MATEMÁTICAS II:
2º Bachillerato de Ciencias
Capítulo 8: Derivadas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín

Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Luis Carlos Vidal

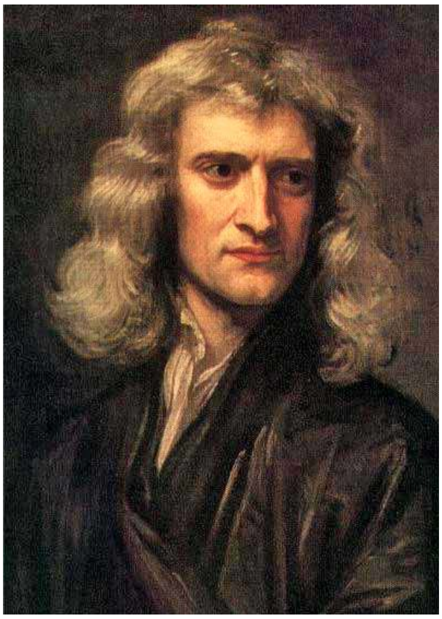
Índice

Resumen

Cuando la Ciencia ha avanzado suficientemente en un determinado camino, en ocasiones ocurre que, al mismo tiempo, pero en dos lugares alejados, fructifica una misma idea. Eso es lo que ocurrió en el siglo XVII, cuando prácticamente al mismo tiempo, *Newton* en Inglaterra y *Leibniz* en Alemania llegaron al concepto de derivada, y con él al de *Cálculo Diferencial*. Esto motivó graves disputas y enfrentamientos sobre quién era el padre de la idea. Ahora se considera que lo fueron ambos.

El curso pasado ya has estudiado el concepto de derivada y un buen número de derivadas de distintas funciones. También se utilizó la derivada para estudiar la tendencia de una función, si crecía o decrecía, y para calcular sus máximos y mínimos.

Ahora, que ya tienes los conceptos adquiridos, es el momento de profundizar en ellos y formalizarlos con mayor precisión.



Isaac Newton

Leibniz

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín

Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1.1. Concepto de derivada de una función en un punto

Del curso pasado ya conoces la definición de derivada. Vamos a recordarla.

Recuerda que:

La derivada de una función en un punto responde al estudio de dos problemas aparentemente distintos: El primero es el estudio del **ritmo de variación** de la función en dicho punto. El segundo es de índole geométrica: la derivada de una función en un punto indica el valor de la pendiente de la recta **tangente** a la gráfica de la función en ese punto.

El estudio de la tasa de variación media nos resultaba insuficiente para resolver determinados problemas.

Por ejemplo: Si un avión (o un coche) sufre un accidente, y los expertos quieren determinar las causas, no les interesa la velocidad media del avión, (o del coche) sino la velocidad instantánea en el momento del accidente.

Otro ejemplo más: Los bomberos utilizan lonas para recoger a las personas que deben saltar de un incendio. Para fabricar la lona y que resista deben conocer la velocidad en el momento del impacto, no la velocidad media de caída.

Definición:

Si X es un intervalo abierto, f: $X \to \Re$ una función continua en $a \in X$, se dice que f es **derivable** en a si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y es un número real (es decir, no es infinito).

El valor del límite lo denominamos **derivada** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a)$, $Df(a)$ o por $\frac{df}{dx}(a)$.

$$f'(a) = DF(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición de derivada por la derecha y por la izquierda

Definición:

Si X es un intervalo, f: $X \to \Re$ una función y $a \in X$, se dice que f es **derivable por la derecha** en a si existe el límite por la derecha y es finito:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Al valor del límite lo llamamos **derivada por la derecha** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a^+)$.

Es decir, la variable se aproxima al punto por la derecha, y por tanto es siempre $x > a$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Definición:

Si X es un intervalo, f: $X \to \Re$ una función y $a \in X$, se dice que f es **derivable por la izquierda** en a si existe el límite por la izquierda: $\underset{x \to a^-}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, y es finito

Al valor del límite lo llamamos **derivada por la izquierda** de f en $x = a$, y lo representamos por $f'(a^-)$.

Es decir, la variable se aproxima al punto por la izquierda, y por tanto es siempre $x < a$.

Para que exista la **derivada de la función en un punto** $(a, f(a))$, debe existir el límite $\underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ por lo que deben existir los dos límites laterales y por tanto deben existir la derivada por la derecha y la derivada a la izquierda en ese punto, y sus valores deben coincidir.

Actividades resueltas

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x) = \cos\sqrt{x}$ en x = 0.

Observa que la función no está definida para valores negativos de la variable. Si $x > 0$ $f'(x) = \frac{-sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, expresión que no está definida para x = 0. Para estudiar la derivabilidad de la función en x = 0, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \underset{h \to 0}{lím} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\sqrt{h} - 1}{h} = \frac{-1}{2}$$

Luego la función es derivable en $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$.

Derivación y continuidad

Si *f* es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.

Demostración

Recuerda que una función es continua en $x = a$, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Entonces

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

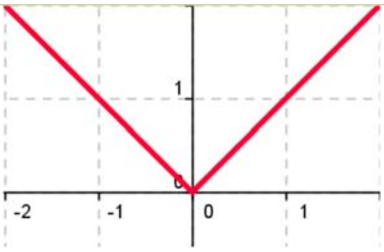
Suponemos que la función es derivable en a, es decir que existe $f'(a)$ y es un valor finito. Tomamos límites.

$$\underset{x \to a}{lím}(f(x) - f(a)) = \underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{lím}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

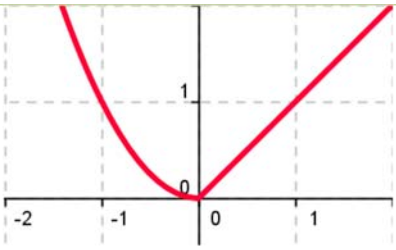
Por tanto $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Actividades resueltas

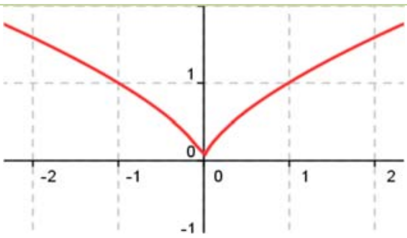
- *Las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación son continuas en todos los puntos, y derivables en todos los puntos excepto en x = 0. Observa el comportamiento de la gráfica en dicho punto.*



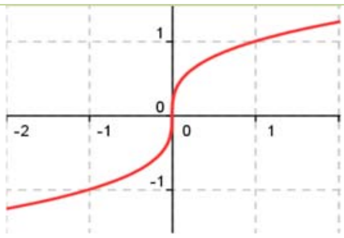
Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen –1 y 1 respectivamente.



Los límites laterales existen, pero no coinciden, valen 0 y 1 respectivamente.

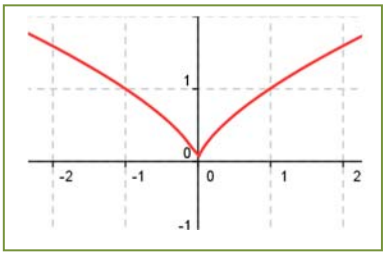


La función $y = x^{2/3}$ es continua pero no es derivable en x = 0.



La función $y = x^{1/3}$ es continua pero no es derivable en x = 0.

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x) = x^{2/3}$ en x = 0



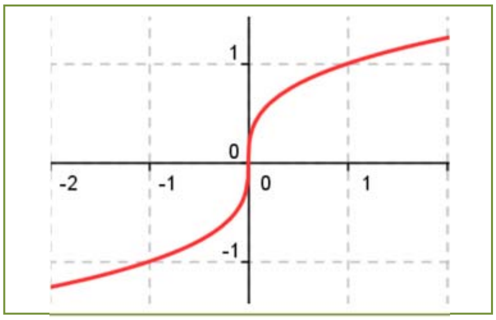
La función es continua en todo $\Re$ ya que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^{2/3} = a^{2/3}$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^{2/3} = 0$.

Para estudiar la derivabilidad de la función en x = 0, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-1/3} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1/3}} = \infty .$$

El límite tiende a infinito. No es derivable en x = 0. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x \in \Re \mid x \neq 0\}$.

- *Estudia la derivabilidad de la función* $f(x) = x^{1/3}$ en x = 0.



La función es continua en todo $\Re$. Para estudiar la derivabilidad de la función en x = 0, utilizamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-2/3} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}} = \infty .$$

El límite no existe. Tiende a infinito. No es derivable en x = 0. Observa en la gráfica como la recta tangente en el origen es una recta vertical. La función es derivable en $\{x \in \Re \mid x \neq 0\}$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2e^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$, *se pide:*

  a) *Calcula el valor de* a, para que $f(x)$ sea continua en todo $\Re$.

  b) *Estudia la derivabilidad de* f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

a) Es una función definida a trozos por dos funciones continuas. Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$a + ln(1 - x)$ en $x = 0$ es igual a a. $\quad a = f(0)=\lim_{x\to 0} x^2e^{-x}=0$ en $x = 0$.

Por tanto, si $a = 0$ la función $f(x)=\begin{cases} \ln(1-x) & si\ x<0 \\ x^2e^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$ es continua en todo $\Re$.

b) Estudio de la derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & si\ x<0 \\ 2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-1) & si\ x>0\end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-x} & si\ x<0 \\ (2x-x^2)e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$.

En $x = 0$, la rama de la izquierda tiende a -1 y la de la derecha a 0, luego la función no es derivable.

Actividades propuestas

1. Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x)=sen\,\dfrac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a $f'(x)=\left(\dfrac{-1}{a^2}\right)\cos\dfrac{1}{a}$ si a es distinto de 0.

2. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) $f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$.

b) $g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.

c) $h(x) = x^2cosx$ en $x = 0 \Rightarrow h'(0) = 0$.

d) $r(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ en $x = 1 \Rightarrow r'(1) = -11$.

3. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$

1.2. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente

Recuerda que:

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es igual a $f'(a)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a).$$

Ejemplo:

- *Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función* $y = 2x^3 + x$ en $x = 1$ buscamos la recta de pendiente $f'(1)$ que pase por el punto $(1, f(1))$:

  $f(1) = 2\cdot1^3 + 1 = 3$; $\quad f'(x) = 6x^2 + 1$; $\quad f'(1) = 6\cdot1^2 + 1 = 7$;

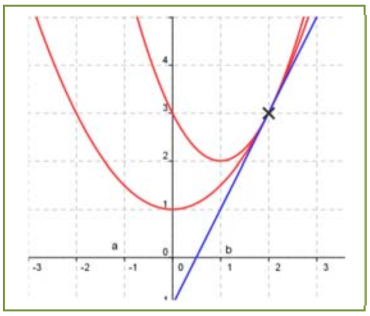
  Ecuación de una recta de pendiente 7 que pasa por el punto (1, 3): $y = 3 + 7(x - 1) = 7x - 4$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$*

a) Calcula a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$.
b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibuja las gráficas de ambas funciones y halla la ecuación de la recta tangente común. (Selectividad)



a) Calculamos las derivadas en $x = 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 2ax \Rightarrow$

$f'(2) = 2$, $g'(2) = 4a \Rightarrow 2 = 4a \Rightarrow a = ½$.

Para $x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 = g(2) = (1/2)4 + b = 2 + b \Rightarrow b = 1$.

b) Recta tangente en (2, 3) de pendiente 2: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$.

Las funciones son parábolas de vértices (1, 2) y (0, 1) respectivamente, que pasan por el punto (2, 3).

Actividades propuestas

4. Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$, donde ln significa logaritmo neperiano, definida para $x > 1$ halla un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Interpretación física de la derivada

Recuerda que:

La **velocidad** es la derivada del espacio respecto al tiempo, (en el caso en que la función indique, dado el tiempo, el espacio recorrido).

La **aceleración** es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$v = \frac{de}{dt}; \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *El espacio recorrido por un vehículo viene dado por $e = 1.3t + 0.07t^2$, donde e se mide en metros y t en segundos. Determina la velocidad para t = 1 segundos. Determina la función velocidad y la función aceleración.*

Calculamos la derivada: $e' = 1.3 + 0.14t$. Para t = 1, $e'(1)$ = 1.44 m/s = $v(1)$.

La función velocidad es la derivada $v = e' = 1.3 + 0.14t$.

Derivamos para obtener la aceleración: $a = v' = 0.14$ m/s².

Actividades propuestas

7. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0.4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los x = 0, x = 1, x = 3 y x = 4 segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

9. Un coche recorre una distancia y, en kilómetros, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación: $y = 0.1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocidad que lleva el coche para x = 1.5 horas.

1.3. Función derivada. Propiedades

Recuerda que:

Si f es derivable en $X \subset \Re$ se llama **función derivada** de f a la función que asocia a cada número real de X el valor de la derivada de f en dicho punto. A esta nueva función la designamos por f', Df o $\frac{df}{dx}$.

Por ejemplo,

En el caso: $f(x) = x^3$ entonces $f'(a) = 3\cdot a^2$. Por lo tanto, si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3\cdot x^2$.

Pero a la función derivada podemos volverla a derivar, y obtener así la derivada segunda: $f''(x) = 6\cdot x$.

Y volver a derivar, obteniendo la derivada tercera: $f'''(x) = 6$. Y la cuarta: $f^{IV)}(x) = 0$. ¿Cuánto vale la derivada 28 de esa función? ¿Sabes hacerla? ¡Claro que sabes! A partir de la derivada tercera todas las derivadas valen cero.

Las derivadas sucesivas se pueden nombrar: f', f'', f''', $f^{IV)}$, ..., $f^{n)}$, o también Df, D^2f, D^3f, ..., $D^{n)}f$.

Actividad resuelta

- *Calcula la derivada n-ésima de $f(x) = ln(x)$:*

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3} \Rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

10. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x)=\dfrac{1}{x+a}\Rightarrow f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}\Rightarrow f^{n)}(x)=(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$
$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\Rightarrow f^{n)}(x)=\dfrac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$	$f(x)=\cos ax\Rightarrow f^{n)}(x)=a^n\cos(ax+n\dfrac{\pi}{2})$
$f(x)=\ln(1+x)\Rightarrow f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	$f(x)=\cos^2 x\Rightarrow f^{n)}(x)=2^{n-1}\cos(2x+n\dfrac{\pi}{2})$

Notación diferencial

La tasa de variación media de una función $y = f(x)$ en el intervalo $(a, a + h)$ es:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

siendo el numerador el incremento de la función y el denominador el incremento de la variable. *Gottfried Wilhelm Leibniz* utilizó la notación: $\dfrac{dy}{dx}$ para denotar la derivada de la función y respecto de la variable x, donde dy y dx no son numerador y denominador, sino un todo inseparable. Se lee, derivada de y respecto de x.

Esta notación es útil, sobre todo, si hay distintas variables.

Ejemplo:

- Si $S = 4\pi r^2$ entonces $\dfrac{dS}{dr}=8\pi r$.
- Si $V = \pi r^2 h$ entonces $\dfrac{dV}{dr}=2\pi r\cdot h$ y $\dfrac{dV}{dh}=\pi r^2$.

La función derivada es lineal

Recuerda que:

La derivada de una **suma** de funciones es la suma de las derivadas de cada una. Es decir:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función:

Si $f(x) = c\cdot g(x)$ entonces $f'(x) = c\cdot g'(x)$.

Estas dos propiedades, que ya conoces del curso pasado, nos indican que el operador derivada, D, es lineal y permiten escribir: $D(f + g) = Df + Dg$ $\quad D(cf) = cDf$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con derivadas

Recuerda que:

Pero también conoces el comportamiento de la derivada con otras operaciones, el producto, cociente, composición….

La derivada del **producto** de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

La derivada del **cociente** de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, divididos por el cuadrado del denominador: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

La **regla de la cadena** expresa la derivada de la **composición** de funciones $(f \circ g)(x)$ en términos de las derivadas de f y g: $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

o escrito en notación de Leibniz: $\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$.

Actividades resueltas

- *Calcula la derivada de* $y = (x^7 + 2)^5$.

Para aplicar bien la regla de la cadena es muy importante que comprendas bien la composición de funciones. En la derivada propuesta tenemos la función potencial *"elevar a 5"*, cuya derivada conoces bien $5x^4$, y la función $x^7 + 2$ cuya derivada es $7x^6$.

Aplicamos la regla de la cadena, primero la derivada de la función potencial en el punto $x^7 + 2$, y luego multiplicamos por la derivada de esta función: $y' = 5(x^7 + 2)^4 \cdot 7x^6$.

- *Calcula las derivadas de las funciones siguientes y comprueba el resultado:*

a) $y = sen^2(x) \Rightarrow y' = 2sen(x) \cdot \cos(x)$	b) $y = sen(x^2) \Rightarrow y' = cos(x^2) \cdot 2x$
c) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(2-x)\sqrt{4-x^2}}$	d) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+4x^2}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$
e) $f(x) = (3+x)\sqrt{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{3-x}}$	f) $f(x) = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Actividades propuestas

11. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de:

a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

12. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto $u(x)\cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: $D[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

Recuerda que:

Del curso pasado ya conoces las reglas de derivación de funciones. Vamos a repasar algunas de ellas. Si ya sabes derivar con soltura, puedes saltarte este apartado, pero si no es tu caso, es importante que lo revises.

Derivada de la función potencial: La derivada de la función $f(x) = x^k$, para cualquier valor numérico de k, es $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Derivada de la función logaritmo: Si $f(x) = log_a(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x} log_a e$.

Derivada de la función exponencial: Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \cdot ln(a)$.

Derivada de la función seno: Si $f(x) = sen(x)$ entonces $f'(x) = cos(x)$.

Derivada de la función coseno: Si $f(x) = cos(x)$ entonces $f'(x) = -sen(x)$.

Actividades resueltas

Observa cómo se han obtenido las derivadas siguientes:

Función	$f(x) = x^6$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$f(x) = 1/x = x^{-1}$	$f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
Derivada	$f'(x) = 6x^5$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = (1/n)x^{(1/n)-1} = (1/n)x^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

Calcula las siguientes derivadas y comprueba el resultado:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{9} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{9}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	**d)** $f(x) = \ln(x^5 - 7x^8) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^5 - 7x^8} \cdot (5x^4 - 56x^7)$
e) $f(x) = \sqrt{4x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$	f) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^2\sqrt{x}}$
g) $f(x) = (2x-1)(x^2 - 6x + 3) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 26x + 12$	h) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$

Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:

a) $f(x) = \frac{sen(x)}{1 + \cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$	b) $f(x) = \cos(sen^2 5x) \Rightarrow f'(x) = -10 sen5x \cdot \cos 5x \cdot sen(sen^2 5x)$
c) $f(x) = tg(5x - 7) \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x-7)}$	d) $f(x) = \cos(sen5x) \Rightarrow f'(x) = -5\cos 5x \cdot sen(sen5x)$
e) $f(x) = 2\sqrt{\cos 3x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3sen3x}{\sqrt{cos3x}}$	f) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + sen(x)}{1 - sen(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
g) $f(x) = \ln(sen^2(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{tg(x)}$	h) $f(x) = sen(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -sen(x) \cdot \cos(\cos(x))$
i) $f(x) = \ln(sen(x)) \Rightarrow f'(x) = cotg(x)$	j) $f(x) = ln(cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -tg(x)$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Técnica de la derivación logarítmica

Aunque suponemos que ya la conoces vamos a repasar esta técnica que, en ocasiones, facilita los cálculos. Consiste en aplicar logaritmos a los dos miembros de la función, y a continuación, derivar.

Actividades resueltas

- *Utilizando derivación logarítmica halla la derivada de* $f(x) = e^{(x^5 - 7x^3)}$

1) Aplicamos logaritmos neperianos: $ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)})$
2) Utilizamos propiedades de los logaritmos para simplificar el segundo miembro (en este ejemplo, el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base):

$$ln(f(x)) = ln(e^{(x^5 - 7x^3)}) = (x^5 - 7x^3) \cdot ln(\mathrm{e}) = (x^5 - 7x^3)$$

3) Derivamos los dos miembros de la igualdad: $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 5x^4 - 21x^2$
4) Despejamos $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot (5x^4 - 21x^2) = e^{(x^5 - 7x^3)} \cdot (5x^4 - 21x^2).$$

Derivando la función exponencial llegamos al mismo resultado. Compruébalo.

- *Calcula las siguientes derivadas utilizando la técnica de derivación logarítmica y comprueba los resultados:*

a) $f(x)=g(x)^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = g(x)^{h(x)}(h'(x)\ln(g(x)) + \frac{h(x)g'(x)}{g(x)})$	b) $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x(ln(x) + 1)$
c) $f(x) = x^{sen(x)} \Rightarrow f'(x) = x^{sen(x)}(\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{sen(x)}{x})$	d) $f(x) = \sqrt[tg(x)]{x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[tg(x)]{x}(\frac{sen(x)cos(x) - xln(x)}{xsen^2(x)})$

Derivada de la función inversa

Recuerda que:

La función inversa de la función $y = f(x)$ se define como:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Por este motivo, recuerda que la gráfica de una función y su inversa son simétricas respecto de la diagonal del primer cuadrante.

Si conocemos la derivada de una función podemos calcular la derivada de su función inversa, pues:

Si f es una función derivable y biyectiva en X con $0 \notin f'(X)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(X)$ y:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Demostración:

Para comprobar que f^{-1} es derivable y calcular su derivada debemos calcular el límite:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

Pero $x = f^{-1}(y)$ y sea $a = f^{-1}(b)$. Además, por definición de función inversa: $y = f(x)$ y $b = f(a)$. Por ser

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

continua, cuando $y \to b$, entonces $x \to a$, por lo que el límite anterior es equivalente a:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$

Por tanto

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Por tanto, existe el límite y su valor es:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}, \text{ c.q.d.}$$

Derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas

La función **arco seno** es la función inversa de la función seno y se define por tanto como:

$$y = arcsen(x) \Leftrightarrow x = sen(y)$$

Si la definimos en el intervalo (–π/2, π/2) es biyectiva. ¡Compruébalo!

Entonces su derivada es:

$$y = arcsen(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{\cos(arcsen\,(x))}$$

Sabemos que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, por tanto: $\cos(x) = \sqrt{1-sen^2(x)}$

$$\frac{1}{\cos(arcsen\,(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2(arcsen(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función arco coseno y arco tangente.

Recuerda que:

$f(x) = arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsen(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arcsen(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
$f(x) = arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arccos(f(x)) \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$y = arccos(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$f(x) = arctg(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$y = arctg(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$y = arctg(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes derivadas y comprueba los resultados:*

a) $f(x)=e^{ln(arctg\sqrt{x})} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$	b) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$
c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}arcsen\dfrac{3\cos x+2}{3+2\cos x} \Rightarrow$ $f'(x)=-\dfrac{1}{3+2\cos x}$	d) $f(x)=arctg\dfrac{3senx}{4+5\cos x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{5+4\cos x}$

Derivada de las funciones inversas de las funciones hiperbólicas

La función **argumento seno hiperbólico** es la función inversa de la función seno hiperbólico y se define por tanto como:

$$y = argsh(x) \Leftrightarrow x = sh(y)$$

Entonces su derivada es:

$$y = argsh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Utilizaremos esta derivada cuando estudiemos las integrales, pues nos permitirá obtener algunas.

Demostración:

Aplicamos la derivada de la función inversa:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}(x) = \frac{1}{ch(\arg sh(x))}$$

Sabemos que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, por tanto: $ch(x)=\sqrt{1+sh^2(x)}$

$$\frac{1}{ch(\arg sh(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(\arg sh(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{, c.q.d.}$$

De forma similar se demuestran las derivadas de la función argumento coseno y argumento tangente.

Recuerda que:

$f(x) = argsh(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$y = argsh(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}$	$y = argsh(e^x) \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$
$f(x) = argch(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y = argch(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$y = argch(x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$
$f(x) = argth(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$	$y = argth(f(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{1-f(x)^2}$	$y = argth(x^3) \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{1-x^6}$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[6]{5x^{11}}$; b) $y=\dfrac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}$; c) $y=\dfrac{(3x^4-4)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$; d) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}$.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}$

c) $y=\sqrt{\left(\dfrac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}$ d) $y=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\dfrac{5}{x^5}}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=tg\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ b) $f(x)=(2-3x)sh(2-3x)$

c) $f(x)=tg\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{senx-x\cos x}{\cos x+xsenx}$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $tg(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, y de $th(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

$f(x) = tg(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2(x)$	$y = tg(f(x)) \Rightarrow y'=(1+tg^2(f(x)))\cdot f'(x)$	$y = tg(x^3) \Rightarrow y'=(1+tg^2(x^3))\cdot(3x^2)$
$f(x) = sh(x) \Rightarrow f'(x) = ch(x)$	$y = sh(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot ch(f(x))$	$y = sh(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \dfrac{ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ch(x) \Rightarrow f'(x) = sh(x)$	$y = ch(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot sh(f(x))$	$y = ch(ln(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{sh(\ln(x)}{x}$
$f(x) = th(x) \Rightarrow f'(x) = 1-th^2(x)$	$y = th(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)\cdot(1\text{-}th^2(f(x)))$	$y = th(x^4) \Rightarrow y'= (4x^3)\cdot(1-th^2(x^4))$

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (3x)^{x^5-9x^3}$ b) $y = ((2x+7)^{5x^3-6x^2})$

c) $y = (x + e)^{(4x^5-8x^3)^5}$ d) $f(x)=(x^x)^x$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{\dfrac{4+senx}{4-senx}}$ b) $y=e^{\arccos\sqrt{6x+8}}$

c) $y=sen(arctg\dfrac{7x}{\sqrt{1-2x^2}})$ d) $y=\arccos\dfrac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\arg sh\sqrt{\dfrac{5+shx}{5-shx}}$ b) $y=\sqrt{2e^{\arg ch\sqrt{7x+3}}}$

c) $y=sh(\arg th\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}})$ d) $y=\arg ch\dfrac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}})$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

El teorema de Rolle nos indica bajo qué condiciones podemos asegurar que hay un punto con tangente horizontal.

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que $f'(c) = 0$.

Demostración

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos en dicho intervalo. Pueden ocurrir dos casos:

1.- Estos valores máximos y mínimos no se alcancen en el interior del intervalo. Entonces se alcanzan en los extremos a y b. Pero al ser por hipótesis $f(a) = f(b)$ entonces el valor máximo coincide con el valor mínimo y la función es constante. Por tanto, $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.

2.- En caso contrario el máximo o el mínimo o ambos pertenecen al interior del intervalo. Sea por ejemplo $\alpha \in (a, b)$ el valor máximo. Al ser la función derivable en (a, b), existe $f'(\alpha)$.

Por ser α un máximo, la función es creciente para valores x menores a α por lo que

$$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0$$

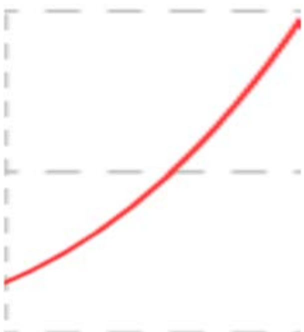
Y es decreciente para valores x mayores a α por lo que

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq 0$$

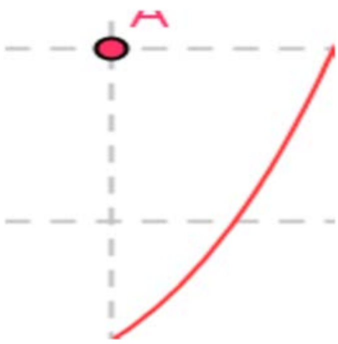
Al existir la derivada ambos límites deben coincidir y para ello: $f'(\alpha) = 0$.

Análisis de las condiciones

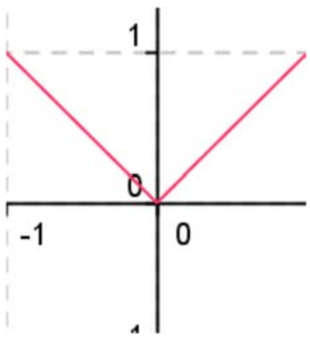
Basta que una de las condiciones no se verifique, para que tenga por qué tener la función un punto de tangente horizontal:



Si $f(a) \neq f(b)$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal



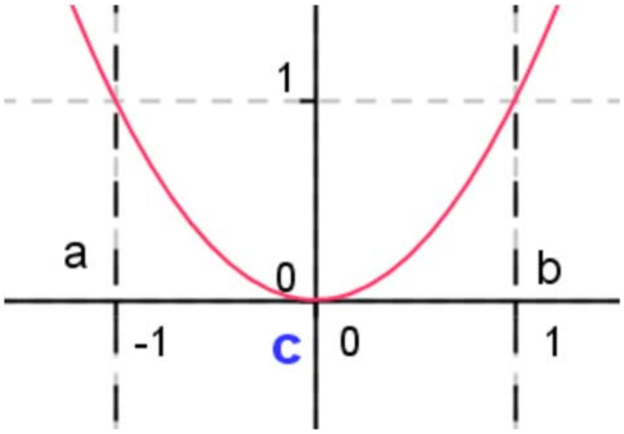
Si no es continua en $[a, b]$ no tiene que tener un punto de tangente horizontal

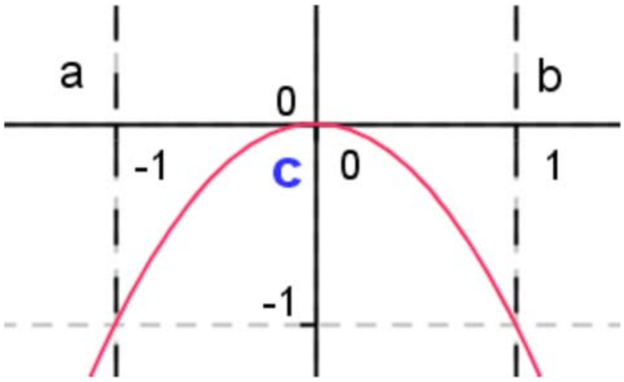


Si no es derivable en (a, b) no tiene que tener un punto de tangente horizontal

Sin embargo, si se verifican las hipótesis, entonces existe un punto en el que la tangente es horizontal.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





Actividades resueltas

- *Dos coches de carreras parten al mismo tiempo y del mismo lugar y llegan a la meta empatados. Demuestra que en algún momento llevaron la misma velocidad.*

Llamamos f y g a las funciones que indican el espacio recorrido por cada coche, y sean a el instante de partida y b el de llegada. Las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Definimos una función $h(x) = f(x) - g(x)$ que verifica las condiciones del teorema de Rolle, es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $h(a) = f(a) - g(a) = 0 = h(b) = f(b) - g(b)$. Por tanto, existe un instante c en el que $h'(c) = 0$, luego $f'(c) - g'(c) = 0$, y $f'(c) = g'(c)$.

- *Determina el valor de b para que la función $f(x)$* $= x^2 - 3x + 5$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo $[1, b]$ e indica dónde se verifica la tesis.

La función es continua y derivable en toda la recta real luego lo es en cualquier intervalo $[1, b]$. Queremos que $f(1) = f(b)$, por tanto $f(1) = 3 = b^2 - 3b + 5$, por lo que $b = 2$. $f'(x) = 2x - 3 = 0$, por lo que el punto c donde se anula la derivada es $c = 3/2 \in [1, 2]$.

Teorema del valor medio

Sean f, g: $[a, b] \to \Re$ dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que:

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demostración

Construimos la función h: $[a, b] \to \Re$; $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

La función h es continua en $[a, b]$ pues es suma de funciones continuas, f y g, multiplicadas por números, $(f(b) - f(a))$ y $(g(b) - g(a))$ que existen.

La función h es derivable en (a, b) pues está formada por funciones derivables.

Además, $h(a) = h(b)$. En efecto: $h(a) = (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a)$, y

$h(b) = (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = - g(b)\, f(a) + f(b)\, g(a)$, por lo que son iguales.

La función h verifica las condiciones del teorema de Rolle, por lo que existe un punto c de (a, b) en el que $h'(c) = 0 = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$.

Corolario (Teorema del valor medio)

Una consecuencia del teorema anterior es este corolario, que también recibe el nombre de teorema del valor medio.

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Existe un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nos garantiza bajo qué condiciones existe un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Demostración

En el teorema anterior tomamos como función $g(x) = x$, que es continua y derivable en toda la recta real. Como $g'(x) = 1$, sustituimos:

$0 = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))\, 1 - (b - a)f'(c)$. De donde:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Actividades resueltas

- *Se considera la función.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & si\ x < -2 \\ x^3 + m & si\ x \geq -2 \end{cases}$$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$.

b) Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

a) El teorema del valor medio requiere que la función sea continua en el intervalo cerrado y derivable en el intervalo abierto. La función está definida a trozos por funciones polinómicas que son siempre funciones continuas y derivables, luego el único punto dudoso es $x = -2$. Para que sea continua debe verificarse que $(-2)^2 + n(-2) = (-2)^3 + m \Rightarrow 4 - 2n = -8 + m \Rightarrow 12 = 2n + m$.

Para que sea derivable: $f'(x) = \begin{cases} 2x + n & si\ x < -2 \\ 3x^2 & si\ x > -2 \end{cases}$ en $x = -2$ debe verificarse que: $2(-2) + n = 3(-2)^2$ $\Rightarrow -4 + n = 12 \Rightarrow n = 16$.

Por tanto $12 = 2(16) + m \Rightarrow m = 12 - 32 = -20$, y $f(x) = \begin{cases} x^2 + 16x & si\ x < -2 \\ x^3 - 20 & si\ x \geq -2 \end{cases}$ verifica las hipótesis del teorema en $[-4, 2]$.

b) El teorema garantiza que existe un punto $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 16 & si\ x < -2 \\ 3x^2 & si\ x > -2 \end{cases}$ debe ser igual a:

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)} = \frac{(8-20)-((-4)^2+16(-4))}{6} = \frac{(-12)-(-48)}{6} = \frac{36}{6} = 6.$

Igualamos ambas ramas a 6 y obtenemos: $2x + 16 = 6 \Rightarrow x = -5$ que no pertenece al intervalo.

$3x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ y ambos valores pertenecen al intervalo, luego ambos son las soluciones buscadas:

Solución: a) $n = 16$; $m = -20$;

b) $c = \pm\sqrt{2} \in (-4, 2)$.

Actividades propuestas

20. Se considera la función: $f(x) = \dfrac{1}{2 + senx - \cos x}$. Se pide:

Comprueba la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: Utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión.

21. Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Estudia cuándo se verifica $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Nota: Observa que la función no es derivable en $(-1, 1)$ luego no se verifican las hipótesis del teorema.

3.2. La regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Para simplificar la demostración vamos a suponer que $f(a) = 0$ y que $g(a) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$ Luego $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla de L'Hôpital también puede usarse si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, e incluso si x tiende a ∞.

Para demostrarlo basta tener en cuenta que si $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\infty}{\infty}$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{0}{0}$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsenx}{1-\cos x}$.

Como si llamamos $f(x) = xsenx$; $g(x) = 1 - \cos x$ se verifica que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{senx + x\cos x}{senx}$$

De nuevo, tanto el numerador como el denominador se anula para x = 0, luego aplicamos otra vez la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx + x\cos x}{senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - xsenx}{\cos x} = 2.$$

Es importante validar las condiciones en cada paso para no aplicar la regla cuando no puede aplicarse como en el problema que sigue:

- *Calcula* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsenx}{x^2-\cos x}$.

Observa que ahora $f(0) = 0$ pero que $g(0) = -1$ por lo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xsenx}{x^2-\cos x} = 0$. Pero si aplicamos L'Hôpital por no haber comprobado las condiciones tendríamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{x^2-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{senx + x\cos x}{2x + senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + \cos x - xsenx}{2 + \cos x} = \frac{2}{3}\text{, que está mal.}$$

- *Calcula* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+2}{5x^2+8x-1}$.

Comprobamos que se verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+2}{5x^2+8x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{14x-3}{10x+8} = \lim_{x\to\infty}\frac{14}{10} = \frac{7}{5}.$$

Actividades propuestas

22. Calcula $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} = \frac{senx(1-senx)}{\cos^2 x}$

23. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

24. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$.

3.3. Crecimiento y decrecimiento

Recuerda que:

Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **creciente** en $x = a$.

Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es **decreciente** en $x = a$.

Ejemplo:

- *Determina si* $y = 0.2x^2 + 150x - 180$ *es creciente o decreciente en* $x = 5$.

Calculamos la derivada: $y' = 0.4x + 150$; en $x = 5$: $y'(5) = 0.4(5) + 150 = 152 > 0$. La función es creciente.

Actividades propuestas

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

3.4. Máximos y mínimos

Recuerda que:

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo global o absoluto** si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.

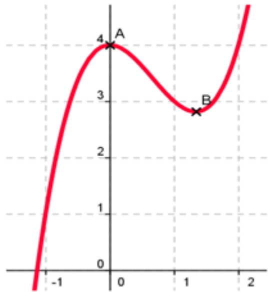
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo global o absoluto** si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.

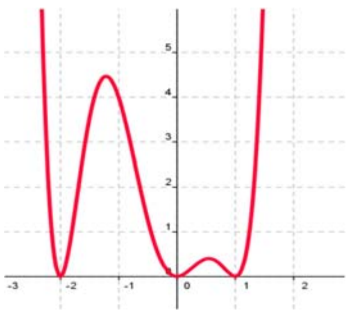
Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **máximo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.

Una función alcanza en $(a, f(a))$ un **mínimo local o relativo** si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Ejemplo:

La función $y = x^2(x - 2) + 4$ de la gráfica del margen no alcanza ni máximos ni mínimos absolutos, pero alcanza un máximo relativo en punto A (0, 4) y un mínimo relativo en el punto *B*.





Ejemplo:

La función de la gráfica del margen no tiene máximos absolutos, pero alcanza máximos relativos en $x = -1.25$ y en $x = 0.5$.

Tiene tres mínimos que son a la vez absolutos y relativos en $x = -2$, $x = 0$ y en $x = 1$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si una función tiene un **máximo o un mínimo** en $(a, f(a))$ y existe $f'(a)$, entonces $\mathbf{f'(a) = 0}$.

Se denomina **punto singular o punto crítico** de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada.

Para saber si un punto crítico es un máximo, o un mínimo, o un punto de inflexión podemos utilizar alguno de los tres criterios siguientes:

Criterio 1:

Si $f'(a) = 0$, estudiamos los valores de x próximos a a, tanto a la derecha como a la izquierda.

Criterio 2:

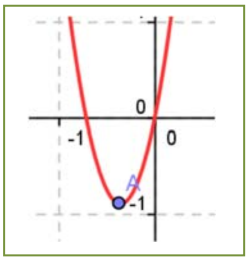
Estudiar el signo de la derivada en puntos x próximos a a, con lo que sabremos si la función crece o decrece en esos puntos.

Criterio 3:

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo.

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.

Actividades resueltas



- *Calcula los máximos y mínimos de la función:* $y = 7x^2 + 5x$.

Calculamos la derivada y la igualamos a 0: $y' = 14x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5/14$.

Para saber si es máximo o mínimo calculamos la derivada segunda: $y'' = 14 > 0$. Es un mínimo.

La función es una parábola de vértice (–5/14, 7(–5/14)2 + 5(–5/14)) ≅ (–0.38, –0.89).

Para $x < -5/14$ la función es decreciente, y para $x > -5/14$, es creciente.

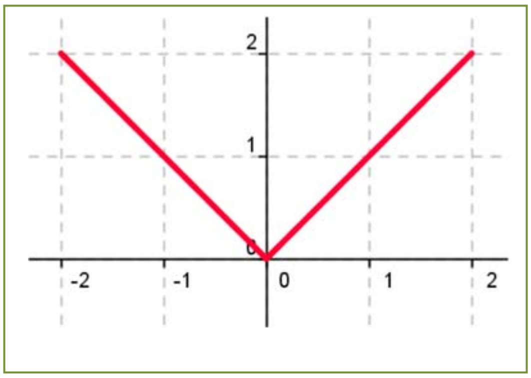
Dos observaciones importantes

1) Pueden existir máximos o mínimos en puntos donde no exista la derivada.

Por ejemplo:

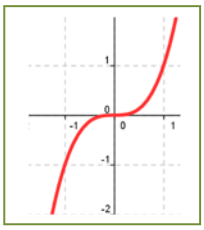
La función valor absoluto de x tiene un mínimo en (0, 0).

$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x > 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$



Pero la derivada no se anula en (0, 0). No existe. La derivada a la derecha de 0 vale 1, y la derivada a la izquierda vale –1. Son distintas, luego la función **no** es derivable en (0, 0).

2) Pueden existir puntos donde la derivada valga 0 y sin embargo no sean ni máximos ni mínimos.



Por ejemplo:

La función $y = x^3$ de derivada $y' = 3x^2$, que se anula en (0, 0) no tiene en dicho punto ni un máximo, ni un mínimo. La función es siempre **creciente**. Va a tener en (0, 0) un punto de inflexión de tangente horizontal.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para estar seguros de no perder ninguna posible solución conviene, para determinar todos los máximos y mínimos absolutos y relativos de una función, buscar:

1) Los puntos donde se anula la derivada: $f'(x) = 0$.

2) Los puntos donde la función no sea derivable.

3) Los valores de $f(x)$ en los extremos del dominio de definición de la función.

Determinar el valor de la función en todos estos puntos y comparamos estos valores.

Actividades resueltas

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, *en el intervalo* [1, 3] *y en el intervalo* [1, 5].

La función es derivable en todos los puntos. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, que se anula en 2 y 4. En el intervalo [1, 5] ambos valores pertenecen al intervalo, por lo que los valores a valorar son: 1, 2, 4 y 5. En el intervalo [1, 3] el punto 4 no pertenece, luego tenemos que valorar 1, 2 y 3.

$$f(1) = 16; f(2) = 20; f(3) = 18; f(4) = 16; f(5) = 20.$$

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 18$, en los puntos donde se anula la derivada:

$f''(2) = -6 < 0$; $f''(4) = 6$. En (2, 20) se alcanza un máximo relativo y en (4, 16) un mínimo relativo.

Intervalo [1, 3]: Máximo absoluto y relativo es (2, 20) y mínimo absoluto es (1, 16).

Intervalo [1, 5]: Máximos absolutos es (5, 20) y (2, 20), mínimos absolutos son (1, 16) y (4, 16).

- *Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función* $f(x) = |x|$ en el intervalo [–6, 2].

La función no es derivable en (0, 0). La derivada vale 1 si x es positivo y –1 si x es negativo, por lo que la derivada no se anula en ningún punto. Estudiamos los extremos del intervalo, –6 y 2:

$$f(-6) = |-6| = 6; f(2) = |2| = 2.$$

El mínimo absoluto de la función se alcanza en (0, 0) y el máximo absoluto en (–6, 6). Hay un máximo relativo en (2, 2).

Aprende a averiguar los Máximos y Mínimos de diferentes tipos de funciones. Susi Profe.

video

https://www.youtube.com/watch?v=aQCB2HUtFMY

Actividades propuestas

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$;

b) $y = 3x^3 + 9$;

c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$;

d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dadas por la fórmula $v=\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}}$ en la que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidades $x = a$.

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–5, 5] y en el intervalo [1, 4].

30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = |x - 9|$;

b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–4, 4].

32. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) ¿Alcanza algún extremo?

33. Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos.

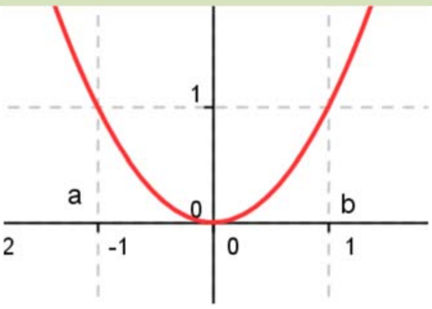
3.5. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función. f es **convexa** $[a, b]$ si para toda terna x_0, x, x_1 del intervalo con $x_0 < x < x_1$ se verifica que:

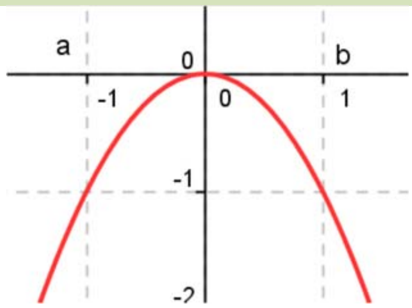
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

f es **cóncava** $[a, b]$ si, en las mismas condiciones, se verifica que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$



Convexa



Cóncava

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Observa que para esta definición no se ha impuesto ser derivable a la función. Si la función es derivable dos veces en el intervalo de estudio se tiene:

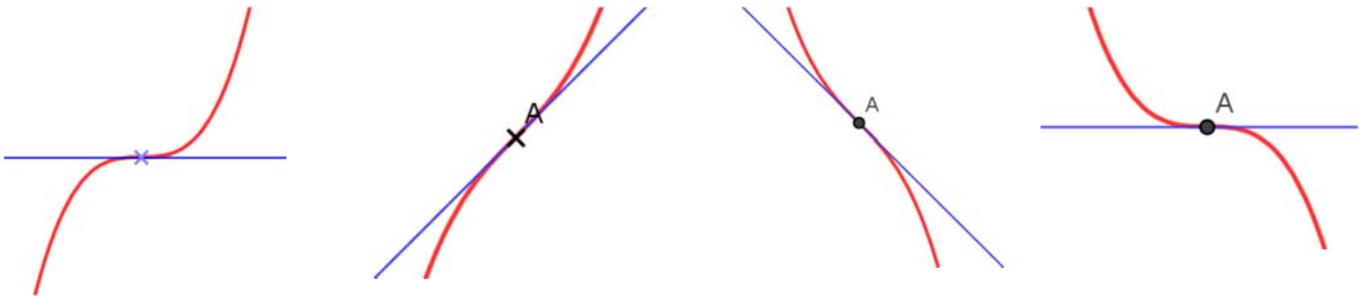
f es **convexa** $[a, b] \Leftrightarrow f'$ es estrictamente creciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \geq 0 \\ \Leftarrow f'' > 0 \end{cases}$

f es **cóncava** $[a, b] \Leftrightarrow f'$ es estrictamente decreciente $\begin{cases} \Rightarrow f'' \leq 0 \\ \Leftarrow f'' < 0 \end{cases}$

Observa también que, si la función es convexa, la gráfica queda por encima de la recta tangente, y si es cóncava, por debajo.

Del mismo modo que en los puntos de la gráfica de una función en los que se anula la derivada primera se produce un cambio, pasa de creciente a decreciente, o viceversa, en los puntos en los que se anula la derivada segunda también se produce una modificación en la gráfica, pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

Vamos a analizar ese cambio estudiando algunos casos:



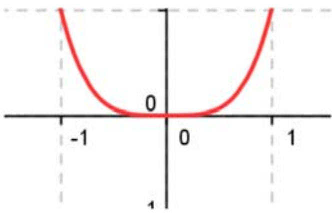
En cuatro gráficas de arriba hemos señalado un punto y la recta tangente en ese punto. La derivada segunda se anula en los puntos señalados de las cuatro gráficas. Analiza lo que ocurre. Observa que la recta tangente deja a la gráfica unas veces por arriba y otras por abajo. Diríamos que atraviesa la gráfica. Hay un cambio en la concavidad.

Esos puntos se llaman **puntos de inflexión**.

Si la función $y = f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a)=0$

Si además, como en la primera gráfica y en la cuarta, se anula la derivada primera se dice que tiene un punto de inflexión de tangente horizontal.

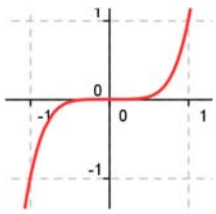
Observa las gráficas siguientes. Hay máximos, mínimos y puntos de inflexión en el origen (0, 0).



$y = x^4$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$; $y^{iv)}(0) > 0$

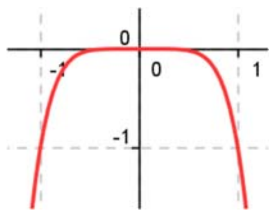
Mínimo



$y = x^5$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = 0$; $y^{v)}(0) \neq 0$

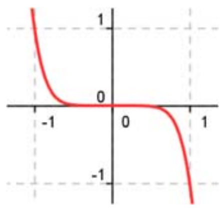
Punto de inflexión de tangente horizontal



$y = -x^6$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = y^{v)}(0) = 0$; $y^{vi)}(0) < 0$.

Máximo



$y = -x^7$

$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{iv)}(0) = y^{v)}(0) = y^{vi)}(0)= 0$; $y^{viii)}(0) \neq 0$

Punto de inflexión de tangente horizontal

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las propiedades estudiadas se pueden generalizar con el siguiente teorema:

Sea f: $[a, b] \to \Re$ una función $k + 1$ veces derivable en $[a, b]$ y sea c un punto de (a, b). Entonces:

1) Si $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es impar:

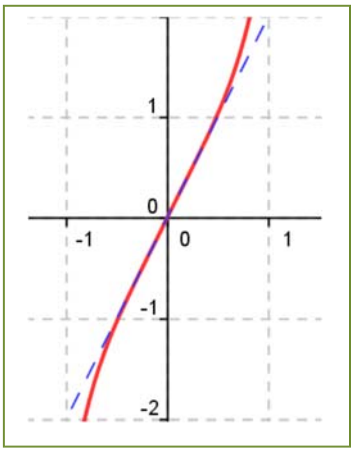
Si $f^{k+1)}(c) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en c.

Si $f^{k+1)}(c) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en c.

2) Si $f''(c) = \ldots = f^{k)}(c) = 0$, $f^{k+1)}(c) \neq 0$ y k es par, entonces f tiene un punto de inflexión en c. Si además $f'(c) = 0$ la tangente del punto de inflexión es horizontal.

Actividades resueltas

- *Determina los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función* $f(x) = x^5 + 2x$.



Calculamos la derivada segunda $f'(x) = 5x^4 + 2$; $f''(x) = 20x^3$. Se anula en $x = 0$. Calculamos las derivadas sucesivas:

$f'''(x) = 60x^2$; $f^{IV)}(x) = 120x$; $f^{V)}(x) = 120$; $f'''(0) = f^{IV)}(0) = 0$ y $f^{V)}(x) \neq 0$.

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es la quinta, es impar, luego en (0, 2) hay un punto de inflexión, y como no se anula la derivada primera no es un punto de inflexión de tangente horizontal.

La derivada segunda $f''(x) = 20x^3$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, por tanto la función es convexa si $x > 0$ y cóncava si $x < 0$.

Determinaremos donde una función polinómica es creciente o decreciente (crecimiento), sus puntos críticos (máximos y mínimos), donde es cóncava y/o convexa (curvatura) y sus posibles puntos de inflexión. Para ello, hallaremos la primera y segunda derivada de la función y los puntos donde se anulan. NOTA: Para zanjar definitivamente la polémica con respecto al concepto de CONCAVIDAD o CONVEXIDAD, os comento que es un término relativo y depende desde donde mire la gráfica. Por eso especifico CONCAVA hacia ARRIBA o CONVEXA hacia ABAJO.

https://www.youtube.com/watch?v=5PnzLrfz0Dg

Actividades propuestas

34. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

35. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$;

b) $y = x^3 - 7x + 8$;

c) $y = x^5 + 2$;

d) $y = x^4 - 3$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.6. Representación gráfica de una función

Otra de las aplicaciones de la derivada es la representación gráfica de funciones. Se va a dedicar el próximo capítulo a recoger todo lo que ya sabes, para hacerlo. Ahora únicamente vamos a esbozarlo. Vamos a seguir un orden para hacerlo:

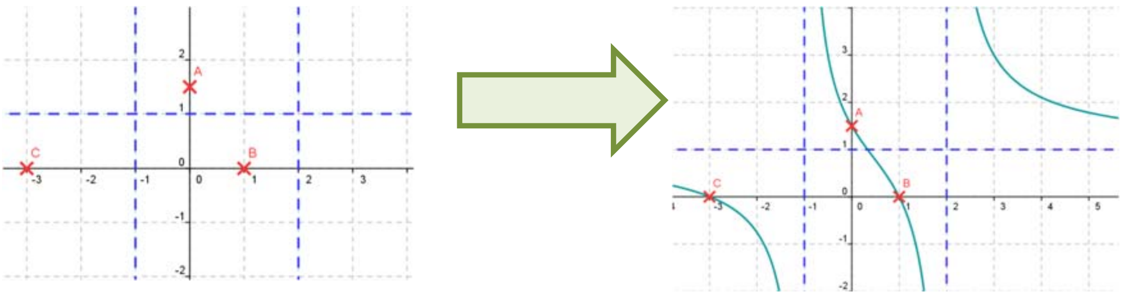
1) Puntos de intersección con los ejes coordenados.
2) Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.
3) Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
4) Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Actividades resueltas

- *Haz un esbozo de la gráfica de la función:* $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$

1) Puntos de intersección con los ejes coordenados: En ocasiones es difícil encontrarlos. En otras es sencillo como en este caso. Para x = 0 y = 3/2, A(0, 3/2). La ordenada vale 0 para x = 1 y para x = –3, B(1, 0), C(–3, 0).
2) Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito: La función está definida en toda la recta real excepto en los valores que anulan al denominador, donde tenemos dos asíntotas verticales: x = –1 y para x = 2. Cuando x tiende a infinito la y tiende a 1, luego tenemos una asíntota horizontal: y = 1.

En muchas ocasiones con esta información ya somos capaces de hacer un primer esbozo de la gráfica:



- *Haz un esbozo de la gráfica de la función:* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & si\ x>0 \\ \dfrac{x^2-2x+2}{x+1} & si\ x\le 0 \end{cases}$

1. ***Puntos de intersección con los ejes coordenados.***

La rama I no corta al eje de abscisas. La rama II tampoco. Si x = 0 en la rama II tenemos que f(0) = 2, el punto B (0, 2) de la gráfica.

2. ***Asíntotas. Dominio de definición. Comportamiento en el infinito.***

La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en {0, –1}

Comportamiento en x = 0: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$. A la izquierda de 0 toma el valor 2.

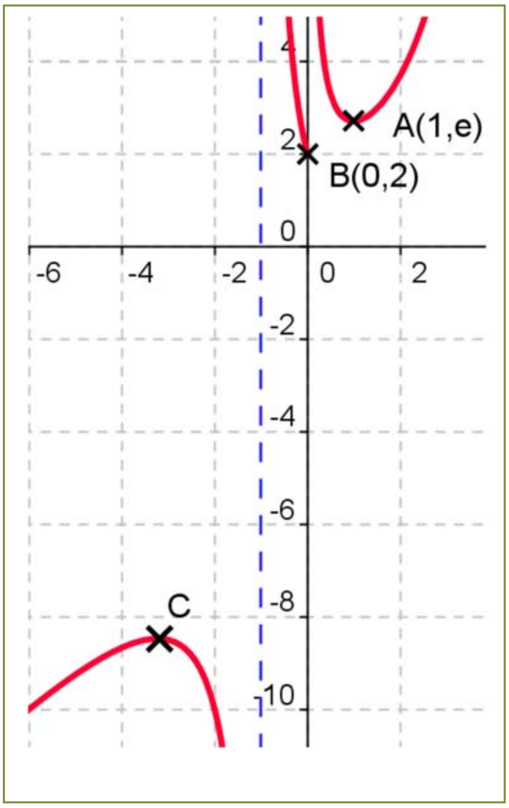
En x = –1 tiene una asíntota vertical.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Comportamiento en x tiende a ∞: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+2}{x+1} = -\infty$.

3. Derivada primera: crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.'

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x-1)}{x^2} & si\ x>0 \\ \frac{x^2+2x-4}{(x+1)^2} & si\ x<0 \end{cases}$$



En x = 0 no es derivable pues no es continua.

Observando el signo de la derivada tenemos que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{5})$, decreciente en ($-1-\sqrt{5}$,–1), decreciente en (–1, 0), y es decreciente en (0, 1) y creciente en (1, +∞)

En x = 1 hay un mínimo: A (1, e).

En x = $-1-\sqrt{5}$ hay un máximo, en el punto C de la gráfica.

4. Derivada segunda: concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} & si\ x>0 \\ \frac{10}{(x+1)^3} & si\ x<0 \end{cases} +$$

La derivada segunda no se anula en la rama I ni en la rama II. No hay puntos de inflexión. Es cóncava de $(-\infty, -1)$ y convexa de (–1, 0) y de (0, +∞).

Actividades propuestas

36. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas

b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo [–1, 1].

37. Sea la función $f(x) = \frac{senx}{2-\cos x}$ definida en el intervalo cerrado y acotado [–2π, 2π]. Se pide:

a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.

38. Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad

b) Dibuja su gráfica.

39. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.7. Problemas de optimización

A los problemas de máximos y mínimos se les suele denominar problemas de optimización.

Actividades resueltas

- *Cortando un mismo cuadrado de las cuatro esquinas de una hoja rectangular de dimensiones a y b se puede construir una caja abierta por la parte superior. Calcula el lado del cuadrado que hay que cortar para que la caja tenga máxima capacidad.*

El volumen de la caja es el producto de los tres lados. Si cortamos las esquinas el rectángulo de longitud b tendrá ahora una longitud $b - 2x$. Lo mismo el de longitud a. La altura es x.

$$V = (b - 2x)(a - 2x)x = 4x^3 - 2bx^2 - 2ax^2 + abx.$$

Para hacer el volumen máximo, derivamos e igualamos a cero.

$$V' = 12x^2 - 4(b + a)x + ab = 0 \Rightarrow x = \frac{b + a - \sqrt{b^2 + a^2 - ab}}{6}$$

Por consideraciones geométricas, el valor obtenido es un máximo, pues si el lado del cuadrado vale 0, o si vale la mitad del lado, el volumen de la caja es mínimo, vale 0, pues no se forma caja.

- *Entre todos los cilindros de volumen V dado determina el radio y la altura del de menor superficie.*

El volumen de un cilindro es igual a: $V = \pi r^2 h$, y su superficie total es igual a $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

La superficie depende de dos variables, el radio y la altura. Como nos dicen que el volumen es dado, despejamos de su expresión por ejemplo la altura, y la sustituimos en la superficie:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow S = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Derivamos la superficie respecto a r, e igualamos a cero la derivada:

$$S' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

Para saber si ese valor del radio conduce a un máximo o a un mínimo. Hallamos el signo de la derivada segunda:

$$S'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0$$

La solución obtenida nos da una superficie mínima.

$$h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\ ;\ r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Actividades propuestas

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

41. Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Interés de las derivadas

El Análisis y el Cálculo Infinitesimal han sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las derivadas constituyen su parte central, ya que permiten comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio.

Las derivadas sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas, medicina, ciencias sociales e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

Isaac Newton

G. W. Leibniz

Antecedentes

Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1564 – 1642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución las derivadas.

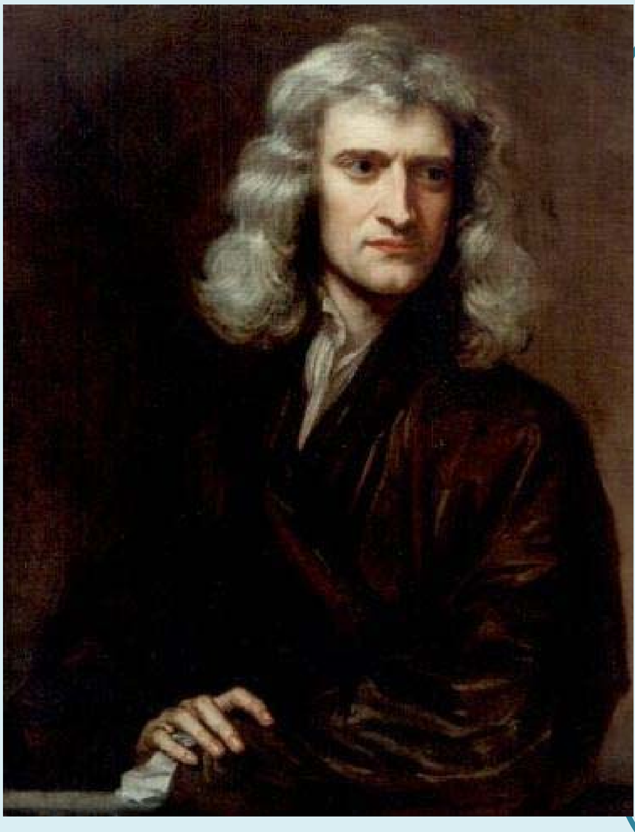
En 1638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1596 – 1650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no se conocía todavía el concepto de derivada), y fue resuelto en 1674 por *Leibniz* y en 1690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

El concepto de derivada comienza con *Isaac Newton* (1642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1646 – 1716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las derivadas son la expresión matemática de las leyes naturales**.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Newton

Isaac Newton (1642 – 1727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Su primera obra impresa: "*Philosophiae Naturalis **Principia** Mathematica*" fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de la derivada. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... Indica cómo evoluciona el sistema.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas se pueden expresar mediante derivadas es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues lo publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* en 1684.

Entre sus intereses más profundos se encontraban la alquimia y la religión, temas en los que sus escritos sobrepasan con mucho en volumen a sus escritos científicos. Entre sus estudios alquímicos se encontraban temas esotéricos como la transmutación de los elementos, la piedra filosofal y el elixir de la vida.

En 1693 sufrió una gran crisis psicológica, causante de largos periodos en los que permaneció aislado, durante los que no comía ni dormía. En esta época sufrió depresión y arranques de paranoia. Tras la publicación en 1979 de un estudio que demostró una concentración de mercurio (altamente neurotóxico) quince veces mayor que la normal en el cabello de Newton, la mayoría opina que en esta época Newton se había envenenado al hacer sus experimentos alquímicos, lo que explicaría su enfermedad y los cambios en su conducta.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*derivar*" en el sentido de "*deducir*" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable y depende de otra x, y se conoce la tasa de variación de y respecto de x para cambios muy pequeños de la variable x, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x)\cdot dx$, entonces la determinación de y respecto de x se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Madame de Châtelet

Gabrielle Émilie de Breteuil, (1706 - 1749), marquesa de Châtelet fue una dama francesa que tradujo los "*Principia*" de Newton y divulgó los conceptos del Cálculo en su libro "*Las instituciones de la física*". Era una dama de la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales, y no obstante fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hacen de su época, el siglo de las luces, un periodo excitante.

En sus salones, además de discutir de teatro, literatura, música, filosofía... se polemizaba sobre los últimos acontecimientos científicos. ¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre Ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función?

Mme. de Châtelet, al traducir y analizar la obra de Newton, propagó sus ideas desde Inglaterra a la Europa continental. Quizás, gracias a ella, el determinismo científico de Newton permaneció como idea filosófica hasta mediados del siglo XIX.

Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio. Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor.

Se conserva un retrato al óleo de ella pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras *"adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumentos y sus libros de matemáticas..."*. En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Escribió ***Las instituciones de la física***. Convencida de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que no estaba de acuerdo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía entre otras cosas con el estudio. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que es una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, "¡quien dice sabio, dice feliz!".

Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis* ***Principia*** *Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar la Ciencia.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	Definición	*Ejemplos*
Definición de derivada	$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Teorema de Rolle	f: $[a, b] \to \Re$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$ existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = 0$.	
Teorema del valor medio	f: $[a, b] \to \Re$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Existe $c \in (a, b)$ en el que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	
Regla de L'Hôpital	f y g derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.	
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0$ $\to x = 1, x = -1$. • Para $x < -1$, $y' > 0 \to y$ creciente. • Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \to y$ decreciente • Para $x > 1$, $y' > 0 \to y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo. Si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $y = f(x)$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ cóncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 \to$ $y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo. $(0, 0)$ es un punto de inflexión

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x = 1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x = 1 ni derivable en dicho punto

4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto x = 5.

6. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.03x - 0.002x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.

7. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = (1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8):

a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella?

b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20 metros?

8. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0.5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

9. Un determinado gas ocupa un volumen de 3 m³ a una presión de 3 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por m²? ¿Y cuándo es de 18 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

10. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3 + 5$ en x = 2.
b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en x = 1.
c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en x = 0.

11. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y = 0; b) a la recta $y = 2x$.

12. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en x = 0.

13. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

14. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

15. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

16. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Cálculo de derivadas

Si ya sabes derivar, puedes no hacer estos ejercicios.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

18. Calcula:

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$

c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)\cdot(x^2-3x+1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+3)}{(x^2-3)}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}$ b) $y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}$

c) $y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)$; c)

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-2}{x+2}$; b) $y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3 - 3x)$; c) $y = \frac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$; d) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$

c) $y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}$ d) $y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3+3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y = \frac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4}$

c) $y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)$ d) $y = \frac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5-3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3+2x^2)}$

c) $y = e^{(3x^5-6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(3x^4-4x^5)^3}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3-5x^2})^7$

c) $y = e^{(4x^5+8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5 - 3x^3)^{12}(3x + 1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2}$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5\cos(x)}{1+3sen(x^2)}$ $f(x) = sen(5sh^3 3x)$

b) $f(x) = ch(3sh(2x))$ $f(x) = th(5x+7x^2)$

29. Recuerda la definición de cosecante: $cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: $(cosec(x))' = -\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

30. Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

31. Recuerda la definición de cotangente: $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$. Demuestra que: $(cotg(x))' = -\frac{1}{sen^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7sen(x^7 - 7x^3)$ b) $y = 5sen^5(4x^4 - 5x^5)$

c) $y = sen^6(x) \cdot cos^4(x)$ d) $y = \sqrt[3]{sen^5(3x^4+5x^7)}$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = sen\dfrac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x-3x^2)ch(5x-7x^2)$

c) $f(x) = tg\dfrac{\sqrt{16-9senx}}{4+3\cos x}$ d) $f(x) = \dfrac{shx-3xchx}{chx+3xshx}$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $f(x) = arcsen\dfrac{2-7x^2}{2+7x^2}$

c) $f(x) = 5\arccos\dfrac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $f(x) = arcsen\dfrac{5\cos x}{3senx+2\cos x}$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\ (7e^{2x-3})$ b) $y = \ln(\sqrt{5arcsen(3x+2)})$

c) $y = arctg\ (\ln\sqrt[3]{4x-5})$ d) $y = arcsen(3tg(5sen(4x-2)))$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\sqrt{\dfrac{7+2senx}{7-2senx}}$ b) $y = e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$

c) $y = \cos(3arcsen\dfrac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}})$ d) $y = arcsen\dfrac{7x}{\sqrt{9-2x^2}})$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^3-5x^5)^8$ b) $y = log_2(8x^2-3x^3)^2$

c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(e^{x^5}+\ln(4x^3))$ b) $y = 7cotg^5(5x^3-3x^2)$

c) $y = sen(cos^2(tg(7x^5-3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(3x+2))^4}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{5x^2+2}$ b) $y = \ln(\arg th(5x-3))$

c) $y = \arg ch(e^{3x-6})$ d) $y = \arg sh(\arg th(2x+1))$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Aplicaciones de la derivada

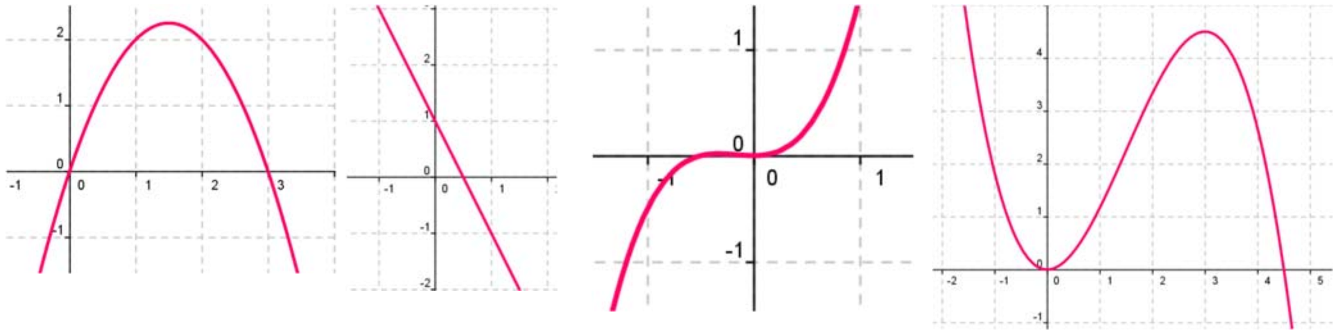
40. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

41. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}\ -\ \sqrt{4-x}}{4x}$.

42. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctan\,x - x}{x^3}$.

43. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

44. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-5, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$.

51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas

52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0.3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 1$ segundos, y a los $t = 6$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

Torre Eiffel

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

55. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

56. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0.83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1.86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Marte

58. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11.44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

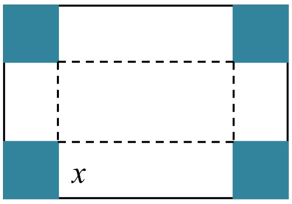
Júpiter

59. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

$e = t^2 - 4t + 3$ $\quad$ $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ $\quad$ $e = -t^2 + 4t + 3$ $\quad$ $e = (3t - 4)^2$

60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) b = –6, d = 3 b) b = 3, d = –1 c) b = 6, d = –3 d) b = –3, d = 2

2. Con los valores de b y d del apartado anterior verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1], por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa:

a) x = –1, b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

3. Verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3] en el punto de abscisa:

a) x = –3/8, b) $x = 7/6$ c) $x = 10/3$ d) $x = 5/3$

4. En cuál de los límites siguientes **no** se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^2 - 7x}{5x^2 + 2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = tanx^2 - 2x^3$ en x = 0 es:

a) $y = x$ b) $y = x + 8$ c) y = 0 d) y = 2 + x

6. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en x = 0 es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

7. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en x = 0 es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

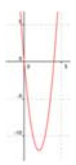
c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

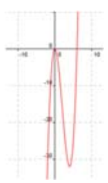
d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

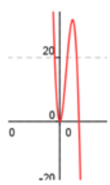
9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

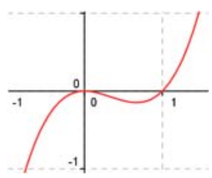
a) x = 1/2 b) x = –1/2 c) x = 1 d) x = 0

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:

a) 

b) 

c) 

d) 

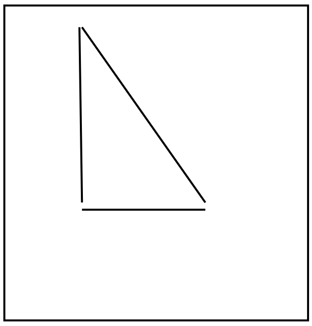
Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

   Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta.

2. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a)\cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto)
3. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme).
4. Defina derivada de una función f en un punto a. Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f' también es periódica de periodo T.
5. En la figura se representa una escalera AB, cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c. Se pide:



a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$.

b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA)

c) La velocidad con la que B llega al punto O.

6. Dibújese la gráfica de una función de $\Re$ en $\Re$, que cumpla las siguientes condiciones:

   $f'(0) = 0$

   $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$

   $f'(x) > 0$ para $0 < x < ½$

   Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje.

7. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte.

   a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.

   b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

8. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$.

9. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$

 a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil?

 b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [4, 8] y el espacio recorrido en ese intervalo

 c) Hallar la función de posición de este móvil.

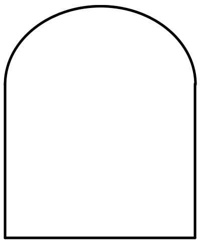
10. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\,\text{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$

 a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

 b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$.

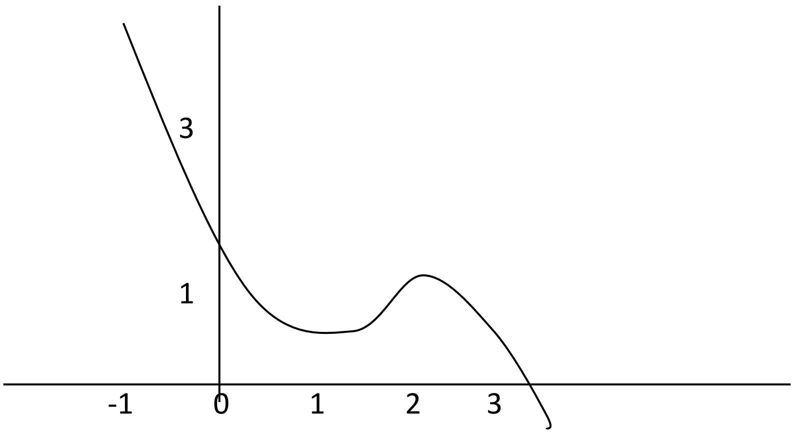
11. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible.

12. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima.



(Expresar los resultados en función de π)

13. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.



14. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

15. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

16. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía,

extremos, puntos de inflexión y ramas asintóticas.

17. Sea f: $\Re \to \Re$ una función derivable en $\Re$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

    1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$

    2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$

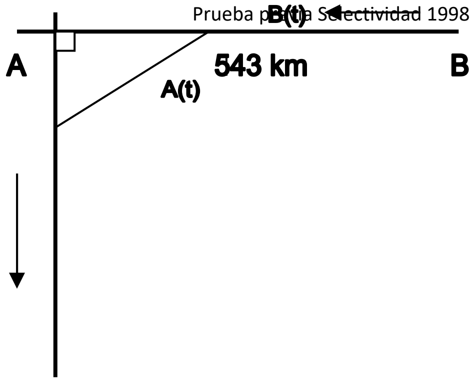
    3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.

18. Sea la función $f(x) = x\,|x - 1|$ Se pide:

    a) Hacer un dibujo aproximado de la función.
    b) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$.

19. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro.

Prueba para Selectividad 1998



20. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.

    a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.

    b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia)

21. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

    a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.

    b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.

    c) Hallar el valor máximo de dicha función.

22. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.

23. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

c) Determinar sus asíntotas.

24. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

25. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) Determinar a, b, c y d

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

26. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4)

b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

27. Sea la función $f(x) = 2x + senx$

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos

28. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Esbozar la gráfica de la función

29. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si \quad x \le 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

30. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica.

b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,-5)$. Selectividad

31. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

i) $P(x)$ es una función par.
ii) Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = \sqrt{5}$
iii) $P(0) = 5$

Se pide:
a) Hallar sus puntos de inflexión.
b) Dibujar su gráfica.

32. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

a) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.

33. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si \quad x \ge 2 \\ x(x-2) & si \quad x < 2 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad
b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1).

34. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide:

a) Calcular g'(0), siendo $g(x) = f(x+f(0))$

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.

35. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A \operatorname{sen} x + B x^2 + C x + D$ tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \operatorname{sen} x - 10$.

36. Se considera la función real de variable real definida por:

$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
b) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal
c) Representar gráficamente la función

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

37. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

38. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f(a)), donde 0<a<1.
b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$

39. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
b) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

40. Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa Logaritmo Neperiano.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
b) Dibuja la gráfica de f.
c) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

41. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$.
b) Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas.
c) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima.

42. Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$.

43. (Selectividad) Dada la función: $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales.

44. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares.

45. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

46. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

47. a) Calcular los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cos x & si\ 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & si\ x \ge \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

c) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

48. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

49. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

50. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

51. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

52. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales.

b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$.

53. Se considera la función

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad |x| < 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide:

Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

54. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x\,(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

55. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide:

Dibuja la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

56. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & si \ x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}(1 - (x-2)^2) & si \ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
b) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$.
c) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

57. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$, obtén:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.

c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

58. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & si \quad 1+ax>0 \quad y \quad x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$$ se pide:

a) Halla los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en x = 0.

b) Para a = b = 1, estudia si la función f es derivable en x = 0 aplicando la definición de derivada.

59. a) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x = 0.

c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0)$ = 0, $g(2)$ = 2. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que $g'(c)$ = 1.

60. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (-1, f(-1))
b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

61. Dada la función $f(x) = e^x + a\, e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a:

a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.

62. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.

c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$.

63. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si \quad x>0\\ x+k & si \quad x\le 0\end{cases}$ (ln significa logaritmo neperiano de x), se pide:

a) Determina el valor de k para que la función sea continua en R.

b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1.

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

64. Dada la función: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

65. Los puntos P (1, 2, 1), Q (2, 1, 1) y A (a, 0, 0) con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

66. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$, se pide

a) Estudia y obtén las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Representa gráficamente la función.

67. Dada la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{(x+1)^2}$, se pide:

Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f.

68. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12 - 3x^2}$

69. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justifica la respuestas indicando qué teoremas usas.

70. Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^4 + 1}{x^3}$, se pide:

a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$.

71. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$

b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales.

c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

72. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) =. \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

73. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

- El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$.

74. Hallar $a; b; c$ de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

75. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{3x+ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x)=(ln\,x)^x$, $h(x) = sen(\pi - x)$ se pide:

a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calcular $g'(e)$.

c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

76. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si\ x\le 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ x>3 \end{cases}$, se pide

a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?
b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$.
c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [4, 8]

77. Dada la función $f(x) = x^2 sen\,x$, se pide:

a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.
b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$.
Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

78. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \end{cases}$; se pide:

a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

79. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$

Autores: María Molero Aparicio y Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Leticia González, Álvaro Valdés y Cristina Vidal Brazales

80. Dada la función $f(x) = 2\,cos^2x$ se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

81. Dada la función $f(x)=\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}$, se pide:

a) Halla las asíntotas de su gráfica.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica de la función.

82. Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, se pide:

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

83. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

84. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6}{x-1} & si\ x<0\\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$, se pide:

a) Estudiar su continuidad.

b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.

c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

85. a) Sea f: **R** → **R** una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$:

86. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}$, se pide:

a) Determina el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$.

87. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5senx}{2x}+\dfrac{1}{2} & si \quad x<0\\ a & si \quad x=0\\ xe^x+3 & si \quad x>0\end{cases}$, se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a.