Matemáticas Generales. 1º Bachillerato. Capítulo 1: Sentido de las operaciones

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya

Ilustraciones: De los autores, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Resumen

En este capítulo vamos a repasar las operaciones con distintos tipos de números, enteros, racionales e irracionales. Resolveremos problemas de la vida cotidiana en los que se deban realizar este tipo de operaciones, analizando el error cometido. En particular resolveremos problemas de la vida cotidiana con fracciones y con decimales. También revisaremos las potencias y los radicales. Realizaremos operaciones usando la notación científica. En todo caso, siempre que sea posible usando herramientas tecnológicas.

0. TE CONVIENE RECORDAR

0.1. Prioridad de las operaciones

Cuando no hay paréntesis que nos indiquen qué operación hacer primero o en operaciones dentro de un paréntesis se llegó a un acuerdo para saber cómo actuar. A saber:

1º Se resuelven los paréntesis interiores.

Si no hay paréntesis o dentro de un paréntesis haremos:

2º Las potencias y las raíces

3º Las multiplicaciones y divisiones.

4º Las sumas y restas.

Se deben evitar:

Expresiones del tipo $1 - 100 : 5 \cdot 5$, donde no está claro qué hacer (la multiplicación y división tienen igual prioridad). Se deben poner paréntesis para indicar cual hacer primero. La expresión de arriba puede ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ o bien } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De todas formas, si te la encuentras, harás:

5º Si hay varias operaciones con igual prioridad se harán de izquierda a derecha.

Ejemplos:

- *$(5 - 7) \cdot 10 - 8$* **No podemos hacer 10 – 8** *(bueno sí puedes, pero no debes)*

Primero el paréntesis → $-2 \cdot 10 - 8$ Después el producto → $-20 - 8$ Por último la resta → -28

- *$10 - 2 \cdot 3^2 = 10 - 2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Aquí está prohibido hacer $10 - 2$ y hacer $2 \cdot 3$.*
- *$3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$*
- *-10^2 vale -100 ya que primero se hace la potencia y además el signo menos no está elevado a 2. Sin embargo $(-10)^2$ sí que vale $+100$.*
- *$-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$*
- *$(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$*
- *$\sqrt{9} \cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primero se hace la raíz.*
- *$10 - 9x$ **no** es $1x$ puesto que no puede hacerse la resta bajo ningún concepto.*

Ten en cuenta que esta prioridad es **válida siempre**, para operaciones con todo tipo de números u otros objetos (por ejemplo: polinomios). Merece la pena sabérsela, ¿no?

Vídeo general sobre la belleza de las Matemáticas. El libro de la naturaleza está escrito con caracteres matemáticos. Galileo La matemática, geometría, estudio de planos, ángulos y sólidos. La geometría de la vida desde los microbios hasta el hombre depende de una estructura Geométrica.

video

https://www.youtube.com/watch?v=foBuoZwa9Xs

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

0.2. Uso de paréntesis

Los paréntesis nos indican las operaciones que se tienen que hacer primero. De hecho lo primero que haremos serán los **paréntesis interiores** y seguiremos **de dentro hacia fuera**. Es como vestirse: primero te pones la camiseta, luego el jersey y después la cazadora. Es complicado hacerlo al revés. Por ello, antes de ponerte a calcular a lo loco, mira toda la expresión para ver qué se hace primero.

- Debe haber tantos paréntesis abiertos como cerrados, en caso contrario se dice que “los paréntesis no están bien balanceados”.
- Si algo multiplica a un paréntesis no es necesario poner el símbolo “·”.

Ejemplos:

- $2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$
- $2(3 - 2) = 2 \cdot 1$
- $(2 - 3) \cdot (6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$
- *Si queremos dividir entre 2 el resultado de hacer 75 – 90* ***no pondremos esto 75 – 90 : 2****, aquí el 2 sólo divide a 90. Escribiremos (75 – 90) : 2*

Los paréntesis se utilizan para meter argumentos de funciones.

Por ejemplo:

- *Si en un programa o en la calculadora queremos hacer la raíz de* $100 \cdot 3^4$*, escribiremos raíz(100*3*^{4}*).*

Fibonacci. La magia de los números. ¿De dónde procede nuestro sistema de numeración? ¿Por qué es mejor el sistema de numeración decimal que el Romano? Actualmente éste es el sistema de numeración adoptado por todo el mundo, ¿fue siempre fácilmente aceptado? Fibonacci tuvo un papel fundamental en la difusión y conocimiento de nuestro sistema de numeración. Más por menos. La aventura del saber. Antonio Pérez.

[Más por menos: Fibonacci. La magia de los números | RTVE Play]

0.3. Operaciones con enteros

Recordamos lo más importante:

Regla de los signos para la suma:

- *La suma de 2 números positivos es positiva.* **Ejemplo:** $+5 + 7 = +12$
- *La suma de 2 números negativos es negativa.* **Ejemplo:** $-10 - 17 = -27$

Suma	+	–
+	+	>
–	>	–

Se pone el signo –, y se suman sus valores absolutos.

Ejemplo:

- *Si pierdo 10 y después pierdo otros 17, he perdido 27*

La suma de un número positivo con otro negativo tendrá el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplos:

- $-7 + 15 = +8$; $+8 + (-20) = 8 - 20 = -12$

Se pone el signo del más grande (en valor absoluto) y se restan.

- *Si pierdo 7 y después gano 15, he ganado 8 (son mayores las ganancias que las pérdidas).*
- *Si gano 8 pero después pierdo 20, he perdido 12 (son mayores las pérdidas).*

Regla de los signos para la multiplicación (y la división):

- Positivo x Positivo = Positivo
- Positivo x Negativo = Negativo x Positivo = Negativo
- Negativo x Negativo = Positivo.

x	+	–
+	+	–
–	–	+

Ejemplos:

- +2 · (–7) = –14. Si recibo de herencia 2 deudas de 7 €, tengo una deuda de 14 €.
- –2 · (–7) = +14. Si me quitan 2 deudas de 7 €, ¡he ganado 14 €!

Ahora algo de matemáticas serias, que ¡ya estamos en 3º!

Actividades resueltas

- *Calcula paso a paso*:

$$(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4 \cdot 2) \cdot (-10)$$

Calculamos en primer lugar –20 – 6 = –26; 4^2 = 16 y 4 · 2 = 8 y nos queda:

(((–15 – 5 · (–26)) : (15 – 16)) + 5 – 8) · (–10) = (((–15 + 130) : (–1)) – 3) · (–10) =

((115 : (–1)) – 3) · (–10) = (–115 – 3) · (–10) = –118 · (–10) = +1 180

Actividades propuestas

1. Calcula:

a) –20 + 15 b) –2 · (–20 + 15) c) –20 : (10 – 2(–20 + 15))

d) (–80 –20 : (10 – 2(–20 + 15))) · (3 – 2 · 3^2)

2. Calcula:

a) –10 + 20 : (–5) b) (–10 + 20) : (–5) c) –100 : ((–20) : (–5))

d) (–100 : (–20)) : (–5) e) $\sqrt{36} \cdot 4$

3. Calcula:

a) $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^3$ b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$

c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$ d) $2 - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4)^2 - (2 - 4)^3$

4. Utiliza la calculadora para obtener:

a) $5.7 - (6.79 \cdot 2.3 - 2.1 \cdot 5.6)^2 - (3.42 - 5.9)^3$

b) $5.76 - 3.5^2 - 2.98 \cdot (-5.54) - (7.29 - 9.36)^2$

c) $70.65 - 28.54 \cdot (3.62 - 566)^2 + 2.46 \cdot (-3.82) + 8.91 - (-2.76)^2$

d) $2.22 - (2.77 \cdot 3.48 - 39 \cdot 4.23)^2 - (2.45 - 4.26)^3$

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales

Operaciones con números enteros

Recuerda que:

Los números **naturales** son: $\mathbb{N}$ = **{1, 2, 3 …}**.

Existen ocasiones de la vida cotidiana en las que es preciso usar números diferentes de los números naturales. Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplos:

- Si se tienen 20 € y se gastan 30 euros, se tendrá una deuda de 10 euros, es decir –10 €.
- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 °C.
- Al bajar en ascensor al sótano 3, has bajado al piso –3.

Los **números enteros** son una ampliación de los números **naturales** ($\mathbb{N}$). Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Los enteros **negativos** van precedidos del signo –: –1, –2, –3… El **cero** es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ = **{…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}.**

Recuerda que:

Para **sumar** (o restar) números enteros podemos sumar por un lado todos los números enteros positivos, y los negativos por otro, restando el resultado.

Ejemplo:

- Si *a, b* y *c* son números enteros entonces:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Para **multiplicar** o dividir números enteros se tiene en cuenta la regla de los signos.

Ejemplo:

- $(+5) \cdot (+4) = +20 \quad (-3) \cdot (-5) = +15 \quad (+5) \cdot (-4) = -20 \quad (-6) \cdot (+5) = -30$

Actividades propuestas

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$

d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$ e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

6. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. $6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 20$ b. $-8 \cdot (+5) + (-4) \cdot 9 + 50$

c. $(-3) \cdot (+9) - (-6) \cdot (-7) + (-2) \cdot (+5)$ d. $-(-1) \cdot (+6) \cdot (-9) \cdot (+8) - (+5) \cdot (-7)$

Operaciones con fracciones

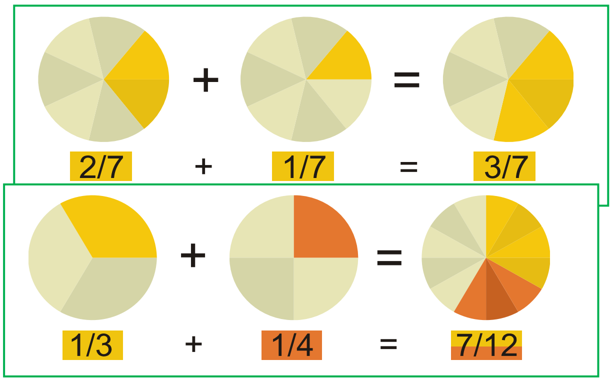
Recuerda que:

Una ***fracción*** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m* como *n* son números enteros. Para referirnos a ella decimos *"m partido por n"*; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* el de ***denominador***.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador, reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador, reciben el nombre de **fracciones propias.**

Para **sumar** o restar fracciones que tienen **el mismo denominador** se realiza la suma, o la resta, de los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador, buscando el mínimo común múltiplo de los denominadores.



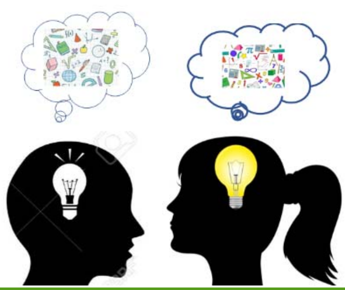
Ejemplos:

a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

Los denominadores son diferentes, 3 y 4. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 3 nos da 4 y al hacerlo entre 4 obtenemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Actividades propuestas



7. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

Actividades propuestas

8. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

9. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con expresiones decimales

Una **expresión decimal** consta de dos partes: su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma.

Observa que:

La coma se puede escribir arriba: 3'5 (aunque actualmente la RAE lo considera falta de ortografía), o abajo: 3,5, o también se utiliza un punto: 3.5. En este capítulo vamos a utilizar el punto.

Para **sumar o restar** expresiones decimales, basta conseguir que tengan el mismo número de cifras decimales.

Ejemplo:

a) 24.7 + 83.15 – 0.05 = 24.70 + 83.15 – 0.05 = 107. 80 b) 53.39 – 56 + 0.06 = 53.45 – 56.00 = –2.55

Para **multiplicar** dos expresiones decimales, se multiplican ignorando la coma que posee cada una de ellas. Al resultado de ese producto se le pone una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplo:

- $5.7a \cdot 3.2a \cdot 7.14a = 130.2336a^3$

Para **dividir** expresiones decimales igualamos el número de cifras decimales de ambos números, y luego dividimos.

Ejemplo:

- $\frac{9.3}{4.81} = \frac{9.30}{4.81} = \frac{930}{481} = 1.9$

Actividades propuestas

10. Realiza las operaciones:

a) $31.3 + 5.97$ b) $3.52 \cdot 6.7$ c) $11.51 - 4.8$ d) $19.1 - 7.35$

e) $4.32 + 32.8 + 8.224$ f)$46.77 - 15.6 + 2.3$ g) $1.16 \cdot 3.52$ h) $3.2 \cdot 5.1 \cdot 1.4$

i) $2.3 \cdot 4.11 \cdot 3.5$ j) $4 \cdot (3.01 + 2.4)$ k) $5.3 \cdot (12 + 3.14)$ l)$3.9 \cdot (25.8 - 21.97)$

1.2. Números racionales. Fracciones y expresiones decimales

Toda expresión decimal exacta, o periódica, se puede poner como fracción.

Una expresión **decimal exacta** se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Ejemplo:

- $93.15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$

Para escribir en forma de fracción una expresión **decimal periódica**, como por ejemplo, N = 1.725252525…, tenemos que conseguir dos números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales:

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$N = 1.7252525...$$
$$1000N = 1725.2525...$$
$$10N = 17.2525...$$
$$Si\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para ello multiplicamos a N de forma que la coma quede después del primer periodo, en este caso después de 1725. También multiplicamos a N de manera que la coma quede al principio del primer periodo, en este caso detrás de 17. Ahora 1000N y 10N tienen la misma parte decimal (infinita) que si restamos desaparece, y podemos despejar N.

Actividades propuestas

11. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23; d) 2.353535…..

e) 87.2365656565….; f) 0.9999…..; g) 26.5735735735…..

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta, o periódica.

Recuerda que:

Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 su expresión decimal es exacta.

Ejemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0,025;\ ya\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, y esto es general ya que siempre habrá una potencia de 10 que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de 2 y 5.

Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Ejemplo:

- Si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente? La respuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten. Por lo tanto, la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto, pero 1/23 tiene un periodo de 22 cifras, 1/97 lo tiene de 96 cifras, sin embargo 1/37 tiene un periodo de sólo 3 cifras.

Se llaman **números racionales** a aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica, y se les representa por $\mathbb{Q}$. Acabamos de ver que se pueden escribir en forma de fracción por lo que se puede definir el conjunto de los números racionales como:

$$Q = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

¿Por qué imponemos que el denominador sea distinto de cero? Observa que no tiene sentido una fracción de denominador 0.

Actividades propuestas

12. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

13. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

1.3. Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Ya conoces algunos: π, $\sqrt{2}$ ... Cuando los griegos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, o como el número de oro, que no se podían poner en forma de fracción y que tenían, por tanto, infinitas cifras decimales no periódicas, les pareció algo insólito. Por eso estos números recibieron ese extraño nombre de "*irracionales*". No lo podían entender dentro de su filosofía. Lo interesante es que existe una longitud que mide exactamente $\sqrt{2}$, que es la diagonal de cuadrado de lado 1, o la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

El método para demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción se denomina "reducción al absurdo" y consiste en suponer que sí se puede, y llegar a una contradicción. Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ...

Pero no vale para todos los irracionales. Para demostrar que π es un número irracional hay que estudiar mucho. Está relacionado con el interesante problema de la *cuadratura del círculo*. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por *Lambert*. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

Estos números cuya expresión decimal es infinita y no periódica se denominan **números irracionales**.

Se llaman **números reales** al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Con estos números tenemos resuelto el problema de poder medir cualquier longitud. Esta propiedad de los números reales se conoce con el nombre de *completitud*.

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Observa que también a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero no al contrario, pues $\sqrt{2}$ es un punto de la recta que no es racional.

Actividades propuestas

14. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1.4, pues $(1.4)^2$ es distinto de 2; no 1.41 pues $(1.41)^2$ es distinto de 2; ni 1.414, pues $(1.414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.

15. Halla la expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

Notación:

$\in$ significa "pertenece a"

$\cup$ significa "unión"

$\subset$ significa "incluido en"

$\cap$ significa "intersección"

1.4. Distintos tipos de números

Ya conoces distintos tipos de números:

Naturales ➔ N = {1, 2, 3, …}

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 no suele considerarse un número natural.

Enteros ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Son los números naturales, sus opuestos y el cero. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra Q. Por tanto

Racionales ➔ $\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Los números racionales incluyen a los Enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0.12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7.01252525…) pues pueden escribirse en forma de fracción.

Los números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi \ldots$ son los números **irracionales**, y tienen una expresión decimal infinita no periódica. Junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Por tanto

Irracionales ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$.

Son números irracionales aquellos números que **no** pueden ponerse como fracción de números enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho, hay más que racionales ¡!), son todos aquellos que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo.** Ejemplos: 17.6766766676… que me lo acabo de inventar o 0.1234567891011… que se lo inventó *Carmichael*. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora ☺)

Reales ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

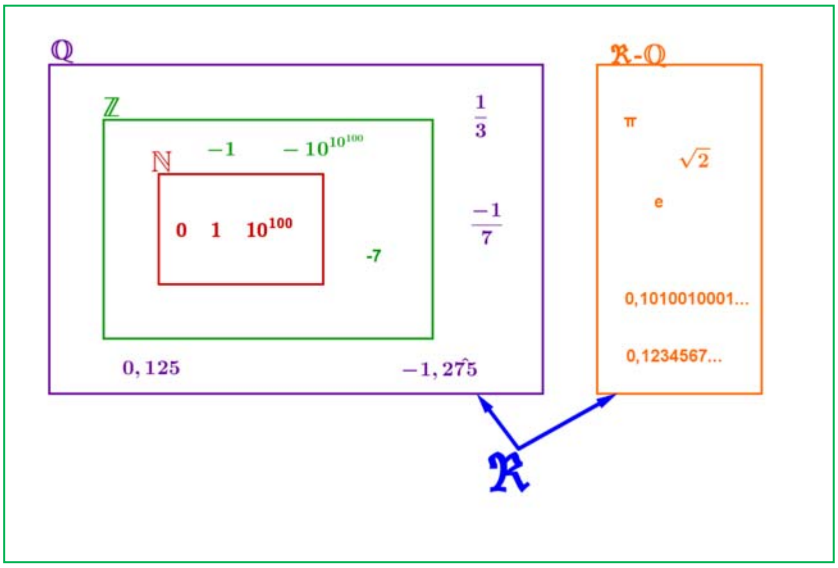
Tenemos por tanto que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re.$$

$$\mathrm{I} \subset \Re$$

¿Son estos todos los números?

No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos $\mathbb{C}$ (en 1º de bachillerato se estudian en la opción de Ciencias).

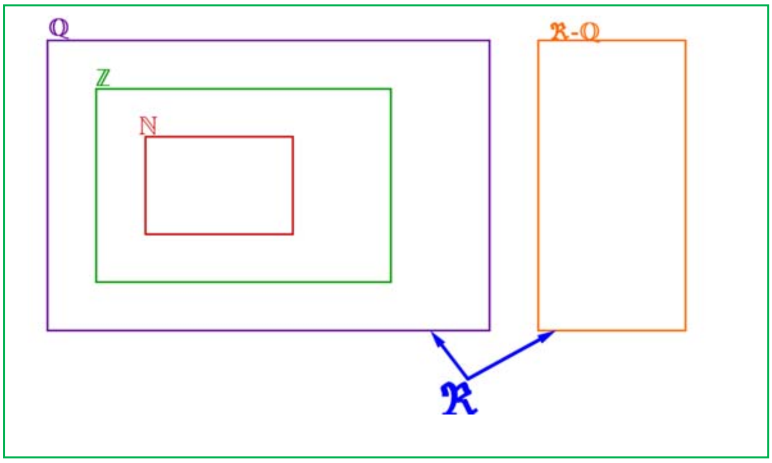


Actividades propuestas

16. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	$\Re$
-7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212…					
π					
1/2					
1.99999…					

17. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



18. ¿Puedes demostrar que 4.99999… = 5?, ¿cuánto vale 2.5999…? Escríbelos en forma de fracción.

19. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIONES

Vemos unos cuantos ejemplos:

i) ¿Cuántos litros hay en 80 botellas de 3 cuartos de litro cada una?

Lo primero que debes hacer es ponerte un ejemplo con números más fáciles.

Tengo 10 botellas cada una de 2 litros. Está claro que tenemos 20 litros, ¿qué operación hemos hecho?, ¿multiplicar?, pues lo mismo hacemos con los números del problema:

$$\frac{3}{4} litros \Big/ botella \cdot 80 botellas = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60 litros$$

(Observa que botellas se van con botellas y las unidades finales son litros).

ii) ¿Cuántas botellas de 3 octavos de litro necesito para envasar 900 litros?

Nuevamente cambiamos los números por otros más sencillos: quiero envasar 10 litros en botellas de 2 litros. Está claro que necesito 5 botellas (10 : 2).

Hacemos lo mismo con nuestros números:

$$900 \text{ litros} : \frac{3}{8} \text{ litros/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2\,400 \text{botellas}$$

Fíjate que litros se va con litros y que las botellas que dividen en el denominador al final pasan multiplicando en el numerador, por lo que unidad del resultado es "botellas".

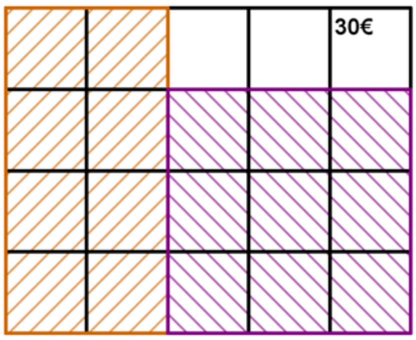
$$\frac{litros}{1} : \frac{litros}{botella} = \frac{litros \cdot botella}{litros} = botella$$

*iii) Lluvia gana cierto dinero al mes, si se gasta el 40 % de él en pagar la letra del piso, el 75 % **de lo que le queda** en facturas y le sobran 90 € para comer. ¿Cuánto gana y cuánto gasta en el piso y en facturas?*

Lo primero: 40 % = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ y 75 % = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Lo hacemos de 2 maneras y eliges la que más te guste:

a) Método gráfico:



Hacemos un rectángulo de 5 x 4 cuadrados que son los denominadores.

De las 5 franjas verticales iguales quitamos 2 que es lo que se gasta en la letra del piso.

Lo que queda está dividido en 4 partes iguales y quitamos 3 que es lo que se gasta en facturas. Nos quedan 3 cuadraditos que son los 90 € de la comida. Luego un cuadradito es 90 : 3 = 30 €.

Lo que gana es 30 · 20 = 600 €.

En la letra se gasta **30 · 8 = 240 €** y en facturas **30 · 9 = 270 €**.

b) Con fracciones:

Si a una cantidad le quitamos sus 2/5 nos quedan 3/5 de ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En facturas nos gastamos $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

Si teníamos 3/5 y nos gastamos 9/20 nos quedan $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12-9}{20}=\frac{3}{20}$ de la cantidad inicial. Esos 3/20 nos dicen que son 90 €. Por lo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

La cantidad total son los 20/20 luego 30 · 20 = 600 €.

En la letra del piso me gasto 2/5 de 600 = 1200 : 5 = 240 € y en facturas 3/4 de (600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.

Tengo	Quito	Me queda
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

En cualquier caso los problemas se comprueban.

40 % de 600 = 0.4 · 600 = 240 € se gasta en la letra.

600 – 240 = 360 € me quedan.

75 % de 360 = 0.75 · 360 = 270 € se gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € que le quedan para comer. ¡Funciona!

iv) Una pelota pierde en cada bote 1 quinto de la altura desde la que cae.

a) ¿Cuántos botes debe dar para que la altura alcanzada sea inferior a 1 décimo de la inicial?

b) Si después del cuarto bote su altura es de 12.8 cm, ¿cuál era la altura inicial?

Lo primero es darse cuenta de que si pierde un quinto de la altura se queda con los 4 quintos de ésta. Por tanto en cada bote la altura se multiplica por 4/5.

a) Tenemos que ver para qué *n* se cumple $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10}$ = 0.1

Y esto lo hacemos probando con la calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\approx 0.107>0.1$ pero $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx 0.0859<0.1$, luego hacen falta 11 botes.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$ que es la fracción por la que se ha multiplicado la altura inicial.

$$\frac{256}{625}h=12.8\Rightarrow h=12.8\cdot\frac{625}{256}=31.25\ cm$$

v) A Mariana le descuentan la quinta parte de su sueldo bruto en concepto de IRPF y la sexta parte del mismo para la Seguridad Social. Si cobra 600 € netos, ¿cuál es su sueldo bruto?

Sumamos las dos fracciones puesto que se refieren a la misma cantidad:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$$

que es la parte que descuentan del sueldo bruto para tener el neto. Le quedan $1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ de la cantidad inicial. Esos 19/30 nos dicen que son 600 €.

Para calcular el sueldo bruto hacemos:

$$600\cdot\frac{30}{19}\approx 947.37\text{ €}.$$

Comprobación:

1/5 de 947.37 = 189.47 € paga de IRPF

1/6 de 947.37 = 157.90 € paga a la S.S.

947.37 – 189.47 – 157.90 = 600 € que es el sueldo neto. ¡Bien!

Podría haber habido un pequeño desfase de algún céntimo debido a las aproximaciones

¿Para qué sirven las Matemáticas? Las matemáticas son para siempre. Con un humor cautivante, el matemático Eduardo Sáenz de Cabezón nos da la respuesta a una pregunta que ha vuelto locos a los estudiantes de todo el mundo: ¿para qué sirven las matemáticas? Así, nos muestra la belleza de las matemáticas, que no son sino la espina dorsal de la ciencia. Los teoremas, que no los diamantes, sí que son para siempre. Eduardo Sáenz de Cabezón

https://www.youtube.com/watch?v=0MeQ0wTGYdA

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. APROXIMACIONES Y ERRORES

En la vida cotidiana y también en las Ciencias Aplicadas es necesario trabajar con números aproximados.

Unos ejemplos:

- *Queremos comprar un tercio de metro de tela, tenemos que decirle al dependiente cuanto queremos y no vamos a ser tan idiotas como para decirle que nos dé 0.333… metros o 33.333… cm que es lo exacto. Lo normal es pedir 33 cm o 333 mm si somos muy finos.*
- *Medimos un folio A4 con la regla y nos da 29.7 cm, la regla llega a los mm. Queremos dividirlo en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte?, si hacemos 29.7 : 8 nos da 3.7125 cm, pero la regla no llega a tanto, será mejor aproximar a 3.7 cm.*
- *Hacemos un examen con 9 preguntas que valen todas igual. Tenemos 5 bien y las demás en blanco. ¿Qué nota tenemos?, 10 · 5/9 = 5.555555556 según la calculadora, ¿las ponemos todas?, si lo hacemos estamos suponiendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10000 millones de partes iguales del examen. Lo razonable es 5.6 o 5.56 si somos muy pero que muy precisos.*
- *Resulta curioso y debería ser delito que en las gasolineras se anuncie: Precio del gasoil 1.399 €/litro. Si alguien va y pide un litro exacto, o 2 o 15 no se lo pueden cobrar exactamente puesto que ¡no existen las milésimas de €!, deberían escribir 1.40 €/litro. Es cierto que de esa manera te ahorras 5 céntimos si echas 50 litros, pero a ellos les compensa el tema psicológico, la gente poco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.*
- *Exactamente lo mismo pasa en los supermercados: merluza 5.99 €/Kg. Son trucos baratos que una mente entrenada sabe detectar y actuar en consecuencia. La diferencia entre 6 €/Kg y 5.99 €/Kg es que te ahorras ¡1 céntimo! si compras 1 Kg, si compras medio, ¿cuánto te ahorras?, ¡nada!, 5.99 : 2 = 2.995 que redondeado es 3, que es lo que cobran. Aunque bien mirada la oferta no está tan mal, sin compras 5 Kg. de merluza ahorras para comprarte un caramelo, eso sí, tienes que comprar más de medio Kg por vez.*

Utilizar demasiadas cifras decimales sin estar seguro de ellas no es sinónimo de precisión sino de torpeza.

3.1. Redondeo

Te recordamos como se redondean correctamente los números.

- *Redondear π a las diezmilésimas: π = 3.141**5****9**26535…, la cifra de las diezmilésimas es 5, como la cifra siguiente es 9 que es $\geq$ 5, le sumamos 1 al 5 y pondremos* $\pi \approx 3.1416$.

  Fíjate que π está más cerca de 3.1416 que de 3.1415

- *Redondear $\sqrt{2}$ a las centésimas: $\sqrt{2}$ = 1.41**4**21356…, ahora la cifra siguiente es 4 < 5 luego la dejamos tal cual,* $\sqrt{2} \approx 1.41$

La regla es: Localizamos la cifra de redondeo, miramos la siguiente cifra (sólo la siguiente), si ésta es menor que 5 dejamos la cifra de redondeo igual, si la cifra siguiente es 5 o mayor que 5 incrementamos en 1 la cifra de redondeo.

Más ejemplos:

Redondea

- *1.995 a las centésimas ➔ 2.00 y los ceros hay que escribirlos para indicar dónde hemos redondeado.*
- *1 555 555 en los miles ➔ 1 556 000 donde hay que completar con ceros después de los miles.*
- *6.94999 en las décimas ➔ 6.9 sólo hay que mirar el 4*

Nota importante: Si el resultado de un problema son **€ se redondeará siempre en los céntimos.**

Otra nota importante: Si queremos dar un resultado con 2 decimales en los pasos intermedios trabajaremos con más decimales, al menos 3 o 4, de lo contrario el resultado no tendrá la precisión que pretendemos, un ejemplo:

- *A = 9.65; B = 6.98 y C = 4.99. Queremos hacer (A · B) · C^2, si hacemos A · B y redondeamos en las centésimas nos queda 67.36 y si ahora multiplicamos por 4.99^2 = 24.90 nos sale 1 677.26.*

  El resultado correcto es 1 677.20 donde sólo hemos redondeado al final.

3.2. Cifras significativas

Es el número de cifras "*con valor*" que se utilizan para expresar un número aproximado.

Unos cuantos ***ejemplos*** y lo entiendes:

- *2.25 tiene 3 cifras significativas;* *28.049 tiene 5 cifras significativas.*
- *5.00 tiene 3;* *4 000.01 tiene 6;*
- *10 000 no sabemos las cifras significativas que tiene, puede ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, nos tienen que decir en qué cifra se ha aproximado. Para este último caso puede recurrirse a la notación científica para decir con precisión el número de cifras significativas, así:*
  $1 \cdot 10^4$ tiene una cifra significativa, $1.0 \cdot 10^4$ tiene 2 y así hasta $1.0000 \cdot 10^4$ que tiene 5.

Consideraciones:

- Las cifras **distintas** de 0 siempre son significativas.
- Los ceros a la izquierda nunca son cifras significativas: 0.0002 tiene una cifra significativa.
- Los ceros en medio de otras cifras distintas de 0 siempre son significativos 2004 tiene 4 cifras significativas.

Más que el número de decimales la precisión de una aproximación se mide por el número de cifras significativas.

No deben utilizarse más cifras de las que requiera la situación.

Actividades propuestas

20. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/9				
3.7182				
42.27				

3.3. Error absoluto y error relativo

I.- Error absoluto

Se define el **error absoluto** (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

Las barras verticales se leen "valor absoluto" y significan que el resultado se dará siempre positivo.

Ejemplo:

- *Aproximamos 1/3 de litro por 0.33 litros.*

$$EA = \left|\frac{1}{3} - 0.33\right| = 0.00333\ldots \approx 0.0033 \text{ litros}$$

Otro ejemplo:

- *Aproximamos 16/6 Kg. con 2 cifras significativas (2.7 Kg.)*

$$EA = \left|\frac{16}{6} - 2.7\right| = |-0.0333\ldots| \approx 0.033 \text{ Kg.}$$

- **No deben ponerse demasiadas cifras significativas en el error absoluto, 2 o 3 es suficiente.**
- **El error absoluto tiene las mismas unidades que la magnitud que se aproxima.**

¿Estos errores son grandes o pequeños?, la respuesta es, ¿comparados con qué?

Para ello se define el error relativo que sí nos da una medida de lo grande o pequeño que es el error absoluto.

II.- Error relativo

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el Error Relativo (ER) como:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.

Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

Calculamos el error relativo para los ejemplos de arriba:

1º) $ER = \frac{0.0033}{1/3} = 0.0099 \Rightarrow 0.99$ % de ER   2ª) $ER = \frac{0.033}{8/3} \approx 0.0124 \Rightarrow 1.2$ % de ER

Ahora sí podemos decir que la 1ª aproximación tiene menos error que la 2ª, puesto que el error relativo es menor.

El **error relativo** (ER) **no tiene unidades** y por ello se pueden comparar errores de distintas magnitudes o con distintas unidades.

¿Qué hacer si no se conoce el valor exacto?

En este caso no se puede calcular el error absoluto, sin embargo todos los aparatos de medida tienen un error absoluto máximo.

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g su error absoluto máximo es de 50 g.*
- *Cronómetros que miden centésimas de segundo, su error absoluto máximo será de 0.005 s, media centésima.*
- *Reglas normales que miden mm, su error absoluto máximo será de 0.5 mm = 0.05 cm = 0.0005 m*

A esto se le denomina **cota de error absoluto**.

Actividades resueltas

- *Te pesas en una báscula de baño y te marca 65.3 Kg, el error absoluto máximo es de 0.05 Kg (50 g)*

  Ahora pesamos un coche en una báscula especial y pesa 1 250 Kg con error absoluto máximo de 10 Kg. ¿Qué medida es más precisa?

  Tú ➔ $ER \leq \frac{0,05}{65,3} = 0.00077 \Rightarrow ER \leq 0.077\ \%$

  Coche ➔ $ER \leq \frac{10}{1250} = 0.008 \Rightarrow ER \leq 0.8\ \%$

Es mucho más precisa la báscula de baño en este caso. Sin embargo, si en la misma báscula pesamos a un bebé y marca 3.1Kg, el error relativo sale menor o igual que 1.6 % (pruébalo) y ahora la medida de la báscula de baño es mucho menos precisa.

Así que el error depende de la precisión de la máquina y de la medida que hagamos con ella.

Actividades propuestas

21. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

22. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 6.3 b) 562 c) 562.00

23. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. POTENCIAS

4.1. Repaso de las potencias de exponente natural

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de exponente un número natural y de base un número cualquiera se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

- a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

  c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$ d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$(-2)^2 = +4$

Ejemplos:

- $(-5)^2 = +25$
- $(-5)^3 = -125$

Actividades propuestas

24. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

4.2. Potencias de exponente fraccionario

Si el exponente es, por ejemplo, –2, no sabemos multiplicar algo *menos dos* veces. Tampoco sabemos multiplicar algo por si mismo *cero* veces. Ahora la definición anterior no nos sirve. Las definiciones que se van a dar van a mantener las propiedades que conocemos de las operaciones con potencias de exponente natural, que van a seguir siendo válidas.

Se define: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y se define $a^0 = 1$

En efecto, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ y $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^0 = 1$.

Recuerda

Siempre se verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

También, $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ y $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Actividades propuestas

25. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

26. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

4.3. Operaciones con radicales

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que, al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo *a* es un *único* número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos da *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1}$ = –1 sí existe, pues (–1) · (–1) · (–1) = –1.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, por lo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Ejemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicales utilizando las mismas propiedades de las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$

Recuerda

Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que es distinto de:

$\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14.

- $\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

En ocasiones es posible **extraer factores** de un radical.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3\cdot x^2} = x\cdot\sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4\cdot 3^3\cdot 5} = \sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot 5} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3\cdot 5} = 12\cdot\sqrt{15}$

Actividades propuestas

27. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

28. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8\,000}$ factorizando previamente los radicandos

29. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

30. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

31. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

4.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a\cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

- $7\,810\,000\,000\,000 = 7.81\cdot 10^{12}$ $0.000000000038 = 3.8\cdot 10^{-11}$
- $500\,000 = 5\cdot 10^5$ $0.00002 = 2\cdot 10^{-5}$
- Hay galaxias que están a 200 000 000 000 000 km de nosotros, y lo escribimos $2\cdot 10^{14}$
- La masa de un electrón es aproximadamente de 0.000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9.11\cdot 10^{-28}$

Actividades resueltas

- En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.

Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9 223 372 036 854 775 808 que da un poco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4.29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$

Actividades propuestas

32. Escribe en notación científica:

a) 400 000 000 b) 45 000 000 c) 34 500 000 000 000 d) 0.0000001 e) 0.00000046

Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

Ejemplo:

- $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$
- $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$
- Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

Actividades propuestas

33. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

34. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

35. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0.000481 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $300\,000\,000 - 5.4 \cdot 10^6 + 7.2 \cdot 10^5$

c) $(2.9 \cdot 10^5) \cdot (5.7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3.8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3.5 \cdot 10^6) \cdot (8.1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4.8 \cdot 10^{-8}) : (3.2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6.28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2.9 \cdot 10^2) : (3.98 \cdot 10^{-7})$

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. INTERPRETACIÓN DE INFORMACIÓN NUMÉRICA EN DOCUMENTOS

Facturas

Una factura es el documento que se genera cuando realizamos una compra o acordamos la prestación de un servicio. En una tienda nos darán, a modo de factura, un ticket que refleja el precio neto de los artículos más el IVA.

- **El precio final en la compra de bienes y/o servicios es la suma de su precio neto más el IVA correspondiente.**
- Existen tres tipos de IVA asociados a diferentes productos o servicios:
  - **IVA superreducido: 4 %** aplicado a productos y servicios de **primerísima necesidad.**
  - **IVA reducido: 10 %** aplicado a bienes y servicios considerados **esenciales.**
  - **IVA general: 21 %** aplicado a **la mayoría de bienes y servicios.**

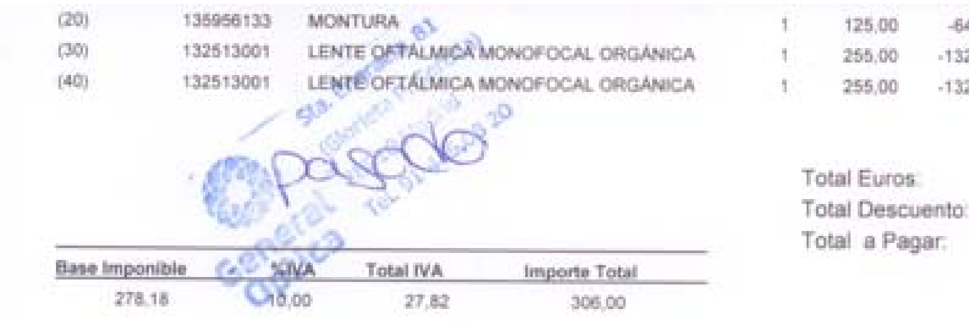
Hay servicios exentos de IVA: servicios médicos y sanitarios, educación y formación, sociedades culturales y deportivas, operaciones financieras y de seguros y alquiler de viviendas.

El ticket de compra nos permite reclamar o efectuar cambios o devoluciones en caso de defectos en la mercancía, tallas o cambio de opinión respecto a la compra. Por eso funciona como una factura, aunque si se abona en efectivo no es vinculante a ninguna persona como compradora.

En resumen, una factura es un documento mercantil en el que se refleja una compraventa de bienes o servicios. Refleja con detalle la transacción y el IVA aplicado

Actividades resueltas

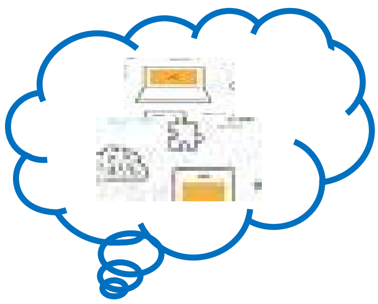
- María se ha comprado unas gafas y le han hecho un descuento y luego han cargado el IVA. ¿Qué descuento le han hecho? ¿Qué IVA tienen las gafas?



(20)	135956133	MONTURA	1	125,00	-64
(30)	132513001	LENTE OFTÁLMICA MONOFOCAL ORGÁNICA	1	255,00	-13
(40)	132513001	LENTE OFTÁLMICA MONOFOCAL ORGÁNICA	1	255,00	-13

Total Euros:
Total Descuento:
Total a Pagar:

Base Imponible	%IVA	Total IVA	Importe Total
278.18	10,00	27,82	306,00



Puedes utilizar la calculadora y comprobar que le han hecho un descuento del 51.81 %, tanto en la montura, en las lentes y en el total. Por tanto debe pagar 635 – 329 = 306 €.

La base imponible que usa la factura para calcular el IVA es de 278.18 € y aplica un IVA del 10 %, por lo que el IVA que ha pagado es de 27.818 que redondeando a las centésimas es 27.82. Pero no lo resta. Se supone que ese cálculo del IVA es únicamente informativo.

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- En este ticket de supermercado aparecen productos a los que se ha aplicado diferentes tipos de IVA.

Observa este ticket en el que junto a cada artículo aparece una letra que señala el IVA aplicado a cada uno de ellos.

Se trata de una compra en supermercado, por lo que a la mayoría de los artículos se les ha aplicado el IVA reducido 10 % o súper reducido 4 %, aunque alguno tiene un IVA del 21 %.

Actividades propuestas

36. En dicho ticket

a) Identifica qué IVA corresponde a cada letra A, B, C.

b) Calcula los precios sin IVA de cada artículo.

c) En el ticket de compra aparecen artículos a los que se ha aplicado el IVA super reducido que suman 4.51 €. ¿Cuál era su precio neto?

37. Comprueba los cálculos del ticket del supermercado usando la calculadora: ¿Cuántos artículos llevan la letra A? ¿Cuánto suma su precio neto? ¿Si se les aplica un IVA súper-reducido del 4 %, a cuánto asciende dicho IVA? ¿Está bien calculado en el recibo adjunto?

38. Los artículos de IVA reducido del 10 %.son los más numerosos. Su importe neto total asciende a 33,20 € ¿Cuánto se ha pagado finalmente?

39. Lo mismo con los que llevan la letra C. Observa que hay dos, uno de 11.97 y otro de 1.99 que suman 13.96, que es el precio total, de dicho precio, ¿cuánto es el IVA al 21 % y cuánto el precio neto? En efecto en el recibo pone: IVA: 2.42, Precio Neto: 49.08, y la suma de ambas cantidades es 13.96.

40. Busca información sobre los bienes y servicios a los que se aplica cada uno de los tipos de IVA y escribe tres ejemplos en cada caso.

41. En las facturas en forma de ticket aparecen los detalles acerca del IVA que se ha aplicado a cada artículo o la suma total del IVA. De acuerdo a la información que has observado en la actividad anterior, calcula el precio final de cada artículo en esta compra, teniendo en cuenta que los precios se muestran sin IVA.

Artículo	Precio Neto	IVA	Precio final
Novela gráfica: “El final del Verano”, Tillie Walden Cómic:“Marvel-Verse: Moon Girl”, Natacha Bustos Lápices de colores acuarela Estuche	19.14 € 14.42 € 20.65 € 14.05 €		

Otro tipo de factura es la que refleja el coste de un servicio prestado. La manera de formalizar los detalles debe ser lo más concisa posible para que sirva a modo de contrato y permita cualquier gestión posterior ya sea por defectos en el servicio o por incumplimiento.

Actividades propuestas

42. Esta imagen corresponde al dorso de una factura de electricidad en la que se detallan todos los conceptos que intervienen en el importe final.

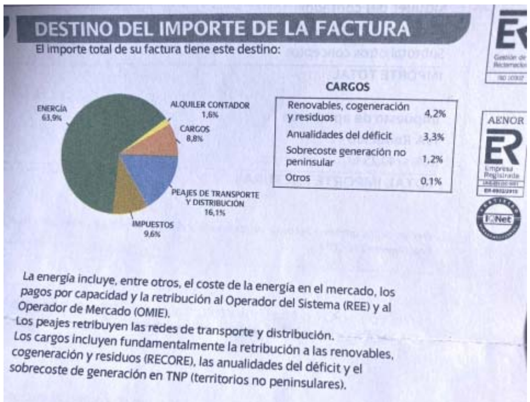
Un desglose tan pormenorizado no supone menos dificultad a la hora de comprender qué estamos pagando. En la parte superior se indica el % que corresponde a impuestos y el % a los costes del suministro eléctrico

¿Puedes hacer algún comentario sobre todos estos datos?

43. El resumen de esa factura aparece en la cara A y es el siguiente:

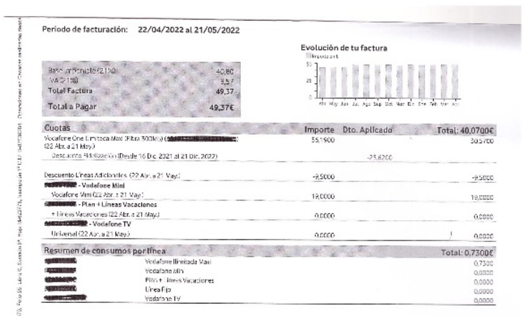
¿Te resulta posible relacionar los cálculos de este resumen con la información anterior?

Veamos más datos que aparecen en las facturas de electricidad.



44. El "Destino del importa de la factura". A) Haz una lista de dichos Destinos? B) Compara la energía consumida con el total del importe. Haz un porcentaje. C) Intenta discriminar cuántos de dichos Destinos son impuestos.

45. La "Información sobre el consumo eléctrico". Una de las dificultades con que nos encontramos es la nomenclatura: P1, es hora punta, P2, llano, y P3, valle. Haz un informe sobre dicho consumo eléctrico.



46. Observa esta factura de telefonía móvil. Comprueba que el total a pagar corresponde a los importes de las diferentes cuotas.

47. Javier quiere renovar su consola por otra más moderna y ha encontrado estas dos ofertas en internet para los mismos productos:

OFERTA 1: Consola 295 €, cable 39.99 €. Y se puede acceder a un descuento de 90 € si entrega su consola usada. Esta opción debe realizarla antes de finalizar el mes.

OFERTA 2: Consola 245 €, cable 34.99 €. La oferta se completa con un regalo de un juego por valor de 25 € y una tarjeta de 20 €.

¿Cuál de las dos ofertas, desde tu punto de vista, es más interesante? Además de realizar los cálculos, ¿puedes añadir una valoración? ¿Qué ventaja supone entregar la propia consola?

48. Lola quiere comprar un nuevo mando para su consola. Busca ofertas en internet y ha encontrado buenas ofertas en mandos inalámbricos entre 25 € y 33 €. Observa que, en la misma página, le ofrecen 120 € si entrega su consola y compra una nueva por 289.99 € y que el importe total de la compra se puede pagar en tres plazos mensuales sin intereses.

Lola hace cuentas y busca en cuanto está valorada su consola en el mercado de segunda mano. El pago aplazado para ella es imprescindible para decidirse a aceptar la oferta, pero tiene dudas de cuánto podría obtener vendiendo su consola.
¿Puedes ayudar a Lola a resolver sus dudas "buceando" en la red? El precio de la consola nueva te orienta sobre el tipo de producto del que se trata en el enunciado.

49. ¿Cuánto vale un tatuaje?

Si estás pensando hacerte un tatuaje has de tener en cuenta las diferentes tarifas que se aplican según tamaño, complejidad del diseño, negro o de varios colores, las sesiones necesarias, etc., y por supuesto el "caché" de quien lo realiza que, como en todos los trabajos artesanos, es un valor intangible que incorpora a sus tarifas.

A modo de orientación, presentamos algunos precios populares de tatuajes:

Un tatuaje pequeño y monocolor puede costar entre 50 € y 90 €.

Los tatuajes medianos y monocolor de 250 € a 400 €.

Los grandes tatuajes pueden superar de los 650 € hasta los 1 000 € con varios colores y sube más si los dibujos son originales.

A estos precios hay que añadir el IVA del 21 %.

b) Un tatuador ha realizado quince tatuajes de diferente tamaño y dificultad consiguiendo una recaudación, ya descontado el 21 % de IVA, de unos 8 000 € netos. ¿Puedes elaborar una factura global que refleje los trabajos que ha realizado de acuerdo al total cobrado por los tatuajes?

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Nóminas

Actividades resueltas

- Ahora vamos a analizar una nómina. En el primer recuadro aparece la "Cotización a la Seguridad Social". Observa que en está nómina el trabajador tiene una cuota de 181.90, que aparece en el segundo recuadro como "Cuota de contingencias comunes".

COTIZACIÓN A LA SEGURIDAD SOCIAL / COTITZACIÓ A LA SEGURETAT SOCIAL

Grup. Cotiz.	CNAE	Núm. Patronal	Núm. Afiliac.	P.extras/P.extres	Prorrata pago	Base R.Esp.SS
1	8543	46132061763		479.69	0.00	0.00

	APORTACIÓN DEL TRABAJADOR			APORTACIÓN DE LA EMPRESA		
	Base	%	Cuota	Base	%	Cuota
C. comunes/C. comuns	4,139.40	4.70	181.90	4,139.40	23.60	913.40
Desempleo/Desocupació	4,139.40		0.00	4,139.40		0.00
F. profesional/F. profes	4,139.40		0.00	4,139.40		0.00
AT y EP				4,139.40	0.70	28.98
FOGASA				4,139.40		0.00
Horas extra/Hores extra	0.00			0.00		
Fuerza mayor/Força major		0.00	0.00		0.00	0.00
Estructurales y no estructurales		0.00	0.00		0.00	0.00
Base sujeta a ret. IRPF	3,730.82			Base Rend. Especie sujeta ret. IRPF	0.00	

Ausencia por IT:

En el segundo recuadro aparecen los "Conceptos retributivos": Sueldo, trienios y varios complementos que en total suman: 3 739.82 euros.

Paga Mensual

CONCEP. RETRIBUT.	Euros	DESCUENTOS/DESCOMPTES	Euros
Sueldo	1,238.68	Cuota contingencias comunes	181.90
Trienios	286.02	M.U.F.A.C.E.	50.42
C. Destino	888.86	IRPF (24.51%)	914.42
C. Específico PDI	510.50		
C. Méritos Docentes	537.84		
C. Product.Investig.	268.92		
	3,730.82		1,146.74

T. A PERCIBIR/T. A PERCEBRE: 2,584.08 Euros

Y a la derecha los "Descuentos", la cuota antes mencionada, MUFACE e IRPF.

Actividades propuestas

50. Indica cómo se expresan los decimales y los miles que en estos documentos financieros, facturas, nóminas…

51. En la factura anterior, ¿qué porcentaje se paga de Cuota de la Seguridad Social?

52. Comprueba: a) la suma de los conceptos retributivos. b) Los descuentos.

53. Usa la calculadora y mira si el IRPF está bien calculado.

LOS PRIMOS GERMAIN

Sophie Germain (1776-1831)

Sophie Germain fue una matemática autodidacta. Nació en París en las últimas décadas del Siglo de las Luces. Sus primeros trabajos en Teoría de Números, entre 1804 y 1809, los conocemos a través de su correspondencia con C. F. Gauss, en la que mantenía oculta su identidad bajo el pseudónimo de Monsieur Le Blanc.

En noviembre de 1804 está fechada la primera carta, Gauss, en su respuesta, admira la elegancia de una de sus demostraciones. En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento en Teoría de Números. Demostraba que si x, y, z son números enteros, tales que $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ entonces, al menos uno de los números x, y o z debe ser divisible por 5. *Reanudó la correspondencia, ya con su nombre en 1819. Posteriormente, hacia 1819, Sophie retomó sus trabajos en Teoría de Números. De esta época es otro de los resultados de Sophie. Utilizando adecuadamente su teorema conseguía demostrar que para todo número primo n menor que 100 (y por lo tanto para todo número menor que 100) no existe solución a la ecuación de Fermat, cuando los números x, y, z no son divisibles por n.*

Los Primos Germain y el teorema que lleva su nombre fue el resultado más importante, desde 1738 hasta 1840, para demostrar el último teorema de Fermat, además permitió demostrar la conjetura para n igual a 5. La demostración se dividió en dos casos: el primero consistía en probarlo cuando ninguno de los números x, y, z es divisible por n, y el segundo cuando uno sólo de los tres números es divisible por n. Además, con esta clasificación el primer caso del Teorema de Fermat para n = 5 quedaba probado. En 1825 Legendre y Dirichlet completaron la demostración para n = 5 en el segundo caso.

El teorema de Sophie Germain demuestra que si n es un número primo tal que 2n + 1 es primo, entonces el primer caso del teorema de Fermat es verdadero. El trabajo se había simplificado a la mitad. El teorema de Germain será el resultado más importante relacionado con la conjetura de Fermat desde 1738 hasta la obra de Kummer en 1840.

Durante los sucesos revolucionarios que tuvieron lugar en París en julio de 1830, Sophie vuelve a refugiarse en el estudio. Redactó dos trabajos, uno sobre teoría de números y otro sobre elasticidad en el que buscaba definir una teoría dinámica de la curvatura: "Memoire sur la courbure de surfaces". Estas dos memorias fueron publicadas en 1831, después de su muerte, en el Crelle's Journal. Una vez más su camino se cruzó con el de Gauss que acababa de publicar una teoría matemática de la curvatura en la que definía lo que hoy se conoce por curvatura gaussiana como el producto de las curvaturas

Primos de Germain

En Teoría de Números se dice que un número natural es un **número primo de Germain**, si el número n es primo y $2n + 1$ también lo es. Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200, son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191.

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Conjetura de Fermat

Hace más de 350 años el matemático francés Pierre Fermat, en el siglo XVII, en 1637, escribió en el margen de un libro, en la *Arithmética* de *Diofanto*, un pequeño problema, dijo que lo había demostrado, pero no anotó la demostración porque no le cabía en dicho margen.

El último teorema de Fermat es una afirmación sobre los números naturales que dice que: Si *n* es un número natural mayor o igual a 3, la ecuación *x* elevado a *n* más *y* elevado a *n* es igual a *z* elevado a *n*, $x^n + y^n = z^n$, no tiene ninguna solución cuando *x, y* y *z* no son 0.

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla."

Observa que para *n = 2,* es el *Teorema de Pitágoras,* que sabemos que tiene solución, las ternas pitagóricas.

Muchos matemáticos intentaron demostrarlo sin éxito. Parece algo sencillo y sin embargo se ha necesitado utilizar matemáticas que entonces no se conocían para demostrarlo. *Andrew Wiles* utilizó en 1995 que las curvas elípticas semiestables son racionales o son modulares.

Fermat

Criptografía y números primos

La Teoría de Números se aplica generalmente a la criptografía. Hoy en día, el sistema criptográfico más común se llama RSA. Se utiliza mucho para mantener la seguridad en internet y en las finanzas.

Se usan números muy grandes que sean producto de dos números primos, también muy grandes.
Tú sabes encontrar los factores primos de un número, pero si es muy grande, ni siquiera lo saben hacer los ordenadores. Ahora se está queriendo utilizar la computación cuántica.

Conjeturas matemáticas

Una **conjetura matemática** es una afirmación que no ha podido ser demostrada ni refutada. Si se logra demostrar, como la de *Fermat*, deja de ser una conjetura y pasa a ser un teorema. Así ha ocurrido con:

Teorema de los cuatro colores, probado en 1976, dice que todo mapa se puede colorear con sólo cuatro colores sin que dos zonas adyacentes tengan el mismo color. Fue demostrado con ayuda del ordenador.

Conjetura de *Poincaré* que trata sobre la esfera en cuatro dimensiones. *G. Perelman* lo demostró en 2004.

Más conjeturas

Pero sigue habiendo muchas conjeturas. Veamos algunas

- Hipótesis de Riemann, que hace predicciones sobre la distribución de los números primos.
- No hay números perfecto impares
- Conjetura de Goldbach
- Conjetura de los números primos gemelos
- Conjetura de Collatz
- Conjetura abc

Una conjetura, o se demuestra utilizando la lógica, o se refuta encontrando un contraejemplo.

- Busca en Internet la **lista de conjeturas matemáticas**. Verás que aún es posible encontrar cosas nuevas, todavía sin probar.

¡Te gusta hacer magia!

Puedes hacer este juego con tus amigos. Para hacerlo necesitas papel y lápiz, o mejor, una calculadora, o todavía mejor, una hoja de cálculo.

Escribe en una columna los números del 1 al 20. Al lado del 1 escribe el número que te diga tu amigo o amiga, de una, dos o tres cifras (376). Al lado del 2 escribe también otro número inventado de 1, 2 o 3 cifras (712). Al lado del 3, la suma de los dos números anteriores (1088). Al lado del 4, lo mismo, la suma de los dos números anteriores (ahora los de al lado del 2 y del 4), y así hasta llegar a la casilla 20.

Ahora divide el número de al lado del 20 (3 948 456) entre el número de al lado del 19 (2 440 280), y ¡magia!, puedes adivinar el resultado. ¡Se aproxima al número de oro!

1.618…

¿Por qué? ¿Sabes algo de la sucesión de Fibonacci? Búscalo en Internet.

Haz una hoja de cálculo como la del margen.

E6

	A	B	C	D	E
1	¡Te gusta hacer magia!				
2					
3	1	376			
4	2	712			
5	3	1088			
6	4	1800			
7	5	2888			
8	6	4688			
9	7	7576			
10	8	12264			
11	9	19840			
12	10	32104			
13	11	51944			
14	12	84048			
15	13	135992			
16	14	220040			
17	15	356032			
18	16	576072			
19	17	932104			
20	18	1508176			
21	19	2440280			
22	20	3948456			
23					
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	1,61803
25					

Autores: Nieves Zuasti y Paco Moya
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Prioridad de las operaciones	1º Paréntesis interiores, 2º Potencias y raíces, 3º Productos y divisiones, 4º Sumas y restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Número Racional	Un número *r* es racional si puede escribirse como *r* = *a*/*b* con *a, b* enteros y $b \neq 0$.	2; 3/8; —7/2 son racionales. También 0.125 y 2.6777... $\sqrt{2}$ y π no lo son.
Fracción irreducible	Se obtiene dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Numerador y denominador son primos entre sí.	360/840 = 3/7, la última es irreducible.
Conjuntos de números	**Naturales** ➔ N = {1, 2, 3, …}; **Enteros** ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionales** ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionales** ➔ I = $\Re$ – Q; $\Re$= Q$\cup$I	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ *x* = 1.7252525… = 854/495
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1.5; 0.333333333….
Números reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0.333333; π; $\sqrt{2}$
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: se divide el número sin la coma entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales. Expresión decimal periódica: Se multiplica *N* por potencias de *10* hasta conseguir 2 números con la misma parte decimal, se restan y se despeja *N*.	3.175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2.0333… 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183 ➔ *N* = 183/90 = 61/30.
Operaciones con potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican os exponentes.	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Notación científica: operaciones	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números –n para pequeños números	$320\,000\,000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Potencia de exponente negativo o racional	$a^{-n} = 1/a^n$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{-3} = 1/8^3$ $8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Documentos financieros	Una **factura** es un documento mercantil en el que se refleja una compraventa de bienes o servicios, y aparece con detalle la transacción y el IVA aplicado. En una **nómina** aparecen los conceptos retributivos y los descuentos.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Realiza las operaciones:

a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8

3. Utiliza la calculadora. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

4. Utiliza la calculadora. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

5. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{8}$ m.

6. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

7. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

8. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

9. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

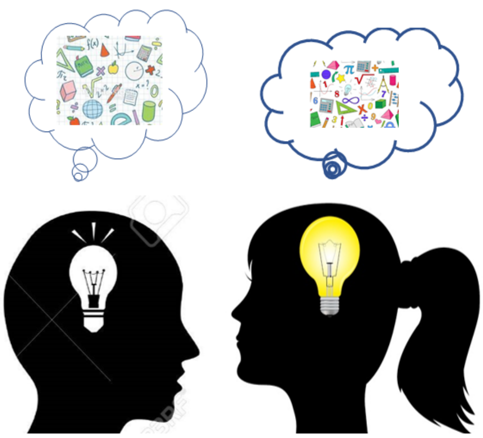
10. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

11. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

12. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

13. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo en las decenas.



14. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

15. ¿Cómo medir el grosor de un folio con un error inferior a 0.0001 cm con la ayuda de una regla milimetrada y la de el/la ordenanza del instituto?, hazlo.

16. ¿Cuántos metros hay de diferencia al calcular el perímetro de la Tierra poniendo $\pi \approx$ 3.14 en lugar de su valor real?, ¿es mucho o poco? Básicamente tienes que hallar el error absoluto y el relativo. *Radio aproximadamente 6 370 km

17. Los antiguos hicieron buenas aproximaciones de Pi, entre ellas citemos a Arquímedes (siglo III a. C.) con 211875/67441 y a Ptolomeo (siglo II d. C.) con 377/120. ¿Cuál cometió menor error relativo?

18. Medir el tamaño de las pantallas en pulgadas (") ya no parece muy buena idea. La medida se refiere a la longitud de la diagonal del rectángulo, así, una televisión de 32" se refiere a que la diagonal mide 32". Eso no da mucha información si no sabemos la proporción entre los lados. Las más usuales en las pantallas de televisión y ordenador son 4:3 y 16:9. Si una pulgada son 2.54 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de una pantalla de 32" con proporción 4:3?, ¿y si la proporción es 16/9? ¿Cuál tiene mayor superficie?

19. Si 100 pulgadas son 254 cm:

a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19,2 pulgadas y largo/alto = 4/3

b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9.

20. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡! Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido)).

21. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?

22. Halla un número entero de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.

23. Darío da pasos de 3/5 de metro, su perro Rayo da pasos de ¼ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?

24. A una persona le han recortado el sueldo una sexta parte. De lo que le queda, paga un 25 % de IRPF. Con los 2/5 de los ingresos restantes paga la hipoteca de su casa. Si finalmente le quedan 450 € disponibles ¿Cuánto cobraba antes de la rebaja de su sueldo?"

Potencias

25. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

26. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

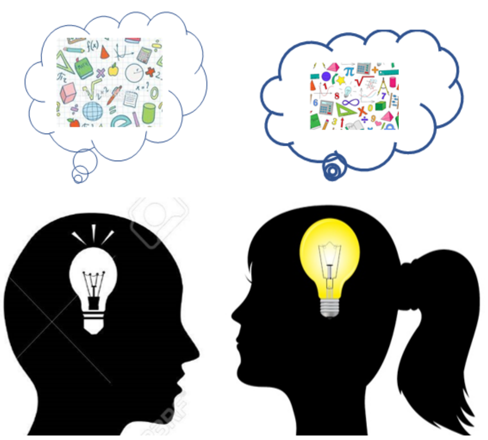
c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

27. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4\right)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

28. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

29. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$



30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 128 560 0000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35 000 000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

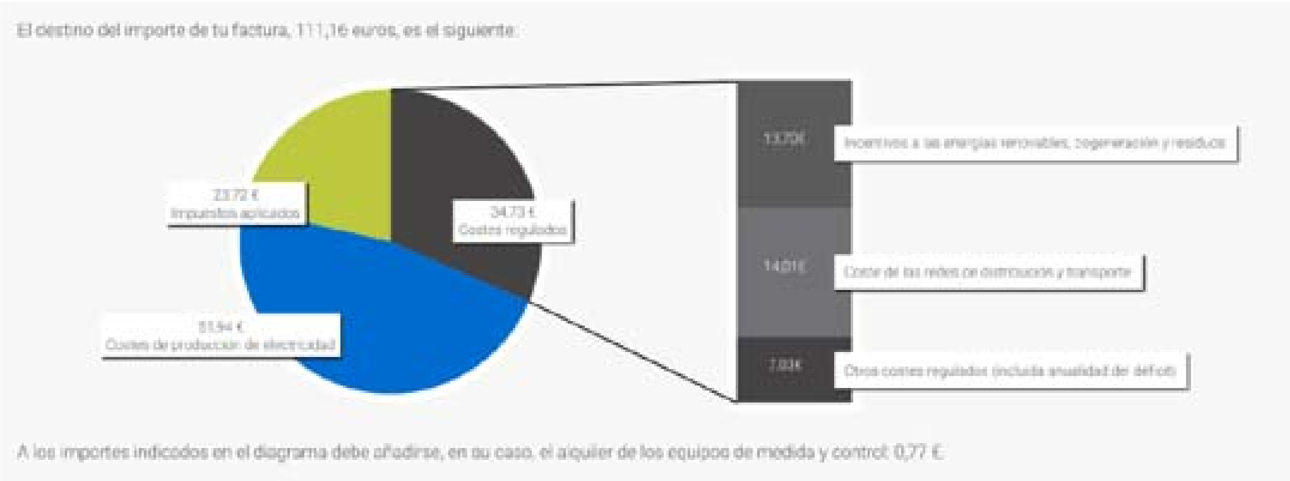
Documentos financieros

33. En esta factura de telefonía debes comprobar si todos los cálculos son correctos. ¿Qué tipo de IVA se paga? ¿Sobre qué importe se paga dicho IVA?

Internet + Llamadas nacionales gratis + 60 min/mes a móvil gratis + Línea Jazztel	**29,3450 €**
Cuota mensual Pack Ahorro Internet Máxima Velocidad + Llamadas nacionales gratis + 60 min móvil gratis * Precio promocional durante 12 meses, después 19.95 euros/mes para siempre	15,9500 €
Descuento Fidelización	-1,5950 €
Cuota mensual de mantenimiento de Línea	14,9900 €
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	**0,0000 €**
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	GRATIS

SERVICIO	IMPORTE
Internet + Llamadas nacionales gratis + 60 min/mes a móvil gratis + Línea Jazztel	29,3450 €
Tarifa Pack Ahorro 100 minutos y 100MB gratis	0,0000 €
Base Imponible	29,3450 €
IVA (21%)	6,1625 €
Total a pagar	**35,51 €**

34. Las facturas de la luz son probablemente las más complicadas pues en ellas aparecen muchos conceptos. Compara dos facturas de la luz diferentes para conocer qué destino tiene la cantidad pagada. Infórmate y escribe un informe. Explica los conceptos que aparecen.



Escribe que se entiende por "Costes regulados", y por "Cargos". En cada caso cuál es el porcentaje de los "Costes de producción de la electricidad"

35. Busca dos facturas y analízalas.

36. Busca una nómina y analízala.

37. Busca una noticia financiera en la prensa y coméntala.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué afirmación es falsa. El número –0.3333333… es un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150; 7/50 tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

3. La expresión decimal 0.63636363…. Se escribe en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

5. Al efectuar la operación $0.000078 + 2.4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:

a) $3.6 \cdot 10^{-10}$ b) $1.8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10.2 \cdot 10^{-5}$ d) $18.72 \cdot 10^{-5}$

6. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5'24 \cdot 10^{10}}{6'3 \cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317.10^{17}$ b) $8.317 \cdot 10^{16}$ c) $8.317 \cdot 10^{15}$ d) $83.17.10^{16}$

7. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a :

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$ d) 2

8. El **número** $8^{-4/3}$ vale:

a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

1. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83 \cdot 10^{9} + 6.932 \cdot 10^{12} – 7.5 \cdot 10^{10}$

a) $6.86283.10^{12}$ b) $6.86283 \cdot 10^{13}$ c) $6.8623 \cdot 10^{11}$ d) $6.8628 \cdot 10^{12}$

2. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24 \cdot 10^{10}}{6.3 \cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317.10^{17}$ b) $8.317 \cdot 10^{16}$ c) $8.317 \cdot 10^{15}$ d) $83.17.10^{16}$