<2\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad

b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1)

33. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide:

a) Calcular g'(0), siendo g(x) = $f(x+f(0))$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$.

34. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x)$ = A sen$x$ + B x^2 + C x + D tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es $f''(x)$ = 3 sen$x$ -10.

35. Se considera la función real de variable real definida por:

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$. Se pide:

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas

b) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal

c) Representar gráficamente la función

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A-B=\dfrac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$

36. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x)$ = e^x − x

b) Calcular el dominio de definición de $f(x)=\dfrac{1}{e^x-x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a -∞.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

37. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f(a)), donde 0 < a < 1.

b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

38. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1}{2}$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

39. Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa Logaritmo Neperiano.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) Dibuja la gráfica de f.

c) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

40. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$.

b) Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas.

c) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima.

41. Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$.

42. Dada la función: $f(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales.

43. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares.

44. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

45. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

46. a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\, x<0 \\ x^2+2a\cos x & si\ 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & si\ x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

c) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

47. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

48. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

49. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

50. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

51. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales.

b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$.

52. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & si \quad |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad |x| \ge 2 \end{cases}$

Se pide:

Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

53. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x\,(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

54. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide:

Dibuja la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

55. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & si\ x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}(1-(x-2)^2) & si\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

c) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

56. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtén:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

57. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & si \quad 1 + ax > 0 \quad y \quad x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$$ se pide:

a) Halla los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

58. a) Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$.

59. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(-1, f(-1))$

b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f

60. Dada la función $f(x) = e^x + a\ e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a:

a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

61. Dada la función $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$.

62. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si \quad x>0 \\ x+k & si \quad x\le 0 \end{cases}$ ($\ln$ significa logaritmo neperiano de x), se pide:

a) Determina el valor de k para que la función sea continua en R.

b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

63. Dada la función: $f(x) = \ln (x^2 + 4x -3)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

64. Los puntos P (1, 2, 1), Q (2, 1, 1) y A (a, 0, 0) con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

65. Dada la función $f(x)=\frac{3x^2+5x-20}{x+5}$, se pide

a) Estudia y obtén las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Representa gráficamente la función.

66. Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide:

Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f.

67. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$

Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justifica la respuesta indicando qué teoremas usas.

68. Dada la función $f(x)=\frac{ax^4+1}{x^3}$, se pide:

a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$.

69. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$

b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales.

c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

70. Hallar el dominio de definición de la función $f(x)$ =. $\sqrt{x^2-9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada

71. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.

72. Hallar $a; b; c$ de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

73. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{3x+ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x)=(ln\, x)^x$, $h(x)=sen(\pi-x)$ se pide:

a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calcular $g'(e)$.

c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

74. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si\ x\le 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ x>3 \end{cases}$, se pide

a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$.

c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [4, 8]

75. Dada la función $f(x)=x^2 sen\, x$, se pide:

a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$.

Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

76. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \end{cases}$; se pide:

a) Determinar el valor de *a* para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de *a*, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

77. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$

78. Dada la función $f(x) = 2\, cos^2 x$ se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

79. Dada la función $f(x)=\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{27}{2x+2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica de la función.

80. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

81. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

82. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & si\ x<0 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & si\ x\geq 0 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

83. a) Sea f: **R** → **R** una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$.

84. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+4}$, se pide:

a) Determina el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$.

85. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5senx}{2x}+\dfrac{1}{2} & si\quad x<0 \\ a & si\quad x=0 \\ xe^x+3 & si\quad x>0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.

Autora: María Molero Aparicio
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF