# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

# 1º Bachillerato

# Capítulo 4: Límites y continuidad

**Propiedad Intelectual**

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-065416

Fecha y hora de registro: 2015-05-03 18:09:52.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

**Autor: Luis Ángel Morales García**

**Revisora: Margot Masina**

**Ilustraciones: Elaboración propia**

## Índice


# 1. LÍMITES

1.1. CONCEPTO DE LÍMITE. IDEA INTUITIVA. DEFINICIÓN

1.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

1.3. LÍMITES LATERALES

1.4. TIPOS DE LÍMITES

1.5. CÁLCULO DE LÍMITES

OPERACIONES CON $\infty$ Y 0

INDETERMINACIONES

# 2. ASÍNTOTAS

2.1. ASÍNTOTAS VERTICALES

2.2. COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO. ASÍNTOTAS HOROZONTALES

# 3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

3.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

3.2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

3.3. TIPOS DE DISCONTINUIDAD


## Resumen


El concepto de límite es necesario para comprender todo el Análisis. En él se van a basar los conceptos que vamos a estudiar a continuación como continuidad y derivada de una función o como el concepto de integral.

Nos ayudará a mejorar el estudio de la gráfica de una función determinando sus asíntotas y sus ramas infinitas.

Ya sabes que la recta real puede ampliarse añadiendo el $-\infty$ y el $+\infty$. Estudiaremos el comportamiento de las funciones cuando $x$ tiende a $+\infty$ y cuando tiende a $-\infty$, es decir, cuando la variable independiente toma valores muy grandes, o muy pequeños (muy grandes en valor absoluto), y estudiaremos aquellos casos en los que la variable dependiente tiende a infinito.

Con el concepto de infinito debemos tener cuidado pues propiedades que "siempre" se verificaban, ahora dejarán de cumplirse.

# 1. LÍMITES

**¿Por qué un número dividido entre cero "da" infinito? ¿Qué pasa cuando dividimos algo entre cero? ¿Cuánto es cero entre cero? Vamos a solventar esta indefinición mediante el concepto de límite. ¡A resolver este lío se ha dicho!**
**Eduardo Sáenz de Cabezón**

https://www.youtube.com/watch?v=5mjX7g9EbGY

## 1.1. Concepto de límite

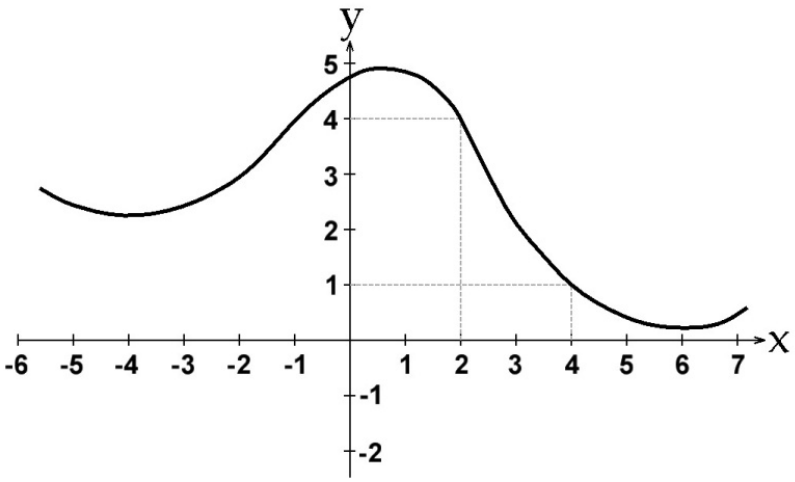
### Idea intuitiva

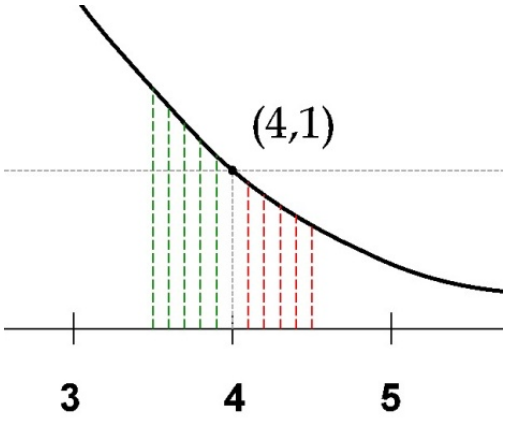
¿Qué es un límite?

**Límite**: lo podemos definir como aquel lugar al que, si no llegamos, seremos capaces de acercarnos todo lo que queramos.

En sentido matemático, el límite de una función en un punto tiene sentido de "***lugar***" hacia el que se dirige el valor de la función $f(x)$ cuando la variable independiente $(x)$ se aproxima a un valor determinado.

Si tomamos la función del gráfico adjunto, cuando $(x)$ se aproxima al valor **4**, el valor de la función $(f(x))$ se aproxima al valor **1**. Además, en este caso, no solo podremos acercarnos todo cuanto queramos, sino que llegamos a ese valor, puesto que el valor de la función para $x = 4$ es $f(x) = 1$.




ampliando la gráfica de la función, en el entorno del punto (**4**, **1**), hemos dibujado los valores de $f(x)$ en el entorno de $x = 4$ y, como primera observación, vemos que nos podemos acercar al valor de $x = 4$ desde valores mayores a **4** (rojo) o menores a él (verde). En el primer caso diremos que nos aproximamos al valor de $x = 4$ por la **derecha** y, en el segundo caso, por la **izquierda**.

En ambos casos, podemos ver que el valor de $f(x)$ se aproxima a **1**, tanto como queramos, por la derecha desde valores menores a **1** (rojo), pero también lo podremos hacer, desde la izquierda, desde valores mayores a **1** (verde).

Por lo tanto, podemos intuir que, el límite de la función $f(x)$ es **1**, cuando el valor de la variable independiente $x$ se acerca a **4** y se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 1$$

## Actividades resueltas

- *Estima el valor de* $\lim_{x\to 2}(x^2-3)$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 2$.

| $x$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.05 | 2.04 | 2.03 | 2.02 | 2.01 | 2.001 | 2.0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6 | 3.25 | 1.41 | 1.2025 | 1.1616 | 1.1209 | 1.0804 | 1.0401 | 1.004001 | 1.00040001 |

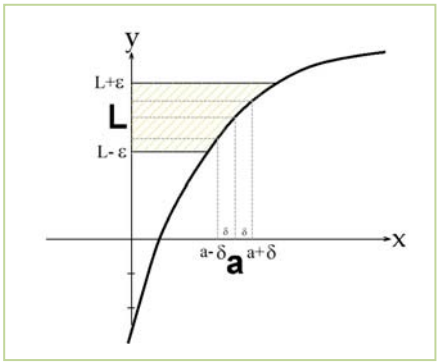
| $x$ | 1 | 1.5 | 1.7 | 1.9 | 1.95 | 1.97 | 1.98 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −2 | −0.75 | −0.11 | 0.61 | 0.8095 | 0.8809 | 0.9204 | 0.9601 | 0.996001 | 0.99960001 |

Observa cómo, al aproximarnos los valores de la variable a 2, siendo mayor que 2: 3, 2.5, 2.1, … los valores de la función se aproximan a 1: 6, 3.25, 1.41, 1.2025, …, 1.0401, 1.004001, 1.00040001 siendo siempre mayores que 1, mientras que al aproximarnos a 2, siendo menores que 2: 1, 1.5, …, 1.99, 1.999, 1.9999 los valores de la función también se aproximan a 1, tanto como queramos, siendo ahora menores que 1: −2, −0.11, 0.61, …, 0.996001, 0.99960001.

Pretendemos escribir con rigor matemático la idea de "*aproximarse*" y "*estar cerca*", "*tanto como queramos*".

## Definición

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, $X$ un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$ es $L$, y se expresa: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.




Del gráfico anterior, se desprende que, cualquier punto $x$ que pertenezca al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, salvo quizás el propio punto $a$ (por ese motivo aparece en la definición es signo <, $0 < |x-a|$, para eliminar del entorno al punto $a$), su imagen siempre estará contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Y como lo podemos hacer para cualquier $\varepsilon$, entonces, podremos afirmar que $L$ es el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$.

Es una definición rigurosa, con un alto nivel de abstracción, pero no te preocupes, no es la que vamos a utilizar en el cálculo de límites. Aunque sí la vamos a usar una vez:

## Actividades resueltas

- *Utiliza la definición de límite para comprobar que* $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$

La definición dice: Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Elegimos un $\varepsilon$ cualquiera, e imponemos que $|f(x) - L| < \varepsilon \to$

$|(2x+3) - 5| < \varepsilon \to |2x+3-5| = |2x-2| = |2(x-1)| < \varepsilon \to 2\cdot|x-1| < \varepsilon \to |x-1| < \varepsilon/2$.

Basta tomar $0 < \delta < \varepsilon/2$ para que se verifique que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|(2x+3) - 5| < \varepsilon$

## Actividades propuestas

**1.** Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x\to 1} x = 1$.

## 1.2. Propiedades de los límites

Habrás observado que calcular límites utilizando la definición puede ser muy complicado. Por eso nos interesa obtener propiedades y encontrar procedimientos que nos permitan calcularlos con mayor soltura.

### Si existe, es único:

Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, es único.

Si hubiera dos límites distintos bastaría tomar como ε un tercio de la distancia entre ambos límites para llegar a contradicción.

### Operaciones con los límites

Para estudiar las operaciones con los límites vamos a suponer que $f$ y $g$ son dos funciones definidas sobre un mismo intervalo $X$ y con valores en $\Re$. Cuando indicamos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ deben ser $a$ y $L$ números reales.

#### *Respecto de la suma de funciones:*

El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de los límites de las funciones (siempre que la operación entre los límites esté definida y dichos límites existan), y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Análogo es para la resta de funciones.

#### *Respecto del producto de funciones:*

El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de las funciones (siempre que dichos límites existan y la operación entre los límites esté definida), y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es una constante, en ese caso, la expresión queda:

$$\lim_{x\to a}(K\cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

#### *Respecto del cociente de funciones:*

El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que los límites existan, la operación entre los límites esté definida y que $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$$


Textos Marea Verde

### *Respecto de la potencia de funciones:*

El límite de una potencia de funciones es igual, en general, a la potencia de los límites de las funciones, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Analizaremos casos particulares en el cálculo de límites, como cuando el límite de la base sea 1, y el exponente tienda a infinito.

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es constante, en ese caso, la expresión es:

$$\lim_{x\to a}(f(x)^K) = (\lim_{x\to a} f(x))^K$$

### *Respecto de la composición de funciones:*

El límite de la composición de funciones es igual a la composición de los límites de las funciones, siempre que $g$ sea continua en $f(x)$, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(g(f(x))) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$ si $g$ es continua en $f(x)$.

Como vimos antes, podemos acercarnos a $a$ por la derecha o por la izquierda y, de ahí, obtenemos los **límites laterales**.

## Actividades resueltas

- *Calcula el valor de* $\lim_{x\to 2}(x^2-3)$

Aplicando las propiedades sabemos que $\lim_{x\to 2}(x^2-3) = \lim_{x\to 2}(x)\cdot\lim_{x\to 2}(x) - \lim_{x\to 2}(3)$. Aplicando la definición comprobamos que $\lim_{x\to 2}(x) = 2$ y que el límite de $\lim_{x\to 2}(3) = 3$, por lo que usar las propiedades nos permite calcular un buen número de límites sustituyendo.

- *Calcula los límites siguientes:*

Así, por ejemplo, podemos calcular los siguientes límites simplemente sustituyendo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-3}{x+3} = \frac{(4)^2+5(4)-3}{(4)+3} = \frac{16+30-3}{7} = \frac{33}{7}$$

$$\lim_{x\to 7}\sqrt{3x+2} = \sqrt{3(7)+2} = \sqrt{21+2} = \sqrt{23}$$


BY NC SA
Textos Marea Verde

## 1.3. Límites laterales

**CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LIMITES LATERALES. Explicación de lo que es el límite de una función en un punto. Resaltamos la importancia absoluta del comportamiento de la función a ambos lados del punto y también que no hace que la función esté definida en un punto para tener cierto límite en dicho punto. Matemáticas con Juan**

https://www.youtube.com/watch?v=8Wki4xkZZ-g

### Límite lateral por la derecha

El **límite lateral**, por la **derecha** de un punto, de la función $f(x)$, se expresa como:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$, siempre que se cumpla la condición $x > a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < x - a < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

### Límite lateral por la izquierda.

El **límite lateral**, por la **izquierda** de un punto, de la función $f(x)$, se expresa como:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$, siempre que se cumpla la condición $x < a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < a - x < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

### Existencia de Límite

Para que una función $f(x)$ tenga límite en un punto $x = a$, es necesario y suficiente que existan los límites laterales y coincidan, es decir:

Dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$ es $L$ si se verifica que:

1) Existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$

2) Son iguales: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Entonces decimos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

## Actividades resueltas

- *Estima el valor del límite a la derecha y el valor del límite a la izquierda de $x = 1$ en la función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 1$. Para estimar el límite a la derecha nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores mayores que 1, utilizando la rama de la función

definida para valores mayores que 1, es decir: $3x - 2$:

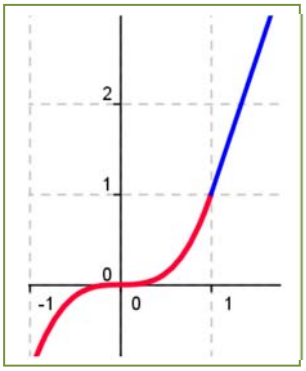
| $x$ | 2 | 1.5 | 1.1 | 1.05 | 1.04 | 1.03 | 1.02 | 1.01 | 1.001 | 1.0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 2.5 | 1.3 | 1.15 | 1.12 | 1.09 | 1.06 | 1.03 | 1.003 | 1.0003 |

Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo mayor que 1: 2, 1.5, …, 1.001, 1.0001, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la derecha: 4, 2.5, …, 1.003, 1.0003.

Para estimar el límite a la izquierda nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores menores que 1, utilizando la rama de la función definida para valores menores que 1, es decir: $x^3$:

| $x$ | 0 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 0.95 | 0.97 | 0.98 | 0.99 | 0.999 | 0.9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0.125 | 0.343 | 0.729 | 0.857375 | 0.912673 | 0.941192 | 0.970299 | 0.997003 | 0.99970003 |

Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo menor que 1: 0, 0.5, …, 0.999, 0.9999, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la izquierda: 0, 0.125, …, 0.997003, 0.99970003.




En este caso ambos límites laterales coinciden. Observa la gráfica de la función:

Sin embargo, el valor de la función no está definido en $x = 1$.

- *Calcula el valor del límite a la derecha y el valor del límite a la izquierda de $x = 1$ en la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Para calcular el límite por la izquierda de la función en $x = 1$ nos aproximamos a 1, siendo menores que 1, por lo que tomamos la rama de la función: $x^3 - 2x + 3$.

$$\lim_{x \to 1^-} (x^3 - 2x + 3) = 1^3 - 2(1) + 3 = 2$$

Para calcular el límite por la derecha de la función en $x = 1$ nos aproximamos a 1, siendo mayores que 1, por lo que tomamos la rama de la función: $3x - 2$.

$$\lim_{x \to 1^+} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 1$$

Los dos límites laterales son distintos, luego no existe el límite.

## Actividades propuestas

**2.** Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & si\ x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & si\ x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$


Textos Marea Verde

## 1.4. Tipos de límites

### Límites infinitos

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, $X = [a, +\infty)$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $+\infty$ es $L$, y se expresa: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe un $k > 0$ tal que, siempre que $x > k$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$..

De forma análoga podemos definir cuando el punto se aproxima a $-\infty$.

O más general:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, k > 0 \text{ tal que, siempre que } |x| > k, x \in X, \text{ se cumple } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

La definición es la misma que en el caso finito, sustituyendo el entorno del punto $x = a$ por un entorno del infinito.

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, $X$ un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es $+\infty$, y se expresa:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Cuando para todo $k > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $f(x) > k$.

De forma análoga podemos definir cuando la función tiende a $-\infty$. Y también cuando el punto se aproxima a $+\infty$ y la función tiende a $+\infty$, cuando a $-\infty$...

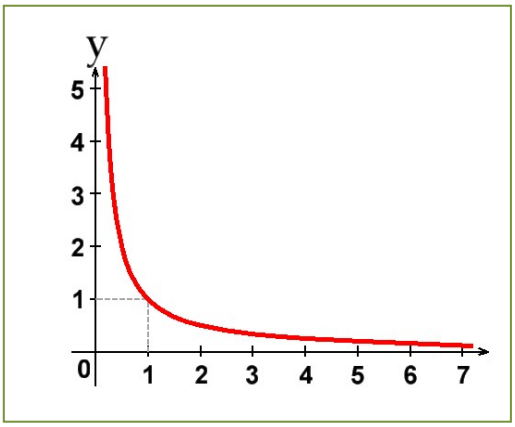
En ocasiones, para un determinado valor de la variable independiente, $x = a$, el valor de la función crece tanto como se quiera en valor absoluto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\, k > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, siempre que } 0 < |x - a| < \delta, x \in X, \text{ se cumple } |f(x)| > k.$$

Observa que no nos estamos fijando en el signo de infinito.

## Actividades resueltas

- *Observa la gráfica de la función y estima el valor del límite a la derecha de $x = 0$ y el límite cuando $x$ tiende a $+\infty$.*




El límite a la derecha de $x = 0$ es $+\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, y el límite cuando $x$ tiende a $+\infty$ observamos que es 0, que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Los tipos de límites que nos podremos encontrar dependerán de los valores que tomen, tanto la variable independiente ($x$), como la función. Así, tendremos:


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia
Textos Marea Verde

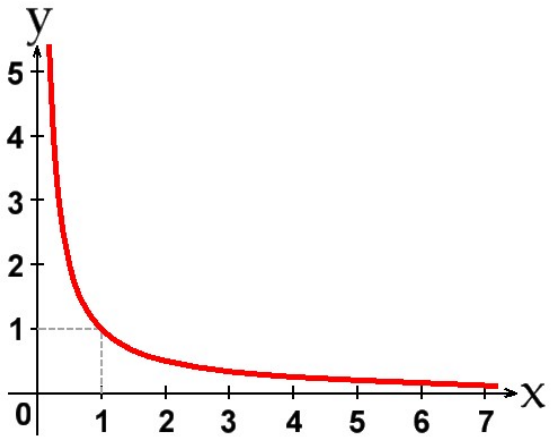
- **Valor** del **Límite** { Finito / Infinito
- **Valor** al que tiende la **variable independiente** { Finito / Infinito

Haciendo las combinaciones de ambos elementos, tendremos cuatro posibilidades:

| | | VALOR VARIABLE INDEPENDIENTE | |
|---|---|---|---|
| | | **FINITO** | **INFINITO** |
| **VALOR DEL LÍMITE** | **FINITO** | $\lim_{x\to a} f(x) = L$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ |
| | **INFINITO** | $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ | $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ |

## Actividades resueltas

- *Veamos algunos ejemplos de tipos de límites.*




### *Límite finito en punto finito*

En este caso el valor del límite es finito cuando la variable independiente tiende a un valor finito.

En la función: $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to$ **1** el límite de la función es **1:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

### *Límite finito en punto infinito*

En la función anterior, $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$, el límite es **0**:

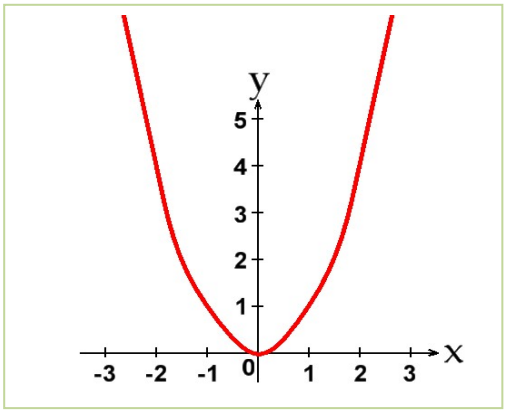
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### *Limite infinito en punto finito*

En la misma función de la gráfica, $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando $x \to$ **0**, el límite tomará el valor ∞:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

### *Límite infinito en punto infinito*




En el caso de valor de límite infinito, cuando la variable independiente tiende a infinito, deberemos tomar otra función cualquiera que sea siempre creciente a partir de un valor.

Sea la función, $f(x)=x^2$. El límite de la función, cuando $x$ tiende a ∞, toma el valor ∞:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty .$$

Es más, tanto cuando $x$ tiende a $-\infty$ como cuando $x$ tiende a $+\infty$, la función $f(x)=x^2$ tiende a $+\infty$.

## Actividades propuestas

**3.** Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

a) $\lim_{x\to\infty} -x^2$

b) $\lim_{x\to\infty} +x^2$

c) $\lim_{x\to 3} x^2$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$

**4.** Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x\to+\infty} -x^3$

b) $\lim_{x\to-\infty} -x^3$

c) $\lim_{x\to\infty} x^2$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$

**5.** Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{5}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 1^-} \frac{5}{x-1}$

c) $\lim_{x\to 3^+} \frac{-5}{x-3}$

d) $\lim_{x\to 3^-} \frac{-5}{x-3}$

## 1.5. Cálculo de límites

**LÍMITES en un PUNTO. Cómo calcular límites. Ejemplos con fracciones, con límites laterales y con indeterminaciones. Susi Profe.**

https://www.youtube.com/watch?v=hkyM-WjLNFQ

## Operaciones con ∞ y 0

Para poder calcular límites, debemos conocer previamente ciertas operaciones con ∞ y 0, y ciertas propiedades que tienen los límites respecto de algunas operaciones matemáticas como son la suma-resta, multiplicación-división, potencias, composición, etc.

Si sumamos, restamos, multiplicamos… dos números reales, no tenemos ningún problema para saber el resultado, pero ¿y si es el ∞? Observa la tabla siguiente y comprueba que en ocasiones sí sabemos el resultado, pero en otras, decimos "*indeterminado*" pues no lo sabemos de forma inmediata, debemos trabajar más para saberlo.

| SUMA | PRODUCTO | COCIENTE | |
|---|---|---|---|
| $\infty \pm K = \infty$ | $K \cdot \infty = \infty$ | $\frac{0}{K} = 0$ | $\frac{K}{0} = \infty$ |
| $\infty + \infty = \infty$ | $\infty \cdot \infty = \infty$ | $\frac{\infty}{K} = \infty$ | $\frac{K}{\infty} = 0$ |
| $\infty - \infty$ = Indeterminado | $0 \cdot \infty$ = Indeterminado | $\frac{0}{\infty} = 0$ | $\frac{\infty}{0} = \infty$ |
| | | $\frac{0}{0} =$ Indeterminado | $\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado |

| POTENCIAS | | |
|---|---|---|
| $K^0 = 1$ | $0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$ | $0^0$ = Indeterminado |
| $0^\infty = 0$ | $K^{+\infty} = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ +\infty & si\ K > 1 \end{cases}$ | $\infty^0$ = Indeterminado |
| $+\infty^{+\infty} = +\infty$ | $e^{+\infty} = +\infty$ $\quad e^{-\infty} = 0^+$ | $1^\infty$ = Indeterminado |

***Nota:***

*Indeterminado* no significa que no pueda existir el límite, sino que será necesario realizar algunas operaciones previas para poder determinar si existe, y su valor.

## Actividades resueltas

El límite de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ pues según vimos en las operaciones con ∞, al dividir un número por algo que tendía a ∞ se obtenía 0.

Como infinito no es un número real, cuando el límite tiende a infinito, decimos que no existe.

## Indeterminaciones

**Limites infinito entre infinito 01 SECUNDARIA matemáticas. Esta vez haremos limites de la indeterminación INFINITO ENTRE INFINITO (∞/∞) e INFINITO MENOS INFINITO (∞-∞).**

https://www.youtube.com/watch?v=icZDdqfHAUo

El proceso de cálculo de un límite consiste, como ya hemos visto, en sustituir la variable por el valor al que tiende y operar, obteniendo el resultado del límite que podrá ser un valor **finito**, **infinito** o **indeterminado**. Si el resultado es "indeterminado" debemos trabajar más.

Como hemos visto en el apartado anterior, en algunas operaciones con ∞ y 0, no podíamos llegar a determinar el valor, puesto que resultaba una *indeterminación*. Existen algunos tipos de indeterminaciones que son resolubles haciendo operaciones y/o simplificaciones previas que estudiamos a continuación. Analizaremos como resolver cada caso de indeterminación.

### *Indeterminación* $\infty - \infty$

Este tipo de indeterminaciones se pueden resolver haciendo operaciones con ambas funciones, ya que suelen ser del tipo $f(x) - g(x)$.

### Actividad resuelta

- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)\left[=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right]\rightarrow$ Indeterminado

Pero si hacemos operaciones y las sumamos previamente:

$$\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1-(x+2)}{x^2-4}=\frac{-x-1}{x^2-4}$$

Calculamos el límite de la función, y nos resulta

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-x-1}{x^2-4}=\frac{-2-1}{2^2-4}=\frac{-3}{4-4}=-\infty$$

pues el denominador tiende a 0.

### Actividades propuestas

**6.** Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$

**7.** Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

**8.** Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

**9.** Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

## *Indeterminación* $0 \cdot \infty$

Normalmente suelen darse en productos de funciones $f(x) \cdot g(x)$, donde $f(x) = 0$ y $g(x) = \infty$ Suelen resolverse operando y simplificando.

## Actividad resuelta

- $\lim_{x \to -3} (x^2 + 6x + 9) \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right) [= 0 \cdot \infty] \rightarrow$ Indeterminado

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 + 6x + 9$, obtenemos que $x = -3$ es una raíz doble, por lo que los factores del polinomio son $(x + 3)^2$ y sustituyéndolo en la ecuación nos queda

$$(x^2+6x+9)\left(\frac{1}{x+3}\right) = (x+3)^2\left(\frac{1}{x+3}\right) = \left(\frac{(x+3)^2}{x+3}\right) = (x+3)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x \to -3} (x^2+6x+9)\cdot\left(\frac{1}{x+3}\right) = \lim_{x \to -3} (x+3) = -3+3 = 0$$

## Actividad resuelta

- El límite siguiente también es indeterminado (es decir, todavía no lo hemos determinado).

$\lim_{x \to 2}(x-2)\cdot\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right) \rightarrow$ Indeterminado

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 - x - 2$, obtenemos que son $x = -1$ y $x = 2$, por lo que los factores del polinomio son: $x^2 - x - 2 = (x + 1)\cdot(x - 2)$ y, sustituyéndolo en el límite, nos queda:

$$(x-2)\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right) = (x-2)\cdot\left(\frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}\right) = \left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x \to 2}(x-2)\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right) = \lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

## Actividades propuestas

**10.** Calcula el límite: $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

**11.** Calcula el límite: $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)$


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia

Textos Marea Verde

## *Indeterminación* 0/0

Este tipo de indeterminaciones se producen porque existen algunos factores en el numerador y denominador que lo hacen cero y que será conveniente eliminar por algún método matemático. Para ello, debemos factorizar polinomios, multiplicar y dividir por el conjugado o cualquier otro procedimiento que nos permita eliminar la indeterminación.

### Actividad resuelta

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado, por lo que calculamos los factores de los polinomios del numerador y denominador, y simplificando lo posible, obtenemos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$$

### Actividad resuelta

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado. Uno de los sumandos es una raíz, por lo que para quitar la indeterminación vamos a probar multiplicando por el conjugado:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{5+x}-2)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{5+x})^2-2^2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{5+x-4}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(\sqrt{5+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

### Actividades propuestas

**12.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)$

**13.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$

**14.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$

**15.** Calcula el límite: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$


BY NC SA
Textos Marea Verde

## *Indeterminación ∞/∞*

Aunque pueden presentarse muchos casos, el más frecuente es el de cocientes de polinomios cuando la variable independiente tiende a ∞.

Así tendremos que

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty$$

Luego $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una indeterminación del tipo ∞/∞.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario comparar el grado del polinomio del numerador con el grado del polinomio del denominador, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Si grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Si grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = K$

Si grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Para resolver este tipo de límites observamos que cuando la variable se hace muy grande el límite vendrá dado por los términos de mayor grado. Nos quedamos con ellos, y simplificamos.

## Actividades resueltas

- **grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2+2x-4}{x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 8 = 8$$

Observa lo que ocurre si damos valores:

| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 | | −1 | −10 | −100 | −1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 7.77 | 8.01559 | 8.00195599 | | 0.3333 | 7.3904 | 7.9756 | 7.99756 |

Se aproxima, a 8 tanto a la derecha como a la izquierda.

- **grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x-3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{1} = \infty$$


BY NC SA
Textos Marea Verde

- **grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7}{4x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x}=0.$$

**En el caso de límites infinitos de cociente de polinomios podemos simplificar los cálculos pues hemos visto que:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\infty & si \quad n>m\\ \frac{a_n}{b_m} & si \quad n=m\\ 0 & si \quad n<m\end{cases}$$

## Actividades propuestas

**16.** Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

**a)** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

**17.** Calcula los límites siguientes:

**a)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

**18.** Calcula los límites siguientes:

**a)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$

b) $\lim_{x\to\infty}(senx)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2}\right)$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)$

d) $\lim_{x\to0^+}(\ln(x))$

### *Indeterminación* $1^\infty$


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia
Textos Marea Verde

Para poder resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario conocer el número $e$, que se define como: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718282$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ entonces $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \approx 2.718282$

Las soluciones de este tipo de indeterminaciones pasan, irremediablemente, por llegar a una expresión del tipo de la definición del número $e$. Observamos que es el límite de una potencia en la que la base tiende a 1, y el exponente tiende a infinito. Así, cuando al calcular un límite estemos en esa situación decimos que es un **límite tipo $e$**. Veamos algunos ejemplos.

## Actividad resuelta

- *En el límite siguiente:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}$$

La base tiende a 1, y el exponente a ∞ luego es un límite tipo $e$. Para resolverlo, primero completamos el primer 1 de la definición, y luego el segundo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2+2+1}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1}$$

Luego hacemos el exponente igual al denominador para lo que multiplicamos y dividimos el exponente por el denominador del sumando de la base. Así, tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}}$$

El límite de la base es $e$ y el límite del nuevo exponente en este caso es 3, por lo que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\lim_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}} = e^3$$

Este tipo de indeterminaciones, también se pueden resolver mediante la expresión:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

## *Indeterminación* $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$.

Este tipo de indeterminaciones exponenciales se resuelven mediante la aplicación de logaritmos neperianos (*ln*). Suponemos que el límite de estas indeterminaciones es:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^L$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln\left(\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = \ln(e^L)$$

Y por propiedades de los límites y de los logaritmos se tiene:

$$\lim_{x\to a}\left(\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \lim_{x\to a}(\ln(f(x)) = \ln(e^L) = L\cdot\ln(e) = L$$

Por tanto:

$$L = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \lim_{x\to a}(\ln(f(x)) \text{ y } \lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^L$$

## Actividades propuestas

**19.** Determina los límites siguientes:

**a)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

**20.** Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

**a)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

## 2. ASÍNTOTAS

Las asíntotas de una función (caso de existir) son rectas del plano a las que la función se aproxima tanto como queramos.

Puesto que las asíntotas son rectas del plano, pueden ser **horizontales**, **verticales** y **oblicuas**.

### 2.1. Asíntotas verticales

Para que una recta vertical pueda ser asíntota de una función, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$

Entonces decimos que $x = a$ es una asíntota de $y = f(x)$. La recta $x = a$ es vertical.

Las posibles asíntotas verticales de una función estarán en los puntos de la función que no pertenezcan a su dominio y se debe verificar que el límite de la función, cuando el valor de $x$ tiende a ese punto, se hace muy grande en valor absoluto, es decir, tome el valor $\pm\infty$.

#### Actividades resueltas

- *Asíntotas verticales de la función:* $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x+5)}$.

La función $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x+5)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, pues para $x = 1$ la función no está definida, no pertenece a su dominio de definición, y el límite a la derecha y la izquierda, tiende a infinito.

También tiene una asíntota vertical en $x = -5$, pues para $x = -5$ la función no está definida, no pertenece a su dominio de definición, y el límite tiende a infinito.

Por tanto, las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x+5)}$ son las rectas verticales: $x = 1$ y $x = -5$.

#### Actividades propuestas

**21.** Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

**a)** $f(x) = \dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$

b) $f(x) = \dfrac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$

d) $f(x) = \dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia
Textos Marea Verde

## 2.2. Comportamiento en el infinito

### Asíntotas horizontales

Para que una recta horizontal sea asíntota de una función se debe cumplir la siguiente condición:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=K \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x)=K$$

Entonces decimos que $y = K$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$.

### Actividades resueltas

- *La función:* $f(x)=\frac{1}{x}$ *tiene una asíntota horizontal,* $y = 0$ *y una asíntota vertical* $x = 0$.

Ya lo hemos visto en actividades anteriores.

- *Determina la asíntota horizontal de la función:* $f(x)=\frac{(x+4)}{(x-1)}$.

Al analizar el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a infinito, tanto a $+\infty$, como a $-\infty$, se observa que la función se acerca a 1, luego tiene una asíntota horizontal, $y = 1$.

### Asíntotas oblicuas

Para que una recta oblicua ($y = mx + n$) pueda ser asíntota de una función, deben existir, y ser finitos, los límites siguientes:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ y } n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx).$$

### Actividades resueltas

- *Determina la asíntota oblicua, si existe, de la función:* $f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$.

Calculamos el límite $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)}=1$. Por tanto, existe una asíntota oblicua de pendiente $m = 1$.

Calculamos la ordenada en el origen con el límite:

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+4)\cdot(x-2)-x\cdot(x-1)}{(x-1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x-2x-2)-(x^2-x)}{(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)=3$$

Por tanto, la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua de la función.


Textos Marea Verde

## Ramas parabólicas

Pero en muchas ocasiones no hay ni asíntotas horizontales ni asíntotas oblicuas. Ya conoces bien, por ejemplos, la parábola $y = x^2$, que cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$ la función crece sin aproximarse a ninguna recta. Por simplificación, se dice en todos estos casos que hay una rama parabólica.

## Actividades resueltas

- *Las funciones:* $f(x)=x^3$, $f(x)=(-x)^3$, $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, *tienen ramas parabólicas en su comportamiento en el infinito.*

Observa que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, luego $f(x)=x^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-x)^3=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^3=+\infty$, luego $f(x)=(-x)^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$, luego $f(x)=x^4$ tiene una rama parabólica.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^4=-\infty$, luego $f(x)=-x^4$ tiene una rama parabólica.

## Actividades propuestas

**22.** Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

**a)** $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

**c)** $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$ **d)** $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

**23.** Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

**a)** $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

**c)** $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2(x-1)}$ **d)** $f(x)=\dfrac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

**24.** Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

**a)** $f(x)=(x+4)^2$ **b)** $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ **c)** $f(x)=x^3+4$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x^5+4}{x+1}$


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia

Textos Marea Verde

## 3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

**CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN. Paso a Paso. Continuidad en un Punto. En el vídeo se expone la definición de CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN mediante problemas resueltos. Además, se muestran ejemplos y ejercicios resueltos sobre continuidad de una función. Jorge Cogollo.**

https://www.youtube.com/watch?v=Yb-lUhwxRKA

Intuitivamente, podemos decir que una función es continua en un punto si somos capaces de pintarla, cerca de ese punto, sin levantar el lápiz del papel, o si somos capaces de recorrerla con el dedo sin encontrarnos ningún obstáculo (saltos, indefiniciones, etc.). Pero la continuidad de una función se puede estudiar en un punto, en un intervalo o en todo su dominio de forma más precisa.

### 3.1. Continuidad de una función

En lenguaje matemático, la anterior definición simple, se complica bastante y se expresa así:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, $X$ un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a \in X$, se dice que la función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$, si:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - a| < \delta$, $x \in X$ se cumple que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esto lo podemos enunciar diciendo que, si nos acercamos al punto $a$, entonces las imágenes de la función se aproximarán a la imagen de $a$.

Si esto no ocurre, entonces, la función **no** será continua en $x = a$ y diremos que la función tiene una discontinuidad en $x = a$.

Compara la definición de continuidad con la de límite, y observa que ahora el punto $a$ debe pertenecer al intervalo $X$, mientras que en la de límite podía no ocurrir. Esta relación puede expresarse de la siguiente forma:

Una función $f(x)$ es **continua en el punto** $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

#### Continuidad de una función en un intervalo abierto

Para que una función sea continua en un intervalo abierto, la función debe ser continua en todos los puntos del intervalo.

Si lo fuera en todo el dominio, decimos que la función es continua.

## Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<2 \\ 3x+2 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

Las funciones polinómicas son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es $x = 2$.

**Estudio de la continuidad de la función en el punto $x = 2$:**

Comprobemos, como primera medida, que la función está definida en $x = 2$.

Para $x = 2$, tenemos que determinar $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$, luego existe.

Calculamos, entonces los límites laterales de la función para $x = 2$.

Limite por la izquierda: $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$

Limite por la derecha: $\lim_{x\to 2}(3x+2) = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

Los límites laterales, existen, son finitos y coinciden.

Veamos si coincide, el límite de la función con el valor de la función en $x = 2$.

$$f(2) = 8 = \lim_{x\to 2} f(x)$$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x = 2$.

Como ese era el único punto dudoso, se puede afirmar que la función es continua en toda la recta real.

## 3.2. Propiedades de las funciones continuas

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son siempre continuas en su dominio.

Por lo tanto, presentarán discontinuidades en aquellos puntos en los que no esté definida y, por lo tanto, no pertenezcan a su dominio.

## Operaciones de funciones continuas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, entonces podemos afirmar que:

$f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$.

$f(g(x))$ es continua en $x = a$, si $f$ es continua en $g(a)$.

## Actividades resueltas

- *Las funciones polinómicas son funciones continuas en todo* $\Re$.

Basta comprobar que la función $f(x) = x$, la función $f(x) = a$ son funciones continuas para comprobar que cualquier función polinómica es suma y producto de estas funciones.

- *Las funciones racionales son continuas en todo* $\Re$ *salvo para los valores que anulan al denominador. Estudia la continuidad de* $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$.

En efecto, las funciones racionales son cociente de funciones polinómicas, que son continuas en toda la recta real.

La función $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ es continua en $\Re - \{2, -2\}$, pues el denominador se anula en dichos valores.

## 3.3. Tipos de discontinuidad

Existen varios tipos de discontinuidades de las funciones, que se expresan en el cuadro siguiente:

<table>
<tr><td>EVITABLES<br><br>(Existen los límites laterales y son finitos e iguales)</td><td colspan="2">No existe imagen $f(a)$ en el punto</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">La imagen $f(a)$ existe, pero no coincide con los límites laterales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INEVITABLES<br><br>Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.</td><td rowspan="2">De primera especie</td><td>De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)</td></tr>
<tr><td>De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)</td></tr>
<tr><td>De segunda especie</td><td>No existe alguno de los límites laterales.</td></tr>
</table>

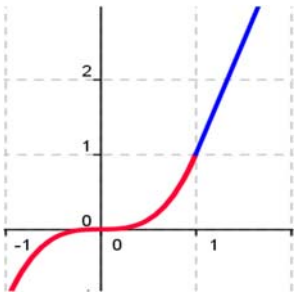
Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$
- existen, pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

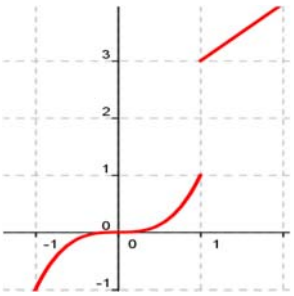
Discontinuidad evitable

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$$



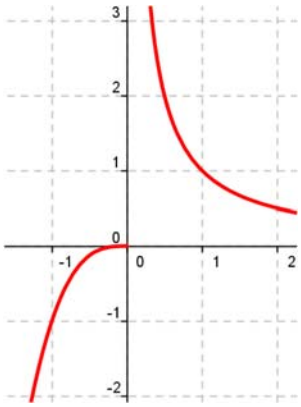
Discontinuidad de primera especie salto finito

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ x+2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$



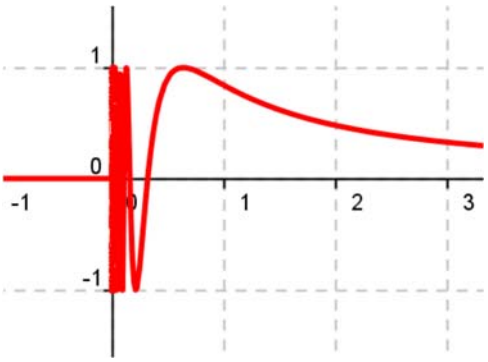
Discontinuidad de primera especie salto infinito

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$



Discontinuidad de segunda especie

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\leq 0 \\ sen\dfrac{1}{x} & si\ x>0 \end{cases}$$



## Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de los ejemplos anteriores.*

Observa que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$ no está definida en $x$ = 1. Bastaría definir $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \leq 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$ para que la función fuese continua. Por tanto, la función tiene una discontinuidad evitable en $x$ = 1, siendo la función continua en $\Re - \{1\}$.

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$ tiene ambos límites laterales en $x$ = 1 y son finitos, pero distintos, por lo que tiene una discontinuidad de primera especie en $x$ = 1 de salto finito, con salto 2. Es una función continua en $\Re - \{1\}$.

La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene el límite a la derecha de 0, infinito, por lo que tiene en $x$ = 0 una discontinuidad de primera especie de salto infinito. La función es continua en $\Re - \{0\}$.

La función $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ sen\frac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$ no tiene límite a la derecha de 0. La función seno tiene fluctuaciones cada vez más juntas por lo que dicho límite no existe. Es una discontinuidad de segunda especie. La función es continua en $\Re - \{0\}$.

## Actividades propuestas

**25.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

c) $f(x) = log_2(x - 3)$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & si\ x \leq 0 \\ 1 + e^x & si\ x > 0 \end{cases}$

**26.** Determina el valor de $k$ para que la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si\ x \leq 1 \\ k + x & si\ x > 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

**27.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & si \quad x < -1 \\ 2 + x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt{x - 2}$

c) $f(x) = |x - 3| - 1$

## CURIOSIDADES. REVISTA

# Reflexiones sobre el infinito

*"El infinito, como ningún otro problema, siempre ha conmovido profundamente el alma de los seres humanos. El infinito como ninguna otra idea, ha tenido una influencia estimulante y fértil en la mente. Pero el infinito necesita, más que ningún otro concepto, clarificarse"*

*David Hilbert*

*Davis Hilbert*

## El hotel infinito

*Para el dueño de un hotel es un disgusto tener que decir a un cliente que no le quedan habitaciones. Pero, ¿qué ocurriría si el hotel tuviera infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4, …? Imagina que el hotel está completo y llega un nuevo cliente, ¿cómo lo alojarías?*

*¿Y si llegaran 100 clientes más? ¿Y si mil? ¿Y si llegaran tantos como hay?*

## La tabla de *Caratheodory*

*Tenemos la siguiente tabla infinita:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | … |
| −1/2 | 0 | 1/2 | 1/4 | 1/8 | … |
| −1/4 | −1/2 | 0 | 1/2 | 1/4 | … |
| −1/8 | −1/4 | −1/2 | 0 | 1/2 | … |
| −1/16 | −1/8 | −1/4 | −1/2 | 0 | |
| … | …. | … | … | … | … |

La suma 1/2 +1/4 + 1/8 + 1/16 + … = 1

- Suma la tabla primero por filas.
- Ahora suma la tabla por columnas
- Por último suma por diagonales. ¿Te sorprende el resultado?

## Un juego

*Un poco aburridos dos amigos, Daniel y Jorge, deciden jugar a un juego que consiste en que Daniel escriba números y Jorge los borre. El procedimiento propuesto por Daniel es:*

- ✓ A las cinco menos un minuto yo escribo los números 1 y 2, y tú borras el 1.
- ✓ A las cinco menos medio minuto yo escribo 3 y 4, y tú borras el 2.
- ✓ A las cinco menos un tercio de de minuto yo escribo 5 y 6 y tú borras el 3

  Y así sucesivamente. Juegan con la imaginación.
- ✓ Daniel pregunta a Jorge: A las cinco menos una centésima de minuto, ¿cuántos números te quedarán por borrar?
- ✓ ¿Y a las cinco menos una millonésima de minuto?
- ✓ ¿Hay algún número que no puedas borrar antes de las cinco?


Textos Marea Verde

## Breve historia del concepto de límite de una función

El concepto de límite es clave para dar rigor al Análisis Matemático. No sólo lo necesitamos para conocer el comportamiento de las funciones en el infinito, asíntotas y ramas asintóticas, y estudiar su continuidad, sino que es fundamental para el estudio del cálculo infinitesimal, de las derivadas y las integrales.

*D'Alembert* (1767) estudia a *Newton* y en la *Enciclopedia* en el artículo sobre "*Límite*" escribe: "*Una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada*".

***Jean le Rond D'Alembert***

***Augustin Louis Cauchy***

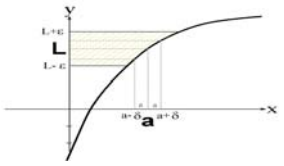
*Cauchy* (1829) en su Curso de Análisis, formula: "*Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.*"

*Heine* (1872), en sus "Elementos", siguiendo las lecciones de *Weierstrass*, escribe: "*Si, dado cualquier* $\varepsilon$, *existe un* $\delta > 0$, *la diferencia* $f(x_0 \pm \delta) - L$ *es menor en valor absoluto que* $\varepsilon$, *entonces se dice que* $L$ *es el límite de* $f(x)$ *para* $x = x_0$."

***Heinrich Heine***

Observa cómo se fue perfilando la definición y surgió el $\varepsilon$ y el $\delta$ para formalizar las ideas de *aproximarse hasta diferir menos que*, *aproximarse tanto como se quiera*, *diferir tan poco como queramos…*

# RESUMEN

| | | |
|---|---|---|
| **Definición de límite** | $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $\lvert x - a \rvert < \delta$, se cumple $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$. |  |
| **Límite lateral a la derecha** | $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$, siempre que se cumpla la condición $x > a$ | La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene de límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x\to 2}(3x + 2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$ |
| **Límite lateral a la izquierda** | $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $a$, siempre que se cumpla la condición $x < a$ | |
| **Existencia de límite** | $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ | La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$ |
| **Asíntotas** | Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$. | $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$ |
| **Propiedades de los límites** | $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ $\lim_{x\to a}(K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x\to a} f(x)$ $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si $g(a) \neq 0$. | |
| **Continuidad de una función en un punto** | Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $\lvert x - a \rvert < \delta$, se cumple que $\lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$. | La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$ |
| **Propiedades de las funciones continuas** | La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anula el denominador. | Los polinomios son funciones continuas en $\Re$ $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\Re - \{0\}$ |
| **Tipos de discontinuidad** | Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie | $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x > 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = \frac{1}{x}$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$ |


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### Límites

**1.** Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{-x-2}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g) $\lim_{x\to -4} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

**2.** Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$

b) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4}-\frac{x-3}{x+2}\right)$

f) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

g) $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)$

h) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)$

**3.** Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g) $f(x)=\ln\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-5x}{(x-1)^2}}$

## Continuidad

**4.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases}3^x & x<-2\\ 4-x^2 & -2\le x\le 1\\ \log_2 x & x>1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ x^2-3x & 0\le x<3\\ \sqrt{x-3} & x\ge 3\end{cases}$ c) $h(x)=\left|x^2-5x\right|$

**5.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\left|x^2-25\right|$ b) $g(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

**6.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-4x+3}$ b) $g(x)=\dfrac{7x+2}{x^2+x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$


Autor: Luis Ángel Morales García
Revisores: Raquel Hernández y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Elaboración propia
Textos Marea Verde

**7.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

**8.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x)=\ln\left(-x^2-x+2\right)$ c) $h(x)=\ln\left(\dfrac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

**9.** Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

d) $f(x)=e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ $g(x)=e^{\sqrt{x-5}}$ $h(x)=2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

**10.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x<0\\ 2+e^x & x\geq 0\end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

**11.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x<2\\ k+x & x\geq 2\end{cases}$

a) Determina el valor de $k$ para que la función sea continua en toda la recta real
b) Representa su gráfica

**12.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}x-3 & \cdots x<-1\\ x^2-5 & -1\leq x<1\\ \dfrac{2}{x} & x\geq 1\end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

**13.** Dada la función $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & x<2\\ x^2-4 & x\geq 2\end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

**14.** Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

**15.** Utiliza GeoGebra para dibujar, de nuevo, la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2-25}$. Estudia su simetría.

## AUTOEVALUACIÓN

**1.** El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) 1 d) 2/3

**2.** El límite $\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)\cdot\left(\frac{1}{x+2}\right)$ es igual a es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) 1 d) $-1$

**3.** El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) $-2/3$ d) $-1$

**4.** El límite $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ es igual a:

a) 1/2 b) 0 c) $-\infty$ d) $-1$

**5.** El límite $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) 5 d) 1

**6.** El límite $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) 5 d) 1

**7.** El límite $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ es igual a:

a) $\infty$ b) 0 c) 3 d) 1

**8.** Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-3}{x} & si\ x<0\\ 3x+2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en $x = 0$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

**9.** Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$ en $x = 2$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

**10.** Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x>2\end{cases}$ en $x = 2$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito