Matemáticas Generales.
1º Bachillerato
Capítulo 3: Conteo

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda

Ilustraciones: Autores y Banco de Imágenes de INTEF

BOE: Reglas y estrategias para determinar el cardinal de conjuntos finitos en problemas de la vida cotidiana: principios de comparación, adición, multiplicación y división, del palomar y de inclusión-exclusión.

Resumen

Es bastante indiscutible que, si hay que empezar un curso sobre Matemáticas Generales, lo más básico es aprender a contar. Pero bueno, contar sabemos todos ¿no?

Pues sí y no. Naturalmente que, desde antes de pisar una escuela, ya hemos visto lo que significa contar y los números. Más aún, es más que probable que sepas contar en varios idiomas.

Ahora bien, ¿podrías decir cuántas matrículas (de tres letras y cuatro números) existen? ¿Hay más o menos matrículas que empiezan por B que matrículas con todas las letras iguales? Y una de las preguntas estrella ¿Hay dos personas en España con EXACTAMENTE el mismo número de pelos en la cabeza?

Más allá del aspecto lúdico (¿a quién le importa si hay o no dos personas con el mismo número de cabellos?) contar es una actividad importante en todo tipo de actividades laborales. Por ejemplo, saber cuánta gente podemos archivar con una longitud de letras, si es mejor poner una letra o un número más cuando se nos acaban las etiquetas, etc.

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

1. PRINCIPIOS DE COMPARACIÓN Y ADICIÓN

1.1. Cardinalidad

Para empezar a contar, necesitamos en primer lugar algunos conceptos y notación previa, más que otra cosa para hacer las fórmulas más sencillas.

Empecemos por lo más básico. Como ya sabes, un conjunto es una colección de elementos que agrupamos como un todo. Se puede hablar del conjunto de las jugadoras de un equipo de fútbol femenino, del conjunto de las canicas que ha comprado mi primo, del conjunto de los números pares, etc. Los conjuntos los representaremos normalmente con letras mayúsculas A, B, C,…

La característica más clara de un conjunto es su cantidad de elementos. A esta cantidad la llamaremos cardinal.

Recuerda:

Solo consideraremos conjuntos finitos.

El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que tiene. Se representa como card(A)

Ejemplos:

- *A = "Días de la semana", card(A) = 7*
- *B = {Luna, Tierra}, card (B) = 2*

La increíble teoría de los nudos. ¿Existen nudos imposibles? En matemáticas existe toda una teoría de nudos, que es un área entretenidísima y bastante difícil. ¿Sabías que una estudiante acaba de resolver un problema de teoría de nudos que llevaba cincuenta años abierto? Vamos a hablar de nudos en Derivando :) ¿Te apuntas? Eduardo Sáenz de Cabezón

video

https://www.youtube.com/watch?v=vsUlgx5qMok

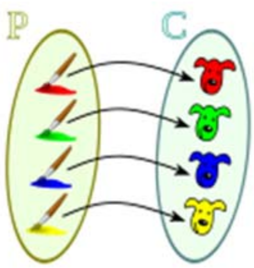
1.2. Principio de comparación

Supongamos que estamos eligiendo al delegado de la clase. Cada vez que sacamos un voto para un candidato X, hacemos una marca en la pizarra. Luego, contamos las marcas y el que tenga más, gana. Es más fácil contar las marcas de tiza que ir acordándose de los votos.

Este método funciona porque, si nadie ha hecho trampa, hay tantos votos para un candidato como marcas en la pizarra. Matemáticamente es lo mismo que decir que los conjuntos A = {Votos al candidato X} y B = {Marcas de tiza de X} son biyectivos.

Analicemos un poco más este concepto, dando una definición formal.

Diremos que dos conjuntos A y B son **biyectivos** si cada elemento de A corresponde con un único elemento de B y recíprocamente.



Es evidente que si A y B son biyectivos, tienen el mismo número de elementos. Es decir card(A) = card(B). La cuestión es que es mucho más sencillo ver que dos conjuntos son biyectivos que contar sus elementos.

Ejemplo:

- *¿Cuántas matrículas de coches tienen tres letras BBB?*

  Pues es lo mismo que preguntarse cuántos números hay de cuatro cifras. Si empezamos en 0001 y acabamos en 9999 habría 9999. Hay una matrícula más, pues hay que tener en cuenta en 0000. Es decir, hay exactamente 10 000 matrículas BBB.

Otra cuestión interesante es el principio de comparación, que nos permite, ver que un conjunto es más grande que otro.

Principio de comparación:

Si A está contenido en B entonces A tiene menos elementos que B.

Lo mismo ocurre si A es biyectivo con algún subconjunto de C. entonces A tiene más elementos que C.

Nuevamente, la idea es buscar que sea más sencillo, encontrar un subconjunto que contar los elementos.

Ejemplos:

- *¿Cuántas matrículas de coches tienen tres letras iguales?*

  Ya hemos calculado que hay exactamente 10 000 matrículas con BBB. Es un subconjunto del problema propuesto ahora. Las que tienen las letras AAA es un conjunto biyectivo con las que tienen BBB, luego también serán 10 000 exactamente. ¿Cuántas letras tiene el alfabeto?, 28 letras, luego el número de matrículas es 28 por 10 000 que son 280 000 matrículas.

Actividades propuestas

1. Ya sabes, las matrículas de los coches tienen tres letras y cuatro números.

a) ¿Cuántas matrículas tienen cuatro unos: 1111?

b) ¿Cuántas tienen los cuatro números iguales?

c) ¿Cuántas tienen cuatro unos, 1111, y tres B, BBB?

d) ¿Cuántas tienen los tres números iguales y las tres letras iguales?

2. ¿Podrías decir cuántas matrículas (de tres letras y cuatro números) existen?

3. ¿Hay más o menos matrículas que empiezan por B que matrículas con todas las letras iguales?

1.3. Principio de adición. Diagramas de árbol

El principio de adición es seguramente el más intuitivo de todos los que vamos a ver en este capítulo. Si tenemos dos cajas A y B y contienen card(A) y card(B) objetos respectivamente, el total de objetos es la suma de los que hay en cada caja.

De una manera más formal

Principio de adición:

- Para dos conjuntos (disjuntos): card(A U B) = card(A) + card(B)
- Para k conjuntos disjuntos: $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \ldots + \text{card}(A_k)$

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

Veamos unos pocos ejemplos:

Ejemplos:

- *Si tenemos 20 zapatos en una caja y 30 en otra caja, en total tenemos 50 = 20 + 30 zapatos.*
- *Si en una casa hay 4 perros y dos gatos en total hay 4 + 3 = 7 animales.*

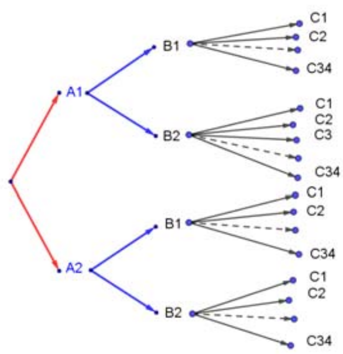
Así expresado es bastante elemental, casi un insulto a tu inteligencia. Vamos a ver cómo complicarlo un poco para resolver problemas de verdad.

Empecemos por introducir un concepto que quizás ya conozcas, el **diagrama en árbol.** Consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

Comencemos con un ejemplo:

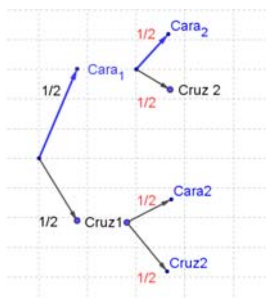
Actividad resuelta

- *Si en un restaurante hay posibilidad de escoger 2 primeros, 2 segundos y 34 postres ¿cuántos menús diferentes se pueden hacer?*



Si hacemos el diagrama en árbol compruebas que basta multiplicar 2 por 2 y por 34, luego hay 136 menús diferentes

- *En un cierto problema de probabilidad, hemos tirado dos monedas, y queremos saber en cuántos sucesos hay alguna cara, (una única cara o las dos caras).*



Contamos en el árbol las ramas que responden a nuestra pregunta que son 3.

Actividades propuestas

4. Nieves tiene 4 lapiceros, 5 bolígrafos y 10 rotuladores todos distintos de diferentes colores, ¿cuántos estuches diferentes puede formar que tengan un lapicero, un bolígrafo y un rotulador?

2. PRINCIPIOS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

2.1. Principio de multiplicación

Los diagramas de árbol que hemos visto en el principio de adición resultan en general muy farragosos. Más aún, en cuanto tenemos muchos elementos se vuelven impracticables.

Es por ello que, si es posible, se utiliza el principio de multiplicación. La mejor manera de entenderlo es comenzar con un ejemplo. Volvamos para ello a un problema que ya habíamos resuelto.

Actividad resuelta

- *Si en un restaurante hay posibilidad de escoger 2 primeros, 2 segundos y 34 postres ¿cuántos menús diferentes se pueden hacer?*

Lo importante es notar que es irrelevante cómo sean los menús, solo nos importa cuántos hay. De modo que colocamos cada una de las posibilidades.

Primeros	Segundos	Postres
2	2	34

El resultado es $2 \cdot 2 \cdot 34 = 136$ menús diferentes. Es habitual poner solo la parte de abajo del diagrama.

Así pues, podemos enunciar ya el principio de multiplicación

Principio de multiplicación:

Supongamos que tenemos que colocar k elementos. Hay N_1 posibilidades para el primero, N_2 para el segundo y así sucesivamente hasta N_k para el último, entonces hay $N_1N_2...N_k$ colocaciones posibles.

La manera más fácil de verlo es usar un diagrama de **casillas**:

N_1	N_2	….	N_k	$= N_1N_2...N_k$

2.2. Principio de división

- También se llama Recursión. Consiste en dividir el problema en sub-problemas idénticos más pequeños. Un ***ejemplo*** de recursión es el cálculo de n! La recursividad se utiliza mucho en informática.

Actividades propuestas

5. María no sabe qué ponerse. Tiene que decidir entre 6 camisetas, 3 pantalones y 2 zapatillas. ¿De cuántas formas podría ir vestida?

5. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

6. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

3. PRINCIPIO DEL PALOMAR

- *Si metemos 9 palomas en 8 palomares, entonces algún palomar debe contener dos o más palomas.*

Así enunciado parece una broma, pero no lo es. Vamos a generalizarlo y comentarlo pues nos puede ayudar a resolver un buen número de problemas.

Observa el enunciado. Hay vaguedad en él. Dice: "algún palomar debe contener" y añade "dos o más" palomas. Esta característica del Principio de Palomar nos va a permitir obtener conclusiones inesperadas a pesar de no disponer de suficiente información.

Vamos a enunciarlo un poco más general:

Principio del Palomar o de Dirichlet:

Si metemos N +1 o más palomas, en N palomares entonces algún palomar debe contener dos o más palomas.

Comprobación:

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Es decir usando el principio de contradicción. Por hipótesis hay N + 1 o más palomas. Suponemos que metemos una única paloma en cada palomar. Entonces no puede haber más de N palomas, luego hemos llegado a una contradicción.

Actividad resuelta

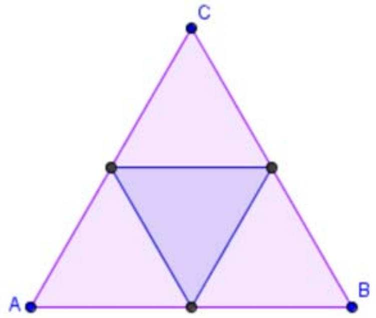
- *En un sobre tenemos tarjetas de dos colores, blancas y rojas, ¿cuál es el menor número de tarjetas que debemos sacar, para sin mirarlas, estar seguros de que al menos hay dos del mismo color?*

La primera tarjeta podría tener uno de los dos colores, si la segunda repite color, ¡ya hemos ganado!, pero puede tener un color distinto. Pero al sacra la tercera, ya es seguro que tiene que tener el color de alguna de las que ya hemos sacado. Sacar dos tarjetas no es suficiente. Pero con tres, es seguro que hay dos con el mismo color.

Vamos a verlo ahora usando el Principio del Palomar. Las tarjetas desempeñan el papel de las palomas. Y los dos colores, el de los palomares. 3 palomas no pueden estar en 2 palomares, luego se repite color.

Alguno más cerca

- *Tenemos un triángulo equilátero de lado 1. Si se eligen cinco puntos en su interior, prueba que hay como mínimo dos cuya distancia es menor que 1/2.*



Uniendo los puntos medios de los tres lados, tenemos cuatro triángulos equiláteros de lado 1/2, aplicando el *Principio de Dirichlet* o del *Palomar*, como tenemos cinco puntos, al menos dos están en un mismo triángulo de lado 1/2 y por tanto su distancia es menor que este valor.

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

8. *En un jardín hay 1 000 plantas, y ninguna planta tiene más de quinientas hojas. Demuestra que debe haber al menos dos plantas con el mismo número de hojas.*

9. En Leganés hay menos de 200 000 habitantes. Y ninguna persona tiene más de un millón de pelos en la cabeza. ¿Podrías asegurar que en Leganés hay al menos dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

10. Dados 5 números naturales distintos, menores que 10, comprueba que se pueden formar tres parejas con ellos (los elementos de las parejas no pueden ser iguales) que tengan la misma diferencia (en valor absoluto).

Si te fijas, habrás observado que el Principio del Palomar se basa en la suma de desigualdades. Combinando el principio con las desigualdades se puede enunciar así:

Generalización del Principio del Palomar

Si la suma de n o más números todos diferentes es igual a S, entre ellos debe haber al menos uno menor que S/n, y también al menos uno mayor que S/n.

Comprobación

Si todos los números fueran mayores que S/n su suma sería mayor que S, no igual. Del mismos modo, si todos fueran menores, su suma sería menor que S.

Esta generalización nos permite resolver gran número de nuevos problemas:

Actividad resuelta

- *Diez jóvenes están haciendo un trabajo por el que reciben un sueldo mensual que en total suma 3 000 euros. Todos ellos quieren comprarse un pantalón que cuesta 350 euros. ¿Van a podérselo comprar todos? ¿Hay alguno que deberá esperar al próximo mes?*

En este caso n = 10, y S = 3 000, luego 3 000/10 = 300, como 350 > 300, alguno de los jóvenes estará ganando menos que 300 y no podrá comprarlo, deberá esperar al próximo mes.

- *La suma de las edades de 7 estudiantes de Bachillerato es de 119 años. ¿Se pueden elegir tres de dichos estudiantes de forma que la suma de sus edades n sumen menos de 50 años?*

Formamos todos los tríos posibles de estudiantes. Hay n = 35. Cada estudiante estará en 15 tríos diferentes. Luego la suma S de todas las edades de todos los posibles tríos es de 15 por 119. S = 1 785. Por tanto S/n = 51 que es mayor que 50.

Actividades propuestas

11. Un cierto satélite del sistema Upsilon Andromedae tiene menos de la mitad de su superficie cubierta por agua. ¿Se podría encontrar algún lugar dónde escavar un túnel que empezara en tierra firme y acabara también en tierra firme?

Sobre conjuntos infinitos, y sus paradojas. Paradoja del Hotel Infinito.

https://www.youtube.com/watch?v=NGy-0PFfJ88

4. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

El Principio de Inclusión - exclusión, que también se denomina de la Criba, permite calcular el número de elementos de la unión de varios conjuntos utilizando el cardinal de esos conjuntos y todas sus intersecciones.

Empecemos con el caso más sencillo, cuando tenemos dos conjuntos. Entonces

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

El nombre del principio viene de que en primer lugar hemos hecho una inclusión, Card(A) + Card(B), y luego una exclusión restando la intersección.

Actividad resuelta

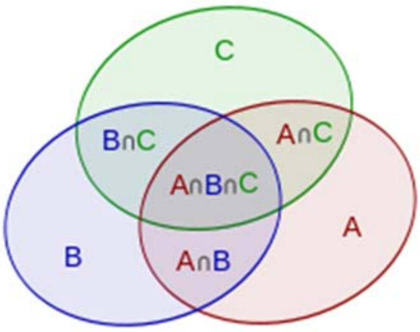
- Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Llamamos A a tomar el té, y B a tomar café. Entonces: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$; $\text{Card}(A \cup B) = 15 + 27 - \text{Card}(A \cap B)$. Sabemos que 2 no toman ni té ni café, luego $\text{Card}(A \cup B) = 35 - 2 = 33$ que toman café o té. No toman ni café ni té 2 personas.

Toman café y té = $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cup B) = 15 + 27 - 33 = 9$ personas

Si tenemos tres conjuntos, observa en el diagrama de Venn del margen que:

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$



Es decir, al sumar los tres cardinales de los conjuntos hemos incluido varias veces las intersecciones. Excluimos las tres intersecciones de dos conjuntos, y hemos quitado demasiadas veces la intersección de tres, que debemos sumar.

En general:

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n) - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \ldots - \text{Card}(A_{n-1} \cap A_n) + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + \text{Card}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \ldots + (-1)^{n+1}\,\text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Este principio puede utilizarse para la asignación de probabilidades:

Actividades propuestas

12. En el grupo de trabajo de la actividad resuelta anterior, de 35 personas, con 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida, se elige al azar una persona, calcula la probabilidad de que tome café o té.

5. COMBINATORIA

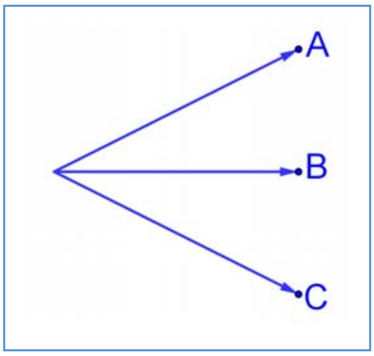
5.1. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

Diagrama en árbol

Actividades resueltas

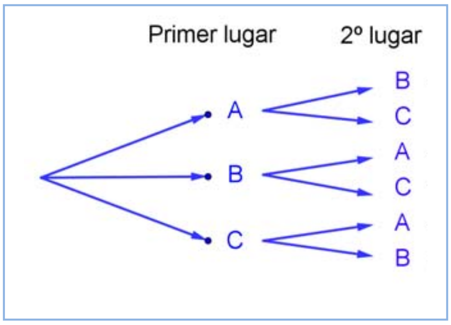
- *En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?*

Esta técnica que ya conoces, confeccionar un **diagrama en árbol,** nos va a ayudar mucho a resolver los problemas de combinatoria. Como recordarás, consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.



Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

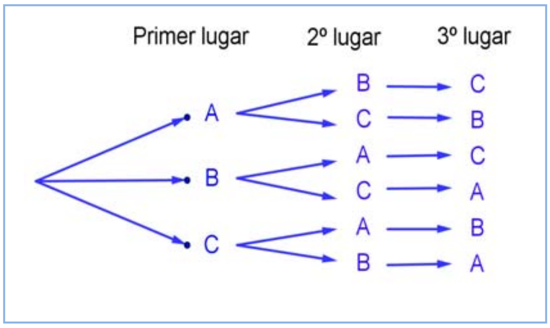
Primer nivel del árbol: En primer lugar, podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.



Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.

Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad.

Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos.



También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir al árbol: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

13. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

14. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras?

b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

15. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

Permutaciones

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplos:

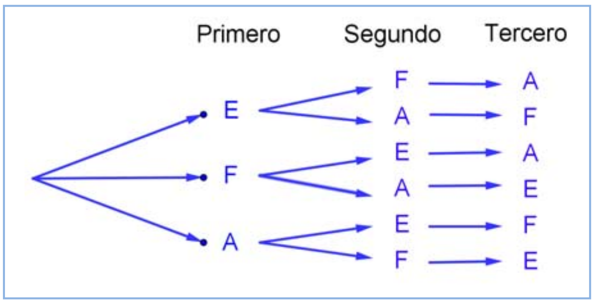
- *Son permutaciones:*
  - Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
  - Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.
  - Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

La actividad resuelta de los tres grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- *En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.*



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n - 1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a un árbol de n niveles con n, $n - 1$, $n - 2$, … , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla $\boxed{!}$

Ejemplos:

- *Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:*

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- *Las palabras, con o sin sentido, que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA, son $P4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.*
- *Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:*

$$P_5 = 5! = 120.$$

- *España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P3 = 3! = 6$ formas distintas.*

Actividades propuestas

16. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

17. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

18. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

19. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo, por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

20. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

21. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

¿Cuál es el número más grande que puedes pensar? En este vídeo se muestra cómo construir números tan enormes que escapan a nuestra imaginación, ¡y solo usando polígonos o flechas!

https://www.youtube.com/watch?v=De4s6cW4WE8

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

$$\text{Es } \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

- *Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10!}{7!}$ b) $(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

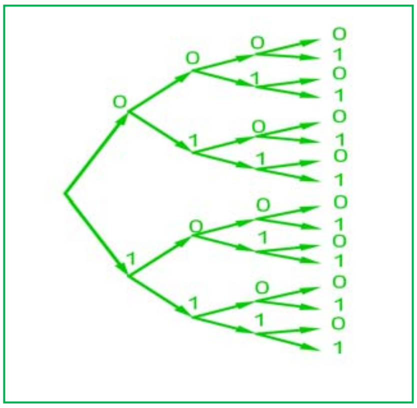
Actividades propuestas

22. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

23. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

5.2. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?



Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen. Antes de 0resolver este problema, resolveremos uno más fácil.

Actividades resueltas

- *Con dos símbolos, 0 y 1, ¿cuántas tiras de 4 símbolos se pueden escribir?*

Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol. Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto, el número de tiras distintas que podemos formar es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Las diferentes secuencias de longitud n que se pueden formar con un conjunto de m elementos diferentes, se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n. El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $VR_{m,n}$, y se calcula con la fórmula:

$$\mathbf{VR}_{m,n} = m^n$$

En la ***actividad resuelta*** anterior son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividad resuelta

- *En el cálculo del número de quinielas distintas, los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto, se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:*

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969.$$

Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4 782 969 apuestas simples.

- *La probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es, por tanto,* $\frac{1}{4\,782\,969}$.

Actividades propuestas

24. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

25. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

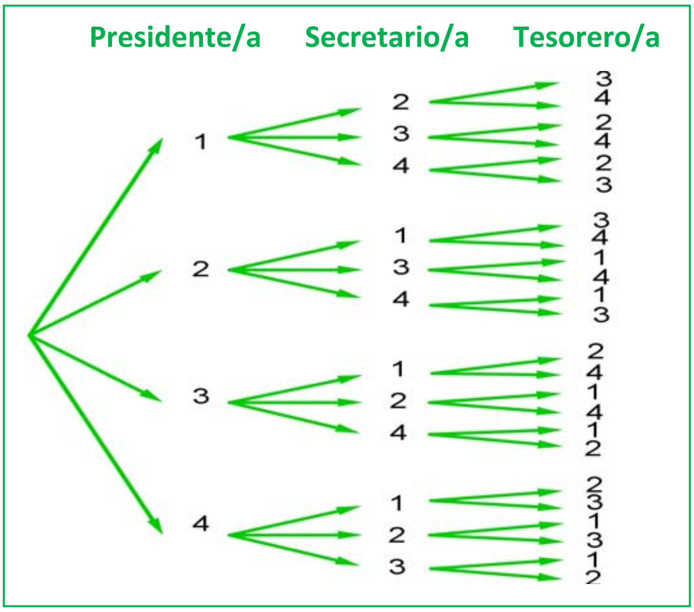
26. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

27. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

5.3. Variaciones sin repetición

Actividades resueltas

- *Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos, presidencia, secretaría y tesorería. a) Si únicamente se presentan cuatro personas. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Si, antes de que empiece la votación, se presentan otros dos candidatos, ¿cuántas juntas diferentes podrán formarse ahora?*



a) Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos los candidatos del 1 al 4. A la presidencia pueden optar los 4 candidatos, pero si un determinado candidato ya ha sido elegido para la presidencia, no podrá optar a los otros dos cargos, por lo que, desde cada una de las primeras cuatro ramas, sólo saldrán tres ramas. Una vez elegida una persona para la presidencia y la secretaría, para optar a la tesorería habrá únicamente dos opciones, por lo cual, de cada una de las ramas del segundo nivel, salen dos ramas para el tercer nivel.
De este modo, multiplicando el número de ramificaciones en cada nivel, tenemos que la junta puede estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras.
b) Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

Estas agrupaciones de elementos, en que un elemento puede aparecer en cada grupo como máximo una vez, sin repetirse, y cada grupo se diferencia de los demás por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen se denominan *variaciones sin repetición*.

En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, se tienen en cuenta el **orden** y los **elementos** que forman el grupo. La diferencia es que en las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos y en las variaciones ordinarias no. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $V_{m,n}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots} \text{ (}n\text{ factores)}$$

Observaciones

1) m debe ser siempre mayor o igual que n.

2) Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- *Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor que se multiplica en el cálculo de las variaciones:*

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$ b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a 4 – 3 + 1. En b) 4 = 6 – 3 + 1.

En c) 5 = 10 – 6 + 1. En d) 6 = 9 – 4 + 1.

En general el último elemento es $(m - n + 1)$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

- *Escribe la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:*

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$ b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales se debe dividir por $(m - n)!$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para realizar esta operación con la *calculadora* se utiliza la tecla etiquetada ***nPr***

Actividades propuestas

28. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

29. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

30. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

31. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

32. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que:

$$V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}.$$

Para que tenga sentido, se asigna a 0! el valor de 1.

0! = 1.

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

5.4. Combinaciones

Actividades resueltas

- *En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?*

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (**elementos**) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación.

Se llama **combinaciones** de m elementos tomados de n en n y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A				Paquetes sin A pero con B			Paquetes sin A ni B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE,
BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE,
CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE,
DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE,
EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD,
FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto, basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

Y, en general, de acuerdo con el mismo razonamiento se calculan las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividiendo las variaciones entre las permutaciones, con la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla etiquetada ***nCr***

Actividades resueltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas y para aprobar hay que responder* 6 *correctamente. ¿De cuántas formas se pueden elegir esas* 6 *preguntas?*

No importa en qué orden se elijan las preguntas, sino cuáles son las preguntas elegidas. No pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta). Únicamente influyen las preguntas (los elementos). Se trata de un problema de combinaciones, en que tenemos que formar grupos de 6, de un conjunto formado por 10 preguntas diferentes, luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- *Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevarnos tres para leerlos en vacaciones, ¿de cuántas maneras distintas podemos elegirlos?*

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tienes* 7 *monedas de euro que colocas en fila. Si* 3 *muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?*

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propuestas

33. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

34. Juan quiere regalar 3 DVD a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

35. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** m sobre n se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = \mathrm{C}_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ y $\binom{4}{0} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecto:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1.$$

Recuerda que: 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}, \binom{5}{5}, \binom{9}{9}, \binom{4}{4}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{7} = 1$, $\binom{5}{5} = 1$, $\binom{9}{9} = 1$ y $\binom{4}{4} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m} = 1$? En efecto:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1.$$

Recuerda que: 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}, \binom{5}{1}, \binom{9}{1}, \binom{4}{1}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{9}{1} = 9$ y $\binom{4}{1} = 4$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1} = m$? En efecto:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m.$$

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

* *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *e indica cuáles son iguales.*

Habrás comprobado que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Razona el motivo. Podemos generalizar y decir que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Pero antes lo comprobaremos con un problema.

* *Luis y Miriam se han casado y les han regalado seis objetos de adorno. Quieren poner tres en una estantería, pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. Sin embargo, a Luis no le gusta ese objeto, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. Uno de los dos se saldrá con la suya. Calcula cuantas son las posibilidades de cada uno.*

A Luis y Miriam les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Sin embargo, a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3}+\binom{5}{2}$.

* *Comprueba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3}+\binom{5}{2}$ *y que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general,

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

¿Te atreves a demostrarlo?

5.5. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades

- *¿Sabes jugar al póker? Se reparten 5 cartas y puede haber distintas jugadas: parejas, tríos, dobles parejas, póker… Calcula la probabilidad de obtener un póker de ases servido.*

Para resolver problemas de probabilidad utilizando la regla de *Laplace*, podemos contar los casos favorables y los posibles haciendo uso de la combinatoria.

Cálculo de los casos posibles:

¿De cuántas maneras se pueden recibir las 5 cartas? ¿Importa el orden? ¿Y los elementos? Son combinaciones:

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{35! \cdot 5!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 658\,008$$

Cálculo de los casos favorables:

Para tener un póker de ases servido nos tienen que repartir {As, As, As, As, Otra carta}. Igual que antes, no importa el orden, sólo los elementos. En la baraja sólo hay 4 ases, que están fijos, y la otra carta puede ser cualquiera de las 40 – 4 = 36 cartas restantes.

Regla de Laplace:

$$P(\text{Póker de ases servido}) = \frac{36}{658\,008} = 0.0000547$$

- Juan está de *suerte*, en 10 partidas ha sacado 5 pókeres de ases seguidos. ¿Crees que hace trampas?

- *Calcula la probabilidad de sacar póker*

Ya conocemos los casos posibles, $C_{40,5}$ = 658 008. Debemos calcular los casos favorables. ¿Cuántas jugadas hay que sean póker? Son póker: {As, As, As, As, Otra carta}, {2, 2, 2, 2, Otra carta}, … Es decir como la baraja es de 40 cartas, 360.

$$P(\textit{Póker servido}) = \frac{360}{658\,008} = 0.000547$$

Actividades propuestas

36. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

37. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

CURIOSIDADES. REVISTA

Historia de la Combinatoria

Si buscas en Internet "Historia de la Combinatoria" podrás leer que el término "Combinatoria" fue introducido por Wihen Leibniz en su libro *Dissertartio de Arte Combinatoria.* Pero su origen es mucho más antiguo, ya los chinos o en la Edad Media usaban ideas de combinatoria pasa saber *contar*. Por ejemplo, ya usaban candados similares al de abajo, dónde se utilizaban contraseñas con letras y números.

Su importancia creció con el desarrollo de la *Teoría de la Probabilidad*, que con *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar) de Jacobo Bernouilli, y posteriormente con Leonard **Euler** que ya puso los principios de esta Ciencia.

Está relacionada con la Teoría de Grafos que veremos en un capítulo posterior, con algunos acertijos matemáticos tales como el problema de los Puentes de Konigsberg, que también veremos.

Otras aplicaciones importantes se encuentran en cuestiones tan diversas como el problema de calcular el número de isómetros de hidrocarburos saturados, la lógica simbólica, e incluso en problemas de topología.

Candados

Desde la antigüedad se han usado candados parecidos al de la figura que utilizan la Combinatoria. Como puedes ver en éste, se usa una contraseña de 5 letras, que pueden repetirse. ¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer?

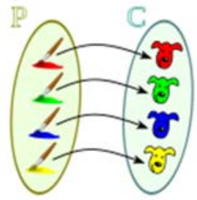
Se usan mucho en la actualidad como candados de maletas, pues no tienes el problema de perder la llave, aunque sí lo tienes de olvidar la contraseña

Problema

En una probeta hay un cierto número de bacterias. Cada minuto cada bacteria se divide en dos, y igual al minuto siguiente, y así sucesivamente. Al cabo de una hora la probeta está llena de bacterias. ¿Cuándo estaba medio llena?

Autores: Andrés García Mirantes, María Molero Aparicio y David Miranda
Ilustraciones: Autores. Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Cardinal	El **cardinal** de un conjunto es el número de elementos que tiene. Se representa como card(A)	Card({A, B, C}) = 3
Biyección	Diremos que dos conjuntos A y B son biyectivos si cada elemento de A corresponde con un único elemento de B y recíprocamente.	
Principio de comparación:	Si A está contenido en B entonces A tiene menos elementos que B. Lo mismo ocurre si A es biyectivo con algún subconjunto de C. entonces A tiene más elementos que C.	
Principio de adición:	Para dos conjuntos (disjuntos): card(A U B) = card(A) + card(B). Para k conjuntos disjuntos: card(A_1 U A_2 U...UA_k) = card(A_1) + card(A_2) +...+ card(A_k)	
Principio del Palomar:	Si metemos N +1 o más palomas, en N palomares entonces algún palomar debe contener dos o más palomas. Si la suma de n o más números es igual a S, entre ellos debe haber al menos uno menor que S/n, y también al menos uno mayor que S/n.	
Principio de Inclusión - Exclusión	Card($A \cup B$) = Card(A) + Card(B) – Card($A \cap B$)	
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Principios

1. Si en un restaurante hay posibilidad de escoger 3 primeros, 3 segundos y 2 postres, ¿cuántos menús diferentes se pueden hacer?
2. Hay tres ciudades, A, B, y C. No hay ninguna carretera que una A con B, pero hay 5 que unen A con C, y 2 que unen B con C. a) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a B? b) Hay otra ciudad, D, que también está unida con A y B, con A por 4 carreteas, y con B con 3 carreteas, ¿De cuántas formas se puede ir ahora?
3. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas y lanzamos luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si sacamos dos cartas y un dado? ¿Y si fuesen 3 cartas y 2 dados?
4. En un pueblo hay 3 casas y una fuente. De cada casa sale un camino que la une con la fuente. A) ¿Cuántos caminos hay? B) ¿Y si hay 5 casas y 2 fuentes?
5. Con los dígitos 0, 2, 3, 7 y 8 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
6. Con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
7. Juan conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil, ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 659, que las otras cuatro cifras siguientes eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántos números podrían ser dicho teléfono. Demasiados. Hace memoria y recuerda que las dos últimas cifras son 77. ¿Cuántos llamadas tendría que hacer para acertar?
8. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?
9. Comprueba que en todo grupo de 10 personas hay al menos dos con el mismo número de conocidos dentro del dicho grupo.
10. El número de pelos que tenemos en la cabeza varía con la edad, el sexo, según el color del pelo. Las personas pelirrojas tienen alrededor de 90 000, mientras que morenos y castaños tienen alrededor de 105 000. En el caso del pelo rubio, la cifra sube hasta los 140 000. Podemos asegurar que todos tenemos menos de 200 000 pelos. ¿Podemos asegurar que en España hay más de una persona con el mismo número de pelos? ¿Y en Robledo de Chavela que en 2021 tenía 4 471 habitantes? ¿Y en la provincia de Teruel que en 2021 tenía 134 360 habitantes?

Combinatoria

11. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?
12. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?
13. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?
14. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

15. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

16. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

17. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

18. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

19. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

20. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

21. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 o 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

22. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

23. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

24. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

25. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

26. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

27. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

28. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

29. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

30. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

31. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

32. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

33. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

34. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

35. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

36. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

37. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

38. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

39. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

40. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

41. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tiramos dos dados y dos monedas, los resultados distintos que podemos tener son:

a) 600 b) 288 c) 144 d) 72

2. Con 10 blusas, 2 pantalones y 5 zapatillas, las maneras distintas de poderse vestir, son:

a) 1 000 b) 200 c) 50 d) 100

3. En el menú del día de un restaurante hay 4 primeros platos, 4 segundos y 4 postres, los diferentes menús que pueden confeccionarse son:

a) 20 b) 128 c) 32 d) 1 064

4. En un centro escolar se selecciona un grupo de 200 estudiantes que estudian francés o inglés o ambas cosas. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés, y hay 7 que no estudian ninguno de esos idiomas, ya que estudian alemán. ¿Cuántos estudian francés e inglés?

a) 64 b) 30 c) 220 d) 27

5. Nuestro cuerpo está cubierto de vello. Tenemos como máximo 5 millones de pelos. En Madrid capital en 2018 había 3 223 000 habitantes. ¿Es seguro que hay al menos dos habitantes en Madrid capital con el mismo número de pelos? ¿Qué Principio usas?

a) Por el Principio del Palomar, no lo podemos asegurar.

b) Por el Principio del Palomar, sí lo podemos asegurar.

c) Por el Principio de inclusión exclusión, es seguro

d) Por el Principio de comparación se asegura que hay más de un millón con el mismo número de pelos.

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

a) 58 b) 120 c) 9 d) 192

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:

a) 40 320 b) 20 160 c) 5 040 d) 10 080

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 216 b) 108 c) 120 d) 90