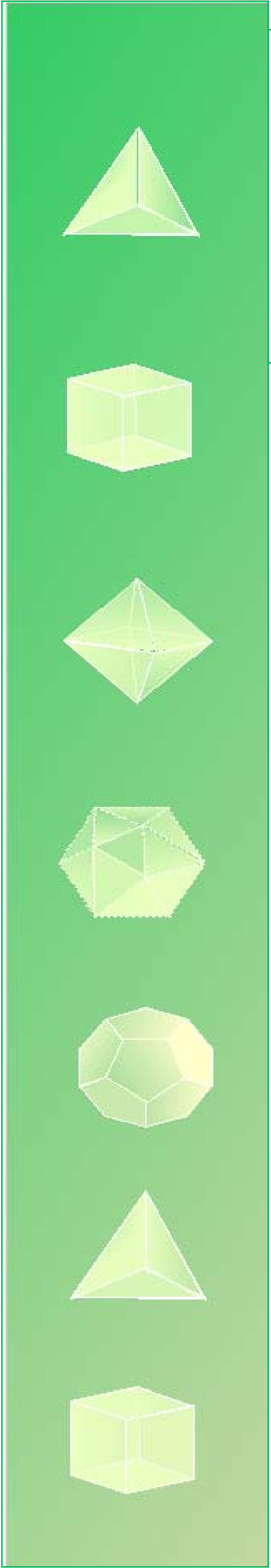


Matemáticas II.
2º Bachillerato.
Capítulo 11: Probabilidad y combinatoria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda

Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona "especial" que hay en clase?, ¿me darán una beca?

Siempre, en la televisión o en los periódicos, se usa la Probabilidad y se utiliza continuamente en todas las Ciencias.

Para aprender a contar, sí, contar, estudiaremos Combinatoria, que luego nos ayudará a contar los sucesos posibles y los favorables para calcular probabilidades.

Como ya has estudiado Estadística y Probabilidad en ESO, vamos a dar al lenguaje de probabilidades un mayor rigor. No daremos con todo su rigor la definición axiomática de probabilidad, pero nos aproximaremos a ella, y estudiaremos algunas de sus propiedades y teoremas, como el Teorema de *Bayes*.

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

> *"Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis".*

Sin embargo ya sabes (de ESO) resolver todos estos problemas utilizando dos valiosas herramientas, los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

1. PROBABILIDAD

1.1. Álgebra de sucesos. Experimentos simples y compuestos

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- *Son experimentos aleatorios:*

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.
c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.
d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.
e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- *No son experimentos aleatorios*

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.
b) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Ejemplos:

- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga* cara *o salga* cruz. *El conjunto de sucesos elementales es* E = {*cara, cruz*}.

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.

- *El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes, son:*

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.
b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

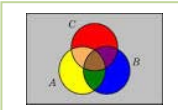
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de Venn.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, llamamos* A *al suceso obtener par*: A = {2, 4, 6}, y B al suceso obtener múltiplo de 3: B = {3, 6}. Entonces $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}, $A \cap B$ = {6}, $A - B$ = {2, 4}.

Actividades propuestas

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, $\varnothing$, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o **complementario**) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o no$A$), al suceso $E - A$.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

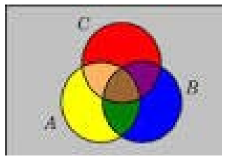
- *Al lanzar un dado, si* $A = \{2, 4, 6\}$, y $B = \{3, 6\}$. Los sucesos A y B son compatibles pues $A \cap B = \{6\}$. Sucesos incompatibles son "sacar un número menor que 2" y "sacar múltiplo de 3" pues es imposible que se verifiquen a la vez.

Actividades propuestas

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".



11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman sólo té, que 5 personas toman té y chocolate pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas tomaban al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer datos nuevos.

1.2. Asignación de probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de *Laplace*** y dice que:

Regla de Laplace

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles".

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los Grandes Números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la *Ley de los Grandes Números*, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.

- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0.5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0.49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad de, por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *rey de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un rey* se cumple si sale el rey de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso, por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

- *En una clase hay* 15 *chicos y* 14 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?*

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

- *En el monedero tenemos* 3 *monedas de* 1 *céntimo,* 7 *monedas de* 5 *céntimos,* 4 *monedas de* 10 *céntimos y* 2 *monedas de* 50 *céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?*

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$P(\text{par de céntimos}) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "par de céntimos"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Actividades propuestas

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov*

El matemático ruso *Andrey Kolmogorov* (1903, 1987) basándose en las propiedades del álgebra de sucesos y en las propiedades de las frecuencias relativas dio una definición de probabilidad basada en un sistema de axiomas.

La definición axiomática de *Kolmogorov* es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

Definición

La probabilidad es una aplicación (función) que asigna a cada suceso A de un espacio muestral E un número real que debe verificar las siguientes propiedades:

$$E \to R$$

$$A \to P(A)$$

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E) = 1.$$

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo:

$$P(A) \geq 0, \text{ para todo } A.$$

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades:

$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

Consecuencias de los axiomas

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Demostración:

En efecto, un suceso y su suceso contrario son incompatibles, y su unión es el suceso seguro. Por lo que usando los axiomas 1 y 3 se tiene:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

b) La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$.

Demostración:

En efecto, el suceso imposible es el suceso contrario del suceso seguro, por lo utilizando la propiedad anterior y el axioma 1, se tiene:

$$P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

En efecto, los sucesos elementales son incompatibles entre sí, luego si $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ por el axioma 3 se tiene que:

$$P(A) = P\{a_1, a_2, ..., a_n\} = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_n).$$

Si los sucesos elementales son equiprobables de esta propiedad se deduce la regla de *Laplace*.

d) La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos dos a dos es igual a la suma de las probabilidades: $P\{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\} = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Demostración:

Son sucesos incompatibles entre sí, luego se verifica por el axioma 3

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de* 40 *cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que P(as) + P(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Actividades propuestas

16. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, que su intersección es el suceso imposible, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades, pues se verifica el axioma 3 de *Kolmogorov*.

Autor: David Miranda

Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B tienen una intersección no vacía, pueden verificarse a la vez, habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto $P(\text{Rey} \cup \text{Figura}) = 4/40 + 16/40 - 4/40 = 16/40 = 0.4$.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego $P(\text{no rey} \cup \text{rey}) = 36/40 + 4/40 = 1$. Esta conclusión es más general. Siempre:

$$P(\overline{A} \cup A) = 1,$$

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 bastos y hay 162 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego $P(\text{Basto} \cup \text{Figura}) = 10/40 + 16/40 - 4/40 = 22/40 = 11/20$.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

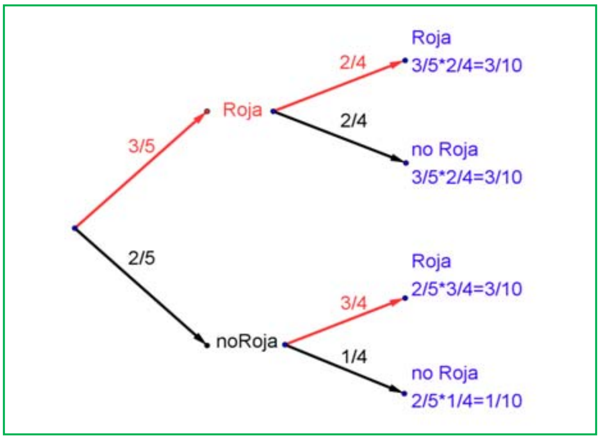
En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

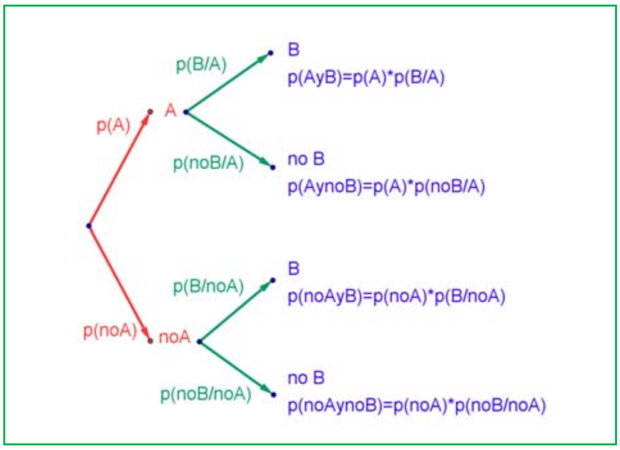
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**.

Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: $P(\text{Roja/Roja})$ y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5 · 3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5 · 1/4 = 2/20 = 1/10.





Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de *Roja* y *noRoja* se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales: 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Los sucesos son dependientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de 40 cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un as previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $P(B/A) \neq P(B)$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)$.

Por tanto la expresión: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ **es general, ya que si los sucesos son independientes entonces** $P(B/A) = P(B)$ **y por tanto** $P(A \cap B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$**.**

Resumen:		
Suceso contrario:	$P(A) + P(\overline{A}) = 1$	
Intersección:	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	**Si A y B son independientes** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Unión:	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	**Si A y B son incompatibles** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Actividades propuestas

18. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. (b) La probabilidad de que no ocurra B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. (a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto *B*? (b) Sabiendo que un cliente ha comprado *A*, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado *C* pero no *B*?

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(AUB)$ = 7/15, hallar: (a) La probabilidad de que se verifique A y B. (b) La probabilidad de que se verifique A y no B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 97.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$ Calcular:

$P(A \cup B), P(A \cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$.

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota*. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

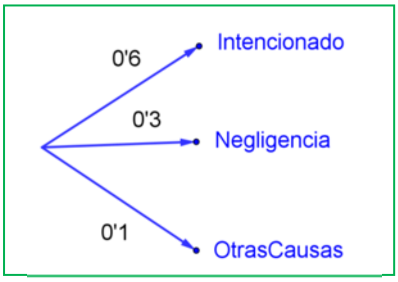
Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Diagramas de árbol

Ejemplo:

- *Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el* 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Represente esta situación con un diagrama de árbol.



Actividades resueltas

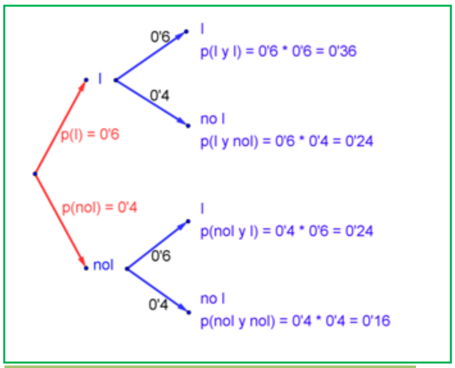
- *Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es* 0.6, *¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?*

Llamamos I al suceso "ser intencionado" y $\bar{I}$ = no$I$ al suceso "no ser intencionado". Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

$$P(I \cap I) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

$$P(I \cap \bar{I}) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.



$$P(\bar{I} \cap I) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$$

$$P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de: $(I \cap I)$, $(I \cap \bar{I})$ y $(\bar{I} \cap I)$ que es 0.36 + 0.24 + 0.24 = 0.84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario:

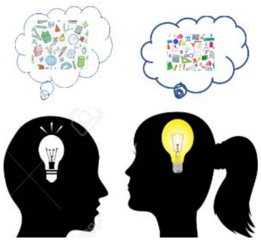
$P(\text{no}I \cap \text{no}I) = P(\bar{I} \cap \bar{I}) = 0.16$ y restarla de 1:

P(al menos uno intencionado) = 1 – 0.16 = 0.84.

Actividades propuestas

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0.6$.

30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.



31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Autor: David Miranda

Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0.412	0.024	0.436
Lesión benigna (B)	0.536	0.028	0.564
Totales	0.948	0.052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0.412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0.024 = $P(M \cap I)$; 0.536 = $P(B \cap C)$; 0.028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0.436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0.436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0.564 = $P(B)$; 0.948 = $P(C)$; 0.052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos M y C?*

Solución:

$P(M \cap C) = P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: $0.412 = 0.436 \cdot P(C/M)$, de donde $P(C/M) = 0.412/0.436 = 0.945$ que es distinto de 0.948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M) = 0.95 = P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No $A = \overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No $B = \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Probabilidad CONDICIONADA y DIAGRAMA en ÁRBOL PROBABILIDAD desde CERO. Susi Profe

https://www.youtube.com/watch?v=Aj2xJuDTyO4

Actividades propuestas

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- *Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.*

	A	No A = $\overline{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la $P(A)$ = 3/9 = 1/3, $P(\overline{A})$ = 6/9 = 2/3, $P(B)$ = 7/9 y $P(\overline{B})$ = 2/9.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 2/9; $P(A \cap \overline{B})$ =1/9; $P(\overline{A} \cap B)$ = 5/9 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 1/9.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

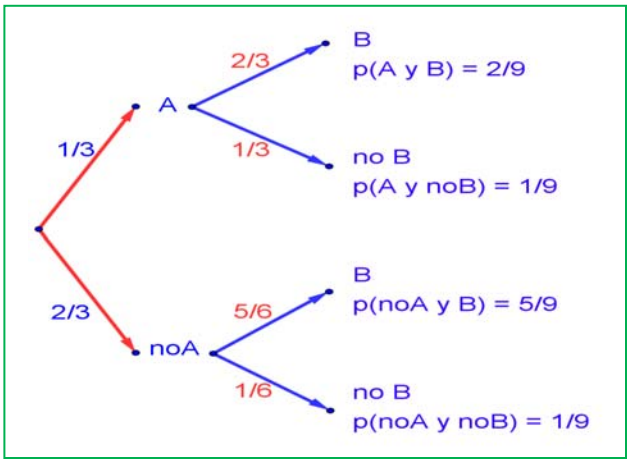
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

El árbol es:



Actividades resueltas

- *Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener la tabla de contingencia:*

Ahora conocemos $P(A)$ = 0.3 y $P(\overline{A})$ = 0.7. Además conocemos $P(B/A)$ = 1/3; $P(B/\overline{A})$ = 6/7; $P(\overline{B}/A)$ = 2/3 y $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 1/7.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Calculamos, multiplicando: $P(A \cap B) = 0.3\cdot(1/3) = 0.1$; $P(A \cap \overline{B}) = 0.3\cdot(2/3) = 0.2$; $P(\overline{A} \cap B) = 0.7\cdot(6/7) = 0.6$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.7\cdot(1/7) = 0.1$ que ponemos también en el árbol.

Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.1	0.6	
No B = $\overline{B}$	0.2	0.1	
	0.3	0.7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, $P(B) = 0.1 + 0.6 = 0.7$ y $P(\overline{B}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.1	0.6	0.7
No B = $\overline{B}$	0.2	0.1	0.3
	0.3	0.7	1

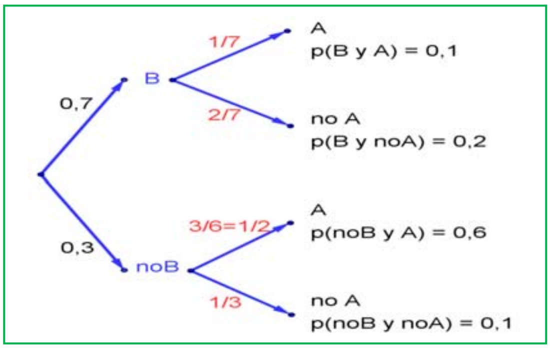
Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:

$P(A/B) = 0.1/0.7 = 1/7$;

$P(\overline{A}/B) = 0.2/0.7 = 2/7$;

$P(A/\overline{B}) = 0.3/0.6 = 3/6 = 1/2$;

$P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.1/0.3 = 1/3$.

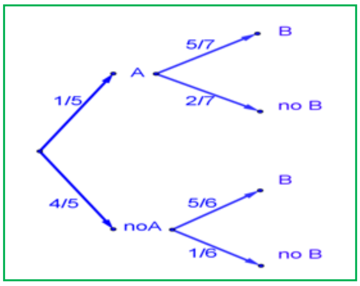


Actividades propuestas

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No B = $\overline{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

39. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

1.5. Teoremas de la probabilidad total y teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el Teorema de *Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Previamente vamos a enunciar un teorema que también ya has usado, el teorema de la probabilidad total, que es como un paso intermedio del teorema de *Bayes*.

Enunciado del teorema de la probabilidad total

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$$

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

Antes de comprobar que SÍ sabes resolver problemas tipo *Bayes*, vamos a trabajar un poco la nomenclatura de las probabilidades condicionadas.

- *Escribe con símbolos las siguientes probabilidades:*

a) Sabemos que se ha verificado B, ¿cuál es la probabilidad de A? $\rightarrow P(A/B) = P(A \cap B) : P(B)$.

b) Probabilidad de B *y* $A \rightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

c) Ha salido una bola negra (A), probabilidad de que sea de la segunda urna (B) $\rightarrow P(B/A)$

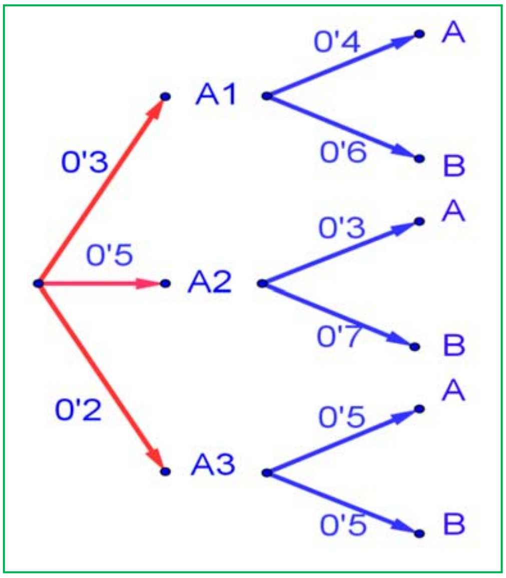
d) Probabilidad de B *o* $A \rightarrow P(A \cup B) = P(B \cup A)$

e) El accidente ha sido en carretera (A), probabilidad de que haya sido mortal (B) $\rightarrow P(B/A)$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *Tenemos un conjunto de sucesos* $\{A_1, A_2, A_3\}$ *tales que* $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, *y son incompatibles dos a dos. Conocemos sus probabilidades:* $P(A_1) = 0.3$, $P(A_2) = 0.5$, $P(A_3) = 0.2$. *Tenemos otros dos sucesos incompatibles,* A *y* B, *de los que conocemos las probabilidades condicionadas* $P(A/A_1) = 0.4$, $P(B/A_1) = 0.6$, $P(A/A_2) = 0.3$, $P(B/A_2) = 0.7$, $P(A/A_3) = 0.5$, $P(B/A_3) = 0.5$. *Queremos calcular* $P(A_1/B)$.

Confeccionamos un árbol con los datos que tenemos.



Ahora podemos calcular las probabilidades de las intersecciones. Ya sabes que:

$$P(A_1 \cap A) = P(A_1) \cdot P(A / A_1) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(A_2 \cap A) = P(A_2) \cdot P(A / A_2) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B / A_2) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$$

$$P(A_3 \cap A) = P(A_3) \cdot P(A / A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \cdot P(B / A_3) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10$$

Llevamos estos resultados a la tabla de contingencia asociada:

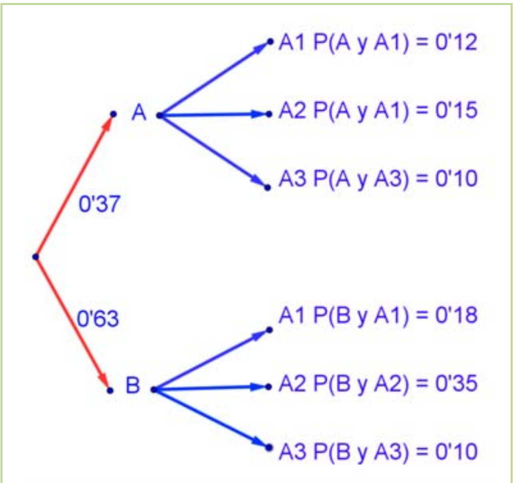
	A_1	A_2	A_2	
A	$P(A_1 \cap A) = 0.12$	$P(A_2 \cap A) = 0.15$	$P(A_3 \cap A) = 0.10$	$P(A) = 0.12+0.15+0.1= 0.37$
B	$P(A_1 \cap B) = 0.18$	$P(A_2 \cap B) = 0.35$	$P(A_3 \cap B) = 0.10$	$P(B)= 0.18+0.35+0.10=0.63$
	$P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$	$P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$	$P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$	1

Sumando columnas comprobamos que no nos estamos equivocando en los cálculos pues las probabilidades que obtenemos: $P(A_1) = 0.12 + 0.18 = 0.3$; $P(A_2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$ y $P(A_3) = 0.10 + 0.10 = 0.2$ son las conocidas.

Sumando por filas obtenemos las probabilidades:

$$P(A) = 0.12 + 0.15 + 0.1 = 0.37 \text{ y } P(B) = 0.18 + 0.35 + 0.10 = 0.63.$$

Con estas probabilidades podemos construir el otro árbol.



Ahora ya es posible calcular las otras probabilidades condicionadas, utilizando las probabilidades de la intersección y dividiendo:

$$P(A_1/A) = P(A_1 \cap A) : P(A) = 0.12/0.37 = 12/37$$

$$P(A_2/A) = P(A_2 \cap A) : P(A) = 0.15/0.37 = 15/37$$

$$P(A_3/A) = P(A_3 \cap A) : P(A) = 0.10/0.37 = 10/37$$

$$P(A_1/B) = P(A_1 \cap B) : P(B) = 0.18/0.63 = 18/63$$

$$P(A_2/B) = P(A_2 \cap B) : P(B) = 0.35/0.63 = 35/63$$

$$P(A_3/B) = P(A_3 \cap B) : P(B) = 0.10/0.63 = 10/63$$

La probabilidad pedida $P(A_1/B) = 18/63 = 2/7$.

Observa que:

Vamos a repasar los cálculos, para comprender mejor los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Si miramos la tabla hemos obtenido $P(B)$ sumando la fila como:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

Y las probabilidades de las intersecciones las hemos obtenido multiplicando en el árbol:

$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1)$… luego:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + P(B / A_3) \cdot P(A_3).$$

Teorema de la probabilidad total: $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$

En el segundo árbol hemos obtenido $P(A_1/B)$ dividiendo $P(A_1 \cap B) : P(B)$. Para tener el teorema de Bayes basta sustituir de nuevo la probabilidad de la intersección por el producto, y utilizar el teorema de la probabilidad total:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$$

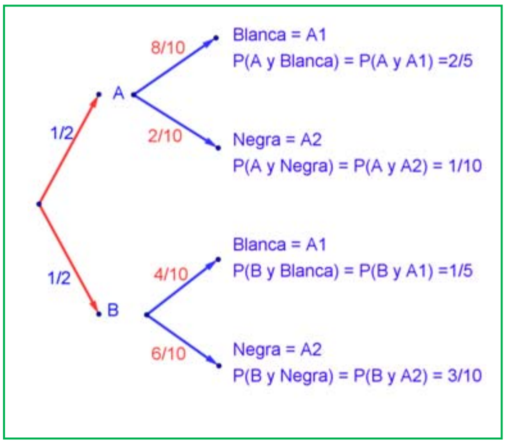
Teorema de *Bayes*: $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$

- *Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?*

Debemos calcular $P(B/Negra)$.

Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(B/A_2)$.

Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.



Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(\text{B}lanca/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(Negra/A) = P(A_2/A) = 2/10$;

$P(Blanca/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y

$P(Negra/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$,

$P(A \cap A_2) = 1/10$,

$P(B \cap A_1) = 1/5$,

$P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

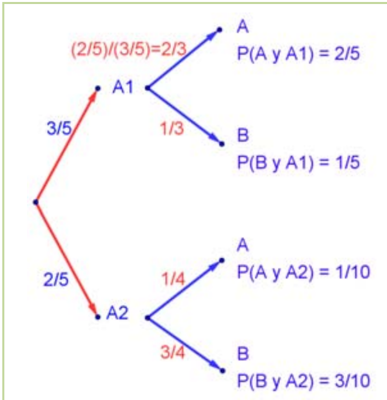
Observa que:

Se verifica el teorema de la probabilidad total:

$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2)$

En general, si hubiera un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se escribiría:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$



Comprueba como en nuestro ejemplo se verifica esa ese teorema de la probabilidad total para $P(A)$, $P(B)$, P(Blanca) y P(Negra).

Y ahora construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

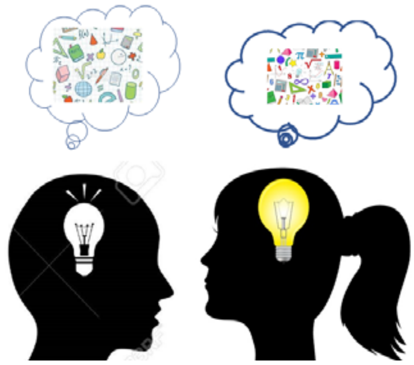
Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B$ / Negra$) = P(B/A_2) = 3/4$.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B) \cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B) \cdot P(B)}{P(A_2/A) \cdot P(A) + P(A_2/B) \cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Actividades propuestas



43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

2. COMBINATORIA

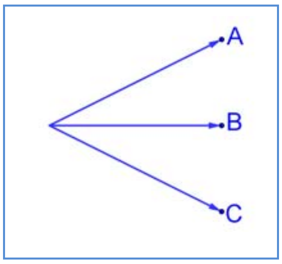
En 4º de ESO de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas ya estudiaste Combinatoria. Ahora vamos a ampliar ese estudio y utilizarlo en el cálculo de probabilidades.

2.1. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

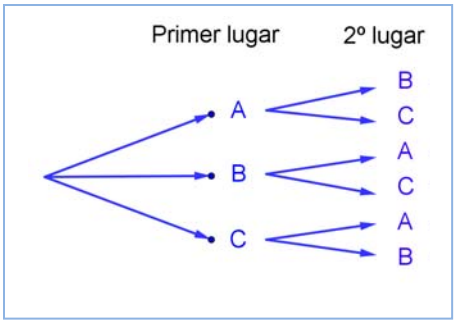
Diagrama en árbol

Actividades resueltas

- *En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?*



Esta técnica que ya conoces, confeccionar un **diagrama en árbol,** nos va a ayudar mucho a resolver los problemas de combinatoria. Como sabes, consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

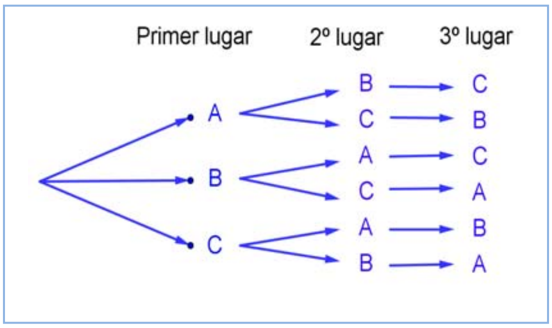


Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

Primer nivel del árbol: En primer lugar podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.

Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.

Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad



Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos.

También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir al árbol: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Actividades propuestas

49. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

50. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras?

b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

51. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

Permutaciones

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplos:

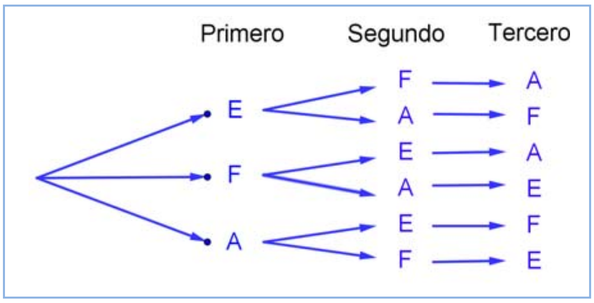
- *Son permutaciones:*
  - Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
  - Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.
  - Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

La actividad resuelta de los tres grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- *En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.*



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de 3 · 2 · 1 = 6 formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n - 1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a un árbol de n niveles con n, $n-1$, $n-2$, ... , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla **!**

Ejemplos:

- Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propuestas

52. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

53. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

54. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

55. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

56. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

57. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Actividades resueltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

$$\text{Es } \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes: a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{7!}$$

b) $$(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$$

Actividades propuestas

58. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5! \cdot 3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{11!}$; f) $\frac{677!}{676!}$.

59. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

60. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

61. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

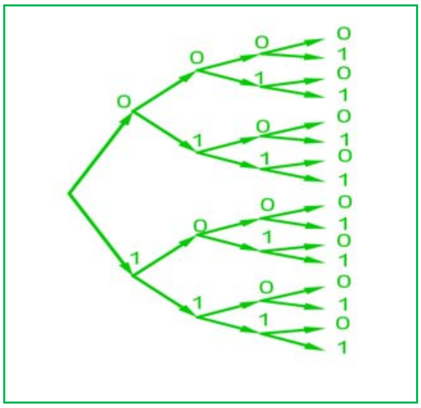
62. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

63. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

2.2. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen. Antes de resolver este problema, resolveremos uno más fácil.



Actividades resueltas

Con dos símbolos, 0 *y* 1*, ¿cuántas tiras de* 4 *símbolos se pueden escribir?*

Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol. Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto el número de tiras distintas que podemos formar es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Las diferentes secuencias de longitud n que se pueden formar con un conjunto de m elementos diferentes, se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n. El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $\mathrm{VR}_{m,n}$ y se calcula con la fórmula:

$$\mathbf{VR}_{m,n} = m^n$$

En la ***actividad resuelta*** anterior son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$\mathrm{VR}_{2,4} = 2^4 = 16$ tiras distintas.

Actividades resueltas

- En el cálculo del *número de quinielas distintas,* los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto se trata de *variaciones con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

  $\mathrm{VR}_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$.

  Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4 782 969 apuestas simples.

- *La probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es*, por tanto, $\frac{1}{4782969}$.

Actividades propuestas

64. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

65. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

66. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

67. Calcula: a) $\mathrm{VR}_{5,2}$; b) $\mathrm{VR}_{4,4}$; c) $\mathrm{VR}_{10,2}$; d) $\mathrm{VR}_{2,10}$.

68. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 4 elementos tomadas de 5 en 5.

b) Las variaciones con repetición de 8 elementos tomadas de 2 en 2.

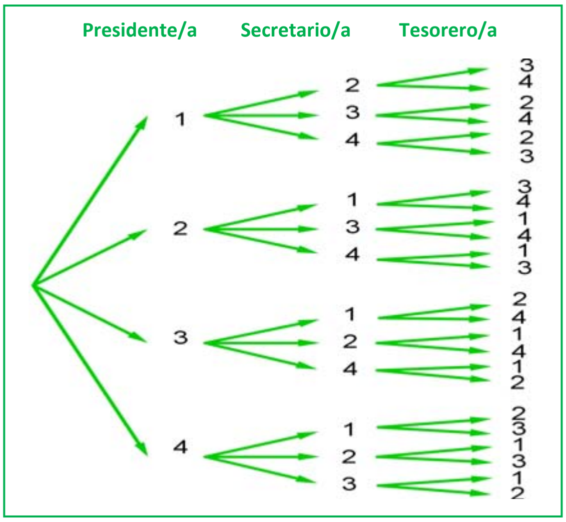
c) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 4 en 4.

69. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Variaciones sin repetición

Actividades resueltas



- *Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos, presidencia, secretaría y tesorería. a) Si únicamente se presentan cuatro personas. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Si, antes de que empiece la votación, se presentan otros dos candidatos, ¿cuántas juntas diferentes podrán formarse ahora?*

a) Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos los candidatos del 1 al 4. A la presidencia pueden optar los 4 candidatos, pero si un determinado candidato ya ha sido elegido para la presidencia, no podrá optar a los otros dos cargos, por lo que desde cada una de las primeras cuatro ramas, sólo saldrán tres ramas. Una vez elegida una persona para la presidencia y la secretaría, para optar a la tesorería habrá únicamente dos opciones, por lo cual de cada una de las ramas del segundo nivel, salen dos ramas para el tercer nivel.

De este modo, multiplicando el número de ramificaciones en cada nivel, tenemos que la junta puede estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras.

b) Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

Estas agrupaciones de elementos, en que un elemento puede aparecer en cada grupo como máximo una vez, sin repetirse, y cada grupo se diferencia de los demás por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen se denominan *variaciones sin repetición*.

En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, se tienen en cuenta el **orden** y los **elementos** que forman el grupo. La diferencia es que en las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos y en las variaciones ordinarias no. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $V_{m,n}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ (} n \text{ factores)}$$

Observaciones

1) m debe ser siempre mayor o igual que n.

2) Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- *Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor que se multiplica en el cálculo de las variaciones:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a 4 – 3 + 1.

En b) 4 = 6 – 3 + 1.

En c) 5 = 10 – 6 + 1.

En d) 6 = 9 – 4 + 1.

En general el último elemento es $(m - n + 1)$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

- *Escribe la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales se debe dividir por $(m-n)!$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para realizar esta operación con la *calculadora* se utiliza la tecla etiquetada $\boxed{\textbf{\textit{nPr}}}$

Actividades propuestas

70. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

71. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

72. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

73. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

74. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

75. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

76. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que:

$$V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}.$$

Para que tenga sentido se asigna a 0! el valor de 1.

0! = 1.

2.4. Combinaciones

Actividades resueltas

- *En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?*

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (**elementos**) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación.

Se llama **combinaciones** de m elementos tomados de n en n y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de n elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A	Paquetes sin A pero con B	Paquetes sin A ni B pero con C	
ABC	BCD	CDE	
ABD ACD	BCE BDE	CDF CEF	DEF
ABE ACE ADE	BCF BDF BEF		
ABF ACF ADF AEF			

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

Y, en general, de acuerdo con el mismo razonamiento se calculan las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividiendo las variaciones entre las permutaciones, con la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla etiquetada ***nCr***

Actividades resueltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas y para aprobar hay que responder* 6 *correctamente. ¿De cuántas formas se pueden elegir esas* 6 *preguntas?*

No importa en qué orden se elijan las preguntas, sino cuáles son las preguntas elegidas. No pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta). Únicamente influyen las preguntas (los elementos). Se trata de un problema de combinaciones, en que tenemos que formar grupos de 6, de un conjunto formado por 10 preguntas diferentes, luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- *Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevarnos tres para leerlos en vacaciones, ¿de cuántas maneras distintas podemos elegirlos?*

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tienes 7 monedas de euro que colocas en fila. Si 3 muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?*

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propuestas

77. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

78. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

79. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Toda la combinatoria en 9 minutos. Resumen de combinatoria, fórmulas y ejemplos de aplicación de cada caso. Variaciones con y sin repetición, permutaciones, con y sin repetición y combinaciones. Javier Valdés
https://www.youtube.com/watch?v=g843LMUY5H0

2.5. Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** m sobre n se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ y $\binom{4}{0} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecto:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1.$$

Recuerda que $0! = 1$.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

- *Calcula* $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{7}$= 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 y $\binom{4}{4}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1.$$

Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{1}$= 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 y $\binom{4}{1}$ = 4. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1}$ = m? En efecto:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m.$$

- *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *e indica cuáles son iguales.*

Habrás comprobado que: $\binom{7}{4}$ = $\binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7}$ = $\binom{9}{2}$. Razona el motivo. Podemos generalizar y decir que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Pero antes lo comprobaremos con un problema.

- *Luis y Miriam se han casado y les han regalado seis objetos de adorno. Quieren poner tres en una estantería, pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. Sin embargo, a Luis no le gusta ese objeto, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. Uno de los dos se saldrá con la suya. Calcula cuantas son las posibilidades de cada uno.*

A Luis y Miriam les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Sin embargo a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprueba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *y que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general,

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

¿Te atreves a demostrarlo?

Para ***demostrarlo*** recurrimos a la definición y realizamos operaciones:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$$ reducimos a común denominador

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$$ Recuerda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Ponemos el denominador común y sumamos los numeradores

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ De nuevo usamos que $m\cdot(m-1)! = m!$

$$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Triángulo de *Pascal* o Triángulo de *Tartaglia*

A un matemático italiano del siglo XVI, llamado *Tartaglia* pues era tartamudo, se le ocurrió disponer a los números combinatorios así:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \ldots. & & & & \end{array}$$

O bien calculando sus valores correspondientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots & & & & \end{array}$$

A ambos triángulos se les llama **Triángulo de *Pascal*** o **Triángulo de *Tartaglia***.

Los valores que hay que poner en cada fila del triángulo se calculan, sin tener que usar la fórmula de los números combinatorios, de una forma más fácil basada en las propiedades de los números combinatorios que acabamos de probar:

Por la propiedad $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empieza y termina con 1.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que el *Triángulo de Tartaglia* es simétrico o sea que el primer elemento de cada fila coincide con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obtener las siguientes filas sumando términos de la anterior, ya que cada posición en una fila es la suma de las dos que tiene justo encima de la fila anterior.

De este modo el triángulo se construye secuencialmente, añadiendo filas por abajo hasta llegar a la que nos interesa. Si sólo necesitamos conocer un número combinatorio aislado, tal vez no valga la pena desarrollar todo el triángulo, pero en muchas ocasiones necesitamos conocer los valores de toda una fila del triángulo (por ejemplo cuando desarrollamos un binomio de Newton, o cuando resolvemos problemas de probabilidad).

Actividades propuestas

80. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

81. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m.

82. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

2.6. Distribución binomial

Recorridos aleatorios o caminatas al azar

Los números combinatorios sirven como modelo para resolver situaciones muy diversas.

Actividades resueltas

El dispositivo que aparece a la izquierda se denomina *aparato de Galton*. Su funcionamiento es el siguiente: cuando se introduce una bola por el embudo superior, va cayendo por los huecos que existen en cada fila. En cada paso puede caer por el hueco que tiene a su derecha o por el que tiene a su izquierda con igual probabilidad, de forma que es imposible, cuando ponemos una bola en el embudo predecir en cuál de los carriles inferiores acabará cayendo.

Si introducimos muchas bolas por el agujero superior, por ejemplo 1024*, ¿crees que al llegar abajo se distribuirán uniformemente entre todos los carriles o habrá lugares a los que lleguen más bolas?*

Observa que para llegar a la primera fila, sólo hay un camino posible, que es el que va siempre hacia la izquierda, y para llegar a la última, el único camino posible es el que va siempre a la derecha.

Mientras que para llegar a los huecos centrales de cada fila el número de caminos posibles es mayor. Por ejemplo, para llegar al segundo hueco de la segunda fila, hay dos caminos. En general, al primer hueco de cada fila sólo llega un camino, igual que al último y a cada uno de los otros huecos llegan tantos caminos como la suma de los caminos que llegan a los dos huecos que tiene justo encima. Comprueba que para llegar al hueco n de la fila m hay $\binom{m}{n}$ caminos.

En resumen, el número de caminos aleatorios que llegan a cada hueco se calcula igual que los números en el triángulo de *Tartaglia*. Si nuestro *aparato de Galton* tiene 9 filas, el número de caminos que llegan a cada uno de los compartimentos de salida es el que se obtiene con la novena fila del Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, de un total de $2^9 = 512$ caminos diferentes que puede realizar la bola. Así que cuando echamos en el aparato 1024 bolas, habrá aproximadamente 2 bolas que hagan cada uno de los 512 recorridos posibles, ya que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Por tanto el número de bolas que podemos esperar que caigan en cada compartimento es el siguiente:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bolas	$\frac{1024}{512}=2$	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2= 72	9·2 = 18	2

Vemos que no se deposita el mismo número de bolas en todos los compartimentos. Mientras que en los extremos habrá aproximadamente 2 bolas, en los centrales habrá unas 252.

De acuerdo con ley de los grandes números, los resultados experimentales serán más parecidos a los teóricos cuanto mayor sea el número de veces que se realiza el experimento (es decir, cuanto mayor sea el número de bolas). En *Youtube* buscando la expresión "*máquina de Galton*" puedes ver muchos vídeos en que se realiza el experimento y se verifica este hecho.

Número de éxitos

Actividades resueltas

- *En una sesión de tiro al plato se realizan sucesivamente 10 disparos. ¿Cuántas posibilidades habrá de acertar en el blanco exactamente tres veces (tener tres éxitos)?*

Son las $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumen

$\binom{m}{n}$ = Número de combinaciones de m elementos tomados de n en n

= Número de caminos posibles para llegar al hueco n de la fila m del aparato de *Galton*

= Número de subconjuntos de n elementos tomados en un conjunto de m elementos

= Número de sucesos en los que obtenemos n éxitos en m pruebas

= Números de muestras sin ordenar de tamaño n en una población de tamaño m.

2.7. Binomio de Newton

Vamos a calcular las sucesivas potencias de un binomio. Ya sabes que:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para calcular $(a+b)^4$ multiplicamos $(a+b)^3$ por $(a+b)$.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3\cdot(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a+b)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 +$$
$$+ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

Observa que para hallar cada uno de los coeficientes de $(a + b)^4$, excepto el primero y el último que valen 1, se suman los coeficientes igual que en el triángulo de *Tartaglia*. Se obtiene cada elemento sumando los dos que tiene encima.

Actividades resueltas

- *¿Serías capaz de calcular $(a + b)^5$ sólo observando?*

Fíjate que siempre aparecen todos los posibles términos del grado que estamos calculando, por lo que para calcular la quinta potencia tendremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Los exponentes están ordenados de manera que los de a van descendiendo desde 5 hasta 0, y los de b van aumentando desde 0 hasta 5 (recuerda $a^0 = 1$).

El coeficiente del primer y último término es 1.

Los coeficientes se obtienen sumando los de los términos de la fila anterior, como en el Triángulo de *Tartaglia*. Son la quinta fila del Triángulo de *Tartaglia*.

Luego $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribirlo también utilizando números combinatorios:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propuestas

83. Desarrolla $(a + b)^6$

En general:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdad se denomina ***Binomio de Newton***.

Actividades resueltas

- *¿Cómo calcularías $(a - b)^n$?*

Basta aplicar la fórmula del Binomio de Newton a $(a +(-b))^n$.

Recuerda $(-b)$ elevado a un exponente par tiene signo positivo y elevado a un exponente impar lo tiene negativo. Por tanto:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Los signos son alternativamente positivos y negativos.

Actividades propuestas

84. Desarrolla

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

85. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

86. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

2.8. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades

- *¿Sabes jugar al póker? Se reparten 5 cartas y puede haber distintas jugadas: parejas, tríos, dobles parejas, póker… Calcula la probabilidad de obtener un póker de ases servido.*

Para resolver problemas de probabilidad utilizando la regla de *Laplace*, podemos contar los casos favorables y los posibles haciendo uso de la combinatoria.

Cálculo de los casos posibles:

¿De cuántas maneras se pueden recibir las 5 cartas? ¿Importa el orden? ¿Y los elementos? Son combinaciones:

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{35!\cdot 5!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 658008$$

Cálculo de los casos favorables:

Para tener un póker de ases servido nos tienen que repartir {As, As, As, As, Otra carta}. Igual que antes, no importa el orden, sólo los elementos. En la baraja sólo hay 4 ases, que están fijos, y la otra carta puede ser cualquiera de las 40 – 4 cartas restantes.

Regla de Laplace:

$$\text{P(Póker de ases servido)} = \frac{36}{658008} = 0.0000547$$

Juan está de suerte, en 10 partidas ha sacado 5 pókeres de ases seguidos. ¿Crees que hace trampas?

- *Calcula la probabilidad de sacar póker*

Ya conocemos los casos posibles, $C_{40,5}$ = 658008. Debemos calcular los casos favorables. ¿Cuántas jugadas hay que sean póker? Son póker: {As, As, As, As, Otra carta}, {2, 2, 2, 2, Otra carta}, … Es decir 360.

$$P(\text{Póker servido}) = \frac{360}{658008} = 0.000547$$

Autor: David Miranda

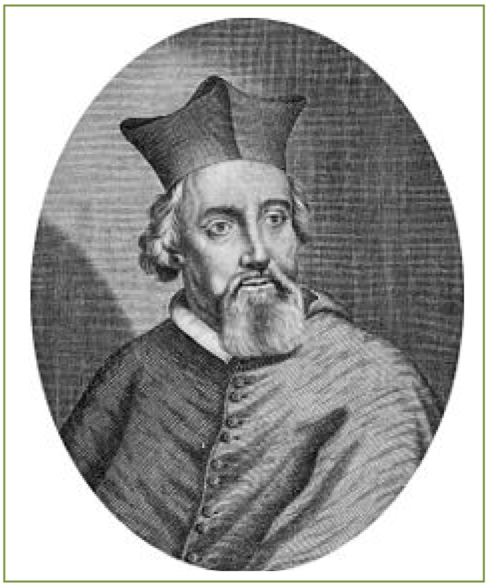
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Juan Caramuel Lobkowitz

(Madrid, 23 de mayo de 1606 – Vigevano, Lombardía, 8 de septiembre de 1682)



Juan Caramuel fue un personaje extraño y prodigioso, tan fascinante como olvidado. Fue matemático, filósofo, lógico, lingüista y monje cisterciense, que se ganó el sobrenombre de «*Leibniz español*» por la variedad y vastedad de sus conocimientos. Lo traemos aquí, por ser un matemático español del siglo XVII, que ya es raro, y porque nació en Madrid, donde una calle lleva su nombre, así como un centro de salud y un parque.

Era hijo del ingeniero luxemburgués Lorenzo Caramuel y de la bohemia Catalina de Frisia. De inteligencia superdotada, a los doce años componía tablas astronómicas, siendo su padre su primer maestro en esta disciplina.

Estudió humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá, ingresó en la Orden Cisterciense en el Monasterio de la Santa Espina (cerca de Medina de Rioseco Valladolid); se formó en filosofía en el monasterio de Montederramo, Orense, y en teología en el de Santa María del Destierro, en Salamanca. Amante de las lenguas, llegó a dominar y hablar una veintena como latín, griego, árabe, siríaco, hebreo, chino, etc.

Fue abad, obispo coadjutor en Maguncia y agente del rey de España en Bohemia.

Obra

Mantuvo activa relación epistolar con los eruditos más célebres de su época. Se rebeló contra la autoridad de Aristóteles y adoptó, por ejemplo, el mecanicismo cartesiano.

Nada escapó a su omnímoda curiosidad, de suerte que por su espíritu enciclopédico ha llegado a llamársele el *Leibniz español*. Fue ante todo un generalista y nunca abordó un tema, cualquiera que este fuese, sin replantearse sus fundamentos teóricos desde todas las perspectivas posibles como un típico *homo universalis*: Caramuel se interesó y escribió sobre la lengua, la literatura en general y el teatro y la poesía en particular, la pedagogía, la criptografía, la filosofía y la teología, la historia y la política de su tiempo, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura, las matemáticas, la física, la astronomía, etc. La obra de Caramuel fue cuantiosa, variada y dispersa (se le atribuyen doscientos sesenta y dos títulos, entre ellos sesenta impresos).

Trabajó en **teoría de la probabilidad**, dando pasos en la dirección correcta hacia la formulación de Pascal, quien seguramente se inspiró en su «*Kybeia, quæ combinatoriæ genus est, de alea et ludis Fortunæ serio disputans*» (1670), un tratadito de veintidós páginas incluso en su *Mathesis biceps* que representa el segundo tratado sobre cálculo de probabilidades de la historia después del tratado de 1656 de Huygens. En el tratado de Caramuel se estudian distintos juegos y el problema de la división de las apuestas.

También se le debe la primera descripción impresa del **sistema binario** en su *Mathesis biceps* en lo que se adelantó treinta años a Leibniz, su más famoso divulgador. Explicó allí el principio general de los números en base n, destacando las ventajas de utilizar bases distintas de la 10 para resolver algunos problemas. Fue también el primer español que publicó una tabla de logaritmos. El sistema de logaritmos que desarrolló fue en base 1009, donde log 1010 = 0 y log 1 = 0.

Otra de sus aportaciones científicas fue, en **astronomía**, un método para determinar la longitud utilizando la posición de la Luna.

En **trigonometría**, propuso un método nuevo para la trisección de un ángulo.

Sobre **arquitectura** escribió en español su *Architectura civil, recta y obliqua* (Vigevano, 1678). Se trata de una obra especulativa y destinada al lector entendido en los temas objeto de debate; por eso es difícil de llevar a la práctica por más que la obra se halle ilustrada con calcografías que el autor agrupa en el último tomo y que él mismo diseñó y tardó más de cuarenta años en hacerlas esculpir y grabar. Su origen se encuentra en una obra suya anterior, la *Mathesis architectonica*, publicada en latín, que constituye la tercera parte de su *Cursus mathematicus* (1667–1668), que tradujo al castellano en una versión ampliada en 1678. Diseñó además la fachada de la catedral de Vigevano (1680), transformando el conjunto renacentista de la Piazza Ducale.

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Estadística

El nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 aC.

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Autor: David Miranda

Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

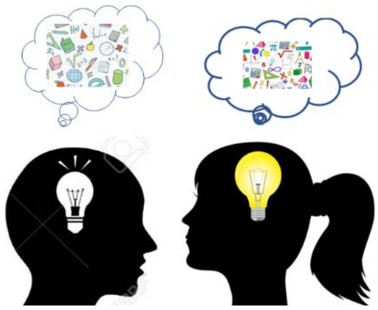
RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	$P(5) = 1/6$. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. 3. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremas de Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Probabilidad de intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Probabilidad de unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. P(5 $\cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36
Teorema de *Bayes*	$P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$	
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Probabilidad



1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Vídeo de un problema de selectividad resuelto: Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

video

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

https://youtu.be/VIK1B2OO7Bg

Combinatoria

20. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

21. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

22. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

23. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

24. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

25. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

26. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

27. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

28. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

29. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3 000?

30. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ó 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

31. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

32. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

34. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

35. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

36. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

37. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

38. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

39. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

40. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

42. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

43. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

44. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

45. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

46. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

47. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

48. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

49. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

50. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un 2 es:

a) 22/40 b) 13/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Con los **dígitos** 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?

a) 58 b) 120 c) 96 d) 192

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:

a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?

a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

Problemas propuestos en Selectividad

1. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

2. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo *A* consta de 30 estudiantes, y los grupos *B* y *C* tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo *A* ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo *B* y el 40 por ciento del resto han elegido informática. A) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática. B) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al grupo *B*.

3. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan es 0.12, la probabilidad de que salga una copa es 0.08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84. A) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa. B) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

4. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de: a) que sea hombre. b) que esté enfermo. c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

5. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de: a) que los calcetines sean negros. b) que los dos calcetines sean del mismo color. c) que al menos uno de ellos sea rojo. d) que uno sea negro y el otro no.

6. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto, a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día. b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

7. En una bolsa hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa *B* hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de *A,* anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa *B*, a continuación se extrae al azar una bola de *B* y se anota también su paridad. A) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad. B) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de *B* corresponda a un número impar.

8. Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna *B* contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

9. De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar: a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey. b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

10. La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar: a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té? b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té? c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

11. Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades. Las unidades pueden tener defectos de dos tipos, *A* y *B*. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo *A* únicamente, 8 unidades con defecto del tipo *B* únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total: a) Cero defectos. b) Una unidad con defecto del tipo *A* y otra con defecto del tipo *B*, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra. A) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par. B) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

13. Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide: a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce. b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

14. En dos urnas *A* y *B*, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la *A*, si la bola escogida resultó ser blanca?

15. Se dispone de dos urnas *A* y *B*, de idéntico aspecto externo. La urna *A* contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que *B* contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reemplazamiento, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que: a) Ambas bolas sean rojas. b) Las dos bolas sean del mismo color.

16. Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas. (a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4. (b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

16. En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de 1/3, si es de dificultad media, 2/5, y si es de escasa dificultad, 3/4. Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen. Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.

17. De una urna con cinco bolas, dos blanca y tres negras, extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: a) *A* = Las dos bolas extraídas son del mismo color. b) *B* = Extraemos al menos una bola blanca.

18. Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

19. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

20. Se considera una célula en el instante **t** = 0. En el instante **t** = 1 la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir, con probabilidad 1/4. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo $t = 2$ cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro. A) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t = 2$? B) ¿Con qué probabilidad?

21. Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: (a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados. (b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación). (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

22. Se dispone de tres urnas, la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas, y la C con una blanca y cinco rojas. (a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? B) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

23. Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0.7 y de que figure a nombre de una mujer es 0.3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0.8 y de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un número de teléfono al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja? ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

24. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen?

¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

25. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas? (b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

26. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.7$. (a) Calcúlese $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes. (b) Calcúlese $P(A \cup B)$

27. La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0.6; la probabilidad de que compre un producto B es 0.5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto B no habiendo comprado el producto A es 0.4. A) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B? b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?

28. Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0.3; de que se remita al bufete B es 0.5 y de que se remita al bufete C es 0.2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0.6; para el bufete B esta probabilidad es 0.8 y para el bufete C es 0,7. a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso. b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A.

29. En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0.4; la probabilidad de que vote al partido B es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar: a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico. b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B?

30. Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos *B1*: La primera bola es blanca, *B2*: La segunda bola es blanca y *B3*: La tercera bola es blanca.

a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no. b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.

31. Una fábrica produce tres modelos de coche: *A, B* y *C*. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo *A* y el 30 % de tipo *B.* El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo *A* son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo *B* tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos: (a) El coche es del modelo C. (b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel. (c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.

32. Tres máquinas *A, B* y *C* fabrican tornillos. En una hora, la máquina *A* fabrica 600 tornillos, la *B* 300 y la *C* 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0.01 para *A*, de 0.02 para *B* y de 0.03 para *C*. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina *A*, sabiendo que no es defectuoso?

33. En un videoclub quedan 8 copias de la película *A*, 9 de la *B* y 5 de la *C*. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que: (a) Los tres escojan la misma película. (b) Dos escojan la película *A* y el otro la *C*.

34. Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números. (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él? (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

35. Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

36. Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0.05 de falsos positivos, esto es, casos en los que estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0.99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0.99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

37. Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras. a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra? b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

38. Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas: a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble. b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

39. Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0.3. A) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche? B) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento? C) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?

40. Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito. ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros? Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

41. Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

42. Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.5$; $P(A \cap B) = 0{,}45$

Calcular a) $P(B/A)$ b) $P(A^c \cap B^c) =$ A^c representa el suceso complementario del suceso A.

43. El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos: (a) Las tres personas votan al candidato A. (b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B. (c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

44. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener: (a) Tres reyes. (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera. (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

45. Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0.99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0.05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0.99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

46. En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor. (a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor? (b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?

47. En una clase, el 20% de los alumnos aprueba lengua, el 30% aprueba matemáticas y el 40% aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12% aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7% aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?

48. Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0.55 y por E_2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

49. En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0.02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0.09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

50. Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0.95 y de que se active el segundo es 0.90. (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores. (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

51. En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa poblaci6n el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol. (a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol. (b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

52. Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0.6, la empata con probabilidad 0.3 y la pierde con probabilidad 0.1. El jugador juega dos partidas. (a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio. (b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

53. En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:
(a) No curse la opción Científico-Tecnológica. (b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.
54. Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.
(a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
(b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.
55. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno”, "Obtener al menos un dos”, "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4”.

56. En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:

(a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.

(b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

57. Sean *A* y *B* dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$ Calcular: (a) *P*(*B*/*A*). (b) $P(\overline{A}/B)$

58. Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B: *P*(*A*) = 0. 6, *P*(*B*) = 0. 2, P(A ∩ B) = 0. 12. (a) Calcular las probabilidades de los sucesos (*A* U *B*) y (*A*/(*A* U *B*)). (b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

59. Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

60. Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0.25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

61. Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide: a) Describir el espacio muestral de este experimento. b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

62. Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0.2 %, mientras que dicha proporción es 0.5 % en la segunda y 0.1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

63. Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

64. Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

65. Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar. (a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso. (b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

66. En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.
(a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado. (b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

67. En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane. b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

68. Se consideran dos sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio, tales que: *P(A)* = 1/4, *P(B)* = 1/3, *P(AUB)* = 1/2

a) ¿Son *A* y *B* sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$.*Nota*.- La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de *A*.

69. Se consideran dos actividades de ocio: *A* = ver televisión y *B* = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique *A* es igual a 0.46; la probabilidad de que practique *B* es igual a 0.33 y la probabilidad de que practique *A* y *B* es igual a 0.15. a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores? b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

70. Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3. a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya? b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

71. Se consideran tres sucesos *A, B, C* de un experimento aleatorio tales que:
$P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cup B \cup C) = 2/3$; $P(A \cap B \cap C) = 0$: $P(A/B) = P(C/A)=$ ½.

(a) Calcúlese $P(C \cap B)$. (b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de *A*.

72. Para la construcción de un luminoso de feriase dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0.01 si la bombilla es blanca, es igual a 0.02 si la bombilla es azul e igual a 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor. (a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

73. En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %. a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado. b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

74. La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0.55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0.40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0.25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.

75. Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza. a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento. b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

76. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.4$.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A\ B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese.

b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.

c) Si $P(A/B) = 0$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.

d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.

77. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.4$; $P(A \cap B) = 0.1$.

Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$. Nota. $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

78. Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

79. Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que: $P(A/C) \geq P(B/C)$, $P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C})$.

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

80. Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: *La economía de un cierto país está en recesión.*

Suceso B: *Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión*.

Se sabe que $P(A) = 0.005$; $P(B/A) = 0.95$; $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.96$. a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión. b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

81. En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar. a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería? b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

82. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0.6$. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos: a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$. c) $B \subset A$ y $P(B) = 0.3$.d) $P(A \cap B) = 0.1$.

83. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a 7/12. Se sabe además que $P(A/B) = 1/2$. a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B. b) Calcula la probabilidad de que ocurra A.

84. En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0.2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.3. Se elige al azar un habitante de la población. a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente. b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

85. En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0.12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.

86. En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5, de que sea un camión es 0.3 y de que sea una motocicleta es 0.2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0.06 para un coche, 0.02 para un camión y 0.12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar. A) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida. B) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.

87. Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0.49 y de nazca un niño es 0.51. Una familia tiene dos hijos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

88. Se disponen de tres urnas *A, B* y *C*. La urna *A* contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna *B* contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna *C* contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna *A*, si sale el 4 se escoge la urna *B* y si sale 5 o 6 se elige la urna *C*. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca? b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna *C*?

89. La probabilidad de que el jugador *A* de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador *B* consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Autor: David Miranda

Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González

Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF

90. Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
No apto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto? 2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

91. Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

92. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio *A*, 70 alumnos del colegio *B* y 50 alumnos del colegio *C*. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio *A*, el 90 % de los del colegio *B* y por el 82 % de los del colegio *C*. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba? (b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio *B*?

93. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B) = 0.1$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$ $P(A|B) = 0.5$.Calcula:

(a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B}/\overline{A})$

94. Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde. (a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

95. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$. a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos *A* y *B*. b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos *A* y *B*. *Nota:* $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso S.*

Autor: David Miranda
Revisores: Luis Carlos Vidal, Álvaro Valdés y Leticia González
Ilustraciones: Del autor, de Wikipedia y del Banco de Imágenes de INTEF