Matemáticas Generales: 1º Bachillerato

Capítulo 8: Igualdad y desigualdad

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual

BOE: Resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones en diferentes. Contextos mediante herramientas digitales.

Madrid: Ecuaciones recursivas y paramétricas. FALTA. Podría ir en el 1.8.

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ECUACIONES E INECUACIONES

2. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES LINEALES

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Resumen

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tú conoces tan bien cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado. En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado. Para imponer que la ecuación $ax + b = 0$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números naturales debe ampliarse con los números negativos. Para imponer que la ecuación $ax = b$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números enteros debe ampliarse con los números fraccionarios. Para imponer que la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, (recuerda $x^2 = 2$), tenga solución, el conjunto numérico debe ampliarse con los números irracionales. Pero la ecuación $x^2 + 1 = 0$, todavía no tiene solución en el conjunto numérico de los números reales, con lo que, de nuevo habrá que ampliar el conjunto numérico con los números complejos.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ECUACIONES E INECUACIONES

1.1. Igualdad. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $5x + 4$ y $8x + 1$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $5x + 4 = 8x + 1$.

Ejemplo:

- $\mathbf{7x - 2 = 6x + 9}$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $\mathbf{5x + 3y = 2}$; o $\mathbf{y = 4x - 9}$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $\mathbf{3x - 8 = 4x + 3}$ es una ecuación de primer grado, mientras que $\mathbf{5x + 6xy^2 = 9}$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $6xy^2$ tiene grado 3 $(1 + 2 = 3)$.

1.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $\mathbf{8x - 4 = 6x + 2}$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $8 \cdot 1 - 4 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $6 \cdot 1 + 2 = 6 + 2 = 8$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 3$, el primer miembro toma el valor: $8 \cdot 3 - 4 = 24 - 4 = 20$; y el segundo miembro: $6 \cdot 3 + 2 = 20$. Por tanto 3 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo:

- $\mathbf{2x - 7 = 11}$ es equivalente a $\mathbf{2x = 18}$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $\mathbf{x = 9}$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Recuerda que:

1. Para todo c, si $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
2. Para todo c, si $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación **$4x + 7 = x - 4$** transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $4x + 8 = x - 4$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 8: $4x - x + 8 - 8 = x - x - 4 - 8$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $4x - x = -4 - 8$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $3x = -12$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3}$ de donde $x = -4$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -4$.

Este procedimiento es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2.

Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen por qué ser números enteros como en el ejemplo.

Actividades propuestas

1. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

1.3. Desigualdad

Ya sabes que:

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- **$-5 < 2$, $9 \geq x + 2$, $x^2 - 11 \geq x$, $2x + 3y \geq 7$.**

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Por ejemplo:

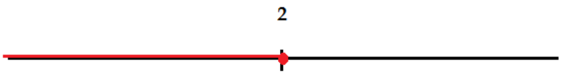
- **$7 \geq x + 1$** es una inecuación de primer grado, mientras que **$x^2 - 14 \geq x$** es de segundo grado.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- **$7 \geq x + 5$** $\Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$ $\Leftrightarrow$



1.4. Inecuaciones equivalentes

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

1. Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.
2. Multiplicar o dividir ambos miembros por un número **positivo**.
3. Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

Recuerda que:

1. Para todo c, si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. Si $c > 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
3. Si $c < 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Ejemplos

- **$4x + 7 < 13$** $\Leftrightarrow 4x + 7 - 7 < 13 - 7 \Leftrightarrow 4x < 6 \Leftrightarrow 4x : 4 < 6 : 4 = 3/2 \Leftrightarrow x < 3/2$.
- **$8 \geq x + 2$** $\Leftrightarrow 8 - 2 \geq x + 2 - 2 \Leftrightarrow 6 \geq x$.
- **$-x < 5$** $\Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -5$

Actividades propuestas

2. Dada la siguiente inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$$

3. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

a) Sumar 3: $x - 1 > 4$

b) Restar 5: $x - 3 > 7$

c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$

d) Multiplicar por -5: $-3x \geq 7$

e) Dividir entre 2: $4x < 10$

f) Dividir entre -2: $4x \geq 10$

4. Escribe una inecuación que sea cierta para $x = 3$ y falsa para $x = 3.5$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Resolución de ecuaciones de 2º grado

Recuerda que:

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para los coeficientes *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de la ecuación.

Llamamos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1=\frac{3+1}{2}=2;\qquad x_2=\frac{3-1}{2}=1.$$

En efecto, $2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, y $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, luego 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$ c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x-3\cdot\frac{x-1}{5}=6x^2-\frac{8x-3}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5}-\frac{3-2x}{x}=10$; c) $5x\cdot(x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x}-\frac{4}{3}=\frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x}-\frac{4}{3}=\frac{2x-1}{15}$.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

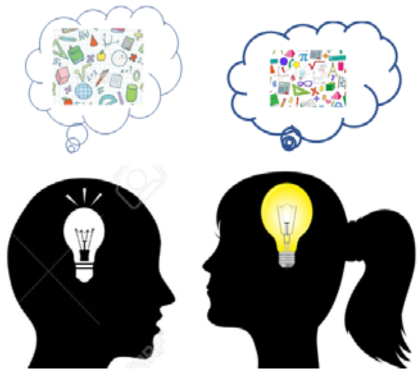
1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar la incógnita.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear la ecuación y resolverla.

5.- Comprobar la solución obtenida.



Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = $\boldsymbol{x}$

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico: $\mathbf{5x + 6 = x^2}$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \; ; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Actividades propuestas

8. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

9. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

10. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

11. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

12. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

13. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

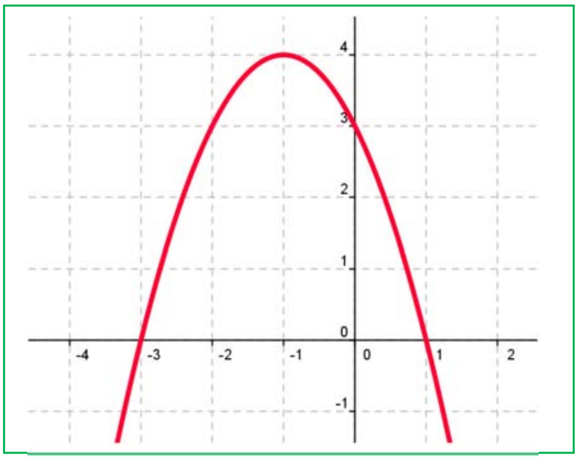
empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- Representa gráficamente la parábola $\boldsymbol{y = -x^2 - 2x + 3}$ e indica en qué intervalos es $\boldsymbol{-x^2 - 2x + 3 > 0}$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad $\geq$, $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ la solución sería:

$$x \in [-3, 1].$$

Si fuera $-x^2 - 2x + 3 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3] \cup [1, +\infty)$.

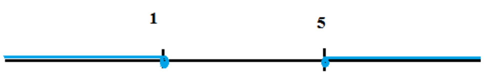
Ejemplo:

- $\boldsymbol{x^2 - 6x + 5 \geq 0}$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ sus raíces son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$



Actividades propuestas

14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$

e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

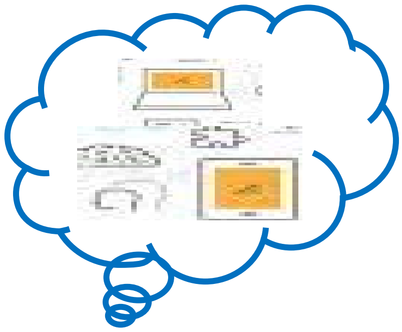
15. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 5x \geq 0$ b) $3x^2 - 27 > 0$ c) $x^2 \leq 0$

d) $2x^2 > 4x$ e) $2x^2 - 8 > 0$ f) $5x^2 + 5x \geq 0$

g) $5x^2 - 5 \leq 0$ h) $x^2 - x > 0$

16. Te puedes ayudar de GeoGebra para representar las rectas, las parábolas o las regiones factibles, así, resolver estas inecuaciones.



17. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

18. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$

c) $x^2 - x - 20 < 0$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$

19. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

20. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 51$

c) $\frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 6}$

21. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para comprobar la solución de todos los ejercicios anteriores.

1.8. Otras ecuaciones e inecuaciones

Hay también ecuaciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales.

Así, si la incógnita está en un exponente la ecuación se denomina **exponencial**. Si podemos expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, se igualan los exponentes.

Ejemplo:

- Resuelve: $2^{2x} = \frac{1}{16}$

Expresamos la ecuación como potencias de una misma base: $2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4}$

Igualamos los exponentes: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Ejemplo:

- Resuelve la desigualdad: $2^{2x} \geq \frac{1}{16}$

Resolvemos la ecuación asociada: $2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4} \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Se divide la recta real en dos intervalos. Probamos con un punto, por ejemplo, con $x = 0$:

$$2^{2x} \geq \frac{1}{16} \rightarrow 2^{2(0)} = 1 \geq \frac{1}{16}$$

Por tanto, la solución es $x \in [-2, +\infty)$

Actividades propuestas

22. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11) = 0$ b) $3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4) = 0$

23. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12\,100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.

24. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$.

25. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x + 2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x + 9$.

26. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8$.

Ecuaciones recursivas

En una ecuación recursiva cada término se obtiene a partir de términos anteriores.

Ejemplos:

- *La sucesión de Fibonacchi*

La sucesión de Fibonacchi es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…. Observa que cada término se obtiene sumando los dos anteriores, luego: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$

- *Factorial*

Ya sabes que $n! = n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, \ldots \,.3.2.1$. Por tanto de forma recursiva se puede escribir: $n! = n \,.\, (n-1)!$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES LINEALES

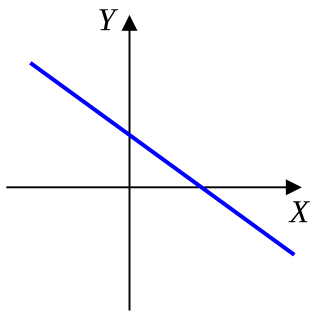
2.1. Ecuación lineal de dos incógnitas

Recuerda que:

Una **ecuación** con varias incógnitas es una igualdad que las relaciona.

Por ejemplo:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 49}$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 7.



Una **ecuación lineal** con dos incógnitas, es una expresión de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas y a, b y c son números reales, de los cuales a a y b se les denomina coeficientes y a c término independiente.

A todo par de números (x_0, y_0) que verifique la expresión anterior se le denomina **solución** de la ecuación.

La representación gráfica de todas las soluciones de dicha expresión será una **recta**.

2.2. Sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es la de una circunferencia de centro el origen y radio 5, y la segunda es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las soluciones del sistema son los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

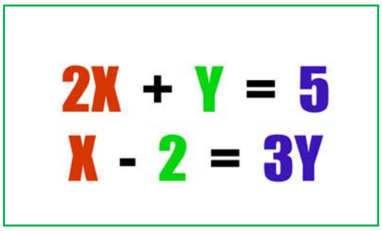
Se llama **solución del sistema** a cada uno de los conjuntos de números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales** con dos incógnitas es una expresión del tipo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtendremos dos rectas. El **punto de corte** de ambas rectas, si existe, será la única **solución del sistema**.



Ejemplo:

- *Por ejemplo, son sistemas de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

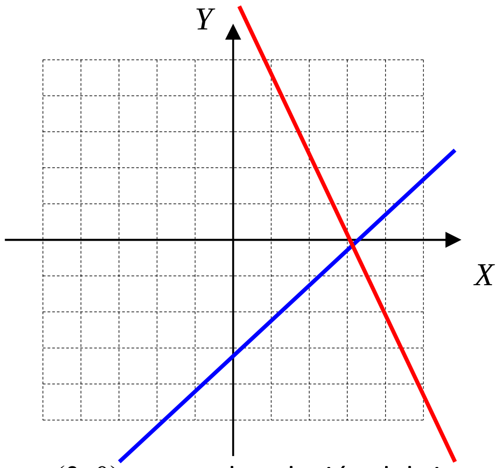
Ejemplo:

- ***No** son sistemas lineales* $\begin{cases} 9xy+2y=5 \\ 3x-xy=4 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*, ni $\begin{cases} 5x^2+9y=2 \\ 4x-3y=6 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2, aunque ambos son sistemas de dos ecuaciones.

Actividades resueltas

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

  Si representamos la gráfica de cada ecuación, obtenemos dos rectas:



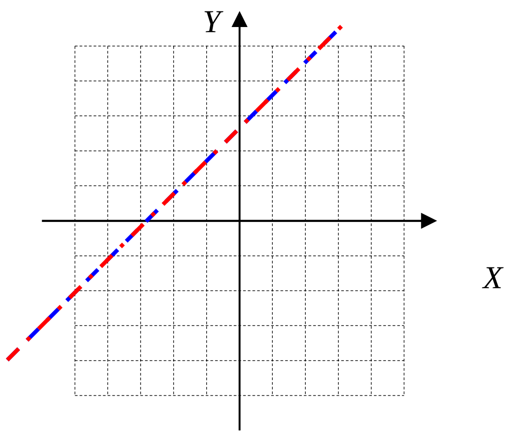
  Vemos que se cortan en el punto $(3,0)$, que es la solución del sistema:

  $$(x_0, y_0) = (3,0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$. Las rectas son **SECANTES**

Un **sistema de ecuaciones** que tiene una única solución se denomina **Compatible Determinado**.

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x-2y=-6 \end{cases}$

  En este caso obtenemos dos rectas **que se superponen**:

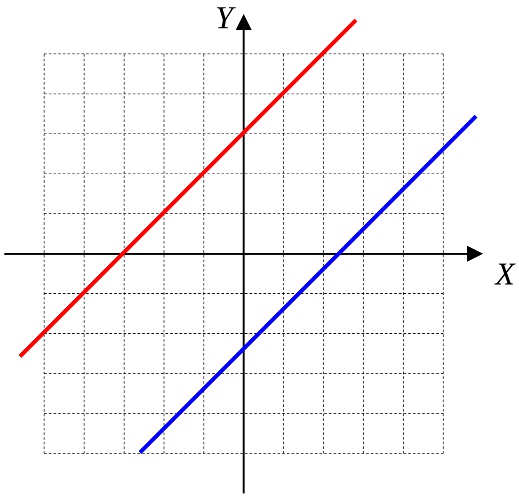


  Esto quiere decir que toda solución de una ecuación es también solución de la otra. El sistema, en este caso, tiene **infinitas soluciones**, que son los infinitos puntos de la recta. Las rectas son **COINCIDENTES**

Un **sistema de ecuaciones** con infinitas soluciones se denomina **Compatible Indeterminado**.

- *Resuelve gráficamente el sistema* $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

En este caso obtenemos dos rectas **paralelas**:

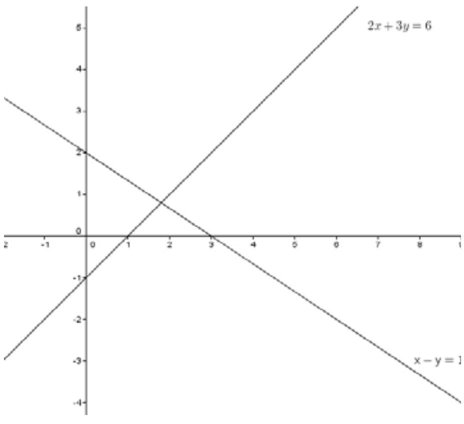


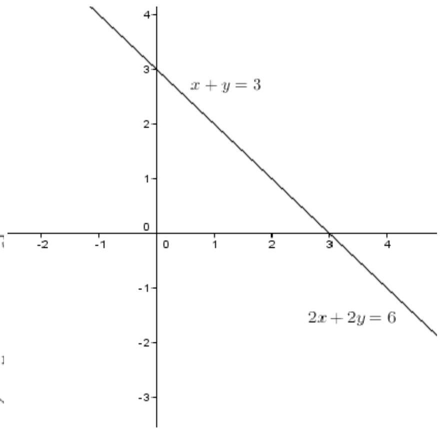
Las rectas **NO** se cortan en ningún punto, por tanto, el sistema no tiene solución. Las rectas son **PARALELAS**

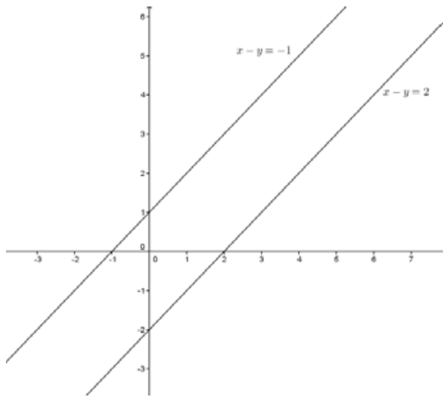
Un **sistema de ecuaciones** que no tiene solución se denomina **Incompatible..**

Podemos formar el siguiente esquema para clasificar los sistemas atendiendo al número de soluciones:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible}\begin{cases} \text{Determinado (SCD) (tiene una solución)} \\ \text{Indeterminado (SCI) (tiene infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (SI) (no tiene solución)} \end{cases}$$







Compatible determinado **Compatible indeterminado** **Incompatible**

Actividades resueltas

- *Añade una ecuación a* $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

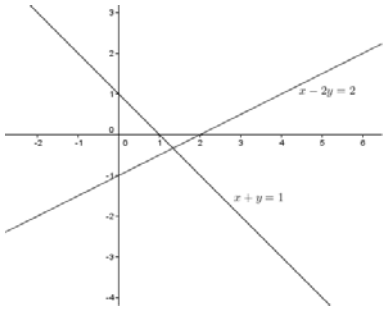
  a) Compatible determinado.

  b) Incompatible.

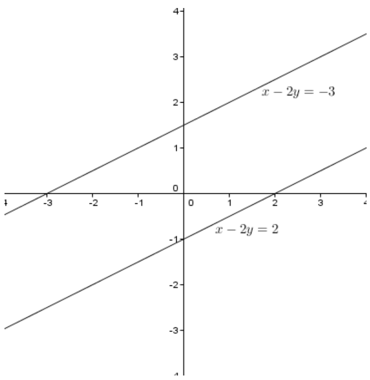
  c) Compatible indeterminado.

Solución:

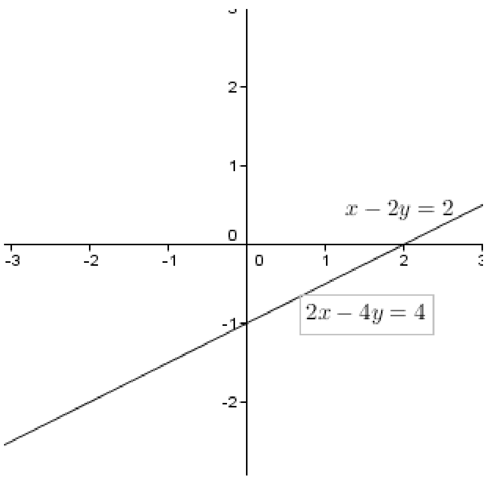
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la del ejercicio. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes tienen que ser los mismos pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$.



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

27. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

28. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

29. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

2.3. Sistemas equivalentes

Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.

Ejemplo:

- *Los sistemas*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 3x + 3y - 2z = 4 \\ x - y - 3z = -3 \\ x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$$

Tiene ambos la misma solución: $x = y = z = 1$.

Para pasar de un sistema a otro equivalente, se pueden usar las siguientes **Transformaciones de Gauss**:

a) *Cambiar el orden de las ecuaciones del sistema*.

b) *Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero*.

c) *Suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las demás*.

d) Sustituir una ecuación por la suma de ella más otra ecuación multiplicada por un número real cualquiera.

e) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida, en la combinación lineal, sea distinto de cero.

Esta última transformación se conoce como **Teorema Fundamental de equivalencia de sistemas.**

Ejemplo:

- *Transformemos el sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to 2F_1 - F_3}]{} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - 4z = -3 \\ 3y + z = 4 \end{cases}$$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Método de Gauss de resolución de sistemas lineales

MÉTODO DE GAUSS matrices ejercicios. Método de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales, Solución sistema. En este vídeo resolveremos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas aplicando el método de Gauss.

https://www.youtube.com/watch?v=RBJceTKociQ

La mejor forma de resolver sistemas lineales de más de dos incógnitas es ir sustituyendo el sistema por otro equivalente de forma que cada vez se consiga que sean ceros los coeficientes de más incógnitas. Este procedimiento se denomina ***Método de Gauss***.

Actividades resueltas

- Para resolver el sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x + y - 3z = 0} \\ \mathbf{x + 2y + z = 4} \\ \mathbf{x + 4y - 2z = 3} \end{cases}$, dejamos la primera ecuación sin modificar.

  Queremos que la segunda ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", para ello la multiplicamos por 2 y le restamos la primera. Para que la tercera ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", la multiplicamos por 2 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ahora podemos resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las dos últimas ecuaciones, o continuar con nuestro procedimiento. Para conseguir que en la tercera ecuación el coeficiente de la "*y*" sea un cero multiplicamos la tercera ecuación por 3 y la segunda por 7 y las restamos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 38z = 38 \end{cases}$$

y ahora ya podemos despejar cada una de las incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{38}{38} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \to y = 1 \Rightarrow \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = 1} \end{cases}$$

Veámoslo de forma más general. Este método consiste en sustituir el sistema dado por otro equivalente, aplicando las transformaciones de Gauss, hasta conseguir un sistema escalonado, en el cual los coeficientes de las incógnitas que quedan por debajo de la diagonal del sistema sean nulos. Así, por ejemplo, del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ llegaríamos al sistema: } \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema no tenemos más que ir sustituyendo el valor de la variable obtenida en una ecuación en la ecuación anterior, y así sucesivamente.

Este método nos permite saber, además, según las ecuaciones que obtengamos, si el sistema tiene o no solución y cuantas tiene.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ 5x-y+3z=16 \xrightarrow{E_3-5E_1} \end{cases} \begin{cases} x-y-2z=-1 \\ -y+8z=6 \\ 4y+13z=21 \xrightarrow{E_3+4E_2} \end{cases} \begin{cases} x-y-2z=-1 \\ -y+8z=6 \\ 45z=45 \end{cases}$$

El último sistema, como se ve, es escalonado. De la última ecuación obtenemos que $z = 1$, y sustituyendo sucesivamente en la segunda y en la primera obtenemos $y = 2$, $x = 3$. Se trata de un sistema compatible determinado (SCD).

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x-y+3z=4 \\ 2x-y-z=6 \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ 3x-2y+2z=10 \xrightarrow{E_3-3E_1} \end{cases} \begin{cases} x-y+3z=4 \\ y-7z=-2 \\ y-7z=-2 \xrightarrow{E_3-E_2} \end{cases} \begin{cases} x-y+3z=4 \\ y-7z=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

En este caso, después de realizar las transformaciones de Gauss, resulta un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, un sistema compatible indeterminado (SCI).

Se trata de un sistema uniparamétrico, donde una de las incógnitas hace de parámetro y puede tomar cualquier valor. Las otras incógnitas tomarán valores dependiendo del valor que le demos al parámetro. Las soluciones se presentan de la forma:

$$\begin{cases} x=2+4z \\ y=-2+7z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=k \\ x=2+4k \\ y=-2+7k \end{cases}$$

(También podríamos haber observado que la tercera ecuación es suma de las otras dos)

- *Analicemos el sistema*

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x-y+3z=6 \xrightarrow{E_2-2E_1} \\ 4x-2y+6z=9 \xrightarrow{E_3-4E_1} \end{cases} \begin{cases} x-y+z=3 \\ y+z=0 \\ 2y+2z=-3 \xrightarrow{E_3-2E_2} \end{cases} \begin{cases} x-y+z=3 \\ y+z=0 \\ 0=-3 \end{cases}$$

Como se ve la última ecuación es imposible, por tanto, el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible (SI).

(También podríamos haber observado que los coeficientes de la tercera ecuación son el doble de los de la segunda, pero el término independiente no está duplicado, lo que genera un absurdo).

Se ha obtenido en los tres casos tres sistemas escalonados, pero de distinto tipo:

- En el caso A, tenemos tantas ecuaciones como incógnitas, y la última ecuación tiene solución. Se trata pues de un sistema compatible determinado (SCD), que tendrá una única solución.
- En el segundo caso, sistema B, tenemos más incógnitas que ecuaciones. Se trata de un sistema compatible indeterminado (SCI) y tendrá infinitas soluciones. En este caso, las soluciones vienen dadas en función de un solo parámetro, aunque puede haber sistemas con más de un parámetro.
- En el tercer caso, sistema C, la última ecuación es imposible, por tanto, el sistema no tiene solución. Se trata de un sistema incompatible (SI).

Para discutir el sistema tendremos en cuenta la forma de la última ecuación transformada:

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots \\ \qquad \qquad \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

A la hora de despejar x_n tenemos tres situaciones diferentes:

$$a'_{nn}x_n = b'_n \rightarrow \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \Rightarrow x_n = b'_n / a'_{nn} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = 0 \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \Rightarrow 0 \cdot x_n = b'_n \end{cases}$$

- La primera es trivial y no merece más explicación, el sistema puede resolverse.
- En la segunda vemos que cualquier valor de x_n satisface la ecuación. Por tanto, hay infinitas soluciones y el sistema es indeterminado.
- Vemos que la última es claramente imposible (ningún valor multiplicado por cero puede dar un resultado diferente de cero) y el sistema es incompatible.

Por tanto, el análisis de la última ecuación queda:

$$a'_{nn}x_3 = b'_n \rightarrow \begin{cases} a'_{nn} \neq 0; & \text{SCD} \\ a'_{nn} = b'_n = 0; & \text{SCI} \\ a'_{nn} = 0, b'_n \neq 0; & \text{SI} \end{cases}$$

Esto es precisamente lo que vimos en los tres ejemplos anteriores y que nos daban lugar a los tres tipos de sistemas. Por tanto tendremos que ver qué hacen que el coeficiente de x_n sea nulo y si esos valores coinciden o no con los valores que hacen que el término independiente sea nulo.

video

Método de Gauss Jordan para un sistema 5 x 5. MIGUEMÁTICAS

https://www.youtube.com/watch?v=hwyNaFtZmoM

Actividades propuestas

30. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x + 2y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 5z = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 6z = -22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = -9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = 7 \\ 4x + y - z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -29 \\ 3x + y - 5z = 21 \\ -x + 2y - 4z = 32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

2.5. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

En este capítulo es **fundamental** saber plantear un problema a partir de un enunciado de texto. La clave para ello es saber **LEER** y **TRADUCIR** adecuadamente toda la información que se da en un problema, **ESCRIBIENDO** correctamente lo que estamos leyendo. Nunca se escribe demasiado y nunca un problema está demasiado explicado a la hora de intentar resolverlo.

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar las incógnitas.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear el sistema y resolverlo.

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=39} \\ \boldsymbol{x-y=25} \end{cases} \xrightarrow{\textit{sumamos}} \begin{cases} \boldsymbol{x+y=39} \\ \boldsymbol{2x+0=64} \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

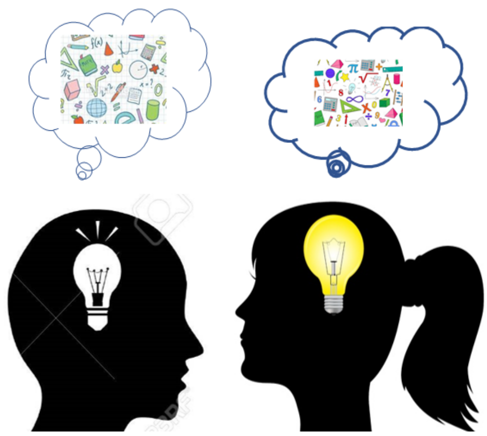
Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Una determinada empresa hace una prueba de selección que consiste en un test de 90 preguntas. Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2.5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1.5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos y que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos?*



Empezamos definiendo (y lo escribimos claramente):

$x =$ nº de preguntas contestadas correctamente

$y =$ nº de preguntas contestadas erróneamente

$z =$ nº de preguntas no contestadas

A continuación, vamos *troceando* el problema:

- El test consta de 90 preguntas, por tanto deducimos que: $x + y + z = 90$
- Por cada acierto dan 6 puntos, por cada fallo quitan 2.5 puntos y por cada pregunta no contestada quitan 1.5 puntos:

$$6x - 2.5\,y - 1.5\,z = 210$$

- Para que el número de aciertos más el de preguntas no contestadas sea igual al doble del número de fallos:

$$x + z = 2y \Rightarrow x - 2y + z = 0$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x - 2.5y - 1.5z = 210 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

y, desde este momento, sólo tenemos que aplicar lo aprendido en el tema:

- Planteamos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.
- Resolvemos con el método de Gauss.

Actividades propuestas

32. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

33. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a **35**. ¿Qué edad tienen cada uno?

34. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

35. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

36. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

37. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

38. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

39. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

40. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.
El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.
El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

41. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0,5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

42. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

43. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

44. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

2.6. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

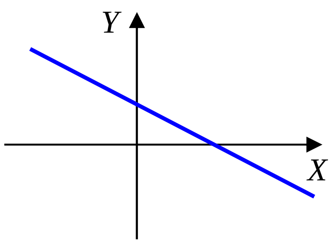
Una **inecuación lineal** con dos incógnitas es una expresión en la que dos expresiones lineales están relacionadas entre sí por una desigualdad.

En su forma reducida podemos encontrar cuatro tipos de inecuaciones lineales:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \le c \qquad ax + by \ge c$$

Las dos primeras se denominan *desigualdades estrictas* y las dos últimas *desigualdades amplias*.

El método habitual para resolver las inecuaciones lineales es el **método gráfico**. La ecuación resultante de convertir la desigualdad en una igualdad: $ax + by = c$, es una línea recta, y su representación gráfica divide al plano cartesiano en dos semiplanos:



Es trivial deducir que una de esas dos regiones cumplirá que $ax + by < c$ o que $ax + by > c$, por tanto:

La **solución** de una inecuación serán las coordenadas de los puntos (x_0, y_0) que verifican la desigualdad algebraica, y pertenecen a uno de los dos semiplanos definidos al representar la recta cuyas expresiones lineales a ambos lados de la igualdad coinciden con las de la inecuación planteada.

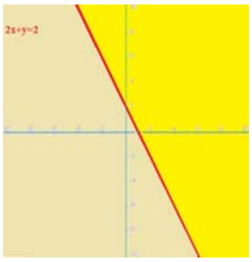
El **semiplano solución** puede ser **abierto** (no contiene a la recta) o **cerrado** (contiene a la recta) según la desigualdad sea estricta o no, respectivamente.

Ejemplo:

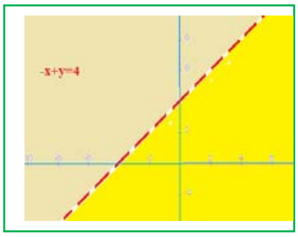
- $2x + y \geq 2$.

Se dibuja la recta $2x + y = 2$. El punto (0, 0) no verifica la desigualdad, luego el semiplano solución es el otro.

El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, incluyendo la recta que se marca de forma continua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación.



Ejemplo:



- $-x + y < 4$.

Dibujamos la recta $-x + y = 4$. El punto (0, 0) verifica la desigualdad.

El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, excluyendo la recta que se marca de forma discontinua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación y los de la recta no lo hacen.

Desde el punto de vista práctico existen dos formas de averiguar qué semiplano representa la solución de la inecuación:

1. Tomamos un punto cualquiera del plano y vemos si sus coordenadas cumplen la inecuación.

   Si la cumplen, el semiplano donde se encuentra dicho punto será el conjunto solución de la inecuación. Si no es así, la región solución será el otro semiplano.

2. Analizamos los signos de los coeficientes y el sentido de la desigualdad:

Desigualdad:	$ax + by < c$	$ax + by \leq c$	$ax + by > c$	$ax + by \geq c$
$a > 0$	A la izquierda de la recta		A la derecha de la recta	
$a < 0$	A la derecha de la recta		A la izquierda de la recta	
$b > 0$	Por debajo de la recta		Por encima de la recta	
$b < 0$	Por encima de la recta		Por debajo de la recta	

Basta con analizar un único signo, siendo más fácil analizar los coeficientes positivos.

Actividades propuestas

45. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes: $x + 2y < 3$: $-x + 3y > 4$; $2x - y \leq -2$; $-x - y \geq 0$. Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.7. Sistemas de inecuaciones lineales

Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas. Resolución práctica de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas incidiendo en la interpretación gráfica de la solución. T de Tortuga

https://www.youtube.com/watch?v=kgtFQTflh_I

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.

El conjunto solución está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones.

Al conjunto solución se le llama **región factible**.

Para resolver un sistema de inecuaciones lineales se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano solución de cada una de las inecuaciones.
- El conjunto solución del sistema, también llamado **región factible**, está formado por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Ejemplo:

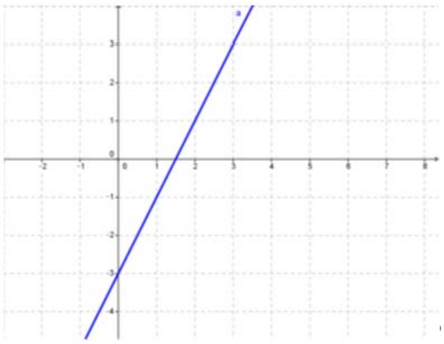
$\begin{cases} x+y\le 2 \\ x-y\ge -4 \end{cases}$. La superficie marcada en amarillo es la solución del sistema, incluyendo las semirrectas roja y gris, ya que ambas desigualdades son no estrictas. Es lo que se denomina *región factible*.

Actividades resueltas

- Representa la región solución de la inecuación $2x-y>3$.

Dibujamos la recta $2x-y=3$. Si damos dos valores cualesquiera a una de las dos incógnitas y despejamos la otra, tenemos las coordenadas de dos puntos de la recta, y la representamos:

$$2x-y>3 \quad 2x-y=3 \rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow -y=3 \rightarrow y=-3 \\ y=1 \rightarrow 2x-1=3 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow P_1:(0,-3);\ P_2:(2,1)$$



Determinamos ahora el semiplano solución:

Método 1: Tomamos un punto que no esté sobre la recta, por ejemplo $(0,\ 0)$, que está a la izquierda de la recta. Sustituimos sus coordenadas en la inecuación:

$$2\cdot 0-0=0<3$$

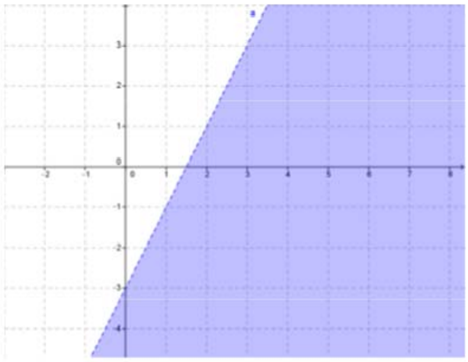
Vemos que **no** cumple la inecuación pues debería ser mayor que 3, por lo que este punto

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

no pertenece al conjunto solución. Es decir, la solución de la inecuación es el otro semiplano, en el que no está el punto elegido (el de la derecha).

Método 2: El coeficiente de x es positivo y la desigualdad *apunta* hacia la derecha, por lo que el semiplano solución es el de la derecha.

Finalmente, decidimos que la recta no forma parte de la solución porque la desigualdad es estricta y, por tanto, la región solución es:



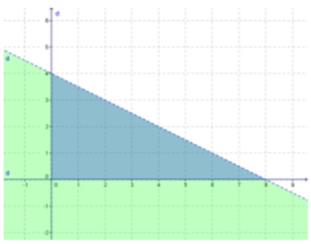
Actividades resueltas

- Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

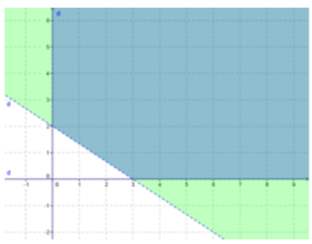
a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 2x + 3y > 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

- En cada uno de los casos representamos las rectas asociadas a cada inecuación.
- Buscamos para cada una de las inecuaciones su semiplano de soluciones y, por último, la región común a todos los semiplanos.

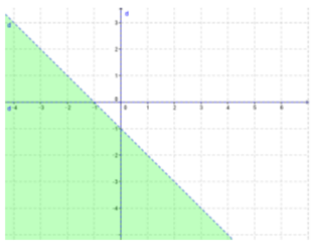
En las representaciones gráficas siguientes puede verse la región factible o región de soluciones de los sistemas (en verde la solución de la inecuación lineal, en azul la región factible):



a) Solución acotada



b) Solución no acotada



c) No posee solución.

En los ejemplos anteriores podemos ver los tres tipos de soluciones que podemos encontrar:

1. **Solución acotada**. Los puntos de la región factible están encerrados por un **polígono convexo**.
2. **Solución no acotada**. La región solución se extiende hasta el infinito.
3. **Sin solución**. Las condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

46. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - y > -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

47. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?

48. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

49. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

50. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.

51. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

52. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

53. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.

54. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes:

$$x + 2y < 3 \qquad -x + 3y > 4 \qquad 2x - y \leq -2 \qquad -x - y \geq 0$$

Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

55. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - y > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x + y < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Sistemas de Ecuaciones NO LINEALES con 2 incógnitas al cuadrado. Susi Profe

https://www.youtube.com/watch?v=yyVAxgt9IN4

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par (*x, y*) de valores que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones **no** lineales, por ejemplo:*

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Actividades propuestas

56. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

3.2. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

La resolución de este tipo de sistemas se suele hacer por el método de **sustitución** mediante los siguientes pasos:

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado.

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación.

3.- Se resuelve la ecuación resultante.

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Actividades resueltas

- *Vamos a resolver el sistema no lineal* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado: $y = 7 - x$.

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación:

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Se resuelve la ecuación resultante:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4} \Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita:

Si $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Si $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

Las soluciones son **(3, 4)** y **(4, 3)**.

5.- *Comprobación*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Actividades propuestas

57. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

58. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

59. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

60. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ 2x^2-3y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \\ 5x^2-2y^2=5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy=\frac{1}{2} \\ x+y=\frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-4y=-3 \\ xy=1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x+y-\frac{y}{x}=1 \\ x+y=2 \end{matrix}\right\}$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cuadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Hallamos la raíz cuadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despejamos la } x$$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1,618... que es el número de oro, otro número irracional.

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b\cdot i$ se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

Algunos problemas de ingenio que se resuelven, (o no) por ecuaciones o sistemas.

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

La invitación

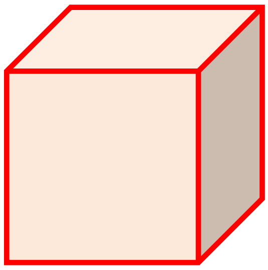
Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

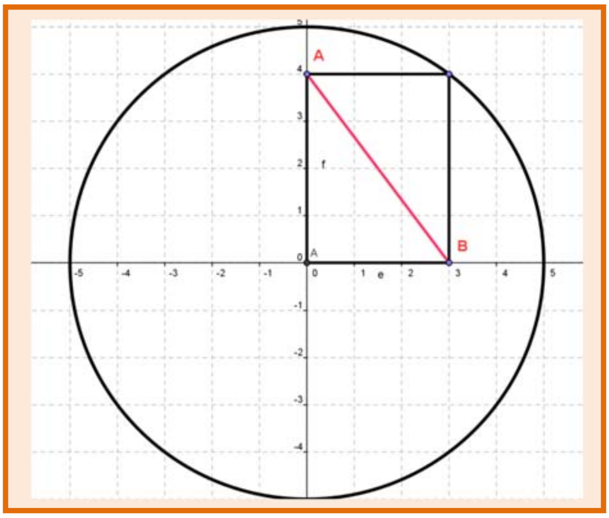
Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?





Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de *x*, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

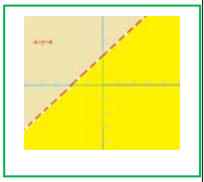
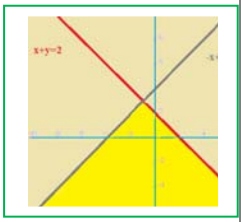
$x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow$

$x \geq 4.$

¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

Observa que hemos dividido la desigualdad por $(x-4)$ que para unos valores de *x* es positiva y no cambia el sentido de la desigualdad, pero para otros es negativa y sí cambia.

RESUMEN

Propiedades de las ecuaciones	Si $a = b$, $\forall c \Rightarrow a + c = b + c$ $\forall c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$	$3x + 2 = 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 = 5 - 2 \Leftrightarrow 3x = 3$ $3x = 3 \Leftrightarrow 3x : 3 = 3 : 3 \Leftrightarrow x = 1$
Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Ecuaciones e inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	Si $a < b$: $\forall c \Rightarrow a + c < b + c$ $\forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ $\forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ $3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ $-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ $3 - x < 2 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Se usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$; $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución. Las rectas son **secantes**: **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, rectas **coincidentes:** **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas:**	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados. **Método de Gauss**: Para sistemas lineales de dos o más ecuaciones	
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$. Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Desigualdades

1. Dada la siguiente inecuación $5+3x>2x+1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma: 0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

2. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

i. Sumar 4: $x-2>5$

ii. Restar 6: $x-4>8$

iii. Multiplicar por 6: $5x\geq 10$

iv. Multiplicar por –4: $-2x\geq 8$

v. Dividir entre 2: $6x<12$

vi. Dividir entre –2: $20x\geq 60$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $2x-3\leq -5$

b) $x-2\leq 3x-5$

c) $12-x\leq -6$

d) $-5x-3\leq -2x+9$

e) $2(3x-3)>6$

f) $-3(3-2x)<-2(3+x)$

g) $2(x+3)+3(x-1)\leq 2(x+2)$

4. Resuelve:

a) $\dfrac{x}{2}-6<4$

b) $\dfrac{2x}{3}-3\leq -x$

c) $2(3x-2)>3-x$

d) $\dfrac{2(x+2)}{3}<2x$

e) $\dfrac{x-4}{4}+2>\dfrac{x+4}{8}$

f) $\dfrac{x}{2}-4<x-\dfrac{x+1}{7}$

5. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $(-\infty,-3]$ b) $[4,+\infty)$ c) $(-\infty,5)$ d) $(-2,+\infty)$

6. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-6}$ b) $\sqrt{-x+5}$ c) $\sqrt{10-5x}$ d) $\sqrt{-6x-30}$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Inecuaciones de segundo grado

7. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 75 < 0$

b) $-x^2 + 16 \leq 0$

c) $-x^2 + 25 \geq 0$

d) $5x^2 - 80 \geq 0$

e) $4x^2 - 1 > 0$

f) $25x^2 - 4 < 0$

g) $9x^2 - 16 < 0$

h) $36x^2 + 16 \leq 0$

8. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-4x^2 + 5x \leq 0$

b) $3x^2 + 7x \geq 0$

c) $2x^2 < 8x$

d) $-3x^2 - 6x \geq 0$

e) $-x^2 + 3x < 0$

f) $-5x^2 - 10x \geq 0$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado :

a) $3x^2 \leq 0$

b) $8x^2 > 0$

c) $-5x^2 < 0$

d) $9x^2 \geq 0$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \leq 0$

b) $-x^2 - 4x \leq 0$

c) $x^2 + 1 \geq 0$

d) $-3x^2 > 30$

e) $-x^2 - 4 \leq 0$

f) $-3x^2 - 12x \geq 0$

g) $-5x^2 < 0$

h) $x^2 + 9 \geq 0$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x > 0$

b) $3x^2 - 3 \leq 0$

c) $5x^2 - 20 \geq 0$

d) $x^2 + 4x > 0$

e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x+1)$

12. Calcula los valores de *x* para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$

b) $\sqrt{x^2+2x+1}$

c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$

e) $\sqrt{-x^2+12x-36}$

f) $\sqrt{x^2+6x-27}$

g) $\sqrt{1-4x^2}$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(x - 1)^2 > 2$

b) $3(x + 1)^2 \leq -12$

c) $-x^2 < 2$

d) $4(x - 2)^2 > 1$

e) $-5(x + 4)^2 \leq 0$

f) $9(x + 1)^2 \leq 81$

14. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x(2x - 3) - 3(5 - x) > 83$

b) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$

c) $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 > 130$

d) $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) \geq 40$

e) $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) < 214$

f) $8(2 - x)^2 > 2(8 - x)^2$

g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5$

h) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2}$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sistemas de inecuaciones

15. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

16. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$

17. Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

18. Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$ se pide:

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

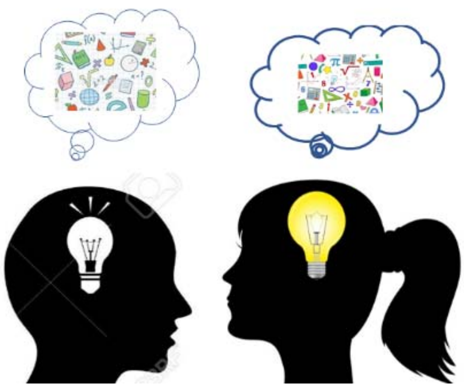
b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

19. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$ se pide:

a) Discute y resuelve, cuando sea posible.

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución ii) muchas soluciones iii) no tenga solución



20. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

21. Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1 550 euros.

22. La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

23. Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

24. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

25. Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

26. Una persona invirtió 72 000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5 520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

27. Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

28. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

29. En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

30. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1.18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son ”m” euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12.60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de ”m”) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de ”m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

31. En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

32. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x+y-7\le 0$ b) $2x-y+3\ge 0$ c) $y\ge 3$ d) $x\le 5$ e) $x\ge 0$ f) $y\le 0$

33. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+4y\le 9 \\ 2x-y\ge 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y+3x-7\le 0 \\ y-6x+11\le 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y\le 10 & x\ge 0 \\ x+y\ge 10 & 0\le y\le 5 \end{cases}$

Autoras: Raquel Hernández y Leticia González Pascual
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Tiene como solución $x = 2$ la inecuación siguiente:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

2. La solución de la inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ es:

a) $x < -10/17$ b) $x > -3/5.1$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$

3. La **solución** de la ecuación $2(x - 3) - 3(x^2 - 4) = 1$ es:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

4. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

5. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

6. La solución del sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ es:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

8. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$

9. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$

c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

10. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$