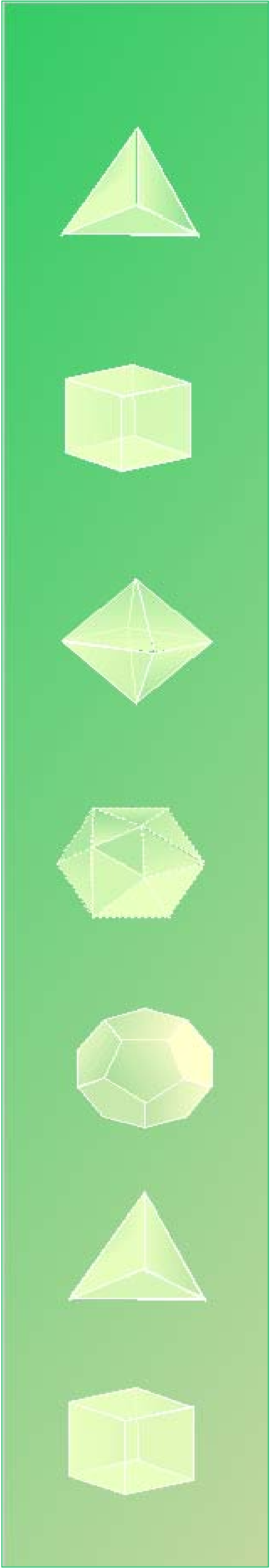


Matemáticas Generales

1º Bachillerato

Capítulo 7: Funciones

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda

Revisora: Margot Masina

Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Índice

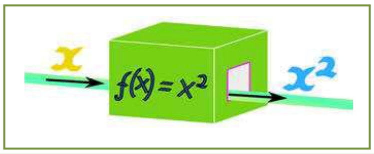
Fractales. La Geometría del Caos. El matemático Benoit Mandelbrot es el creador de la geometría fractal, gracias a la cual son posibles las mediciones de la longitud de muchas porciones del mundo natural. Casi todos los objetos que nos encontramos en plena naturaleza son profundamente irregulares, muy alejados de la regularidad de la geometría clásica. Sin embargo, tienen dentro de su irregularidad un orden asombroso.

[Más por menos: Fractales. La Geometría del Caos | RTVE Play]

Resumen

El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, ya que sirven para explicar muchos fenómenos que ocurren en campos tan diversos como la Física, la Economía, la Sociología…

A pesar de su complejidad a nivel teórico, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, porque resultan entonces muy intuitivas. En este capítulo vamos a ser capaces de interpretar funciones dadas como gráficas.



También vamos a intentar profundizar más en las propiedades y características de las funciones, así como en sus aplicaciones. Vamos a reconocer algunos tipos de funciones, como las funciones polinómicas, raíz, logarítmica, exponencial…, analizando sus propiedades.

En particular estudiaremos la interpolación y extrapolación lineal y cuadrática ajustando una recta o una parábola a una tabla de valores.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. TIPOS DE FUNCIONES

1.1. Funciones en forma de tabla, gráfica o expresión algebraica

Recuerda que:

En tercero y en cuarto de ESO ya estudiaste el concepto y las características de una función. Como es muy importante, vamos a insistir y a profundizar en ello.

Ya sabes que una función puede venir dada principalmente de tres formas:

Funciones en forma de tabla

Si recogemos los datos de un experimento obtenemos una tabla de valores, como, por ejemplo:

Ejemplo:

- *Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:*

Espacio (*m*)	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.43
Tiempo (*s*)	0	0.2	1.13	3.14	4.9	7.06	9.16	10.00

Cuando la función viene dada por una tabla de valores únicamente conocemos algunos valores de x con sus correspondientes valores de y. Si deseamos estimar el valor de y para algún x que no figure en la tabla debemos recurrir a interpolaciones y extrapolaciones, que estudiaremos en el apartado 1.3.

Funciones en forma de expresión algebraica

Conoces muchas fórmulas que pueden dar origen a funciones.

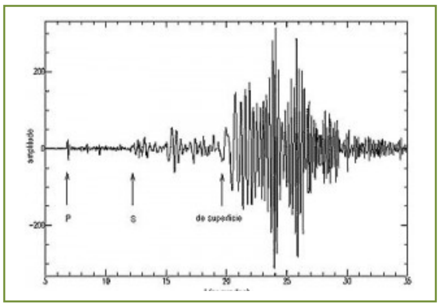
Ejemplo:

- *El volumen de líquido contenido en un cilindro de* 3 *cm de radio al variar la altura x del líquido.*

$$y = 9\pi x$$

Funciones en forma de gráfica

A veces la gráfica de una función puede obtenerse directamente del fenómeno estudiado mediante un aparato.



Ejemplo:

- *Un electrocardiograma es una función que indica la variación del potencial eléctrico del corazón al transcurrir el tiempo.*
- *Un sismograma indica la variación de la velocidad y aceleración de las ondas producidas por un terremoto.*

Otras veces la obtendremos de su expresión analítica o de la función dada como tabla. Pero hay que advertir que, como en los ejemplos anteriores de electrocardiograma o sismograma, en ocasiones no es posible conocer la expresión analítica

Concepto de función

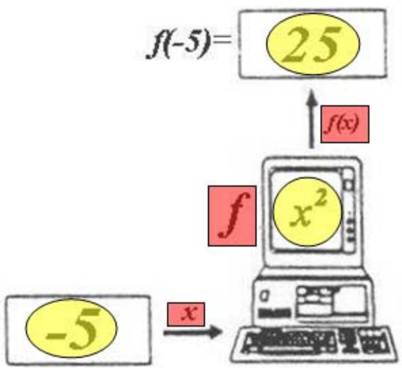
Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).

Para indicar que la variable (y) depende o es función de otra, (x), se usa la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** que se lee *"y es la **imagen** de x mediante la función f".*

Una **función real de variable real** es aquella en la que tanto el dominio como la imagen son subconjuntos de $\Re$. Si A y B son subconjuntos de $\Re$ la función se indica:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

Y también $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** $Dom f = A$**.**



Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica… ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

Por tanto, se puede asemejar con una máquina que coge un número y lo transforma en otro mediante una serie de operaciones que, a veces, podemos describir mediante una fórmula.

Ejemplos:

- *Funciones constantes* (los números vistos como funciones):

$$f(x) = k\text{, para todo } x \in \Re$$

$$f(x) = 2\text{, para todo } x \in \Re\text{, así } f(-2) = 2;\ f(0) = 2;\ f(\sqrt[3]{5}) = 2;\ \ldots$$

- *Función identidad* (transforma cada número en él mismo):

$$I(x) = x\text{, para todo } x \in \Re\text{, así } I(-2) = -2;\ I(\pi) = \pi;\ I(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5};\ \ldots$$

- $$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x} \to \begin{cases} x = 0 \to f(0) = \dfrac{3 \cdot (0)^2 - 1}{0} = \dfrac{-1}{0} \ \textit{que no existe} \\ x = 1 \to f(1) = \dfrac{3 \cdot (1)^2 - 1}{1} = 2 \\ x = \dfrac{6}{5} \to f(\dfrac{6}{5}) = \dfrac{3 \cdot (\frac{6}{5})^2 - 1}{\frac{6}{5}} = \dfrac{3 \cdot \frac{36}{25} - 1}{\frac{6}{5}} = \dfrac{\frac{108}{25} - 1}{\frac{6}{5}} = \dfrac{83}{30} \end{cases}$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Tipos de funciones

Existen distintos ***tipos de funciones*** según sea la fórmula que las define:

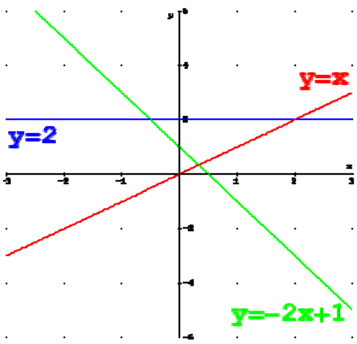
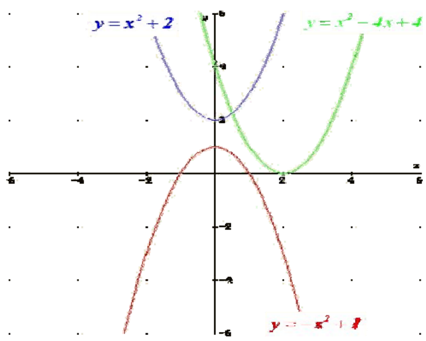
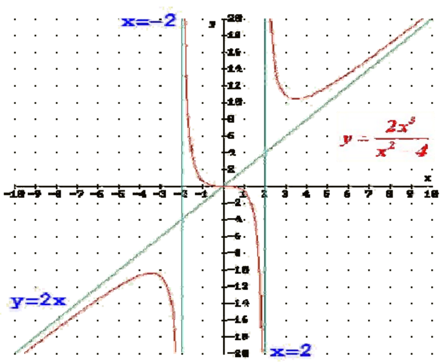
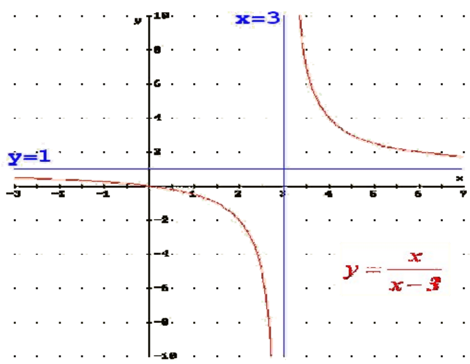
TIPO		FÓRMULA
ALGEBRAICAS	*Polinómicas*	Polinomio
	Racionales	Cociente de polinomios
	Irracionales	Raíz de una racional
TRASCENDENTES	*Exponenciales*	Exponencial (variable en el exponente)
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)
	Trigonométricas	Trigonométrica (variable como argumento de una razón trigonométrica)
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable

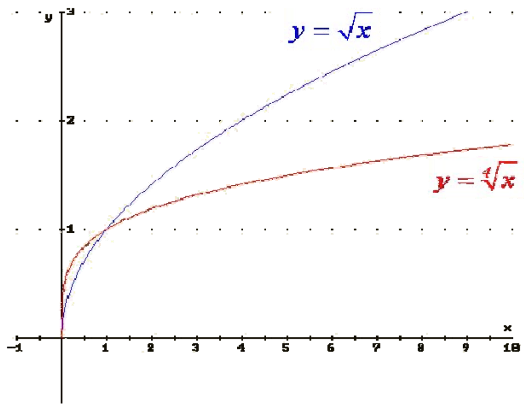
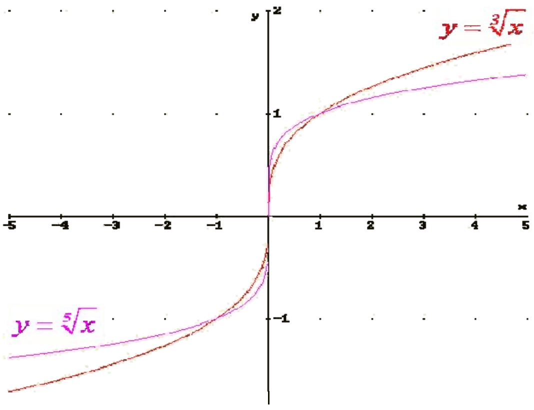
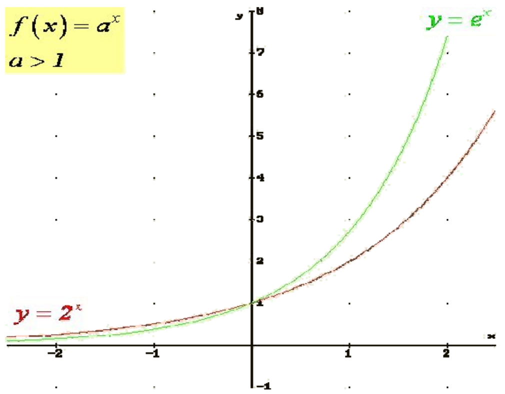
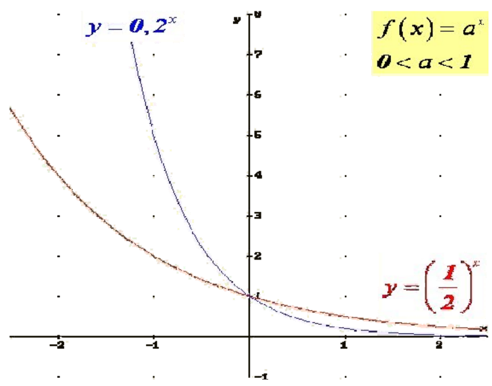
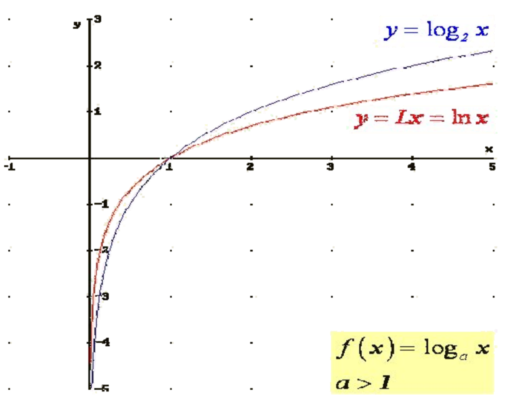
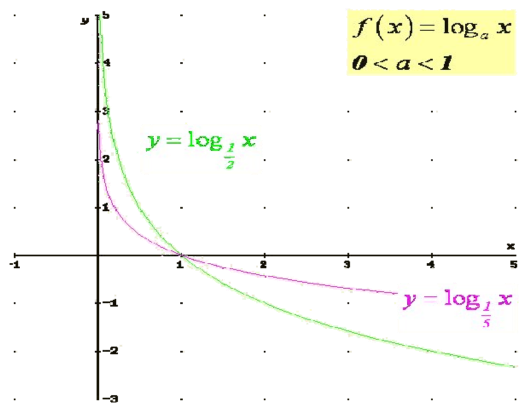
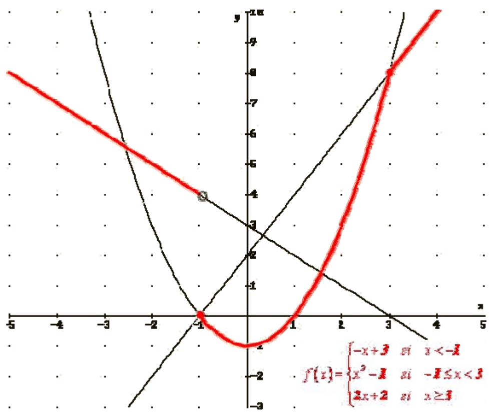
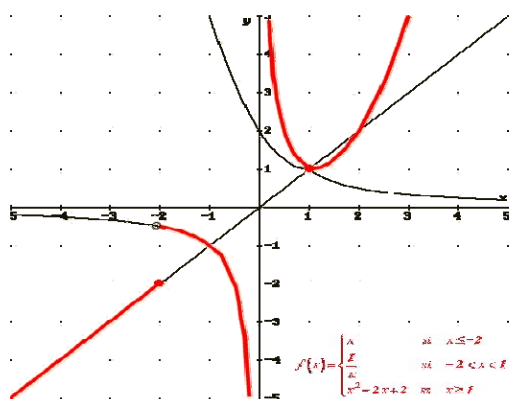
La **gráfica de una función** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, pares ordenados, en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo a su imagen, es decir, al que se obtiene al transformarlo mediante dicha función:

$$\{(x, y) \in \Re x \Re;\ y = f(x)\}$$

Se representa dibujando todos los puntos anteriores y uniéndolos con una línea, y se hace sobre los *ejes de coordenadas* (dos rectas perpendiculares: *eje de abscisas* para los valores que toma la variable independiente, *eje de ordenadas* para los valores que toma la variable dependiente, y *origen de coordenadas,* punto de intersección de ambos). Uno de los objetivos importantes de este capítulo y los siguientes es llegar a representar gráficamente todo tipo de funciones (no excesivamente complejas).

Ejemplos:

TIPO	GRÁFICAS	
Polinómicas		
Racionales		

TIPO	GRÁFICAS
Irracionales	 
Exponenciales	 
Logarítmicas	 
Definidas a trozos	 

1.2. Funciones polinómicas de primer grado

Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

En la situación 1, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales

Tiempo (t)	0	1	2	5	10
Espacio (s)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b=k\cdot a$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

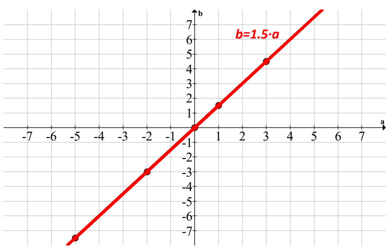
- Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7.5	–3	0	1.5	4.5

Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

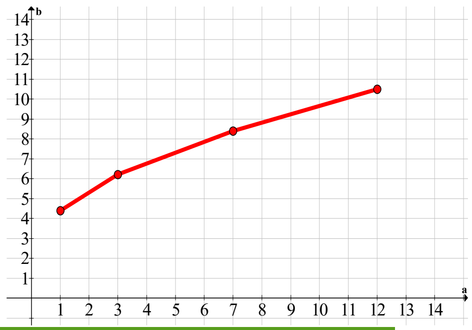
$$k=\frac{-7.5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1.5}{1}=\frac{4.5}{3}=1.5$$

La relación se define así: $b=1.5\cdot a$



- La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebe los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decidir si son magnitudes directamente proporcionales.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4.4	6.2	8.4	10.5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

Actividades propuestas

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:

a. 71 litros para producir una manzana.

b. 10 850 litros para producir unos vaqueros.

c. 4 000 litros para producir una camiseta.

Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado. Su representación en el plano cartesiano es una **recta**.

Existen dos tipos de funciones lineales:

- Rectas cuya expresión algebraica es $y=m\cdot x$
- Rectas cuya función viene dada por $y=m\cdot x+n$

En este apartado vamos a estudiar las funciones lineales del primer tipo, es decir las rectas de la forma $y=m\cdot x$

Ejemplo:

Las proporciones se representan como rectas de la forma $b=k\cdot a$

- donde *k* es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
- *a* y *b* son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.

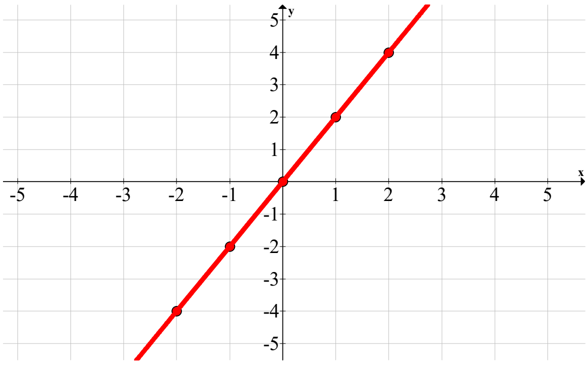
Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m \cdot x$.

Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad, fuerza – masa, …

Actividades resueltas

- Representa la recta $y = 2 \cdot x$



Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x. Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e $y$es la variable dependiente (depende del valor de la x).

Nota: para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.

Las rectas $y = m \cdot x$ tienen los siguientes componentes:

- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

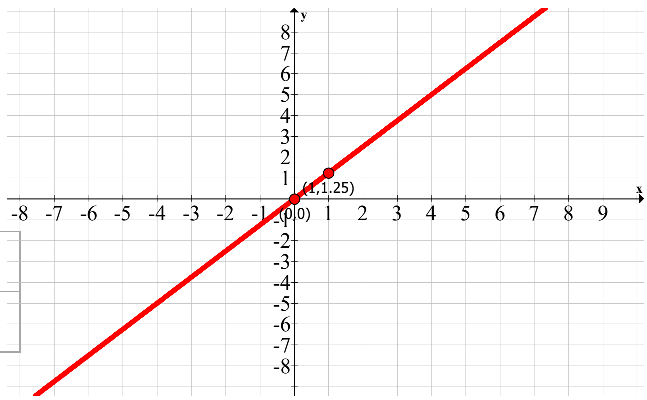
Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0,0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal $y = 1.25 \cdot x$

x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los números reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

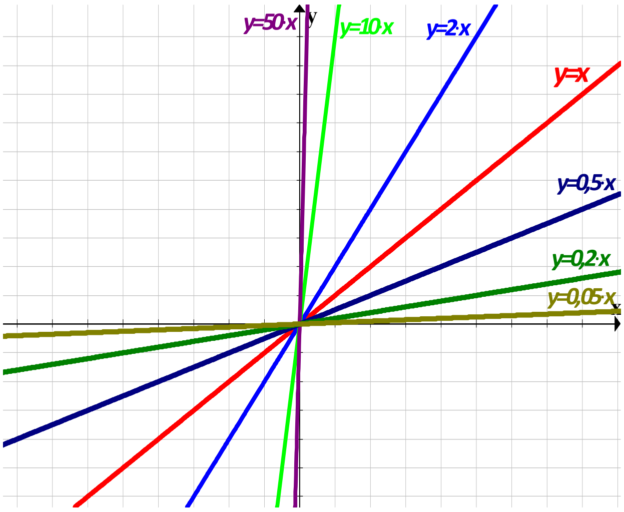
Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

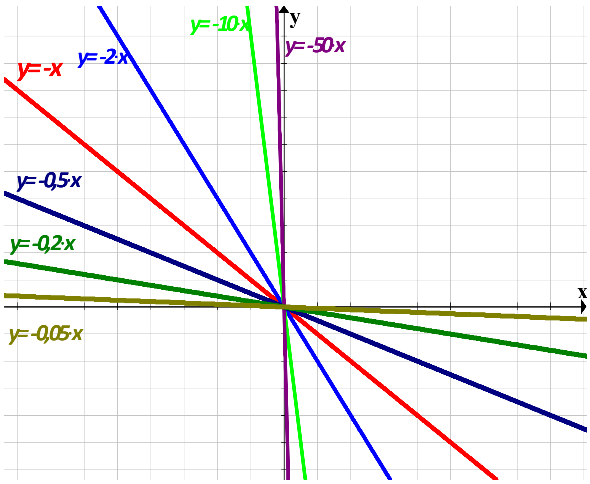
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y = x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m .

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m>0$, la recta es creciente.
- Si $m<0$, la recta es decreciente.

La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x .

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

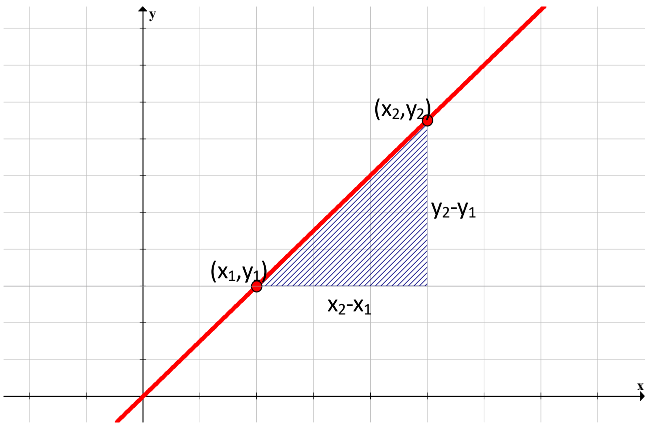
Si $m > 0$:

- Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
- Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.

Si $m < 0$:

- Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
- Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



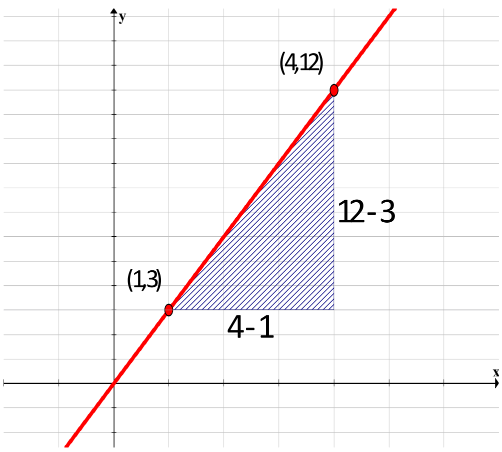
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir,

$$m = \frac{\text{lo que sube}}{\text{lo que avanza}}$$

Ejemplo:



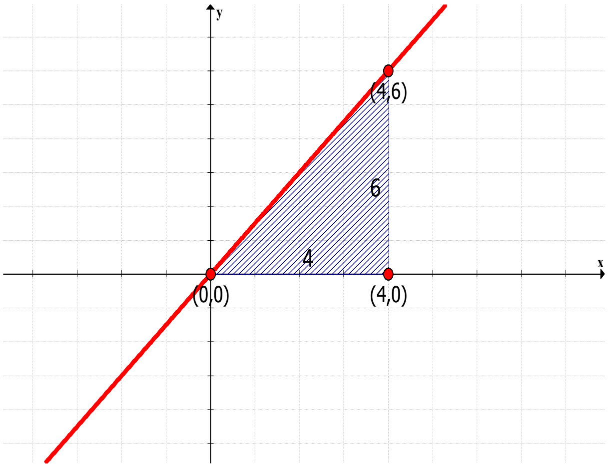
La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0, 0) y el (4, 6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

$$m = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$y = 1.5 \cdot x$$

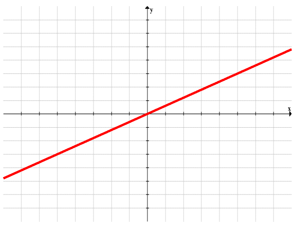
Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

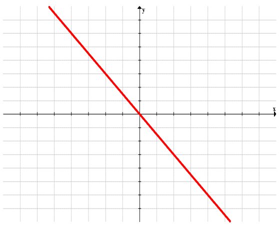
En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

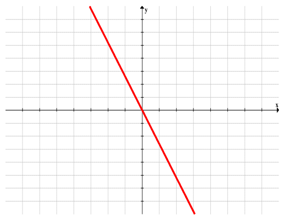
Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

Actividades propuestas

3. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

a. 

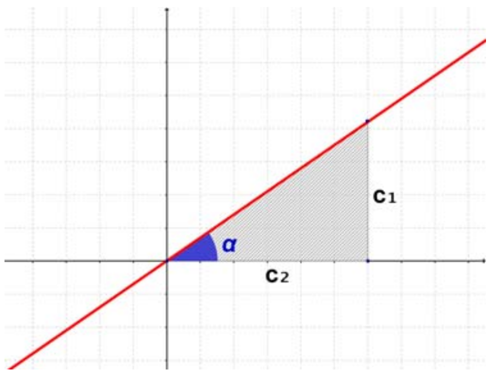
b. 

c. 

Otra expresión de la pendiente

Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos, o lo que es lo mismo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.



$$\tan\alpha = \frac{C_{opuesto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = \tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la recta con la horizontal.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Rectas de la forma $y = m \cdot x + n$

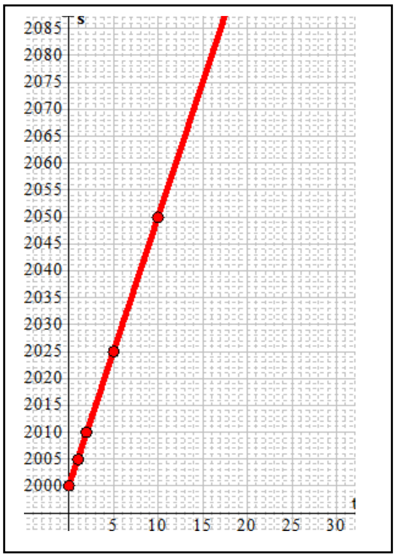
Volvamos a la situación 1 al principio del capítulo. En ese caso, queríamos hallar el espacio que recorría el ciclista. Ahora supongamos que el ciclista, antes de empezar con su ruta, se ha tenido que desplazar 2 Km hasta el inicio de su camino.

Actividades resueltas

- *La gráfica s-t de un movimiento rectilíneo uniforme*: el espacio recorrido, en función del tiempo, por un ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

  En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda $s = 2\,000 + 5t$.

  Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:



Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2 000
1	2 005
2	2 010
5	2 025
10	2 050

  Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2 000 posiciones en el eje y.

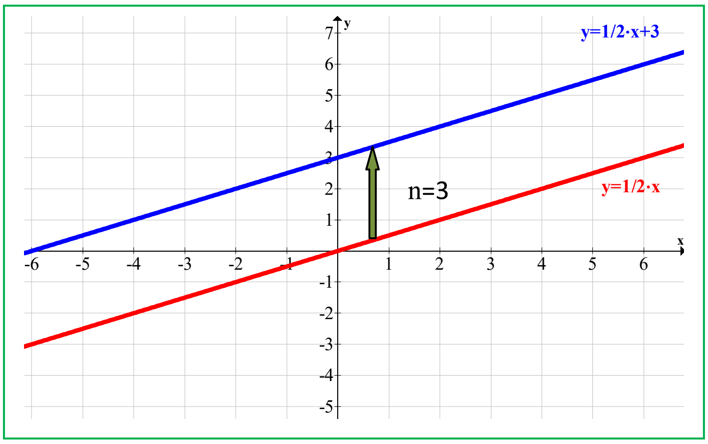
  La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5x + 2\,000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2 000 es el espacio inicial s_0.

  La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2 000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2 000.

Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

Ejemplo:

- Comparemos la recta $y = 1/2 \cdot x$ con la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$



Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos $m = 1/2$. Son dos rectas paralelas.

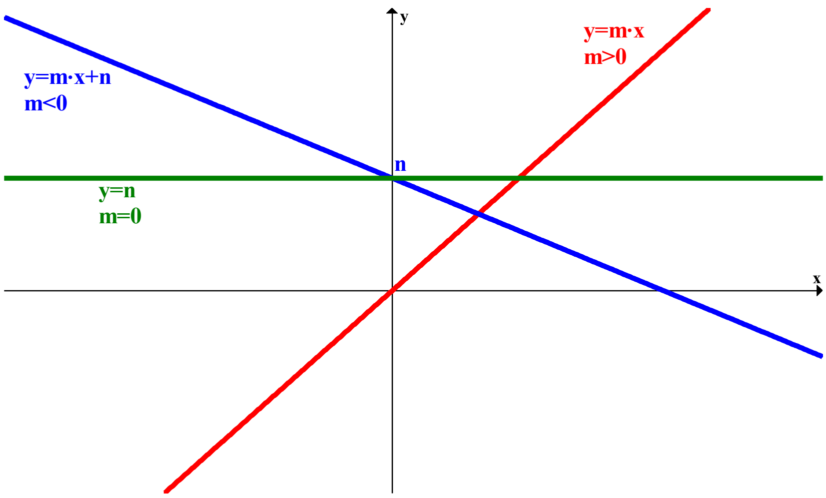
La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

Las funciones polinómicas de primer grado se describen algebraicamente de la forma $y=m\cdot x+n$ y se representan mediante rectas.

Además de la variable independiente x, la variable dependiente y, y la pendiente m, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y=m\cdot x+n$ es paralela a la recta $y=m\cdot x$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m>0$, la función es **creciente**.
- Si $m<0$, la función es **decreciente**.
- Si $m=0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y = n$.



Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Función afín

Recuerda que:

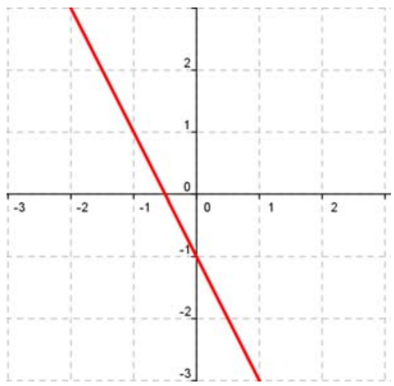
Como casos especiales dentro de las funciones polinómicas, se encuentran las funciones afines y las cuadráticas que se estudiaron en cursos anteriores:

Una **función afín** es una función polinómica de grado menor o igual que uno: $y = f(x) = mx + n$.

Su representación gráfica es una **recta**, su **pendiente** es el coeficiente líder (m) e indica la inclinación de la misma (si es positivo la recta será **creciente** y si es negativo **decreciente**) y su **ordenada en el origen** (n) es el término independiente, que nos proporciona el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Ejemplo:

GRÁFICA



- *$f(x) = -2x - 1$ (polinomio de primer grado)*

x	–2	–1	–1/2	0	1
$f(x)$	3	1	0	–1	–3
	(–2, 3)	(–1, 1)	(–1/2, 0)	(0, –1)	(1, –3)

Pendiente: **–2** $\Rightarrow$ *recta decreciente*

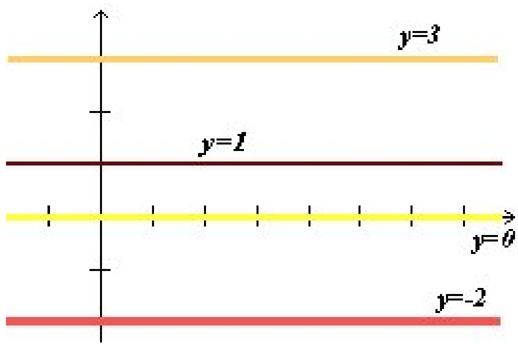
Ordenada en el origen: **–1** $\Rightarrow$ **(0, –1)** *punto de corte de la recta con el eje de ordenadas*

Casos particulares de funciones afines son:

Función constante (recta horizontal): es aquella que siempre toma el mismo valor para todos los valores de la variable independiente (la pendiente es nula): $f(x) = n$.

Ejemplos:

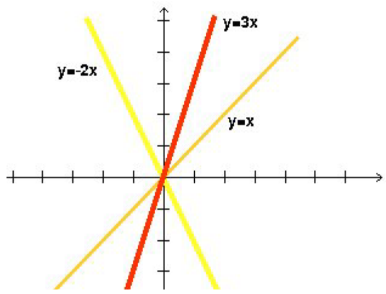
- Gráficas de $f(x) = 3$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2$.



Por tanto, la recta no tiene inclinación, es decir, es paralela al eje de abscisas.

Observa que

La ecuación del eje de abscisas es $y = f(x) = 0$.



Función lineal o **de proporcionalidad directa**: es aquella que tiene ordenada en el origen igual a **0** (pasa por el origen de coordenadas), es decir, es monómica de grado 1: $f(x) = mx$.

Ejemplos:

- Gráficas de $f(x) = 3x$ (y es el triple de x); $f(x) = -2x$ (y es el opuesto del doble de x); $I(x) = x$ (**función identidad**: y es igual a x).

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

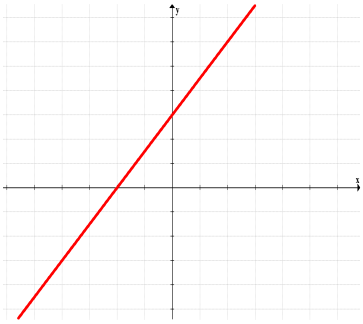
4. Representa las siguientes rectas:

a. $y=3\cdot x+4$ b. $y=-\frac{3}{7}\cdot x-2$ c. $2x+\cdot 4y=5$

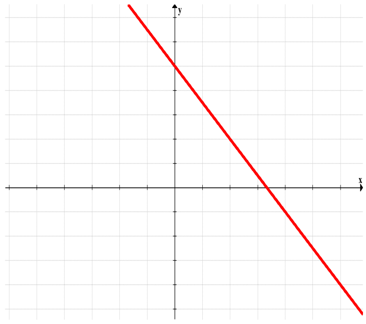
d. $y=5$ e. $y=0$ f. $y=-3$

5. Halla la expresión de las siguientes rectas:

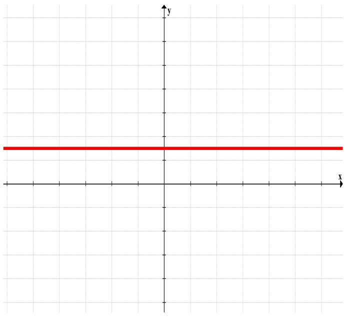
a.



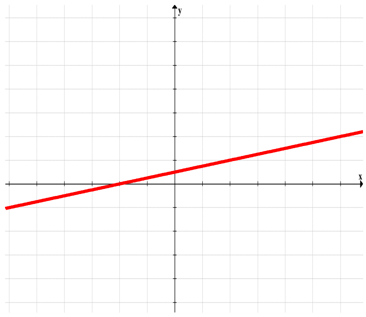
b.



c.



d.



6. Utiliza GeoGebra para representar las siguientes rectas:

a. $y=3\cdot x+4$ b. $y=-\frac{3}{7}\cdot x-2$ c. $2x+\cdot 4y=5$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Funciones polinómicas de segundo grado o funciones cuadráticas

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Se representan mediante **parábolas.**

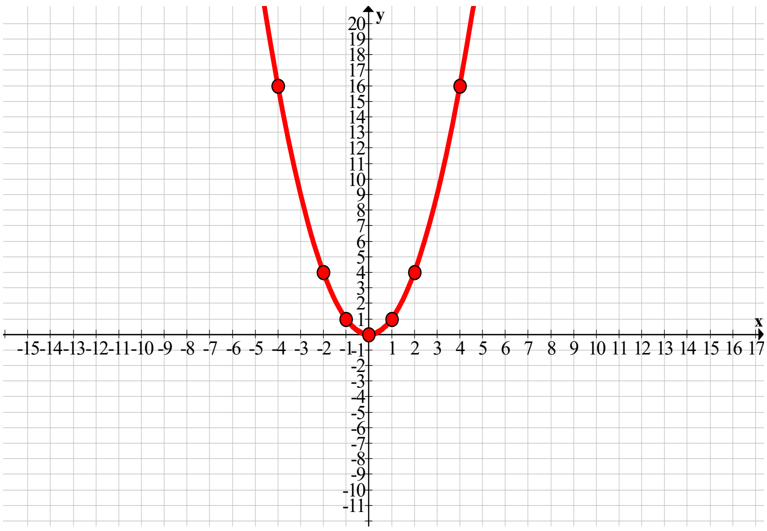
Ejemplo:

- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	***y***
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

- El dominio es toda la recta real. El recorrido son los reales positivos y el cero.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

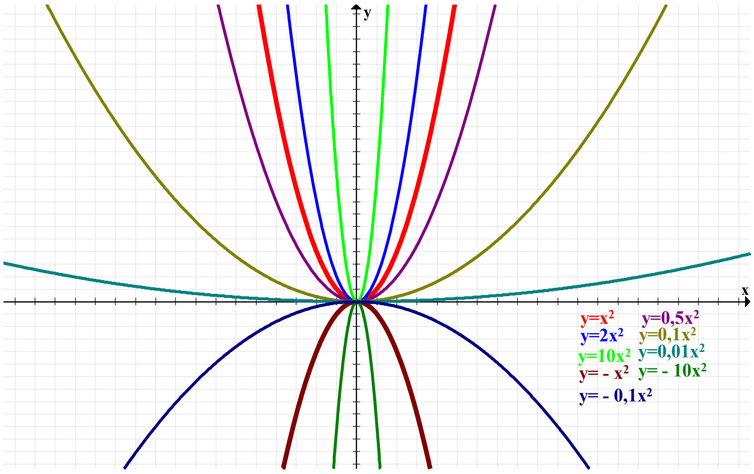
$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a = 1$, y sabemos que si $a = -1$, la parábola tiene la misma forma, pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a :



- Si $a>0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
- Si $a<0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
  - al disminuir a , la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $\boldsymbol{y=a\cdot x^2}$, tienen las siguientes características:

- Son **continuas** en todo el dominio-
- El dominio es toda la recta real.
- Si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido son los reales positivos y el cero. Tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- Si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo, el recorrido son los reales negativos y el cero. Tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

A este punto se le llama **vértice** de la parábola

- Son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

Actividades propuestas

7. A partir de la parábola $y=x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y=\frac{5}{3}x^2$ b. $y=-3x^2$ c. $y=-\frac{15}{3}x^2$

d. $y=4.12x^2$ e. $y=-\frac{6}{10}x^2$ f. $y=\frac{7}{8}x^2$

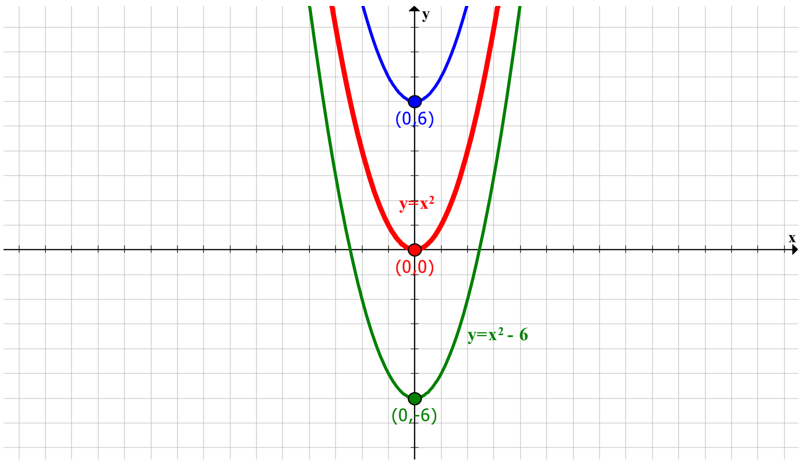
Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y=x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y :

$$\boldsymbol{y = x^2 + k}$$

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y=x^2+6$ y $y=x^2-6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=x^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, k).

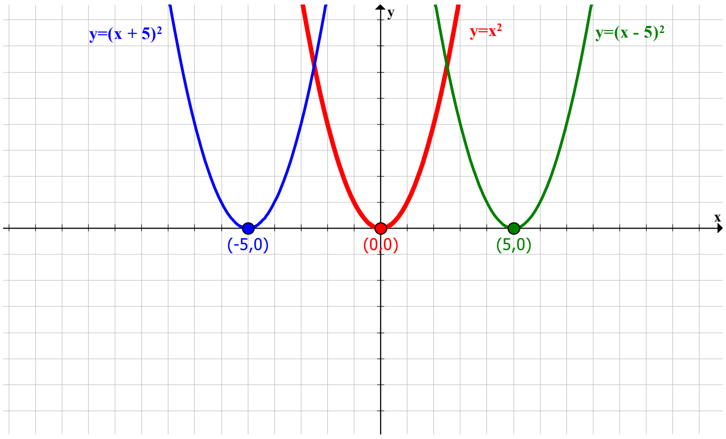
Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje *x*:

$$y = (x - q)^2$$

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda.

Comparemos las parábolas $y=(x+5)^2$ y $y=(x-5)^2$ con la plantilla:



En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (-5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

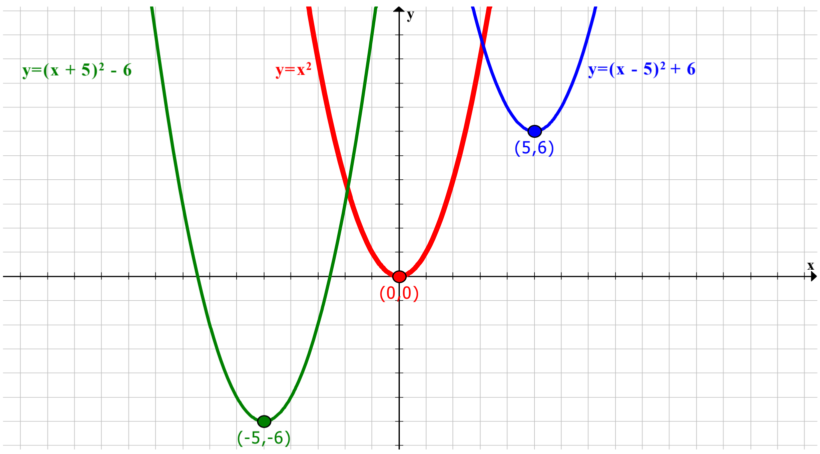
En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades en el eje x hacia la derecha si $q > 0$ y hacia la izquierda si $q < 0$.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q, 0)$**.**

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $\boldsymbol{y = (x - q)^2 + k}$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y $q$posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.

Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q\ unidades\begin{cases} hacia\ la\ derecha\ si\ q>0 \\ hacia\ la\ izquierda\ si\ q>0 \end{cases} \quad ; \quad k\ unidades\begin{cases} hacia\ arriba\ si\ k>0 \\ hacia\ abajo\ si\ k<0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q,k).

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- Representa la gráfica de la función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$

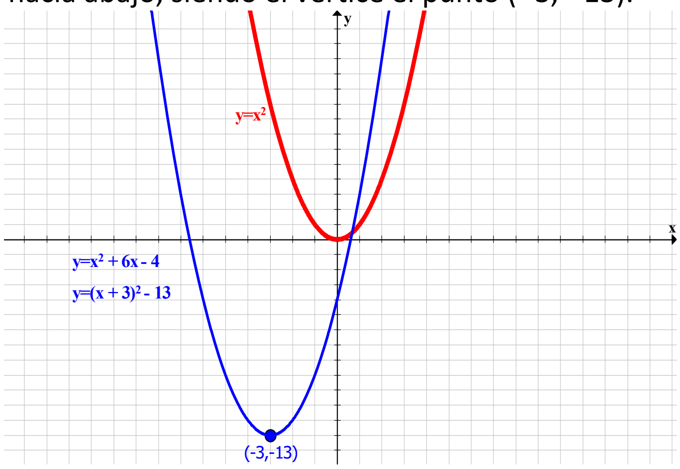
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece x^2+6x. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- En el caso anterior, $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$, el vértice está en el punto (–3, –13).

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$

Actividades propuestas

8. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$

b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$

c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$

e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$

f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$

h. $y = -x^2 + 2x - 4$

i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

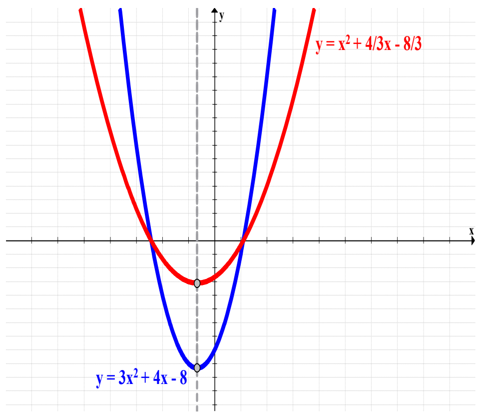
Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + rx + s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + rx + s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y = a \cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resueltas



- Representa la parábola $y = 3x^2 + 4x - 8$:

Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

y la comparamos con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16}{36} - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16+96}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{112}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{28}{9}$$

Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En general, la representación de la función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se puede aproximar representando la parábola $y = x^2 + rx + s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a > 0$
- hacia abajo si $a < 0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

Coeficiente a:

Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a < 0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El vértice de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a}\right)$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y = x^2 + rx + s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$.

La parábola en el caso general es $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$, es decir, $r = \frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y = 0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje *y*, es decir, es la intersección de la parábola con la recta *x* = 0. Cuando $x = 0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto $(0, c)$.

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- Determina los elementos de la parábola $y = -2x^2 - 12x - 10$

  - $a = -2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.

  - Vértice: $\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3, 8)$

  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

    La parábola también pasa por su simétrico: $(-6, -10)$.

  - Eje de simetría: recta $x = -3$.

Actividades propuestas

9. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

10. Utiliza GeoGebra para comprobar tus anteriores representaciones:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Función cuadrática

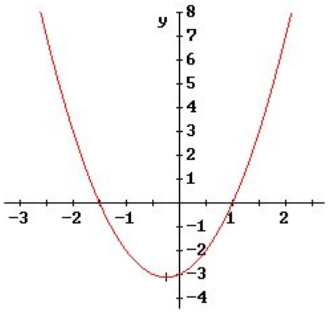
Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de este tipo de funciones se llama **parábola**.

Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo ($a > 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$

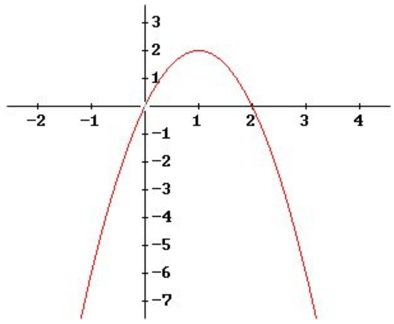
$2 > 0$



Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo ($a < 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo (**cóncava**).

$y = -2x^2 + 4x$

$-2 < 0$



Los otros coeficientes del polinomio afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

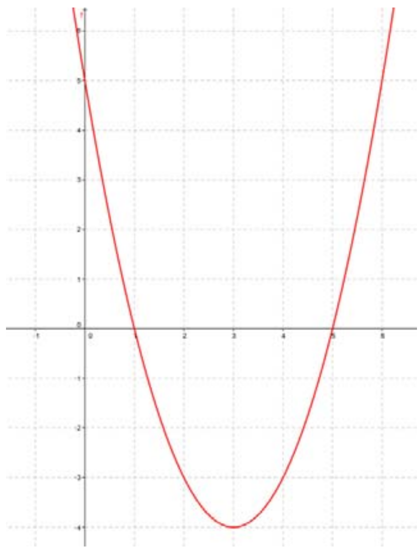
En una función cuadrática hay una rama que crece y otra que decrece. El punto donde se produce ese cambio se llama ***vértice*** y es el mayor (*máximo*) o menor (*mínimo*) valor que toma la función. Es el punto más significativo en una parábola y, por eso, es importante saber calcularlo. Para ello, le damos a la variable independiente el valor $x = \frac{-b}{2a}$, y lo sustituimos en la función para calcular su imagen. Dicho valor es fácil de recordar ya que es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2º grado quitándole la raíz cuadrada.

Ejemplo:

GRÁFICA

- $y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grado}}$

x	0	1	3	5	6
f(x)	**5**	0	–4	0	5
	(0, 5)	(1, 0)	(3, –4)	(5, 0)	(6, 5)



Coeficiente líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ *parábola convexa*

Vértice: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1 \\ b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad y = -4 \quad \Rightarrow$ (3, –4)

Ordenada en el origen: ***5*** $\Rightarrow$ (0, 5) *punto de corte con el eje de ordenadas.*

Puntos de intersección con el eje de abscisas: (1, 0) y (5, 0)

$$0 = x^2 - 6x + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Funciones racionales

Una **función monómica** es aquella en la que, la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es un monomio, es decir, una expresión algebraica en la que únicamente aparecen productos en la parte variable.

Ejemplos:

Función identidad: $I(x) = x$

Función polinómica: $f(x) = -3x^2$

Volumen esfera respecto al radio: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Un caso particular de función monómica es la **función potencial**, aquella en la que la fórmula que establece la relación entre las variables es una potencia de exponente natural.

Ejemplos:

Función identidad: $I(x) = x = x^1$

Cúbica: $f(x) = x^3$

Área del cuadrado respecto del lado: $A(l) = l^2$

Una **función polinómica** es aquella en la que la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es un polinomio, es decir, una suma de monomios no semejantes.

Ejemplos:

Función polinómica de primer grado: $p(x) = -2x + 1$

MRUA (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)*:* $e(t) = 5 \cdot t + \frac{3}{2} \cdot t^2$

Área total de un cilindro de altura 1 respecto al radio: $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r$

Actividades resueltas

- *Mediante la función anterior que relaciona el área de un cuadrado con su lado, calcula el área de un:*

Cuadrado de lado 1 cm:	$A(1) = 1^2 = 1$	$\Rightarrow$	$A = 1\ cm^2$.
Cuadrado de lado 0.5 m:	$A(0.5) = 0.5^2 = 0.25$	$\Rightarrow$	$A = 0.25\ m^2$.
Cuadrado de lado $\sqrt{5}$ mm:	$A(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$	$\Rightarrow$	$A = 5\ mm^2$.

- *Otras fórmulas de áreas o volúmenes de figuras conoces que son funciones polinómicas:*

Área de los triángulos de base 3 cm en función de la altura: $A(h) = \frac{3 \cdot h}{2} = \frac{3}{2} \cdot h$ (monómica)

Área de los rectángulos de altura 4 m en función de la base: $A(b) = b \cdot 4 = 4b$ (monómica)

Área de los trapecios de bases 6 y 8 dm en función de la altura: $A(h) = \frac{(6+8) \cdot h}{2} = 7 \cdot h$

Área total del cono de generatriz 5 mm en función del radio: $A(r) = \pi r^2 + 5\pi r$ (polinómica)

Volumen de la pirámide cuadrangular de altura 7 m en función del lado: $V(l) = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot 7 = \frac{7}{3} l^2$

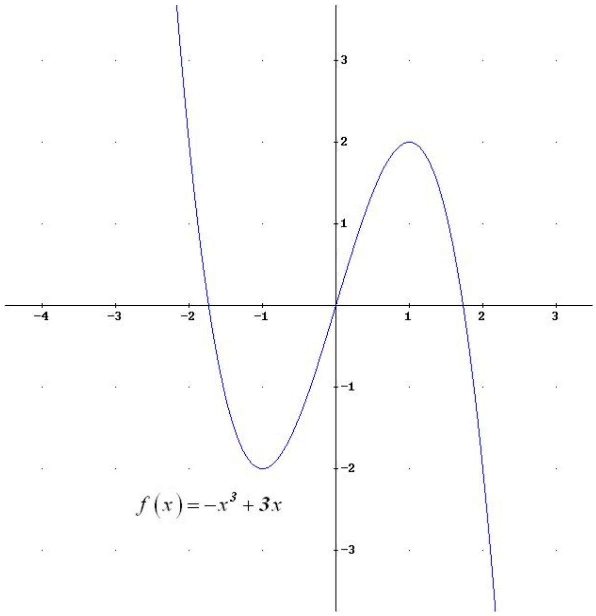
Actividades propuestas

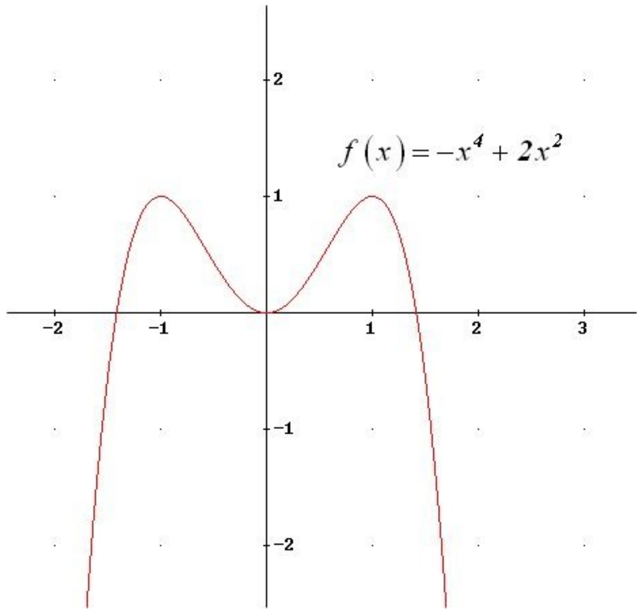
11. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

12. Calcula las imágenes de los números $-3;\ \frac{-1}{2};\ 0;\ 1;\ \sqrt{2};\ \frac{3}{2};\ 10$ por la función $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Funciones polinómicas

Las funciones polinómicas de grado mayor que dos son más complejas de dibujar, aunque las gráficas también tienen características llamativas:





Función racional

Una **función racional** es aquella en la que, la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es una expresión racional o fracción algebraica, es decir, una división de dos polinomios.

Ejemplos:

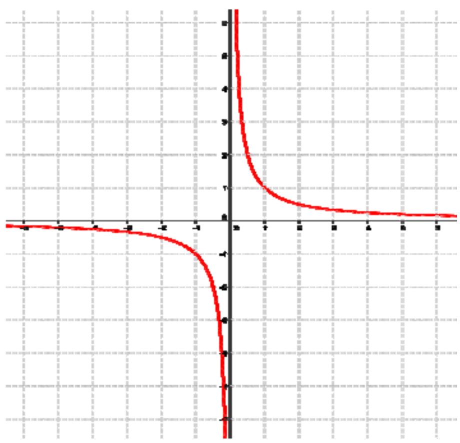
Función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g(t) = \frac{t+1}{t-1}$ $\qquad h(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$

Recuerda que:

Cuando los polinomios que forman la fracción algebraica son, como mucho, de grado 1 (el del denominador obligatoriamente), la gráfica de la función es una curva llamada **hipérbola**.

Ejemplo:

GRÁFICA



- *La gráfica de la función de proporcionalidad inversa es:*

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/5	1/5	1/2	1	2	3
f(x)	–1/3	–1/2	–1	–2	–5	5	2	1	1/2	1/3

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Interpolación y extrapolación lineal y cuadrática. Ajuste mediante funciones polinómicas

Interpolar es intercalar entre los extremos.

Una **interpolación lineal** consiste en ajustar una recta a los datos para obtener un valor intermedio.

Ejemplo:

- En el tratamiento de una enfermedad se están probando en un laboratorio distintas dosis de un medicamento para comprobar sus efectos. Se han obtenido los siguientes datos:

Dosis (*mg*): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): y	32	40	47.1	53.3	58.6	63	66.5	69.1	70.8	71.6

Se puede dibujar gráficamente los datos de esta tabla, y unirlos según diferentes criterios.

Si los unimos mediante segmentos de rectas y queremos estimar el porcentaje de curaciones para una dosis de 6.4 mg, debemos calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (6, 63) y (7, 66.5):

Cálculo de la ecuación de la recta: $y = f(x) = mx + n \rightarrow$

$$f(6) = 63 = m6 + n$$

$$f(7) = 66.5 = m7 + n$$

Restamos: $3.5 = m \rightarrow n = 63 - m6 = 63 - (3.5)\cdot 6 = 42$. ***Ecuación de la recta:*** $y = 3.5x + 42$.

Para una dosis de 6.4 mg tendremos, aproximadamente, $y = 3.5\cdot 6.4 + 42 = 64.4$.

Aproximadamente tendremos un porcentaje de curaciones del 64.4 %.

Hemos hecho una interpolación lineal.

Actividades propuestas

13. Utiliza la recta anterior para obtener el porcentaje de curaciones esperado para una dosis de 7.3 mg.

Al querer obtener un valor que está fuera del intervalo [6, 7] lo que hacemos ahora es una extrapolación lineal.

Extrapolar es estimar más allá del intervalo de observación.

Extrapolación lineal es extrapolar utilizando una recta.

Ya sabes, por 2 puntos pasa una única recta, por 3 puntos pasa una única función cuadrática, por 4 puntos pasa una única función polinómica de tercer grado… y por $n + 1$ puntos, pasa una única función polinómica de grado n.

Interpolación y extrapolación cuadrática

En el ejemplo anterior también podíamos haber unido los puntos de la tabla mediante otro tipo de curvas. Si los unimos mediante parábolas estaremos haciendo una interpolación (o una extrapolación) cuadrática. Queremos conocer, como en el caso anterior, el porcentaje de curaciones para una dosis de 6.4 mg. Para ello necesitamos 3 puntos: (6, 63), (7, 66.5) y (8, 69.1) y buscamos la parábola que pasa por esos tres puntos.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo de la ecuación de la parábola: $y = f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$

$$f(6) = 63 = a36 + b6 + c$$
$$f(7) = 66.5 = a49 + b7 + c$$
$$f(8) = 69.1 = a64 + b8 + c$$

Restamos: $3.5 = 13a + b$

$2.6 = 15a + b$

Y volvemos a restar y obtenemos el coeficiente a: $-0.9 = 2a \rightarrow a = -0.45$.

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores obtenemos el coeficiente b:

$b = 3.5 - 13(-0.45) = 9.35$

Despejando c de cualquiera de las primeras ecuaciones y sustituyendo a y b:

$c = 63 - 36a - 6b = 63 - 36(-0.45) - 6(9.35) = 23.1$.

La parábola buscada es: $y = f(x) = -0.45x^2 + 9.35x + 23.1$.

Para conocer el porcentaje de curaciones, por interpolación cuadrática, con una dosis de 6.4 mg, sustituimos ese valor en la ecuación de la parábola:

$y = f(6.4) = -0.45 \cdot (6.4)^2 + 9.35 \cdot (6.4) + 23.1 = 64.508$.

Ahora prevemos un porcentaje algo mayor de curaciones: 64.508 %.

Una **interpolación cuadrática** consiste en ajustar una función cuadrática a los datos para obtener un valor intermedio.

Si utilizamos la parábola para determinar el porcentaje de curaciones para una dosis de fuera del intervalo (6, 8), como por ejemplo para 5.5 mg, estaremos haciendo una extrapolación cuadrática:

$y = f(5.5) = -0.45 \cdot (5.5)^2 + 9.35 \cdot (5.5) + 23.1 = 60.91$ %.

Una **extrapolación cuadrática** consiste en ajustar una función cuadrática a los datos para obtener un valor fuera del intervalo de observación.

¿Cómo podemos conocer si nuestros datos se ajustan a una función lineal, a una función cuadrática o a una función polinómica de grado n?

Si, como en nuestro ejemplo, la variable independiente está en progresión aritmética, calculamos las diferencias sucesivas, hasta que todas las diferencias sean iguales:

Dosis (*mg*): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): y	32	40	47.1	53.3	58.6	63	66.5	69.1	70.8	71.6
Diferencias primeras		8	7.1	6.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	0.8
Diferencias segundas			–0.9	–0.9	–0.9	–0.9	–0.9	–0.9	–0.9	–0.9

Si las diferencias primeras hubieran sido todas iguales, los datos se ajustarían a una función lineal. Si las diferencias de orden n son todas iguales, los datos se ajustan a una función polinómica de grado n.

En nuestro ejemplo las diferencias segundas son todas iguales, luego los datos se ajustan a una parábola, la parábola: $y = f(x) = -0.45x^2 + 9.35x + 23.1$.

1.6. Función raíz

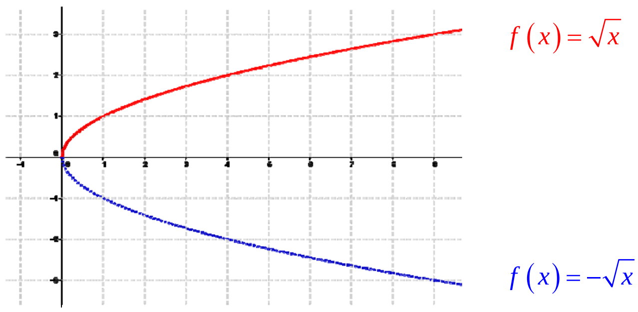
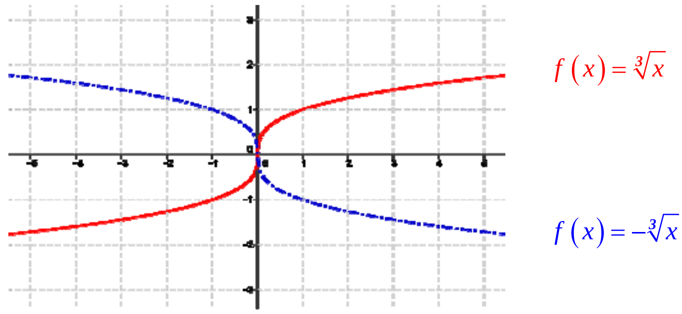
Una **función raíz** es aquella en la que la variable dependiente se calcula haciendo una raíz a la variable independiente.

Ejemplos:

$f(x)=\sqrt{x}$ $g(t)=\sqrt[3]{t}$ $h(t)=\sqrt[4]{t}$ $j(x)=\sqrt[5]{x}$

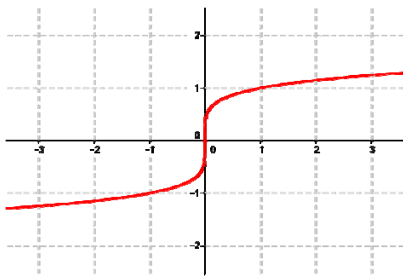
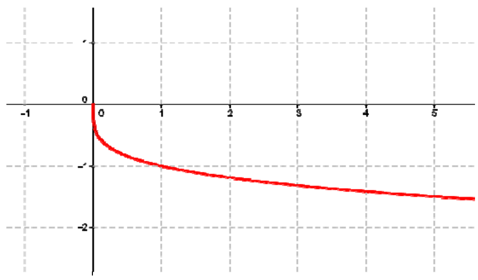
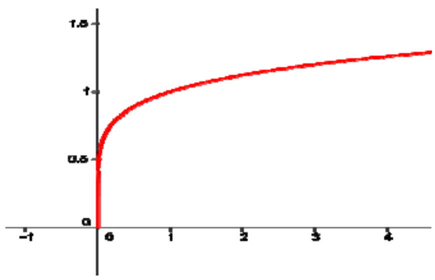
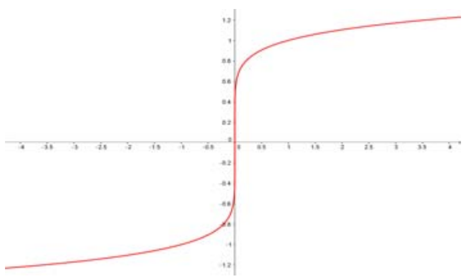
Es importante recordar que la raíz es una operación un tanto especial puesto que no siempre se puede obtener, por ejemplo, cuando el radicando es negativo y el índice par. La función raíz cuadrada tiene un único resultado real, el que asigna la calculadora (no confundir con las soluciones de una ecuación de segundo grado, que son dos).

Gráficamente, lo anterior se traduce en:

RAÍCES DE ÍNDICE PAR	RAÍCES DE ÍNDICE IMPAR
	

Actividades propuestas

14. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Funciones exponenciales y logarítmicas

Una **función exponencial** es aquella en la que la variable dependiente se calcula elevando un número conocido a la variable independiente.

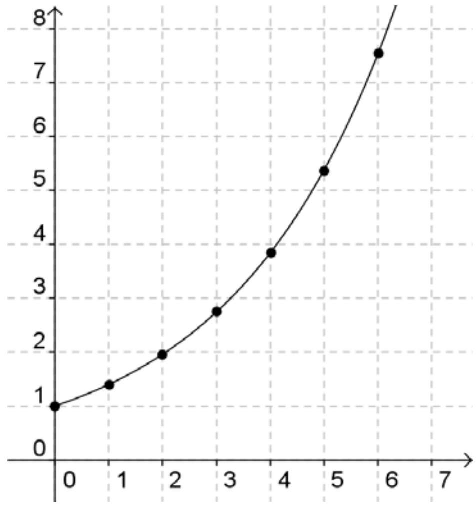
Actividades resueltas

- *Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número "y" de bacterias que habrá al cabo de "x" horas (comenzando por una sola bacteria):* $y = f(x) = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora (**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (x)	**Número de bacterias (y)**
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo **no** se ha dado a la "x" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general, la variable independiente sí puede tener valores negativos, pero sus imágenes siempre son positivas.

Actividades propuestas

15. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.

16. Repite otra vez el ejercicio anterior suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.

Observarás que, en el primer caso, los valores de "y" aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de "x" aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. En el segundo caso, como en lugar de multiplicar se trata de dividir, tenemos un **decrecimiento exponencial**.

17. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

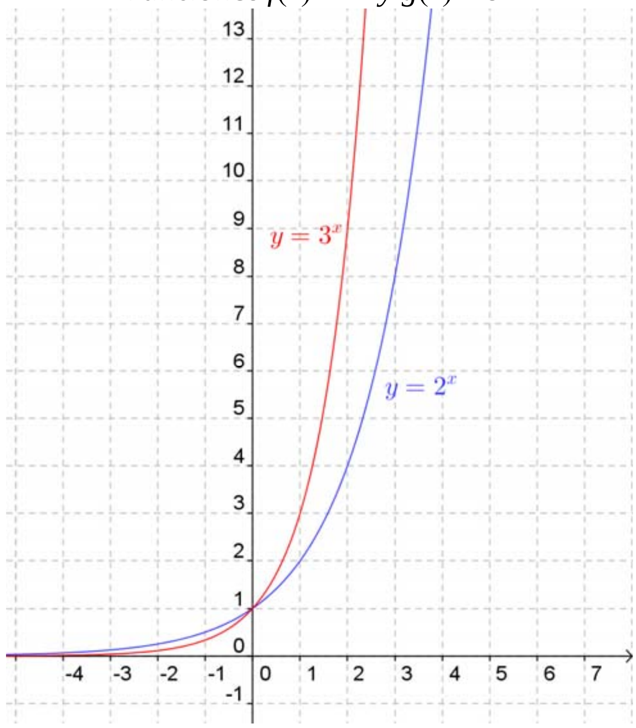
Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ se diferencian según el valor de la base "a": Son distintas si $0 < a < 1$ o $a > 1$.

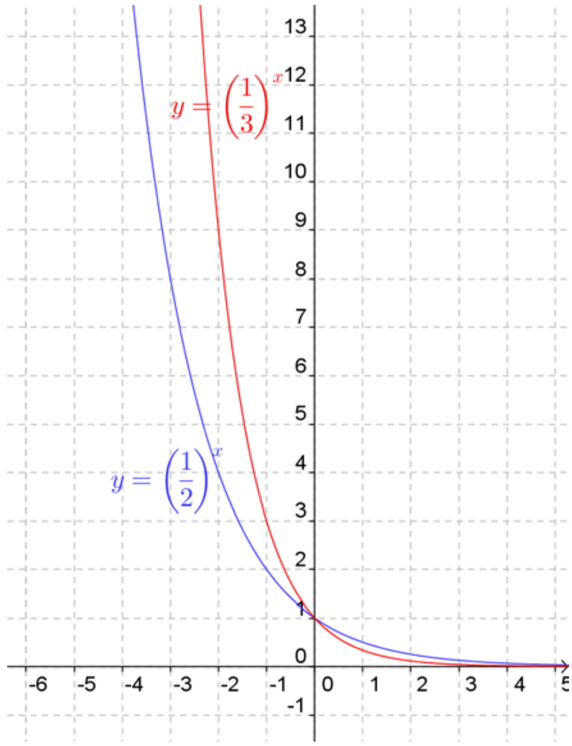
En el caso en el que $a = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$



Funciones $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos que la gráfica de $f(x) = a^x$ y la de $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

El número *e*. La función exponencial: $f(x) = e^x$

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π, aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Ya lo hemos estudiado en capítulos anteriores. Ya sabes que es un número irracional cuyo valor aproximado es $e = 2.71828182846...$

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La gráfica de la función $f(x) = e^x$ es similar, y comparte características, a la de las funciones exponenciales de base mayor que 1 dibujadas anteriormente.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

18. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores. Representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

19. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

20. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 1/3 cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

(a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").

(b) Representa gráficamente estos datos.

Cultivo de la bacteria Salmonella

Función logaritmo

Un número llamado e. John Napier dio a conocer los logaritmos en 1614. Gracias a ellos las multiplicaciones podían sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las raíces por divisiones y las potencias por productos. Esto simplificaría en gran manera la realización de cálculos matemáticos. Más por menos. La aventura del saber. Antonio Pérez.

[**Más por menos: Un número llamado e | RTVE Play**]

En el capítulo 1 ya hemos estudiado los logaritmos, pero ahora vamos a estudiar la función logarítmica.

Una **función logarítmica** es aquella en la que la variable dependiente se calcula haciendo el logaritmo, en una base conocida, de la variable independiente.

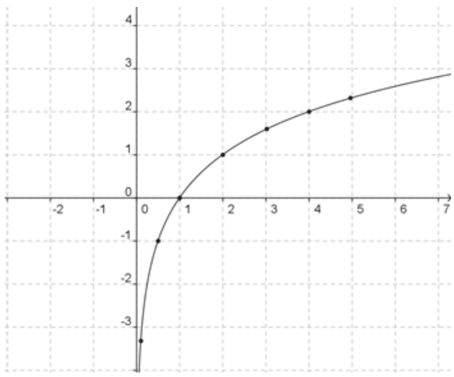
Ejemplos:

Función logaritmo:	*Función logaritmo neperiano:*	*Función logaritmo de base 1/2:*
$f(x) = \log(x)$	$g(x) = \ln(x)$	$h(t) = \log_{0,5}(t)$

Hay una función distinta para cada valor de la base a.

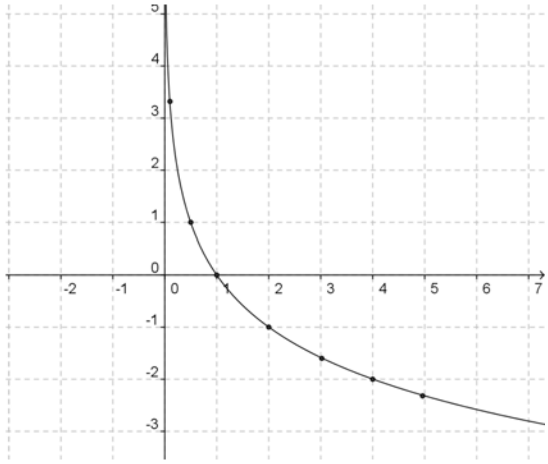
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

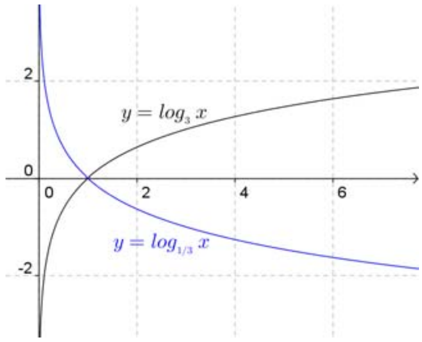
x	$\log_2 x$
0.1	–3.3
0.5	–1.0
0.7	–0.5
1	0.0
2	1.0
3	1.6
4	2.0
5	2.3
…	…



- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

x	$\log_{1/2} x$
0.1	3.3
0.5	1.0
0.7	0.5
1	0.0
2	−1.0
3	−1.6
4	−2.0
5	−2.3
…	…





Observa que:

Las gráficas de $f(x) = \log_a(x)$ y $g(x) = \log_{1/a}(x)$ son simétricas respecto del eje OX:

Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$. Por tanto, llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y".

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

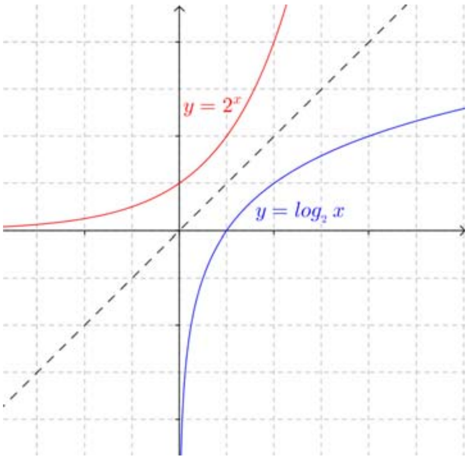
Ejemplo:

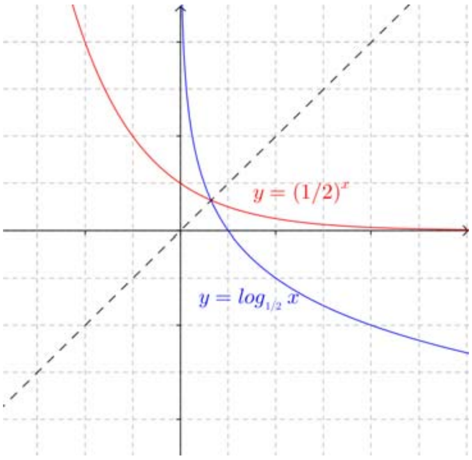
- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $\log_5 3 = 0.6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). Si a continuación aplicamos la función exponencial: $5^{0.6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación, aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

Gráficamente, la propiedad anterior se traduce en que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Esto se debe a que si el punto (a, b) es de la gráfica de una de ellas, el punto (b, a) pertenece a la gráfica de la otra.

Ejemplos:



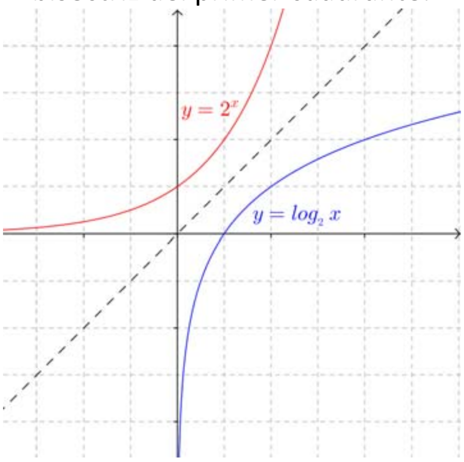


Actividad resuelta

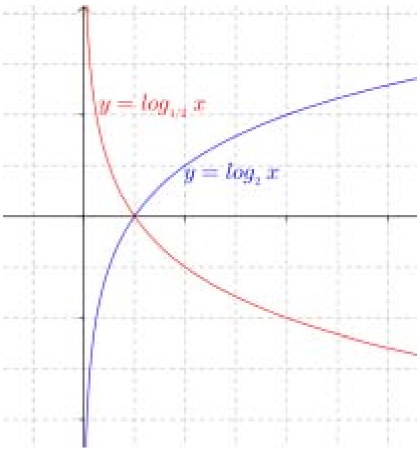
- Representa la función $f(x) = \log_2(x)$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $g(x) = 2^x$, $h(x) = \log_{1/2}(x)$ y, utilizando también $g(x) = 2^x$, representa $k(x) = (1/2)^x$.

Solución:

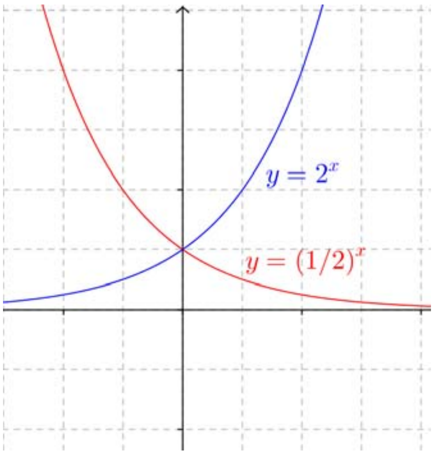
Por la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante:



Por la simetría respecto al eje OX:



Por la simetría respecto al eje OY:



Actividades propuestas

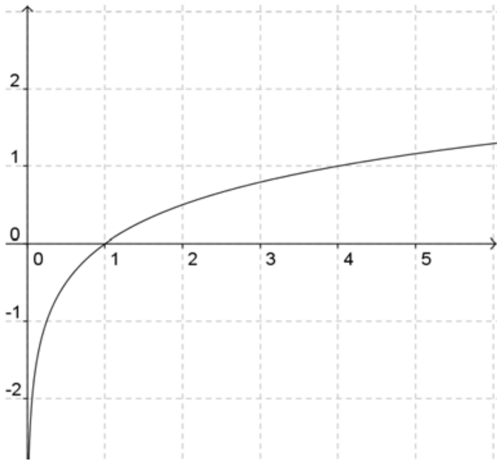
21. Represent en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{1/3} x$ c) $f(x) = log_{1.5}\, x$

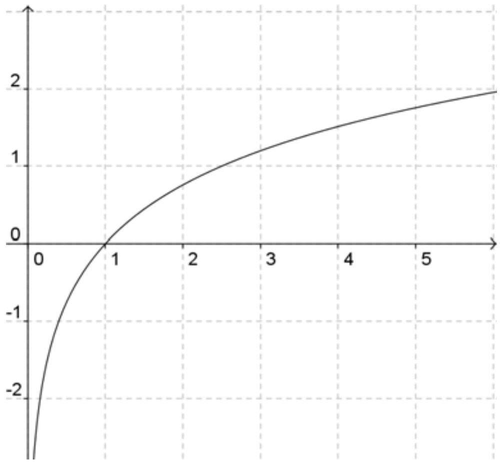
Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, –1), donde a es la base.

22. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

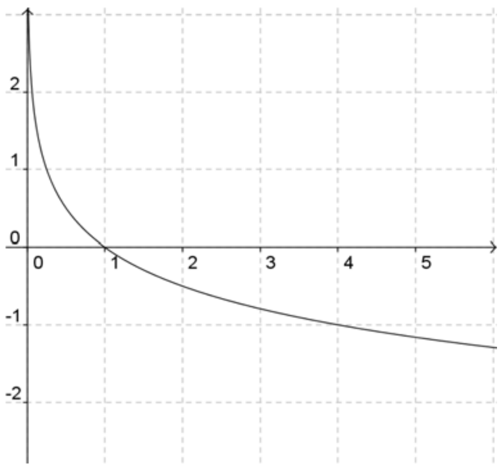
a)



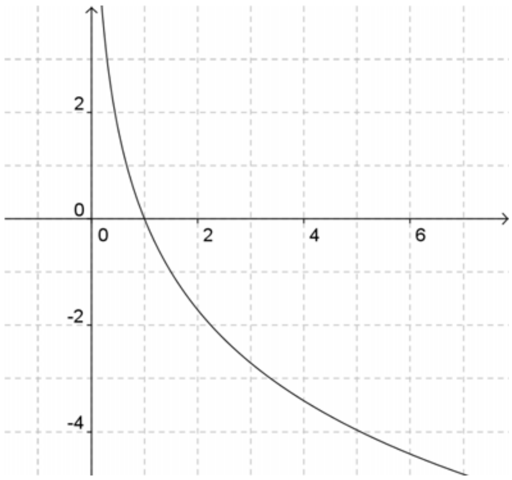
b)



c)



d)



1.8. Funciones definidas a trozos. Función valor absoluto. Función parte entera

Una **función definida a trozos** es aquella en la que la fórmula que establece la relación entre las dos variables no es única, sino que dependiendo de los valores que tome la variable independiente, los de la variable dependiente se calculan en una u otra fórmula.

- Piensa en la siguiente situación: Para la tarifa de un teléfono móvil se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.

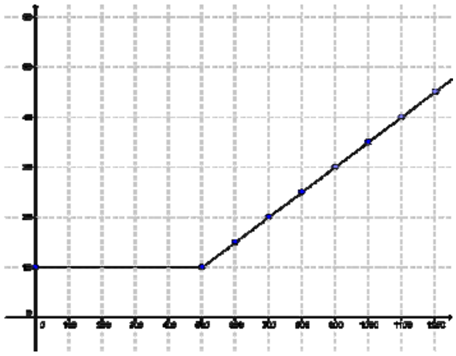
Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €; para valores mayores, los minutos que gastamos por encima de 500 son (x – 500) y, por tanto, lo que pagamos por esos minutos es 0.05(x – 500), pues lo medimos en euros, más los 10 € que pagamos de fijo.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Analíticamente:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 0.05(x - 500), & \text{si } x > 500 \\ 10, & \text{si } x \leq 500 \end{cases}$$

Gráficamente:



Otros ejemplos:

Función valor absoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq -2 \\ \dfrac{1}{t} & \text{si } -2 < t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

23. Representa gráficamente la función valor absoluto.

24. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x < -4 \\ -x + 2 & si \;\; -4 \leq x < 0 \\ 5 & si \;\; 0 \leq x \end{cases}$ Puntos: –6; –4; –1/2; –0.2; 0; 1; 3/2; 4.

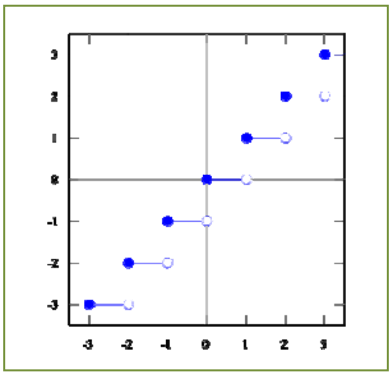
b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \;\; x < -3 \\ x & si \;\; -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & si \;\; 2 \leq x \end{cases}$ Puntos: –5; –3; –1/2; –0.2; 0; 2; 9/4; 4.

Funciones parte entera

Se define Parte Entera de x, como el número entero k, menor o igual a x, más próximo.

Parte Entera de x = $[x] = máx\{k \in Z; k \leq x\}$.

Actividad resuelta



- Representa la gráfica de la función Parte Entera de x.

Vamos a calcular algunos valores:

Parte Entera de $2 = 2$. La parte entera de un número entero es dicho número

Parte Entera de $2.3 = 2$. Parte Entera de $0.3 = 0$.

Parte Entera de $-0.3 = -1$.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.9. Funciones trigonométricas

En el curso anterior, en Trigonometría hemos estudiado las razones trigonométricas y sus propiedades, ahora vamos a estudiar las funciones trigonométricas.

Una **función trigonométrica** es aquella en la que la variable dependiente se calcula aplicando una razón trigonométrica a la variable independiente.

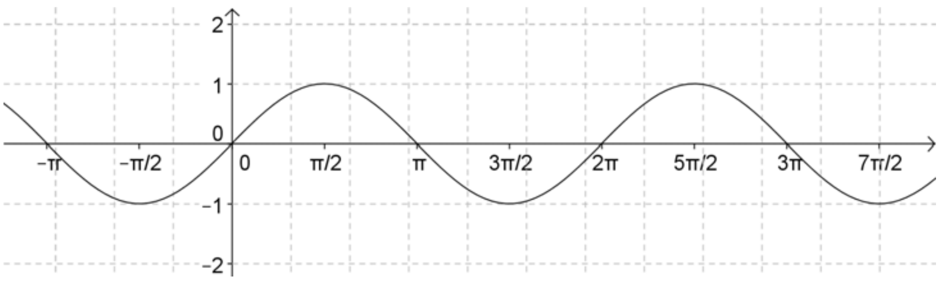
Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

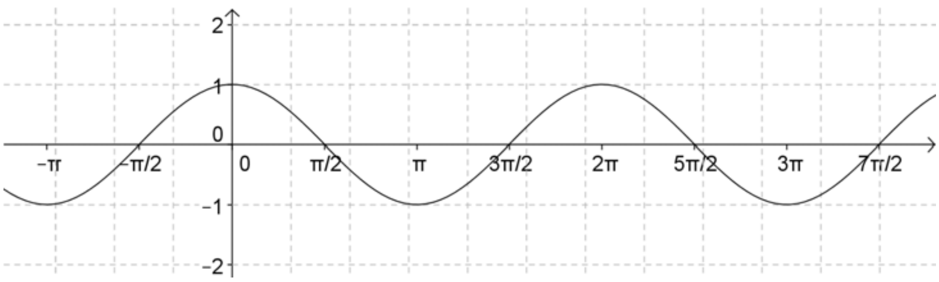
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto, es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

Gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$

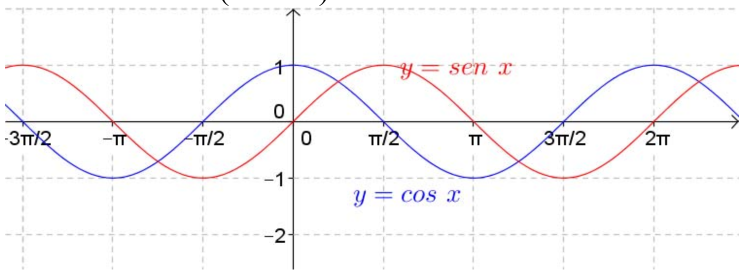


Gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Ambas son funciones periódicas de periodo 2 π, pues la gráfica vuelve a repetirse en ese intervalo. Ya sabes cuánto vale π, π = 3.14… Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

Puedes observar que ambas funciones tienen la misma gráfica, pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal. Es decir: $\text{sen } (x + \pi/2) = \cos x$



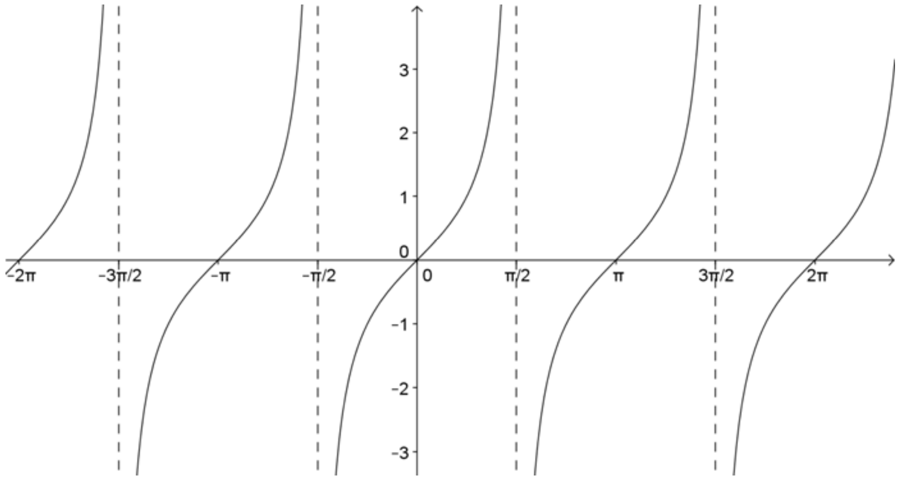
Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La función tangente

Recuerda que:

Como razones trigonométricas: tg x = sen x / cos x.

Gráfica de la función *f(x) = tg x*



Recordemos que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2… pues para esos valores se anula el denominador. Tiene, por tanto, asíntotas verticales en esos valores

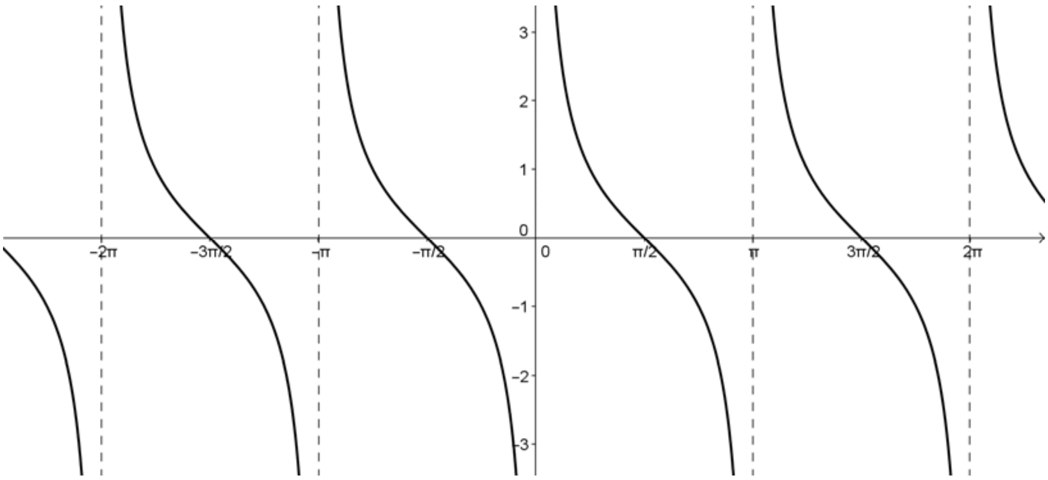
Es también una función periódica, pero de periodo π.

La función cotangente

Recuerda que:

Como razones trigonométricas: cotg x = 1 / tg x = cos x/ sen x.

Gráfica de la función *f(x) = cotg x*



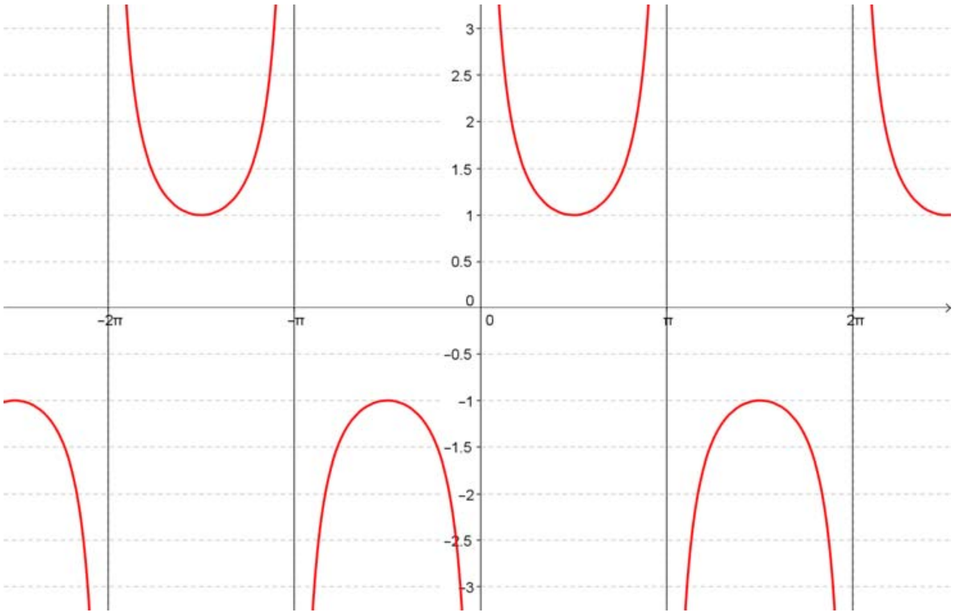
Recordemos que no existe la cotangente para los ángulos de 0, ± π, ±2π, ±3π… pues para esos valores se anula el denominador. Tiene asíntotas verticales.

Las funciones cosecante y secante

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque vuelven a ser muy parecidas.

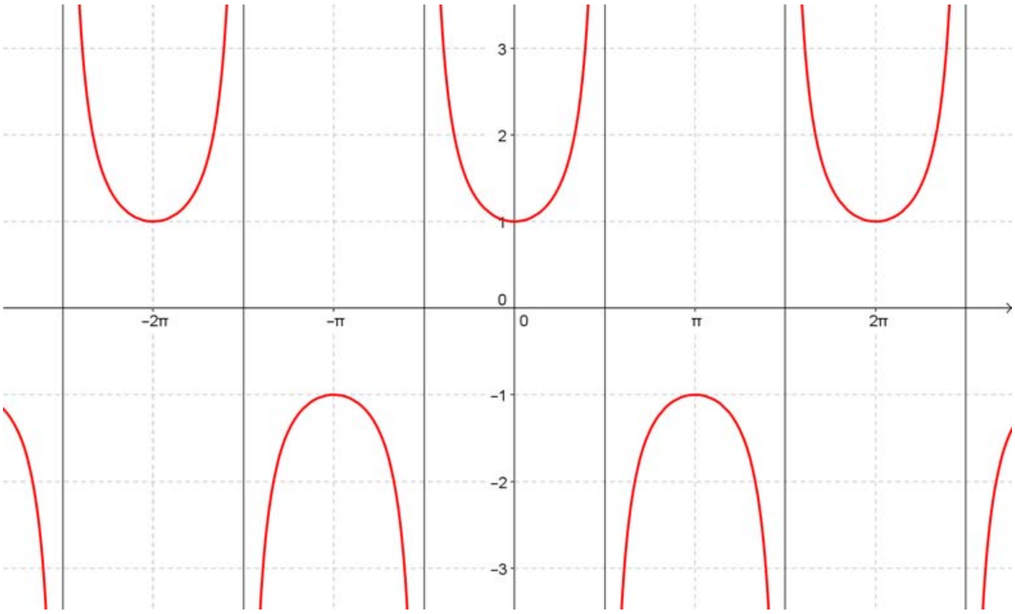
Ya sabes que como razones trigonométricas: cosec x = 1/sen x, y sec x = 1/ cos x.

Gráfica de la función *f(x) = cosec x*



Recordemos que no existe la cosecante para los ángulos de 0, ± π, ±2π, ±3π… pues para esos valores se anula el denominador. Vuelve a ser una función periódica de periodo 2π.

Gráfica de la función *f(x) = sec x*



Recordemos que no existe la secante para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2… pues para esos valores se anula el denominador. Vuelve a ser una función periódica de periodo 2π.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.10. Funciones de oferta y demanda

25. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

a) Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

La curva "cantidad demandada" – "precio" es un ejemplo de ***función de demanda***. Observa que es una función decreciente, pues al aumentar los precios el consumidor demanda menor cantidad del producto. Ilustra el comportamiento de los consumidores.

La curva "cantidad ofrecida" – "precio" es un ejemplo de ***función de oferta***. Observa que es una función creciente, pues al aumentar los precios el vendedor aumenta la producción y ofrece mayor cantidad del producto. Ilustra el comportamiento de los vendedores.

b) Determina de forma aproximada en la gráfica anterior el punto de intersección de ambas gráficas.

A ese punto se le denomina ***punto de equilibrio***. La demanda y la oferta determinan el precio y la cantidad de equilibrio. En ese punto se igualan las cantidades ofrecidas y demandadas.

A un precio mayor la cantidad ofrecida excede la cantidad demandada, y al haber depósitos de mercancía no vendida la competencia entre vendedores hará que el precio baje hasta el punto de equilibrio. Hay un excedente.

A un precio menor la cantidad demandada es mayor que la ofrecida, los compradores quieren más naranjas, y eso eleva el precio hasta el punto de equilibrio. Hay un déficit.

Este problema ilustra unos conceptos que se utilizan en Teoría Económica. Es un modelo ideal que se explica en un ***mercado con competencia perfecta***, con muchos compradores y muchos vendedores, en los que la ***demanda*** y la ***oferta*** determinan el precio.

Actividades propuestas

26. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m^2, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1 500	1 000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio.

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

2.1. Operaciones básicas

La función suma, diferencia, producto o cociente de otras dos es aquella que aplica cada elemento original en la suma, diferencia, producto o cociente de los elementos imagen por cada una de las funciones. La expresión algebraica se obtiene sumando, restando, multiplicando o dividiendo respectivamente las expresiones algebraicas de las funciones originales:

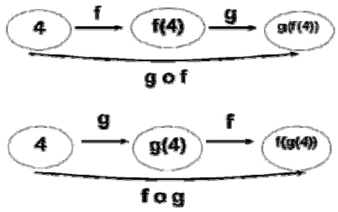
OPERACIÓN	EJEMPLO:	$f(x)=\frac{2}{x}\quad;\quad g(x)=\frac{-3x}{x+1}$
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{2}{x}+\frac{-3x}{x+1}=\frac{-3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{2}{x}-\frac{-3x}{x+1}=\frac{2}{x}+\frac{3x}{x+1}=\frac{3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ Caso particular: $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)\quad k\in\Re$	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{2}{\cancel{x}}\cdot\frac{-3\cancel{x}}{x+1}=\frac{-6}{x+1}$ $(-1\cdot f)(x)=-1\cdot f(x)=-1\cdot\frac{2}{x}=\frac{-2}{x}$ *función opuesta de f* Gráficamente, una función y su opuesta son simétricas respecto del eje de abscisas	
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-3x}{x+1}}=\frac{2x+2}{-3x^2}$	

2.2. Composición de funciones

Existe una operación específica de las funciones que se llama *composición* y consiste en:

1º Aplicamos una función a un número.

2º Aplicamos otra función al resultado obtenido.



Ejemplo:

$$f(x)=\frac{2}{x}\quad;\quad g(x)=\frac{-3x}{x+1}$$

$\underbrace{f\circ g}$ g compuesto con f (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)

$$\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)\ \underset{\text{ponemos } g(x)=\frac{-3x}{x+1}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } f,}{=}}\ \frac{2}{\left(\frac{-3x}{x+1}\right)}=\frac{2x+2}{-3x}$$

$\underbrace{g\circ f}$ f compuesto con g (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)\ \underset{\text{ponemos } f(x)=\frac{2}{x}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } g,}{=}}\ \frac{-3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)+1}=\frac{\frac{-6}{\cancel{x}}}{\frac{2+x}{\cancel{x}}}=\frac{-6}{x+2}$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Como queda patente en el ejemplo anterior, la composición de funciones NO es conmutativa, aunque sí es asociativa (sin variar el orden): $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Además, podemos observar que, al hacer cualquier operación con funciones, aparecen expresiones de los tipos estudiados, aunque más complejas al estar todas "mezcladas". A partir de ahora, los distintos tipos de funciones tendrán fórmulas parecidas a las de los siguientes ejercicios:

Actividades propuestas

27. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

a) $(p+q)(x)$	*b)* $(q+r)(x)$
c) $(q+r+s)(x)$	*d)* $(s-q)(x)$
e) $(q-r)(x)$	*f)* $(r-p)(x)$
g) $(f+p)(x)$	*h)* $(j-f)(x)$
i) $(g+k)(x)$	*j)* $(m-a)(x)$
k) $(b+d)(x)$	*l)* $(r+m)(x)$
m) $(p \cdot q)(x)$	*n)* $(q \cdot r)(x)$
o) $(q \cdot r : s)(x)$	*p)* $(p : q)(x)$
q) $(f \cdot p)(x)$	*r)* $(j \cdot f)(x)$
s) $(g : k)(x)$	*t)* $(a \cdot b)(x)$
u) $(p \circ q)(x)$	*v)* $(a \circ b)(x)$
w) $(r \circ s)(x)$	*x)* $(f \circ p)(x)$
y) $(j \circ f)(x)$	*z)* $(g \circ k)(x)$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Función inversa o recíproca

La ***función inversa (o recíproca)*** de una función *f* es otra función, f^{-1}, tal que: $\begin{cases} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} \circ f = I \end{cases}$.

Para que la función inversa esté bien definida (sea función) es necesario que, en la función de partida, cada imagen tenga un único original.

Para obtenerla, seguiremos los siguientes pasos:

PASOS	EJEMPLO:	$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
1º Llamamos *y* a *f*(*x*)	$y = \dfrac{2x}{x-1}$	
2º Despejamos *x* en función de *y*	$y \cdot (x-1) = 2x \Rightarrow y \cdot x - y = 2x \Rightarrow y \cdot x - 2x = y \Rightarrow$ $y \cdot (x-2) = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{y-2}$	
3º Cambiamos los papeles de *x* e *y*	$y = \dfrac{x}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}}$	

Esto no siempre es posible realizarlo, ya que no siempre se puede despejar la *x* o el resultado al hacerlo no es único, en cuyo caso ¿cuál sería la inversa?

Por ejemplo:

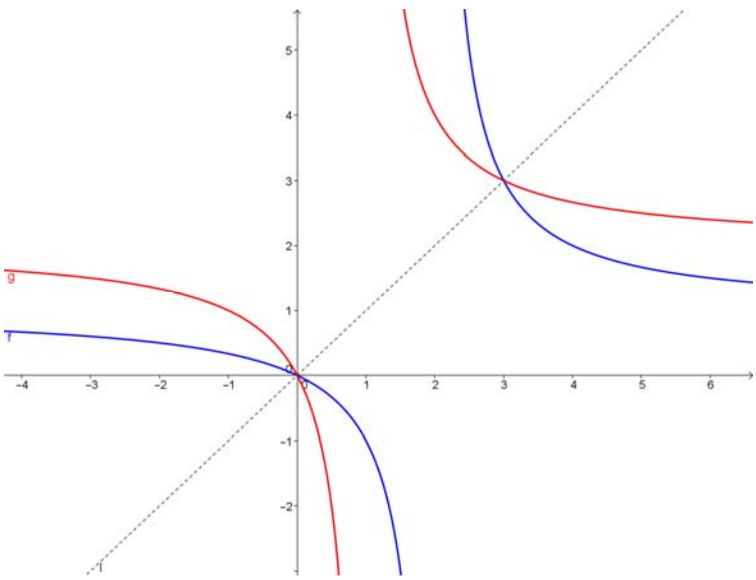
$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \overset{???}{\Rightarrow} \begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad ó \quad y = x^3 - 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad ???$$

Si existe, la inversa es única y, gráficamente, una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes), que es la gráfica de la función identidad.

Ejemplos

- $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

  $f^{-1}(x) = g(x) = \dfrac{x}{x-2}$



Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Las funciones logaritmo y exponencial (de la misma base) son funciones inversas.

Actividades propuestas

28. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

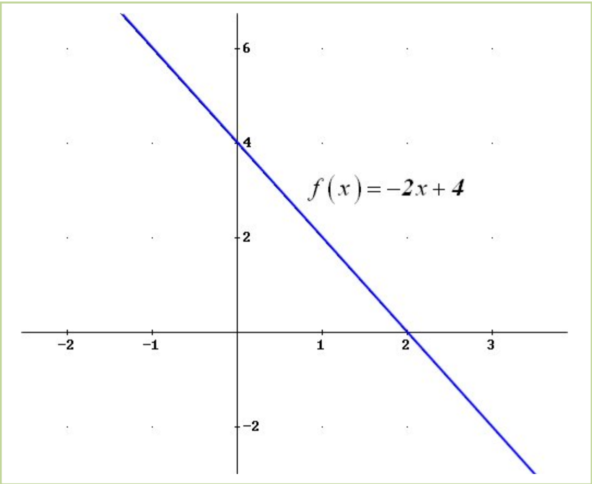
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) $p(x)$		*b)* $q(x)$	
c) $r(x)$		*d)* $s(x)$	
e) $f(x)$		*f)* $g(x)$	
g) $h(x)$		*h)* $j(x)$	
i) $k(x)$		*j)* $l(x)$	
k) $m(x)$		*l)* $n(x)$	
m) $a(x)$		*n)* $b(x)$	
o) $c(x)$		*p)* $d(x)$	

29. Calcula la función inversa de:



Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones reales de variable real. En este vídeo se refrescan conceptos gráficos sobre funciones, imprescindibles para afrontar el tema de funciones. Es un repaso rápido para fijar conceptos. Juan Carlo Moreno

https://www.youtube.com/watch?v=koMJ1zsRong

3.1. Dominio

El ***dominio*** o campo de existencia de una función, *Dom*(*f*), es el conjunto de valores que tienen imagen:

$$Dom(f) = \{x \in \Re;\ \exists y \in \Re,\ y = f(x)\}.$$

Actividad resuelta

TIPO	***DOMINIO***	Ejemplos
Polinómicas	$\Re$	Función afín: $p(x) = -3$ $\quad I(x) = x$ (identidad) ; $p(x) = \frac{-2x+1}{3} = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$ Función cuadrática: $p(x) = -2x^2 + 3x$; $p(x) = x^2 - 6$ Función polinómica general: $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
Racionales	$\Re - \{\text{polos}\}$ Polos = ceros del denominador	$f(x) = \frac{-3x}{2x+1} \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow Sol = \left\{\frac{-1}{2}\right\} \Rightarrow Domf = \Re - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ $g(x) = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow Sol = \emptyset \Rightarrow Domg = \Re$ $h(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-x-6} \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow Sol = \{-2;3\} \Rightarrow Domg = \Re - \{-2;3\}$
Irracionales: Índice par	$\{x \in \Re;\ \text{radicando} \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{-3x-6} \Rightarrow -3x-6 \geq 0 \Rightarrow Sol =]-\infty,2] \Rightarrow Domf =]-\infty,2]$ $g(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \Rightarrow Sol = [-2,1] \cup 2,\infty[\Rightarrow Domg = [-2,1] \cup 2,\infty[$ $h(x) = \sqrt[6]{x^4+1} \Rightarrow x^4+1 \geq 0 \Rightarrow Sol = \Re \Rightarrow Domh = \Re$
Irracionales: Índice impar	$\Re - \{$puntos problemáticos del radicando$\}$	$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow Sol = \{-2,2\} \Rightarrow Domf = \Re - \{-2,2\}$ $g(x) = \sqrt[7]{x^4+1} \Rightarrow Domg = \Re$
Exponenciales	$\Re - \{$puntos problemáticos del exponente$\}$	$f(x) = e^{-2x+3} \Rightarrow Domf = \Re$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Sol = \{0\} \Rightarrow Domg = \Re - \{0\}$ $h(x) = 7\text{^}\sqrt{(5x-2)} \Rightarrow 5x-2 \geq 0 \Rightarrow Sol = [2/5,+\infty[\Rightarrow Domh =]\ 2/5,+\infty[$
Logarítmicas	$\{x \in \Re;\ \text{argumento} > 0\}$	$f(x) = L(x^2-2x+1) \Rightarrow x^2-2x+1 > 0 \Rightarrow Sol = \Re - \{1\} \Rightarrow Domf = \Re - \{1\}$ $g(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-3x}\right) \Rightarrow \frac{x}{x^2-3x} > 0 \Rightarrow Sol =]3,\infty[\Rightarrow Domg =]3,\infty[$ $h(x) = log_2(5^x) \Rightarrow 5^x > 0 \Rightarrow Sol = \Re \Rightarrow Domh = \Re$ $j(x) = log_{0,5}(\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow Sol = 0,\infty[\\ \sqrt{x} > 0 \Rightarrow Sol =]0,\infty[\end{cases} \Rightarrow Sol =]0,\infty[\Rightarrow Domj =]0,\infty[$
Definidas a trozos	$\Re - \{$valores que no toma la variable y puntos problemáticos de cada fórmula incluidos en su rango$\}$	$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 0 \\ Lx & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Valores variable} = \Re \\ \text{Puntos problemáticos} = No \text{ hay} \end{cases} \Rightarrow Domf = \Re$ $g(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ \frac{1}{x} & x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Valores variable} = \Re - \{-1\} \\ \text{Puntos problemáticos} = \{0\} \text{ ya que } \frac{1}{0} = ???\ y\ 0 > -1 \end{cases}$ $\Rightarrow Domg = \Re - \{-1,0\}$

Como se puede ver en todos los ejemplos anteriores, la clave para calcular el dominio de una función es localizar todos aquellos puntos que NO tienen imagen, que son más fáciles de identificar ya que son los que provocan algún tipo de problema a la hora del cálculo de la imagen, es decir, aparece alguna operación que no se puede realizar en el conjunto de los números reales. Y las únicas operaciones que no se pueden hacer en $\Re$ son:

a) La división por cero.

b) La raíz de índice par y radicando negativo.

c) El logaritmo de un número negativo o de cero.

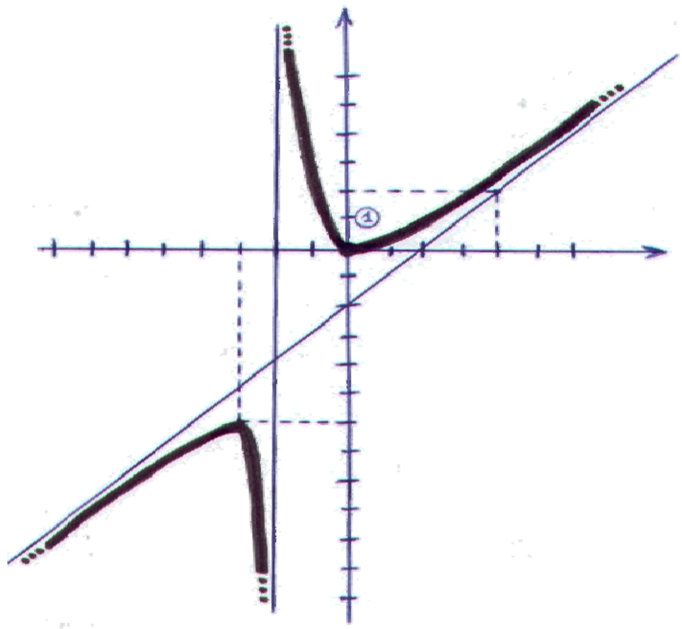
Por tanto, cuando nos encontremos con alguna de esas operaciones (DIVISIÓN, RAÍZ DE ÍNDICE PAR o LOGARITMO), tendremos que estudiar detenidamente si hay algún(os) valor(es) que provoquen problemas, y esto lo podremos hacer, según la situación, resolviendo una ecuación o una inecuación. En caso contrario, tendremos asegurado que el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales ($\Re$)

Gráficamente, lo podemos intuir viendo si la recta vertical (paralela al eje de ordenadas OY) que pasa por un punto del eje OX es tal que:

-corta a la gráfica: dicho valor de la variable independiente pertenece al dominio porque tiene imagen (que será el valor de la ordenada que nos proporciona el punto de corte de recta y gráfica)

-NO corta a la gráfica: dicho valor no estará en el dominio.

Ejemplo



$$Dom\ f = \Re - \{-2\}$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

30. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-3}$		*b)* $j(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x)=\sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		*d)* $k(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$		*f)* $l(x)=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$		*h)* $m(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$	

31. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$		*b)* $q(x)$	
c) $r(x)$		*d)* $s(x)$	
e) $f(x)$		*f)* $g(x)$	
g) $h(x)$		*h)* $j(x)$	
i) $k(x)$		*j)* $l(x)$	
k) $m(x)$		*l)* $n(x)$	
m) $a(x)$		*n)* $b(x)$	
o) $c(x)$		*p)* $d(x)$	

3.2. Recorrido o imagen

El ***recorrido*** de una función, $Im(f)$, es el conjunto de valores que son imagen de algún original, es decir, el conjunto de valores que toma la variable dependiente $y = f(x)$.

En general no resulta fácil calcular la imagen de una función, aunque:

Actividades resueltas

- A veces se puede deducir de alguna propiedad de la función:
  a. Función afín: $f(x) = ax + b \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \Re$
  b. $f(x) = x^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \Re_0^+$ (al elevar un número al cuadrado siempre sale positivo o **0**)
  c. Función exponencial: $f(x) = a^x \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \Re^+$
  d. Función logaritmo: $f(x) = \log_a x \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \Re$

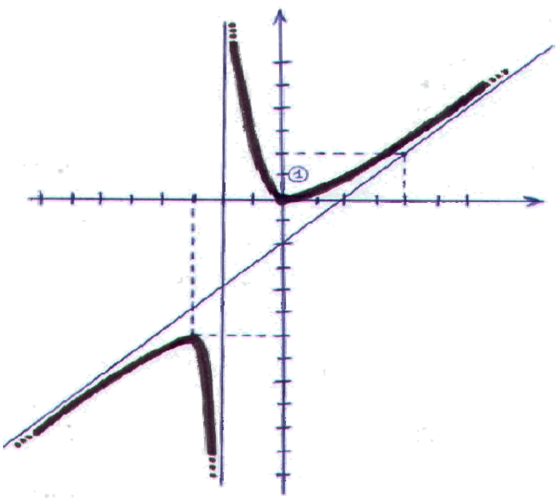
- Función logaritmo: $f(x) = log_a x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \Re$
- Si la función tiene inversa, la imagen será el dominio de la inversa:

$$f(x) = \frac{7x+1}{3x-4} \Rightarrow y = \frac{7x+1}{3x-4} \Rightarrow x = \frac{7y+1}{3y-4} \Rightarrow 3xy - 4x = 7y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3xy - 7y = 4x + 1 \Rightarrow y(3x-7) = 4x + 1 \Rightarrow y = \frac{4x+1}{3x-7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{3x-7}$$

$$\mathrm{Dom} f = \Re - \left\{\frac{4}{3}\right\} \quad e \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom} f^{-1} = \Re - \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

- Gráficamente, lo podemos intuir trazando rectas horizontales (paralelas al eje de abscisas) y viendo si cortan a la gráfica de la función. Un punto del eje OY tal que la recta horizontal que pasa por él no corta a la gráfica, no estará en la imagen:



$\Rightarrow Im\ f = (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Simetrías

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

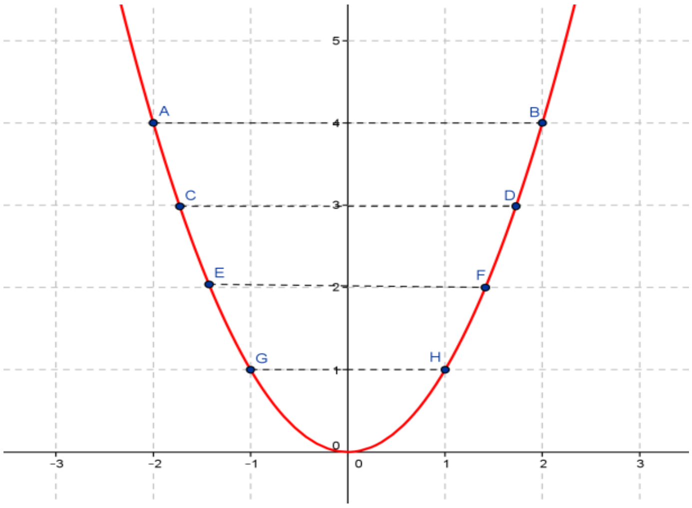
$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in Dom\ f$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo

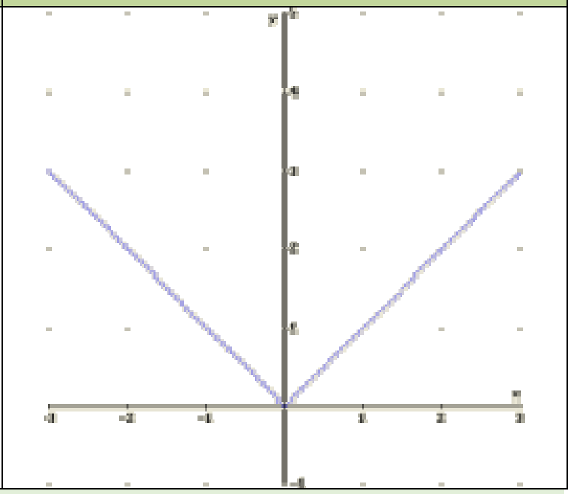
- *La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Actividades resueltas

- *Comprueba que la función valor absoluto es par.*

FUNCIÓN	DEMOSTRACIÓN	GRÁFICA
$f(x) = \|x\|$	$f(-x) = \|-x\| = \|x\| = f(x)$	

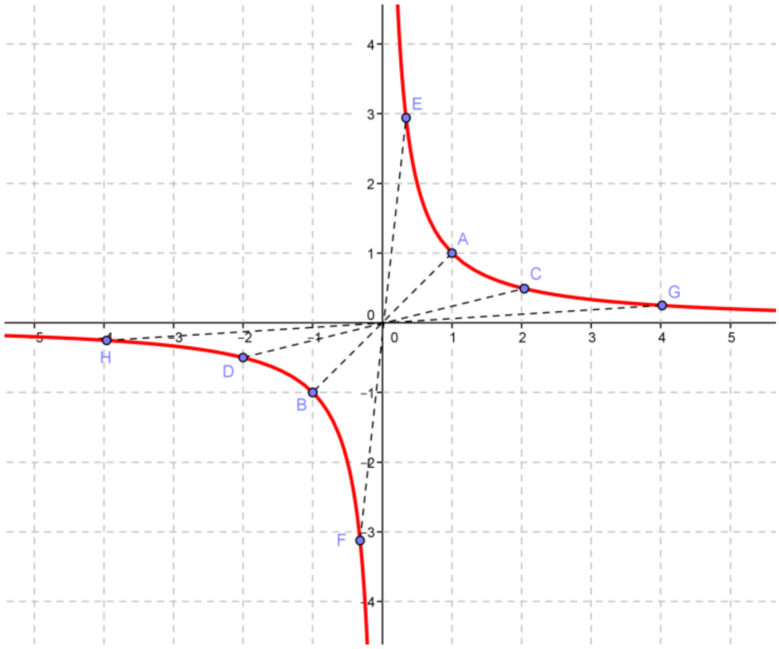
Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = -f(x),\ \ \forall x \in Dom\ f$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo

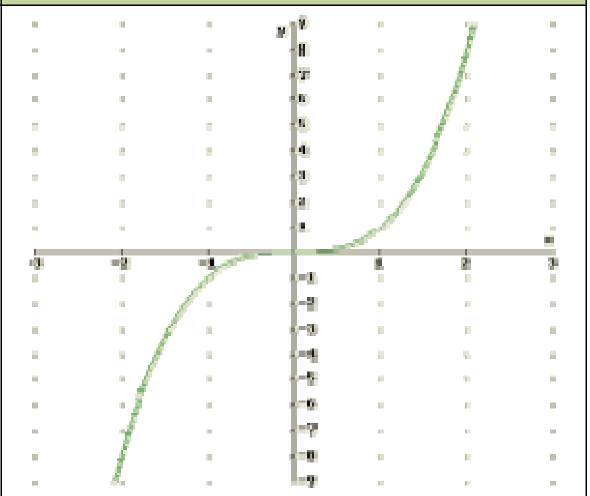


- La ***función de proporcionalidad inversa*** $f(x) = \frac{1}{x}$ *es impar porque:*

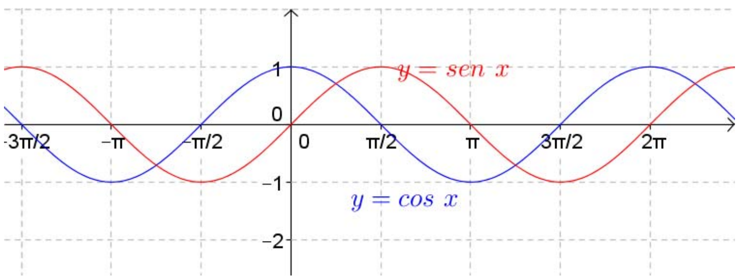
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

Actividades resueltas

- *Comprueba que las funciones potencia de exponente 3 es una función impar.*

FUNCIÓN	DEMOSTRACIÓN	GRÁFICA
$f(x) = x^3$ En general, cualquier polinomio con sólo grados impares	$f(-x) = (-x)^3 =$ $= -x^3 = -f(x)$	

- *Comprueba que la función seno es impar, mientras que la función coseno es par.*



32. Estudia la simetría del resto de las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante.

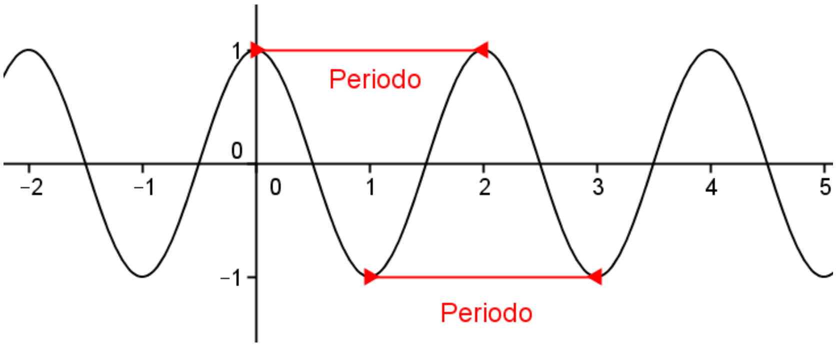
3.4. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo* (τ).

Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente forma:

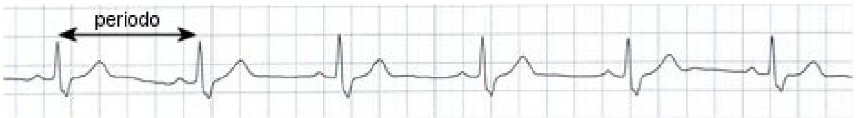
$$\exists\tau \in \Re;\ f(x+\tau) = f(x)\quad \forall x \in Dom\ f$$

Gráficamente se busca un trozo del dibujo que, si lo repetimos en ambos sentidos, nos proporcione la gráfica completa:



Ejemplos:

- *La gráfica de un electrocardiograma:*



Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

Actividades resueltas

- ¿Qué significaría, en la gráfica anterior, que los intervalos de repetición no fueran iguales?
  Si no tenemos un periodo fijo, querría decir que el corazón no está funcionando de forma rítmica y, por tanto, diríamos que se ha producido una "*arritmia*".
- ¿Cómo influiría en la gráfica anterior el que el periodo sea más o menos grande? ¿Qué significado tendría?
  Si el periodo es más grande, es decir, los intervalos de repetición se encuentran más distanciados, tendríamos un ritmo de latido más lento (menos pulsaciones por minuto), lo que se conoce como "*bradicardia*".

  Si el periodo es menor, pasaría justo todo lo contrario, esto es, el corazón estaría latiendo más rápido de lo normal (más pulsaciones por minuto) y tendríamos una "*taquicardia*".
- Las funciones trigonométricas son periódicas. La función seno y coseno, secante y cosecante, de periodo 2π. La función tangente y cotangente, de periodo π.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Puntos de corte con los ejes

El ***punto de corte de f con el eje de ordenadas*** (OY) se obtiene dando a la variable independiente el valor 0, siempre y cuando dicho valor esté en el dominio: $(0, f(0))$, si $\exists\, f(0) \in \Re$ o $0 \in Dom\ f$. En caso contrario no habrá. Recordemos que, por la propia definición de función, si existe $f(0)$ es único).

Los ***CEROS*** o ***puntos de corte de f con el eje de abscisas*** (OX) son los que se obtienen dando a la variable dependiente el valor 0: $\{(x, 0);\ x \in Dom\ f \text{ y } f(x) = 0\}$.

Actividad resuelta

Tipo	*PUNTOS CORTE EJES*		Ejemplos
Polinomios	OY	(0, f(0))	$p(x)=2x^2-5x \Rightarrow p(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ $q(x)=-3x+1 \Rightarrow q(0)=1 \Rightarrow (0,1)$ $t(x)=2x^4-4x^3+4x^2-4x+2 \Rightarrow t(0)=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	Soluciones de la ecuación	$p(x)=2x^2-5x \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow Sol=\left\{0,\frac{5}{2}\right\} \Rightarrow (0,0);\left(\frac{5}{2},0\right)$ $q(x)=x^2+1 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow Sol=\varnothing \Rightarrow \text{No hay}$ $t(x)=2x^4-4x^3+5x^2-6x+3 \Rightarrow Sol=\{1,1\} \Rightarrow (1,0)$
Racionales	OY	(0, f(0)) si 0 $\in$ *Dom f*	$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{0}=??? \Rightarrow No\ hay$ $g(x)=\frac{3x^2-27x}{-2x+2} \Rightarrow g(0)=\frac{0}{2}=0 \Rightarrow (0,0)$ $h(x)=\frac{4x-5}{x^2-6} \Rightarrow h(0)=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6} \Rightarrow \left(0,\frac{5}{6}\right)$
	OX	Numerador igual a cero	$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow 1=0 \quad falsedad \Rightarrow No\ hay$ $g(x)=\frac{3x^2-27x}{-2x+2} \Rightarrow 3x^2-27x=0 \Rightarrow Sol=\{0,9\} \Rightarrow (0,0);(9,0)$ $h(x)=\frac{4x-5}{x^2-6} \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow Sol=\left\{\frac{5}{4}\right\} \Rightarrow \left(\frac{5}{4},0\right)$
Irracionales	OY	(0, f(0)) si 0 $\in$ *Dom f*	$f(x)=\sqrt{-2x-3} \Rightarrow f(0)=\sqrt{-3}\not\subset\Re \Rightarrow No$ hay $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+8}} \Rightarrow g(0)=\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}=\frac{-1}{2} \Rightarrow \left(0,\frac{-1}{2}\right)$
	OX	Radicando igual a cero	$f(x)=\sqrt{-2x-3} \Rightarrow -2x-3=0 \Rightarrow Sol=\left\{\frac{-3}{2}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-3}{2},0\right)$ $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+8}} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow Sol=\{-1,1\} \Rightarrow (-1,0);(1,0)$
Exponenciales	OY	(0, f(0)) si 0 $\in$ *Dom f*	$f(x)=e^{\frac{2x-1}{3x}} \Rightarrow f(0)=e^{\frac{-1}{0}}=??? \Rightarrow No\ hay$ $g(x)=2^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow g(0)=2^1=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	NUNCA	$f(x)=e^{\frac{2x-1}{3x}} \Rightarrow e^{\frac{2x-1}{3x}}=0 \Rightarrow Nunca$ $g(x)=2^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow 2^{\sqrt{2x+1}}=0 \Rightarrow Nunca$
Logarítmicas	OY	(0, f(0)) si 0 $\in$ *Dom f*	$f(x)=\log(3x-2) \Rightarrow f(0)=\log(-2)=??? \Rightarrow No\ hay$ $g(x)=\log_3\left(\frac{2x^2-27}{-3}\right) \Rightarrow g(0)=\log_3 9=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	Argumento igual a ***1***	$f(x)=\log(3x-2) \Rightarrow 3x-2=1 \Rightarrow Sol=\{1\} \Rightarrow (1,0)$ $g(x)=\log_3\left(\frac{2x^2-27}{-3}\right) \Rightarrow \frac{2x^2-27}{-3}=1 \Rightarrow Sol=\{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\} \Rightarrow (-2\sqrt{3},0);(2\sqrt{3},0)$

Definidas a trozos	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\, f$ Sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al ***0***.	$f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\le 0 \\ \ln x & x>0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ $g(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ \frac{1}{x} & x>-1 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{0}=??? \Rightarrow \text{No hay}$
	OX	Cada fórmula igualada a ***0*** Sólo valen las soluciones incluidas en el rango correspondiente	$f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\le 0 \\ \ln x & x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \Rightarrow Sol=\{0,1\} \;\; y \;\; 0\le 0,\, 1\not\le 0 \Rightarrow (0,0) \\ \ln x=0 \Rightarrow Sol=\{1\} \;\; y \;\; 1>0 \Rightarrow (1,0) \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ \frac{1}{x} & x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow Sol=\{-1\} \;\; y \;\; -1\not< -1 \Rightarrow \text{No hay} \\ \frac{1}{x}=0 \Rightarrow Sol=\varnothing \Rightarrow \text{No hay} \end{cases}$

Actividades propuestas

33. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \;\; ; \;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;\; ; \;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;\; ; \;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x} \;\; ; \;\; f(x)=\frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{-3}{x} \;\; ; \;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;\; ; \;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4} \;\; ; \;\; k(x)=e^{x-4} \;\; ; \;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;\; ; \;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}} \;\; ; \;\; a(x)=L(x+2) \;\; ; \;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;\; ; \;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;\; ; \;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abscisas		Ordenadas	Abscisas
a) $p(x)$			*b)* $q(x)$		
c) $r(x)$			*d)* $s(x)$		
e) $f(x)$			*f)* $g(x)$		
g) $h(x)$			*h)* $j(x)$		
i) $k(x)$			*j)* $l(x)$		
k) $m(x)$			*l)* $n(x)$		
m) $a(x)$			*n)* $b(x)$		
o) $c(x)$			*p)* $d(x)$		

34. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$$f(x)=2^{x-24}\cdot 4^{3x+1}\cdot 8^{-x-1}-1 \qquad h(x)=x^3+4x \qquad k(x)=e^{-2x}-22$$

$$g(x)=-7x^4-x^2+1 \qquad j(x)=\sqrt{15x-3\sqrt{-x-9}} \qquad l(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.6. Signo de una función

Los intervalos de signo de una función proporcionan una información muy útil para la representación gráfica. Para estudiarlos, hay que tener en cuenta:

1º Los puntos que no están en el dominio, ya que no tienen imagen y, por tanto, hay que estudiar el comportamiento de la función en un entorno de dichos puntos.

2º Los ceros, puesto que cuando la función vale cero puede ser que haya un cambio de signo en ese punto.

3º En las funciones definidas a trozos, los puntos donde cambia la definición, ya que las fórmulas son diferentes antes y después de esos puntos, lo que puede provocar un cambio de signo.

<table>
<tr><th colspan="2">TIPO</th><th>SIGNO</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Polinomios</td><td>- Ceros
- Recta
- Estudio del signo:
* dar valores
o
* los signos se alternan si hay tantas raíces como grado y son distintas.</td><td>$p(x) = -3 \Rightarrow No\ hay\ ceros \Rightarrow \frac{-}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & \Re \end{cases}$
$q(x) = 0 \Rightarrow Hay\ infinitos\ ceros \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & Nunca \end{cases}$
$r(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow No\ hay\ ceros \Rightarrow \frac{+}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re \\ Negativo & Nunca \end{cases}$
$s(x) = -4x + 8 \Rightarrow \frac{+\ \ -}{2} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & (-\infty, 2] \\ Negativo & (2, \infty) \end{cases}$
$t(x) = -2x^2 + 3x \Rightarrow \frac{-\ \ +\ \ -}{0\ \ \frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ Negativo & (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \end{cases}$
$f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \frac{+\ \ +}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re - \{-1\} \\ Negativo & Nunca \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Racionales</td><td>- Ceros y polos
- Recta
- Estudio del signo dando valores</td><td>$f(x) = \frac{-3x}{2x^2 + x} \Rightarrow \frac{+\ \ -\ \ -}{-\frac{1}{2}\ \ 0} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ Negativo & \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) - \{0\} \end{cases}$
$g(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \Rightarrow No\ hay\ ceros\ ni\ polos \Rightarrow \frac{+}{+} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re \\ Negativo & Nunca \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Irracionales</td><td>Índice par</td><td>POSITIVO <u>siempre</u> en todo su dominio menos en los ceros.</td><td>$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: &]-2, 1[\cup]2, \infty[\\ Negativo: & Nunca \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Índice impar</td><td>Signo del radicando</td><td>$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+1}} \Rightarrow \frac{-\ +\ -\ +}{-2\ 1\ 2} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & (-2, 1) \cup (2, \infty) \\ Negativo & (-\infty, -2) \cup (1, 2)\ ) \end{cases}$
$g(x) = \sqrt[7]{-x^4 - 1} \Rightarrow \frac{-}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & \Re \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exponenciales</td><td>POSITIVO <u>siempre</u> en todo su dominio.</td><td>$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \Re - \{0\} \\ Negativo: & Nunca \end{cases}$
$g(x) = 7^{\sqrt{5x-2}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \left(\frac{2}{5}, \infty\right) \\ Negativo: & Nunca \end{cases}$</td></tr>
</table>

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Logarítmicas	0 < a < 1: argumento < 1 → + argumento > 1 → - a > 1: argumento < 1 → - argumento > 1 → +	$f(x)=\log_{0.5}\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}<1 \Rightarrow Sol=]0,1[\\ \sqrt{x}>1 \Rightarrow Sol=]1,\infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: \ ]0,1[\\ Negativo: \ ]1,\infty[\end{cases}$ $g(x)=L\left(x^2-2x+1\right) \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+1>1 \Rightarrow Sol=]-\infty,0[\cup]2,\infty[\\ x^2-2x+1<1 \Rightarrow Sol=]0,2[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: \ ]-\infty,0[\cup]2,\infty[\\ Negativo: \ ]0,2[\end{cases}$
Definidas a trozos	- Ceros, puntos problemáticos y puntos donde cambia la definición - Recta - Estudio del signo, utilizando la fórmula correspondiente.	$f(x)=\begin{cases} Lx & x\le 2 \\ x^2-3x & x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} \text{Nada} & - & + & & - & + \\ \hline 0 & & 1 & & 2 & & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: \ ]1,2]\cup]3,\infty[\\ Negativo: \ ]0,1[\cup]2,3[\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-1 \\ x-1 & x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} - & & - & + \\ \hline & -1 & & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: \ ]1,\infty[\\ Negativo: \ ]-\infty,1[\end{cases}$

Actividades propuestas

35. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$p(x) = -5x+3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2-x}$

$f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \dfrac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x^2-4}$

$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$

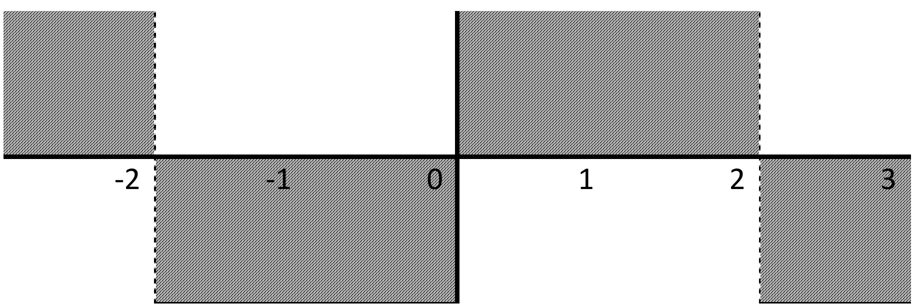
$a(x) = L(x+2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\dfrac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3-5\right)$

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$			*b)* $q(x)$		
c) $r(x)$			*d)* $s(x)$		
e) $f(x)$			*f)* $g(x)$		
g) $h(x)$			*h)* $j(x)$		
i) $k(x)$			*j)* $l(x)$		
k) $m(x)$			*l)* $n(x)$		
m) $a(x)$			*n)* $b(x)$		
o) $c(x)$			*p)* $d(x)$		

36. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$$

la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Las poblaciones crecen exponencialmente

En los modelos que se utilizan para estudiar las poblaciones se utiliza la función exponencial. Se supone que una población de una cierta especie crece exponencialmente mientras tenga alimento suficiente y no existan depredadores. Llega un momento en el que la población ha llenado el territorio (la Tierra es finita) y entonces cambia la función que se utiliza, estabilizándose el crecimiento.

Esto permite estudiar el crecimiento de las bacterias que se reproducen por fisión binaria, o el crecimiento de las células del feto, o la población de conejos cuando llegaron a Australia... *Malthus* afirmó que si la población humana crecía de forma exponencial y la producción de alimentos crecía de forma lineal habría graves hambrunas.

Logaritmos

No hace tanto tiempo no existían las calculadoras. Para calcular logaritmos se usaban “tablas”. Había unas tablas de logaritmos que eran un libro con un lomo de unos tres dedos de ancho. Se usaban en problemas de Astronomía en los que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolverlos y se usaban números con muchas cifras decimales (más de 10). ¡Imaginas lo que es multiplicar o dividir números con esas cifras decimales! Resultaba muy conveniente transformar las multiplicaciones en sumas y las divisiones en restas. Esta misma idea la que llevó a *John Napier* (o *Neper*) a inventar l logaritmos.

No todo lo puedes calcular con calculadora.

Utiliza tu calculadora para calcular 45^{79}. Verás que da *error*. Pero si usas logaritmos puedes calcularlo fácilmente.

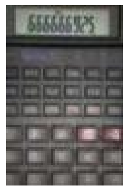
$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130.6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0.6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0.6037886} = 4.016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4.016 \cdot 10^{130}.$$



Decrecimiento exponencial

Muchos fenómenos se modelan con funciones exponenciales de base menor que 1, como

- La desintegración de átomos de una sustancia radiactiva.
- La intensidad luminosa de un haz de luz
- La probabilidad de supervivencia de ciertas especies que no tienen genéticamente determinado el envejecimiento celular

Carbono 14

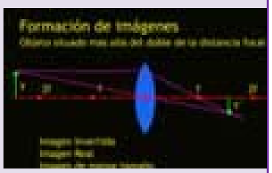
El carbono 14 es un isótopo radiactivo con un periodo de semi-desintegración (vida media) de 5 568 años, muy utilizado para datar restos orgánicos. Las plantas, por fotosíntesis, y los animales por ingestión incorporan el carbono en la misma proporción que existe en la atmósfera, y al morir el ser vivo empieza el proceso de desintegración.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sophia Kovalevkaya

Conocemos muy bien muchas anécdotas de la vida de Sophia (o Sonia como a ella le gustaba que la llamaran), una mujer matemática con teoremas con su nombre, porque escribió su biografía en un precioso libro llamado "*Una infancia en Rusia*"

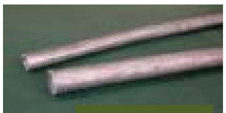
Cuando Sophia tenía 14 años, su familia recibió la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro sobre esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un *seno*, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía. De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Sonia le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y le comentó al padre de Sonia que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en las Matemáticas.



Fourier y el concepto de función

El concepto de función ha tardado mucho en ser comprendido incluso por los matemáticos, sólo dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer.

Fue *Joseph Fourier* en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Fourier vivió durante la Revolución Francesa y participó en la expedición de Napoleón a Egipto. Era muy friolero y por ese motivo le interesaba la propagación del calor. En su obra afirma que "toda" función podía escribirse como una suma infinita de funciones seno y coseno.



Antoni Zygmund escribió *"Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por matemáticos trabajando sobre series trigonométricas"*. Añade que esa obra de Fourier fue el catalizador para fijar el concepto de función, la definición de integral, profundizar en la Teoría de Conjuntos y actualmente con la Teoría de Funciones Generalizadas o Distribuciones.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

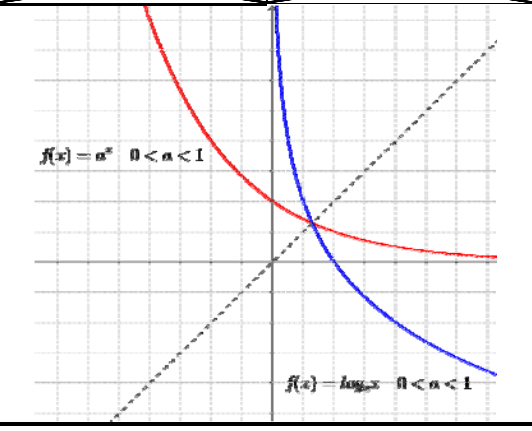
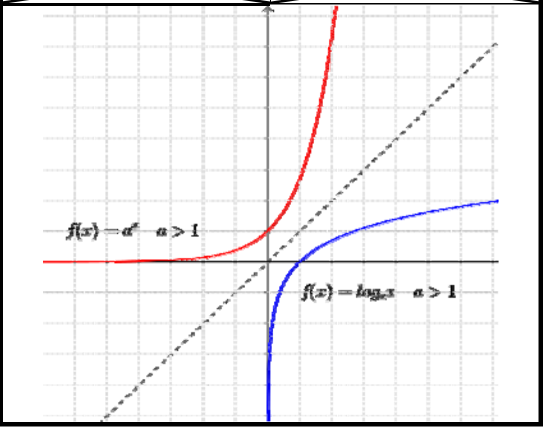
TIPOS DE FUNCIONES		FÓRMULA
ALGEBRAICAS	*Polinómicas*	Polinomio
	Racionales	Cociente de polinomios
	Irracionales	Raíz de una racional
TRASCENDENTES	*Exponenciales*	Exponencial (variable en el exponente)
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)
	Trigonométricas	Trigonométrica (variable como argumento de una razón trigonométrica)
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable

OPERACIÓN	EJEMPLO: $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=\frac{-3x}{x+1}$		
Función suma $f+g$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $(f+g)(x)=\frac{-3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	Función resta $f-g$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $(f-g)(x)=\frac{3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	Función producto $f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $(f\cdot g)(x)=\frac{-6}{x+1}$	Función cociente f/g : $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x+2}{-3x^2}$
Función compuesta	$\underbrace{f\circ g}_{g \text{ compuesto con } f}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)\underset{\text{ponemos } g(x)=\frac{-3x}{x+1}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } f,}{=}}\frac{2}{\left(\frac{-3x}{x+1}\right)}=\frac{2x+2}{-3x}$ $\underbrace{g\circ f}_{f \text{ compuesto con } g}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)\underset{\text{ponemos } f(x)=\frac{2}{x}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } g,}{=}}\frac{-3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)+1}=\frac{\frac{-6}{\cancel{x}}}{\frac{2+x}{\cancel{x}}}=\frac{-6}{x+2}$		
Función inversa f^{-1} : $\begin{cases} f\circ f^{-1}=I \\ f^{-1}\circ f=I \end{cases}$ Si existe, la inversa es única y su gráfica y la de la función son simétricas respecto a la de la función identidad.	1º Llamamos y a $f(x)$ 2º Despejamos x en función de y 3º Cambiamos los papeles de x e y	$g(x)=y=\frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y\cdot(x+1)=-3x \Rightarrow$ $\Rightarrow yx+y=-3x \Rightarrow yx+3x=-y \Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+3)=-y \Rightarrow x=\frac{-y}{y+3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x}{x+3}$	

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES			
1) Dominio	Conjunto de valores que <u>tienen</u> imagen.		
2) Puntos de corte con los ejes	Ordenadas (OY)	$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$	Operación numérica
		$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay	Nada
	Abscisas (OX) -CEROS-	$f(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots \Rightarrow (x_1,0);(x_2,0);\ldots$	Ecuación
3) Simetría	Par	$f(-x)=f(x)$	Operación algebraica
	Impar	$f(-x)=-f(x)$	

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

FAMILIAS DE FUNCIONES		Racional	Irracional: Índice par	Irracional: Índice impar	Exponencial	Logarítmica	Definida a trozos
Dominio (D)		$\Re$ – {polos}	$\{x \in \Re;$ radicando $\geq 0\}$	$\Re$ – {puntos problemáticos radicando}	$\Re$ – {puntos problemáticos exponente}	$\{x \in \Re;$ argumento $> 0\}$	- Valores de la variable - Puntos problemáticos de cada fórmula $\Re$ – {valores que no toma la variable y puntos problemáticos incluidos en el rango}
Puntos de corte con los ejes	OY	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$	(0, f(0)) si 0∈$Dom\ f$ sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al 0
	OX	Numerador = 0	Radicando = 0	Radicando = 0	No hay	Argumento = 1	-Cada fórmula = 0 -Soluciones que pertenecen a su rango
Signo		- Ceros y polos - Estudio del signo en la recta real	Positivo siempre salvo en los ceros	Signo del radicando	Positivo en todo su dominio	$0 < a < 1$: argumento < 1: + argumento > 1: - a > 1: argumento < 1: - argumento > 1: +	-Ceros, polos y puntos donde cambia la definición -Estudio del signo en la recta real
Simetría	PAR	Todos los grados pares o impares	Nunca	Simetría del radicando	Argumento par	Argumento par	Es tan infrecuente la simetría en este tipo de funciones que no merece la pena estudiarla
	IMPAR	Todos los grados del n^dor^ pares y del d^dor^ impares o viceversa			Nunca	Nunca	

CARACTERÍSTICAS		$0 < a < 1$: a^x	$0 < a < 1$: $\log_a x$	$a > 1$: a^x	$a > 1$: $\log_a x$
Dominio		$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$
Recorrido		$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	Ordenadas	(0, 1)		(0, 1)	
	Abscisas		(1, 0)		(1, 0)
Signo	Positivo	$\Re = (-\infty, \infty)$	(0, 1)	$\Re = (-\infty, \infty)$	$(1, \infty)$
	Negativo		$(1, \infty)$		(0, 1)
Simetría					
DIBUJO					

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función *f*: $\Re \to \Re$ dada por $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le -1, \\ x^3-x & \text{si } x>-1. \end{cases}$

2. Copia en tu cuaderno y realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=2x^2-x+7 \quad ; \quad r(x)=-x^3+6 \quad ; \quad s(x)=3x^2-x$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x)=L(x-2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-1\right)$$

a)	$(s+q)(x)$	*b)*	$(r+p)(x)$
c)	$(p-q)(x)$	*d)*	$(p+q+r+s)(x)$
e)	$(q-r-s)(x)$	*f)*	$(p-q+r-s)(x)$
g)	$(g+h)(x)$	*h)*	$(s-g)(x)$
i)	$(n-k)(x)$	*j)*	$(g+d)(x)$
k)	$(b-d)(x)$	*l)*	$(c+s)(x)$
m)	$(s\cdot q\cdot r)(x)$	*n)*	$(r\cdot p)(x)$
o)	$(q:p)(x)$	*p)*	$(s:q)(x)$
q)	$(g\cdot h)(x)$	*r)*	$(s:g)(x)$
s)	$(n\cdot k)(x)$	*t)*	$(g:d)(x)$
u)	$(s\circ q)(x)$	*v)*	$(r\circ p)(x)$
w)	$(q\circ p)(x)$	*x)*	$(g\circ h)(x)$
y)	$(s\circ g)(x)$	*z)*	$(n\circ k)(x)$

3. Considera la función *f*: $\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y=x^2+1$, $y=\dfrac{2}{x}$ e $y=x-1$.

Autores: José Gallegos Fernández y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $\quad h(x) = 2^{-x+1}$ $\quad k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1}$ $\quad m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$

$g(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+7}}$ $\quad j(x) = L\left(x^5 - 1\right)$ $\quad l(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$ $\quad n(x) = \left(4x^2 - 4x + 1\right)^{\frac{-1}{3}}$

a) Calcular las siguientes composiciones:

$f \circ h$; $g \circ h$; $g \circ j$; $k \circ h$; $g \circ h \circ j$; $m \circ j$; $l \circ h$; $m \circ h$; $j \circ h$; $l \circ m$

b) Calcular $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ y verificar que son las inversas de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

c) Calcular todos los dominios.

d) Calcular los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos viene dada por $h(t) = 5 + 4t - t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.

7. Considera las funciones *f*, *g*: [0, 2π] → $\Re$, $f(x) = 2 \cdot sen(x)$ y $g(x) = sen(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de *f* y de *g*.

8. Sea la función dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina *a*, *b* y *c* sabiendo que es impar y que pasa por el punto $(1, -2)$.

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$. Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.

10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión $f(t) = -\dfrac{1}{5}t^2 + 2t + 10 \qquad 0 \le t \le 12$.

a) Represente gráficamente la función.

b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?

11. Considera la función definida por $f(x) = \dfrac{2\log x}{x^2}$. Calcula su dominio.

12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

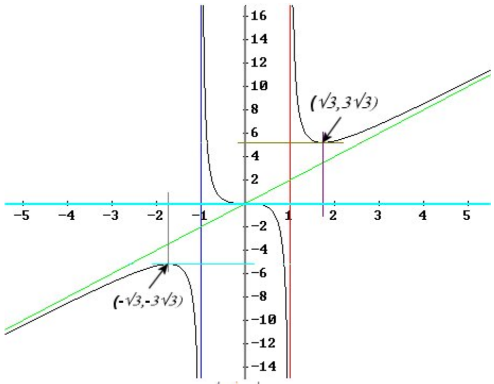
13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \dfrac{50x - 100}{2x + 5}$, donde *x* representa los años de vida de la empresa, cuando $x \ge 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.

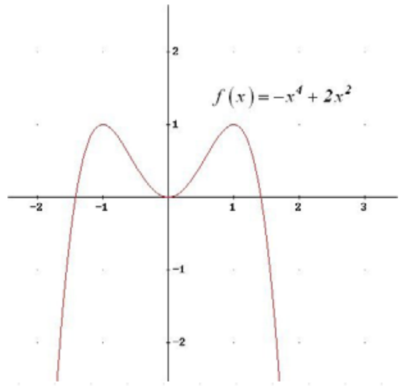
14. Considera la función definida por $g(x) = |ln(x)|$ (donde *ln* denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g* y la recta *y* = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

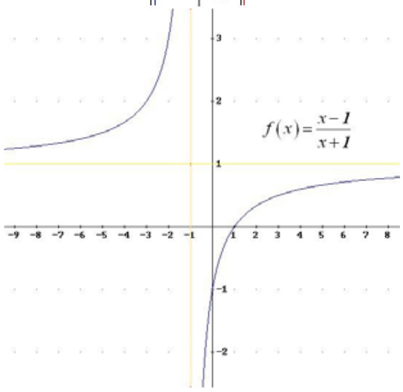
15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}x}{x^2}$ ($\mathrm{L}x$ indica logaritmo neperiano de *x*); $g(x)=(1-x^3)\cos x$ y $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$.

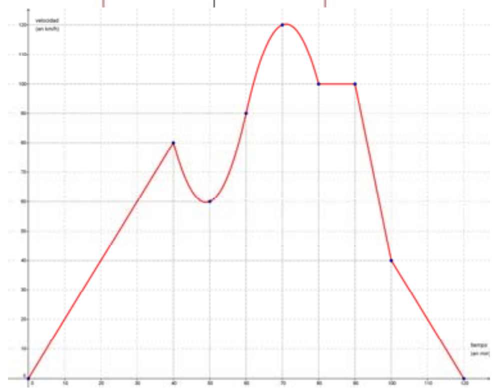
16. Sea la función $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3\\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.

17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a) 

b) 

c) 

d) 

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de *x* millones de euros produce una ganancia de *f*(*x*) millones de €, siendo: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 5\\ \dfrac{5}{2x} & \text{si} \quad x>5\end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.

19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "*h*" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "*t*" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t)=-5t^2+40t$.

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

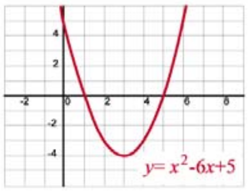
b) Represente gráficamente la función *h(t)*.

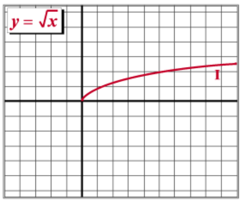
c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

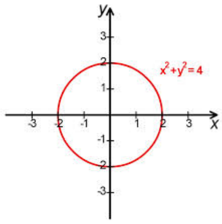
d) ¿En qué instante llega al suelo?

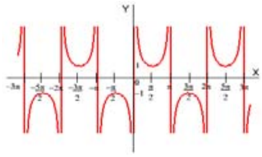
AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) 

b) 

c) 

d) 

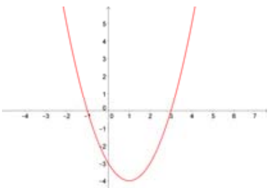
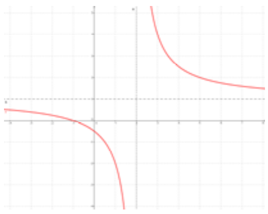
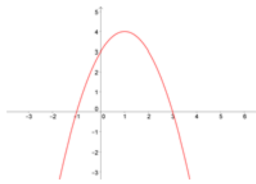
2. La fórmula de la composición $f \circ g$ de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ es:

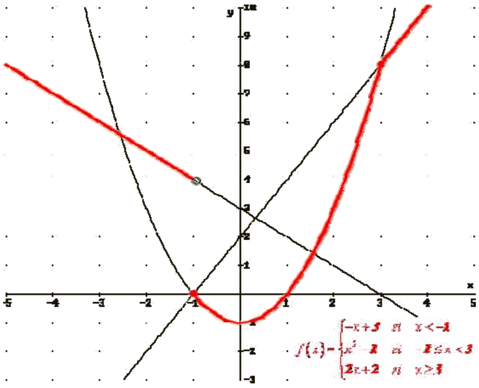
a) $\dfrac{x+2}{x-1}$ b) $\dfrac{-x+1}{x+2}$ c) $\dfrac{2x+1}{x-1}$ d) $\dfrac{-2x-1}{x-1}$

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

a) 
b) 
c) 
d) 

5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

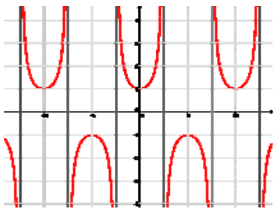
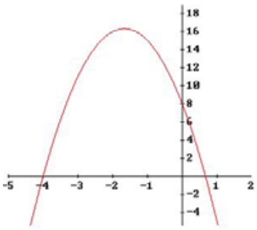
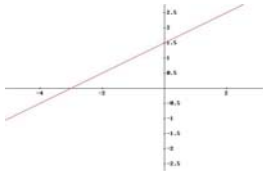
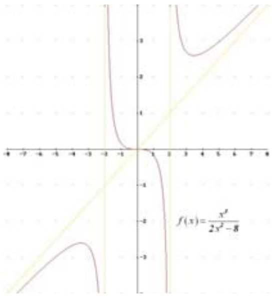
6. El recorrido de la función  es:

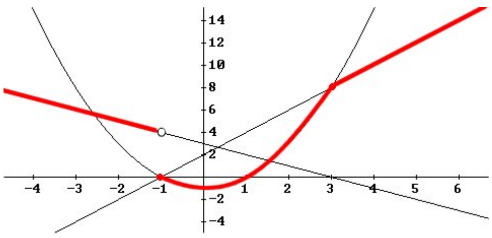
a) [−1, ∞) b) (−1, ∞) c) (−∞, −1] d) $\Re - \{4\}$

7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 3\right)$ son:

a) No tiene b) $(1, 0); (2, 0)$ c) $(-1, 0); (2, 0)$ d) $(0, \ln 3)$

8. La única función impar entre las siguientes es:

a)  b)  c)  d) 

9. El intervalo donde la función  es negativa es:

a) (−1, 1) b) (−∞, −1) c) (−∞, 1) d) (−∞, 0)