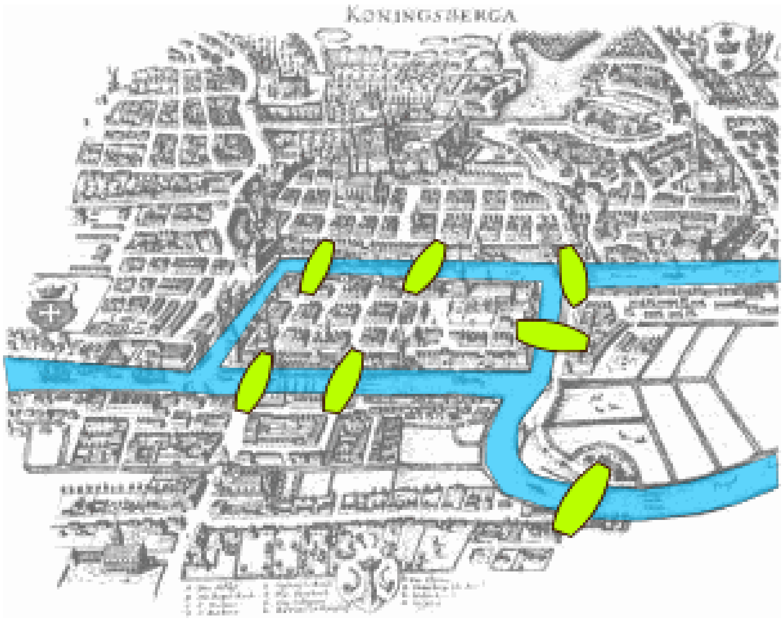
Matemáticas Generales. 1º Bachillerato. Capítulo 5: GRAFOS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Zambrana Aguilar

Revisora: Raquel Hernández

Ilustraciones: Autor. Textos Marea Verde / Wikipedia



Resumen

Nos adentramos en la Teoría de Grafos, estudiando sus características principales y más relevantes, los tipos de grafos existentes y sus características más notables, aplicaciones prácticas en la vida cotidiana con ejemplos de problemas que nos podemos encontrar en el día a día, aprendiendo a interpretar las relaciones entre sus vértices y extrapolando la Teoría de Grafos a problemas cotidianos, donde el alumnado aprenderá a obtener, interpretar y discutir resultados. Asimismo, se estudiará la coloración como técnica de etiquetado en grafos. Todo ello acompañado de ilustraciones, tablas, resúmenes y ejercicios resueltos que facilitarán la comprensión y aprendizaje de estos nuevos conceptos.

1. GRAFOS

1.1. Aplicación cotidiana de la Teoría de Grafos

Los grafos resultan de gran utilidad a la hora de afrontar problemas cotidianos, pues nos permiten organizar la información que disponemos en tablas de forma esquemática.

Por ejemplo:

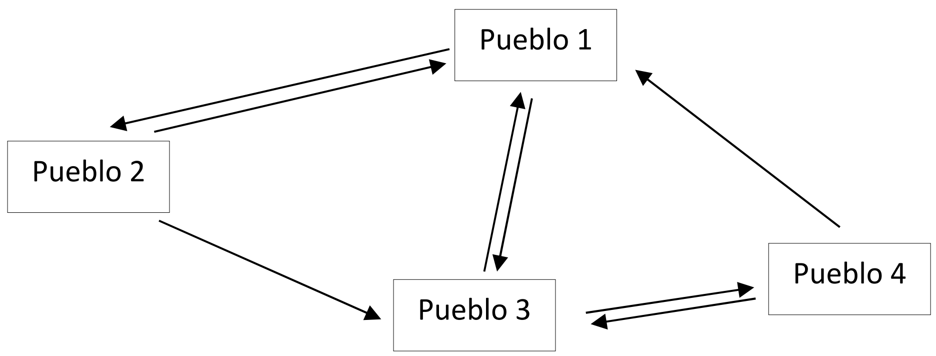
Vamos a considerar la siguiente situación:

- *Existen 4 pueblos situados en algún lugar de la geografía española. Dichos pueblos permanecen comunicados entre sí por una red de carreteras, algunas de un solo sentido, y otras de doble sentido, tal y como se recoge en la siguiente tabla:*

	Pueblo 1	Pueblo 2	Pueblo 3	Pueblo 4
Pueblo 1	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Pueblo 2	SÍ	NO	NO	NO
Pueblo 3	SÍ	SÍ	NO	SÍ
Pueblo 4	NO	NO	SÍ	NO

Donde hemos escrito «SÍ» si existe ***carretera directa*** *que comunique dichos pueblos, y «NO» en caso contrario.*

Vemos que la información recopilada en la tabla la podemos representar de la siguiente forma:



Este esquema recibe el nombre de **grafo**, y resulta muy conveniente porque nos permite visualizar la misma información que queda recopilada en la tabla pero de forma más sencilla, y nos resulta más conveniente a la hora de extraer conclusiones.

En la vida cotidiana hacemos uso de los grafos sin darnos cuenta; por ejemplo en las redes sociales. ¿Nunca has mirado entre tus seguidores de *Instagram* quién te seguía de vuelta o quién seguía a tus amigos o dejaba de seguir a otro usuario?

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Por ejemplo:

- Imagínate los siguientes usuarios de Instagram:

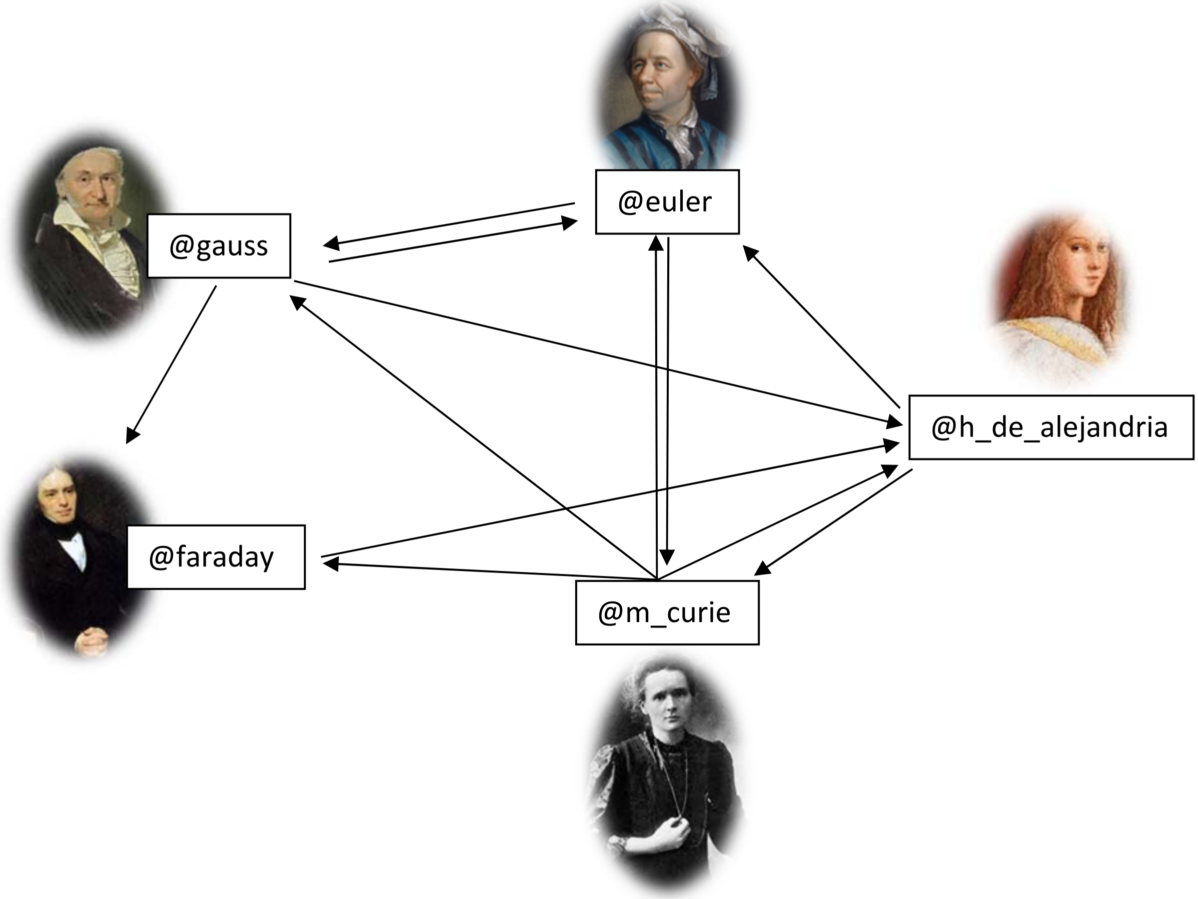
@euler @gauss @faraday @m_curie @h_de_alejandria

Has estado *stalkeando* sus perfiles y has descubierto que @euler solo sigue a @m_curie y a @gauss; @gauss sigue a @euler, a @faraday y a @h_de_alejandria; @faraday solo sigue a @h_de_alejandria; @m_curie sigue a todos y @h_de_alejandria solo sigue a @euler y a @m_curie.

Visto así, parece algo complicado extraer conclusiones. Vamos a organizar los datos en una tabla.

	@euler	@gauss	@faraday	@m_curie	@h_de_alejandria
@euler	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
@gauss	SÍ	NO	NO	SÍ	NO
@faraday	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
@m_curie	SÍ	NO	NO	NO	SÍ
@h_de_alejandria	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO

De esta forma, la información queda más organizada; sin embargo, podemos ir más allá y representarlo mediante un grafo:



Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Los grafos nos permiten, como puedes ver, estudiar la relación entre distintos elementos, en el primer ejemplo eran pueblos que se conectaban mediante una red de carreteras; y en este segundo ejemplo, nos muestra la relación que tienen cinco usuarios de *Instagram*.

Sin embargo, las aplicaciones de la Teoría de Grafos son muchísimas: conocer la localización óptima donde se pueden construir infraestructuras públicas, conocer el camino óptimo que puede seguir un camión de reparto entre distintas ciudades para reducir el gasto de combustible, organización del tráfico aéreo, organizando los vuelos de diferentes compañías entre las distintas ciudades, etc.

Sus numerosas aplicaciones y su simplicidad a la hora de mostrar relaciones entre distintos elementos convierten a los grafos en uno de los objetos más estudiados y admirados en Matemáticas.

Vamos a darle un poco de formalidad a lo que acabamos de descubrir, ¿te atreves?

video

Matemáticas discretas. Teoría de Grafos

https://www.youtube.com/watch?v=PdA1Jz6iEWQ

1.2. Definición formal

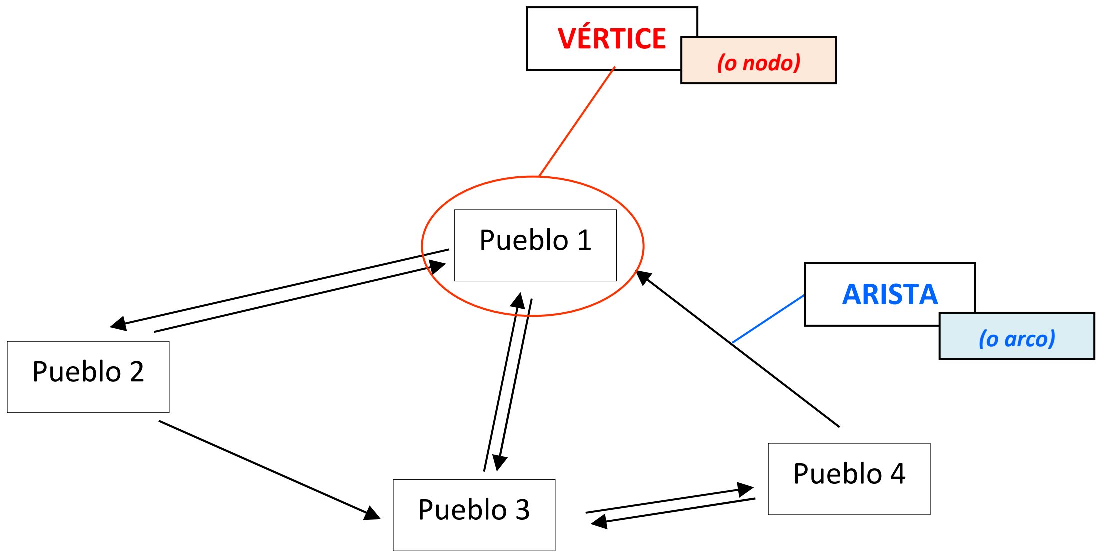
En Matemáticas y Ciencias de la computación se llama **grafo** al conjunto de **vértices** o **nodos** unidos por **aristas** o **arcos** que representan una relación entre los elementos de un conjunto.

Notación:

Dado un grafo $G(V,E)$, llamamos V al conjunto de vértices o nodos y E al conjunto de pares no ordenados de vértices, o, simplemente, al conjunto de aristas.

Nótese que $V \neq \varnothing$, aunque sí se puede dar el caso de que E sea el conjunto vacío (si no existen conexiones entre los elementos sometidos a estudio; se llama **grafo vacío**).

Así por ejemplo, si volvemos al problema inicial sobre los cuatro pueblos que se encontraban conectados entre sí por diferentes carreteras, podemos distinguir en el grafo que hicimos los siguientes elementos:



Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Luego el conjunto de vértices de este grafo estará formado por el conjunto de todos los pueblos:

$$V=\{\text{Pueblo}\,1,\text{Pueblo}\,2,\text{Pueblo}\,3,\text{Pueblo}\,4\}$$

Y al conjunto de aristas o arcos lo escribiremos así:

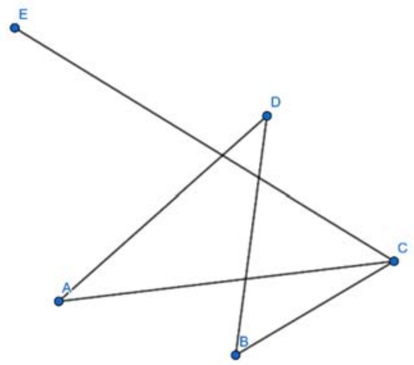
$$E=\{(\text{Pueblo1},\text{Pueblo2}),(\text{Pueblo1},\text{Pueblo3}),(\text{Pueblo2},\text{Pueblo1}),(\text{Pueblo2},\text{Pueblo3}),(\text{Pueblo3},\text{Pueblo4}),(\text{Pueblo4},\text{Pueblo1}),(\text{Pueblo4},\text{Pueblo3})\}$$

(conjunto formado por pares no ordenados de vértices)

Importante: Si un vértice no recibe o emite ninguna arista o arco, lo llamamos **vértice aislado**.

Ejemplo:

- *Dado el siguiente grafo, escribe su conjunto de nodos y aristas.*



Comenzamos detectando en el grafo cuáles son los vértices y cuáles son las aristas. En nuestro ejemplo, tenemos 5 vértices o nodos, los cuales están representados por los círculos azules, acompañados de las letras mayúsculas A, B, C, D, E para diferenciarlos.

Por tanto: $V=\{\text{A},\text{B},\text{C},\text{D},\text{E}\}$

Pasemos ahora a las aristas. Observamos, gracias al grafo, que tenemos 5 aristas, que son las que unen los vértices (A,D), (A,C), (B,D), (B,C) y (C,E). Luego:

$$E=\{(\text{A},\text{D}),(\text{A},\text{C}),(\text{B},\text{D}),(\text{B},\text{C}),(\text{C},\text{E})\}$$

Diferencia entre arista y arco

Dados los vértices v_1 y v_2, representamos la relación existente entre ellos a través de una **arista** o un **arco**. De esta forma, diferenciamos entre arista y arco argumentando que un **arco es una arista orientada**. Abundaremos en la orientación de las aristas en el punto 2, cuando estudiemos el grafo orientado.

2. TIPOS DE GRAFOS

2.1. Grafos dirigidos (digrafo)

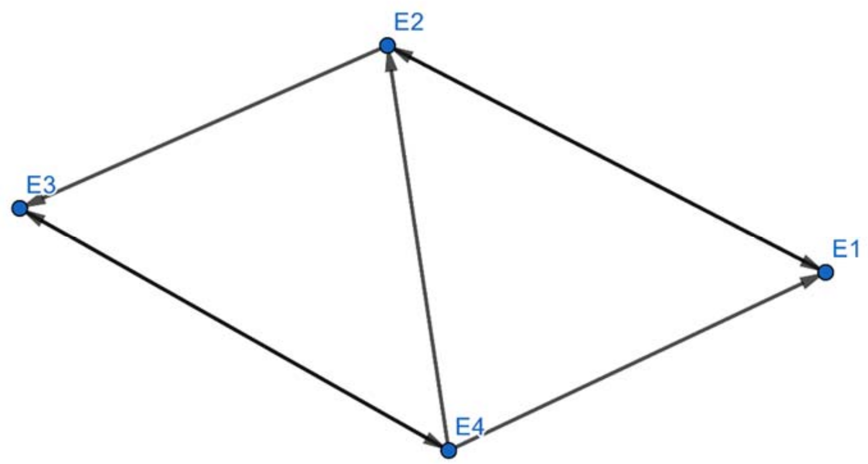
Un **grafo dirigido** es aquel que tiene en consideración la dirección de la relación existente entre los vértices o nodos.

Ejemplo:

- *El metro de una determinada ciudad tiene una línea de sentido único desde la estación E1 hasta la estación E2. Desde dicha estación salen dos líneas de sentido único, también: una hacia la estación E1 y otra hasta la estación E3, que conecta únicamente con la estación E4, de sentido único. La E4 conecta con todas las anteriores también en sentido único.*

Como se ha fijado un sentido único, una línea que conecte dos estaciones no *"servirá"* igual a un pasajero que quiera ir de la *E1* hasta la *E4*, por ejemplo, y viceversa (a no ser que exista otra línea que una ambas estaciones y con sentido contrario). O sea, importa la dirección en la cual se relacionan los nodos (o las estaciones, en nuestro ejemplo), por ello, deberemos dar la orientación adecuada a las aristas que unen cada nodo, con el objetivo de representar correctamente la relación entre los vértices unidos.

Si representamos el grafo correspondiente al enunciado, obtendremos la siguiente figura.



Observación: Que haya aristas con doble sentido indica que entre ambas estaciones hay dos líneas diferentes y cada una circula en una dirección.

Como vemos, damos la dirección asignada por el enunciado a cada arista, en función del sentido de la línea.

A partir de este ejemplo, podemos llegar a una conclusión muy importante:

En un grafo dirigido, se debe tener en cuenta la dirección de la relación entre los nodos, por lo que dada un arco que une los vértices v_1 y v_2, diremos, de forma general que $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$, puesto que (v_1, v_2) indica que v_1 conecta con v_2 en el sentido v_1 8 v_2, mientras que (v_2, v_1) indica la misma conexión pero en sentido opuesto: v_2 8 v_1.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

2.1.1. Tipos de relaciones en un grafo dirigido

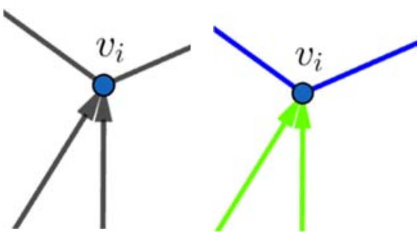
ARCO	Relación que indica dirección. Entre dos vértices puede existir más de un arco.
CAMINO	Como su nombre indica, es el *camino* o *ruta* que debemos seguir para llegar de un vértice origen a un vértice extremo. Al camino lo representamos por la letra griega γ, y entre paréntesis escribimos los vértices por los que pasamos: $\gamma(v_i, v_j, \ldots)$ Luego, dado un camino que tiene como inicio al vértice v_0 y final al vértice v_f, escribiremos: $\gamma(v_0, v_f) = \gamma(v_0, v_i, v_j, \ldots, v_f)$ • **Camino elemental**: Es aquel camino que no pasa más de una vez por un mismo vértice. • **Camino compuesto**: Es aquel camino que pasa más de una vez por un mismo vértice. • **Ciclo (o circuito)**: Es aquel camino que vuelve a su punto de origen. Cualquier punto de un ciclo puede ser punto de salida (y a su vez de llegada). • Diferenciamos entre ciclos (o circuitos) elementales, si solo pasa una vez por un mismo vértice, o ciclos (o circuitos) compuestos, en caso contrario.
BUCLE	Es la conexión de un vértice consigo mismo.

Grado de un nodo en un grafo dirigido

- **Grado de recepción un vértice o nodo**: Llamamos *grado de recepción de un vértice o nodo* y denotamos por $Gr(v_i)$, donde v_i es el vértice de interés, al número de arcos que recibe v_i.
- **Grado de emisión de un vértice o nodo:** Llamamos *grado de emisión de un vértice o nodo* y denotamos por $Gr_E(v_i)$, donde v_i es el vértice de interés, al número de arcos que emite v_i. Los vértices cuyo grado de emisión es mayor que 1 se llaman **ramificaciones**: si $Gr_E(v_i) > 1$ 8 v_i es una ramificación.

Por ejemplo,

Supongamos que hemos realizado una fotografía a un vértice de un determinado grafo, obteniendo la siguiente imagen:



Como podemos observar, a dicho vértice *llegan* dos arcos, y el mismo vértice *emite* otros dos arcos. Por lo tanto, escribiremos: $Gr(v_i) = 2$ y $Gr_E(v_i) = 2$.

Si no lo tienes claro, puedes observar la imagen de al lado y notarás como los arcos verdes son los que *recibe* el vértice y los azules son los que *emite*.

Importante: Aquel grafo cuyos vértices tengan el mismo grado se denomina **grafo regular**.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Actividad resuelta

- *El calendario de los aficionados al fútbol marca una fecha importante pasado mañana: el clásico. Un equipo de la Policía Nacional se encarga de velar por la seguridad de los aficionados, por lo que decide restringir el tráfico en las calles cercanas al perímetro de seguridad montado alrededor del Bernabéu, tal y como se muestra en el siguiente grafo.*

Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿De qué tipo de grafo se trata? Justifica tu respuesta.

b) Escribe un camino elemental y otro camino compuesto.

c) Escribe un circuito elemental.

a) Se trata de un grafo dirigido, pues los vértices están unidos por arcos (aristas orientadas). Podemos decir también, que la Policía, al limitar el tráfico de algunas calles a un solo sentido está logrando hacer que la dirección importe, pues una persona que quiera pasar por una calle en la que solo está permitida la conducción en un sentido, no podrá pasar, por lo que la dirección en este ejemplo sí importa.

b) Un camino elemental puede ser $\gamma(1,4)=\gamma(1,2,3,4)$

Un camino compuesto puede ser $\gamma(4,3)=\gamma(4,2,1,2,3)$, porque pasa dos veces por el vértice 2.

c) Un circuito elemental puede ser $\gamma(4,2,3,4)$, porque regresa al vértice inicial habiendo pasado por cada vértice una única vez.

El maravilloso mundo del mundo de la teoría de grafos. Este vídeo es una reducida recopilación de la infinidad de aplicaciones y problemas que abarca la maravillosa Teoría de Grafos. En particular, se tratan ejemplos relacionados con establecer caminos en un grafo para resolver retos clásicos como el Problema del viajante. Para no excederme en tiempo, he dejado fuera problemas que considero de gran interés -coloración de grafos, caminos eulerianos, algoritmos de resolución- de modo que, si tienes interés en que desarrolle estos temas, no olvides suscribirte y comentar qué aspectos debería incluir en una potencial segunda parte. Ojalá me anime a ello.

Actividades propuestas

1. Inventa un grafo dirigido cualquiera con las siguientes características.

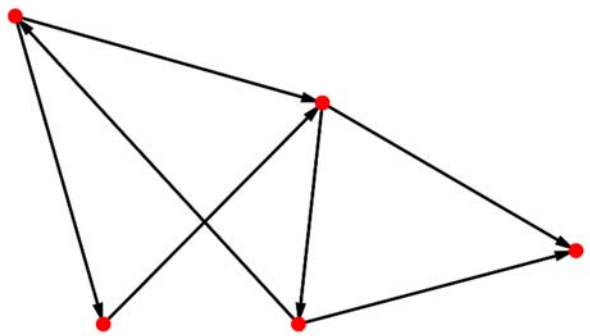
a) Presenta un total de cinco vértices.

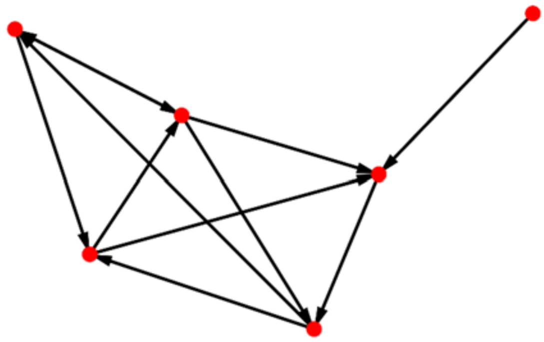
b) Un vértice tiene grado de emisión 2 y grado de recepción 1.

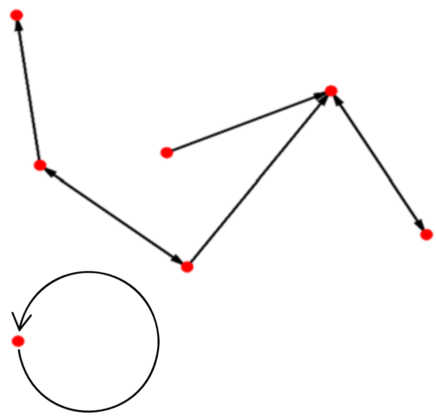
c) Un vértice presenta un bucle.

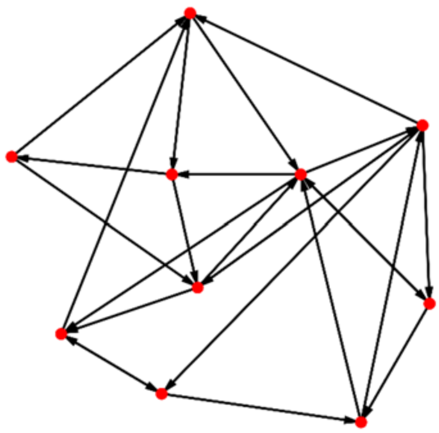
d) Hay un vértice aislado.

2. Indica el grado de emisión y recepción de cada vértice en los siguientes grafos.

a) 

b) 

c) 

d) 

3. Sara trabaja como escritora para un periódico digital y todas las mañanas se levanta, desayuna, se viste y se dirige a la *Estación de metro de Fibonacci* en su ciudad. Cuando llega a la estación le entregan un folleto como este. El señor que le hace entrega del folleto le dice a Sara que para llegar a su trabajo debe llegar a la Estación de *Emmy Noether*.

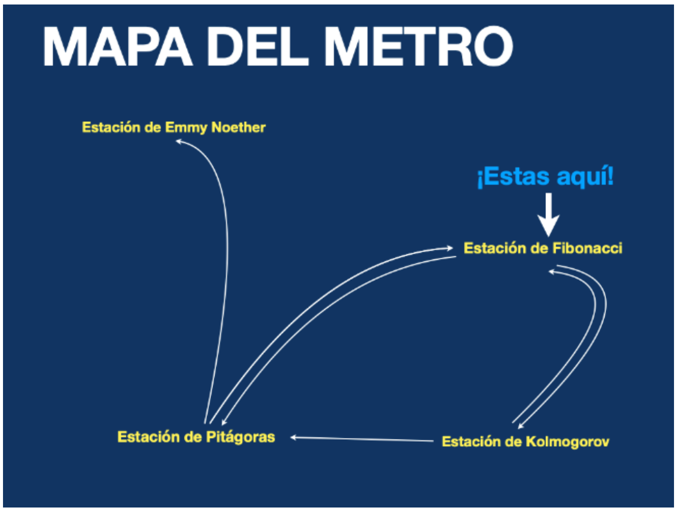
a) ¿Qué representa el folleto?

b) ¿Puede Sara ir directamente a su trabajo o necesita parar primero en otra estación?

c) Escribe un ejemplo de un circuito elemental.

d) ¿Cuál es el trayecto con menos paradas que puede seguir Sara?

e) Halla el grado de emisión y recepción de cada estación. ¿Qué significado tiene?



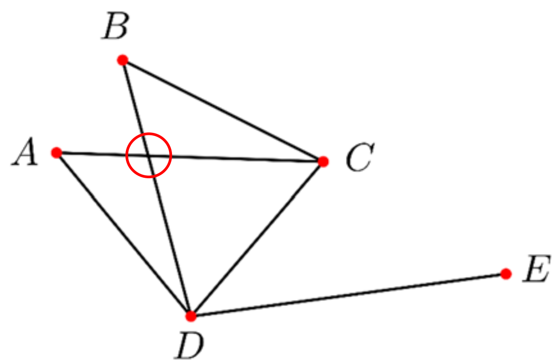
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

2.2. Grafo plano

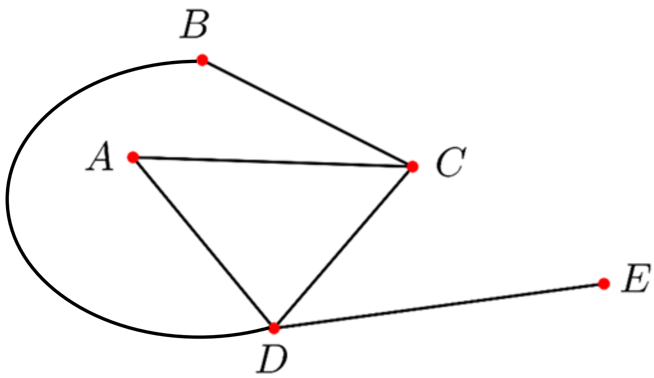
Denominamos **grafo plano** a aquel grafo cuyas aristas solo se cortan en los puntos que representan a los vértices.

Por ejemplo:

Observa este grafo.

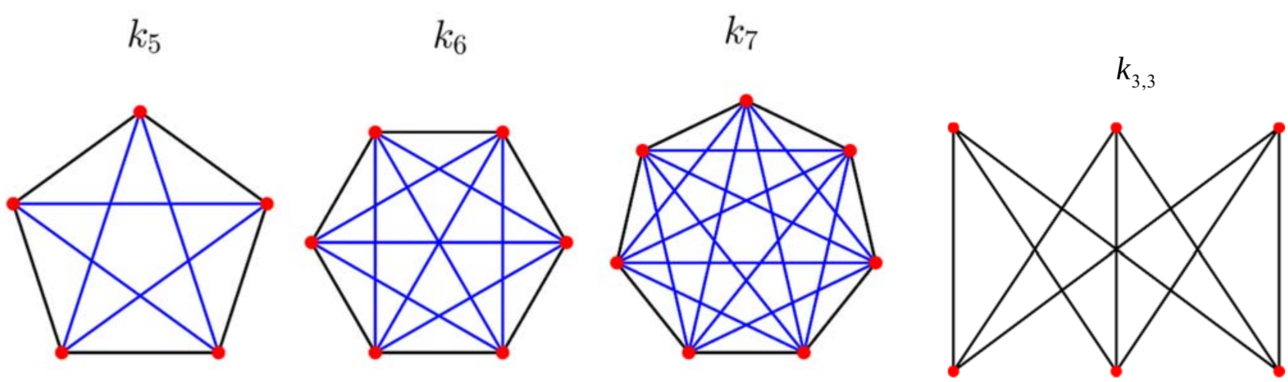


¿Observas como hay dos aristas que se cortan? Fíjate cómo podemos *rediseñar* este grafo y convertirlo en un grafo plano, de forma que sus aristas no se intersequen:



Si un grafo que aparentemente no es plano logramos representarlo en un plano de forma que ninguna arista se cruce, entonces diremos que el grafo en cuestión sí es plano.

Ejemplos de grafos ***no planos*** son:

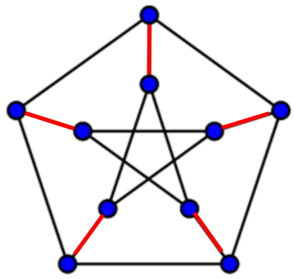


Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

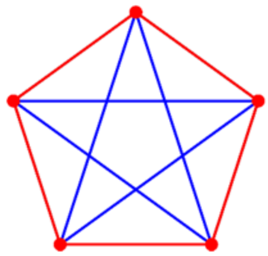
Teorema de Kuratowski: Un grafo es plano sí y sólo sí no contiene a ningún grafo homeomorfo (que pueda obtenerse a partir de subdivisiones elementales de aristas) al $k_{3,3}$ o al k_5.

Teorema de Whitney: Un grafo no es plano sí y sólo sí al eliminar una arista, uniendo sus vértices, de dicho grafo obtenemos $k_{3,3}$ o k_5.

- Un ejemplo muy extendido es el famoso *Grafo de Petersen*:



A partir de su representación es muy fácil darse cuenta de que no se trata de un grafo plano, pues hay varios puntos donde las aristas se cortan unas con otras. Sin embargo, si queremos argumentar nuestra postura usando el Teorema de Whitney, podemos decir que si de este grafo eliminamos las aristas marcadas en rojo, uniendo los vértices, obtendremos k_5, tal y como se muestra en esta otra imagen:



2.3. Grafo ponderado

Actividad resuelta

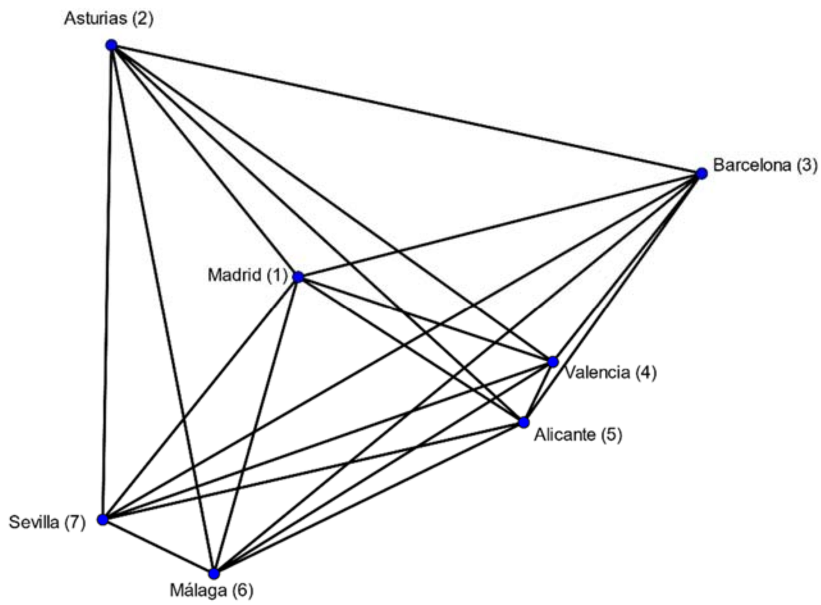
- Queremos hacer un viaje por la geografía española visitando las ciudades de Málaga, Madrid, Barcelona, Valencia, Sevilla, Alicante y Asturias. Hemos consultado en Google Maps la longitud, en km, de cada trayecto, y lo hemos recopilado en la siguiente tabla:

	Málaga	Madrid	Barcelona	Valencia	Sevilla	Alicante	Asturias
Málaga	0	529	996	618	206	472	974
Madrid	529	0	626	360	530	424	446
Barcelona	996	626	0	349	994	527	889
Valencia	618	360	349	0	656	170	804
Sevilla	206	530	994	656	0	595	779
Alicante	472	424	527	170	595	0	871
Asturias	974	446	889	804	779	871	0

Visto así en la tabla, no resulta efectivo a la hora de planificar el viaje, por lo que decidimos

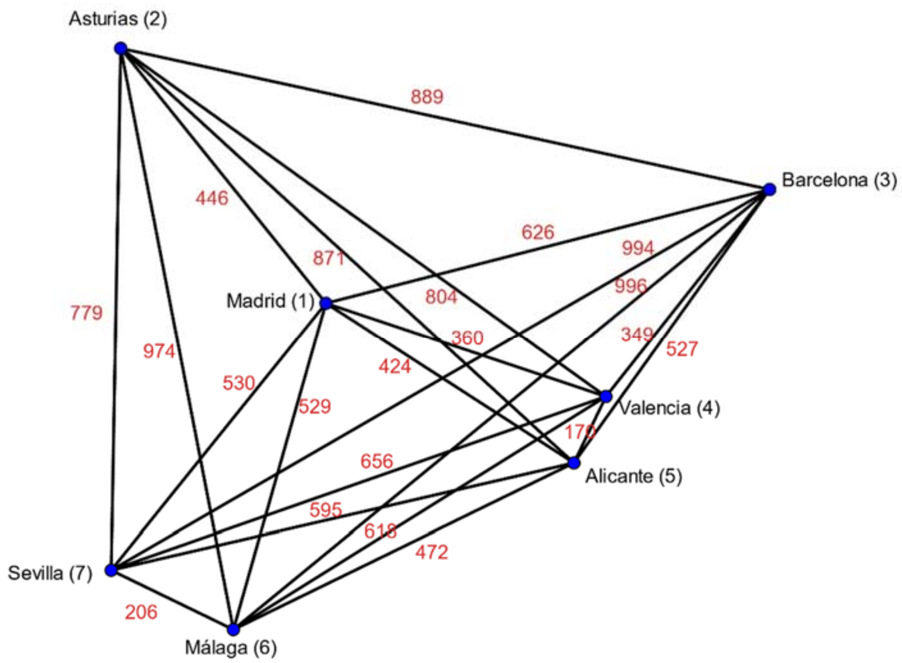
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

esquematizarlo, hacer un grafo.



Como vemos, el grafo, en este caso, no solo no aporta ninguna información sino que estamos perdiendo información, ¿no hicimos la tabla con la finalidad de conocer la longitud de cada trayecto?, ¿dónde está reflejada esa longitud en el grafo?

Con el fin de no perder esta información, debemos colocar la longitud de cada trayecto en cada arista, como se ha hecho en el siguiente otro grafo:



A este tipo de grafo, donde las aristas están acompañadas de un valor numérico que recibe el nombre de **peso** o **coste** se le llama **grafo ponderado**.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

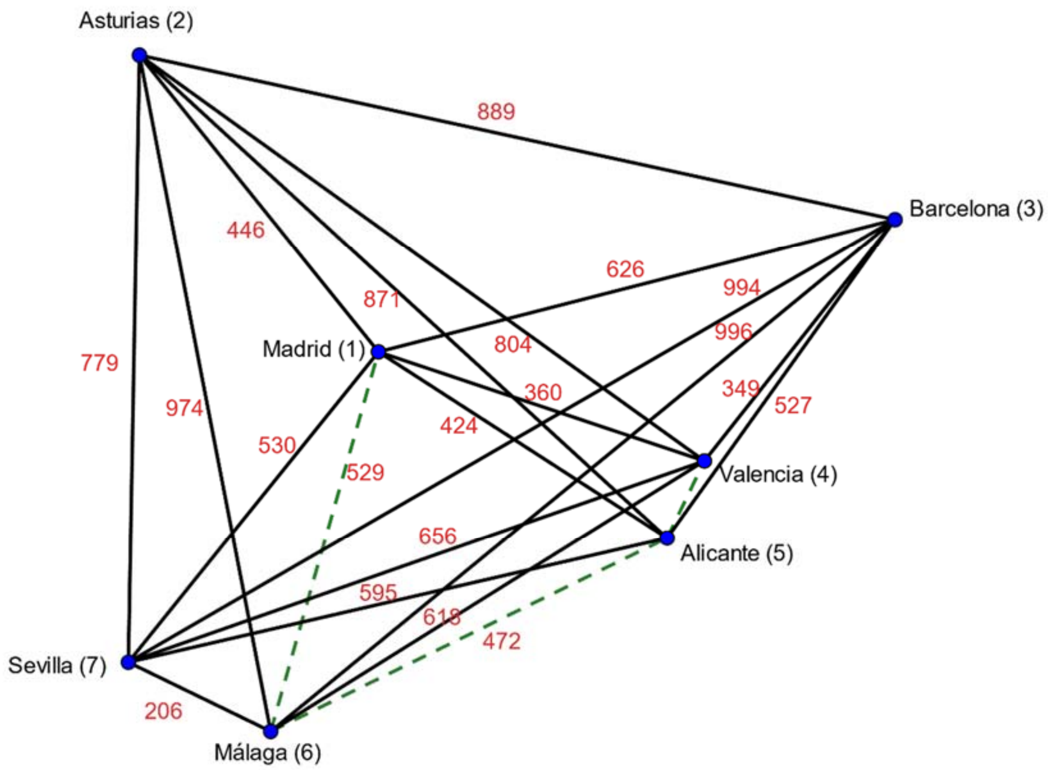
Denominamos **grafo ponderado** a aquel grafo cuyas aristas se encuentran acompañadas de un valor $p(v_i, v_j)$ que llamamos **peso** o **coste**.

El grafo ponderado resulta muy útil a la hora de estudiar problemas cotidianos como el que se ha planteado aquí.

2.3.1. Coste o peso del camino

- Fíjate que si por ejemplo queremos hacer un viaje en el que queremos pasar solo y exclusivamente por Málaga, Alicante y Valencia, partiendo desde Madrid, para calcular el total de kilómetros que haremos en nuestro viaje, sin contar la vuelta a Madrid, basta con sumar los pesos de las aristas *por donde pasamos* (ahora le daremos formalidad a este concepto).

En el ejemplo que hemos puesto deberemos sumar los 529 km que separan Madrid de Málaga, los 472 km que recorreremos hasta llegar a Alicante y los 170 km que separan Alicante de Valencia:



$$\text{Total de km efectuados } = 529 + 472 + 170 = 1\,171 \text{ km}$$

Considérese un camino $\gamma(v_k, v_n) = (v_k, \ldots, v_n)$, se define por **coste o peso del camino** $\gamma(v_k, v_n) = (v_k, \ldots, v_n)$ a $\sum_{i=k}^{n-1} p(v_i, v_{i+1}) = p(v_k, v_{k+1}) + p(v_{k+1}, v_{k+2}) + \cdots + p(v_{n-1}, v_n)$.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Actividad resuelta

- *La clase de 2º de Bachillerato está organizando el viaje de fin de curso. Tras votar entre los destinos candidatos, ha salido Nueva York como vencedor. Los alumnos barajan ahora dos compañías diferentes de vuelo, buscando aquella que resulte más barata. Consultando las páginas webs de ambas compañías, extraen la siguiente información:*
  - *La primera compañía no dispone de vuelo directo. Hay dos opciones: salen a las 8:00 de la mañana desde el aeropuerto Internacional de Valencia, llegan a las 9:05 al aeropuerto de Barcelona (El-Prat), donde cogen otro vuelo hasta Nueva York, llegando a las 18:05. La segunda opción es salir desde Valencia a las 9:00 de la mañana hasta el aeropuerto de Barajas (Madrid), donde llegarían a las 10:00. De ahí cogen otro vuelo hasta Nueva York, llegando a las 18:10. Esta compañía cobra 52.5 € por cada hora volando.*
  - *La segunda compañía tampoco dispone de vuelo directo. Hay dos opciones, también: salen a las 7:00 de la mañana desde el aeropuerto de Valencia hasta el aeropuerto de París (Francia), llegando a las 11:00 de la mañana. Cogen otro vuelo hasta llegar a Nueva York, donde llegarían a las 19:15. Como segunda opción, pueden salir a las 9:15 de la mañana desde Valencia hasta Barcelona, llegando a las 10:05. Desde Barcelona cogen un vuelo directo a Nueva York, llegando a las 19:30. Esta compañía cobra 50 € por cada hora de vuelo.*

  a) Elabora un grafo que recoja las rutas que ofertan ambas compañías.

  b) ¿Qué ruta es la más barata en cada compañía? ¿Cuál es la que deben elegir los alumnos de 2º de Bachillerato?

  c) Calcula el precio de cada ruta.

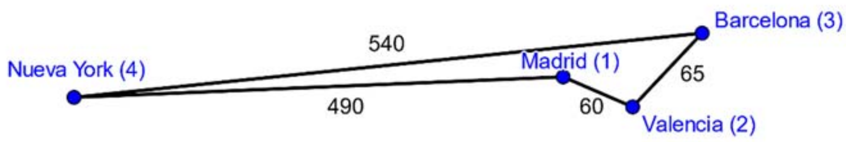
a) Comenzamos elaborando cada grafo.

Recordemos que la primera compañía ofertaba dos posibilidades. La primera de ellas la podemos separar en dos tramos: Valencia – Barcelona y Barcelona – Nueva York. Como al final nos preguntan por el precio (*¿Qué ruta es la más barata en cada compañía? ¿Cuál es la que deben elegir los alumnos de 2º de Bachillerato?*), y este viene dado en función de las horas de vuelo, vamos a incluir esta información en nuestro grafo. El tramo Valencia – Barcelona tiene una duración de 65 minutos; el tramo Barcelona – Nueva York tiene una duración de 540 minutos.

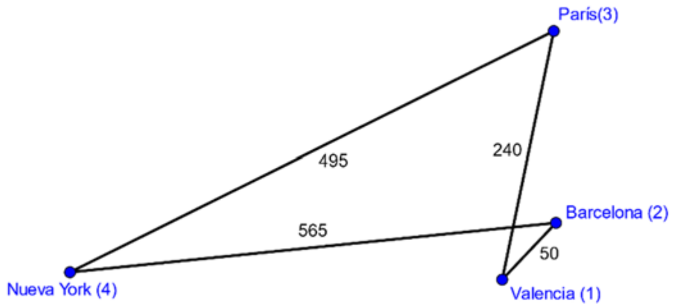
La segunda posibilidad la dividimos en los tramos Valencia – Madrid y Madrid – Nueva York. La duración de estos tramos es 60 minutos y 490 minutos, respectivamente.

La segunda compañía ofrece también dos posibilidades: la primera la podemos dividir en los tramos Valencia – París y París – Nueva York, con una duración respectiva de 240 minutos y 495 minutos. La segunda posibilidad la dividimos en los tramos Valencia – Barcelona, de duración 50 minutos y Barcelona – Nueva York, con una duración de 565 minutos.

Trasladamos esta información a los grafos:



Compañía 1



Compañía 2

b) Puede que directamente pensemos en sumar los minutos de vuelo en cada camino que podamos formar con el inicio en Valencia y final en Nueva York, pero esto no tiene sentido, puesto que las rutas marcadas por la compañía son fijas, luego elegida una ruta, no podemos modificar su trayectoria.

Una vez razonado esto, vamos a estudiar el precio de cada una de las rutas que oferta cada compañía.

- Compañía 1
    - Ruta 1: $\gamma(2,4)=(2,3,4)$ 8 $p(\gamma)=\sum_{i=2}^{3} p(i,i+1)=p(2,3)+p(3,4)=65+540=605$
    - Ruta 2: $\eta(1,4)=(1,2,4)$ 8 $p(\eta)=\sum_{i=1}^{2} p(v_i,v_{i+1})=p(1,2)+p(2,4)=60+490=550$

Fíjate en la diferencia en cómo usamos la notación sigma en cada caso. En el primero, como los vértices están dados como números naturales consecutivos, se puede escribir como

$$\sum p(i,i+1)$$

En la segunda, en cambio, escribiremos $\sum p(v_i,v_{i+1})$, donde v_i se refiere al vértice que ocupa la posición i dentro del camino, y v_{i+1} a su consecutivo.

Por tanto, el precio lo podemos recoger en la siguiente tabla:

		Minutos de vuelo (Coste del camino)	Horas de vuelo	Precio/h	Total
COMPAÑÍA 1	**Ruta 1**	605	10.08333…h	52.5 €	529.375 €
	Ruta 2	550	9.1666…h		481.25 €

De la compañía 1, resulta más barata la ruta 2, con un precio total de 481.25 €.

En realidad, sabiendo que la ruta dos es más rápida, ya podríamos haber deducido que ésta sería la más barata; sin embargo, como nos piden el precio en el apartado c), podemos calcularlo ya.

- Compañía 2
    - Ruta 1: $\gamma(1,4)=(1,3,4)$ 8 $p(\gamma)=\sum_{i=1}^{3} p(v_i,v_{i+1})=p(1,3)+p(3,4)=240+495=735$
    - Ruta 2: $\eta(1,4)=(1,2,4)$ 8 $p(\eta)=\sum_{i=1}^{2} p(v_i,v_{i+1})=p(1,2)+p(2,4)=50+565=615$

Ya sabemos que resultará más barata la compañía 2. Sin embargo, como nos preguntan también por los precios, vamos a armar una tabla como la anterior.

COMPAÑÍA 2		Minutos de vuelo (Coste del camino)	Horas de vuelo	Precio/h	Total
	Ruta 1	735	12.25 h	50 €	612.5 €
	Ruta 2	615	9.1666…h		512.5 €

c)

		Total
COMPAÑÍA 1	Ruta 1	529.375 €
	Ruta 2	481.25 €
COMPAÑÍA 2	Ruta 1	612.5 €
	Ruta 2	512.5 €

Los alumnos de 2º de Bachillerato deben elegir a la compañía 1, y dentro de la misma, deben escoger la ruta 2.

Actividades propuestas

4. Inés quiere hacer el siguiente viaje con su familia: Málaga – Sevilla – Madrid – Valencia – Málaga.

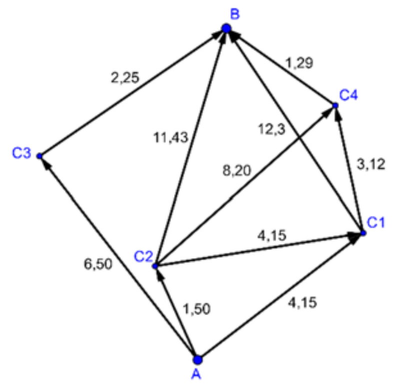
a) Elabora el grafo que represente dicho viaje. Puedes ayudarte de un grafo anterior.

b) Escribe la matriz de adyacencia del grafo representado.

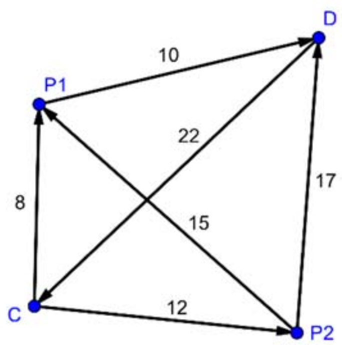
c) Calcula el coste del camino asociado al viaje que quiere realizar Inés. ¿Qué significa dicho coste?

d) Si la cantidad de combustible gastado por el coche de la familia de Inés viene dictaminado por la función $f(x) = 0.102\ x$, donde $f(x)$ son el total de litros consumidos, y x el total de kilómetros recorridos, determina la cantidad de combustible que se ha gastado durante el viaje.

5. El siguiente grafo muestra la red de carreteras que existe entre dos grandes ciudades y el precio que se debe abonar en un determinado peaje para poder tomar dicha carretera. Halla el precio de todos los posibles caminos que se pueden seguir para llegar desde la ciudad A hasta la ciudad B. ¿Cuál de ellos resulta el más económico?



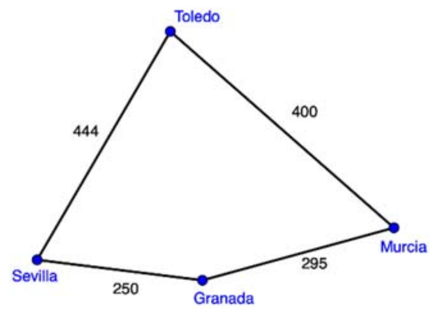
6. Una empresa de repartos debe efectuar la entrega de un determinado pedido. Si el camión de reparto se encuentra en el punto C y el destino es el punto D. Escribe todas las posibles rutas que puede seguir el repartidor para llegar al destino.



a) Escribe la matriz de adyacencia de dicho grafo.

b) Si la empresa hace un descuento de 0.5 € al importe total por cada hora de retraso en la entrega, y justo en el instante en el cual el repartidor se encuentra en el punto C ya lleva un retraso de media hora, ¿qué descuento se aplicará al producto si el repartidor opta por coger la ruta más rápida? ¿Y si coge la ruta más lenta?

7. Sabiendo que el gasto medio de combustible, en litros, de un determinado coche viene dictaminado por la función $f(x) = 0.093\ x$, donde x son los kilómetros recorridos, elabora un grafo ponderado como este, en el que recojas los litros de combustible que pierde dicho coche al recorrer las diferentes distancias (en kilómetros) entre las ciudades consideradas en el grafo.



Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

2.4. Árboles

Llamamos **árbol** a aquel grafo que es acíclico y además, cada par de vértices del árbol debe estar conectado por exactamente un camino.

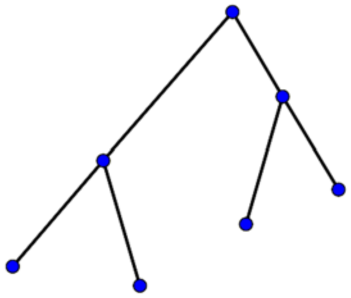
Grafo conexo: Un grafo conexo si cada par de vértices está conectado por al menos un camino.

Grafo acíclico: Es aquel grafo que no contiene ciclos.

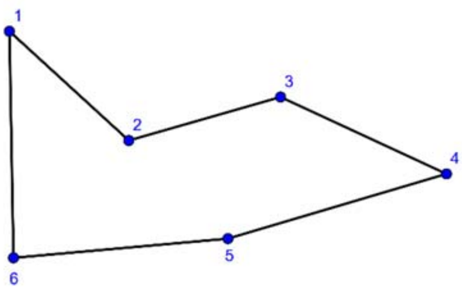
- En un árbol, al añadir una nueva arista, se forma un ciclo.

Fíjate en los siguientes ejemplos para comprenderlo mejor.

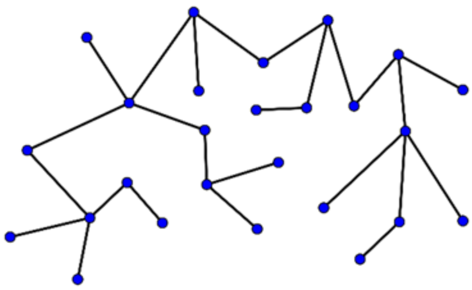
Ejemplos:

- 

  Fíjate como este grafo es un árbol, puesto que es conexo (todos sus vértices están conectados por un camino) y, además, es acíclico (no contiene ciclos).

- 

  Por el contrario, nota como este otro grafo no es un árbol, porque pese a que todos sus vértices estén conectados por un camino, el grafo presenta un ciclo.

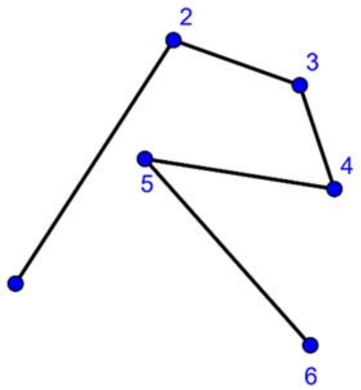
- 

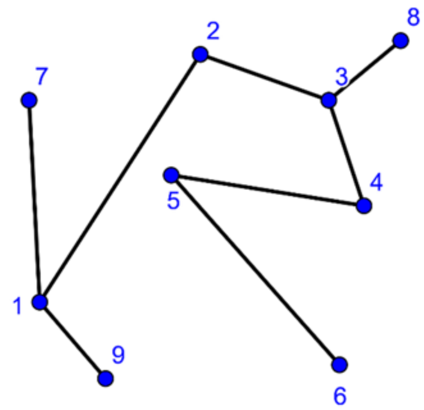
  Sí se trata de un árbol. No está tan "*claro*" como el anterior, pero observa como no existe ningún ciclo, tomes el camino que tomes, nunca vuelves al punto de partida.

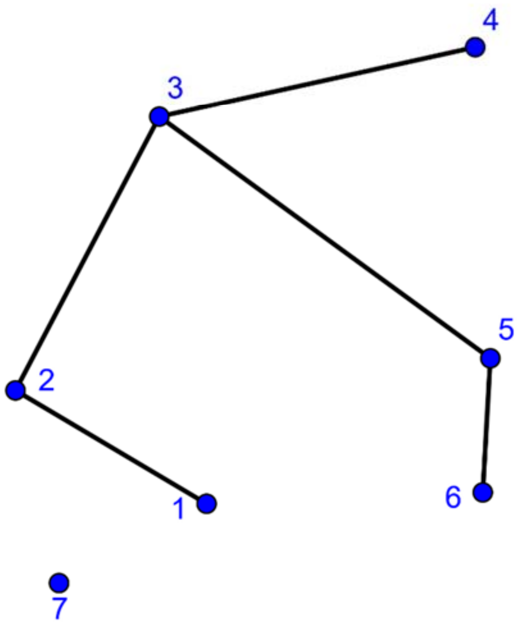
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

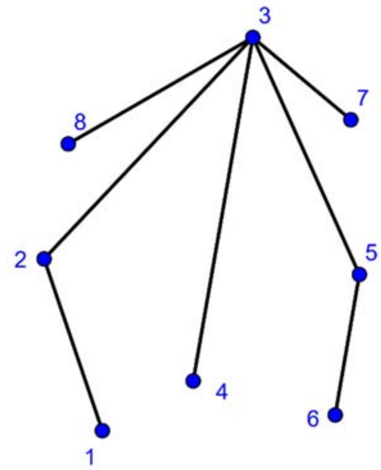
Actividad propuesta

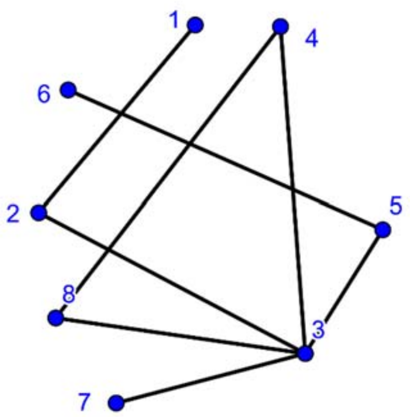
8. Discute qué grafos se corresponden con árboles.

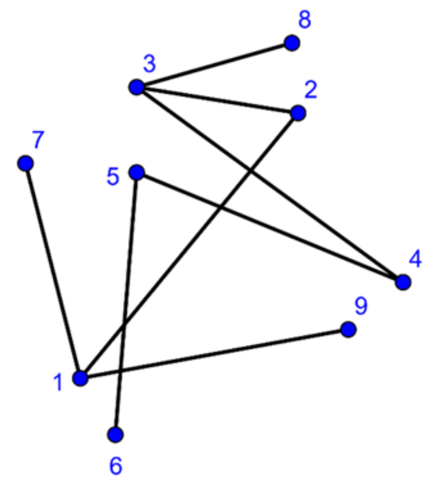
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Autor: Javier Zambrana Aguilar

Revisora: Raquel Hernández

Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

1.3. MATRICES Y GRAFOS

1.3.1. Definición de matriz

Las matrices son una de las herramientas más usadas dentro de las Matemáticas y están asociadas a un conjunto de datos numéricos ordenados. Se utilizan, por ejemplo, en computación gráfica, para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en procesos estocásticos… Encontramos las matrices en muchas ciencias: Sociología, Economía, Demografía, Física, Biología, etc.

La idea intuitiva de matriz es muy sencilla, pudiéndose definir una matriz como un **tabla de números ordenados**, números que pueden provenir de experimentos, encuestas, análisis económicos, etc.

Por tanto:

Se llama **matriz** de orden $m \times n$ a un conjunto de números reales dispuestos en m **filas** y en n **columnas**, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$) se habla de una **matriz cuadrada.**

Actividad resuelta

- Ya hemos visto tablas de números, como:

	Málaga	Madrid	Barcelona	Valencia	Sevilla	Alicante	Asturias
Málaga	0	529	996	618	206	472	974
Madrid	529	0	626	360	530	424	446
Barcelona	996	626	0	349	994	527	889
Valencia	618	360	349	0	656	170	804
Sevilla	206	530	994	656	0	595	779
Alicante	472	424	527	170	595	0	871
Asturias	974	446	889	804	779	871	0

Que se podría escribir como la matriz (eliminando muchas de las filas y columnas para verlo mejor):

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 529 & 996 \\ 529 & 0 & 626 \\ 996 & 626 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora es una matriz de 3 filas y 3 columnas, por lo que decimos que su dimensión es 3x3. Por tanto es una matriz cuadrada de orden 3.

El elemento a_{23} es el que ocupa la fila 2 y columna 3, luego es $a_{23} = 626$.

Observa que es una matriz simétrica. Tomamos como eje de simetría la diagonal, y comprueba que; $a_{ij} = a_{ji}$. En nuestro caso: $a_{23} = 626 = a_{32}$; $a_{12} = 529 = a_{21}$; $a_{13} = 996 = a_{31}$.

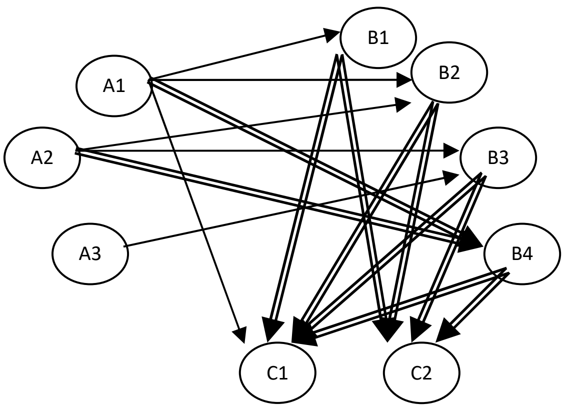
1.3.2. Matrices y grafos

Las matrices y los grafos comparten una muy estrecha relación, siendo las matrices una de las herramientas más útiles dentro de la Teoría de Grafos. Gracias a ellas podemos establecer de forma numérica y ordenada las conexiones entre los distintos vértices de un grafo, y además, su manejo nos permite resolver problemas cotidianos muy interesantes.

Actividad resuelta

- *En un país A, existen tres aeropuertos internacionales (A_1, A_2 y A_3); en otro país B existen cuatro (B_1, B_2, B_3 y B_4); y en un tercer país C existen dos (C_1 y C_2). Desde el aeropuerto A_1 salen vuelos con destino a B_1, B_2, C_1 y dos vuelos con destino a B_4. Desde el aeropuerto A_2 salen vuelos con destino a B_2, B_3 y dos vuelos con destino a B_4. Desde el aeropuerto A_3 sólo sale un vuelo con destino a B_3. Desde cada aeropuerto del país B, salen dos vuelos a cada uno de los aeropuertos del país C. Haz un grafo que exprese la situación.*

El esquema de los vuelos es:



Expresa mediante matrices:

a) Los vuelos del país A al B.

b) Los vuelos del país B al C.

c) Los vuelos de A a C, sin transbordo

Vamos a buscar las matrices del grafo:

a) Representamos los vuelos desde *A* (filas) hasta *B* (columnas)

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3x4. Tiene 3 filas y 4 columnas.

b) Representamos los vuelos desde *B* (filas) hasta *C* (columnas)

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Representamos los vuelos directos desde *A* (filas) hasta *C* (columnas):

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

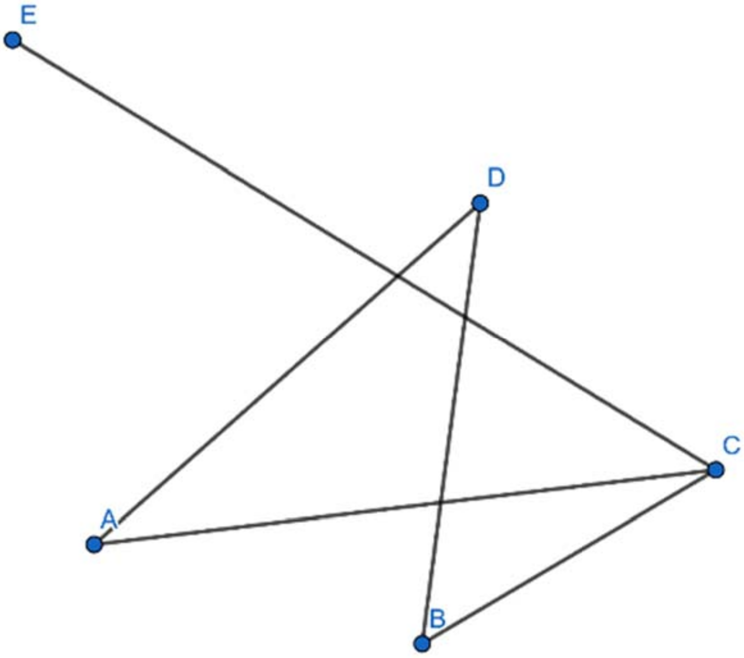
Es una matriz de dimensión 3x2, con 3 filas y 2 columnas. Ninguna de ellas es cuadrada ni simétrica.

1.3.3. La matriz de adyacencia

La matriz de adyacencia asociada a un grafo es una matriz que nos ofrece información acerca de las relaciones entre los distintos vértices del grafo. Su construcción es relativamente sencilla, y la vamos a visualizar a través de los siguientes ejemplos.

Actividad resuelta

- *Dado el siguiente grafo, escribe su matriz de adyacencia.*



- *¿Cuál será la dimensión de nuestra matriz?*

Debe ser una matriz cuadrada de dimensión 5x5, ya que tenemos 5 vértices.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

- *¿Qué tipo de grafo es?*

Como es un grafo no dirigido, nuestra matriz de adyacencia será, por lo general (no siempre), una matriz cuadrada booleana (sus elementos solo pueden ser los dígitos 0 y 1). Escribiremos el dígito 1 en la posición a_{ij} si los vértices i y j son adyacentes.

Por ser un grafo no dirigido, se trata de una matriz simétrica, donde $a_{ij} = a_{ji}$. En caso de que dos vértices sean adyacentes por dos o más aristas, el dígito que ocupa la posición referente a esos vértices será el número de aristas que los conectan.

- *Buscamos los dígitos correspondientes a cada elemento*

Para conocer el dígito correspondiente a cada elemento nos preguntamos, por cada elemento:

Para el a_{11}: ¿Existe alguna arista que conecte el vértice 1 con el vértice 1, **en este sentido**?

La respuesta es no, por lo que escribimos el dígito 0.

Para el a_{14}: ¿Existe alguna arista que conecte el vértice 1 con el vértice 4, **en este sentido**?

La respuesta es sí. Hay 1 arista que satisface esta conexión. Por lo tanto, $a_{14} = 1$.

Como A sólo está relacionado con C y con D, ponemos un 1 en la primera fila, tercera columna, y en la primera fila, cuarta columna. Y ponemos un 0 en el resto de las posiciones de la primera fila:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Como B está relacionado con C y con D, ponemos un 1 en la segunda fila, tercera columna, y en la segunda fila, cuarta columna. Y 0 en el resto de la segunda fila:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Escribimos los elementos simétricos a los ya obtenidos:

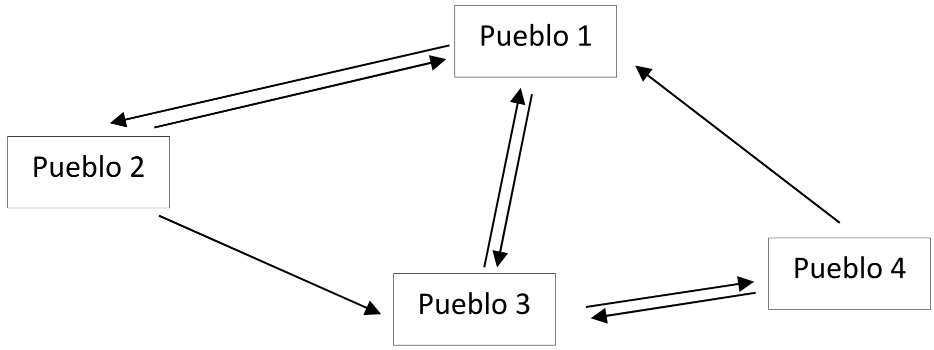
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Y así con cada vértice.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Actividad resuelta

- *Escribe la matriz de adyacencia del siguiente grafo:*



- *¿Cuál será la dimensión de nuestra matriz?*

Debe ser una matriz cuadrada de orden 4, ya que tenemos 4 pueblos.

- *¿Qué tipo de grafo es?*

Como es un grafo dirigido, debemos tener en cuenta el sentido de la relación. Hacemos notar que la existencia de una relación en el sentido $i \to j$ no implica una relación en el sentido opuesto. Por lo que, por lo general, una matriz de adyacencia asociada a un grafo dirigido no será simétrica.

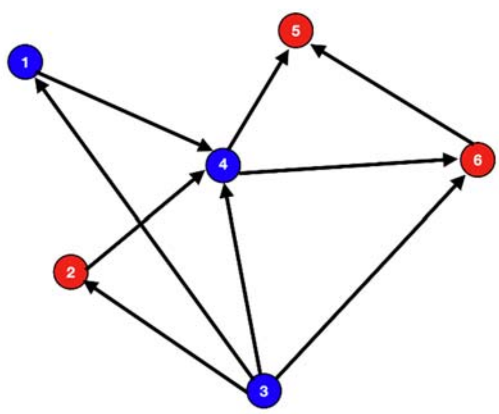
- *La matriz de adyacencia es:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que, en efecto, no es simétrica.

Actividad resuelta

- *En mi ciudad se están celebrando algunas fiestas locales. Para ello, el Ayuntamiento ha reservado tres de los seis parques de la ciudad para la celebración de dichas fiestas. Todos los parques de la ciudad están conectados entre sí a través de una red de caminos. Los parques reservados están representados en rojo.*



Podemos apoyarnos de una matriz de adyacencia para conocer las conexiones entre los diferentes parques. Vamos a construir la matriz de adyacencia siguiendo los siguientes pasos.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

- *¿Cuál será la dimensión de nuestra matriz?*
  Como hay 6 parques (que son justamente los 6 vértices del grafo) vamos a construir una **matriz cuadrada de orden 6**.
  Por tanto, llamando A a nuestra matriz de adyacencia, tenemos:

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

  Recomendación: a la hora de construir la matriz de adyacencia resulta útil escribir en cada fila y columna el nombre de cada vértice, en nuestro caso, como los hemos enumerado del 1 al 6, escribimos los números del 1 al 6.

- *¿Qué tipo de grafo es?*

Ya hemos visto que:

A) Si es un grafo no dirigido, nuestra matriz de adyacencia será, por lo general (no siempre), una matriz cuadrada booleana (sus elementos solo pueden ser los dígitos 0 y 1). Escribiremos el dígito 1 en la posición a_{ij} si los vértices i y j son adyacentes. Por ser un grafo no dirigido, se trata de una matriz simétrica, donde $a_{ij} = a_{ji}$. En caso de que dos vértices sean adyacentes por dos o más aristas, el dígito que ocupa la posición referente a esos vértices será el número de aristas que los conectan.

B) Si es un grafo dirigido, debemos tener en cuenta el sentido de la relación. Hacemos notar que la existencia de una relación en el sentido $i \to j$ no implica una relación en el sentido opuesto. Por lo que, por lo general, una matriz de adyacencia asociada a un grafo dirigido no será simétrica.

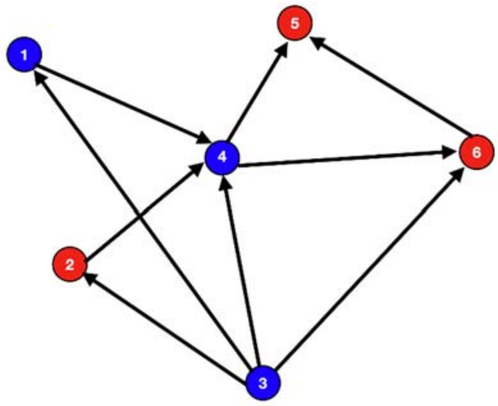
En nuestro caso, se trata de un grafo dirigido. Construimos su matriz de adyacencia:

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \end{array}$$

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Actividades propuestas

9. Completa la matriz de adyacencia del grafo:



1.3.4. Operaciones con matrices

Suma de matrices

Dadas dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, se define la suma de matrices $(A+B)$ como aquella matriz cuyos elementos son la suma de los elementos que ocupan la misma posición:

$$\boldsymbol{C = A + B \ \Rightarrow \ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Sean las matrices A y B de dimensiones $m \times n$ y $n \times p$ (es decir, el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B). Se define el producto $A \cdot B$, y en ese orden, como una matriz C de dimensiones $m \times p$ cuyos elementos son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{array}\right\} \to C = A \cdot B = (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (c_{ij}) \qquad \Bigg| \, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es decir, el elemento c_{11} se obtiene multiplicando escalarmente los elementos de la primera fila de la matriz A por los elementos de la primera columna de la matriz B, y así sucesivamente.

Para que dos matrices puedan multiplicarse debe verificarse que el número de filas de la primera coincida con el número de columnas de la segunda.

Ejemplo:

Veamos un producto de matrices desarrollado paso a paso de dos matrices cuadradas de dimensión 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \to$$

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

$$\rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0 \\ 4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot 4 & 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 1 & 4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 0 \\ 1\cdot 2+0\cdot 3+0\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 2 \\ 47 & 20 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no es conmutativo

Actividad resuelta

- *Seguimos con la actividad anterior. Queremos saber ahora los vuelos posibles de A a C, con o sin trasbordo.*

Ya conoceos los vuelos directos:

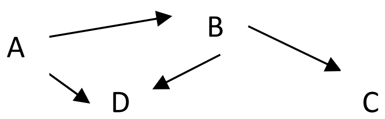
$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vuelos con trasbordo los podemos obtener multiplicando las matrices X1 por X2. Sumando con los vuelos directos obtenemos:

$$X_1 \cdot X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+0+4 & 2+2+0+4 \\ 0+2+2+4 & 0+2+2+4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Actividad resuelta

- *El grafo siguiente nos indica las relaciones de dominio entre cuatro personas:*



- Escribimos su matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos, de nuevo, que está formada por 0 y 1, y que, como el grafo es dirigido, no es simétrica.

Nos indica que A domina a B y a D, y que B domina a C y a D.

- Multiplicamos dicha matriz de adyacencia por sí misma, e interpretamos el resultado:

Autor: Javier Zambrana Aguilar

Revisora: Raquel Hernández

Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

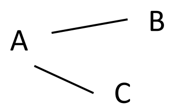
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que ahora A domina a C y D, solicitando ayuda a B, al que domina.

A es el dominante.

Actividad resuelta

- *El grafo siguiente nos indica las personas que están conectadas por WhatsApp.*



- Escribimos su matriz de adyacencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos, de nuevo, que está formada por 0 y 1, y que, como el grafo es NO dirigido, es una matriz simétrica. Nos indica que A está conectado por *WhatsApp* con B y C.

- Multiplicamos dicha matriz de adyacencia por sí misma, e interpretamos el resultado:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

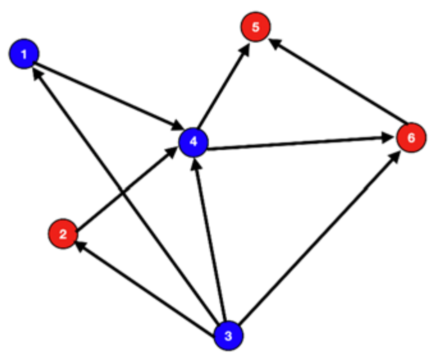
Ahora un WhatsApp de A podría llegar a esa misma persona A por dos caminos distintos (a través de B y de C), pero sólo sus propios WhatsApp.

A la persona B le llegarían sus propios WhatsApp, y los de C.

A la persona C le llegarían sus propios WhatsApp, y los de B.

Actividades propuestas

10. Multiplica por sí misma la matriz de adyacencia del grafo adjunto, e interpreta el resultado:



3. LA FÓRMULA DE EULER

Teorema

En un poliedro convexo, se cumple que el número de caras de dicho poliedro, C más el número de vértices, V, menos el número de aristas, A es siempre igual a 2, es decir:

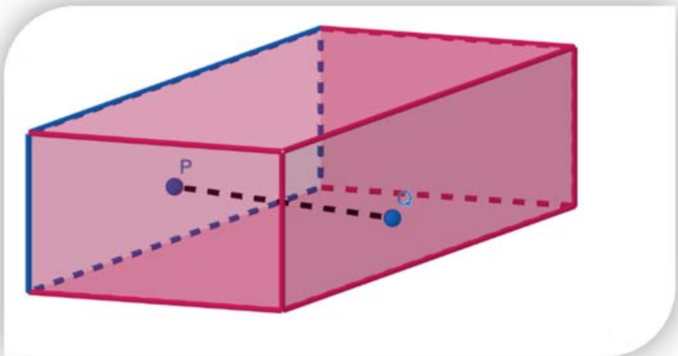
$$C+V-A=2$$

Este teorema ya lo has visto en Geometría de cursos anteriores.

Vamos a demostrar este teorema de una forma muy sencilla. Por simplicidad, lo demostraremos para un cubo, aunque este razonamiento es extrapolable a cualquier otro poliedro convexo.

Antes de comenzar con la demostración, debemos tener muy claro qué es un poliedro convexo.

Un **poliedro convexo** es aquel para el cual dado cualquier par de puntos del mismo, el segmento que los une queda contenido dentro del poliedro.



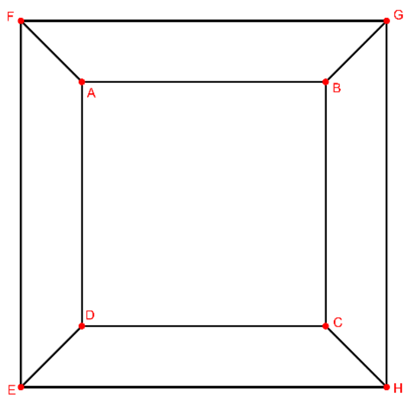
Poliedro convexo

Ahora que ya sabemos lo que es un poliedro convexo, procedemos con la demostración

Demostración

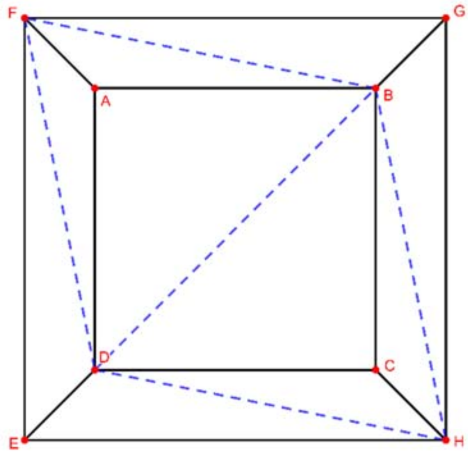
Vamos a considerar, como hemos especificado anteriormente, al cubo, por una cuestión de simplicidad.

Considerado el cubo, vamos a sustraer una de sus caras y vamos a proyectarlo sobre un plano, tal y como se observa en la siguiente imagen.



Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

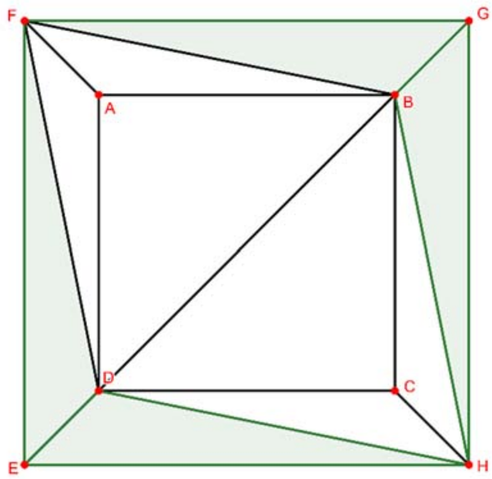
A continuación, vamos a realizar las siguientes triangulaciones:



Realizamos una serie de transformaciones y observamos cómo estas afectan al número de $C+V-A$.

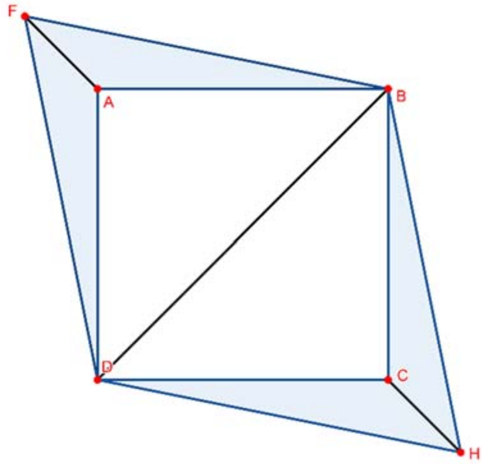
La primera transformación es fruto de la triangulación que ya hemos realizado. De esta forma, si nos fijamos en una sola cara (en el resto ocurre lo mismo), podemos ver cómo hemos añadido una nueva arista (en azul discontinua) y dividido una cara en dos, que es lo mismo que añadir una nueva cara. De esta forma, como la arista que añadimos resta a la cara que sumamos, el número $C+V-A$ no se ve alterado.

Continuamos realizando una segunda transformación. Vamos a eliminar aquellas caras que tengan una arista exterior (aquellas caras marcadas en verde):



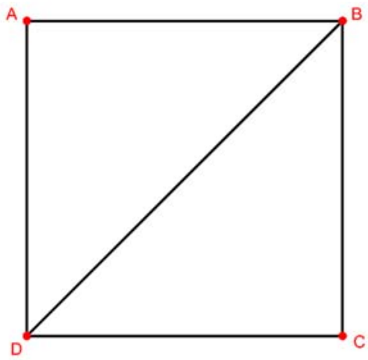
De esta forma, podemos notar como al eliminar dicha cara estamos eliminando a su vez una arista. Por lo tanto, $C+V-A$ no ha sufrido ninguna alteración.

Vamos a realizar la última transformación. Ahora vamos a eliminar aquellas caras que tengan dos aristas externas (las señaladas en azul en la siguiente imagen).



De esta forma, fíjate que estamos eliminando un total de 4 caras, 6 aristas y dos vértices, de forma que el número $C+V-A$ sigue igual, sin alteraciones, puesto que observa cómo caras y vértices suman y aristas restan: $-4-2-(-6)=0$.

Por tanto, observa la figura que nos queda:



Que tiene dos caras, cuatro vértices y 5 aristas.

Pero… ¡Recuerda que al principio de la demostración extraíamos una cara!

Esa cara tenía 4 vértices y 4 aristas; de forma que $C+V-A=(2+1)+(4+4)-(5+4)=3+8-9=2$

Quedando demostrado que $C+V-A=2$.

Extrapolación del Teorema de Euler a grafos planos

En un grafo plano, se verifica el *Teorema de Euler* (o *Fórmula de Euler*, según el autor); verificándose que en un grafo plano y conexo, el número de caras, más el de vértices, menos el número de aristas es siempre 2: $C+|V|-|E|=2$

Actividades propuestas

11. De un determinado poliedro convexo sabemos que su número de caras es 10 y su número de aristas es 16. Calcula el número de vértices de dicho poliedro.

12. Sabiendo que el número de caras de un determinado poliedro convexo es 6 y el número de aristas del mismo es 12, ¿cuál es el número de vértices de dicho poliedro? ¿de qué poliedro se trata?

4. GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

4.1. Grafos eulerianos. El problema de los siete puentes de Königsberg.

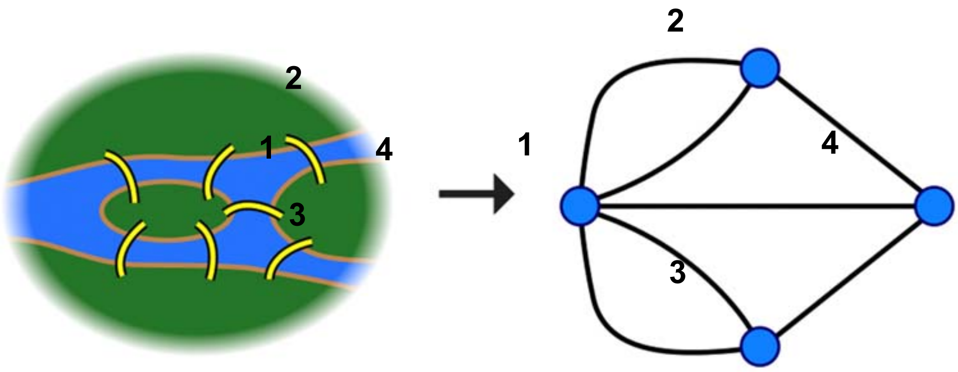
Euler es considerado como el precursor de la Teoría de Grafos, debido a sus numerosas aportaciones a esta teoría. Una de las más importantes fue ofrecer solución a un problema contextualizado en la Prusia del siglo XVIII, cuando Euler tenía 34 años.

Durante la estancia de Euler en Königsberg, se propagó el conocido como *problema de los siete puentes de Königsberg*, que se popularizó en modo de juego entre las mentes matemáticas de la época. Podemos resumir el problema a través del siguiente enunciado:

Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

Fue Euler en 1763 quien ofreció solución a dicho problema, con la publicación de «*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*». Para dar solución, Euler se basó en el siguiente planteamiento:

Donde consideró el grafo de la última figura, en el que los vértices representan las diferentes regiones que separan los puentes (aristas):



En su solución, *Euler* argumentó que, para cualquier camino que consideremos, se deberá cumplir que el vértice intermedio de dicho camino debe estar conectado a dos aristas (si llegamos por medio de una determinada arista a un vértice concreto, la única forma de *salir* de dicho vértice es a través de una arista diferente), siendo el punto de inicio (y de final, claro) los únicos que puedan tener un número impar de aristas.

Sin embargo, es fácil notar que esto no ocurre en nuestro grafo, cuyos vértices tienen todos grado impar (3 de ellos tienen grado 3 y uno de ellos, el restante, tiene grado 5). Luego… sería imposible encontrar un camino que satisfaga las condiciones planteadas en el problema.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Ciclo euleriano: Recibe el nombre de *ciclo euleriano* (nombrado así en honor a *Leonhard Euler),* aquel ciclo o circuito que recorre todas las aristas una única vez del grafo y regresa al punto inicial.

Un ciclo como éste era el que se pretendía buscar en el problema de los siete puentes de Königsberg.

Sea un grafo no dirigido y conexo, se verifica que:

- Si tiene como máximo dos vértices impares, y el resto tienen grado par, el grafo tomado en consideración contiene un camino euleriano.
- Si el grado de cada vértice es par, el grafo tomado en consideración contiene un ciclo euleriano (y por tanto es un grafo euleriano).

Dado un grafo dirigido conexo, decimos que es euleriano si el grado interno de sus vértices es igual al grado externo.

Definimos como **grafo euleriano** al grafo que contiene un **ciclo euleriano**.

4.2. Grafos hamiltonianos

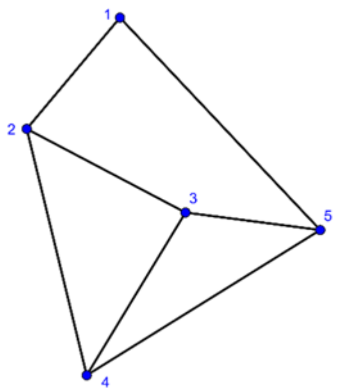
Grafo hamiltoniano: Es aquel grafo que contiene un circuito hamiltoniano. Recibe dicho nombre en honor al matemático, físico y astrónomo irlandés *William R. Hamilton*.

Llamamos **circuito hamiltoniano** al ciclo simple (solo pasa una vez por cada vértice) que recorre todos los vértices del grafo.

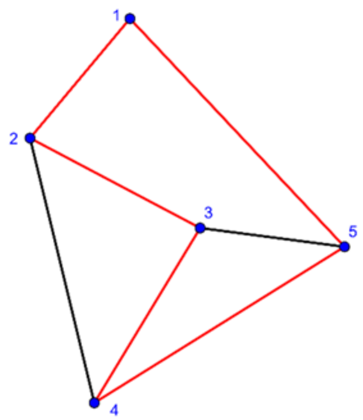
Ejemplo:

Fíjate como el siguiente grafo, G, contiene un ciclo hamiltoniano, que se ha señalado en rojo en la figura de al lado.

$\gamma(1,2,3,5,1)$



8



Por tanto, podemos afirmar que el grafo G es un grafo hamiltoniano.

Existe el *Teorema de Dirac* para conocer si un grafo es hamiltoniano o no. Es un teorema que no vamos a estudiar a fondo, pero si vamos a enunciar. Debe utilizarse con mucho cuidado y siempre en un grafo conexo.

Teorema de Dirac

Sea $G(V,E)$ un **grafo conexo** formado por V vértices y E aristas, decimos que G es **hamiltoniano** sí y sólo sí se verifica que $Gr(v) \geq \frac{|V|}{2},\ \forall v \in V$ (para todo v perteneciente a V, o sea, para cada vértice).

4.3. Relación entre grafos eulerianos y hamiltonianos

Como te has podido dar cuenta, los grafos eulerianos y hamiltonianos parecen estar muy relacionados; sin embargo, la relación entre eulerianos y hamiltonianos dependerá del grafo estudiado, no todos los grafos eulerianos son hamiltonianos, ni al revés.

Actividades propuestas

13. Como ejercicio te proponemos completar la siguiente tabla, incluyendo en cada casilla un ejemplo de un grafo que cumpla con cada condición, para que compruebes por tu propia cuenta como no existe ninguna relación aparente.

	EULERIANO	NO EULERIANO
HAMILTONIANO		
NO HAMILTONIANO		

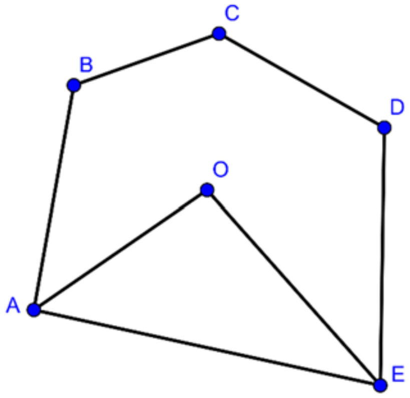
Actividades resueltas

- *Un cartero ha repartido las cartas que llevaba en su saca desde la central de correos, O, a los domicilios A, B, C, D y E, que se comunican por la siguiente red de calles. El recorrido que ha seguido el cartero es el que está descrito en el grafo adjunto.*

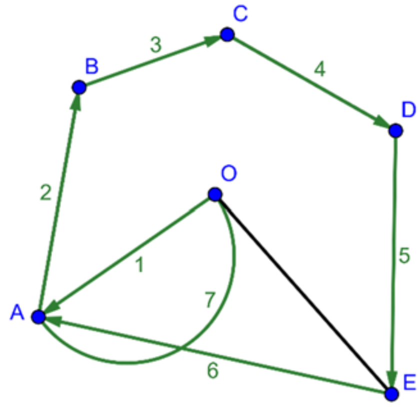
a) ¿Existe algún circuito que pueda seguir el cartero para entregar todas las cartas pasando una única vez por una misma calle? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Es hamiltoniano el grafo descrito por la trayectoria que sigue el cartero?

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia



A: *Red de calles entre la central de Correos, O, y las viviendas A,B,C,D,E*



B: *Recorrido que sigue el cartero*

Los números de cada arco indican el orden

Solución:

Nos preguntan por la existencia de un circuito formado por todas las calles de forma que solo pasemos una vez por cada una de ellas. Que sea un circuito implica que debamos finalizar en la central de Correos, por la propia definición de circuito.

Vemos que lo que nos piden en realidad es determinar la existencia de un circuito euleriano en el grafo **A**. Como podemos ver, el grafo tiene un total de seis vértices: todos ellos con un grado par, excepto los vértices A y E, que tienen un grado impar. Sin embargo, como son exactamente dos los vértices de grado impar, podemos determinar que sí existe un ciclo euleriano, en este caso:

En nuestro caso, el cartero podría seguir el camino $\gamma(O,A,B,C,D,E,O)$ o también el camino $\gamma_2(O,E,D,C,B,A,O)$.

b) Sí, debido a la existencia del circuito $\gamma(O,A,B,C,D,E,O)$, pues recorre todos los vértices del grafo regresando al vértice de inicio.

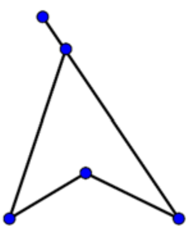
Actividades propuestas

14. Dibuja un grafo euleriano y hamiltoniano. Indica el grado de cada vértice.

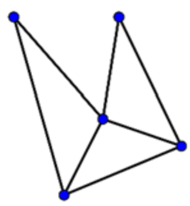
15. ¿Puede un grafo contener un ciclo hamiltoniano y no ser conexo al mismo tiempo? ¿Y puede no ser conexo pero contener un camino hamiltoniano?

16. Clasifica los siguientes grafos en eulerianos y hamiltonianos, planos y no planos, dirigidos o no dirigidos y en conexos o no conexos.

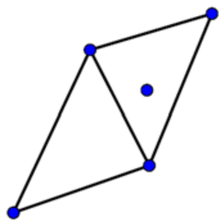
1



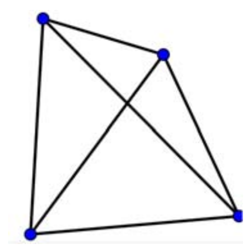
2



3



4



Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

5. COLORACIÓN DE GRAFOS. ETIQUETADO DE GRAFOS.

La coloración de grafos es una **técnica de etiquetado** que se lleva estudiando desde principios del año 1970. En *coloración de grafos* se define a S como un conjunto de números naturales asociados a una etiqueta que llamamos "*color*". A S se le suele llamar *paleta de colores*.

5.1. Coloración de vértices

De esta forma, al considerarse el grafo G y la paleta de colores S, llamamos **coloración en vértices de** G **con *(colores de; paleta de colores de)*** S a la correspondencia que asigna a cada vértice de G un color de S, por la cual vértices adyacentes no pueden recibir el mismo color. Formalmente, a la coloración de G con S la escribiremos como $c: V \longrightarrow S$. Denotamos por $c(v)$, con $v \in V$ al valor que asocia un color a v.

Una coloración en la que intervienen k colores se lee k-coloración de vértices de G. Por lo que un grafo que presente una k-coloración de vértices de G se entenderá por k-coloreable.

Sea $\chi(G)$ el número mínimo de colores necesarios para colear G; a este valor se le llama **número cromático**.

En Teoría de Grafos, y más concretamente en *coloración de grafos* se buscan procedimientos eficientes, económicos y sistemáticos; en nuestro caso, con la finalidad de colorear nuestro grafo siguiendo un método eficaz y que nos asegure usar el mínimo número de colores. Para lograrlo, existen diferentes formas o métodos. Vamos a estudiar en nuestro caso, el *método de coloración austero*.

Método de coloración austero **(greedy algorithm, en inglés)**

Para colorear un grafo $G(V,E)$, tal que $V=\{v_1,v_2,v_3,\ldots\}$ por el método austero, utilizando la paleta de colores $S=\{1,2,3,\ldots\}$ seguiremos los siguientes pasos.

PASO 1	Este es el paso más importante, pues por lo general, a ordenaciones distintas obtenemos coloraciones distintas. En este paso ordenaremos los vértices del grafo. Se pueden seguir diferentes criterios para lograr dicha ordenación.
PASO 2	Asignamos el primer color de la paleta al primer vértice. O sea: $c(v_1)=1$.
PASO 3	Para colorear el siguiente vértice, v_2 nos debemos fijar en si es vecino de v_1 o no. En caso afirmativo asignamos el siguiente color, 2, en caso contrario continuamos coloreando con el primer color.
PASO 4	Para colorear el tercer vértice, comprobaremos si es o no vecino de v_1 y/o de v_2, y no podremos utilizar los colores que hayamos usado con sus vecinos.

…

PASO K	Para colorear v_k tachamos en la paleta de colores aquellos utilizados por sus vecinos, y usamos el primero disponible luego de excluir el resto.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Por ejemplo:

- Vamos a colorear el siguiente grafo, que une las capitales de las provincias de Andalucía.

Ordenamos los vértices por grado decreciente:

VÉRTICE	Huelva	Cádiz	Málaga	Sevilla	Córdoba	Granada	Jaén	Almería
GRADO	2	3	4	4	4	4	2	1

Aquellos vértices con igual grado serán ordenados por orden alfabético, como sigue:

Córdoba, Granada, Málaga, Sevilla, Cádiz, Huelva, Jaén, Almería

Para asignar los colores, vamos a armar la siguiente tabla:

VÉRTICE	Córdoba	Granada	Málaga	Sevilla	Cádiz	Huelva	Jaén	Almería
COLOR	1	2	3	2	1	3	3	1

Le asignamos el primer color por ser el primer vértice por colorear.

Observamos que Granada es vecina de Córdoba, por lo que automáticamente, en nuestra paleta se elimina el color 1, coloreándose el segundo vértice del siguiente color disponible, o sea, el 2.

Observamos que Málaga es vecina tanto de Córdoba como de Granada (las dos anteriores), por lo que los colores 1 y 2 (usados por Córdoba y Granada, respectivamente) se excluyen de la paleta. Se usaría por tanto el color 3.

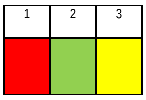
Sevilla es vecina de Córdoba y Málaga. En la paleta suprimimos por tanto los colores 1 y 3. Usamos el primero disponible luego de excluir a 1 y 3. Le correspondería por tanto, el color 2.

Cádiz es vecina de Sevilla y Málaga, o sea, no podemos utilizar los colores 2 y 3. Le asignamos por tanto, el primero disponible: 1.

Y así con el resto…

A continuación definimos nuestra paleta de colores. Solo necesitamos definir 3 colores para colorear nuestro grafo.

$S = \{1,2,3\}$ con



Una vez realizada la correspondencia y la definición de la paleta, procedemos a colorear el grafo.

Al usar 3 colores, diremos que este grafo es 3-coloreable.

Hagamos la coloración que sea, evidenciaremos que son necesarios como mínimo 3 colores, por lo que el número cromático de G, $\chi(G)$ es 3.

Importante: Como se ha mencionado anteriormente, a ordenaciones distintas de vértices obtenemos, por lo general, coloraciones también distintas. Por lo tanto, se debe indicar el criterio seguido a la hora de ordenar los vértices. En nuestro caso, los hemos ordenado por orden decreciente de grado. La forma aquí seguida para ordenar los vértices se conoce también como *Algoritmo de Welsh y Powel*. La ordenación inversa a la de Welsh y Powel se conoce como *Algoritmo de Matula, Marble e Isaacson*. Existen otros algoritmos más.

Actividades propuestas

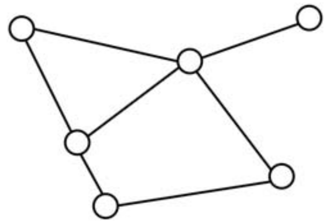
17. Realiza un grafo en el que unas las comunidades autónomas españolas que sean vecinas entre sí y realiza una coloración de sus vértices utilizando:

a) El algoritmo de Welsh y Powel
b) El algoritmo de Matula, Marble e Isaacson.

Utiliza el mapa adjunto.

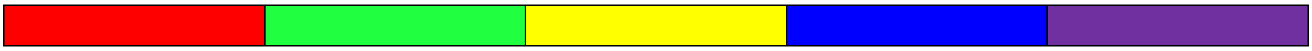
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

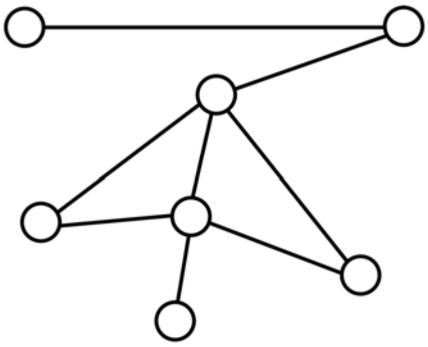
18. Colorea el siguiente grafo por el algoritmo de Welsh y Powel.



19. Colorea los vértices del siguiente grafo por orden creciente de grado utilizando la siguiente paleta de colores.

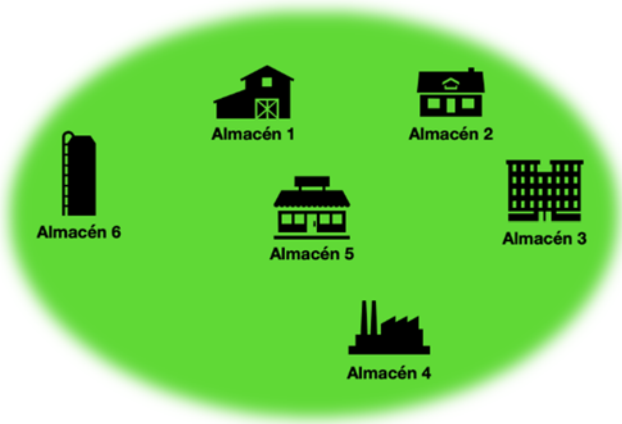
Paleta de colores





20. Una determinada compañía de telefonía móvil ofrece sus servicios a 5 localidades cercanas, de forma que estas están interconectadas entre sí por la misma compañía. Dibuja el grafo correspondiente a esta situación y coloréalo utilizando la paleta de colores del ejercicio 16.

21. Una empresa de mensajería dispone de 6 almacenes repartidos en una misma provincia, tal y como se muestra en la ilustración. Sabiendo que los almacenes se encuentran conectados informáticamente entre sí de la forma 1-2, 1-3, 1-6; 3-4 y 5-6, representa el grafo correspondiente y colorea sus vértices utilizando la paleta de colores del ejercicio 16. Utiliza como criterio para ordenar los vértices la propia numeración de los almacenes y el algoritmo de Matula, Marble e Isaacson.



a) ¿Qué representa cada color en el grafo?

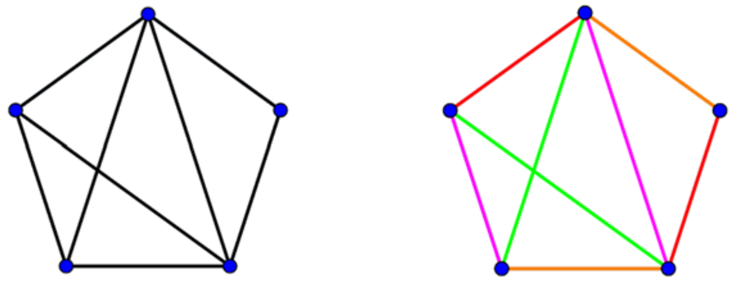
5.2. Coloración de aristas

Llamamos **coloración propia** en aristas de $G(V,E)$ a la aplicación $c:E\longrightarrow S$, por la cual a cada arista del grafo G le hacemos corresponder un único color de la paleta de colores S, de tal forma que dados $a,b\in E$ tal que a y b sean coincidentes en un mismo vértice, se tiene $c(a)\neq c(b)$.

Importante:

Se llama **índice cromático**, y se representa por $\chi'(G)$ al número mínimo de colores necesarios para realizar una coloración propia en aristas de $G(V,E)$.

Por ejemplo, tómese en consideración el siguiente grafo.



Como se puede observar en la coloración realizada a la derecha, las aristas que coinciden en un mismo vértice son de distinto color. En esta coloración se han utilizado un total de cuatro colores diferentes, que además coincide con el grado máximo de vértices del grafo (ahora veremos una relación entre el número mínimo de colores necesarios y el mayor grado de vértices del grafo).

Teorema de König (1916)

Sea G un grafo bipartito, tal que el grado máximo de vértices de G es $\Delta(G)$, entonces $\chi'(G)=\Delta(G)$.

Actividades propuestas

22. Comprueba el Teorema de König para el grafo completo $k_{3,3}$.

23. Construye un grafo bipartito cualquiera y comprueba que se cumple el Teorema de König.

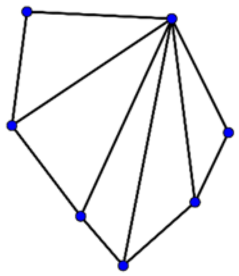
Teorema

Para cualquier grafo G no trivial, se verifica que el índice cromático es un valor natural, $\chi'(G)\in\mathbb{N}$ comprendido entre $\Delta(G)$ y $\Delta(G)+1$. O sea: $\Delta(G)\leq\chi'(G)\leq\Delta(G)+1$.

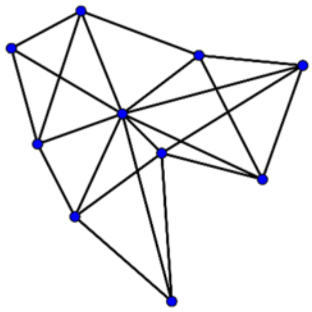
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Actividades propuestas

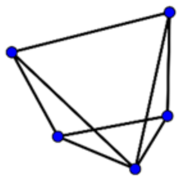
24. Realizar una estimación del índice cromático del siguiente grafo.



25. Realizar una estimación del índice cromático del siguiente grafo.

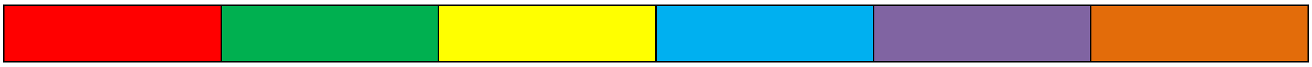


26. Halla el índice cromático del siguiente grafo.



27. Realiza una coloración propia del grafo del ejercicio anterior utilizando la siguiente paleta de colores.

Paleta de colores



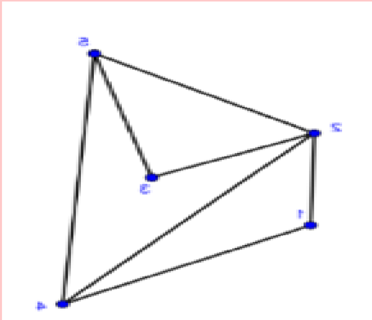
CURIOSIDADES. REVISTA

LA MATRIZ DE ADYACENCIA

En 2º de Bachillerato aprenderás lo que son las matrices y su manejo. Cuando las estudies, podrás notar que las matrices están estrechamente relacionadas con los grafos.

Sin entrar en demasiado rigor, y con el objetivo de presentarte una idea intuitiva, vamos a definir una matriz como un conjunto de números reales que se disponen en filas y columnas. Su definición es en realidad algo más compleja, pero esta nos puede servir.

Ahora vamos a considerar el grafo de la derecha



Como vemos, está formado por un total de 5 vértices que se relacionan entre sí por un total de 7 aristas. Si ahora hacemos parejas de vértices (por ejemplo la pareja $(1,2)$) podemos asignar a cada pareja un valor en función de la existencia o no de una conexión entre ellos, o sea, una arista que los una (generalmente se asigna el 0, si no existe esa conexión; y el 1, si sí existe).

Ahora, vamos a considerar el grafo de la derecha.

Y esta información la podemos organizar fácilmente en una matriz, resultando fácil de ver y analizar.

De esta forma, podemos hacer la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5
1	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
2	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
3	NO	SÍ	NO	NO	SÍ
4	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
5	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Donde hemos escrito «SÍ» en caso de que ambos vértices estén conectados por una arista, y «NO» en caso contrario.

Con ayuda de esta tabla, vamos a asignar los valores 0 y 1 según correspondan, en función del criterio establecido en el cuarto párrafo.

Tras realizar dicha asignación, podemos armar la siguiente matriz:

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

La matriz de adyacencia resulta muy útil, pues de forma abreviada podemos extraer conclusiones sobre las relaciones entre los vértices del grafo. En este caso, la relación más notable puede ser que la diagonal principal de la matriz está compuesta en su totalidad por ceros, lo que indica la no existencia de ningún bucle.

INTERPRETACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA

La matriz de adyacencia siempre será una matriz cuadrada (con el mismo número de filas que de columnas; y es este número, el de filas y columnas, el número de vértices del grafo). En grafos dirigidos, podemos notar como el valor que se asigne a una misma pareja puede cambiar en función del orden en el que consideremos a los vértices.

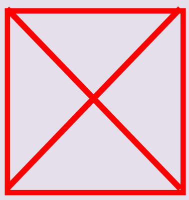
Por otro lado, para leer la relación que existe en un determinado entre los vértices 1 y 4, por ejemplo, bastará con dirigirse a la fila 1 y columna 4 (y viceversa; si es dirigido, sí importa el orden, no es lo mismo la fila 1 y columna 4 que la fila 4 y columna 1) e interpretar el resultado.

Las matrices de adyacencia también resultan útiles en el estudio de grafos ponderados.

EL IMPOSIBLE '*TREND*' DE TIKTOK

TikTok es actualmente la red social por excelencia entre el mundo adolescente, con récord de descargas.

En los últimos meses se ha difundido a través de esta red social un *reto* que se ha llegado a viralizar. Varios usuarios retaban de esta forma a sus seguidores a intentar dibujar la siguiente figura sin levantar el lápiz del papel (o el dedo de la pantalla).



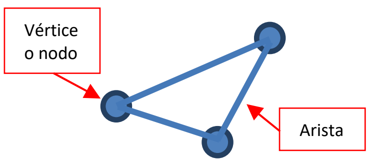
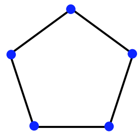
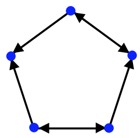
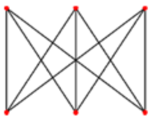
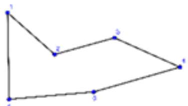
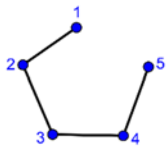
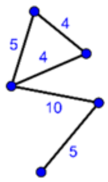
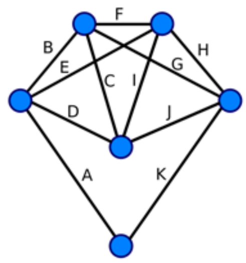
Las redes se llenaron de millares de usuarios que trataban de dar solución al problema, y solo eran unos pocos los que acertaban en la respuesta: *es matemáticamente imposible*. Sin embargo, aquellos que contestaban bien argumentaban: "*lo dijo mi profesora de Matemáticas cuando le pregunté*"; ya… pero, ¿por qué?

La respuesta la tiene la Teoría de Grafos. Estamos buscando recorrer todas las aristas desde un vértice sin pasar dos veces por una misma arista y regresar al vértice inicial… *¿te suena de algo?* ¡Estamos buscando un ciclo euleriano! Sin embargo, debes notar cómo todos los vértices del grafo tienen grado impar, concretamente, grado 3. Recuerda que para que un grafo contenga al menos un ciclo euleriano el número de vértices con grado impar no debe exceder de 2, y el resto debe tener grado par.

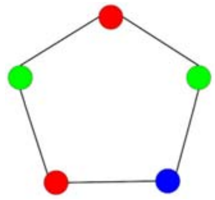
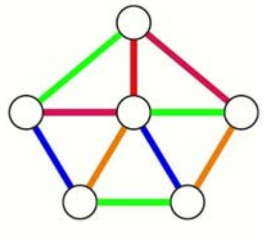
Como esto no sucede, podemos decir que el grafo no contiene ningún ciclo euleriano y por tanto, la respuesta es: *no se puede hacer*.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

RESUMEN

Definición de grafo	Un grafo establece una relación entre unos vértices, que se denotan por V y unas aristas, E. ***Nomenclatura***: $G(V,E)$	
Tipos de grafos	Existen dos tipos de grafos (principalmente): ➢ **Grafos dirigidos** ➢ **Grafos no dirigidos** Un grafo puede ser también plano (o no plano) y conexo (o no conexo). También encontramos otros tipos de grafos como los *grafos ponderados*, a cuyas aristas se les asocia un valor que llamamos *peso* o los *árboles*.	 Grafo no dirigido  Grafo dirigido  Grafo no plano  Grafo plano  Árbol  Grafo ponderado
Caminos y ciclos	Un **camino** es la *ruta* que debemos seguir para llegar desde un vértice inicial a un vértice extremo. Un **ciclo** es aquel camino que regresa al vértice de inicio. En <u>GRAFOS PONDERADOS</u>: Se define como **coste o peso de un camino** a la suma de los pesos de las aristas que unen los vértices que forman el camino.	En el árbol de arriba, un camino puede ser $\gamma(1,5)=\gamma(1,2,3,4,5)$, y evidentemente, no tiene ciclos (porque es un árbol). Un ciclo en el grafo plano de arriba puede ser $\gamma(1,1)=\gamma(1,2,3,4,5,6,1)$.
Fórmula de Euler	$C+V-A=2; \quad C+\|V\|-\|E\|=2$	
Grafos eulerianos y hamiltonianos	• Un **circuito o ciclo euleriano** es aquel camino que recorre todas las aristas de un grafo y regresa al vértice de partida. Todo grafo que contenga un ciclo euleriano se dice que es un grafo euleriano. • Un **circuito o ciclo hamiltoniano** es aquel camino que recorre todos los vértices de un grafo y regresa al vértice de partida. Todo grafo que contenga un ciclo hamiltoniano se dice que es un grafo hamiltoniano.	Grafo euleriano y hamiltoniano

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

Coloración de grafos	✓ La **coloración de grafos** es una técnica de etiquetado. ✓ Es una función que asigna un color de una paleta de colores previamente definida a unos vértices (si es coloración en vértices) o a una aristas (si es coloración en aristas). ✓ Diferenciamos **dos tipos de coloraciones**: o COLORACIÓN EN VÉRTICES o COLORACIÓN EN ARISTAS	 Coloración en vértices y en aristas del grafo completo k_5

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

La Teoría de Grafos en la vida cotidiana

1. Representa mediante el grafo adecuado la siguiente situación y contesta razonadamente.

Situación: *Anabel, María, Lucas, Iván y Sergio son cinco estudiantes de intercambio que mantienen contacto unos con otros de la siguiente forma: Anabel y María pueden mantener contacto, al igual que María con Sergio y con Lucas. Iván en cambio, solo mantiene contacto con Anabel.*

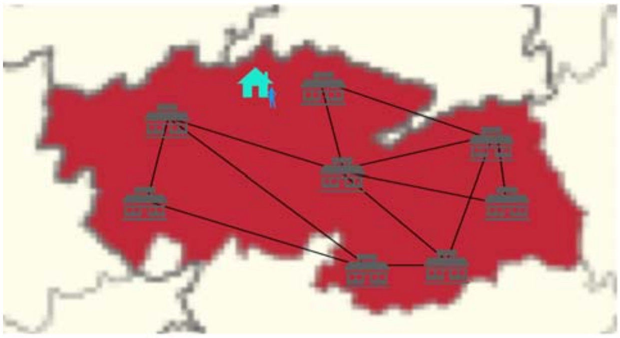
a) ¿Puede un mensaje de Anabel llegar a Lucas si se permite el reenvío? ¿Y si no se permite?

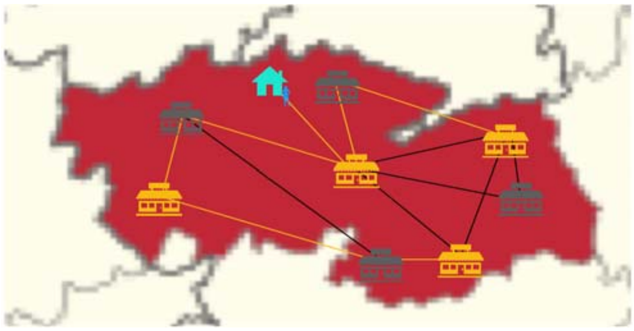
b) ¿Puede un mensaje de Iván llegar a todo el grupo de estudiantes si se permite el reenvío?

c) ¿Qué estudiante tiene más contactos directos?

2. Contesta solo observando las ilustraciones: una reconocida marca de ropa deportiva dispone de un total de 8 establecimientos repartidos por toda la provincia de Toledo como se muestra en la ilustración. Cuando un cliente compra un producto on-line, se habilitan los establecimientos donde ese producto se encuentra en *stock*, y se le asigna el reparto del producto a los establecimientos que se encuentren en contacto directo con el domicilio del cliente.

Si Lucía, una cliente habitual de dicha marca, realiza su compra on-line y el sistema informático web habilita 4 establecimientos (los 4 que están coloreados en la segunda ilustración), ¿cuántos de ellos pueden efectuar la entrega?



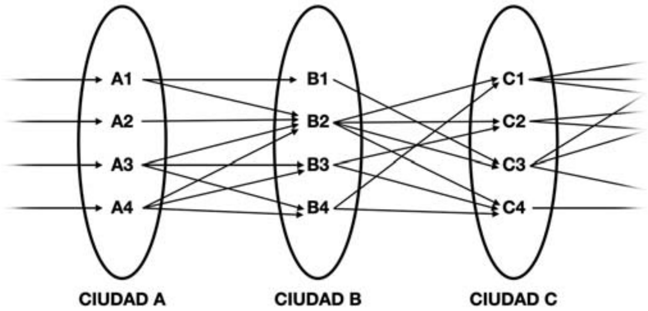


Suponiendo ahora que el establecimiento que ocupa la posición central no dispone de ese producto, ¿algún establecimiento podría efectuar el envío? En caso afirmativo, indica cuál o cuáles.

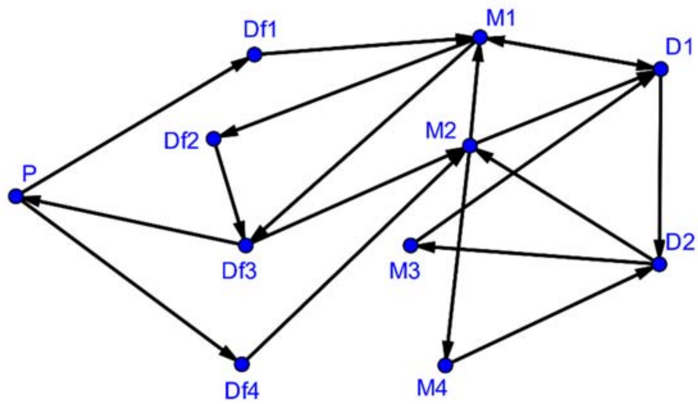
3. Durante el transcurso de un partido de baloncesto, se toma la siguiente fotografía. En ese momento, es Francisco quien lleva la pelota. Sabiendo que solo puede tirar a canasta Daniela y que el resto de jugadores solo pueden hacer los pases ahí señalados, ¿de cuántas formas distintas puede llegar el balón a Daniela? ¿Cuál de ellas es más económica? (Entendiéndose por económica aquella que emplee un menor número de pases).

4. Una cierta compañía de viajes dispone de tres centrales distintas, A, B y C, cada uno en tres ciudades distintas (también A, B y C), de tal forma que las centrales se encuentran conectadas entre sí como se muestra en el grafo. ¿Cuál de ellas recibe menos vuelos? ¿Cuál emite más vuelos? ¿De cuántas formas distintas puede llegar un viajero que se encuentre en la central B2 a una central de la ciudad C?

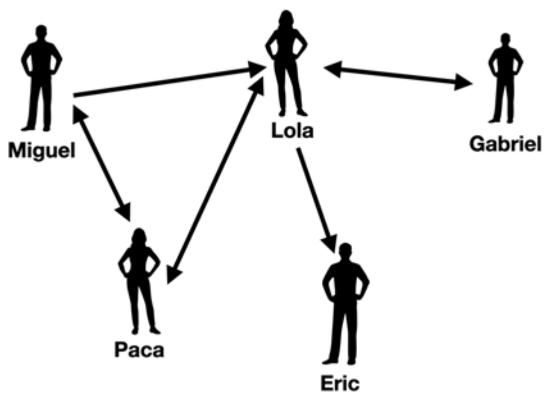
Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia



5. El siguiente grafo muestra la jugada seguida por el Arbustos FC, mostrando los pases que se han dado entre los 11 jugadores. ¿Cuál es el grado de recepción de cada delantero? ¿Qué indica dicho valor? ¿Cuál es el grado de emisión del portero? ¿Qué indica dicho valor? ¿Cuál es el jugador que más pases ha efectuado? ¿Se corresponde con el vértice de mayor grado de emisión?



6. Miguel, Paca, Eric, Gabriel y Lola son 5 amigos que se encuentran conectados entre sí a través de una app de mensajería, de la forma en la que se muestra en el grafo. Indica el grado de emisión y recepción de cada uno e indica a qué se refiere dicho valor.

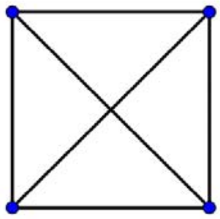
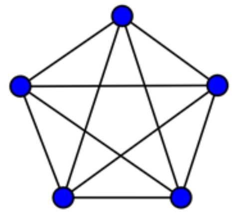
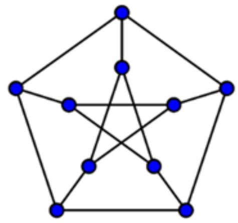
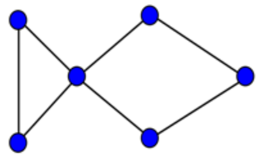


7. Volviendo a la situación del ejercicio anterior, ¿Puede Eric recibir un mensaje de Paca directamente? ¿Y de forma indirecta si se permite el reenvío del mensaje?

8. ¿Qué grafos k_n tienen todos sus vértices grado par? Justifica tu respuesta.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

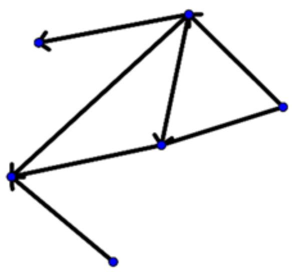
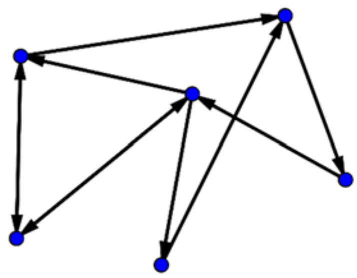
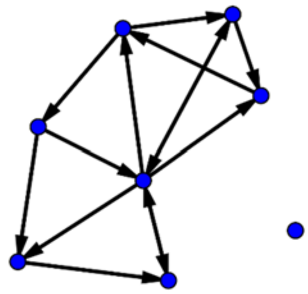
9. Define qué es un grafo plano y clasifica los siguientes grafos en planos y no planos.

a)  b)  c)  d) 

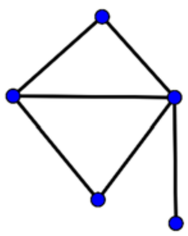
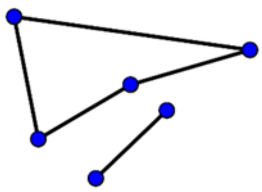
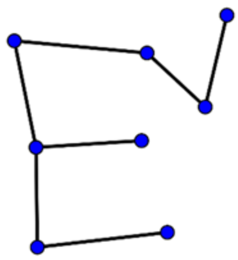
10. Dibuja un grafo que satisfaga las siguientes condiciones.

- Tenga 6 vértices.
- Hay dos vértices aislados.
- Los cuatro vértices restantes tienen la mitad grado par.
- No sea plano.
- El grado presenta un bucle en uno de los vértices aislados.

11. Indica el grado de recepción y emisión de cada vértice en cada uno de los grafos siguientes:

a)  b)  c) 

12. ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos? Justifica tu respuesta.

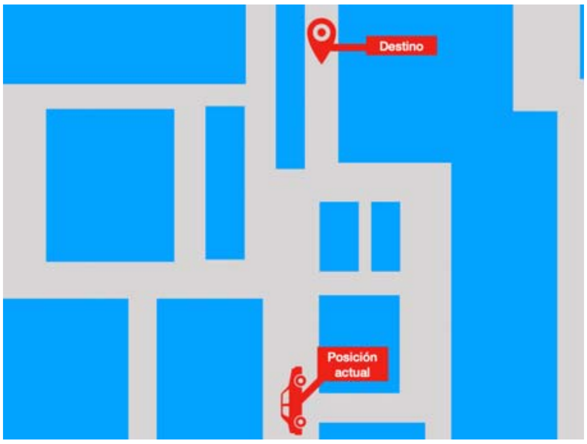
a)  b)  c) 

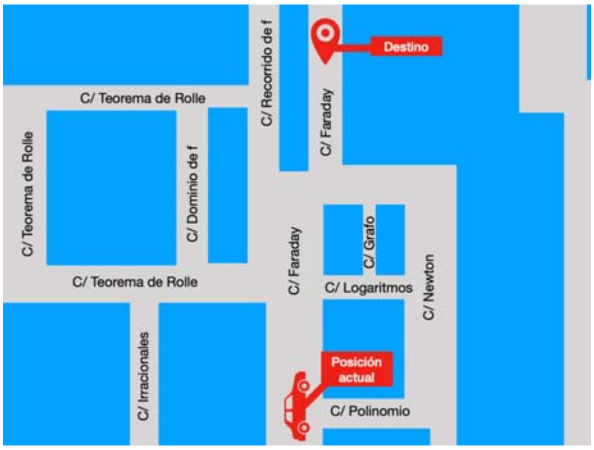
13. Enumera los vértices en los grafos del ejercicio anterior y señala un camino y un ciclo cuando sea posible en cada uno de ellos.

14. Silvia se encuentra en la estación del metro de Madrid, y le entregan un mapa como el siguiente. Su cometido es llegar a la estación 4. Escribe todos los caminos posibles que puede seguir Silvia. Si más tarde tiene que regresar desde la estación 4 a la estación 1, ¿hay algún ciclo que pueda seguir? En caso afirmativo, ofrecer un ejemplo.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

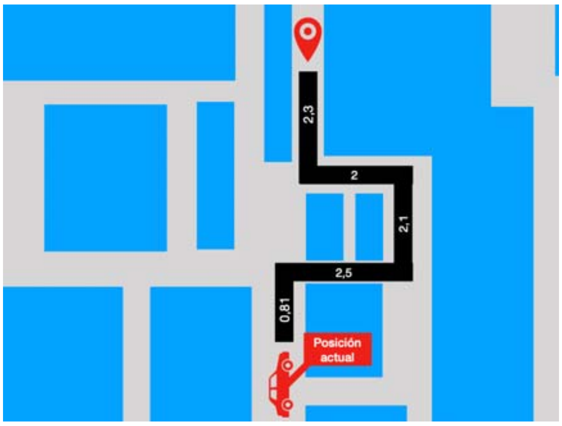
15. Carlos desea llegar a su lugar de trabajo, y para ello utiliza el GPS de su coche, que le muestra una interfaz como la de la imagen, pudiendo él establecer la ruta entre las calles que figuran (en color gris). Señala al menos cuatro rutas que pueda seguir Carlos teniendo en cuenta que las calles son unidireccionales.

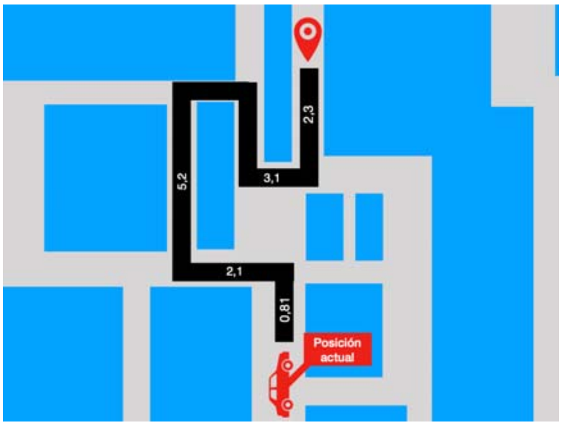


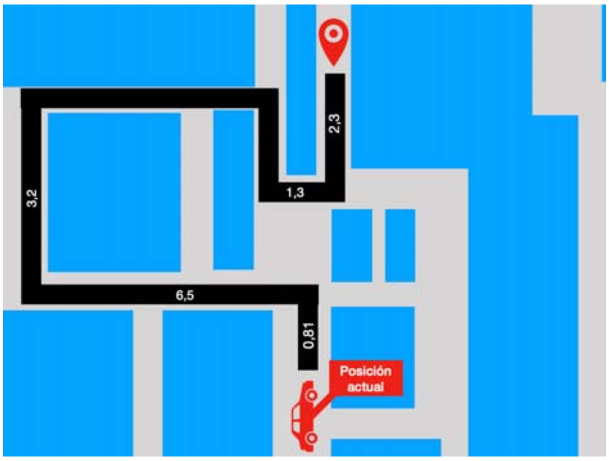


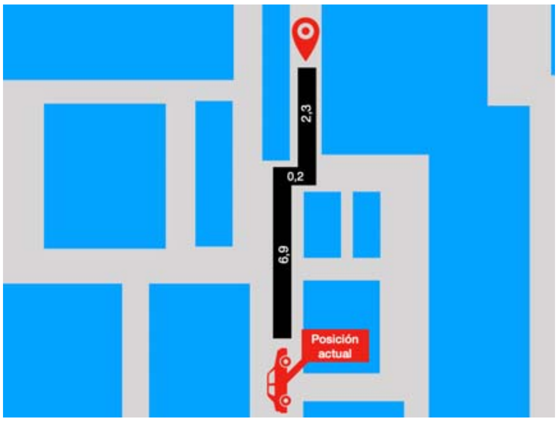
Enumera las calles y representa el grafo correspondiente a las diferentes rutas que puede seguir Carlos.

16. Volviendo a la situación del ejercicio anterior, imagina que ahora Carlos no se decide entre las cuatro rutas señaladas en la ilustración anexionada. Por su parte, el GPS ha calculado el tiempo (en minutos) que tardaría Carlos en cruzar cada calle. Calcula el tiempo que emplearía Carlos en cada ruta y señala cuál es la más conveniente. Traslada esta información a un grafo ponderado.





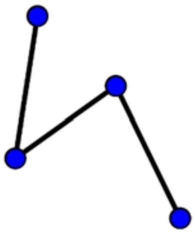




Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

17. Completa los siguientes grafos para satisfacer las condiciones indicadas.

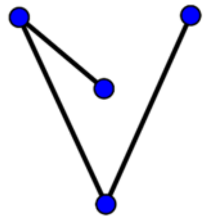
a)



Completar hasta satisfacer:

1. El grado máximo de los vértices del grafo sea 5.
2. Tenga dos vértices aislados.
3. Sea un árbol.

b)



Completar hasta satisfacer:

1. Sea un grafo conexo.
2. No presente ningún vértice aislado.
3. Presente un ciclo.
4. Todos los vértices tengan grado par.

18. Ofrece un ejemplo de un grafo que sea hamiltoniano y euleriano a la vez.

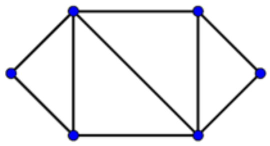
19. Ofrece un ejemplo de un grafo que no sea hamiltoniano ni sea euleriano.

20. Ofrece un ejemplo de un grafo que sea hamiltoniano y no sea euleriano.

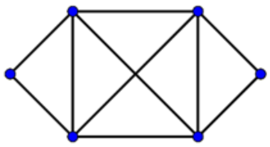
21. Ofrece un ejemplo de un grafo que no sea hamiltoniano y sea euleriano.

22. ¿Cuáles de los siguientes grafos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel? ¿Cuáles son conexos?

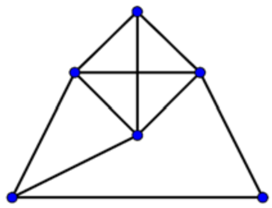
a)



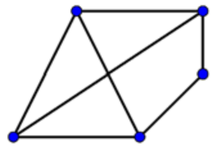
b)



c)



d)



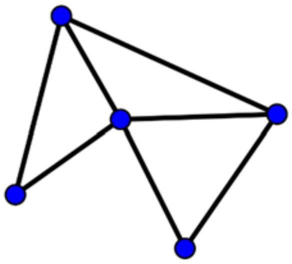
23. Jorge quiere hacer una ruta en coche por Caspe, Alcañiz, Andorra, Tortosa, Amposta y Morella (municipios españoles de las provincias de Tarragona, Castellón y Zaragoza). Para planificarla, analiza el siguiente mapa, por el cual se pregunta: ¿es posible hacer la ruta por todos los pueblos, pasando por todas las carreteras señaladas en rojo una única vez?

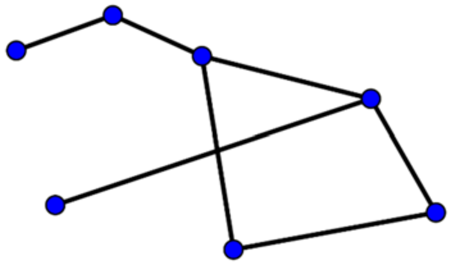
Responde a la duda de Jorge.

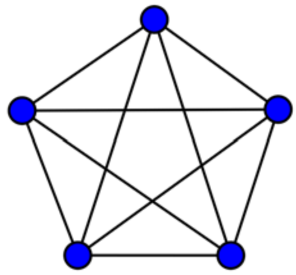
Imagen: Google Maps

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

24. ¿Qué es un ciclo hamiltoniano? ¿Cuáles de los siguientes grafos presentan un ciclo hamiltoniano?

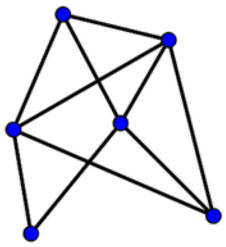
a) 

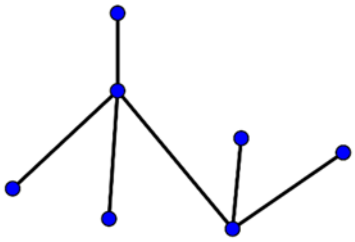
b) 

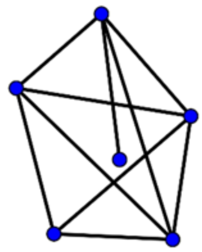
c) 

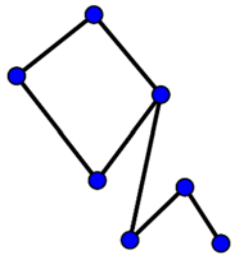
25. De los grafos del ejercicio anterior, señala aquellos que contengan un camino hamiltoniano.

26. Clasifica los siguientes grafos en hamiltonianos o no hamiltonianos.

a) 

b) 

c) 

d) 

27. ¿Puede un grafo hamiltoniano no ser conexo? Razona tu respuesta. Incluye algún ejemplo.

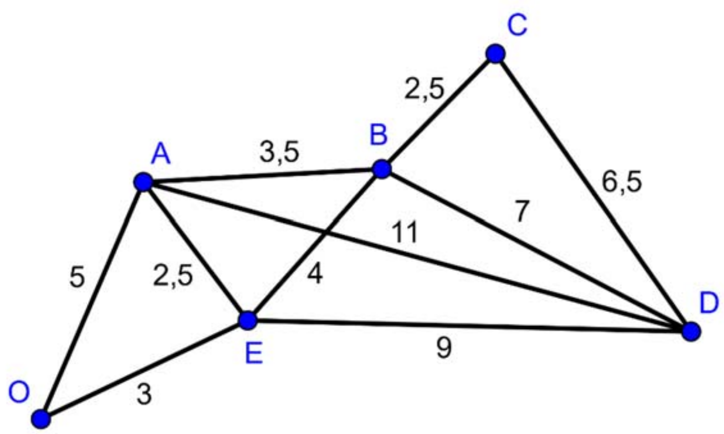
28. Considera un grafo que sea euleriano y hamiltoniano al mismo tiempo, ¿puede no ser conexo? Justifica tu respuesta incluyendo ejemplos.

29. Una hormiga se encuentra en el punto O y se necesita desplazar hasta E. Para ello, dispone de varias rutas alternativas que pasan por diferentes hormigueros. Contesta de forma razonada:

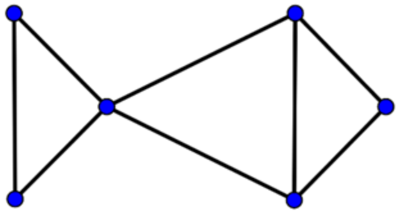
a) ¿Puede la hormiga llegar al punto de destino y regresar al origen pasando por todos los caminos una única vez? En caso afirmativo, indica la longitud del trayecto total.

b) ¿Puede la hormiga pasar por todos los hormigueros y regresar a O sin necesidad de pasar por todos los caminos? En caso afirmativo, indicar la longitud de la ruta o rutas que la hormiga puede seguir.

c) Indicar la ruta óptima en los apartados anteriores (si existen las rutas indicadas).



30. Observa el grafo G y señala como verdaderas (V) o falsas (F) las afirmaciones siguientes.



a) G es un grafo euleriano.

b) G es un grafo hamiltoniano.

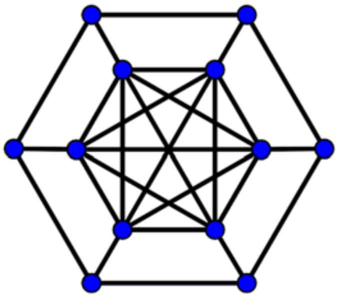
c) G es conexo.

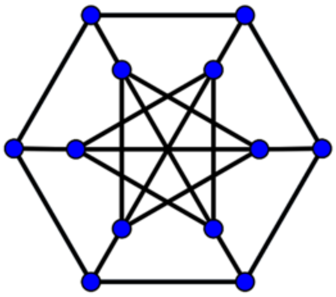
d) G no es plano.

e) G es un árbol.

f) El grado máximo de vértices de G es un número impar.

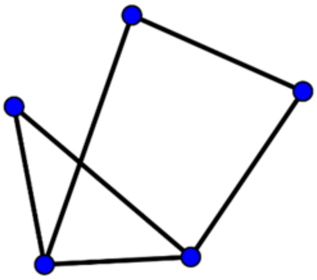
31. Demuestra, de forma razonada, que los dos siguientes grafos no son planos.



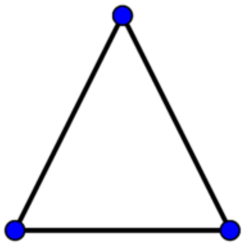


32. ¿Cuáles de los siguientes grafos son planos? Realiza una representación adecuada de ellos para justificar tus soluciones.

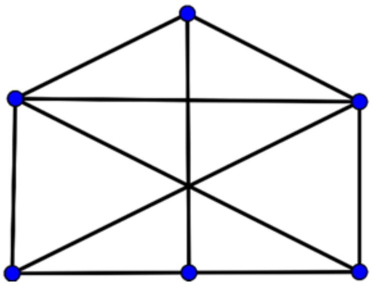
a)



b)



c)



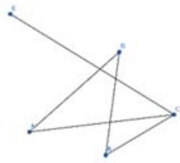
33. ¿Cuál de las siguientes coloraciones no es propia? Justifica tu respuesta.

34. Realiza una coloración propia en vértices de G del siguiente grafo. Para ello utiliza la siguiente paleta de colores.

Autor: Javier Zambrana Aguilar
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala en el grafo siguiente el conjunto de vértices y de aristas:



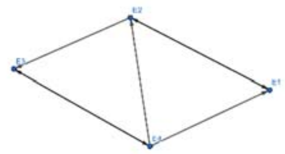
a) $V=\{\text{A,B,C,D,E}\}$ $E=\{(\text{A,D}),(\text{A,C}),(\text{B,D}),(\text{B,C}),(\text{C,E})\}$

b) Nodos = {A, C, E}; Aristas = {AC, AE, CE}

c) Vértices = {A, C, D, E}; Aristas = {AC, AD, AE, CD, CE, DE}

d) Nodos = {A, B, C, D, E}; Aristas = { AC, AD, AE, CD, CE, DE }

2. Cuál de las afirmaciones es falsa: Del siguiente grafo dirigido se puede decir que:



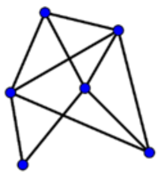
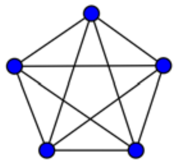
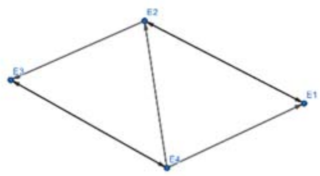
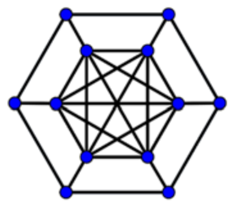
a) Presenta un total de cuatro vértices.

b) Un vértice tiene grado de emisión 2 y grado de recepción 1.

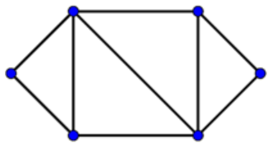
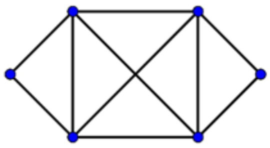
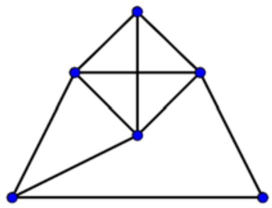
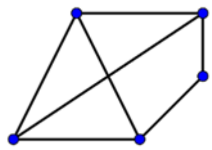
c) Un vértice presenta un bucle.

d) Un vértice tiene grado de emisión 1 y grado de recepción 2.

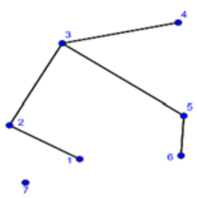
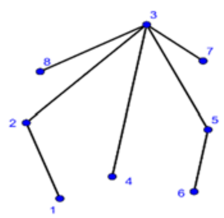
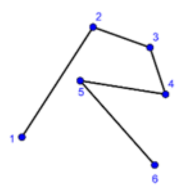
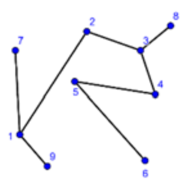
3. Indica qué grafos son planos

a)  b)  c)  d) 

4. ¿Cuáles de los siguientes grafos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel? ¿Cuáles son conexos?

a)  b)  c)  d) 

5. Discute cuáles de los siguientes grafos se corresponden con árboles.

 b)  c)  d) 

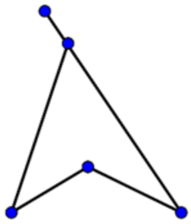
Autor: Javier Zambrana Aguilar

Revisora: Raquel Hernández

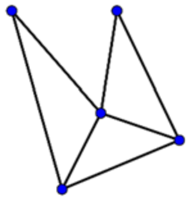
Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia

6. Clasifica los siguientes grafos en eulerianos y hamiltonianos.

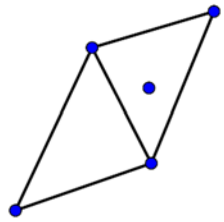
a



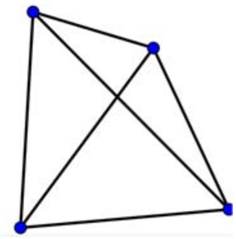
b



c



d



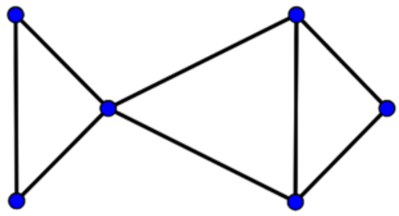
7. Observa el grafo G y señala como verdaderas (V) o falsas (F) las afirmaciones siguientes.

a) G es un grafo euleriano.

b) G es un grafo hamiltoniano.

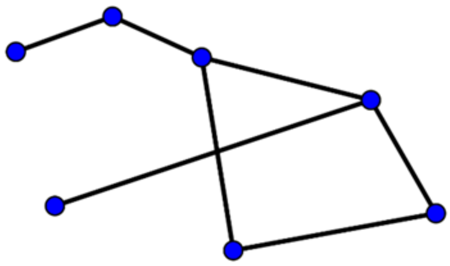
c) G es conexo.

d) G es plano.

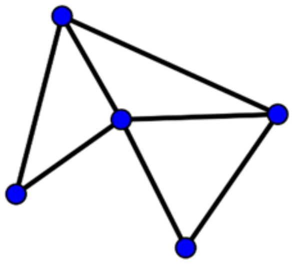


8. ¿Cuáles de los siguientes grafos presentan un ciclo hamiltoniano?

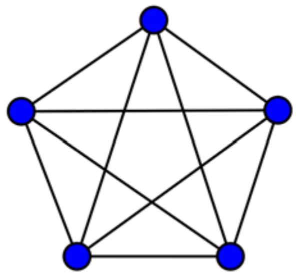
a



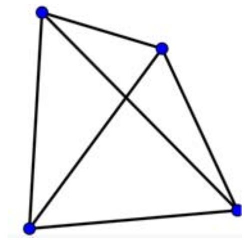
b



c



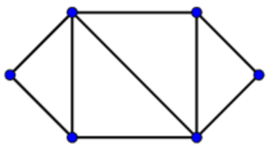
d



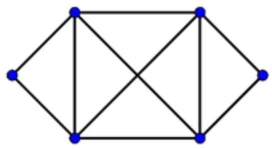
9. De los grafos del ejercicio anterior, señala aquellos que contengan un camino hamiltoniano.

10. ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?

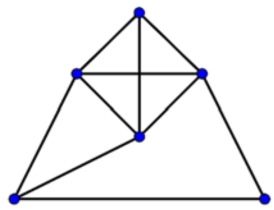
a)



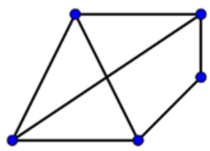
b)



c)



d)



Autor: Javier Zambrana Aguilar

Revisora: Raquel Hernández

Ilustraciones: Autor. Marea Verde / Wikipedia