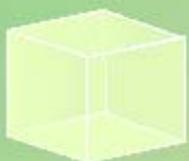
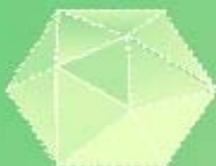
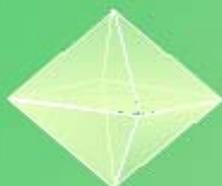
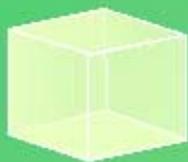


# Matemáticas Generales.

## 1º Bachillerato.

### Capítulo 2: Relaciones



**Propiedad Intelectual**

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009034

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:47:13.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)



**Autores: Nieves Zuasti Soravilla y Álvaro Garmendia Antolín**

**Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF**

## 1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

- 1.1. RAZÓN
- 1.2. PROPORCIÓN
- 1.3. PORCENTAJE

## 2. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

- 2.1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES
- 2.2. PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA
- 2.3. PORCENTAJES
- 2.4. INCREMENTO PORCENTUAL. DESCUENTO PORCENTUAL. PORCENTAJES ENCADENADOS

## 3. PROPORCIONALIDAD INVERSA

- 3.1. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES
- 3.2. PROPORCIONALIDAD SIMPLE INVERSA
- 3.3. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

## 4. REPARTOS PROPORCIONALES

- 4.1. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO
- 4.2. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

## 5. TASAS Y NÚMEROS ÍNDICE

- 5.1. TASAS
- 5.2. NÚMEROS ÍNDICE

### Resumen

En este capítulo revisaremos los conocimientos que tienes de cursos anteriores sobre razones, proporciones, porcentajes y tasas, como sobre proporcionalidad directa, regla de tres simple, proporcionalidad inversa, repartos proporcionales... y aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.

La proporcionalidad es una realidad con la que convivimos a nuestro alrededor. Para comprenderla y utilizarla correctamente, necesitamos conocer sus reglas.

Aprenderemos a aplicar e interpretar todo lo relacionado con la relación de proporcionalidad y su aplicación en la vida cotidiana.

## RAZÓN Y PROPORCIÓN

### 1.1. Razón

*Ya sabes que:*

**Razón**, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee “**A es a B**”

*Ejemplo:*

- Comparamos 5 kg de naranjas por 4 €. Podemos establecer la relación entre el precio (4 €) y la cantidad (5 kg)

$$4 : 5 = 0.8 \text{ € el kilo}$$

$\frac{4}{5}$  es **la razón** entre euros y peso de naranjas.

De esta manera si compramos otras cantidades de naranjas podremos calcular el precio a pagar.

*Ejemplo:*

- La razón que relaciona el gasto de 10 personas y los 500 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{10 \text{ personas}}{500 \text{ litros}} \text{ o bien } \frac{500 \text{ litros}}{10 \text{ personas}}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

$$500 : 10 = 50 \text{ litros por persona.}$$

Si fueran 5 personas de una misma familia la cantidad de agua gastada será de 250 litros. Si son 400 personas de una urbanización la cantidad de agua será 20000 litros, es decir:

$$\frac{10}{500} = \frac{400}{20000} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50} \text{ o bien } \frac{500}{10} = \frac{20000}{400} = \frac{250}{5} = \frac{50}{1}$$

### Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de fracción pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la relación entre dos magnitudes.

Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

### Actividades propuestas

- Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente.  
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?
- Medio kilo de cerezas costó 1.90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.
- La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

*Observa:*

Una fracción expresa una parte de un todo de una única magnitud, mediante sus términos, numerador (las partes que se toman) y denominador (el total de las partes en las que se ha dividido ese todo)

Sin embargo, los términos de una razón se refieren a cantidades de dos magnitudes, el primero se llama “antecedente” y el segundo “consecuente”

## 1.2. Proporción

*Ya sabes que:*

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios**.

$$\frac{\text{extremo}}{\text{medio}} = \frac{\text{medio}}{\text{extremo}}$$

Se llama "**razón de proporcionalidad**" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

*Ejemplo:*

- ✚ En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da  $\frac{200}{5} = 40$  kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad**.



Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	200	400	80	40	400	120	3000	800
nº de árboles	5	10	2	1	10	3	75	20

**Propiedad fundamental de las proporciones:**

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

*Ejemplo:*

$$\text{✚ } \frac{3000}{75} = \frac{800}{20} \Rightarrow 3000 \cdot 20 = 75 \cdot 800$$

### Ideas claras

**Observa que** la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar.

### Actividades propuestas

4. Completa las siguientes proporciones:

a)  $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$

b)  $\frac{0,3}{x} = \frac{7}{14}$

c)  $\frac{x}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$

d)  $\frac{0,05}{100} = \frac{x}{400}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10

b) 24, 40, 50, 30

c) 0.36; 0.06; 0.3; 1.8

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2.5:

0.5	9	6		20			2.5
			50		8	25	

### 1.3. Porcentaje

#### Ya sabes que

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Un porcentaje es una razón con denominador 100. Su símbolo es %.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

“Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100”

#### Ejemplo:

✚ Calcula el 41 % de 900      El 41 % de 900 =  $\frac{41 \cdot 900}{100} = 369$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- ✚ El 50 % equivale a la mitad de la cantidad.
- ✚ El 25 % es la cuarta parte de la cantidad.
- ✚ El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad.
- ✚ El 10 % es la décima parte de la cantidad.
- ✚ El 200 % es el doble de la cantidad.

**¡¡GRANDES REBAJAS!!**  
**40 % DE DESCUENTO**  
**EN TODOS LOS**  
**ARTÍCULOS**

#### Ejemplo:

- ✚ El 25 % de 800 es la cuarta parte de 800, por tanto es  $800 : 4 = 200$ .

#### Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 40 % son cuarenta partes de esas cien.

El total de una cantidad se expresa como el 100 %

### Actividades propuestas

7. Calcula mentalmente:

- a) El 50 % de 240    b) el 1 % de 570    c) el 10 % de 600    d) el 300 % de 9.

8. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

9. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

## PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. Escribe la cantidad
2. Multiplica por el tanto
3. Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.

*Ejemplo:*

650	*	16	SHIF	%	=	104
-----	---	----	------	---	---	-----



Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- Sigue los pasos 1, 2 y 3 anteriores
- Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual
- Pulsa la tecla – para una disminución porcentual

*Ejemplo:*

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4
------	---	----	-------	---	-------	---	--------

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6
------	---	----	-------	---	-------	---	--------



¿Cuántas veces puedes doblar una hoja de papel? Eduardo Sáenz de Cabezón:

[https://www.youtube.com/watch?v=nc5okMs\\_ss0](https://www.youtube.com/watch?v=nc5okMs_ss0)



## RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

A Esther le gusta ir en bicicleta a la escuela y ha comprobado que en hacer ese recorrido tarda andando cuatro veces más. Tenemos aquí tres magnitudes: tiempo, distancia y velocidad.

**Recuerda que:**

Una **magnitud** es una propiedad física que se puede medir.

A más velocidad se recorre más distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionales**.

A más velocidad se tarda menos tiempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionales**.

Pero, cuidado, no todas las magnitudes son proporcionales. Esto es una confusión muy frecuente. Porque al crecer una magnitud, la otra también crezca, aún no se puede asegurar que sean directamente proporcionales. Por ejemplo, Esther recuerda que hace unos años tardaba más en recorrer el mismo camino, pero la edad no es directamente proporcional al tiempo que se tarda. Vamos a estudiarlo con detalle para aprender a reconocerlo bien.



## 2. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

### 2.1. Magnitudes directamente proporcionales

**Recuerda que:**

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

**Ejemplo:**

- Si tres bolsas contienen 15 caramelos, siete bolsas (iguales a las primeras) contendrán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot 5 = 15 \quad 7 \cdot 5 = 35$$

La **razón de proporcionalidad directa**  $k$  es el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

**Ejemplo:**

- En el ejemplo anterior la razón de proporcionalidad es 5, porque:  $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

**Ejemplo:**

- ✚ Copia en tu cuaderno la siguiente tabla, calcula la razón de proporcionalidad y completa los huecos que faltan sabiendo que es una tabla de proporcionalidad directa:

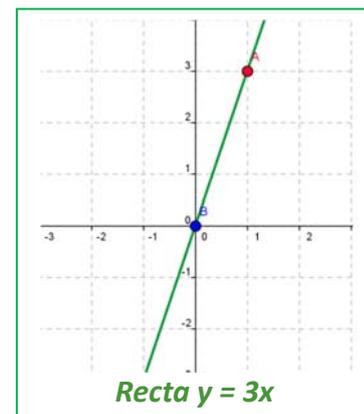
<b>Magnitud A</b>	18	1.5	60	2.7	0.21
<b>Magnitud B</b>	6	0.5	20	0.9	0.07

La razón de proporcionalidad es  $k = \frac{18}{6} = 3$ . Por tanto, todos los valores de la magnitud B son tres veces menores que los de la magnitud A:

$$\frac{18}{6} = \frac{1.5}{0.5} = \frac{60}{20} = \frac{2.7}{0.9} = \frac{0.21}{0.07} = 3.$$

**Observa que:**

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad directa, todos ellos están sobre una **recta** que pasa por el origen de coordenadas. La razón de proporcionalidad es la **pendiente** de la recta. La función lineal  $y = kx$  se denomina también **función de proporcionalidad directa**.

**Ejemplo:**

- ✚ Ecuación de la recta del ejemplo anterior

La ecuación de la recta es  $y = 3x$ . Comprobamos que todos los puntos la verifican:

$$18 = 3 \cdot 6; \quad 1.5 = 3 \cdot 0.5; \quad 60 = 3 \cdot 20; \quad 2.7 = 3 \cdot 0.9; \quad 0.21 = 3 \cdot 0.07.$$

**Reducción a la unidad**

Si debemos usar la misma ecuación de la recta en distintas ocasiones el problema puede simplificarse con la **reducción a la unidad**. Si  $x = 1$  entonces  $y = k$ .

**Ejemplo:**

- ✚ Para celebrar su cumpleaños José ha comprado 3 botellas de refresco que le han costado 4.5 €. Piensa que no van a ser suficientes y decide comprar 2 más. Calcula el precio de las 2 botellas utilizando la reducción a la unidad.

$y = \frac{4.5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4.5}{3} \cdot 1 \Rightarrow k = 1.5 \Rightarrow y = 1.5x$ . Ahora podemos calcular el precio de cualquier número de botellas. En nuestro caso  $x = 2$ , luego  $y = 1.5 \cdot 2 = 3$  €.

**Actividades propuestas**

10. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

<b>Litros</b>	12	7.82		1		50
<b>Euros</b>	36		9.27		10	

11. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

$$a) \frac{24}{100} = \frac{30}{x} \quad b) \frac{x}{80} = \frac{46}{12} \quad c) \frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$$

12. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

## 2.2. Proporcionalidad simple directa

Acabamos de ver que la proporcionalidad simple directa consiste en encontrar la ecuación de una recta que pasa por el origen:  $y = kx$ .

✚ **Ejemplo:** Veinte cajas pesan 400 kg, ¿cuántos kg pesan 7 cajas?

Buscamos la ecuación de la recta:  $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$  Ecuación de la recta

Si  $x = 7$  entonces  $y = 20 \cdot 7 = 140$  kg.

### Actividades propuestas

13. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?



14. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?

15. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

16. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?



17. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1 250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5 823 km?



18. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

19. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

## 2.3. Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **tanto por ciento** es una razón con denominador 100.

**Ejemplo:**

✚  $37\% = \frac{37}{100}$ . La ecuación de la recta es:  $y = \frac{37}{100}x$ .

Los porcentajes son proporciones directas.

**Ejemplo:**

✚ La población de Zarzalejo era en 2013 de 7 380 habitantes. En 2014 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población a final de 2014?

$y = \frac{7380}{100}x$ , por lo que el 5 % de 7 380 es  $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$  habitantes. La población se ha incrementado en 369 habitantes, luego al final de 2014 la población será de:  $7\ 380 + 369 = 7\ 749$  habitantes.

## Actividades propuestas

20. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a)  $\frac{27}{100}$

b) "1 de cada 2"

c)  $\frac{52}{90}$

21. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

22. Un depósito de 2 000 litros de capacidad contiene en este momento 1 036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

23. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

## 2.4. Incremento porcentual. Descuento porcentual. Porcentajes encadenados

### Incremento porcentual

*Ejemplo:*

✚ El ejemplo anterior puede resolverse mediante **incremento porcentual**:  $100 + 5 = 105 \%$

$$y = \frac{7\,380}{100}x, \text{ por lo que el } 105\% \text{ de } 7\,392 \text{ es } y = \frac{7\,380}{100} \cdot 105 = 7\,749 \text{ habitantes.}$$

### Descuento porcentual

✚ En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 30 % de descuento. Calcula el precio de los que aparecen en la tabla:

<b>Precio sin descuento</b>	75 €	159 €	96 €	53 €
<b>Precio en rebajas</b>	52.50 €	111.3 €	67.2 €	37.1 €

Ya que nos descuentan el 30 %, pagaremos el 70 %. Por tanto:  $k = \frac{70}{100} = 0.7$  es la razón directa de proporcionalidad que aplicaremos a los precios sin descuento para calcular el precio rebajado. Por tanto:  $y = 0.7x$ .

### Porcentajes encadenados

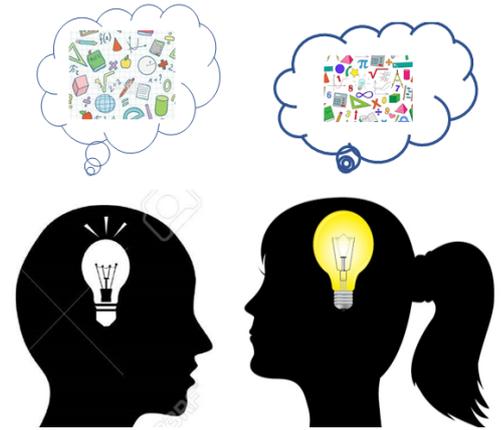
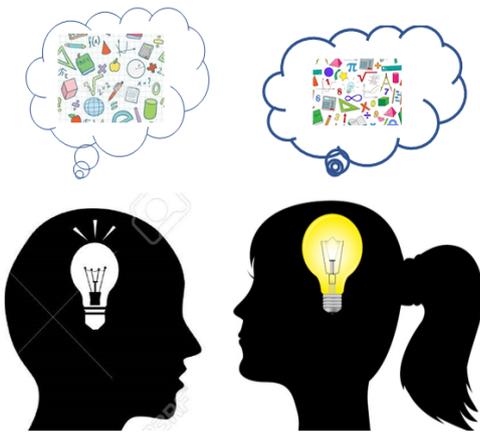
Muchas veces hay que calcular varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales. Podemos **encadenarlos**. En estos casos lo más sencillo es calcular, para cada caso, el tanto por uno, e irlos multiplicando.

**Ejemplo:**

- ✚ En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros? ¿Cuál es el verdadero descuento?

En un descuento del 30 % debemos pagar un 70 % ((100 – 30) %), por lo que el tanto por uno es de 0.7. Por el incremento del precio por el IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tanto por uno es de 1.21. Encadenando el descuento con el incremento tendremos un índice o tanto por uno de  $0.7 \cdot 1.21 = 0.847$ , que aplicamos al precio del artículo, 159 €,  $0.847 \cdot 159 = 134.673 \text{ €} \approx 134.67 \text{ €}$ . Por tanto, nos han descontado 24.33 euros.

Si estamos pagando el 84.7 % el verdadero descuento es el 15.3 %.

**Ejemplo:**

- ✚ Calcula el precio inicial de un televisor, que después de subirlo un 20 % y rebajarlo un 20 % nos ha costado 432 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación?

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1.2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0.8. En total con las dos variaciones sucesivas el tanto por uno es de  $0.8 \cdot 1.2 = 0.96$ , y el precio inicial es  $432 : 0.96 = 450 \text{ €}$ . Precio inicial = 450 €.

El tanto por uno 0.96 es menor que 1 por lo tanto ha habido un descuento porque hemos pagado el 96 % del valor inicial

y este descuento ha sido del 4 %.

**Actividades propuestas**

24. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.
25. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.
26. Copia en tu cuaderno y completa:
  - a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un ..... % de descuento
  - b) Me han descontado el 9 % de una factura de ..... € y he pagado 280 €.
  - c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
27. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?



28. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 %. ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?
29. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.
30. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

### 3. PROPORCIONALIDAD INVERSA

#### 3.1. Magnitudes inversamente proporcionales

*Recuerda que:*

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

*Ejemplo:*

- ✚ Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h tardaría 3 horas en hacer el mismo recorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

La **razón de proporcionalidad inversa**  $k'$  es el producto de cada par de magnitudes:  $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

*Ejemplo:*

- ✚ Copia la tabla en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

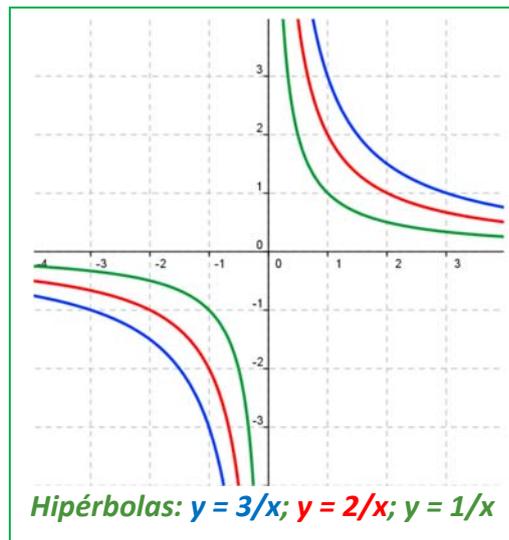
<b>a</b>	18	150	1.5	3600	100
<b>b</b>	50	6	600	0.25	9

$k' = 18 \cdot 50 = 900$ . Comprueba que todas las columnas dan este resultado.

*Observa que:*

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad inversa, todos ellos están sobre la gráfica de una **hipérbola** de ecuación  $y = \frac{k'}{x}$ . La razón de proporcionalidad inversa es la **constante  $k'$** . A

esta hipérbola  $y = \frac{k'}{x}$  también se la denomina **función de proporcionalidad inversa**.

**Ejemplo:**

✚ Ecuación de la hipérbola del ejemplo anterior

La hipérbola es  $y = \frac{900}{x}$ . Comprobamos que todos los puntos verifican la ecuación de dicha hipérbola:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1,5} = 600; \quad y = \frac{900}{3600} = 0.25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

**Actividades propuestas**

31. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

<b>Número de obreros</b>	1	5	7	12			60
<b>Horas de trabajo</b>			80		28	10	

**3.2. Proporcionalidad simple inversa**

Para calcular el cuarto término entre dos magnitudes inversamente proporcionales calculamos la constante de proporcionalidad y escribimos la ecuación de la hipérbola

**Ejemplo:**

✚ Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días, ¿cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ personas.}$$

### Actividades propuestas

32. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?
33. En un huerto ecológico se utilizan 5 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
34. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1.7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2.3 kilogramos?
35. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?
36. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.



<b>Magnitud A</b>	40	0.07		8	
<b>Magnitud B</b>	0.25		5		6.4

### 3.3. Proporcionalidad compuesta

Una proporción en la que intervienen más de dos magnitudes ligadas entre sí por relaciones de proporcionalidad directa o inversa se denomina **proporción compuesta**.

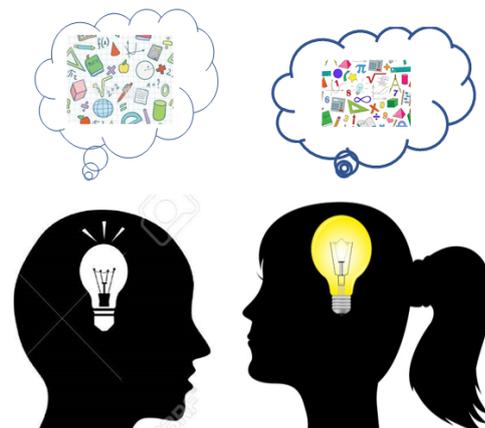
#### Ejemplo:

- ✚ En el instituto 30 alumnos de Bachillerato han ido a esquiar y han pagado 2 700 € por 4 noches de hotel; 25 alumnos de otro curso han ganado en la lotería 3 375 € y deciden ir al mismo hotel. ¿Cuántas noches de alojamiento pueden pagar?

Tenemos tres magnitudes: el número de alumnos, la cantidad en € que pagan por el hotel y el número de noches de hotel. Observa que a más alumnos se paga más dinero, luego estas magnitudes son directamente proporcionales. A más noches de hotel se paga más dinero, luego estas otras dos magnitudes son también directamente proporcionales. Pero para una cantidad de dinero fija, a más alumnos pueden ir menos noches, luego el número de alumnos es inversamente proporcional al número de noches de hotel.

El mejor método es reducirlo a un problema de proporcionalidad simple, para ello obtenemos el precio del viaje por alumno.

Cada alumno de Bachillerato ha pagado  $2\,700 : 30 = 90$  € por 4 noches de hotel. Luego ha pagado por una noche  $90/4 = 22.5$  €. La ecuación de proporcionalidad directa es:  $y = 22.5x$ , donde “y” es lo que



paga cada alumno y “x” el número de noches.

Cada alumno del otro curso cuenta con  $3\,375 : 25 = 135$  € para pasar x noches de hotel, por lo que  $135 = 22.5x$ , luego pueden estar 6 noches.



El número de Euler. Números irracionales. Napier y logaritmos. Interés compuesto. Matemáticas con Juan.

<https://www.youtube.com/watch?v=ggzJhxvqugQ>



### Actividades propuestas

37. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?
38. Si 16 bombillas originan un gasto de 4 500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?
39. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?
40. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?
41. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?
42. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?



43. Si 4 máquinas fabrican 2 400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7 000 piezas durante 10 horas diarias?



## 4. REPARTOS PROPORCIONALES

Cuando se realiza un reparto en partes desiguales se debe establecer previamente si se trata de un reparto proporcional directo o inverso.

### 4.1. Reparto proporcional directo

En un reparto proporcional directo le corresponderá más a quien tiene más partes.

#### Actividad resuelta

- ✚ Tres amigos deben repartirse los 400 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 10 puntos, el segundo 7 y el tercero 3 puntos.

El reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos:  $10 + 7 + 3 = 20$  puntos.

Calculamos el premio por punto:  $400 : 20 = 20$  €.

El primero obtendrá  $20 \cdot 10 = 200$  €.

El segundo:  $20 \cdot 7 = 140$  €.

El tercero:  $20 \cdot 3 = 60$  €.

La suma de las tres cantidades es  $200 + 140 + 60 = 400$  €, la cantidad total a repartir.

Como se trata de una proporción, se debe establecer la siguiente regla:

Sea  $N$  (en el ejemplo anterior 400) la cantidad a repartir entre cuatro personas, a las que les corresponderá  $A, B, C, D$  de manera que  $N = A + B + C + D$ . Estas cantidades son proporcionales a su participación en el reparto:  $a, b, c, d$ .

$a + b + c + d = n$  es el número total de partes en las que ha de distribuirse  $N$ .

$N : n = k$  que es la cantidad que corresponde a cada parte. En el ejemplo anterior:  $k = 400 : 20 = 20$ .

El reparto finaliza multiplicando  $k$  por  $a, b, c$  y  $d$ , obteniéndose así las cantidades correspondientes  $A, B, C$  y  $D$ .

Es decir, ahora la ecuación de la recta es:  $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d} x = \frac{N}{n} x$

#### Actividades propuestas

- Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
- Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?
- La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
- Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
- Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

## 4.2. Reparto proporcional inverso

En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.

Sea  $N$  la cantidad a repartir y  $a$ ,  $b$  y  $c$  las partes. Al ser una proporción inversa, el reparto se realiza a sus inversos  $1/a$ ,  $1/b$ ,  $1/c$ .

Para calcular las partes totales, reducimos las fracciones a común denominador, para tener un patrón común, y tomamos los numeradores que son las partes que corresponden a cada uno.

### Actividad resuelta

✚ Repartir 4 000 € de forma inversamente proporcional a 12 y 20.

Calculamos el total de las partes:  $1/12 + 1/20 = 5/60 + 3/60 = 8/60$ .

$4\ 000 : 8 = 500$  € cada parte.

$500 \cdot 5 = 2\ 500$  €.

$500 \cdot 3 = 1\ 500$  €.

En efecto,  $2\ 500 + 1\ 500 = 4\ 000$ .



### Actividades propuestas

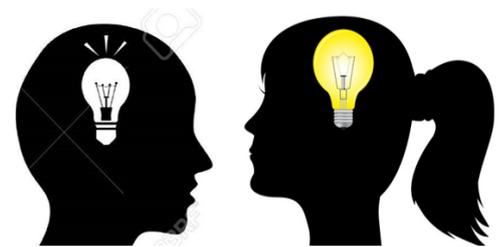
49. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

50. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

51. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3 000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

52. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

53. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?



## 5. TASAS Y NÚMEROS ÍNDICE

La palabra “tasa”, según el diccionario, puede tener dos significados:

1: Relación entre dos magnitudes

2: Tributo que se impone al disfrute de ciertos servicios o al ejercicio de ciertas actividades.

### 5.1. Tasas

En toda tasa se da la cantidad que interesa en relación a una cantidad de referencia.

#### Tasa de natalidad

La tasa de natalidad es un indicador social. Es el número de nacimientos vivos de una población por cada mil habitantes en un año.

##### Ejemplos:

- + Tasa de natalidad: 21.64 0/00  $\Rightarrow$  Nacen 21.64 bebés por cada 1 000 habitantes.
- + La tasa de natalidad en España en el año 2020 fue de 7.19 0/00. Ese mismo año en Francia fue de 10.90 0/00, en Afganistán de 31.15 0/00.

#### Tasa de paro o desempleo

Mide el nivel de desocupación en relación con la población activa. Es la parte de la población que estando en edad, condiciones y disposición de trabajar (población activa), no tiene puesto de trabajo. Es decir, mide el nivel de población que quiere trabajar y no encuentra trabajo.

Se calcula dividiendo el número de desempleados entre la población activa, y multiplicando por 100.

Se puede desagregar por franjas de edad, por sexos, por área de residencia...

##### Ejemplos:

- + Tasa de paro: 12 %  $\Rightarrow$  12 parados por cada 100 personas de la población activa.
- + Si un país tiene una población activa de 10 000 000 de los que hay 1 000 000 de desempleados su tasa de paro es de: 10 %.
- + En un cierto año la tasa de paro de Mauritania era del 31 %, la de España del 26.6 %, la de Portugal del 16.5 %, la de la Unión Europea del 10.9 %, la de Cuba del 3.2 %, la de Suiza del 4.4 %

#### Tasa de alcoholemia

La **tasa de alcoholemia** indica el volumen de alcohol que hay en la sangre y se mide en gramos de alcohol por cada litro de sangre (g/l) o su equivalente en aire espirado.

Según la Dirección General de Tráfico la tasa de alcoholemia permitida en España es de 0.25 mg/l. Esto significa que el límite permitido es de 0.5 gramos por litro de sangre (o 0.25 miligramos por litro en aire espirado), y 0.3 gramos por litro en sangre (o 0.15 miligramos por litro de aire espirado) para conductores noveles y profesionales. Aunque la ley de tráfico de marzo de 2022 no está permitido nada de alcohol.

## Tasas administrativas

Son las que se pagan por realizar trámites y gestiones personales con organismos del Estado, de los ayuntamientos y de las comunidades autónomas

*Algunos ejemplos:*

### + Tasas académicas

Cada año, al formalizar tu matrícula, pagas las tasas académicas que convierten tus estudios en oficiales, te posibilitan registrarte en pruebas de evaluación o solicitar documentos académicos oficiales como títulos o certificados

### + Tasas 790 sobre extranjería

**Tasa 790-052** que pagan las personas extranjeras al trabajar en nuestro país y que corresponden a la solicitud temporal de residencia y trabajo por cuenta ajena

#### Tasa 790-062

Cantidad que paga el empleador cuando se tramita la autorización o renovación de la residencia temporal y de trabajo por cuenta ajena de un trabajador extranjero

#### Tasa 790-012

Se paga por la solicitud del NIE físico, documento de identificación personal de personas extranjeras

- + De igual manera, la renovación de nuestros pasaportes o DNI también están sujetos a tasas administrativas.

En general, las Administraciones Públicas aplican las llamadas Tasas Administrativas que se pagan por la utilización para beneficio particular de un bien público. Se diferencian de los impuestos en el hecho de que cada Administración fija una cuantía que se aplica por igual a toda persona solicitante.

## Tasa de interés

Son el precio que se paga o se obtiene por el dinero al solicitar un préstamo o al depositar una cantidad en el banco durante un plazo de tiempo

Cuando se solicita un préstamo las tasas suponen un coste adicional a las condiciones del préstamo.

Cuando se deposita un dinero en el banco, se acuerdan unas condiciones para obtener rentabilidad y aparecen de nuevos las tasas a modo de recargos de gestión.

Ya sabes que el capital final puede calcularse a partir de esta fórmula:

$$C_F = C (1 + r^n)$$

Donde  $r$  es el tipo de interés nominal fijo,  $n$  la modalidad de plazos de pago pactados y  $C$  el capital prestado

Y hay que tener en cuenta que:

Al devolver un préstamo pagamos, además de la cantidad solicitada y los intereses al tipo aplicable por el banco, una serie de gastos que se añaden a la base para el cálculo de los intereses.

Hay toda una gama de tipos de interés a aplicar en distintas operaciones financieras: nominal, efectiva, real, variable, fija...

Las tasas de interés son el precio que se paga o se obtiene por el dinero, bien al solicitar un préstamo o al depositar una cantidad en un depósito.

Nosotros vamos a fijarnos en dos tasas que aparecen relacionadas con la financiación en la compra de un producto: **TIN y TAE**.

## Tipo de interés nominal (TIN)

**TIN es el tipo de interés nominal**, un porcentaje fijo que se paga por el dinero prestado o depositado. Es un tipo orientativo pero no nos da una información real

**Ejemplo:**

$$✚ \text{ TIN} = \text{euríbor (0.042)} + \text{diferencial (1.14)} = 1,182 \%$$

A este porcentaje aplicado hay que añadir los gastos de gestión, comisiones, etc. Por lo que es sólo un indicador, pero no será el resultado real de los intereses a pagar.

El TIN se aplica generalmente de modo mensual y es obligatorio que aparezca en el contrato.

Es un porcentaje fijo y el cálculo del capital final de la operación responde a esta fórmula sencilla:

$$C_f = C (1 + r \cdot n)$$

Donde  $C_f$  es el capital final,  $C$  el capital inicial  $r$  el tipo de interés y  $n$  el periodo (anual, trimestral...) de amortización.

## Actividad resuelta

- ✚ Calcula el capital final de un depósito de 24 000 € que se ha depositado al 1.25 % de interés nominal anual durante 5 años

$$C_f = 24\,000 (1 + 0.0125 \cdot 5) = 25\,500 \text{ €}$$

## Actividades propuestas

54. Calcula los intereses de un depósito de 15 000 € a tres años con un TIN del 6 %
55. ¿Se obtienen los mismos intereses por esos 15 000 €, si consideramos un 2 % cada año en los tres años?
56. ¿Cuántos años deben depositarse 1 500 € al 3 % anual para obtener 90 € de intereses?

## Tasa anual equivalente (T.A.E.)

**TAE es la Tasa Anual Equivalente** que se aplica a un préstamo o depósito bancario. Es la que proporciona una información más fiel que la TIN para calcular el precio real del dinero en ese momento.

El cálculo de la TAE a aplicar será el resultado final de tener en cuenta la cuantía del préstamo o depósito, los gastos, el plazo de la operación, el riesgo de impago, el precio del dinero en el mercado, etc.

Se expresa en forma de porcentaje y se calcula por aproximación con una fórmula matemática normalizada que toma como base el tipo de interés nominal (TIN)

$$TAE = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1$$

Esta fórmula es, de nuevo, una aproximación a la realidad.

Esta tasa está sujeta a variaciones en el mercado y se adapta a las condiciones de la persona que contrata: plazos, forma de amortización de la deuda, etc.

### Actividad resuelta

- ✚ Calcula la TAE a aplicar a un préstamo de 8 000 € al 5.4 % de interés nominal amortizado mensualmente en 18 meses.

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{0.054}{12}\right)^{12} - 1 = 0.055. \quad TAE = 5.5 \%$$

### Actividades propuestas

- Calcula la TAE que se aplica a un préstamo de 15 000 € al 9 % TIN anual a devolver mensualmente en 5 años
- ¿Qué tipo de interés nominal ha dado como resultado una TAE del 7.012 % para un depósito que percibe los intereses trimestralmente

Pago mensual de intereses:

$$1 + \frac{C}{100} = \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^n$$

siendo  $C$  el capital y  $n$  el número de meses

### Actividades resueltas

- ✚ Si colocamos 600 € al 2 % anual con capitalización trimestral, en un año genera un montante de:

$$M = 600 \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^4 = 612.090$$

Si ahora nos preguntamos, ¿a qué tanto por ciento anual hemos de colocar el mismo capital para generar el mismo montante con capitalización anual?

$$612.090 = 600 \left(1 + \frac{T.A.E.}{100}\right)^1$$

Operando, obtenemos el T.A.E. = 2.015

Esto indica que el T.A.E. es el tanto por ciento anual, que genera el mismo montante que una capitalización en  $n$  periodos de tiempo al año al  $r$  % anual.

El Banco de España en su PORTAL DEL CLIENTE BANCARIO ofrece unos simuladores en los que se pueden introducir los datos para obtener la TAE de, por ejemplo, un préstamo personal.

### Actividades propuestas

59. Aplica el simulador del Banco de España para calcular la TAE de un préstamo de 12 000 € al 5.8 de tipo nominal con unos gastos de 250 € a amortizar en tres años con periodicidad mensual.
60. Utiliza el simulador para comparar estas dos opciones de préstamo:
- 25 000 €, 540 € de gastos, 6.25 TIN, a amortizar en 8 años.
  - 25 000 €, 400 € de gastos, 6.5 TIN, a amortizar en 8 años.

## 5.2. Números índice

Un número índice,  $NI$ , es una herramienta o parámetro creada para estudiar la variación en el tiempo de una determinada magnitud económica.

$$NI = \frac{\text{Medida actual de la magnitud}}{\text{Medida antigua de la magnitud}}$$

Los números índices son útiles para comparar variables o magnitudes medidas en unidades distintas.

- + **Por ejemplo**, en Economía, con los números índices se puede analizar la variación de los costes de la luz, o de la alimentación en un país, o en una ciudad, durante un año con los del año anterior.
- + **Por ejemplo**, en Educación, se pueden usar los números índices para comparar la inteligencia relativa de estudiantes en sitios diferentes o en años diferentes. O la evolución de las calificaciones en Selectividad, entre este año y un año de referencia. O el abandono escolar en un cierto intervalo de tiempo.

Destacamos:

### Índice de las bolsas:

**El índice de las bolsas** refleja el valor global de las empresas que se cotizan en ellas. El valor del Índice en cada momento se obtiene mediante cálculos muy complejos en los que se valoran las cotizaciones de las acciones y la cantidad que se comercializa de cada una. Más que su valor concreto, se puede prestar atención a su variación porcentual respecto a una fecha anterior:

- + *El IBEX 35 ha subido un 0.80 % durante esta semana.*

### Índice de precios al consumo (IPC)

Especialmente importante es el **índice de precios al consumo (IPC)**: No tiene, en cada momento, un valor determinado, sino que se evalúa en referencia al año (o al mes) anterior:

- + *El IPC ha subido en mayo un 0.28 %, con lo que acumula un crecimiento anual del 3.56 %.*

Para calcular la variación mensual del IPC, se tiene en cuenta la variación del precio de cada uno de los bienes de consumo y la cantidad invertida en el mismo durante ese mes.

El índice de precios al consumo es un número índice que se utiliza para medir la variación de la inflación.

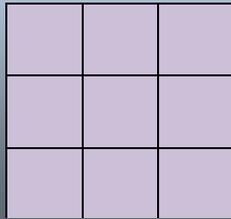
Se calcula tomando el precio de una serie de artículos representativos de consumo habitual (cesta de la compra),  $p_1, p_2, p_3, \dots$  Y multiplicando dichos precios por su correspondiente peso o ponderación,  $q_1, q_2, q_3, \dots$  según la importancia asignada en el momento

$$IPC = \frac{\text{Medida actual de la magnitud}}{\text{Medida antigua de la magnitud}} = \frac{p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21} + p_{31}q_{31} + \dots}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + p_{30}q_{30} + \dots}$$

Luego se expresa como un porcentaje.

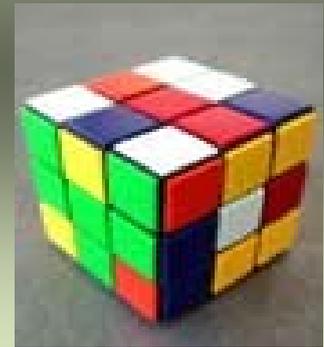
**CURIOSIDADES. REVISTA****Proporcionalidad en áreas y volúmenes**

Al aumentar el lado de un cuadrado al doble, su superficie queda multiplicada por 4. Al multiplicar por 3 el lado, el área se multiplica por 9.



En general, si hacemos un cambio de escala de factor de proporcionalidad  $k$ , el área tiene un factor de proporcionalidad  $k^2$ , y el volumen  $k^3$ .

Al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen queda multiplicado por 8. Al multiplicar por 3 el lado, el volumen se multiplica por 27.



Utiliza esta observación para resolver los siguientes problemas:

**La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?**

**Antes de empezar a calcular, da tu opinión.**



*Ayuda:*  $k^3 = 8\ 000\ 000/1$  luego  $k = 200$ . Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá  $300/200 = 1.5$  m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!



1. En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
2. Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
3. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplo
<b>Razón</b>	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
<b>Proporción</b>	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
<b>Proporcionalidad directa</b>	<p>Dos magnitudes son <b>directamente</b> proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.</p> <p>La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: <math>y = kx</math>. La pendiente de la recta, <math>k</math>, es la <b>razón de proporcionalidad directa</b>.</p>	Para empapelar $300 \text{ m}^2$ hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de $104 \text{ m}^2$ , necesitaremos 8.32 rollos, pues $k = 300/24 = 12.5$ , $y = 12.5x$ , por lo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rollos.
<b>Proporcionalidad inversa</b>	<p>Dos magnitudes son <b>inversamente</b> proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.</p> <p>La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola <math>y = k'/x</math>. Por tanto la <b>razón de proporcionalidad inversa</b> <math>k'</math> es el producto de cada par de magnitudes: <math>k' = a \cdot b = a' \cdot b'</math>.</p>	Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$ , $y = 8/x$ , por lo que tardarán 2 días.
<b>Porcentajes</b>	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2 400 es $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$
<p><b>Reparto proporcional directo</b></p> <p>Repartir directamente a 6, 10 y 14, 105 000 €</p> $6 + 10 + 14 = 30$ $105\,000 : 30 = 3\,500$ $6 \cdot 3\,500 = 21\,000 \text{ €}$ $10 \cdot 3\,500 = 35\,000 \text{ €}$ $14 \cdot 3\,500 = 49\,000 \text{ €}$		<p><b>Reparto proporcional inverso</b></p> <p>Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 y 6</p> $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5\,670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = \mathbf{2\,700}$ $270 \cdot 6 = \mathbf{1\,620}$ $270 \cdot 5 = \mathbf{1\,350}$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de  $400 \text{ m}^2$ , ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
2. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?
3. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?
4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?
5. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?
6. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?



7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es  $k = 1.8$ , copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

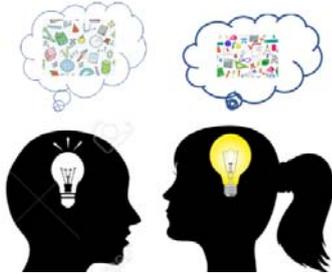
<b>Magnitud A</b>	15.9			0.01	
<b>Magnitud B</b>		6	0.1		10

8. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
9. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1 500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
10. Si un litro de leche de 0.85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
11. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?
12. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
13. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
14. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?
15. Por liquidar una deuda de 35 000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30 800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
16. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
17. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
18. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?



19. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
20. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

21. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?



22. Si 15 operarios instalan 2 500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valla?

23. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

24. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

25. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

26. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

27. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

28. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?



29. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

30. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

31. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

32. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

**AUTOEVALUACIÓN**

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación  
 a) Proporcional directa                      b) proporcional inversa                      c) no es proporcional
2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:  
 a) 22.4 €                      b) 30.6 €                      c) 26.4 €                      d) 24.2 €
3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699.20€. El importe total de la factura sin descuento era:  
 a) 920 €                      b) 1 220 €                      c) 880 €

4. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

<b>A</b>	10	0.25		0.1	100
<b>B</b>		50	5		

- a) 612.5; 1000; 0.0005; 0.5                      b) 1.25; 2.5; 125; 0.125                      c) 62; 500; 0.005; 0.05
5. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:  
 a) 2 000 €                      b) 1 900 €                      c) 1 800 €                      d) 1 500 €.
6. Un artículo que costaba 2 000 € se ha rebajado a 1 750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:  
 a) 10 %                      b) 12.5 %                      c) 15.625 %                      d) 11.75 %
7. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?  
 a) 590 botellas                      b) 700 botellas                      c) 650 botellas                      d) 680 botellas
8. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

<b>A</b>	5.5	10		11	
<b>B</b>	20		0.5		0.1

- a) 40; 200; 11.5; 1000    b) 11; 200; 20; 300    c) 11; 220; 10; 1100                      d) 40; 220; 10; 500
9. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:  
 a) 24 t y 20 t                      b) 20 t y 24 t                      c) 24 t y 18 t                      d) 25 t y 20 t
10. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?  
 a) 3 rollos                      b) 5 rollos                      c) 4 rollos                      d) 2 rollos