Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato

Capítulo 1: Números reales

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya

Revisora: Margot Masina

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

En este primer capítulo de Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I vamos a hacer un repaso de los Números Reales haciendo mención a los números naturales, enteros, racionales, así como a los irracionales.

Vamos a estudiar las potencias de exponente natural. Ampliaremos el dominio de definición estudiando las de exponente entero (ahora no tiene sentido decir que multiplicamos algo por sí mismo –3 veces) con sus propiedades. Repasaremos como operar con las potencias aplicando sus propiedades.

Estudiaremos las potencias de exponente racional, que son los radicales, sus propiedades, así como las operaciones que podemos realizar con ellos. Nos detendremos en la racionalización, que es una operación muy utilizada en Matemáticas necesaria para operar con radicales.

Estudiaremos la notación científica, las propiedades para poder operar con este tipo de notación y las ventajas de operar con ella.

Por último, estudiaremos los logaritmos y sus propiedades, que facilitan las operaciones pues transforman, por ejemplo, los productos en sumas. Cuando no había calculadoras ni ordenadores y querían multiplicar números de más de diez cifras, ¿cómo hacían?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. NÚMEROS REALES

1.1. Números racionales y números irracionales

Recuerda que:

Ya conoces los distintos tipos de conjuntos numéricos:

Naturales ➔ $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, …}

Enteros ➔ $\mathbb{Z}$ = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Racionales ➔ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$.

Los números racionales también contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0.12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7.01252525…). Si el denominador (de la fracción irreducible) únicamente tiene como factores primos potencias de 2 o 5 la expresión decimal es exacta. Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea ni 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica; y toda expresión decimal exacta o periódica se puede escribir en forma de fracción.

Pero ya sabes que existen números que no son racionales. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ **no** puede escribirse en forma de fracción. Todos estos números como por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π … junto con los números racionales forman el conjunto de los **números reales**. A los números reales que no son números racionales se les llama **números irracionales**.

La expresión decimal de los **números irracionales** es de infinitas cifras no periódicas.

Por tanto

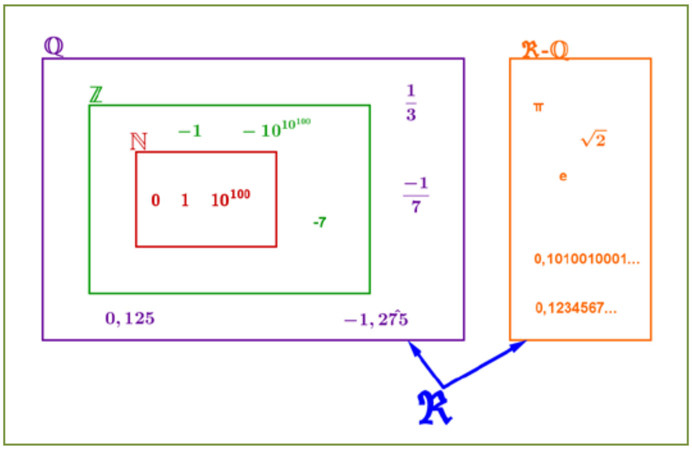
Irracionales ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

El conjunto de los **números reales** está formado por la unión de los números racionales y de los números irracionales.

Reales ➔ $\Re = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$.

Tenemos por tanto que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \Re$.

$\mathrm{I} \subset \Re$



Actividades propuestas

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica:

a) 1/9 b) 7/5 c) 9/50 d) 2/25 e) 1/8 f) 3/22

2. Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

a) 1/5 b) 1/3 c) 5/9 d) 2/25 e) 11/400 1/11

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, después comprueba con la calculadora si está bien:

a) 8.35; b) 791.297835; c) 0.47

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

a) 9.464646….. b) 91.02545454…. c) 0.9999….. d) 3.267123123123…..

6. ¿Puedes demostrar que 2.99999… es igual a 3? ¿Calcula cuánto vale 1.5999…? *Ayuda*: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.

7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

8. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

9. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar una razón?

10. Haz la división 999999:7 y después haz 1:7, ¿es casualidad?

11. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

1.2. La recta real

Densidad de los números reales

Los números reales son **densos**, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.

Esto es fácil de deducir, si a, b son dos números con $a < b$ sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, es decir, la media está entre los dos números. Como ese proceso lo podemos hacer todas las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los números racionales son también densos, así como los irracionales.

Actividades propuestas

12. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

13. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1.5.

14. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Representación en la recta real de los números reales

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

El curso pasado estudiaste cómo representar en la recta real fracciones y raíces.

Actividades propuestas

15. Representa en la recta numérica los siguientes números:

a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1.342, d) –2.555555….

16. Representa en la recta numérica:

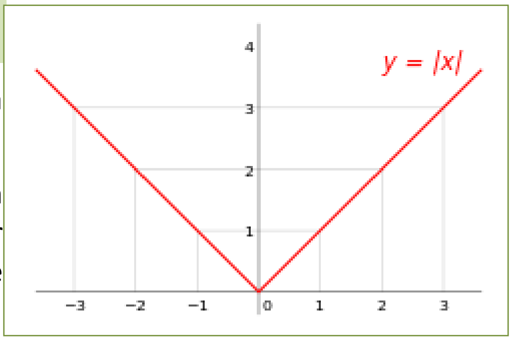
a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.3. Valor absoluto. Distancia en la recta real

El valor absoluto o módulo de un número es igual al valor de ese número ignorando el signo. Por ejemplo, el valor absoluto de –1 es 1, y el valor absoluto de +1, también es 1.

En lenguaje formal, el valor absoluto se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representamos esta función en un eje de coordenadas, resulta una gráfica como la del margen.

Como el valor absoluto es una función muy importante en matemáticas, tiene su propio símbolo. Para escribir el valor absoluto de un número x, basta con encerrar el número entre dos barras verticales: $|x|$.

El valor absoluto de un número x se consigue suprimiendo el signo, y se anota mediante el símbolo $|x|$.

Ejemplo:

- El valor absoluto de –32 es 32, igual que el valor absoluto de +32. Escrito en lenguaje formal sería:

$$|-32| = 32 = |+32|.$$

Actividades propuestas

17. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

a) 5 b) –5 c) –π

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

¿Para qué sirve?

El valor absoluto se utiliza principalmente para definir cantidades y distancias en el mundo real. Los números negativos son una construcción matemática que se utiliza en el cálculo, pero en la realidad no existen cantidades negativas. No podemos viajar una distancia de –100 kilómetros, o comer –3 caramelos. Esto se debe a que el tiempo solo discurre en una dirección (positiva por convención), pero eso no entra en el ámbito de las Matemáticas, sino en el de la Física.

El valor absoluto se usa para expresar cantidades o longitudes válidas en el mundo real, como la distancia.

Ejemplo:

- Hago un viaje de ida y vuelta hasta una ciudad que se encuentra a 40 km de mi casa. Después de hacer el viaje, estoy en el mismo punto, así que mi posición no habrá cambiado, esto es:

Posición = 40 km – 40 km = 0

Esto no quiere decir que no haya recorrido una distancia. Hay dos cantidades a tener en cuenta, una distancia de ida y otra de vuelta, en total será:

L = |40| km + |–40| km = 80 km

Las propiedades del valor absoluto son:

- No negatividad: $|a| \geq 0$.
- Simetría: $|a| = |-a|$
- Definición positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absoluto y producto: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualdad triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Actividades resueltas

- *Demuestra que el valor absoluto nunca puede ser negativo.*

1 – No negatividad

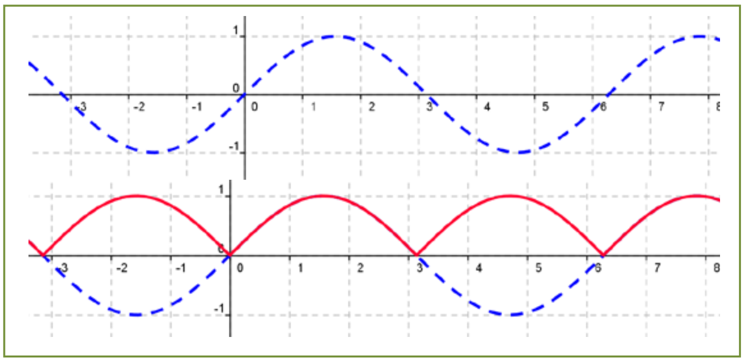
Por definición, la función valor absoluto solo cambia el signo cuando el operando es negativo, así que no puede existir un valor absoluto negativo.

- *Demuestra que el valor absoluto de un número y su negativo coinciden.*

2 - Simetría.
Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$
Si $a < 0 \Rightarrow |-a| = -(-a) = a$
Entonces $a = |a| = |-a|$

- *Representa la función $f(x) = |sen(x)|$*

Con trazos de puntos está dibujada la función seno. Debajo, en rojo, aparece $f(x) = |sen(x)|$ que es igual en su parte positiva y hace positiva su parte negativa.



Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

18. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2|$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c)) $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$

Distancia en la recta real

Una **distancia** es una medida que tiene unas determinadas propiedades:

1) No negatividad.

2) Simetría.

3) Propiedad triangular.

La distancia entre dos números reales x e y se define como:

$$\mathbf{Dist}(x, y) = |x - y|$$

Verifica las propiedades antes indicadas pues:

1) Al estar definida con el valor absoluto es siempre un número no negativo. La distancia entre dos puntos tiene valor cero, únicamente si los dos puntos son coincidentes:

$$0 = \text{Dist}(x, y) = |x - y| \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

2) Simetría: $\text{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \text{Dist}(y, x)$.
3) Propiedad triangular: $\text{Dist}(x, y) \leq \text{Dist}(x, z) + \text{Dist}(z, y)$.

Ejemplo:

- $\text{Dist}(3, 8) = |8 - 3| = 5$
- $\text{Dist}(-2, -9) = |-9 - (-2)| = |-9 + 2)| = |-7| = 7$
- $\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6$
- $\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14$

Ejemplo:

- *Si estamos en el sótano* 9º *y subimos al piso* 5º*, ¿cuántos pisos hemos subido?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hemos subido en total 14 pisos.

$$\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.$$

- *Si el termómetro marca* –1 °C *y luego marca* 5 °C*, ¿cuántos grados ha subido la temperatura?*

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la temperatura ha subido 6 ºC. Fíjate que la escala termométrica que hemos usado es la Celsius, hay otras, pero esto lo estudiarás en Física.

$$\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

19. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

a) Dist(5, 9) b) Dist(–2.3, –4.5)

c) Dist(–1/5, 9/5) d) Dist(–3.272727…. , 6.27272727….).

1.4. Intervalos y entornos

Recuerda que:

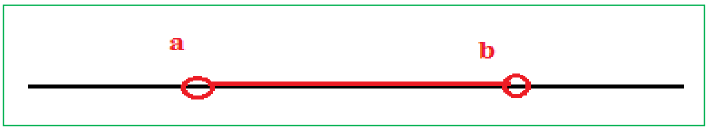
Un intervalo de números reales es un conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras, $\mathrm{I} = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

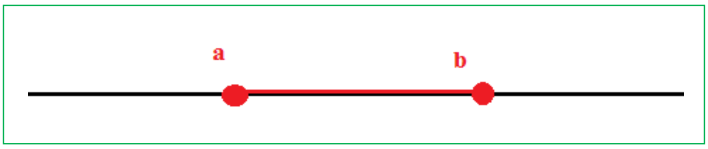
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras, $\mathrm{I} = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:



Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de estos, forman parte del intervalo.

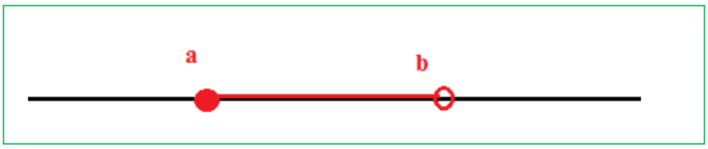
Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior sí, en otras palabras,

$$\mathrm{I} = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\},$$

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior sí, en otras palabras, $\mathrm{I} = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



Semirrectas reales

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Semirrecta de los números positivos S+ = $(0, \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos S- = $(-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re = (-\infty, \infty) = (S+) \cup (S-) \cup \{0\}$.

Entornos

Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos.

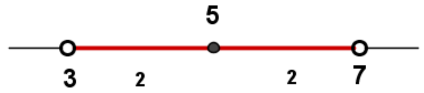
Se define el entorno de centro a y radio r y se denota $\boldsymbol{E(a, r)}$ (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$$



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

$$\boldsymbol{E(a, r) = (a - r, a + r)}$$

Ejemplo:

- $E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- *Si tengo el intervalo abierto* (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6.5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 – 3) : 2 = 3.5 es el radio (la mitad del ancho). Por tanto (3, 10) = $E(6.5, 3.5)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En general:

El intervalo (b, c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- *El intervalo* (–8, 1) = $E\left(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3.5,\ 4.5)$

También existen los entornos cerrados, pero son de uso menos frecuente.

Actividades propuestas

20. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) (–∞, 6)

21. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

22. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Un porcentaje superior al 26 %.

b) Edad inferior o igual a 18 años.

c) Números cuyo cubo sea superior a 8.

d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.

e) Temperatura inferior a 25 °C.

f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

23. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) $E(1, 5)$

b) $E(-2, \frac{8}{3})$

c) $E(-10, 0.001)$

24. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7)

b) (–7, –4)

c) (–3, 2)

25. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € se pueden poner como intervalo de números reales? ****Pista***: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Aproximación de un número decimal. Estimación, redondeo y errores

Recuerda que:

En la vida cotidiana y también en las ciencias aplicadas es necesario trabajar con números aproximados.

Unos ejemplos:

- *Queremos comprar un tercio de metro de cinta, tenemos que decirle al dependiente cuanto queremos y no vamos a ser tan idiotas como para decirle que nos dé 0.333… metros o 33.333… cm que es lo exacto. Lo normal es pedir 33 cm o 34 cm.*
- *Medimos un folio A4 con la regla y nos da 29.7 cm, la regla llega a los mm. Queremos dividirlo en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte? Si hacemos 29.7 : 8 nos da 3.7125 cm, pero la regla no llega a tanto, será mejor aproximar a 3.7 cm.*
- *Hacemos un examen con 9 preguntas que valen todas igual. Tenemos 5 bien y las demás en blanco. ¿Qué nota tenemos?, 10 · 5 / 9 = 5.555555556 según la calculadora, ¿las ponemos todas?, si lo hacemos estamos suponiendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10000 millones de partes iguales del examen. Lo razonable es 5.6 o 5.56 si somos muy pero que muy precisos.*
- *Resulta curioso y debería ser delito que en las gasolineras se anuncie: Precio del gasoil 1.399 €/litro. Si alguien va y pide un litro exacto, o 2 o 15 no se lo pueden cobrar exactamente puesto que ¡no existen las milésimas de €!, deberían escribir 1.40 €/litro. Es cierto que de esa manera te ahorras 5 céntimos si echas 50 litros, pero a ellos les compensa el tema psicológico, la gente poco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.*
- *Exactamente lo mismo pasa en los supermercados: merluza 7.99 €/Kg. Son trucos baratos que una mente entrenada sabe detectar y actuar en consecuencia. La diferencia entre 8 €/Kg y 7.99 €/Kg es que te ahorras ¡1 céntimo! si compras 1 Kg, si compras medio, ¿cuánto te ahorras?, ¡nada!, pues 7.99 : 2 = 3.995 que redondeado es 4, que es lo que cobran. Aunque bien mirada la oferta no está tan mal pues si compras 5 Kg de merluza ahorras para comprarte un caramelo, eso sí, tienes que comprar más de medio Kg por vez.*

Redondeo

Te recordamos como se redondean correctamente los números.

- *Redondear π a las diezmilésimas: π = 3.1415926535…, la cifra de las diezmilésimas es 5, como la cifra siguiente es 9 que es $\geq$ 5, le sumamos 1 al 5 y pondremos $\pi \approx 3.1416$.*

  Fíjate que π está más cerca de 3.1416 que de 3.1415.

- *Redondear $\sqrt{2}$ a las centésimas: $\sqrt{2}$ =1.41421356…, ahora la cifra de las centésimas es 1 y la siguiente es 4 < 5 luego la dejamos tal cual, $\sqrt{2} \approx 1.41$.*

La regla es: Localizamos la cifra de redondeo, miramos la siguiente cifra (sólo la siguiente), si ésta es menor que 5 la cifra de redondeo se queda igual, si la cifra siguiente es 5 o mayor que 5 incrementamos en 1 la cifra de redondeo.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Más ejemplos:

- *Redondea*

5.995 a las centésimas ➔ 6.00 y los ceros hay que escribirlos para indicar hasta dónde hemos redondeado.

7 555 555 en los miles ➔ 7 556 000 donde hay que completar con ceros después de los miles.

8.94999 en las décimas ➔ 8.9 sólo hay que mirar el 4.

Nota importante: Si el resultado de un problema son **€ se redondeará siempre en los céntimos.**

Otra nota importante: Si queremos dar un resultado con 2 decimales en los pasos intermedios trabajaremos con más decimales, al menos 3 o 4, de lo contrario el resultado no tendrá la precisión que pretendemos, un ejemplo:

- *A = 9.65; B = 6.98 y C = 4.99. Queremos hacer (A · B) · C^2, si hacemos A · B y redondeamos en las centésimas nos queda 67.36 y si ahora multiplicamos por 4.99^2 = 24.90 nos sale 1 677.26. El resultado correcto es 1 677.20 donde sólo hemos redondeado al final.*

Cifras significativas

Es el número de cifras "*con valor*" que se utilizan para expresar un número aproximado.

Unos cuantos ***ejemplos*** y lo entiendes:

- *7.42 tiene 3 cifras significativas;* *89.053 tiene 5 cifras significativas.*
- *65.00 tiene 3;* *7 000.03 tiene 6;*
- *30 000 no sabemos las cifras significativas que tiene, puede ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, nos tienen que decir en qué cifra se ha aproximado. Para este último caso puede recurrirse a la notación científica para decir con precisión el número de cifras significativas, así:*

  $3 \cdot 10^4$ tiene una cifra significativa, $3.0 \cdot 10^4$ tiene 2 y así hasta $3.0000 \cdot 10^4$ que tiene 5.

Consideraciones:

- Las cifras **distintas** de 0 siempre son significativas.
- Los ceros a la izquierda nunca son cifras significativas: 0.0002 tiene 1 cifra significativa.
- Los ceros en medio de otras cifras distintas de 0 siempre son significativos 2 004 tiene 4 cifras significativas.

Más que el número de decimales la precisión de una aproximación se mide por el número de cifras significativas.

No deben utilizarse más cifras de las que requiera la situación.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/9				
3.7182				
42.27				

Error Absoluto

Se define el Error Absoluto (EA) como $EA = \left|valor\ real - valor\ aproximado\right|$.

Ejemplo:

- Si aproximamos $\pi \approx 3.1416$ tendremos que el $EA = |\pi - 3.1416| = |-0.0000073| \approx 0.0000073$ unas 7 millonésimas. Observa que si no se conoce el valor real, no podemos calcular exactamente el error absoluto, pero si aproximarlo calculando una cota del error.

Cota del Error Absoluto

Podemos conocer una cota del error absoluto teniendo en cuenta el orden de aproximación, así, si hemos redondeado en las diezmilésimas (como en el ejemplo) siempre podemos afirmar que el EA es menor o igual a 0.00005, es decir, menor o igual que media unidad del valor de la cifra de redondeo o 5 unidades de la siguiente (5 cienmilésimas), que es lo mismo.

Actividades resueltas

- *Calcula la cota del error absoluto de N* $\approx 3.7 \rightarrow EA \leq 0.05$.
- *Calcula la cota de error de N* ≈ 300 es $EA \leq 50$ si suponemos que hemos redondeado en las centenas.

Error Relativo

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el Error Relativo (ER) como:

$$ER = \frac{EA}{\left|Valor\ real\right|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.

Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

Actividades resueltas

- Si aproximamos raíz de 3 por 1.73, el error relativo cometido es:

$$\sqrt{3} \approx 1.73 \rightarrow EA \approx 0.0021 \rightarrow ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx \frac{0.0021}{1.73} = 0.00121387 \rightarrow 0.12\ \%$$

- En las aproximaciones A = 7.4 con $EA \leq 0.05$ y B = 970 con $EA \leq 5$, ¿en cuál estamos cometiendo proporcionalmente menor error?

Calculamos los errores relativos:

$$\text{A} \rightarrow ER \leq \frac{0.05}{7.4} \approx 0.00675 \rightarrow ER \leq 0.68\ \%$$

$$\text{B} \rightarrow ER \leq \frac{5}{970} \approx 0.00515 \rightarrow ER \leq 0.52\ \%$$

Es mejor aproximación la de B.

Control del error cometido

Recuerda que:

En cada suma o resta el error absoluto es la suma de los errores absolutos. Por tanto puede aumentar peligrosamente si hacemos varias sumas y restas.

Los errores relativos se suman al multiplicar dos números.

Actividades resueltas

- Medimos el radio de una circunferencia con una regla milimetrada y marca 7.0 *cm*. Queremos calcular el área del círculo. El error máximo en el radio es de 0.05 cm luego puede estar entre 6.95 y 7.05. Si aplicamos la fórmula πr^2 para estos valores obtenemos 151.7 y 156.1, que son los valores mínimo y máximo. La diferencia es 4.4 y su mitad es 2.2 que es la cota de error absoluto. Decimos que $A = 153.9 \pm 2.2\ cm^2$.

$$A \rightarrow ER \leq \frac{2.2}{153.9} \approx 0.0143 \rightarrow ER \leq 1.43\ \%$$

$$r \rightarrow ER \leq \frac{0.05}{7} \approx 0.00714 \rightarrow ER \leq 0.71\ \%$$

El radio tenía una cota de 0.71 %, y el área del círculo de 1.43, luego hemos perdido precisión.

Si operamos con números aproximados, y peor aún, si lo hacemos en repetidas ocasiones, los errores se van acumulando hasta el punto de poder hacerse intolerables.

Actividades propuestas

27. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

28. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 6.3 b) 562 c) 562.00

29. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

2.1. Potencias de exponente natural

Recuerda que:

Dado a, un número cualquiera, y n, un número natural, la potencia a^n es el producto del número a por sí mismo n veces

En forma desarrollada, la potencia de base a y exponente n se escribe: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, n veces, siendo a cualquier número y n un número natural.

Ejemplo:

- $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,   5 veces
- $(–3)^5 = (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3)$, 5 veces.

La base a puede ser positiva o negativa. Cuando la base es positiva el resultado es siempre positivo. Cuando la base es negativa, si el exponente es par el resultado es positivo, pero si es impar el resultado es negativo.

Si calculamos los ejemplos de arriba tendremos:

- $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.
- $(–3)^5 = (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) = –243$. Multiplico un número negativo un número impar de veces, por lo que el resultado es negativo. Cada vez que multiplicamos dos números negativos nos da uno positivo, como tenemos 5, quedaría un signo menos sin multiplicar, luego $(+) \cdot (–) = (–)$.

Recuerda que:

Base positiva: resultado siempre positivo.

Base negativa y exponente par: resultado positivo.

Base negativa y exponente impar: resultado negativo

Actividades resueltas:

- *Calcula las siguientes potencias:*

a) $(–3)^5 = (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3) \cdot (–3)= –243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $–(2)^4 = –(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = –16$

Actividades propuestas

30. Calcula las siguientes potencias:

a) $–2^5$ b) $(2 + 1)^4$ c) $– (–2x)^3$

2.2. Propiedades de las potencias

Las propiedades de las potencias son:

a) **El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes.**

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) **El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes.**

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ejemplo:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

c) **La potencia de una potencia es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.**

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) **El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo:**

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) **El cociente de potencias de distinta base y el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el cociente de las bases y cuyo exponente es el mismo.**

$$a^n/b^n = (a/b)^n$$

Ejemplo:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Todas estas propiedades de las potencias que se han citado para los exponentes naturales siguen siendo válidas para otros exponentes: negativos, fraccionarios…

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Potencias de exponente negativo

Definición de potencia de exponente negativo $-n$ y base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Esto se justifica ya que se desea que se sigan verificando las propiedades de las potencias:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Ejemplo:

- 5^{-2} es lo mismo que $(1/5)^2$.

Actividades resueltas:

- *Calcula las siguientes operaciones con potencias:*

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propuestas

31. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

32. Calcula las siguientes operaciones con potencias:

a) $2^5 \cdot 4^2$

b) $(3^3)^3$

c) $7^3 / 7^0$

d) $4^4/4^{-5}$

e) $5^{-5} \cdot 25^{-2}$

f) $(7^{-3})^{-3}$

g) $4^{-3} / 7^0$

h) $7^{-4}/7^{-5}$

33. Simplifica:

a) $\dfrac{a^2 \cdot b^3}{(a \cdot b)^4}$ **b)** $\dfrac{(2x-1)^8 \cdot (2x-1)}{(2x-1)^7}$ **c)** $\dfrac{y^6 \cdot z^{-5} \cdot x^2}{y^8 \cdot z^{-6} \cdot x^3}$ **d)** $\dfrac{(3x-1)^7 \cdot (3x-1)^5}{(3x-1)^0}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

Radicales. Leyes y ejemplos fáciles para principiantes. Mira este video y en cinco minutos entenderás perfectamente lo que tanto trabajo te había costado. Matemáticas con Grajeda.

https://www.youtube.com/watch?v=wad4ZHTuAjQ

3.1. Potencias de exponente racional

Se define la potencia de exponente fraccionario r/s y base a como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

- *Ejemplo:* *Exponentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Las propiedades citadas para las potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios

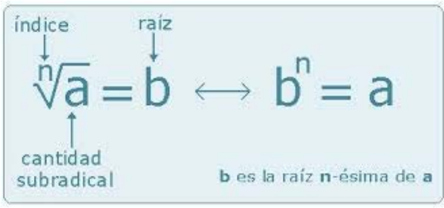
- *Ejemplo:* $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.2. Radicales

Se define **raíz *n*-ésima** de un número a, como el número b que verifica la igualdad $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Siendo: n el **índice**, a la cantidad subradical o **radicando** y b es la raíz ***n*-ésima** de a



Importante: n siempre es positivo. No existe la raíz –5 de un número.

La radicación de índice n es la operación inversa de la potenciación de exponente n.

Por la definición de raíz n-ésima de un número a se verifica que, si b es raíz, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Observa que se puede definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ya que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisface la misma propiedad que b deben ser considerados como el mismo número.

Ejemplos:

- $(81)^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = (3)^{12/4} = 3^3 = 27$
- $125^{2/3} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^{6/3} = 5^2 = 25$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Propiedades de los radicales

Las propiedades de las potencias enunciadas anteriormente para el caso de exponentes fraccionarios, también se pueden aplicar a las raíces:

a) Si multiplicamos el índice de una raíz n por un número p, y a la vez elevamos el radicando a ese número p el valor de la raíz no varía.

Se verifica $\forall p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{p.n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$. Se verifica puesto que según acabamos de ver: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3.2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Demostración:

Según las propiedades de las potencias de exponentes enteros se verifica que:

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz del índice común.

Suponemos que $b \neq 0$ para que tenga sentido el cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Demostración:

Si escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Para elevar un radical a una potencia basta con elevar el radicando a dicha potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

Esta propiedad la podemos demostrar como sigue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$$m > 0 \text{ y } m \in Z$$

Demostración:

Se verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15}\cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15}\cdot y^{30}} = (x^{15}\cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}}\cdot(y^{30})^{\frac{1}{15}} = x\cdot y^2$

Actividades resueltas:

- *Reduce a índice común* (6) *los siguientes radicales:* $\sqrt[3]{536};\sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3\cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3\cdot 67)^2};$$

$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2\cdot5\cdot7} = \sqrt[6]{2^3\cdot5^3\cdot7^3}.$$

- *Saca factores fuera de la raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2\cdot3^3} = \sqrt[2]{2^2\cdot3^2\cdot3} = 2\cdot3\cdot\sqrt[2]{3} = 6\cdot\sqrt[2]{3}$$

- *Escribe los siguientes radicales como una sola raíz:*

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3\cdot3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot2^4}{2^3\cdot3}} = \sqrt[6]{2\cdot3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propuestas

34. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6\cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

35. Halla:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

36. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION

4.1. Operaciones

Suma y resta de radicales:

RECUERDA:

Para sumar y restar radicales estos deben de ser idénticos:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Para sumar estos radicales hay que sumar sus expresiones aproximadas.

Sin embargo la expresión:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

sí se puede sumar y restar puesto que sus radicales son idénticos

Para poder sumar o restar radicales es necesario que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

Solo cuando esto sucede podemos sumar o restar los coeficientes o parte numérica dejando el mismo radical

Ejemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$.

Por las propiedades de los radicales podemos sacar factores del radical dejando que todos los radicales sean idénticos:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producto de radicales

Para multiplicar radicales debemos convertirlos en radicales de igual índice y multiplicar los radicandos:

1.- Calculamos el m.c.m. de los índices

2.- Dividimos el m.c.m. entre cada índice y lo multiplicamos por el exponente del radicando y simplificamos

Ejemplo:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$
-

División de radicales

Para dividir radicales debemos conseguir que tengan igual índice, como en el caso anterior y después dividir los radicales.

Ejemplo:

- $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3\cdot 4^2}{24}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3\cdot(2^2)^2}{2^3\cdot 3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3}}=\sqrt[6]{3^2\cdot 2^1}=\sqrt[6]{18}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Raíz de una raíz

Es la raíz cuyo índice es el producto de los índices (según se demostró en la propiedad e), y después simplificamos extrayendo factores fuera el radical si se puede.

Ejemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6 \cdot x^1 \cdot y^5} = x \cdot \sqrt[6]{x \cdot y^5}$

> ***RECUERDA:***
>
> Para extraer factores del radical se debe cumplir que el exponente del radicando sea mayor que el índice de la raíz.
>
> 2 opciones:
>
> - ✓ Se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz, el cociente indica el número de factores que extraigo y el resto los que se quedan dentro.
> - ✓ Se descomponen los factores del radicando elevándolos al mismo índice de la raíz, cada exponente que coincida con el índice saldrá el factor y los que sobren se quedan dentro

Ejemplo:

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

- *Extrae factores del radical:*

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt[2]{\frac{2^2 7 \cdot x^5}{3 \cdot 5^2 y^3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y}} =$$

Los factores que podríamos extraer serían el 2, *x, y* y el 5, de la siguiente manera:

Dividimos el exponente de la x, 5, entre 2, ya que el índice de la raíz es 2, y tenemos de cociente 2 y de resto 1, por lo que saldrán dos x y queda 1 dentro.

De igual forma para la y, dividimos 3 entre 2 y obtenemos 1 de cociente y uno de resto, por lo que sale 1 y y se queda otra dentro.

Veamos: $$\sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y^1}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$$

Actividades propuestas

37. Escribe bajo un solo radical y simplifica: $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{4 \cdot \sqrt[2]{5 \cdot \sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

38. Calcula y simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}$

39. Realiza la siguiente operación: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

40. Calcula y simplifica: $\sqrt{\dfrac{3}{x}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.2. Racionalización

Racionalizar una fracción algebraica consiste en encontrar otra equivalente que no tenga radicales en el denominador.

Para ello, hay que multiplicar numerador y denominador por la expresión adecuada.

Cuando en la fracción solo hay monomios, se multiplica y divide la fracción por un mismo número para conseguir completar en el denominador una potencia del mismo exponente que el índice de la raíz.

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}$.

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt[4]{x}$ para obtener en el denominador una cuarta potencia y quitar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cuando en la fracción aparecen en el denominador binomios con raíces cuadradas, se multiplica y se divide por un factor que proporcione una diferencia de cuadrados, este factor es el factor conjugado del denominador.

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$, su conjugado es: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

- Otro ejemplo: $(\sqrt{a} + b)$ su conjugado es: $(\sqrt{a} - b)$

Ejemplo:

- $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multiplicamos por el conjugado del denominador que en este caso es: $\sqrt{3} - \sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = -\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Actividades propuestas

41. Racionaliza la expresión: $\frac{\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}-\sqrt{2\boldsymbol{y}}}$

42. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

43. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya

Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. NOTACION CIENTÍFICA

¡Cómo escribir números en notación científica! Matemáticas con Juan

https://www.youtube.com/wacth/-7iIAES2MG4

5.1. Definición

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.

La ventaja que tiene sobre la notación decimal es que las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente.

Un número puesto en notación científica consta de:

- ✓ Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- ✓ El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- ✓ Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$\mathbf{N = a.bcd...\cdot 10^n}$$

siendo: a su parte entera (solo una cifra)

$b\ c\ d...$ su parte decimal

10^n La potencia entera de base 10

Si n es positivo, el número N es "grande"

Y si n es negativo, entonces N es "pequeño"

Ejemplos:

- $32.48 \cdot 10^{14}$ (= 3 248 000 000 000 000): Número grande.
- $8.561 \cdot 10^{-18}$ (= 0.0000000000000000008561): Número pequeño.

5.2. Operaciones con notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y, así poder sacar factor común.

Ejemplos:

- A) $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = (5.24 \cdot 6.3) \cdot 10^{6+8} = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.3012 \cdot 10^{15}$
- B) $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$
- C) $5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5.83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 = 6\,862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$

RECUERDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

RECUERDA:

- ✓ Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.
- ✓ Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.
- ✓ Por último, si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

video

¿Cómo poner la notación científica en la calculadora? Cecilia Alejandra

https://www.youtube.com/watch?v=rns1qZXS4x8

Actividades propuestas

44. Calcula:

a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

45. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^{6} - 5 \cdot 10^{5}}$ b) $\dfrac{7.35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^{7}$

46. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^{3} - 7.2 \cdot 10^{5})^{2}$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^{3}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. LOGARITMOS

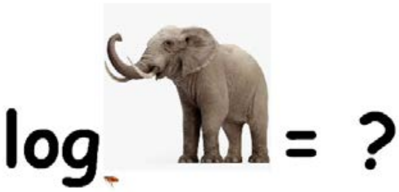
En este apartado vamos a revisar los conocimientos que ya tienes sobre los logaritmos.

6.1. Definición

La palabra **logaritmo** viene del griego, une los sustantivos logos (relación) y aritmos (número), refiriendo la relación entre dos números que se comparan. Uno de ellos hace de base o referencia, y el otro es el número que se somete a comparación.

¿Cuántas veces es más grande un elefante que una pulga?

Si fuéramos pulgas y avistáramos un elefante, ¿cuántas veces mayor que nosotros pensaríamos que es? ¿De qué magnitud es su masa respecto de una base numérica fijada? ¿Es del orden del picogramo (un picógramo es 10^{-12} gramos), del orden del nanogramo (son 10^{-9} gramos), del orden del kilogramo, del orden del miriagramo?



Puedes entrar en la página [The Scale of the Universe 2 (htwins.net)]() y analizar diferentes órdenes de magnitud. ¿Cuánto mide una molécula de agua? ($2.8\text{x}10^{-10}$ m) ¿Cuánto mide el diámetro de la Luna? ($3.5\text{x}10^{6}$ m) ¿Y un cromosoma? ($4\text{x}10^{-6}$m)

El **logaritmo** de un número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva y distinta de uno, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Ejemplo:

Así, teniendo en cuenta que nosotros pensamos en base 10 y que el peso de una elefanta asiática hembra adulta es de 2 700 kilogramos, podríamos afirmar que el orden de su peso es aproximadamente 3.43, es decir que, $\log_{10} 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700$. Como quiera que, normalmente, trabajamos en base 10, por comodidad, nos permitimos el lujo de omitir este dato y escribimos:

$$\log 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700.$$

Ejemplo:

Mientras que si trabajamos en cualquier otra base numérica lo especificamos. Siguiendo con el mismo ejemplo, ahora en base 2, el orden de la misma elefanta es

$$\log_2 2\,700 = 11.3 \Leftrightarrow 2^{11.3} = 2\,700.$$

Si estamos preparando una base de datos para grabar las masas de una manada de elefantes en estudio, en el lugar del peso, habremos de guardar 11.3 dígitos, redondeando al alza para no perder información, habremos de reservar 12 posiciones de memoria.

Los logaritmos más utilizados son los **logaritmos decimales** o logaritmos de base 10 y los **logaritmos neperianos** (llamados así en honor a **Neper**) o logaritmos en base *e* (*e* es un número irracional cuyas primeras cifras son: *e* = 2.71828182…).

Ambos tienen una notación especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Pasemos a calcular algunos logaritmos:

Ejemplos:

- Si queremos conocer el logaritmo en base dos de dieciséis, $\log_2 16$, tendremos que pensar en qué exponente convierte un dos en dieciséis. Dado que $2^4 = 16$, tenemos que $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$. Formulado de otra forma, pensaremos en a qué número tengo que elevar la base, 2 en este caso, para obtener el valor en estudio, 16.
- ¿A qué número tengo que elevar tres, para obtener veintisiete?

$$\log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27.$$

Actividades resueltas:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 32 = 2^5$
- $\log_{1\,000} = 3 \Leftrightarrow 1\,000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** de la definición se deduce que:

✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

Demostración:

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a 1 = 0$

Ejemplos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

✓ El logaritmo de la base es 1.

Demostración:

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a a = 1$

Ejemplos:

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $\log_3 3^5 = 5$

✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un número irracional

Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un número negativo ni cero.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- log_2 (–4) No existe
- log_2 0 No existe.
- log 100 = 2 $\Leftrightarrow$ 100 = 10^2.
- log 0.1 = –1 $\Leftrightarrow$ 0.1 = 10^{-1}.
- $log\ \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- log 2 = 0.301030…

Actividades resueltas

- $log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Actividades propuestas

47. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$log_2 1 = 0$	$log_5 5 = 1$	$log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$log_3 81 = 4$	$log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

48. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

49. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

50. Calcula *x* utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

51. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

52. Utiliza la calculadora para obtener

a) log 0.000142; b) log 142; c) log 9 + log 64.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se heredan de las propiedades de las potencias. Ya hemos visto que:

- Si cualquier número elevado a cero es uno, entonces el logaritmo en cualquier base de uno es cero. $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.
- Si cualquier número elevado a uno es él mismo, entonces el logaritmo de cualquier número, tomado él mismo como base es uno. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

> ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
> ✓ El logaritmo de la base es 1.
> ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos.

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\boxed{\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Si cuando multiplicamos números con una misma base elevada a distintos exponentes los sumamos, entonces la suma de logaritmos de dos factores será el logaritmo del producto. Si $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Entonces $\log_a b + \log_a c = \log_a b\cdot c \Leftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos:

$$x\cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x\cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y.$$

Ejemplo:

- $\log_a(2\cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\boxed{\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y}$$

Si cuando Dividimos números con una misma base elevada a distintos exponentes los restamos, entonces la resta de logaritmos de dos factores será el logaritmo del cociente. Si $\log_a b = x$, $\log_a c = y$. Entonces $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos:

$$x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow log_a(x / y) = A - B = log_a x - log_a y.$$

Ejemplo:

- $log_a (75/25) = log_a 75 - log_a 25$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\boxed{log_a x^y = y.log_a x}$$

Si cuando elevamos una potencia a un exponente, multiplicamos los exponentes, entonces, el logaritmo de una potencia, será el producto del exponente por el logaritmo del número.

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = log_a x^y = y\ log_a x$$

Ejemplo:

- $log_a 2^5 = 5 \cdot log_a 2$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\boxed{log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

Si cuando hacemos la raíz de orden *n* de un número lo podemos expresar como el número elevado a uno partido del orden de la raíz, entonces el logaritmo de la raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el orden.

Demostración:

Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base *a* de un número *x* es igual al cociente de dividir el logaritmo en base *b* de *x* por el logaritmo en base *b* de *a*:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ***"fórmula del cambio de base"***. Antaño, cuando no existían las calculadoras, se calculaban los logaritmos utilizando los valores recogidos en las tablas logarítmicas.

Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

Ejemplo:

- $log_2 11 = \frac{log\,11}{log\,2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162$

Actividades resueltas

- *Desarrollar las expresiones que se indican:*

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- *Escribe con un único logaritmo:*

$$3log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} . 2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$$

- *Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log2 =* 0.301030*:*

a) 4 $\Rightarrow$ log4 = log 2^2 = 2·log2 = 2·0.301030 = 0.602060

b) 1 024 $\Rightarrow$ log1024 = log 2^{10} = 10·log2 = 10 · 0.301030 = 3.01030

Actividades propuestas

53. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

54. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

55. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$$

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$x = 26^{378} \Leftrightarrow log(x) = 378*log(26)$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$

Solución:

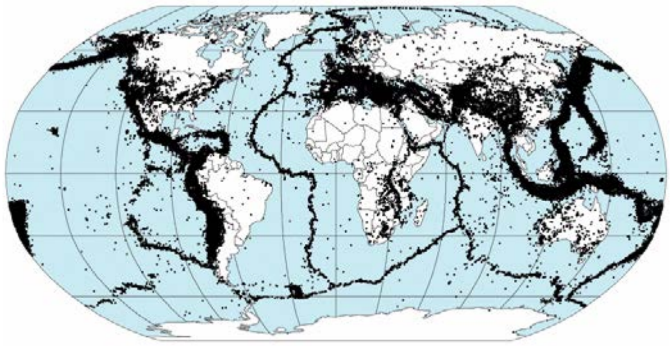
$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}$.

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora es capaz de calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con **50^{200}** y comprueba que te sale **$6.3 \cdot 10^{339}$**.

Escala sismológica de Richter

La escala sismológica de *Richter* es una escala logarítmica que asigna un número para cuantificar la energía que libera un terremoto. Debe su nombre a *Charles Francis Richter*.

La escala de magnitudes Richter está basada en una escala logarítmica decimal (de base 10). Por cada incremento de una unidad en la escala Richter la amplitud de la onda del terremoto se incrementa 10 veces (se multiplica por 10).



Localización de epicentros de terremotos

Los valores asignados aumentan de forma logarítmica, no de forma lineal. Por lo que un terremoto de intensidad 4 no libera el doble de energía que uno de intensidad 2, sino 100 veces más. Llega hasta los 12.

Los terremotos de menos de 4 apenas se perciben. Los de magnitud entre 4 y 5 se perciben pero en general no producen daños. Los de entre 5 y 6 causan daños menores, en, por ejemplo, los edificios antiguos. Los de entre 6 y 7 si causan daños a varios kilómetros alrededor. Los de entre 7 y 8 es un terremoto mayor y sí causa daños. Suele haber 18 al año. Los de entre 8 y 9 causan graves daños. Puede haber de 1 a 3 por año. Los de entre 9 y 10 son devastadores y puede haber 1 o 2 cada 20 años. De más de 10 aún no se ha registrado ninguno.

Se utiliza una fórmula para calcular la magnitud, que usa logaritmos decimales, la amplitud de las ondas medida en milímetros, tomada del sismograma, y el tiempo en segundos desde las ondas primarias hasta las secundarias. Hay un desplazamiento para que las medidas no salgan negativas.

La relación entre E, la energía liberada, y M a la magnitud del terremoto, es:

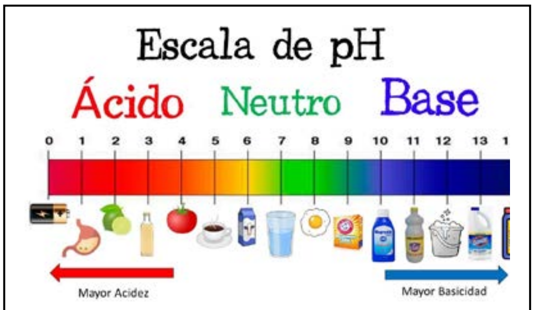
$$\log E = 11.8 + 1.5 \cdot M,$$

por lo que:

$$E = 10^{11.8 + 1.5\,M}$$

La energía crece de forma exponencial.

Escala de pH



El pH mide la acidez o alcalinidad de una solución.

Es el logaritmo negativo en base 10 de la concentración de iones hidrógeno:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

Sorensen diseñó la **escala** para medir la acidez o alcalinidad de una substancia: las soluciones que recibían valores de **pH** de **0** eran las más ácidas, las de **14** las más alcalinas

Un pH 7 es neutro. Las disoluciones ácidas tienen una alta cantidad de iones hidrógeno, por lo que su pH es menor que 7. Las disoluciones alcalinas tienen un pH mayor que 7. El agua tiene un pH neutro (7). Por debajo de 7 tenemos los ácidos: la naranja, el café, el tomate, el vinagre y el limón. Por encima de 7, las bases: la sangre, el bicarbonato, el amoníaco, el jabón y la lejía.

7. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

Vamos a plantear y a resolver problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, margen de beneficio, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.

Pondremos un ejemplo de cada uno y lo resolveremos exponiendo las fórmulas y conceptos que hacen falta para ello.

Vamos allá:

Empezaremos por las tasas y los números índice entre los que destacaremos la tasa de natalidad y mortalidad y los índices de las bolsas y el de precios al consumo (I.P.C.) respectivamente, para después continuar con intereses y préstamos bancarios y sus amortizaciones.

7.1. Tasas

La tasa de natalidad es un indicador social. En toda tasa se da la cantidad que interesa en relación a una cantidad de referencia.

Ejemplos:

- Tasa de natalidad: 21.64 0/00 ⇒ Nacen 21.64 bebés por cada 1 000 habitantes.
- Tasa de paro: 12 % ⇒ 12 parados por cada 100 personas en edad laboral.
- Tasa de alcoholemia: 0.15 ⇒ 0.15 cm^3 de alcohol por litro de sangre.

7.2. Números índice

Un número índice, NI, es una herramienta o parámetro creada para estudiar la variación en el tiempo de una determinada magnitud económica.

$$NI = \frac{Medida\ actual\ de\ la\ magnitud}{Medida\ antigua\ de\ la\ magnitud}$$

Destacamos:

El índice de las bolsas refleja el valor global de las empresas que se cotizan en ellas. El valor del Índice en cada momento se obtiene mediante cálculos muy complejos en los que se valoran las cotizaciones de las acciones y la cantidad que se comercializa de cada una. Más que su valor concreto, se puede prestar atención a su variación porcentual respecto a una fecha anterior:

- *El IBEX 35 ha subido un 0.80 % durante esta semana.*

Especialmente importante es el **índice de precios al consumo** (**IPC**): No tiene, en cada momento, un valor determinado, sino que se evalúa en referencia al año (o al mes) anterior:

- *El IPC ha subido en mayo un 0.28 %, con lo que acumula un crecimiento anual del 3.56 %.*

Para calcular la variación mensual del IPC, se tiene en cuenta la variación del precio de cada uno de los bienes de consumo y la cantidad invertida en el mismo durante ese mes. El índice de precios al consumo es un número índice que se utiliza para medir la variación de la inflación. Se calcula tomando

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

el precio de una serie de artículos representativos de consumo habitual (cesta de la compra), p_1, p_2, p_3, … Y multiplicando dichos precios por su correspondiente peso o ponderación, q_1, q_2, q_3, … según la importancia asignada en el momento

$$IPC = \frac{Medida\ actual\ de\ la\ magnitud}{Medida\ antigua\ de\ la\ magnitud} = \frac{p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21} + p_{31}q_{31} + \ldots}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + p_{30}q_{30} + \ldots}$$

7.3. Interés simple

Cuando depositamos una determinada cantidad de dinero capital en un banco lo que hacemos es prestar este capital a la entidad bancaria y ésta, a cambio, nos da un tanto por ciento del dinero que depositamos.

Por ejemplo,

- Si depositamos 50 000 € en una libreta de ahorro al 1.5% cada año recibimos:

$$\frac{50\,000 \cdot 1.5}{100} = 50\,000 \cdot 0.015 = 750$$

La cantidad que hemos depositado, 50 000 € es el **capital**: El beneficio obtenido, 750 €, se llama **interés.** La cantidad que producen 100 € cada año, 1.5 €, se llama **rédito o tanto por ciento**. Y la cantidad que produce 1 € anualmente, 0.015 €, se llama **tanto por uno.**

Un capital colocado al R % en un año produce $\frac{C \cdot R}{100}$ de interés, luego en t años producirá un interés de:

$$\boxed{I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100} = Crt}$$

- **Capital, C,** es la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- **Interés, I,** es la cantidad de dinero producida por un capital de un interés determinado.
- **Rédito o tanto por ciento, R,** es la ganancia que producen 100 € en un año.
- **Tanto por uno, r,** es la ganancia que produce 1 € en un año.
- Se verifica: $r = \dfrac{R}{100}$

INTERES SIMPLE

FORMA GENERAL PARA CALCULAR INTERES:		$I = C . i . t$	
1.- TIEMPO EN AÑOS	$I = C . \frac{i}{100} . t$	4.- TIEMPO EN SEMESTRE	$I = C . \frac{i}{200} . t$
2.- TIEMPO EN MESES	$I = C . \frac{i}{1200} . t$	5.- TIEMPO EN TRIMESTRE	$I = C . \frac{i}{400} . t$
3.- TIEMPO EN DIAS	$I = C . \frac{i}{36000} . t$	6.- TIEMPO EN BIMESTRE	$I = C . \frac{i}{600} . t$
CALCULO DEL MONTO I	$M = C + I$ MATEMATICA_EDKEN	CALCULO DEL MONTO II.	$M = C\,(1 + i.t)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Colocamos en un banco 10 000 € al 2 %, percibiendo los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 600 € en concepto de intereses. ¿Cuánto tiempo hemos tenido el dinero en el banco?

Al ser el cobro de intereses semestral, la fórmula que aplicamos es:

$$I = \frac{CrT}{2} \Rightarrow T = \frac{2I}{Cr} = \frac{2 \cdot 600}{10\,000 \cdot 0.02} = 6 \textbf{ semestres.}$$

Esto significa que el dinero ha estado depositado en el banco 6 semestres, o lo que es lo mismo, 36 meses.

7.4. Interés compuesto

Cuando no cobramos los intereses en los distintos periodos de tiempo, sino que éstos se van sumando al capital, éste se va incrementando. A este proceso le llamamos **capitalización** y afirmamos que hemos colocado el capital a interés compuesto.

Colocar un capital a **interés compuesto** significa que el capital se va incrementando con los intereses producidos en cada periodo de tiempo.

Al capital existente en cada momento, le llamamos **montante.**

Cuando colocamos un capital, C, al tanto por uno, r, al final del primer año tenemos un montante de:

$$M_1 = C + Cr = C(1 + r)^1.$$

Al final del segundo año, tendremos:

$$M_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2.$$

Al final del tercer año, tendremos:

$$M_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3.$$

Razonando y siguiendo la misma pauta, llegamos a obtener que el montante, al cabo de t años, es:

$$M = C(1 + r)^t$$

De forma análoga, obtenemos el montante cuando capitalizamos n veces al año o en n periodos cada año:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T$$

Siendo T el número de periodos.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- ¿Durante cuánto tiempo ha de invertir un capital de 12 000 € al 2 % de interés compuesto para llegar a obtener un montante de 12 325 € si la capitalización se produce trimestralmente?

Como la capitalización es trimestral, n es 4. Por tanto:

$$M = C\left(1+\frac{r}{4}\right)^T \Rightarrow \log M = \log C + T\log\left(1+\frac{r}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{\log M - \log C}{\log\left(1+\frac{r}{4}\right)} = 5.5 \text{ trimestres.}$$

Por lo tanto, el capital ha de invertirse durante 5.5 trimestres = 16 meses y medio.

7.5. Anualidades de capitalización

En muchas situaciones se plantea el problema de conseguir u obtener un capital al cabo de un número determinado t de años. Para ello, hacemos unos pagos o aportaciones, siempre iguales, al principio de cada uno de los años. Estos pagos o aportaciones se llaman **anualidades de capitalización**.

Recuerda que:

Las anualidades de capitalización son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años.

Supongamos que la anualidad de capitalización es a, que el tanto por uno anual es r y el tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamos al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^t$$

La segunda anualidad, entregada al principio del segundo año, capitaliza al cabo de $t - 1$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-1}$$

La tercera anualidad capitaliza en $t - 2$ años el montante:

$$a\,(1+r)^{t-2}$$

y así sucesivamente, la anualidad *t-ésima*, que entregamos al comienzo del *t-ésimo* año o último, capitaliza en 1 año el siguiente montante:

$$a\,(1+r)^1$$

La suma de todos estos montantes da lugar a la capitalización del capital C:

$$C = a\,(1+r)^1 + a\,(1+r)^2 + \ldots + a\,(1+r)^{t-1} + a\,(1+r)^t$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la progresión anterior de razón $(1 + r)$ y números de términos t, obtenemos:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r)\cdot[(1+r)^t - 1]}{r}$$

Recuerda que:

Una sucesión: $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ se llama sucesión o progresión **geométrica** si cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, r, llamada razón de la progresión: $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r$; $a_n = a_{n-1} \cdot r$.

Por tanto, la suma de los n primeros términos $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ vale: $S_n = \dfrac{a_n . p - a_1}{p-1}$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al principio de cada mes, la capitalización no es anual, lo que capitalizamos cada mes es:

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{12}\right)\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^T - 1\right]}{\frac{r}{12}}$$

siendo a la aportación mensual y T el tiempo de capitalización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, el capital obtenido es:

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{n}\right)\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^T - 1\right]}{\frac{r}{n}}$$

siendo T el número de periodos de capitalización.

Actividades resueltas

- Una persona, al cumplir los 40 años, decide hacer un plan de ahorro. Llega con el banco a un acuerdo de capitalizar trimestralmente al 3 % anual, depositando 90 € al inicio de cada trimestre. ¿Qué capital obtendrá al cumplir los 60 años?

La capitalización es trimestral, con lo cual el número de periodos en un año es n = 4. El tiempo de capitalización es 60 – 40 = 20 años, que expresado en periodos de capitalización o trimestres, es de 4 · 20 = 80 trimestres. Se trata de una capitalización no anual.

El capital que obtendrá según la fórmula que hemos visto antes será:

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{4}\right)\left[\left(1+\frac{r}{4}\right)^T - 1\right]}{\frac{r}{4}} = \left(\left(\frac{0.03}{4}\right)/90\right)\left(1+\frac{0.03}{4}\right)\left[\left(1+\frac{0.03}{4}\right)^{80} - 1\right] = 989.015$$

- ¿Qué anualidad tendríamos que abonar al principio de cada año durante 12 años para capitalizar o conseguir 18 000 € al 3 % anual?

Se trata de una capitalización anual, por lo tanto, según la fórmula siguiente obtendremos:

$$C = \frac{a\cdot(1+r)\left((1+r)^t - 1\right)}{r} \Rightarrow a = \frac{rC}{(1+r)\cdot\left((1+r)^t - 1\right)} \Rightarrow a = \frac{0.03\cdot 18\,000}{(1+0.03)\cdot\left((1+0.03)^{12} - 1\right)} = 223.21\ €$$

7.6. Tasa anual equivalente (T.A.E.)

En cuentas de ahorro, llamamos **TAE** al tanto por ciento de crecimiento total del capital durante un año cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año. En préstamos bancarios, la TAE, también es superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen los pagos fijos (comisiones, gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo.

Pago mensual de intereses:

$$1+\frac{C}{100}=\left(1+\frac{r}{1\,200}\right)^{n}$$

siendo C el capital y n el número de meses

Actividades resueltas

- Si colocamos 600 € al 2 % anual con capitalización trimestral, en un año genera un montante de:

$$M = 600\left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{4} = 612.090$$

Si ahora nos preguntamos, ¿a qué tanto por ciento anual hemos de colocar el mismo capital para generar el mismo montante con capitalización anual?

$$612.090 = 600\left(1 + \frac{T.A.E.}{100}\right)^{1}$$

Operando, obtenemos el T.A.E. = 2.015

Esto indica que el T.A.E. es el tanto por ciento anual, que genera el mismo montante que una capitalización en n periodos de tiempo al año al r % anual.

4.7. Anualidades de amortización

En la vida real es muy frecuente pedir prestado a un banco o una entidad financiera una cantidad de dinero que llamamos **deuda**. Esta deuda la devolvemos o la amortizamos mediante pagos siempre iguales, durante un número t de años consecutivos, haciendo cada pago o aportación al final de cada año. Estos pagos o aportaciones iguales se llaman **anualidades de amortización.**

> Las **anualidades de amortización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, t de años.

La deuda D, al cabo de t años, al tanto por uno anual, r, capitaliza el siguiente montante:

$$M = D(1+r)^{t}$$

Las anualidades, a, que aportamos al final de cada año, capitalizan los siguientes montantes:

La primera anualidad en t – 1 años se convierte en: $a\ (1 + r)^{t-1}$

La segunda anualidad en t – 2 años se convierte en: $a\ (1 + r)^{t-2}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La tercera anualidad en t – 3 años se convierte en: $a\ (1 + r)^{t-3}$

Y así sucesivamente, la anualidad t-ésima, que aportamos al final del último año, es: a

La suma de los anteriores montantes ha de coincidir con M

$$M = D(1+r)^t = a + a(1+r) + \ldots + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la sucesión anterior de razón 1 + r y de t términos, obtenemos:

$$D \cdot (1+r)^t = \frac{a(1+r)^{t-1} \cdot (1+r) - a}{(1+r) - 1}$$

Y de aquí obtenemos la expresión que nos da la anualidad de la amortización:

$$a = \frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al final de cada mes, la amortización mensual viene dada por:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^T - 1}$$

donde D es la deuda y T es el tiempo de amortización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T - 1}$$

siendo T el número de periodos de amortización.

Actividades resueltas

- En el Mercado de Ocasión del coche usado nos venden un coche por 1 800 €. La empresa tiene una entidad financiera, la cual cobra un 2 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

La amortización es mensual, por lo que el número n de periodos en un año es de 12 y la expresión que utilizamos es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^T - 1} = \frac{1\,800 \cdot \frac{0.02}{12} \cdot \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{24}}{\left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{24} - 1} = 76.58$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- La empresa Frío Industrial ha adquirido una máquina por la que se compromete a pagar 12 000 € en el momento de la adquisición y 5 000 € al final de cada año, durante 10 años. Si se aplica un 2 % de interés anual, ¿cuál es el valor de la máquina?

La deuda, D, que la empresa amortiza en 10 anualidades es:

$$D = \frac{a \cdot ((1+r)^t - 1)}{r(1+r)^t} = \frac{5\,000 \cdot ((1+0.02)^{10} - 1)}{0.02(1+0.02)^{10}} = 44\,914.47$$

Luego el valor de la máquina es: 44 914.47 + 12 000 = 56 914.47.

Actividades propuestas

1. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5 % anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?

b. ¿Cuánto costaba hace 4 años?

c. ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?

2. Calcula el tiempo que debe de estar colocado un capital de 4 500 € en una cuenta corriente al 2 % de interés compuesto anual para que el capital se duplique

3. Calcula el tiempo necesario para que un capital impuesto a interés compuesto al 3 % anual se duplique. ¿Y para que se triplique?

4. ¿Durante cuánto tiempo hemos de abonar mensualidades de 60 € al 4 % anual para conseguir capitalizar 6 500 €?

5. El abuelo de Luis, al nacer éste, decidió ingresar en un banco un capital de 3 600 € a interés compuesto anual del 3 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

6. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 €. La capitalización es mensual al 3 % anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

7. Una persona compra un piso en 90 000 €. A la firma del contrato entrega 18 000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra el 2 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

8. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 3 %, cada anualidad de amortización asciende a 16 200 €. ¿Cuánto costó el camión?

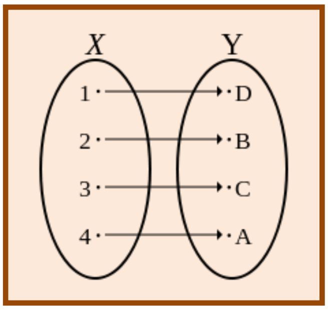
9. Confecciona una hoja de cálculo que te permita resolver problemas de interés compuesto, capitalización y amortización.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Infinito numerable

Se sabe si dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, el mismo **cardinal**, si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre ellos.



Lo *sorprendente* es que en los **conjuntos infinitos** se pueda establecer entre un conjunto y una parte de él, y por tanto tener el mismo cardinal.

Card(N) = Card(Pares)

Así, el conjunto de los números naturales tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números pares pues se puede hacer corresponder a cada número natural n el número par $2n$.

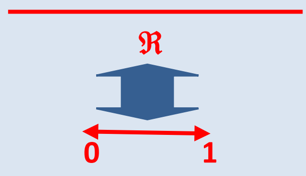
También se puede definir una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números enteros, y entre los números naturales y los números racionales

Card(N) = Card(Z) = Card(Q)

Al infinito de los números naturales lo llamamos **infinito numerable**

Cardinal del continuo

¿Cuántos números irracionales conoces? Pocos, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... Otros tres que se nombran con letras como π, e, Φ. Sin embargo, *Cantor* demostró que el infinito de los números irracionales es mucho mayor que el infinito numerable. A su cardinal se le llamó del **continuo**.



Card(ℜ) = Card((0, 1))

¡Hay más números en el intervalo (0, 1) que en los números racionales, que el infinito numerable!

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

π

Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Ya sabes que vale **3.141592…** con infinitas cifras decimales no periódicas

En la Biblia se le daba el valor de 3.

En el antiguo Egipto, 256/81 = 3.16049

En Babilonia, 3 + 1/8 = 3.125.

Loa árabes obtuvieron hasta 17 cifras decimales

Con los ordenadores cada vez conocemos más cifras, en 1949 se conocían 2037, y en 2011, más de 10 billones (¡un 1 y 13 ceros!)

e

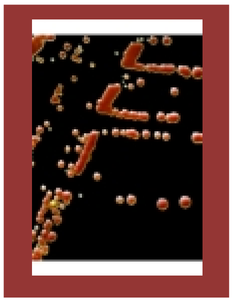
Otro número irracional. *Euler* calculó 23 de sus cifras decimales

Vale **2.718281828459…** con infinitas cifras decimales no periódicas

Es la base de los logaritmos neperianos

$$y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Una de las numerosas aplicaciones del número e en Biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que lo limiten. En esos casos se aplica la fórmula: $P = P_0 \cdot e^t$ que permite averiguar cuál será la población P en un tiempo t a partir de la población inicial P_0.



¡El número de oro! ¡La divina proporción!

Φ

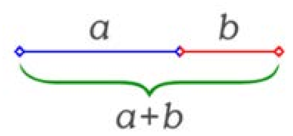
Vale **1.61803398874989…** con infinitas cifras decimales no periódicas

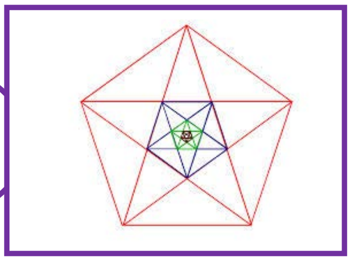
Se define como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observa que se define con un radical $\sqrt{5}$. Es un número irracional **algebraico**, mientras que los otros dos, π y e, son **transcendentes**

Se obtiene como una proporción, al dividir un segmento de longitud $a + b$, en dos partes de forma que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$





Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

POTENCIAS DE 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incluidas entre los productos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1 331

11 x 11 x 11 x 11 = 14 641

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son elevados al cuadrado:

9^2 = 81

99^2 = 9 801

999^2 = 998 001

9 999^2 = 99 980 001

Vale la pena observar que el número de nueves menos 1 de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow log(x) = 378 * log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

Solución:

$$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.$$

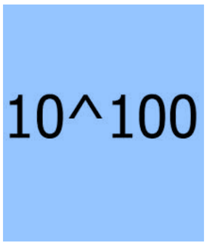
Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora sabe calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con **50^{200}** y comprueba que te sale **$6.3 \cdot 10^{339}$.**

NÚMEROS GRANDES

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podemos tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abundancia, como son **las gotas del mar** (1×10^{25} gotas), **los granos de arena en todas las playas del mundo** (5.1×10^{23} granos) o el **número de estrellas de todo el Universo conocido** (3×10^{23} estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del universo (1×10^{80}) si queremos obtener un número más grande.

Si queremos hallar un número más grande **"Googol**", acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que significa el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los **números primos de la forma de Mersenne**, que han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras. En 1952, el número primo de Mersenne más grande era $(2 \cdot 10^{17}) - 1$, un número primo con 39 dígitos, y ese mismo año, las computadoras probaron que el número $(2 \cdot 10^{521}) - 1$ es también primo, y que dicho número posee 157 dígitos, siendo este mucho más grande que un Googol



Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Números reales	Está formado por la unión de los números racionales (Q) y los números irracionales	5, –4, 2/3, 7.5, π, e, Φ…
Valor absoluto	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	$\lvert -32\rvert = 32 = \lvert +32\rvert$
Intervalos	Abierto : $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ Cerrado: $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$ Semiabierto (izq): $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\}$ Semiabierto (der): $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)

Potencias de exponente natural y entero	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades de las potencias	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n.m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n/b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5 \cdot 2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2) \cdot (-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de exponente racional	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades de los radicales	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3 \cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicales	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} . \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{3})} = \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2}$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = (5.83+6932-75) \cdot 10^9 = 6862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$ $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.32012 \cdot 10^{15}$
Logaritmos	$Si\ a > 0,\ log_a\ m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $log_a\ (x \cdot y) = log_a\ x + log_a\ y$ $log_a\ (x/y) = log_a\ x - log_a y$ $log_a\ x^y = y.log_a\ x$	$log_a\ (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $log_a\ 2^5 = 5 \cdot log_a\ 2$ $log_a\ \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisores: Luis Carlos Vidal y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números reales

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales y pasa a fracción los racionales:

$$0;\ -0.2;\ \sqrt{5};\ 3.72;\ \frac{-1}{7};\ 2.321321\ldots;\ -9.9;\ 9^1;\ \sqrt{\sqrt{4}};\ 3.222;\ 5.034212121\ldots$$

2. Representa, aproximadamente, en la recta real los números:

$$0.3;\ -8;\ \sqrt{3};\ 1.2222\ldots;\ 3.5;\ \sqrt{7};\ \frac{1}{7};\ 3.777\ldots$$

3. Escribe dos números en las condiciones siguientes:

a) Mayores que 0.12 y menores que 0.13
b) Comprendidos entre 2.35 y 2.36. Comprueba que la diferencia entre estos números y 2.36 es menor que una centésima

4. Dados los intervalos:

$A = \{x \in \Re;\ -10 \le x < 1\}$; $B = \{x \in \Re;\ 1/2 < x \le 3\}$; $C = \Re - (1, 2)$

a) Represéntalos en la recta real
b) Calcula sus longitudes
c) Calcula: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap C) \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$

5. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (***Pista***: x puede tener dos valores)

a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

6. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

a) $|x| < 2$

b) $|x| \le 2$

c) $|x| > 2$

d) $|x| \ge 2$

7. Halla dos números que disten 4 unidades de 2, y otros dos que disten 2.5 unidades de –3, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

8. Escribe el intervalo $[-2, 6] \cap (2, 9)$.

9. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \le 3$.

10. Cuál es el error absoluto y el error relativo cometidos al hacer las siguientes aproximaciones:

(a) $\sqrt{3}$ por 1.73
(b) $\pi + 1$ por 4.1
(c) Redondeo a cuatro cifras del número π.

Potencias

11. Expresa en forma de potencia**:**

a) $\dfrac{1}{64}$ **b)** $\dfrac{t}{t^5}$ **c)** $(\dfrac{1}{z+1})^2$ **d)** $\dfrac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\dfrac{x^{-2}\cdot y^{-7}}{x^{8}\cdot y^{-4}}$

12. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ **b)** $125^{\frac{1}{3}}$ **c)** $625^{\frac{5}{6}}$ **d)** $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ **e)** $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

13. Calcula:

a) $\dfrac{(x+1)^2\cdot(x+1)^3}{(x+1)^4}$ **b)** $\dfrac{(2x-3)^7\cdot(2x-3)^5}{(2x-3)^6}$ **c)** $\dfrac{(5y+1)^6\cdot(5y+1)^2}{(5y+1)^8}$ **d)** $\dfrac{(x-1)^4\cdot(x-1)^0}{(x-1)^3}$

Radicales

14. Expresa en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5\cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$

15. Expresa en forma de radical:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\dfrac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

16. Expresa como potencia única:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ e) $a.\sqrt{\dfrac{1}{a}}$ f) $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\cdot\dfrac{a^3}{\sqrt{a}}$

17. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot\sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

18. Extrae factores del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{25a^2b}{c^6}}$ e) $\sqrt{\dfrac{8a^5}{b^4}}$ f) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}}$ g) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}}$

19. Introduce factores en el radical:

a) $2\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ b) $3\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ d) $2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{5}{12}}$ e) $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{12}$ f) $\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$

20. Calcula

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

21. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

22. Racionaliza los denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

23. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

24. Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\sqrt{2})$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right):\left(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)$

25. Utiliza la calculadora para efectuar:

a) $\sqrt{357}+\sqrt{87}-\sqrt{531}$; b) $\sqrt{\frac{38}{59}}:\sqrt{\frac{26}{31}}$

Logaritmos

26. Desarrolla los siguientes logaritmos:

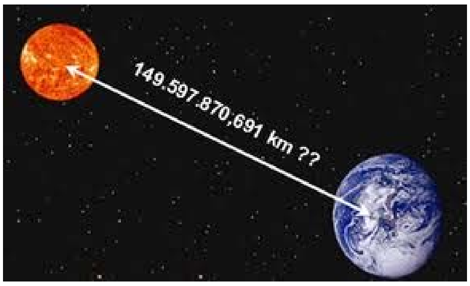
a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$

b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

27. Simplifica la siguiente expresión:

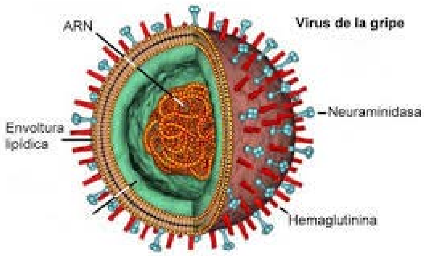
$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

Notación científica:



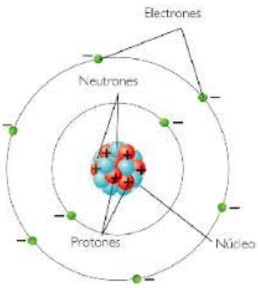
28. La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5.98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.

29. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?.



30. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2 en el año 1995, cantidad que representa el 53.5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

31. Expresa en notación científica:



a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1 628 000 €

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0.000000000066 m

32. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3.1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e) $(4 \cdot 10^{5})^{-2}$

33. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$ b) $\frac{0.000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0.00302}$ c) $(0.0073)^2 \cdot (0.0003)^2$ d) $\frac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0.00003 - 0.00015}$

34. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$ c) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)$

35. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica:

$(5.24 \cdot 10^6) \cdot (8.32 \cdot 10^5)$:

a) $4.35968 \cdot 10^{12}$ b) $43.5968 \cdot 10^{13}$ c) $4.35968 \cdot 10^{11}$ d) $4.35968 \cdot 10^{13}$

AUTOEVALUACION

1. El número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. El resultado es:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a :

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6\cdot b^7\cdot c^6}}$

a) $5^3\cdot a\cdot b\cdot c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2\cdot c}$ b) $5\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$ c) $5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^3\cdot b^2\cdot c^3}$ d) $5\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[4]{a^2\cdot b^3\cdot c^2}$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}\cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3 . a^{-2}$

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}\cdot\sqrt{7}$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8\cdot(x+2)^9\cdot(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2\cdot(x+2)^3\cdot(x+1)}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83\cdot10^9+6.932\cdot10^{12}-7.5\cdot10^{10}$

a) $6.86283\cdot10^{12}$ b) $6.86283\cdot10^{13}$ c) $6.8623\cdot10^{11}$ d) $6.8628\cdot10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24\cdot10^{10}}{6.3\cdot10^{-7}}$

a) $0.8317\cdot10^{17}$ b) $8.317\cdot10^{16}$ c) $8.317\cdot10^{15}$ d) $83.17\cdot10^{16}$