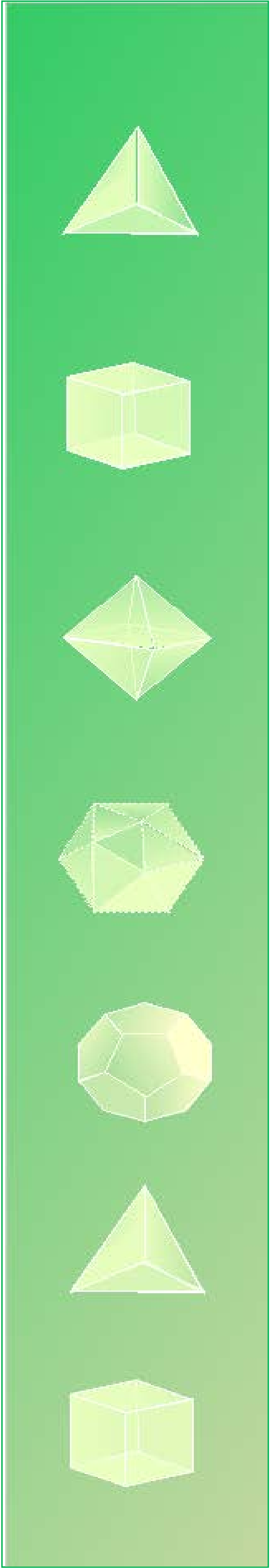


Matemáticas Generales. 1º Bachillerato. Capítulo 9: Programación lineal

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-060142

Fecha y hora de registro: 2015-01-03 17:59:41.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisor: Eduardo Cuchillo

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Índice

BOE:
Programación lineal: modelización de problemas reales y resolución mediante herramientas digitales.

Resumen

Nos adentramos en el tema más *moderno* de todos los que se imparten en la asignatura de Matemáticas en el instituto. La **programación lineal** es una técnica matemática desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial para reducir los costes de gestión y, como tal herramienta militar, se mantuvo en secreto hasta pocos años después del final de la guerra. Una vez *liberado* a la sociedad, es empleado por prácticamente todas las grandes empresas.

En este capítulo hablaremos de problemas simples con dos variables (x e y), si bien en la realidad se encuentran sistemas de más variables. En ese caso el procedimiento es complejo y se resuelve con medios informáticos, bien por el *Método Simplex* ideado por G. B. Danzig en 1951 o, más recientemente, con el algoritmo Karkamar o *método del punto interior*, desarrollado en 1984 por el matemático indio Narenda Karmarkar y que suele ser más eficiente que el Método Simplex.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

1. PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1. Definición

Qué es la programación lineal. Un Profesor

https://www.youtube.com/watch?v=MfE_RP_3Wz0

Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende **optimizar** (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales.

La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.

La expresión general de un problema de programación lineal en dos dimensiones es, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = a\cdot x + b\cdot y \rightarrow$ Máximo o mínimo

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} a_1 x + b_1 y \neq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \neq c_2 \\ \quad\cdots \\ a_k x + b_k y \neq c_k \end{cases}$$

donde la desigualdad representada por $\neq$ puede ser de los cuatro tipos explicados antes ($>$, $<$, $\leq$ o $\geq$).

Típicamente una de las restricciones es que los valores sean positivos, es decir: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

La **solución factible** que hace óptima (máxima o mínima, según se desee) la función objetivo, se llama **solución óptima**, y siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

1.2. Teorema fundamental de la programación lineal

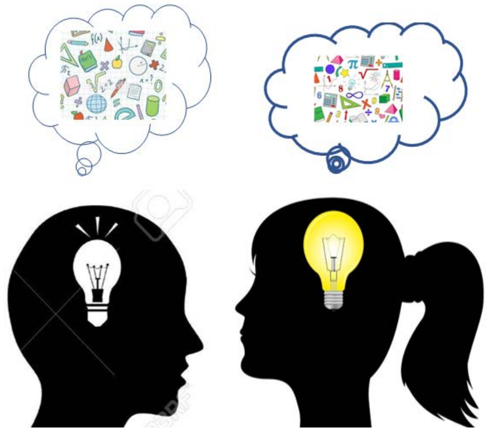
En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

De este teorema obtenemos dos consecuencias:

- Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.
- En el caso de que la región factible no sea acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los **vértices** de la región.

Textos Marea Verde

Actividad resuelta



- *Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone de 1 800 millones de euros, siendo el coste de cada avión 30 y 20 millones de euros, respectivamente. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de aviones producidos no sea mayor de 80.*
  Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de un avión del tipo A es de 4 millones de euros y en el tipo B, 3 millones de euros. ¿Cuántos aviones debe construir de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Debemos **LEER** con cuidado el problema y traducirlo adecuadamente al lenguaje algebraico, tal y como se dijo en el capítulo anterior.

La programación lineal pretende optimizar una función, en este caso es hacer máximo el beneficio, que depende de dos variables (las escribimos):

$$\text{Sean } \begin{cases} x = \text{número de aviones de tipo } A \\ y = \text{número de aviones de tipo } B \end{cases}$$

Para plantear la función a optimizar (la **función objetivo**), y las restricciones organizamos la información del problema:

	Nº aviones	Coste	Beneficio
Tipo A	x	**30**	**4**
Tipo B	y	**20**	**3**
Restricciones	No sea mayor de 80 $x+y\le 80$	Dispone de 1800 € $30x+20y\le 1800$	**Función Objetivo** $z=4x+3y$

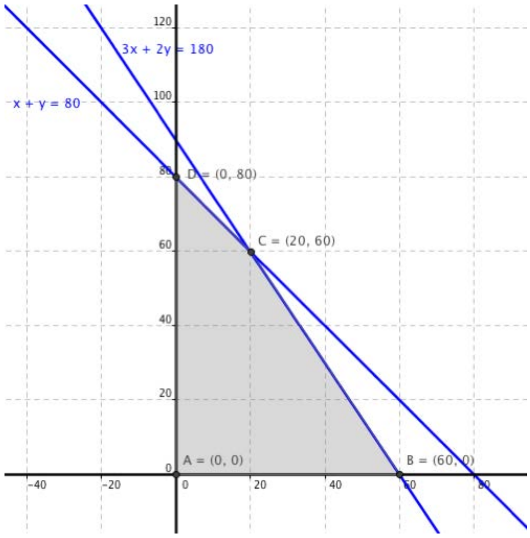
Falta un detalle a tener en cuenta, los valores deben ser positivos (no se puede tener un número negativo de aviones), es decir: $x\ge 0$ e $y\ge 0$, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = 4x + 3y \to$ Máximo (en millones de euros)

Restricciones: $$\begin{cases} r_1 : x+y\le 80 \\ r_2 : 30x+20y\le 1800 \\ r_3 : x\ge 0 \\ r_4 : y\ge 0 \end{cases}$$

Obtenemos la *región factible*:

Textos Marea Verde



Se trata de encontrar los *vértices* de la región factible.

Para ello se resuelven todos los sistemas que se pueden formar con las **ecuaciones** de las restricciones, que nos van dando los distintos puntos de corte de las rectas:

$$\begin{cases} x+y=80 \\ 30x+20y=1800 \end{cases} \to (20,\ 60) \qquad \begin{cases} x+y=80 \\ x=0 \end{cases} \to (0,\ 80) \qquad \begin{cases} 30x+20y=1800 \\ y=0 \end{cases} \to (60,\ 0)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \to (0{,}0) \qquad \begin{cases} x+y=80 \\ y=0 \end{cases} \to (80,\ 0) \qquad \begin{cases} 30x+20y=1800 \\ x=0 \end{cases} \to (0{,}90)$$

Los puntos $A(20,60)$, $B(0,80)$, $C(60,0)$, $D(0,0)$, $E(80,0)$ y $F(0,90)$ son los puntos de corte de las rectas que forman la región factible, pero no todos ellos tienen por qué ser los vértices de la región factible.

Los vértices de la región factible cumplen todas las restricciones (y no sólo dos), por lo que tenemos que ver cuáles de estos puntos cumplen todas las restricciones. Aunque podemos verlo en la representación gráfica, también podemos comprobar analíticamente cuáles forman la región factible sustituimos cada punto en las restricciones restantes:

- E no cumple la restricción $30x + 20y \leq 1800$, ya que $30\cdot 80 + 20\cdot 0 = 2400 > 1800$, por lo que E no es un vértice de la región factible.
- F no cumple $x + y \leq 80$, ya que $0 + 90 = 90 > 80$, por tanto F no es un vértice de la región factible.

Es decir, que la región factible tiene como vértices los puntos A, B, C y D, que son los que verifican todas las restricciones:

$\{r_1, r_2\}$	$\{r_1, r_4\}$	$\{r_2, r_3\}$	$\{r_3, r_4\}$
$A{:}(20,60)$	$B{:}(0,80)$	$C{:}(60,0)$	$D{:}(0,0)$

El último paso es ver cuál de los vértices que forman la región factible hace máxima la función objetivo.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

1.2.1. Método algebraico

El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.

En el ejemplo: $f(x,y)=4x+3y$. Sustituimos los valores de los cuatro vértices:

Punto	Función objetivo
$A:(20,60)$	$f(20,60)=4\cdot 20+3\cdot 60=260$
$B:(0,80)$	$f(0,80)=4\cdot 0+3\cdot 80=240$
$C:(60,0)$	$f(60,0)=4\cdot 60+3\cdot 0=240$
$D:(0,0)$	$f(0,0)=4\cdot 0+3\cdot 0=0$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice $A:(20,60)$:

Solución: Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

Introducción a la Programación Lineal. Matemáticas Informáticas.

https://www.youtube.com/watch?v=ceHLG7IuQlM

Actividad propuesta

$$\begin{cases} r_1: x+y\le 80 \\ r_2: 30x+20y\le 1800 \\ r_3: x\ge 0 \\ r_4: y\ge 0 \end{cases}$$

1. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:

a) $z = 2x + 4y \rightarrow$ Máx b) $z = 4x + 3y \rightarrow$ Mín c) $z = 4x + 3y \rightarrow$ Máx

1.2.2. Método gráfico o de las rectas de nivel

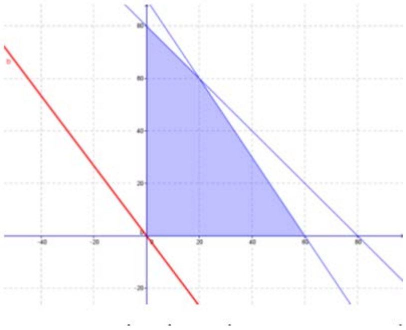
En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Una vez hallada la región factible se representan las **rectas de nivel** asociadas a la función objetivo ($ax+by=k$) y se ve cuál es la que toma un valor k óptimo (en este caso máximo).

Para realizar este paso lo que se hace es dibujar una recta de nivel cualquiera y luego trazar paralelas a ella hasta encontrar el vértice de la región factible que haga óptima la función objetivo:

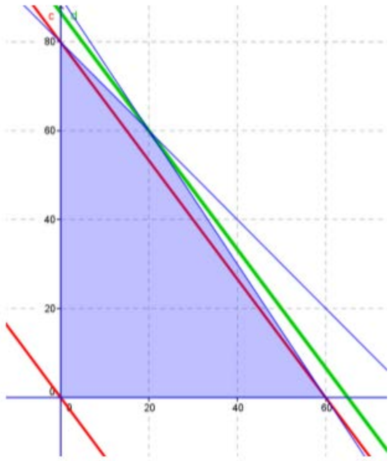
- Si se pretende buscar un máximo, el punto (o puntos) más a la derecha.
- Si se pretende buscar un mínimo, el punto (o puntos) más a la izquierda.

En el ejemplo la función objetivo es $z = 4x + 3y$. Las curvas de nivel son de la forma $4x + 3y = k$. Las representamos sobre la región factible empezando por la más fácil, la que pasa por el origen:

BY NC SA
Textos Marea Verde



y trazamos paralelas a ella que pasen por cada vértice hasta encontrar la más *extrema*:



La solución óptima es la recta de color verde, que pasa por el vértice $A:(20,60)$ y hace que:

$$z = 4x + 3y \Rightarrow z = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$$

Hay que construir 20 aviones del tipo A, 60 del tipo B y el beneficio es de 260 millones de euros.

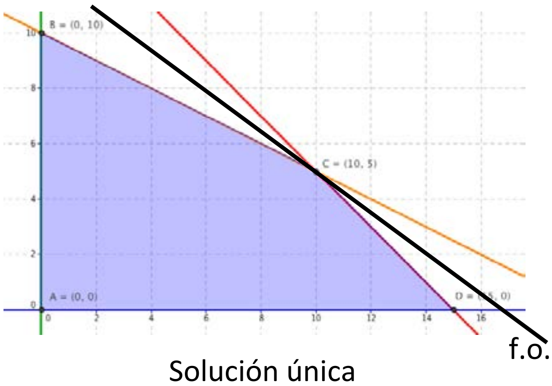
A lo largo de la explicación hemos ido viendo que es posible combinar ambos métodos para facilitar la obtención de la solución. Representar gráficamente la región factible ahorra tiempo al determinar los vértices, mientras que evaluar $f(x,y)$ es más preciso que el trazado de paralelas.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

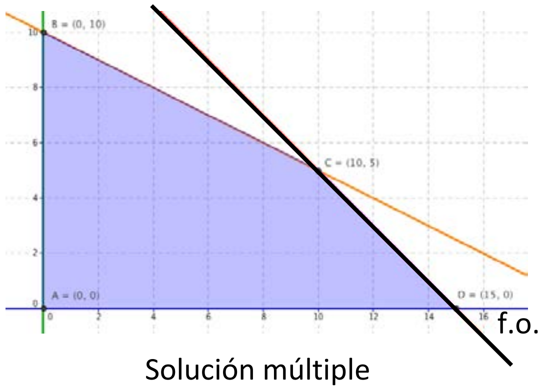
1.3. Tipos de soluciones en programación lineal

Vamos a considerar las distintas situaciones que se suelen presentar en los programas lineales para dos variables. Los programas lineales para dos variables pueden clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presentan, en los casos siguientes:

- **Factibles con solución única**, cuando presentan un único óptimo.
- **Factibles con solución múltiple**, si presentan más de una solución óptima. En estos casos, las soluciones suelen ser todos los puntos de un segmento, es decir, los puntos comprendidos entre dos vértices de la región factible.

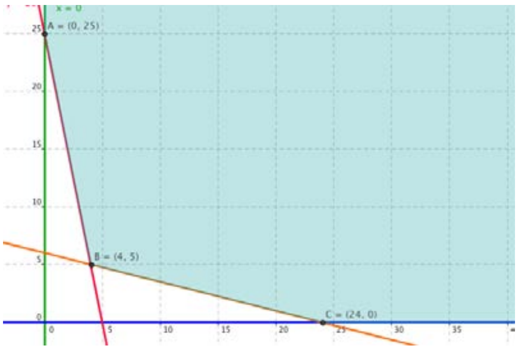


Solución única



Solución múltiple

- **Factible no acotada**, cuando no existe límite para la función objetivo, es decir, la función objetivo puede hacerse tan grande como se desee en la región factible.
- **No factible**, si no existe el conjunto de soluciones. En estas situaciones, las desigualdades que describen las restricciones son inconsistentes.



Solución no acotada

No factible

Actividades propuestas

2. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

$$\text{f.o. } f(x,y)=2x+3y \quad \text{s.a.}\begin{cases} x+y\geq 2 \\ 2x+3y\leq 6 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } f(x,y)=x+3y \quad \text{s.a}\begin{cases} 2x+5y\leq 300 \\ x+y\leq 90 \\ x\geq 0 \\ y\geq 15 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z=x+y \quad \text{s.a.}\begin{cases} 2x+3y\leq 120 \\ x\geq y \\ 0\leq x\leq 45 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z=1{,}5x+2y \quad \text{s.a.}\begin{cases} 3x+4y\geq 12 \\ x\geq y \\ 0\leq x\leq 20 \\ 0\leq y\leq 10 \end{cases}$$

Textos Marea Verde

2. PROBLEMAS RESUELTOS

Típicamente se da un nombre genérico a los diferentes tipos de problemas de programación lineal, pero no suele ser necesario preocuparse de asociar cada problema a uno de esos tipos si entendemos bien el enunciado.

2.1. Problema de producción

Actividad resuelta

- *Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente 700 kg de café tipo C y 800 kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de 2 partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana 2.2 euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana 2.6 euros por kg.*

  Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.

En este tipo de ejercicios es conveniente hacer un cuadro donde se vean todos los datos de que se disponen y que nos permiten escribir las restricciones y la función objetivo. Sean

$$\begin{cases} x = \text{kilos de mezcla A} \\ y = \text{kilos de mezcla B} \end{cases}$$

entonces:

Factores \ Productos	A	B	Recursos
C	$\frac{2}{3}x$	$\frac{1}{3}y$	700
K	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{3}y$	800
Productos	x	y	
Beneficios	$2.2\,x$	$2.6\,y$	

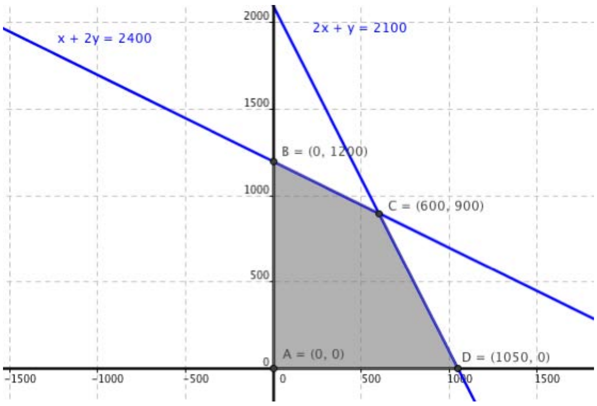
Las restricciones son:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y \le 700 \rightarrow 2x + y \le 2100$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \le 800 \rightarrow x + 2y \le 2400$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es:

$$z = 2.2 \cdot x + 2.6 \cdot y \rightarrow \text{Máx.}$$

Hallamos la región factible:



Tenemos una región factible ACOTADA, y los vértices son los puntos:

$$A\ (0,0),\ B\ (1050,0),\ C\ (600,900),\ D\ (0,1200).$$

El siguiente paso es ver que valores toma la función objetivo en cada uno de los vértices, para saber donde es óptima (máxima):

$A: z = 2.2 \cdot 0 + 2.6 \cdot 0 = 0$

$B: z = 2.2 \cdot 1050 + 2.6 \cdot 0 = 2310$

$C: z = 2.2 \cdot 600 + 2.6 \cdot 900 = \mathbf{3660}$ es el máximo

$D: z = 2.2 \cdot 0 + 2.6 \cdot 1200 = 3120$

Por tanto deben producirse 6**00 kg** de la mezcla tipo A y **900 kg** de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a **3 660 euros**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

PROGRAMACIÓN LINEAL. Comerciante compra NARANJAS. Academia DIEGO

https://www.youtube.com/watch?v=7_YJxXhPZV8

2.2. Problemas de dietas

Son típicos los problemas de programación lineal en los que lo que se quiere es preparar una dieta (mezcla) que reúna una serie de condiciones a partir de unos productos determinados que se encuentran en el mercado. Se trata de saber que cantidades (x e y) debemos mezclar de dichos productos.

Actividad resuelta

- *Una ganadería desea proporcionar a su ganado una dieta que contenga un mínimo de* 24 *unidades del pienso A y un mínimo de* 25 *unidades del pienso B. En el mercado se comercializan dos tipos de compuestos* C_1 *y* C_2*, elaborados con ambos piensos. El paquete de* C_1 *contiene* 1 *unidad de A y* 5 *de B, siendo su precio de* 1 *euro, y el de* C_2 *contiene* 4 *unidades de A y* 1 *de B, siendo su precio* 3 *euros.*

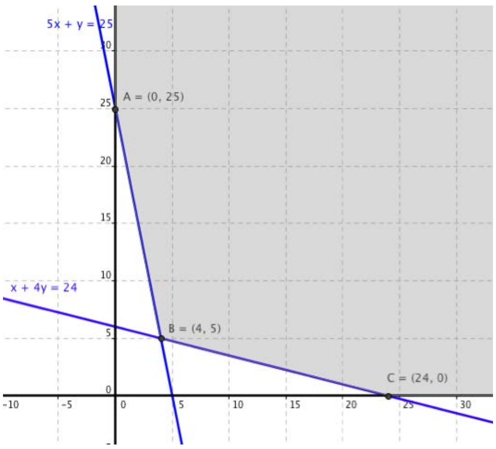
  ¿Qué cantidades de C_1 *y* C_2 *deberá emplear la ganadería para preparar su dieta con el mínimo coste?*

Mercado / Piensos	C_1	C_2	Unidades
A	1	4	24
B	5	1	25
Cantidad	x	y	
Coste	$1\,x$	$3\,y$	

Función Objetivo: $z = x + 3y \rightarrow$ mínima.

$$\textit{Restricciones:}\begin{cases} x + 4y \geq 24 \\ 5x + y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Hallamos la región factible:



Se trata de una región factible no acotada, y determinamos con exactitud los vértices:

$$A:\begin{cases} x = 0 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \rightarrow A:(0,25)$$

$$B:\begin{cases} x + 4y = 24 \\ 5x + y = 25 \end{cases} \rightarrow B:(4,5)$$

$$C:\begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \rightarrow C:(24,0)$$

Hallamos el valor que toma la función objetivo, $z = x + 3y$ en cada uno de los vértices:

$$z_A = 0 + 3\cdot 25 = 75$$
$$z_B = 4 + 3\cdot 5 = 19$$
$$z_C = 24 + 3\cdot 0 = 24$$

El óptimo, en este caso mínimo, se encuentra en el vértice B, por lo que se deben mezclar 4 paquetes de C_1 y 5 paquetes de C_2, con un coste de 19 euros.

Textos Marea Verde

2.3. Problemas de transporte

En estos casos se trata de resolver problemas de logística, es decir, transportar mercancías desde varios orígenes (ofertas o disponibilidades) hasta varios destinos (demandas o necesidades), con un coste mínimo, teniendo en cuenta las cantidades de que se dispone en los orígenes y las cantidades demandadas en los destinos, así como el coste de transporte entre cada origen y cada destino.

Actividad resuelta

- *Para abastecer de madera a tres aserraderos A_1, A_2 y A_3, hay dos bosques B_1 y B_2, que producen 26 y 30 toneladas respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son 20, 22 y 14 toneladas respectivamente. Si los precios de coste de transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son (en euros) los que se indican en la tabla adjunta, propón el transporte con el precio mínimo.*

	A_1	A_2	A_3
B_1	10	30	10
B_2	20	10	10

Tenemos dos orígenes que son los bosques B_1 y B_2 con sus ofertas (26 y 30 toneladas respectivamente) y tres destinos que son los aserraderos A_1, A_2 y A_3 con sus demandas.

La mayor dificultad consiste en manejar correctamente la información y plantear adecuadamente todo en función de las incógnitas elegidas. Sean

$$\begin{cases} x = \text{toneladas de madera desde } B_1 \text{ a } A_1 \\ y = \text{toneladas de madera desde } B_1 \text{ a } A_2 \end{cases}$$

Con ellas, las expresiones correspondientes a las toneladas desplazadas entre los demás bosques y aserraderos se recogen en la siguiente tabla:

Destinos / Orígenes	A_1	A_2	A_3	Ofertas
B_1	x	y	$26-(x+y)$	26
B_2	$20-x$	$22-y$	$14-[26-(x+y)]$	30
Demandas	20	22	14	
Costes	$10x+20(20-x)$	$30y+10(22-y)$	$10[26-(x+y)]+10(-12+x+y)$	z

La función objetivo viene dada por la suma de todos los costes y ha de ser mínima:

$$z = 10x + 20(20-x) + 30y + 10(22-y) + 10[26-(x+y)] + 10(-12+x+y) = -10x + 20y + 760$$

$$z = -10x + 20y + 760$$

Las restricciones son las que se deducen de tener en cuenta que todas las cantidades transportadas deben ser mayores o iguales a cero:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 26-(x+y) \ge 0 \to x+y \le 26 \\ 20-x \ge 0 \to x \le 20 \\ 22-y \ge 0 \to y \le 22 \\ -12+x+y \ge 0 \to x+y \ge 12 \end{cases}$$

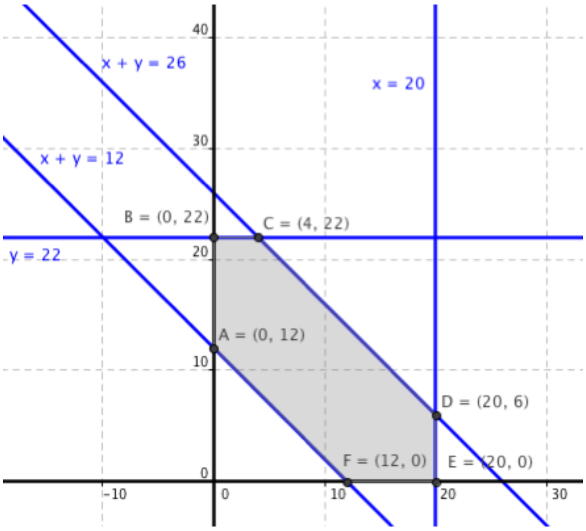
Textos Marea Verde

Por tanto, el problema queda planteado como:

$$\text{f.o. } f(x,y) = -10 \cdot x + 20 \cdot y + 760 = \text{mín}$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 26 \\ x + y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 22 \end{cases}$$

Construimos la región factible:



Determinamos exactamente los vértices:

$$A\ (12{,}0);\ B\ (20{,}0);\ C\ (20{,}6);\ D\ (4{,}22);\ E\ (0{,}22);\ F\ (0{,}12)$$

Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$z_A = -10\cdot 12 + 20\cdot 0 + 760 = 640$$

$$z_B = -10\cdot 20 + 20\cdot 0 + 760 = \mathbf{560}$$

$$z_C = -10\cdot 20 + 20\cdot 6 + 760 = 680$$

$$z_D = -10\cdot 4 + 20\cdot 22 + 760 = 1160$$

$$z_E = -10\cdot 0 + 20\cdot 22 + 760 = 1200$$

$$z_F = -10\cdot 0 + 20\cdot 12 + 760 = 1000$$

Por tanto, desde el bosque B_1 se deben llevar 20 toneladas al aserradero A_1, ninguna al A_2 y 6 toneladas al A_3 y desde el bosque B_2 se transportarán 22 toneladas al aserradero A_2 y 8 al A_3.
El coste de transporte será de 560 euros.

Actividades propuestas

3. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

y analiza si los puntos $(0{,}2)$, $(3{,}0)$, $(1{,}1)$ y $(5{,}6)$ al conjunto de soluciones del sistema anterior.

Textos Marea Verde

4. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x+3y \le 9 \\ x+y \ge 10 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

5. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y \le 15 \\ 2x+y \le 9 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

6. Sea S la región del plano definida por

$$y \ge 2x-4 \qquad y \le x-1 \qquad 2y \ge x \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

a) Representa la región S y calcula las coordenadas de sus vértices

b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

7. Se consideran la función $f(x;y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x-2y \le 0 \qquad x+y \le 6 \qquad x \ge 0 \qquad y \le 3$$

a) Representa la región S.

b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región S y obtén los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

8. Minimiza $z = -3x - 2y$ sujeta a

$$-2x+y \le 2 \qquad x-2y \le 2 \qquad x \ge 0 \qquad y \le 3$$

a) Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

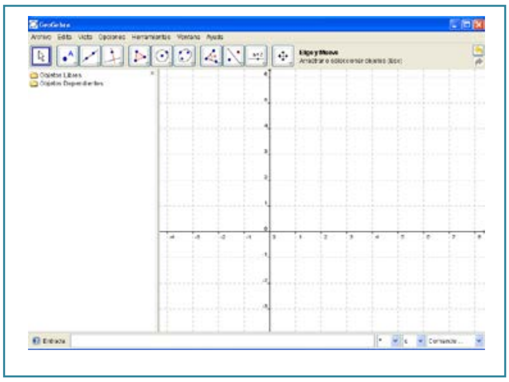
b) Si se añade la restricción: $x + y \ge 10$, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.

9. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Textos Marea Verde

2.4. Resolución de problemas de Programación Lineal con GeoGebra

GeoGebra es un software matemático **libre** que permite resolver problemas de geometría (en dos y tres dimensiones), de Álgebra y de Cálculo. Permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.



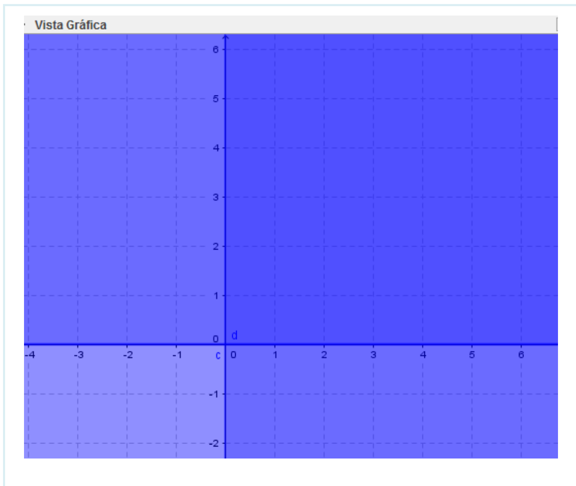
Al abrir el programa aparece una pantalla como la del margen, con menús desplegables, botones, una pantalla dividida en dos donde a la izquierda están las ecuaciones y a la derecha hay una cuadrícula y unos ejes que es donde aparecerán las gráficas. En la parte inferior está la *"Entrada"*, donde escribimos las ecuaciones y las funciones.

Vamos a resolver el siguiente problema

- *Una casa empacadora de alimentos recibe diariamente* 700 *kg de café tipo C y* 800 *kg de café tipo K. Hace con ellos dos mezclas. La de tipo A que consta de* 2 *partes de café de tipo C y una parte de café de tipo K y en la que gana* 2.2 *euros por kg; y la de tipo B con una parte de café tipo C y dos partes de café tipo K y en la que gana* 2.6 *euros por kg. Halla la cantidad de mezcla que la casa empacadora debe hacer de cada tipo para que la ganancia sea máxima.*

Las restricciones son:

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{3}y \le 700 \to 2x+y \le 2100$$
$$\tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}y \le 800 \to x+2y \le 2400$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

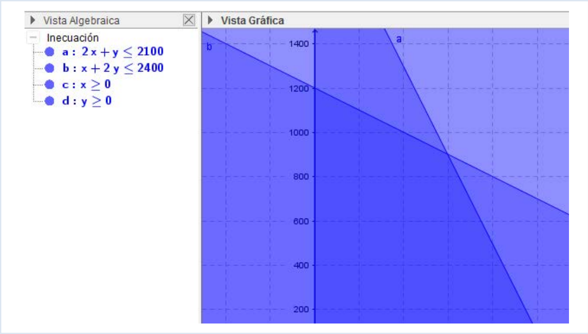


Podemos dibujar una tras otra las **desigualdades** del problema, escribiéndolas todas en la casilla "*Entrada*". Para ello, tecleamos sucesivamente:

```
2x+y<=2100
x+2y<=2400
x>=0
y>=0
```

Y el resultado es la *decepcionante* imagen anterior. Si alejamos y colocamos la imagen en la pantalla, bien con los botones y menús de GeoGebra, bien con el ratón (la rueda hace *zoom*), llegamos a:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo



La región factible es la zona que, en la imagen, se ve color azul más oscuro, donde se superponen todas las desigualdades.

Sin embargo, esta no es la forma correcta de obtener la región solución de un sistema de inecuaciones.

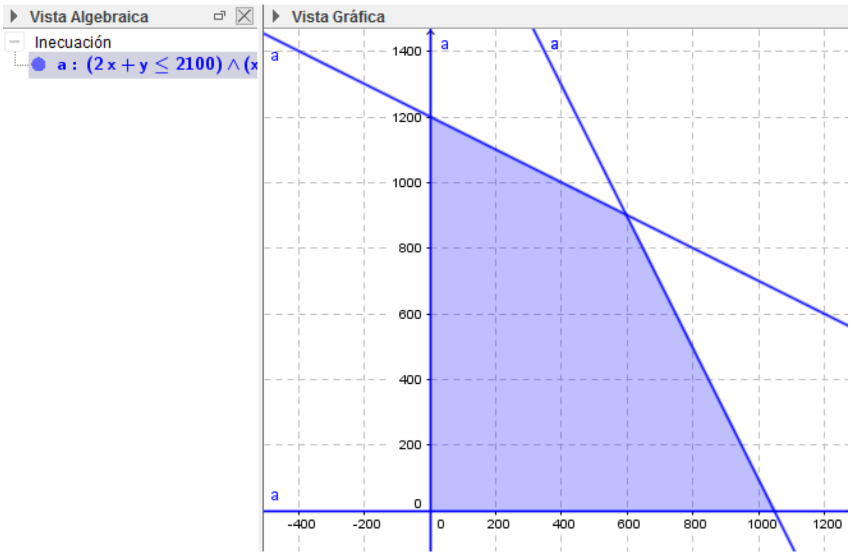
GeoGebra dispone de *comandos* que facilitan tanto la escritura como la observación de la región factible.

En este caso, nos interesa que se verifiquen todas las inecuaciones a la vez, es decir, deben verificarse la inecuación 1 **Y** la inecuación 2 **Y** la inecuación 3 **Y** la inecuación 4. Ese "Y" se escribe con &&.

Entonces, desde una pantalla en blanco, escribimos en la barra de "*Entrada*":

```
2x+y<=2100 && x+2y<=2400 && x>=0 && y>=0
```

y, entonces, se obtiene directamente (o después de ajustado el *Zoom*) la región factible:

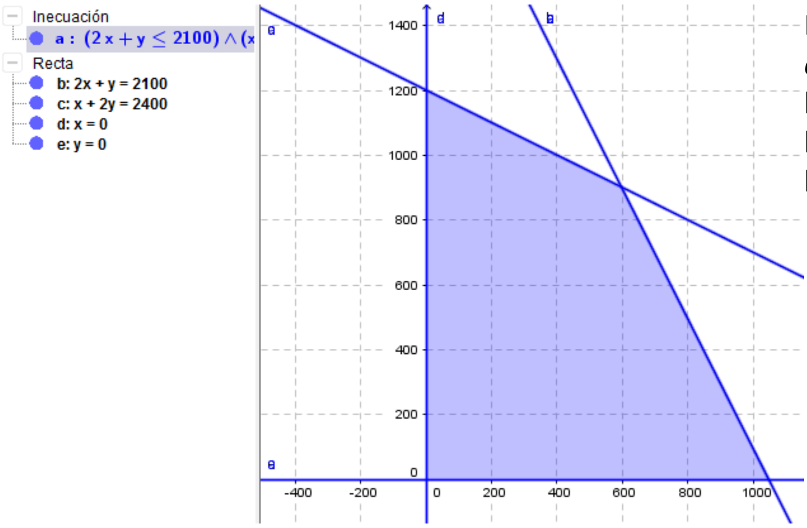


Para hallar los vértices de la región factible debemos representar las rectas sobre el polígono obtenido. De nuevo, en la barra de Entrada escribimos sucesivamente:

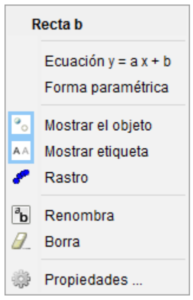
```
2x+y=2100
x+2y=2400
x=0
y=0
```

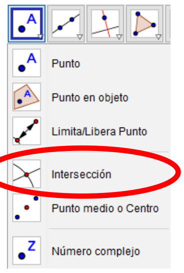
obteniendo:

Textos Marea Verde



El aspecto de la imagen no es muy *atractivo*, pero podemos cambiarlo haciendo clic con el botón derecho sobre la gráfica o la ecuación y pulsando el botón derecho del ratón:

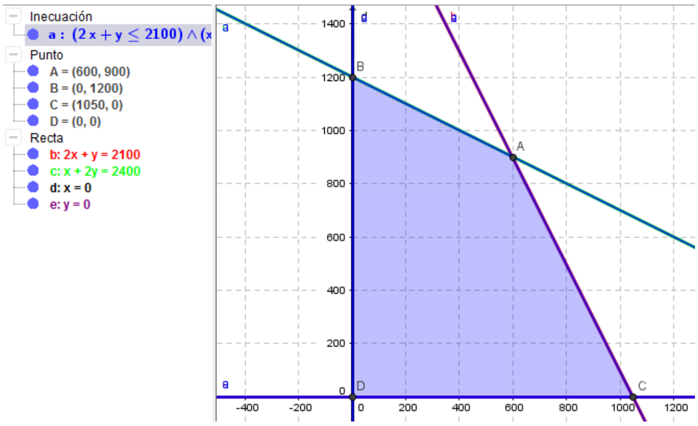




Entrando en *propiedades* tenemos de nuevo varias opciones: básico, color, estilo, álgebra y avanzado. Podemos cambiar el *color* de las rectas, el grosor del trazo…

Para determinar los vértices, seleccionamos la opción "*Intersección*" en el botón "Punto" y elegimos las rectas cuya intersección estamos buscando, en nuestro caso, b con c, c con d, b con e y d con e (que proporciona el origen de coordenadas).

Tras todo el proceso, llegamos a obtener la siguiente pantalla:



Podemos añadir etiquetas, mostrar u ocultar los objetos que no nos interesen,… pero continuemos con el proceso de resolución.

Queremos que el beneficio sea máximo, por tanto la función objetivo es:

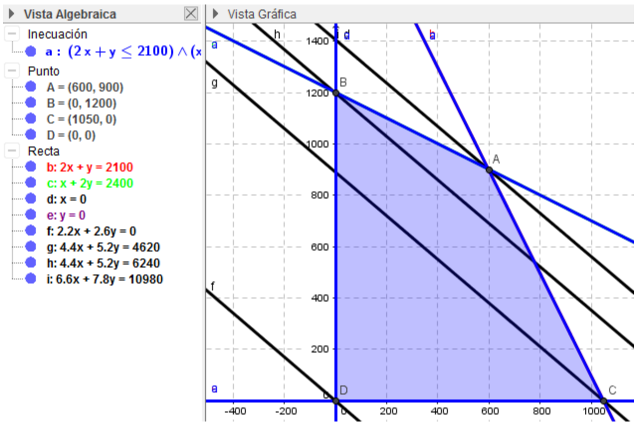
$$z = 2.2x + 2.6y \qquad \text{Máx.}$$

Trazamos, en color negro, una recta paralela a la función objetivo que pase por el origen de coordenadas. Tecleamos en la barra de "*Entrada*":

```
2.2x+2.6y=0
```

Utilizando el botón: "*Recta paralela que pase por un punto*", trazamos las rectas paralelas a la función objetivo, que pasan por cada uno de los vértices:

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde



La recta más alejada del origen es la que hace máximo la función objetivo. Por tanto es la que pasa por el punto A. Hallamos el valor de la función objetivo en ese punto:

$$A : z = 2.2 \cdot 600 + 2.6 \cdot 900 = \mathbf{3660} \text{ es el máximo}$$

Por tanto deben producirse 600 kg de la mezcla tipo A y 900 kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a 3 660 euros.

Deben producirse **600** kg de la mezcla tipo A y **900** kg de la de tipo B para que el beneficio sea máximo e igual a **3 660 euro**s.

Actividad propuesta

10. Intenta utilizar GeoGebra para volver a resolver los problemas de las actividades ya realizadas.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

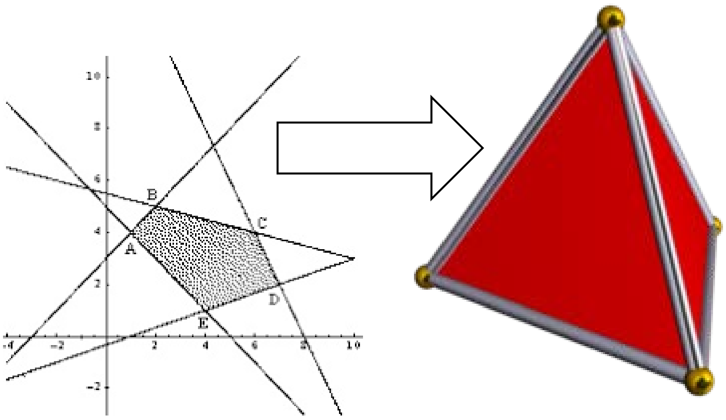
Danzig. Una anécdota

Quizás no sea cierto, pero se cuenta que, **George Bernard Dantzig** (1914 – 2005), siendo estudiante llegó un día tarde a clase, y al entrar vio escritos en la pizarra dos problemas, pensó que estaban propuestos como tarea para casa, así que se puso a resolverlos. Le resultaron difíciles. A la clase siguiente se los entregó al profesor, Jerzy Neyman. ¡Eran problemas que hasta entonces nunca habían sido resueltos! El profesor habló con él y publicó uno de ellos en una revista científica.

Se le considera el "padre de la programación lineal"

Desarrolló el **Método del Simplex**.

¡Ya sabes resolver problemas de Programación Lineal! Pero… imagina que la región factible no está limitada por rectas, sino



- ¡Busca! ¡Investiga! Haz un trabajo y una presentación de 5 minutos sobre algo que te haya gustado de Programación Lineal. En la web puedes encontrar mucha información, vídeos, artículos…

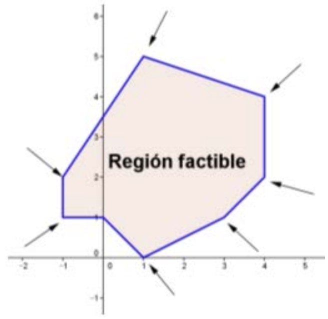
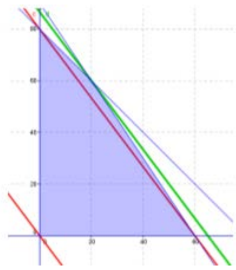
Más difícil todavía, imagina que hay más de tres variables, que hay muchas, por ejemplo, 216, entonces el poliedro estaría en un espacio de más de tres dimensiones, de muchas, muchas dimensiones.

La forma de resolverlo sería la que ya conoces, o similar, pero mucho más complicada de calcular. Habría que hacerlo con un ordenador. Y aun así, la complejidad puede ser enorme. Es necesario estudiar métodos que hagan posible que el ordenador sea capaz de hacerlo. Dantzig desarrolló el Método del Simplex, y posteriormente, en 1984, **Narendra Krishna Karmarkar** (nacido alrededor de 1956) publicó el método conocido como algoritmo de Karmarka o métodos de puntos interiores, que, parece, hacen más rápido el cálculo

Narendra Krishna Karmarkar

Textos Marea Verde

RESUMEN

Sistemas de inecuaciones lineales	Un sistema de inecuaciones lineales es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.	$\begin{cases} x+y\le 80 \\ 30x+20y\le 1800 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$
Programación lineal	Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende optimizar (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales. La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.	f.o.: $f(x,y)=a\cdot x+b\cdot y \to$ Máx o mín $s.a.:\begin{cases} a_1x+b_1y\ne c_1 \\ a_2x+b_2y\ne c_2 \\ \dots \\ a_kx+b_ky\ne c_k \end{cases}$
Teorema fundamental	En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.	
Método algebraico de resolución	El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.	
Método gráfico de resolución	En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Sobre la región factible se representan las rectas de nivel asociadas a la función objetivo ($ax+by=k$) y se ve cuál es la que toma un valor k óptimo.	
Tipos de soluciones	- Factibles con solución única. - Factibles con solución múltiple, - Factible no acotada. - No factible.	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Maximizar la función $z = 3x + 3y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

2. Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$ sometida a las restricciones

$$y \le 4 \qquad x \le 3 \qquad x - y \le 3 \qquad x - y \ge 0$$

3. Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta.

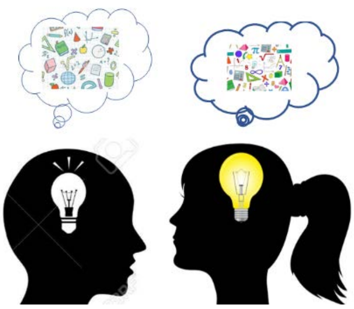
	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7.5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

4. Desde dos almacenes A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diaria y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste de transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado, en euros por tonelada, en el cuadro adjunto.

	M_1	M_2	M_3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.



5. Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20 000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

6. En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

BY NC SA

7. Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3 000 unidades y menor que 6 000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción?

b) Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

8. Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8 000 y 15 000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10 000, 7 000 y 6 000 piezas respectivamente.

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2
- La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2
- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1

9. Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0.3 mg de vitaminas y 4.5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0.2 mg de vitaminas y 1.5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

10. Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40 % de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.

a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?

11. Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20 % de las piezas que se coloquen sean jardineras.

a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
BY NC SA
Textos Marea Verde

12. Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de 1 100 m^2 para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m^2. El aparcamiento ha de tener como poco 300 m^2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m^2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m^2, y el área recreativa 45 euros por m^2.

a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?

13. Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos.

a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual?

b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?

14. Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.

Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.

a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

15. En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0.25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0.5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?

16. Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9 000 euros y el modelo B a 12 000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36 000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1.- Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

a) $5x+2y<7$ b) $5x+2y\le 7$ c) $5x+2y=7$ d) $5x+2y\ge 7$

2.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotado:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

3.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

4.- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice

b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

c) La región factible determina la función objetivo.

d) En un programa lineal se optimiza la región factible.

5.- Una nueva granja estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

6.- Para este problema la función objetivo es:

a) $3x+4y\rightarrow$Mín b) $x+y\rightarrow$Máx c) $x+y\rightarrow$Mín d) $3x+4y\rightarrow$Máx

7.- Para este problema las restricciones son:

a) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x>y \end{cases}$

8.- Resuelve el problema e indica si la solución es:

a) No tiene solución. b) 100 patos y 100 gansos.

c) 233 patos y ningún ganso. d) Ningún ganso y 175 patos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisor: Eduardo Cuchillo
Textos Marea Verde