MATEMÁTICAS I
1º Bachillerato
Capítulo 6: Funciones

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal

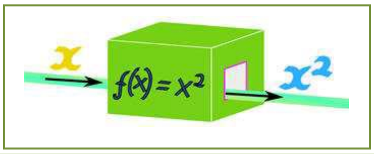
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Índice

Resumen

El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, ya que sirven para explicar muchos fenómenos que ocurren en campos tan diversos como la Física, la Economía, la Sociología…

A pesar de su complejidad a nivel teórico, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, porque resultan entonces muy intuitivas, y eso ha sido suficiente para poder analizar y resolver muchas cuestiones en los cursos anteriores en los que hemos estudiado las funciones como tabla de valores, como gráfica y con su expresión analítica.



En este, vamos a intentar profundizar más en dichas propiedades y características, pero estudiándolas analíticamente, es decir, desde la fórmula que las define, y aplicándolas a distintas situaciones, entre las que se encuentra la representación gráfica, pero sin tener que depender de ella. También vamos a reconocer algunos tipos de funciones, como las funciones polinómicas, raíz, logarítmica, exponencial…, analizando sus propiedades.

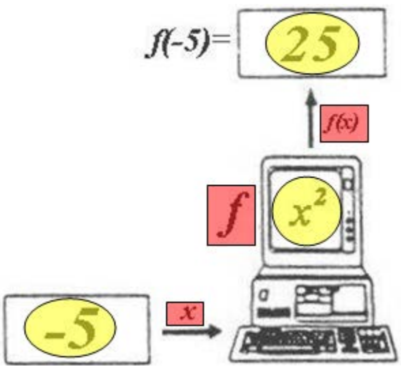
Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. TIPOS DE FUNCIONES. GRÁFICAS

Recuerda que:

En tercero y en cuarto de ESO ya estudiaste el concepto y las características de una función. Como es muy importante, vamos a insistir y a profundizar en ello.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).
Para indicar que la variable (y) depende o es función de otra, (x), se usa la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$, que se lee *"y es la **imagen** de x mediante la función f"*



Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica... ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

Por tanto, se puede asemejar con una máquina que coge un número y lo transforma en otro mediante una serie de operaciones que podremos describir mediante una fórmula.

Funciones reales de variable real. En este vídeo se refrescan conceptos gráficos sobre funciones, imprescindibles para afrontar el tema de funciones. Es un repaso rápido para fijar conceptos. Juan Carlo Moreno

https://www.youtube.com/watch?v=koMJ1zsRong

Ejemplos:

- *Funciones constantes* (los números vistos como funciones):

$$f(x) = k, \text{ para todo } x \in \Re$$

$$f(x) = 2, \text{ para todo } x \in \Re, \text{ así } f(-2) = 2;\ f(0) = 2;\ f(\sqrt[3]{5}) = 2;\ \ldots$$

- *Función identidad* (transforma cada número en él mismo):

$$I(x) = x, \text{ para todo } x \in \Re, \text{ así } I(-2) = -2;\ I(\pi) = \pi;\ I(\sqrt[3]{5}) = \sqrt[3]{5};\ \ldots$$

- $f(x) = \frac{3x^2-1}{x} \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3\cdot(0)^2-1}{0} = \frac{-1}{0} \ \text{que no existe} \\ x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{3\cdot(1)^2-1}{1} = 2 \\ x = \frac{6}{5} \rightarrow f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2-1}{\frac{6}{5}} = \frac{3\cdot\frac{36}{25}-1}{\frac{6}{5}} = \frac{\frac{108}{25}-1}{\frac{6}{5}} = \frac{83}{30} \\ x = \pi \rightarrow f(\pi) = \frac{3\cdot(\pi)^2-1}{\pi} \cong \frac{3\cdot(3.14)^2-1}{3.14} \cong \frac{29.61-1}{3.14} \cong 9.11 \end{cases}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Existen distintos ***tipos de funciones***, que analizaremos después, según sea la fórmula que las define:

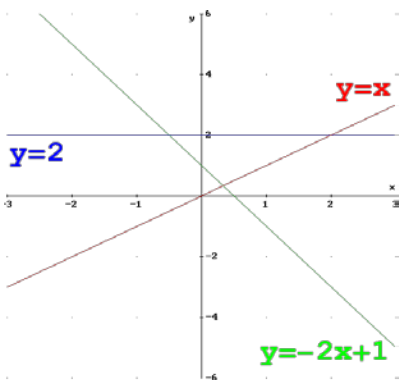
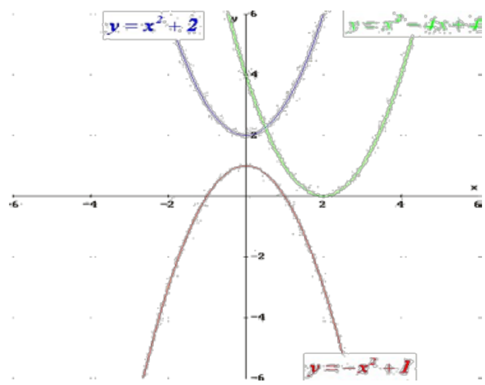
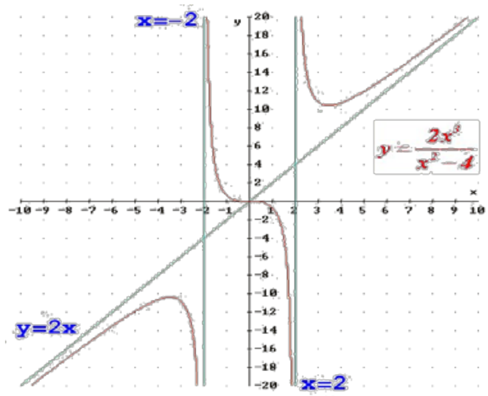
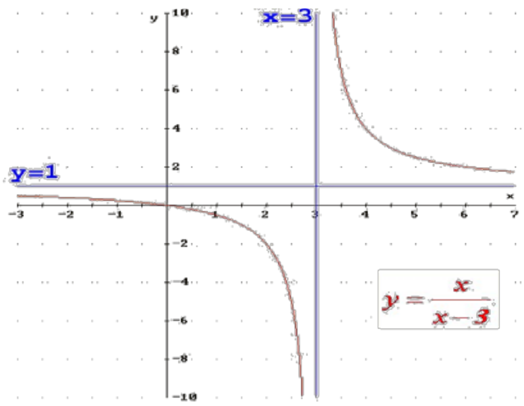
TIPO		FÓRMULA
ALGEBRAICAS	*Polinómicas*	Polinomio
	Racionales	Cociente de polinomios
	Irracionales	Raíz de una racional
TRASCENDENTES	*Exponenciales*	Exponencial (variable en el exponente)
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)
	Trigonométricas	Trigonométrica (variable como argumento de una razón trigonométrica)
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable

La **gráfica de una función** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, pares ordenados, en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo a su imagen, es decir, al que se obtiene al transformarlo mediante dicha función:

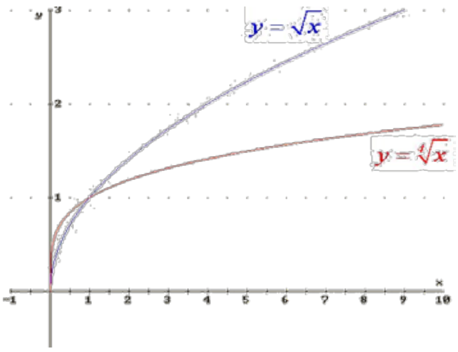
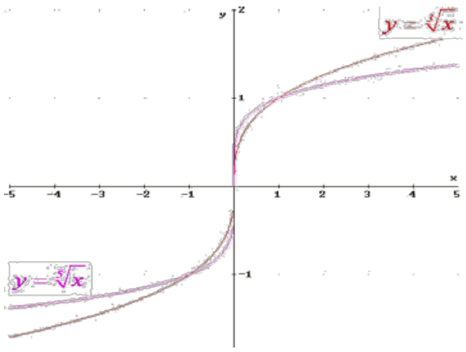
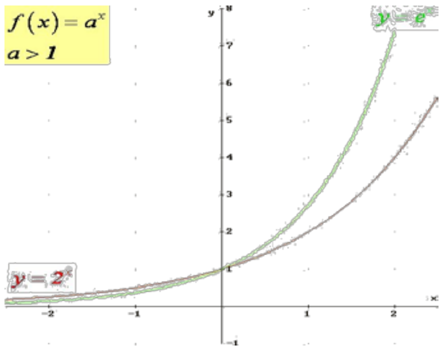
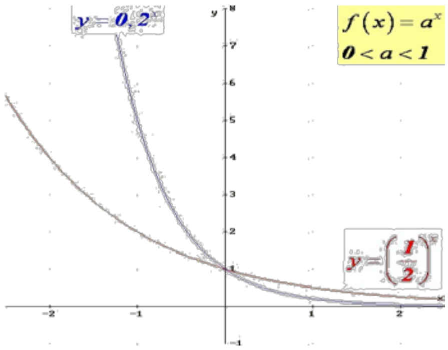
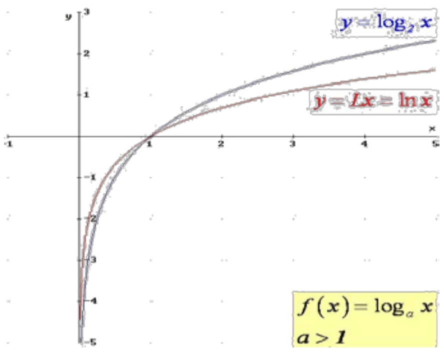
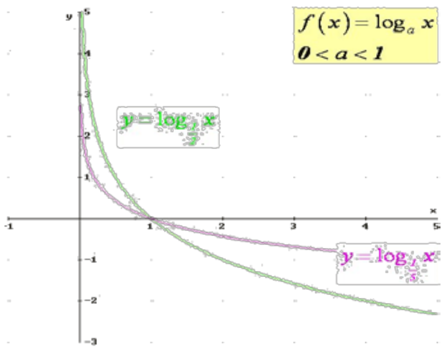
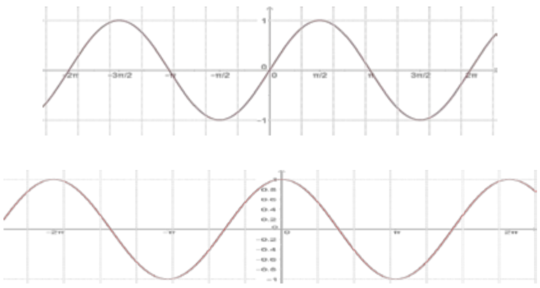
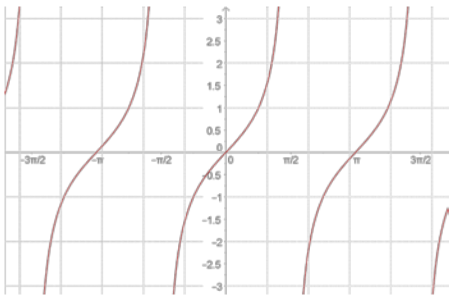
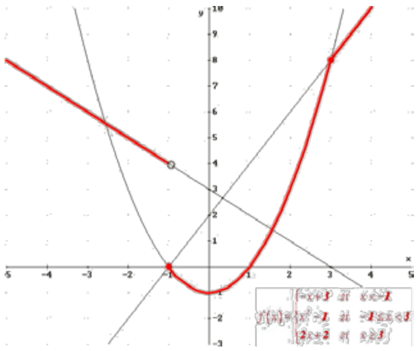
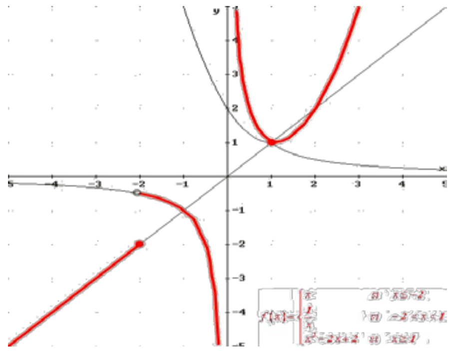
$$\{(x, y) \in \Re x \Re;\ y = f(x)\}$$

Se representa dibujando todos los puntos anteriores y uniéndolos con una línea, y se hace sobre los *ejes de coordenadas* (dos rectas perpendiculares: *eje de abscisas* para los valores que toma la variable independiente, *eje de ordenadas* para los valores que toma la variable dependiente, y *origen de coordenadas,* punto de intersección de ambos). Uno de los objetivos importantes de este capítulo y los siguientes es llegar a representar gráficamente todo tipo de funciones (no excesivamente complejas).

Ejemplos:

TIPO	GRÁFICAS	
Polinómicas		
Racionales		

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

TIPO	GRÁFICAS	
Irracionales		
Exponenciales		
Logarítmicas		
Trigonométricas		
Definidas a trozos		

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.1. Funciones racionales

Una **función monómica** es aquella en la que, la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es un monomio, es decir, una expresión algebraica en la que únicamente aparecen productos en la parte variable.

Ejemplos:

Función identidad: $I(x) = x$

Función polinómica: $f(x) = -3x^2$

Volumen esfera respecto al radio: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Un caso particular de función monómica es la **función potencial**, aquella en la que la fórmula que establece la relación entre las variables es una potencia de exponente natural.

Ejemplos:

Función identidad: $I(x) = x = x^1$

$f(x) = x^3$

Área del cuadrado respecto del lado: $A(l) = l^2$

Una **función polinómica** es aquella en la que, la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es un polinomio, es decir, una suma de monomios no semejantes.

Ejemplos:

$p(x) = -2x + 1$

MRUA (Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado)*:* $e(t) = \mathbf{5}\cdot t + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cdot t^2$

Área total de un cilindro de altura 1 respecto al radio: $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r$

Actividades resueltas

- *Mediante la función anterior que relaciona el área de un cuadrado con su lado, calcula el área de un:*

Cuadrado de lado 1 cm: $A(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow A = 1\ cm^2$.

Cuadrado de lado 0.5 m: $A(0.5) = 0.5^2 = 0.25 \Rightarrow A = 0.25\ m^2$.

Cuadrado de lado $\sqrt{5}$ mm: $A(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5 \Rightarrow A = 5\ mm^2$.

- ¿Qué otras fórmulas de áreas o volúmenes de figuras conoces que sean funciones polinómicas?:

Área de los triángulos de base 3 cm en función de la altura: $A(h) = \frac{\mathbf{3}\cdot h}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\cdot h$ (monómica)

Área de los rectángulos de altura 4 m en función de la base: $A(b) = b\cdot\mathbf{4} = \mathbf{4}b$ (monómica)

Área de los trapecios de bases 6 y 8 dm en función de la altura: $A(h) = \frac{(\mathbf{6}+\mathbf{8})\cdot h}{\mathbf{2}} = \mathbf{7}\cdot h$

Área total del cono de generatriz 5 mm en función del radio: $A(r) = \pi r^2 + \mathbf{5}\pi r$ (polinómica)

Volumen de la pirámide cuadrangular de altura 7 m en función del lado: $V(l) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot l^2\cdot\mathbf{7} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}l^2$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

2. Calcula las imágenes de los números -3; $\frac{-1}{2}$; 0; 1; $\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}$; 10 por la función $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

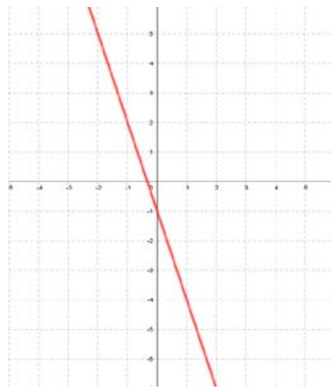
Recuerda que:

Como casos especiales dentro de las funciones polinómicas, se encuentran las funciones afines y las cuadráticas que se estudiaron en cursos anteriores:

Una **función afín** es una función polinómica de grado menor o igual que uno: $y = f(x) = mx + n$.
Su representación gráfica es una **recta**, su **pendiente** es el coeficiente líder (m) e indica la inclinación de la misma (si es positivo la recta será **creciente** y si es negativo **decreciente**) y su **ordenada en el origen** (n) es el término independiente, que nos proporciona el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Ejemplo:

GRÁFICA



- *$f(x) = \mathbf{-3}x - \mathbf{1}$ (polinomio de primer grado)*

x	-2	-1	$-1/3$	0	1
$f(x)$	5	2	0	-1	-4

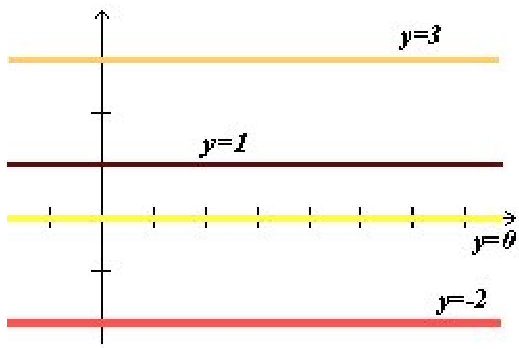
(–2, 5) (–1, 2) (–1/3, 0) (0, –1) (1, –4)

Pendiente: **–3** $\Rightarrow$ *recta decreciente*

Ordenada en el origen: **–1** $\Rightarrow$ **(0, –1)** *punto de corte de la recta con el eje de ordenadas*

<u>Casos particulares de funciones afines son:</u>

Función constante (recta horizontal): es aquella que siempre toma el mismo valor para todos los valores de la variable independiente (la pendiente es nula): $f(x) = n$.



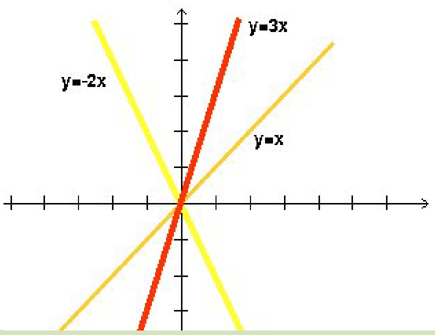
Ejemplos:

- Gráficas de $f(x) = 3$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2$.

Por tanto, la recta no tiene inclinación, es decir, es paralela al eje de abscisas.

Observa que

La ecuación del eje de abscisas es $y = f(x) = 0$.



Función lineal o **de proporcionalidad directa**: es aquella que tiene ordenada en el origen igual a **0** (pasa por el origen de coordenadas), es decir, es monómica de grado 1: $f(x) = mx$.

Ejemplos:

- Gráficas de $f(x) = 3x$ (y es el triple de x); $f(x) = -2x$ (y es el opuesto del doble de x); $I(x) = x$ (**función identidad**: y es igual a x).

Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

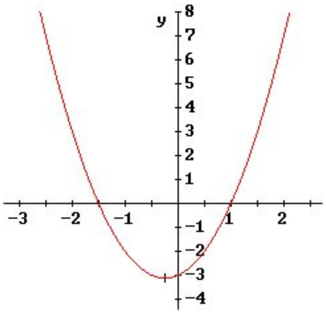
Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La gráfica de este tipo de funciones se llama **parábola**.

Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo ($a > 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$

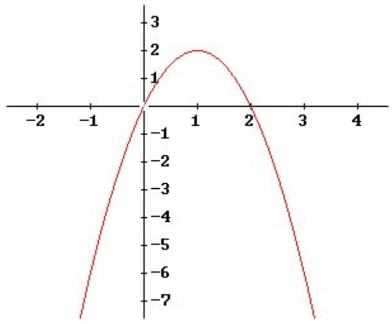
$2 > 0$



Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo ($a < 0$), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo (**cóncava**).

$y = -2x^2 + 4x$

$-2 < 0$



Los otros coeficientes del polinomio afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

En una función cuadrática hay una rama que crece y otra que decrece. El punto donde se produce ese cambio se llama ***vértice*** y es el mayor (*máximo*) o menor (*mínimo*) valor que toma la función. Es el punto más significativo en una parábola y, por eso, es importante saber calcularlo. Para ello, le damos a la variable independiente el valor $x = \frac{-b}{2a}$, y lo sustituimos en la función para calcular su imagen. Dicho valor es fácil de recordar: es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2º grado quitándole la raíz cuadrada.

Ejemplo:

$y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grado}}$

x	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5

(3, –4) (1, 0) (5, 0) (0, 5) (6, 5)

Coeficiente líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ *parábola convexa*

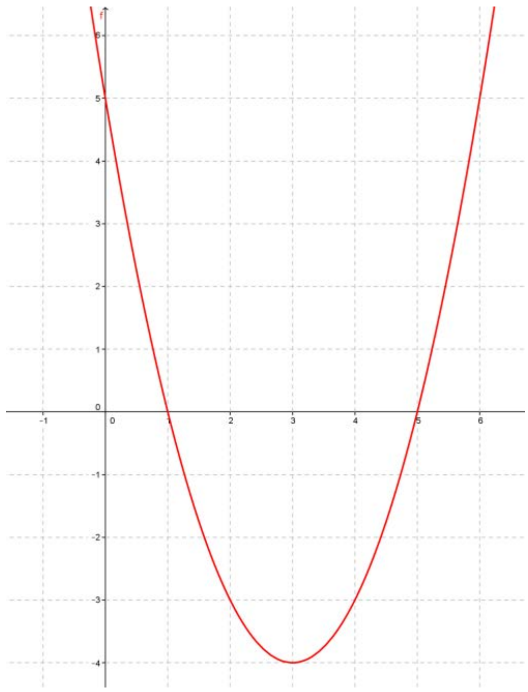
Vértice: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3, –4)**

Ordenada en el origen: ***5*** $\Rightarrow$ **(0, 5)** *punto de corte con el eje de ordenadas.*

Puntos de intersección con el eje de abscisas: **(1, 0)** y **(5, 0)**

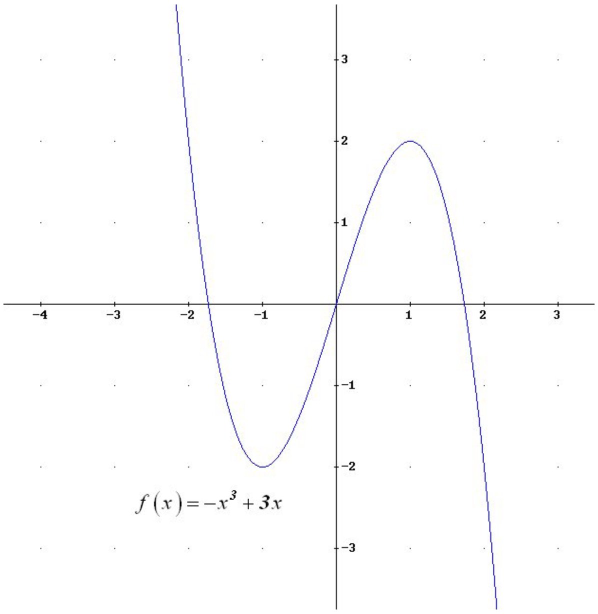
$$0 = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

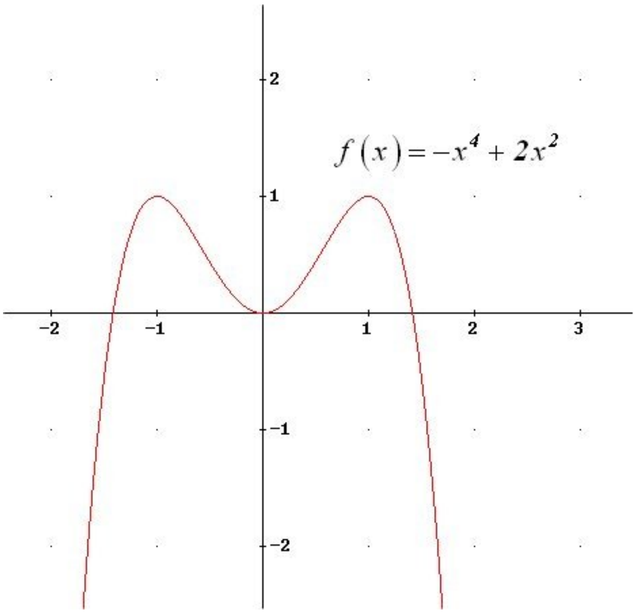
GRÁFICA



Las funciones polinómicas de grado mayor que dos son más complejas de dibujar, aunque las gráficas también tienen características llamativas:

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





Una **función racional** es aquella en la que, la fórmula que establece la relación entre la variable dependiente y la independiente es una expresión racional o fracción algebraica, es decir, una división de dos polinomios.

Ejemplos:

Función de proporcionalidad inversa: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad g(t) = \frac{t+1}{t-1}$ $\qquad h(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$

Recuerda que:

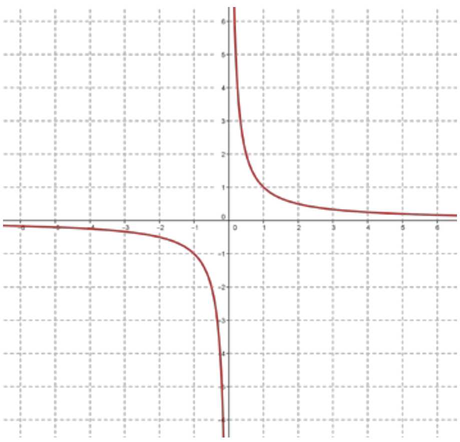
Cuando los polinomios que forman la fracción algebraica son, como mucho, de grado 1 (el del denominador obligatoriamente), la gráfica de la función es una curva llamada **hipérbola**.

Ejemplo:

GRÁFICA

- *La gráfica de la función de proporcionalidad inversa es:*

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/5	1/5	1/2	1	2	3
f(x)	–1/3	–1/2	–1	–2	–5	5	2	1	1/2	1/3



Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Función raíz

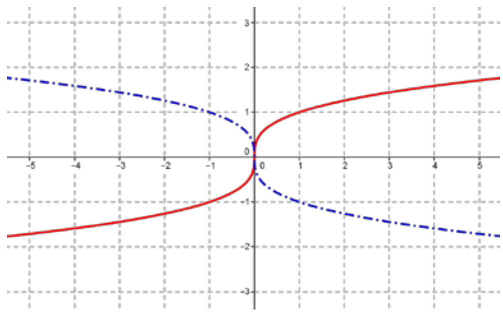
Una **función raíz** es aquella en la que la variable dependiente se calcula haciendo una raíz a la variable independiente.

Ejemplos:

$f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $g(t)=\sqrt[3]{t}$ $\qquad$ $h(t)=\sqrt[4]{t}$ $\qquad$ $j(x)=\sqrt[5]{x}$

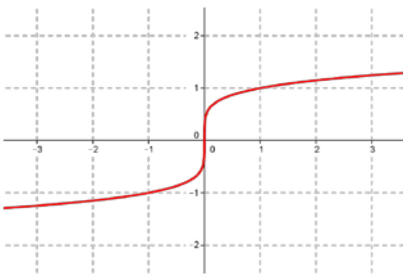
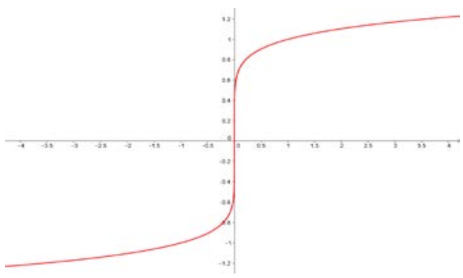
Es importante recordar que la raíz es una operación un tanto especial puesto que no siempre se puede obtener, por ejemplo, cuando el radicando es negativo y el índice par. La función raíz cuadrada tiene un único resultado real, el que asigna la calculadora (no confundir con las soluciones de una ecuación de segundo grado, que son dos).

Gráficamente, lo anterior se traduce en:

RAÍCES DE ÍNDICE PAR	RAÍCES DE ÍNDICE IMPAR
$f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=-\sqrt{x}$	 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $f(x)=-\sqrt[3]{x}$

Actividades propuestas

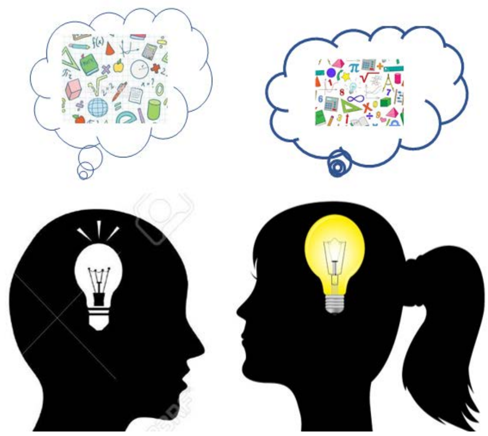
3. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Funciones exponenciales y logarítmicas

Una **función exponencial** es aquella en la que la variable dependiente se calcula elevando un número conocido a la variable independiente.



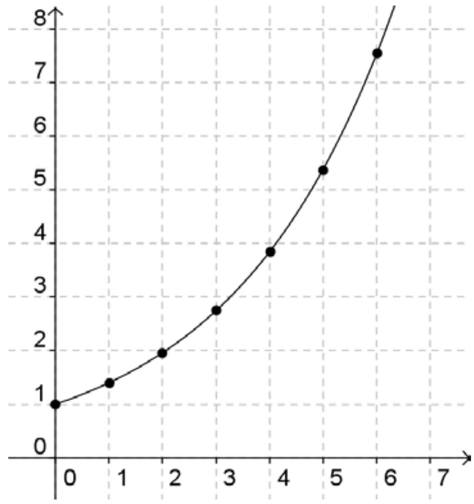
Actividades resueltas

- *Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número "y" de bacterias que habrá al cabo de "x" horas (comenzando por una sola bacteria):* $y = f(x) = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (x)	**Número de bacterias (y)**
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la "x" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general, la variable independiente sí puede tener valores negativos, pero sus imágenes siempre son positivas.

Actividades propuestas

4. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.

5. Vuelve a realizar el ejercicio anterior pero ahora suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.

Observarás que, en el primer caso, los valores de "y" aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de "x" aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. En el segundo caso, como en lugar de multiplicar se trata de dividir, tenemos un **decrecimiento exponencial**.

6. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

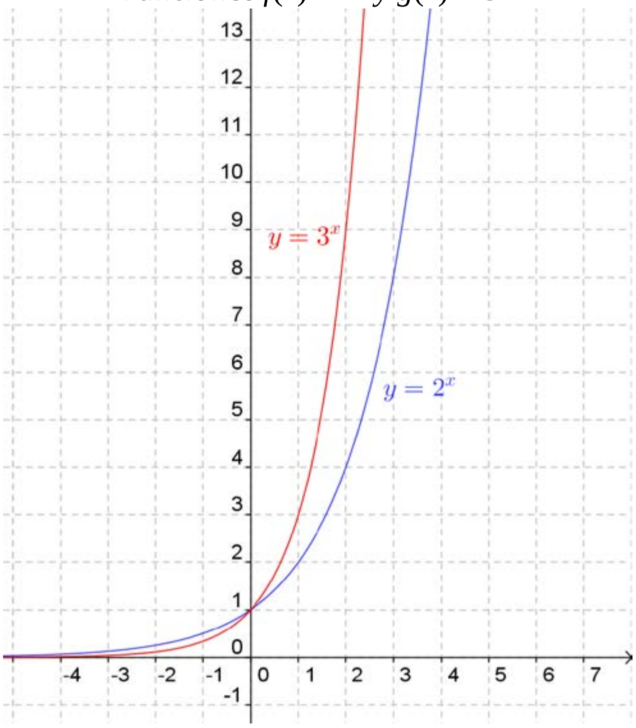
Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ se diferencian según el valor de la base "a": Son distintas si $0 < a < 1$ o $a > 1$.

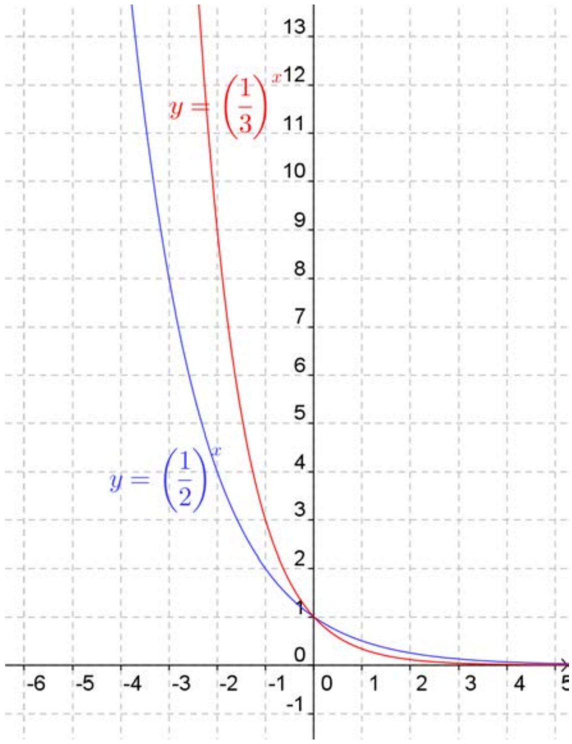
En el caso en el que $a = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$



Funciones $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos que la gráfica de $f(x) = a^x$ y la de $f(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

El número e. La función exponencial ($f(x) = e^x$)

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π, aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Ya lo hemos estudiado en capítulos anteriores. Ya sabes que es un número irracional cuyo valor aproximado es e = 2.71828182846...

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

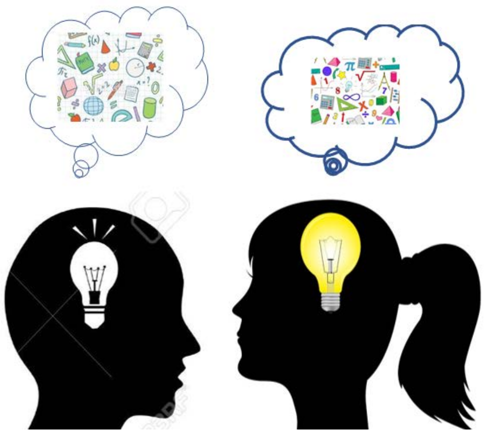
La gráfica de la función $f(x) = e^x$ es similar, y comparte características, a la de las funciones exponenciales de base mayor que 1 dibujadas anteriormente.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

7. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

8. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.



a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

9. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 1/3 cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

(a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").

(b) Representa gráficamente estos datos.

Cultivo de la bacteria Salmonella

Un número llamado e. John Napier dio a conocer los logaritmos en 1614. Gracias a ellos las multiplicaciones podían sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las raíces por divisiones y las potencias por productos. Esto simplificaría en gran manera la realización de cálculos matemáticos. Más por menos. La aventura del saber. Antonio Pérez.

Más por menos: Un número llamado e | RTVE Play

Función logaritmo

En capítulos anteriores ya hemos estudiado los logaritmos, pero ahora vamos a estudiar la función logarítmica.

Una **función logarítmica** es aquella en la que la variable dependiente se calcula haciendo el logaritmo, en una base conocida, de la variable independiente.

Ejemplos:

Función logaritmo:

$f(x) = \log(x)$

Función logaritmo neperiano:

$g(x) = \ln(x)$

Función logaritmo de base $\frac{1}{2}$ *:*

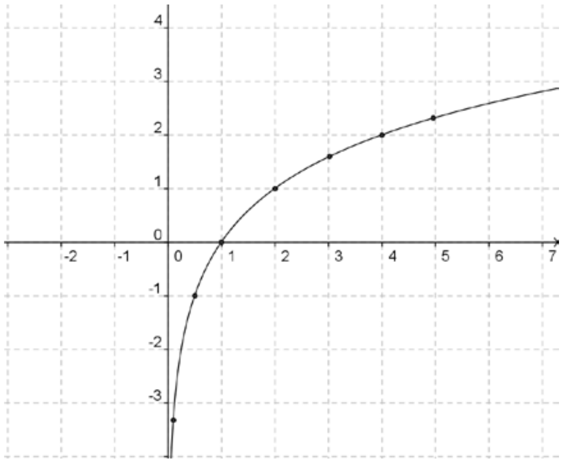
$h(t) = \log_{0.5}(t)$

Hay una función distinta para cada valor de la base a.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

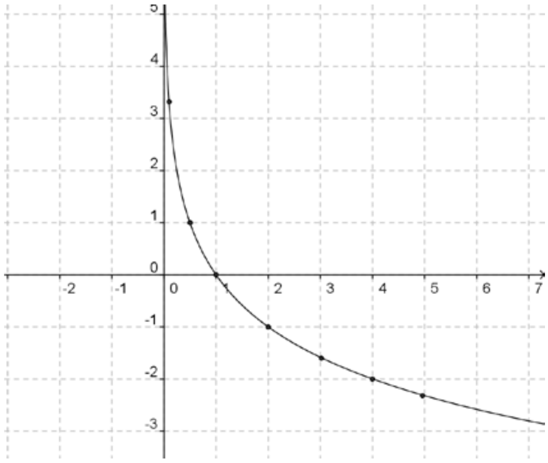
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

x	$\log_2 x$
0.1	–3.3
0.5	–1.0
0.7	–0.5
1	0.0
2	1.0
3	1.6
4	2.0
5	2.3
…	…



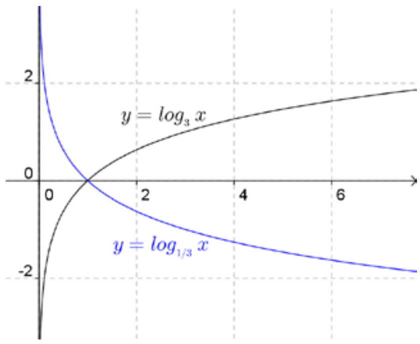
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

x	$\log_{1/2} x$
0.1	3.3
0.5	1.0
0.7	0.5
1	0.0
2	–1.0
3	–1.6
4	–2.0
5	–2.3
…	…



Observa que:

Las gráficas de $f(x) = \log_a(x)$ y $g(x) = \log_{1/a}(x)$ son simétricas respecto del eje OX:



Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$. Por tanto, llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y".

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

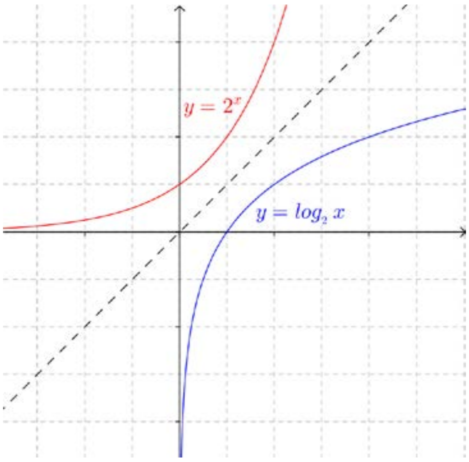
Ejemplo:

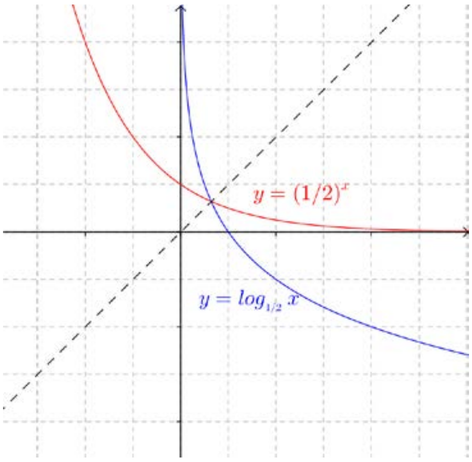
- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $\log_5 3 = 0.6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). Si a continuación aplicamos la función exponencial: $5^{0.6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación, aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

Gráficamente, la propiedad anterior se traduce en que sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Esto se debe a que si el punto (a, b) es de la gráfica de una de ellas, el punto (b, a) pertenece a la gráfica de la otra.

Ejemplos:



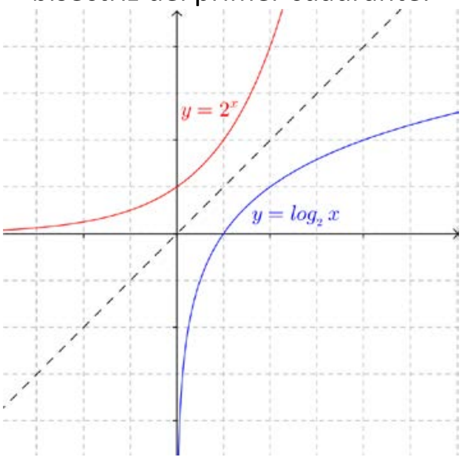


Actividad resuelta

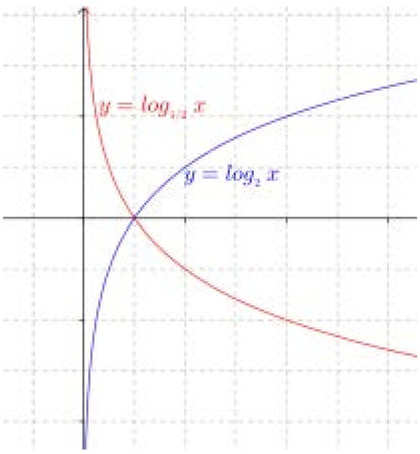
- Representa la función $f(x) = \log_2(x)$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $g(x) = 2^x$, $h(x) = \log_{1/2}(x)$ y, utilizando también $g(x) = 2^x$, representa $k(x) = (1/2)^x$.

Solución:

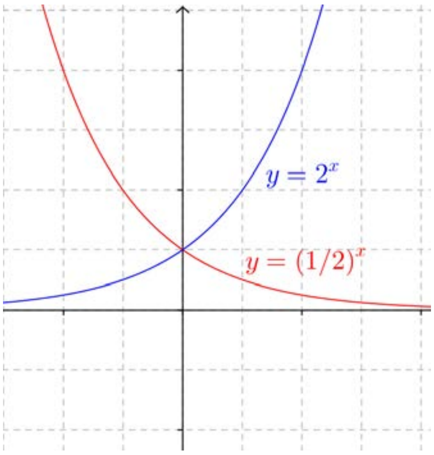
Por la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante:



Por la simetría respecto al eje OX:



Por la simetría respecto al eje OY:



Actividades propuestas

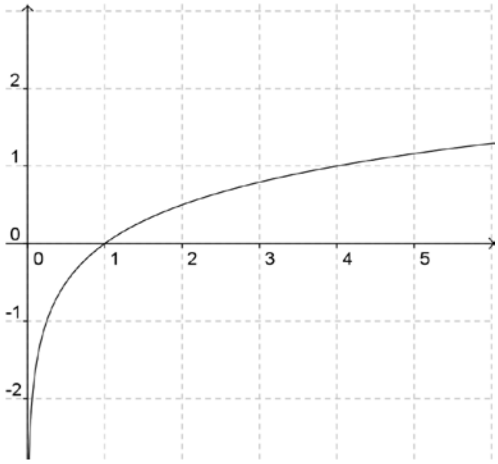
10. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = log_3\, x$ b) $f(x) = log_{1/3}\, x$ c) $f(x) = log_{1.5}\, x$

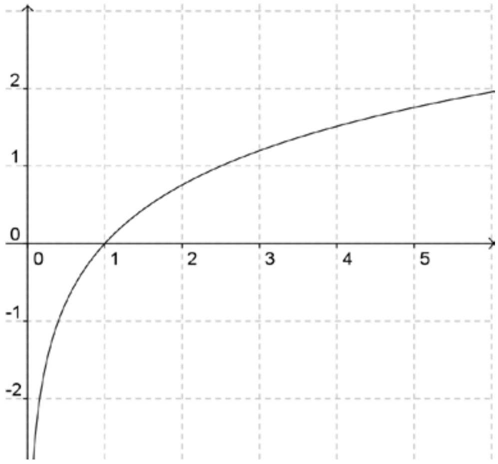
Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, –1), donde *a* es la base.

11. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

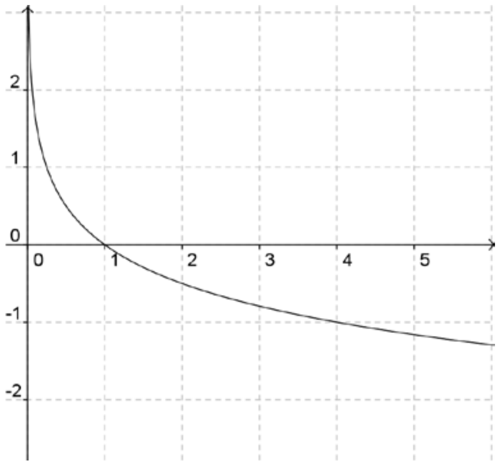
a)



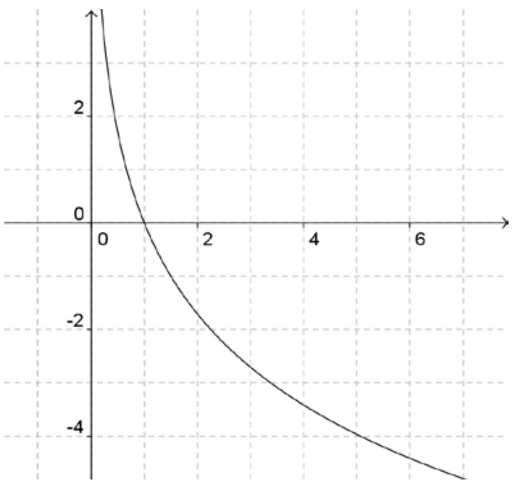
b)



c)



d)



Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Funciones trigonométricas

En el capítulo de Trigonometría hemos estudiado las razones trigonométricas y sus propiedades, ahora vamos a estudiar las funciones trigonométricas.

Una **función trigonométrica** es aquella en la que la variable dependiente se calcula aplicando una razón trigonométrica a la variable independiente.

video

Funciones trigonométricas Análisis y gráfico. PROF. Alejandro de Luccas

https://www.youtube.com/watch?v=2dzA5ESvfiI

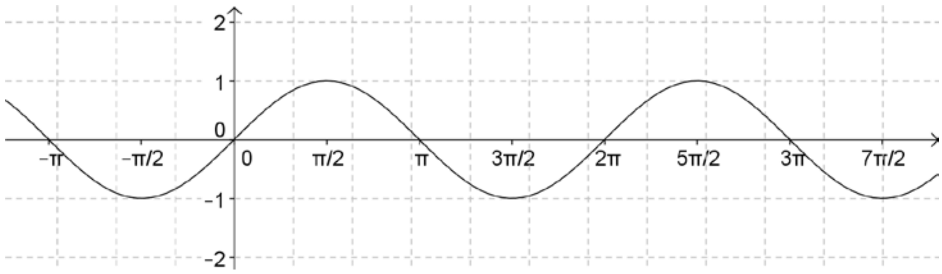
Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

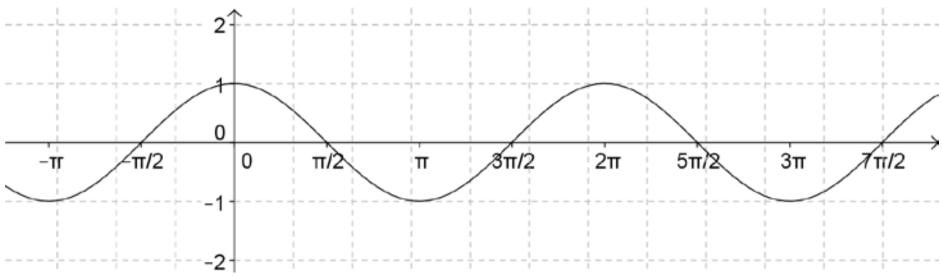
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

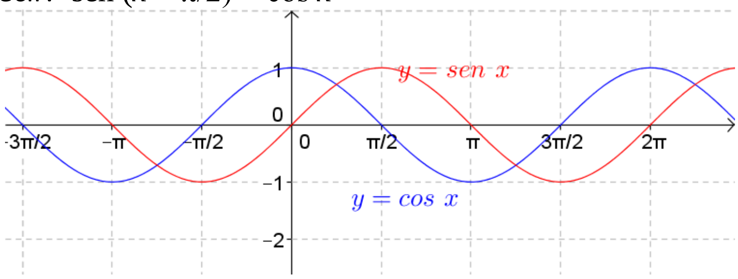
Gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$



Gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Ya sabes cuánto vale π, π = 3.14… Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.
Puedes observar que ambas funciones tienen la misma gráfica, pero desplazada en $\pi/2$ radianes en sentido horizontal. Es decir: $\text{sen } (x + \pi/2) = \cos x$



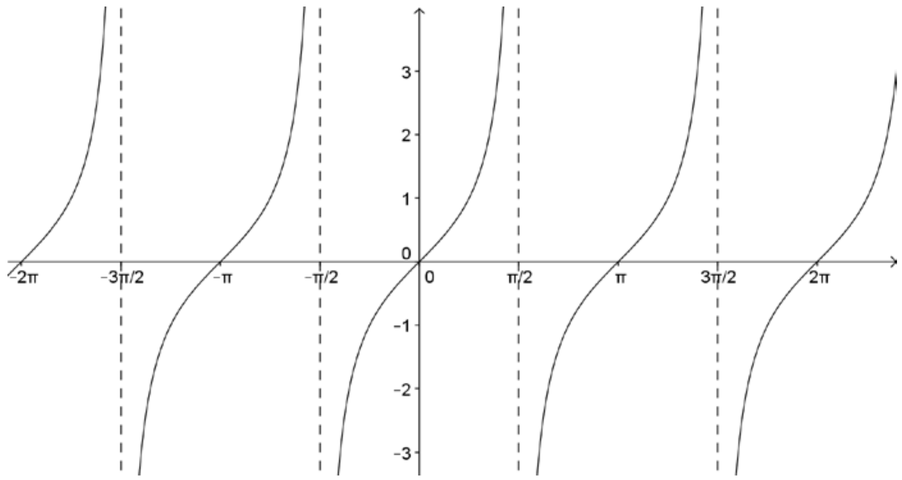
La función tangente

Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.

Recuerda que:

Como razones trigonométricas: tg x = sen x / cos x.

Gráfica de la función *f(x) = tg x*



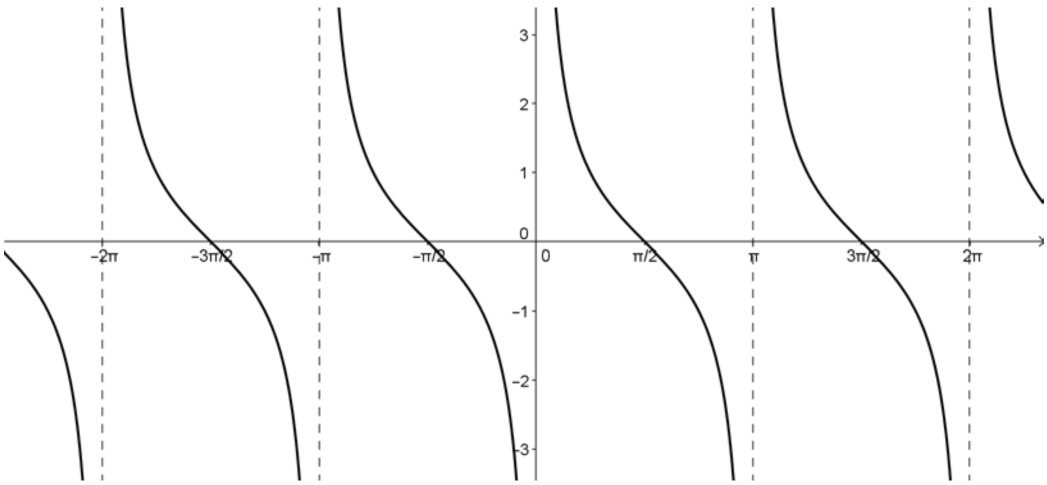
Recordemos que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2… pues para esos valores se anula el denominador.

La función cotangente

Recuerda que:

Como razones trigonométricas: cotg x = 1 / tg x = cos x/ sen x.

Gráfica de la función *f(x) = cotg x*



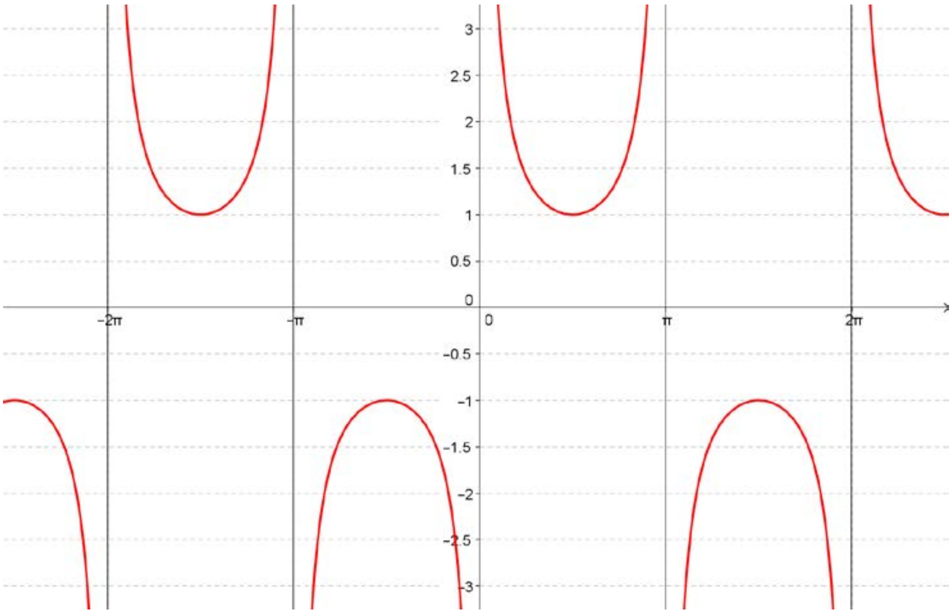
Recordemos que no existe la cotangente para los ángulos de 0, ± π, ±2π, ±3π… pues para esos valores se anula el denominador.

Las funciones cosecante y secante

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque vuelven a ser muy parecidas.

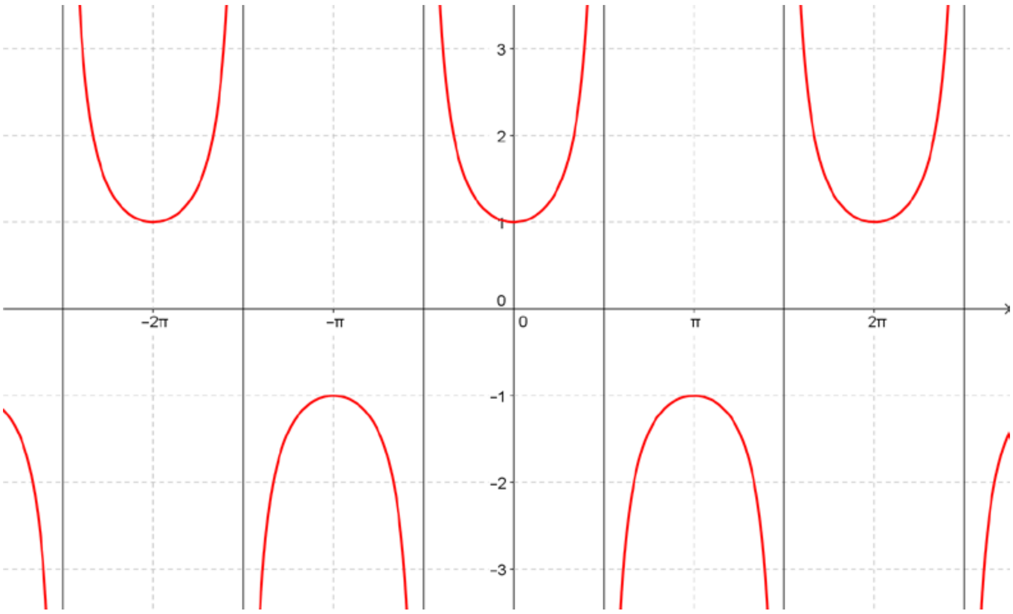
Ya sabes que como razones trigonométricas: cosec x = 1/sen x y sec x = 1/ cos x.

Gráfica de la función *f(x) = cosec x*



Recordemos que no existe la cosecante para los ángulos de 0, ± π, ±2π, ±3π… pues para esos valores se anula el denominador.

Gráfica de la función *f(x) = sec x*



Recordemos que no existe la secante para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2… pues para esos valores se anula el denominador.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

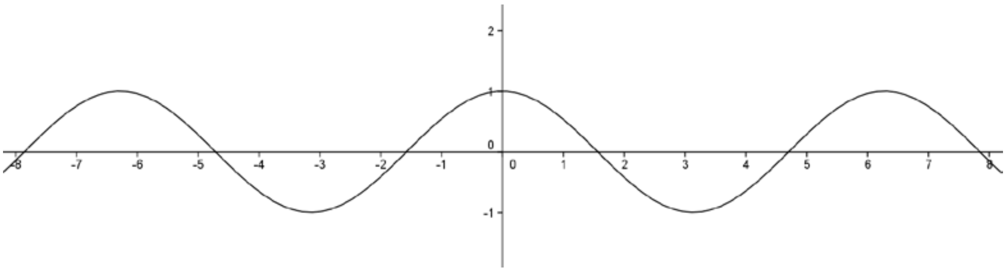
Funciones trigonométricas con GeoGebra

En esta actividad se utiliza el programa *Geogebra* para representar funciones trigonométricas y relacionar la gráfica de una función y su expresión analítica, con la que se obtiene al realizar una traslación según un vector paralelo a uno de los ejes de coordenadas o al multipicar por un número la variable x o $f(x)$.

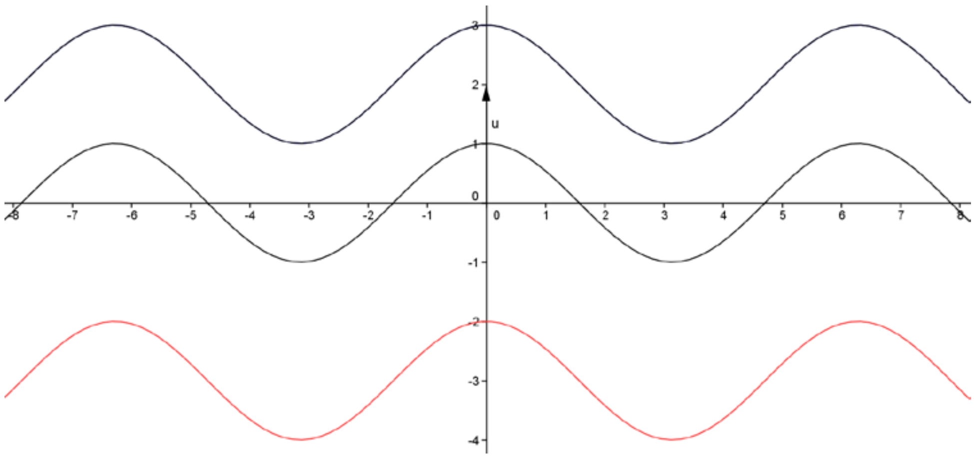
Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar la traslación de una función en la dirección del eje de ordenadas

- En la **línea de entrada**, introduce la función ***f*(*x*) = cos(*x*)**, queda definida la función $f(x)$, como $cos(x)$.



- Introduce en la **línea de entrada** la función ***f*(*x*) + 2**, observa que en la ventana algebraica aparece como $g(x) = \cos(x) + 2$ y coloréala de azul.
- Define el vector $u = (0, 2)$ y **traslada** la gráfica de $f(x)$ respecto al vector u, observa que coincide con la gráfica de $g(x)$.
- Introduce en la **línea de entrada** la función ***f*(*x*) − 3** y coloréala de rojo, observa que en la ventana algebraica aparece como $h(x) = \cos(x) - 3$



La función $\boldsymbol{y = f(x) + b}$ es la trasladada de la función $\boldsymbol{y = f(x)}$ según el vector de traslación $u = (0, b)$.

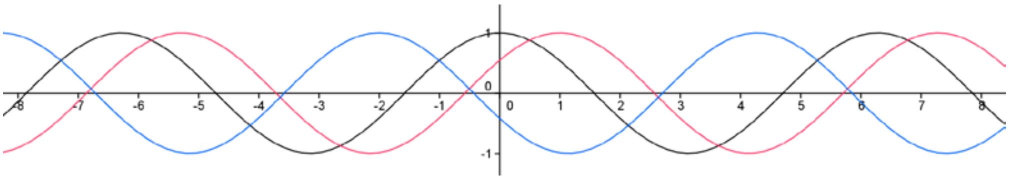
- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *traslación en la dirección del eje de ordenadas* y selecciona todos los elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar la traslación de una función en la dirección del eje de abscisas.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Introduce la **línea de entrada** la expresión ***f*(*x* – 1)** coloreándola de azul y ***f*(*x* + 2)** coloreada de rojo.



- Define el vector $v = (1, 0)$ y **traslada** la gráfica de $f(x)$ respecto al vector *v,* observa que coincide con la gráfica de $f(x – 1)$.

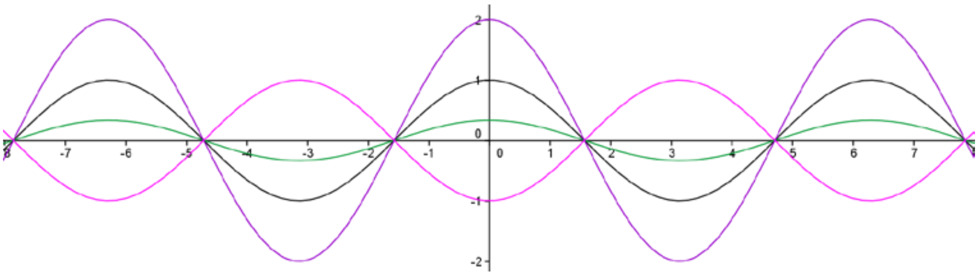
La función $y = f(x - a)$ es la trasladada de la función $y = f(x)$ según el vector de traslación $u = (a, 0)$.

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *traslación en la dirección del eje de abscisas* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar las g**ráficas de la funciones *kf*(*x*)**

- En la **línea de entrada** introduce la expresión **(1/3)*f*(*x*)** y coloréala de verde, introduce también **2*f*(*x*)** pintándola violeta y **–*f*(*x*)** dándole color rosa. Observa cómo se modifica la amplitud.



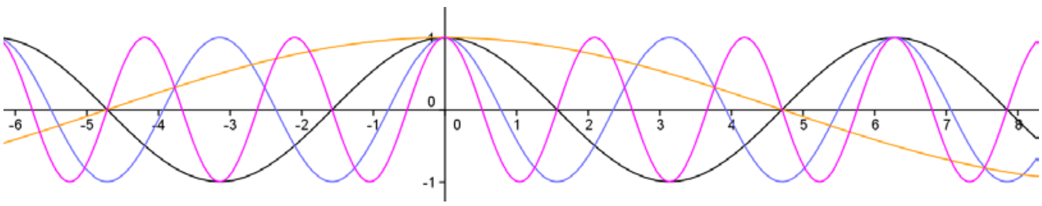
La función $y = kf(x)$ modifica la amplitud la función $y = f(x)$ una cantidad igual al valor absoluto de ***k***. Si ***k*** es negativo se obtiene la función simétrica respecto del eje de abscisas.

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *gráficas de las funciones kf(x)* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función $f(x)$ para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividad resuelta

- Utiliza *Geogebra* para analizar las gráficas **de la funciones *f*(*kx*)**

- Representa las funciones ***f*(2*x*)**, ***f*(–3*x*)** y ***f*(*x*/3)** y píntalas con distintos colores.



- Observa como en esta ocasión se modifica el periodo y la frecuencia. Ya sabes que la función coseno tiene un periodo igual a 2π, algo más de 6, es decir, en 2π hace una oscilación completa. Comprueba que el periodo de ***f*(2*x*)** es la mitad, π. El periodo de ***f*(–3*x*)** es $2\pi/3$, y el de ***f*(*x*/3)** es 6π.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Activa la casilla de **control para ocultar objetos,** con el **subtítulo** *gráficas de las funciones f(kx)* y selecciona los últimos elementos construidos salvo la función *f*(*x*) para ocultarlos cuando la casilla esté desactivada.

Actividades propuestas

12. Utiliza la función seno (*y*=*sin*(*x*)) para investigar cómo influye una transformación del tipo *f*(*x*) + *k* en la función *f*(*x*) con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k:* ....

13. Utiliza la función seno (*y*=*sin*(*x*)) para investigar cómo influye una transformación del tipo *f*(*x* + *k*) de la función *f*(*x*) con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k*: ....

14. Utiliza la función seno (*y*=*sin*(*x*)) para investigar cómo influye una transformación del tipo *kf*(*x*) en la función *f*(*x*) con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- El signo de la constante *k*: ....

15. Utiliza la función seno (*y*=*sin*(*x*)) para investigar cómo influye una transformación del tipo *f*(*kx*) en la función *f*(*x*) con respecto a:

- La gráfica de la función: ....
- El período de la función: ....
- La constante *k*, su signo y que sea mayor o menor que 1: ....

16. Abre un nuevo archivo de *Geogebra*, representa la función tangente: *f*(*x*) = tan(*x*), estudia su comportamiento respecto a transformaciones de la forma *f*(*x*) + *k*, f(*x* + *k*), *kf*(*x*) y *f*(*kx*) y busca alguna diferencia con la función cos(*x*) respecto a estas transformaciones.

17. Esboza, sin utilizar *Geogebra*, las gráficas de las funciones *f*(*x*) = – sen(*x* + 1), *g*(x) = 2cos(3*x*) y *h*(*x*) = sen(3*x*+2), calculando el período de cada una de ellas. Comprueba con *Geogebra* los resultados y justifícalos.

18. Dibuja en la pantalla de *Geogebra* la función seno, y su derivada, la función coseno. Comprueba cómo se verifican las propiedades que ya conoces sobre crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Comprueba que cuando la función seno alcanza un máximo o un mínimo, la función coseno se anula. Comprueba que cuando la función seno es creciente, la función coseno es positiva, y que cuando la función seno es decreciente, la función coseno es negativa.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Funciones definidas a trozos. Función valor absoluto

Una **función definida a trozos** es aquella en la que la fórmula que establece la relación entre las dos variables no es única, sino que dependiendo de los valores que tome la variable independiente, los de la variable dependiente se calculan en una u otra fórmula.

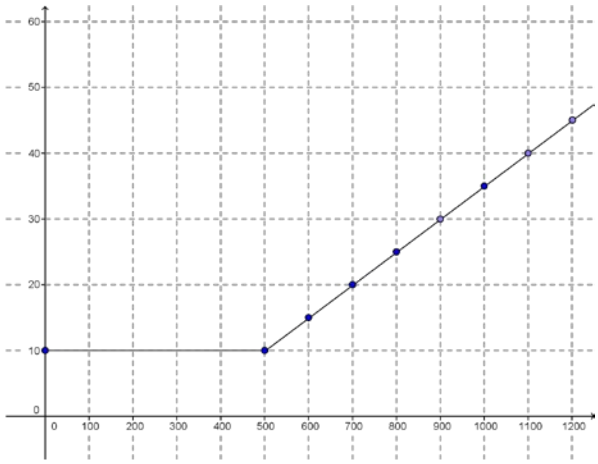
- Piensa en la siguiente situación: Para la tarifa de un teléfono móvil se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €; para valores mayores, los minutos que gastamos por encima de 500 son (x – 500) y, por tanto, lo que pagamos por esos minutos es 0.05(x – 500), pues lo medimos en euros, más los 10 € que pagamos de fijo.

Analíticamente:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + 0.05(x - 500), & x > 500 \\ 10, & x \leq 500 \end{cases}$$

Gráficamente:



Otros ejemplos:

Función valor absoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 3 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \leq -2 \\ \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad -2 < t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

19. Representa gráficamente la función valor absoluto.

20. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -4 \\ -x + 2 & si \quad -4 \leq x < 0 \\ 5 & si \quad 0 \leq x \end{cases}$ Puntos: –6; –4; –1/2; –0.2; 0; 1; 3/2; 4.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < -3 \\ x & si \quad -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & si \quad 2 \leq x \end{cases}$ Puntos: –5; –3; –1/2; –0.2; 0; 2; 9/4; 4.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Funciones definidas a trozos utilizando GeoGebra

En algunas funciones la relación entre la variable independiente y la dependiente varía en los distintos intervalos en los que está definida y a veces es posible encontrar una fórmula para cada intervalo del dominio que exprese esta relación, estas funciones se dice que están **definidas a trozos**.

Por ejemplo en la siguiente función la relación entre la variable independiente y la dependiente es diferente para los números negativos y los positivos.

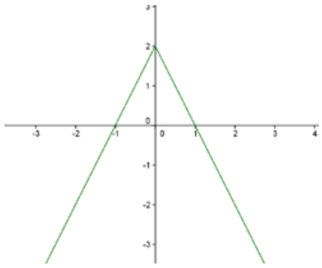
$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ x\in[-\infty,0] \\ -2x+2 & si\ x\in(0,\infty] \end{cases}$$

- *Dibuja esta función con Geogebra*
- En la línea de entrada escribimos: Función [2*x*+2, -∞,0]

Esta orden dibuja el primer trozo de la función. Utiliza el comando función: Función [] y entre los corchetes se escribe la función y los extremos del segmento o la semirrecta donde está definida, separados por comas.

- A continuación escribimos en la línea de entrada Función [-2*x*+2, 0,∞]

Y ya tenemos representada la función.



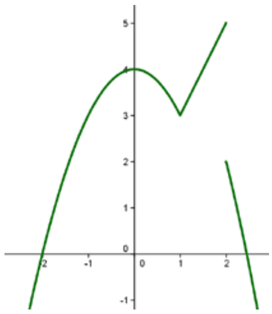
- Las dos órdenes anteriores se pueden introducir como una sola, separándolas por una coma y entre llaves.
  {Función [2*x*+2, -∞,0], Función [-2*x*+2, 0,∞]}

Recuerda que el símbolo ∞ se encuentra entre la línea de entrada y los comandos.

- *Representar una función definida a trozos definida por:*

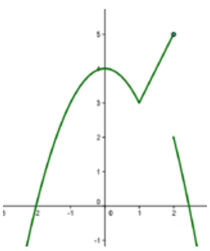
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & si\ x<1 \\ 2x+1 & si\ 1\le x\le 2 \\ -x^2+6 & si\ x>2 \end{cases}$$

- Introduce en la línea de entrada:
  {Función [−*x*^2+4, -∞,1], Función [2*x*+1, 1,2], Función [−*x*^2+6, 2,∞]}



Recuerda que para escribir las potencias en la línea de entrada de *Geogebra* se utiliza el símbolo ^, así cuando escribimos *x*^2 el sistema entiende x^2.

Esta es la gráfica que se obtiene:



Se observa que esta función es continua en $x = 1$, y el valor de la función en este punto es 3, es decir $f(1) = 3$, sin embargo en el punto $x = 2$ la función no es continua y a partir de la gráfica no podemos detectar si la imagen del punto 2 es decir $f(2)$ es 2 o 5. A partir de la expresión analítica de la función observamos que $f(2) = 5$ que podemos reflejarlo en la gráfica dibujando el punto (2, 5) como se muestra en la siguiente gráfica.

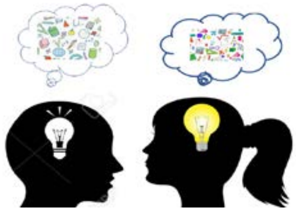
Actividades propuestas

21. Utiliza Geogebra para representar las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x+6 & si\ x\in(-\infty,-1) \\ -x+4 & si\ x\in[-1,2] \\ x^2-7x+12 & si\ x\in(2,\infty) \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<-1 \\ e^x & si\ -1\le x\le 0 \\ x+1 & si\ x>0 \end{cases}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Funciones de oferta y demanda



22. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

a) Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

La curva "cantidad demandada" – "precio" es un ejemplo de ***función de demanda***. Observa que es una función decreciente, pues al aumentar los precios el consumidor demanda menor cantidad del producto. Ilustra el comportamiento de los consumidores.

La curva "cantidad ofrecida" – "precio" es un ejemplo de ***función de oferta***. Observa que es una función creciente, pues al aumentar los precios el vendedor aumenta la producción y ofrece mayor cantidad del producto. Ilustra el comportamiento de los vendedores.

b) Determina de forma aproximada en la gráfica anterior el punto de intersección de ambas gráficas.

A ese punto se le denomina ***punto de equilibrio***. La demanda y la oferta determinan el precio y la cantidad de equilibrio. En ese punto se igualan las cantidades ofrecidas y demandadas.

A un precio mayor la cantidad ofrecida excede la cantidad demandada, y al haber depósitos de mercancía no vendida la competencia entre vendedores hará que el precio baje hasta el punto de equilibrio. Hay un excedente.

A un precio menor la cantidad demandada es mayor que la ofrecida, los compradores quieren más naranjas, y eso eleva el precio hasta el punto de equilibrio. Hay un déficit.

Este problema ilustra unos conceptos que se utilizan en Teoría Económica. Es un modelo ideal que se explica en un ***mercado con competencia perfecta***, con muchos compradores y muchos vendedores, en los que la ***demanda*** y la ***oferta*** determinan el precio.

23. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m^2, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1500	1000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

2.1. Operaciones básicas

La función suma, diferencia, producto o cociente de otras dos es aquella que aplica cada elemento original en la suma, diferencia, producto o cociente de los elementos imagen por cada una de las funciones. La expresión algebraica se obtiene sumando, restando, multiplicando o dividiendo respectivamente las expresiones algebraicas de las funciones originales:

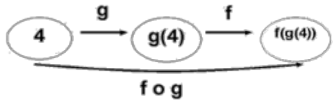
OPERACIÓN	EJEMPLO: $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=\frac{-3x}{x+1}$
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{2}{x}+\frac{-3x}{x+1}=\frac{-3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{2}{x}-\frac{-3x}{x+1}=\frac{2}{x}+\frac{3x}{x+1}=\frac{3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ Caso particular: $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x) \quad k\in\mathbb{R}$	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{2}{\cancel{x}}\cdot\frac{-3\cancel{x}}{x+1}=\frac{-6}{x+1}$ $(-1\cdot f)(x)=-1\cdot f(x)=-1\cdot\frac{2}{x}=\frac{-2}{x}$ *función opuesta de f* Gráficamente, una función y su opuesta son simétricas respecto del eje de abscisas
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-3x}{x+1}}=\frac{2x+2}{-3x^2}$

2.2. Composición de funciones

Existe una operación específica de las funciones que se llama *composición* y consiste en:

1º Aplicamos una función a un número.

2º Aplicamos otra función al resultado obtenido.



Ejemplo:

$f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=\frac{-3x}{x+1}$

$\underbrace{f\circ g}_{g \text{ compuesto con } f}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{-3x}{x+1}\right) \underset{\text{ponemos } g(x)=\frac{-3x}{x+1}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } f,}{=}} \frac{2}{\left(\frac{-3x}{x+1}\right)}=\frac{2x+2}{-3x}$

$\underbrace{g\circ f}_{f \text{ compuesto con } g}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right) \underset{\text{ponemos } f(x)=\frac{2}{x}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } g,}{=}} \frac{-3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)+1}=\frac{\frac{-6}{\cancel{x}}}{\frac{2+x}{\cancel{x}}}=\frac{-6}{x+2}$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Como queda patente en el ejemplo anterior, la composición de funciones NO es conmutativa, aunque sí es asociativa (sin variar el orden): $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$.
Además, podemos observar que, al hacer cualquier operación con funciones, aparecen expresiones de los tipos estudiados, aunque más complejas al estar todas "mezcladas". A partir de ahora, los distintos tipos de funciones tendrán fórmulas parecidas a las de los siguientes ejercicios:

Actividades propuestas

24. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x+3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

a) $(p+q)(x)$	*b)* $(q+r)(x)$
c) $(q+r+s)(x)$	*d)* $(s-q)(x)$
e) $(q-r)(x)$	*f)* $(r-p)(x)$
g) $(f+p)(x)$	*h)* $(j-f)(x)$
i) $(g+k)(x)$	*j)* $(m-a)(x)$
k) $(b+d)(x)$	*l)* $(r+m)(x)$
m) $(p\cdot q)(x)$	*n)* $(q\cdot r)(x)$
o) $(q\cdot r:s)(x)$	*p)* $(p:q)(x)$
q) $(f\cdot p)(x)$	*r)* $(j\cdot f)(x)$
s) $(g:k)(x)$	*t)* $(a\cdot b)(x)$
u) $(p\circ q)(x)$	*v)* $(a\circ b)(x)$
w) $(r\circ s)(x)$	*x)* $(f\circ p)(x)$
y) $(j\circ f)(x)$	*z)* $(g\circ k)(x)$

2.3. Función inversa o recíproca

La ***función inversa (o recíproca)*** de una función f es otra función, f^{-1}, tal que: $\begin{cases} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} \circ f = I \end{cases}$.

Para que la función inversa esté bien definida (sea función) es necesario que, en la función de partida, cada imagen tenga un único original.

Para obtenerla, seguiremos los siguientes pasos:

PASOS	EJEMPLO:	$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
1º Llamamos y a $f(x)$	$y = \dfrac{2x}{x-1}$	
2º Despejamos x en función de y	$y\cdot(x-1) = 2x \Rightarrow y\cdot x - y = 2x \Rightarrow y\cdot x - 2x = y \Rightarrow$ $y\cdot(x-2) = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{y-2}$	
3º Cambiamos los papeles de x e y	$y = \dfrac{x}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}}$	

Esto no siempre es posible realizarlo, ya que no siempre se puede despejar la x o el resultado al hacerlo no es único, en cuyo caso ¿cuál sería la inversa?

Por ejemplo:

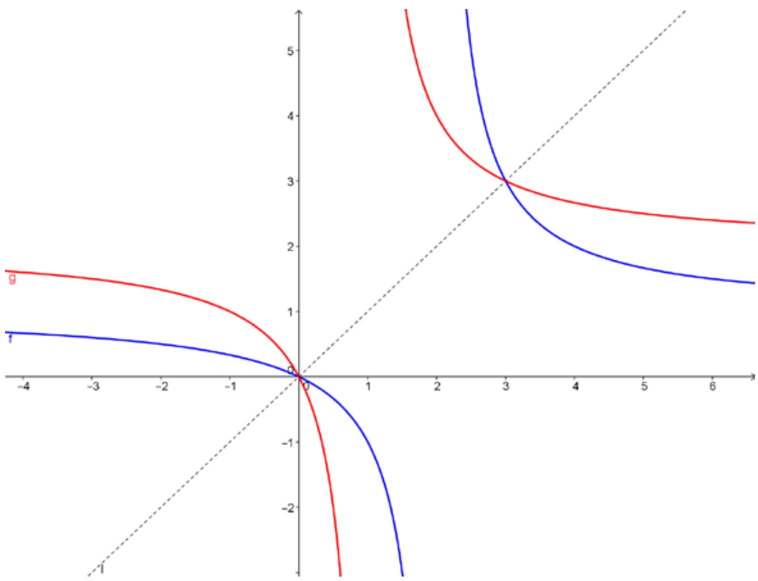
$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \overset{???}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} f^{-1}(x) = -\sqrt{x} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases} \qquad ó \qquad y = x^3 - 3x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad ???$$

Si existe, la inversa es única y, gráficamente, una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes), que es la gráfica de la función identidad.

Ejemplos

- $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

  $f^{-1}(x) = g(x) = \dfrac{x}{x-2}$



- Las funciones logaritmo y exponencial (de la misma base) son funciones inversas.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

25. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

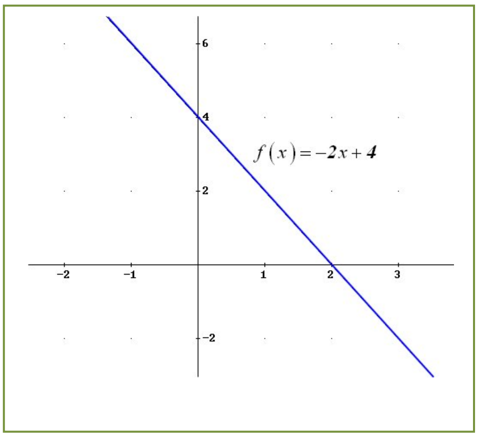
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3 - 1)$$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) $p(x)$		*b)* $q(x)$	
c) $r(x)$		*d)* $s(x)$	
e) $f(x)$		*f)* $g(x)$	
g) $h(x)$		*h)* $j(x)$	
i) $k(x)$		*j)* $l(x)$	
k) $m(x)$		*l)* $n(x)$	
m) $a(x)$		*n)* $b(x)$	
o) $c(x)$		*p)* $d(x)$	

26. Calcula la función inversa de:



Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Inversas o recíprocas de las funciones trigonométricas

De mismo modo que se puede definir la función logaritmo como función inversa de la función exponencial pues:

$$y = log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

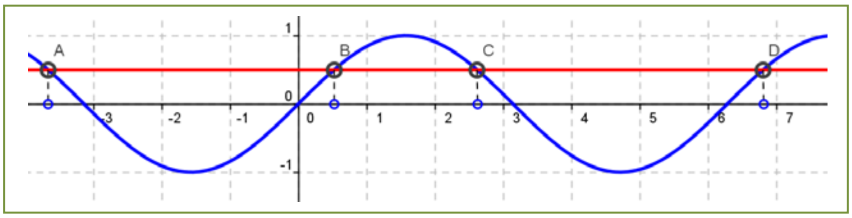
se pueden definir las funciones inversas de las funciones trigonométricas, que se denominan arco:

$$y = arcsenx \Leftrightarrow x = sen(y)$$

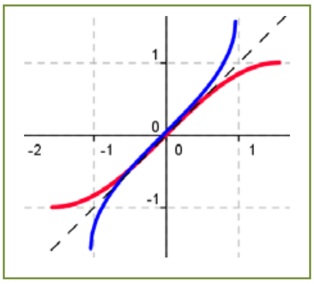
$$y = arccosx \Leftrightarrow x = cos(y)$$

$$y = arctgx \Leftrightarrow x = tg(y)$$

Pero ahora se nos presenta una dificultad que antes no teníamos. La imagen de un valor de una función trigonométrica proviene de muchos (infinitos) valores de la variable independiente.



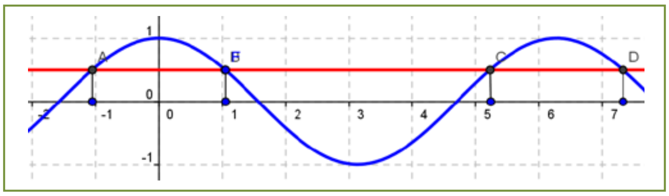
Por tanto, no existe **la** función inversa de la función seno, por ejemplo. Para poderla definir es preciso seleccionar un intervalo del dominio donde esto no ocurra. ¿Serviría el intervalo (0, 2π)? Observa que no. En la gráfica del margen la recta que hemos dibujado corta en 3 puntos a la gráfica en ese intervalo. ¿Serviría el intervalo (0, π)? ¡Tampoco! Ahora vemos dos puntos de corte. Piensa qué intervalo tomarías.

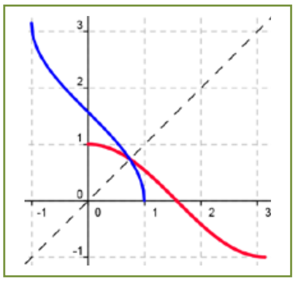


Si tomamos el intervalo [–π/2, π/2] observa que ahora sí, a cada valor de la imagen corresponde un único valor de la variable. En la gráfica del margen tienes representada en color rojo a la función seno en el intervalo (–π/2, π/2) y su función inversa en color azul, la función arco seno. También se ha dibujado la recta $y = x$ para poder observar que son simétricas respecto a dicha recta.

Por tanto: $y = arcsenx,\ x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = sen(y),\ y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Analicemos ahora la función coseno. No existe **la** función inversa de la función coseno. El intervalo [–π/2, π/2] no sirve. Tenemos dos puntos de intersección con nuestra recta. Piensa qué intervalo tomarías. ¿Serviría ahora el intervalo (0, π)?





Vamos a probarlo. Al margen puedes ver en rojo la gráfica de la función coseno entre (0, π) y en azul, la de su inversa, la función arco coseno. Por tanto:

$$y = arccosx,\ x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = cos(y),\ y \in [0, \pi]$$

Actividad propuesta

27. Realiza el proceso anterior para la función arco tangente: $y = arctgx \Leftrightarrow x = tg(y),\ y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

3.1. Dominio

El ***dominio*** o campo de existencia de una función, *Dom*(*f*), es el conjunto de valores que tienen imagen:

$$Dom(f) = \{x \in \Re;\ \exists y \in \Re,\ y = f(x)\}.$$

Actividad resuelta

TIPO	DOMINIO	Ejemplos
Polinómicas	$\Re$	Constante: $p(x) = -3$ Función afín: $I(x) = x$ (identidad) ; $p(x) = \frac{-2x+1}{3} = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$ Función cuadrática: $p(x) = -2x^2 + 3x$; $p(x) = x^2 - 6$ Función polinómica general: $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
Racionales	$\Re - \{\text{polos}\}$ Polos = ceros del denominador	$f(x) = \frac{-3x}{2x+1} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow Sol = \left\{\frac{-1}{2}\right\} \Rightarrow Domf = \Re - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ $g(x) = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow Sol = \emptyset \Rightarrow Domg = \Re$ $h(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-x-6} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow Sol = \{-2; 3\} \Rightarrow Domg = \Re - \{-2; 3\}$
Irracionales – Índice par	$\{x \in \Re;\ \text{radicando} \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{-3x-6} \Rightarrow -3x - 6 \geq 0 \Rightarrow Sol =]-\infty, 2] \Rightarrow Domf =]-\infty, 2]$ $g(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} \geq 0 \Rightarrow Sol = [-2,1] \cup (2, \infty[\Rightarrow Domg = [-2,1] \cup (2, \infty[$ $h(x) = \sqrt[6]{x^4+1} \Rightarrow x^4 + 1 \geq 0 \Rightarrow Sol = \Re \Rightarrow Domh = \Re$
Irracionales – Índice impar	$\Re - \{\text{puntos problemáticos del radicando}\}$	$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-4}} \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow Sol = \{-2, 2\} \Rightarrow Domf = \Re - \{-2,2\}$ $g(x) = \sqrt[7]{x^4+1} \Rightarrow Domg = \Re$
Exponenciales	$\Re - \{\text{puntos problemáticos del exponente}\}$	$f(x) = e^{-2x+3} \Rightarrow Domf = \Re$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Sol = \{0\} \Rightarrow Domg = \Re - \{0\}$ $h(x) = 7\text{^}\sqrt{(5x-2)} \Rightarrow 5x - 2 \geq 0 \Rightarrow Sol = [2/5, +\infty[\Rightarrow Domh =]\ 2/5, +\infty[$
Logarítmicas	$\{x \in \Re;\ \text{argumento} > 0\}$	$f(x) = L(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow Sol = \Re - \{1\} \Rightarrow Domf = \Re - \{1\}$ $g(x) = \log\left(\frac{x}{x^2-3x}\right) \Rightarrow \frac{x}{x^2-3x} > 0 \Rightarrow Sol =]3, \infty[\Rightarrow Domg =]3, \infty[$ $h(x) = log_2(5^x) \Rightarrow 5^x > 0 \Rightarrow Sol = \Re \Rightarrow Domh = \Re$ $j(x) = log_{0.5}(\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow Sol = (0, \infty[\\ \sqrt{x} > 0 \Rightarrow Sol =]0, \infty[\end{cases} \Rightarrow Sol =]0, \infty[\Rightarrow Domj =]0, \infty[$
Trigonométricas – Seno	$\Re - \{\text{puntos problemáticos del argumento}\}$	$f(x) = \text{sen}x \Rightarrow Dom\ f = \Re$ $g(x) = \text{sen}\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow Sol = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow Dom\ g = \Re_0^+$ $h(x) = \text{sen}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right) \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow Sol = \{-2; 2\}$ $\Rightarrow Dom\ h = \Re - \{-2; 2\}$
Trigonométricas – Coseno	$\Re - \{\text{puntos problemáticos del argumento}\}$	$f(x) = \cos x \Rightarrow Dom\ f = \Re$ $g(x) = \cos\sqrt[4]{x+1} \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow Sol = [-1, \infty[\Rightarrow Dom\ g = [-1, \infty[$ $h(x) = \cos\left(\sqrt[3]{\frac{-3x}{x^2+1}}\right) \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow Sol = \emptyset$ $\Rightarrow Dom\ h = \Re$
Trigonométricas – Tangente	$\Re - \{\text{ceros del denominador}\}$	$f(x) = \text{tg}\ x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \Rightarrow Dom\ f = \Re - \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ $g(x) = \text{tg}\ \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \cos\sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \\ x \geq 0 \Rightarrow Sol = [0, \infty[\end{cases} \Rightarrow Dom\ g = 0, \infty[- \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Definidas a trozos	$\Re - \left\{\begin{matrix}\text{valores que no toma la variable}\\ \text{y puntos problemáticos de cada}\\ \text{fórmula incluidos en su rango}\end{matrix}\right\}$	$f(x)=\begin{cases}x^2-x & x\le 0\\ Lx & x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Valores variable} = \Re\\ \text{Puntos problemáticos} = No \text{ hay}\end{cases} \Rightarrow Domf = \Re$ $g(x)=\begin{cases}x+1 & x<-1\\ \frac{1}{x} & x>-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Valores variable} = \Re - \{-1\}\\ \text{Puntos problemáticos} = \{0\} \text{ ya que } \frac{1}{0} = ???\ y\ 0>-1\end{cases}$ $\Rightarrow Domg = \Re - \{-1, 0\}$

Como se puede ver en todos los ejemplos anteriores, la clave para calcular el dominio de una función es localizar todos aquellos puntos que NO tienen imagen, que son más fáciles de identificar ya que son los que provocan algún tipo de problema a la hora del cálculo de la imagen, es decir, aparece alguna operación que no se puede realizar en el conjunto de los números reales. Y las únicas operaciones que no se pueden hacer en $\Re$ son:

a) La división por cero.

b) La raíz de índice par y radicando negativo.

c) El logaritmo de un número negativo o de cero.

Por tanto, cuando nos encontremos con alguna de esas operaciones (DIVISIÓN, RAÍZ DE ÍNDICE PAR o LOGARITMO), tendremos que estudiar detenidamente si hay algún(os) valor(es) que provoquen problemas, y esto lo podremos hacer, según la situación, resolviendo una ecuación o una inecuación. En caso contrario, tendremos asegurado que el dominio de la función es todo el conjunto de los números reales ($\Re$)

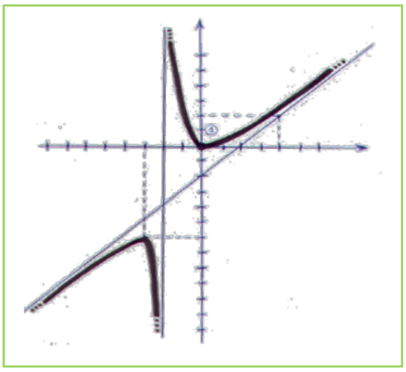
Gráficamente, lo podemos intuir viendo si la recta vertical (paralela al eje de ordenadas OY) que pasa por un punto del eje OX es tal que:

-corta a la gráfica: dicho valor de la variable independiente pertenece al dominio porque tiene imagen (que será el valor de la ordenada que nos proporciona el punto de corte de recta y gráfica)

-NO corta a la gráfica: dicho valor no estará en el dominio.

Ejemplo

$$Dom\ f = \Re - \{-2\}$$



Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

28. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x^2-3}$		*b)* $j(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$		*d)* $k(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$		*f)* $l(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$		*h)* $m(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$	

29. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \;;\; n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$		*b)* $q(x)$	
c) $r(x)$		*d)* $s(x)$	
e) $f(x)$		*f)* $g(x)$	
g) $h(x)$		*h)* $j(x)$	
i) $k(x)$		*j)* $l(x)$	
k) $m(x)$		*l)* $n(x)$	
m) $a(x)$		*n)* $b(x)$	
o) $c(x)$		*p)* $d(x)$	

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Recorrido o imagen

El ***recorrido*** de una función, *Im(f)*, es el conjunto de valores que son imagen de algún original, es decir, el conjunto de valores que toma la variable dependiente $y = f(x)$.

En general no resulta fácil calcular la imagen de una función. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

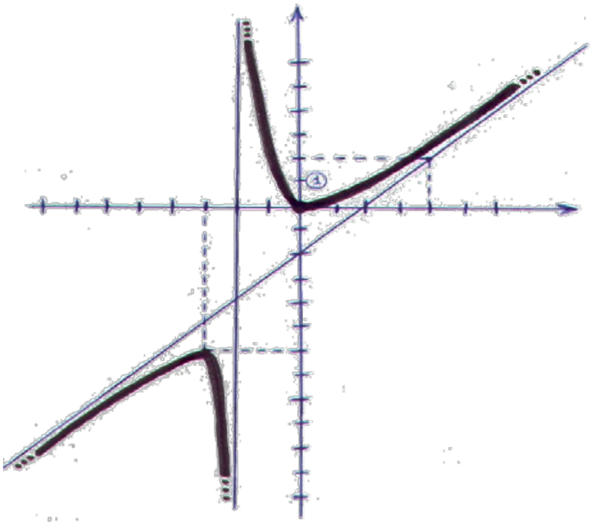
- A veces se puede deducir de alguna propiedad de la función:
  a. Función afín: $f(x) = ax + b \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = \Re$
  b. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = \Re_0^+$ (al elevar un número al cuadrado siempre sale positivo o **0**)
  c. Función exponencial: $f(x) = a^x \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = \Re^+$
- Función logaritmo: $f(x) = log_a x \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = \Re$a función tiene inversa, la imagen será el dominio de la inversa:

$$f(x) = \frac{7x+1}{3x-4} \Rightarrow y = \frac{7x+1}{3x-4} \Rightarrow x = \frac{7y+1}{3y-4} \Rightarrow 3xy - 4x = 7y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3xy - 7y = 4x + 1 \Rightarrow y(3x-7) = 4x + 1 \Rightarrow y = \frac{4x+1}{3x-7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{3x-7}$$

$$\text{Dom} f = \Re - \left\{\frac{4}{3}\right\} \quad e \quad \text{Im}(f) = \text{Dom} f^{-1} = \Re - \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

- Gráficamente, lo podemos intuir trazando rectas horizontales (paralelas al eje de abscisas) y viendo si cortan a la gráfica de la función. Un punto del eje OY tal que la recta horizontal que pasa por él no corta a la gráfica, no estará en la imagen:



$$\Rightarrow \quad \text{Im } f = \left]-\infty, -6\right] \cup \left[0, \infty\right[$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Simetrías

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

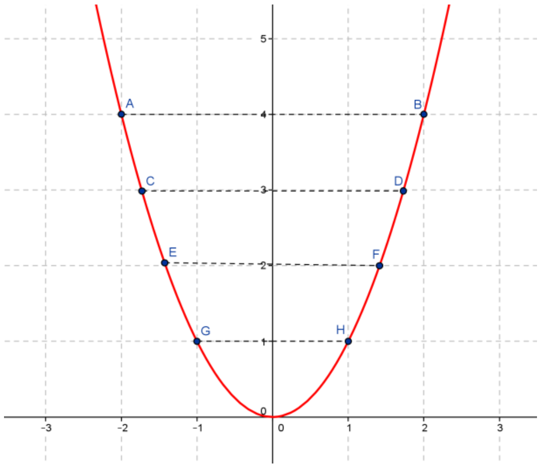
$$f(-x) = f(x)\ \forall x \in Dom\ f$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo

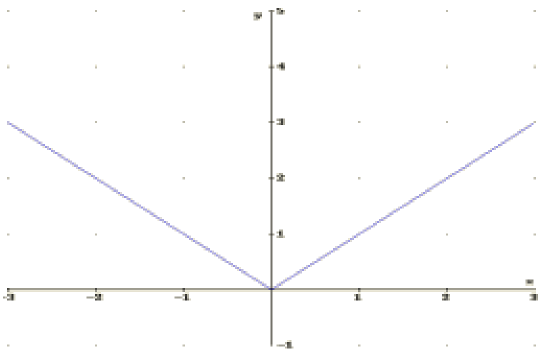
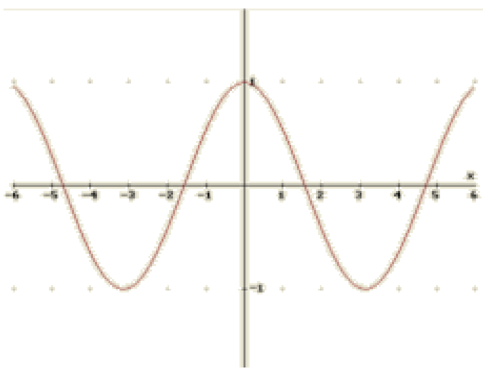
- *La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Actividades resueltas

- *Comprueba que las funciones valor absoluto y coseno son pares.*

FUNCIÓN	DEMOSTRACIÓN	GRÁFICA
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f(-x) = \lvert -x \rvert = \lvert x \rvert = f(x)$	
$f(x) = \cos x$	$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$	

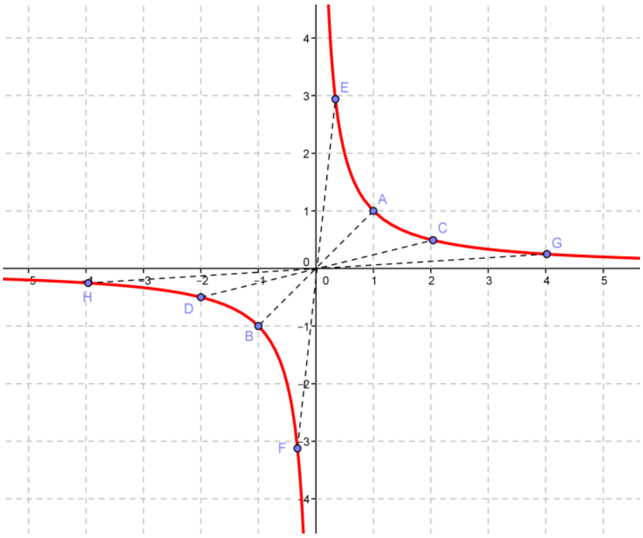
Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom\ f$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo

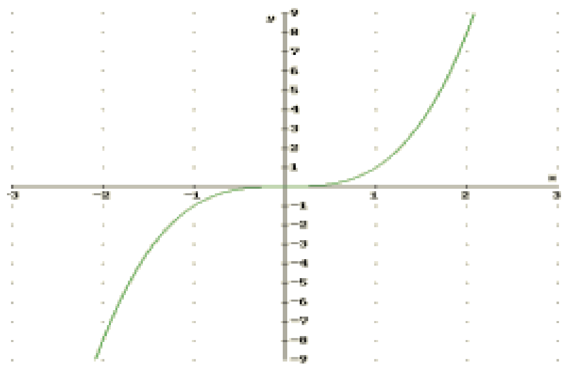
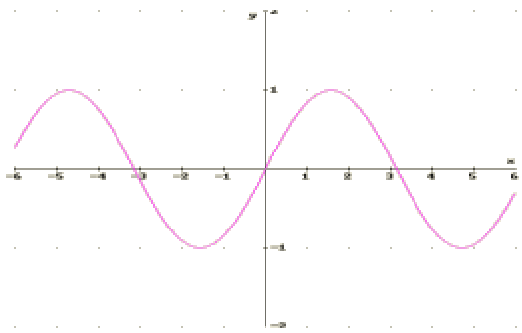


- *La **función de proporcionalidad inversa*** $f(x) = \frac{1}{x}$ *es impar porque:*

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

Actividades resueltas

- *Comprueba que las funciones potencia de exponente 3 y seno son funciones impares.*

FUNCIÓN	DEMOSTRACIÓN	GRÁFICA
$f(x) = x^3$ En general, cualquier polinomio con sólo grados impares	$f(-x) = (-x)^3 =$ $= -x^3 = -f(x)$	
$f(x) = \text{sen}\, x$	$f(-x) = \text{sen}(-x) =$ $= -\text{sen}\, x = -f(x)$	

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo* (τ).

Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente forma:

$$\exists \tau \in \Re;\ f(x+\tau) = f(x)\quad \forall x \in Dom\ f$$

Gráficamente se busca un trozo del dibujo que, si lo repetimos en ambos sentidos, nos proporcione la gráfica completa:

Ejemplos:

- *Los más típicos son las funciones trigonométricas:*

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \text{sen}\left(x+2\pi\right)=\text{sen}\,x \\ \cos\left(x+2\pi\right)=\cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{periódicas de periodo } 2\pi \\ \text{tg}\left(x+\pi\right)=\text{tg}\,x \quad \Rightarrow \quad \text{periódica de periodo } \pi \end{cases}$$

- *La gráfica de un electrocardiograma:*

Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

Actividades resueltas

- ¿Qué significaría, en la gráfica anterior, que los intervalos de repetición no fueran iguales?
  Si no tenemos un periodo fijo, querría decir que el corazón no está funcionando de forma rítmica y, por tanto, diríamos que se ha producido una "*arritmia*".

- ¿Cómo influiría en la gráfica anterior el que el periodo sea más o menos grande? ¿Qué significado tendría?
  Si el periodo es más grande, es decir, los intervalos de repetición se encuentran más distanciados, tendríamos un ritmo de latido más lento (menos pulsaciones por minuto), lo que se conoce como "*bradicardia*".

  Si el periodo es menor, pasaría justo todo lo contrario, esto es, el corazón estaría latiendo más rápido de lo normal (más pulsaciones por minuto) y tendríamos una "*taquicardia*".

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Puntos de corte con los ejes

El ***punto de corte de f con el eje de ordenadas*** (OY) se obtiene dando a la variable independiente el valor 0, siempre y cuando dicho valor esté en el dominio: $(0, f(0))$, si $\exists\ f(0) \in \Re$ o $0 \in Dom\, f$. En caso contrario no habrá. Recordemos que, por la propia definición de función, si existe $f(0)$ es único).

Los ***CEROS*** o ***puntos de corte de f con el eje de abscisas*** (OX) son los que se obtienen dando a la variable dependiente el valor 0: $\{(x, 0);\ x \in Dom\, f \text{ y } f(x) = 0\}$.

Actividad resuelta

Tipo	*PUNTOS CORTE EJES*		Ejemplos
Polinomios	OY	$(0, f(0))$	$p(x)=2x^2-5x \Rightarrow p(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ $q(x)=-3x+1 \Rightarrow q(0)=1 \Rightarrow (0,1)$ $t(x)=2x^4-4x^3+4x^2-4x+2 \Rightarrow t(0)=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	Soluciones de la ecuación	$p(x)=2x^2-5x \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow Sol=\left\{0;\frac{5}{2}\right\} \Rightarrow (0,0);\left(\frac{5}{2},0\right)$ $q(x)=x^2+1 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow Sol=\varnothing \Rightarrow$ No hay $t(x)=2x^4-4x^3+5x^2-6x+3 \Rightarrow Sol=\{1;1\} \Rightarrow (1,0)$
Racionales	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\ f$	$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{0}=??? \Rightarrow$ *No hay* $g(x)=\frac{3x^2-27x}{-2x+2} \Rightarrow g(0)=\frac{0}{2}=0 \Rightarrow (0,0)$ $h(x)=\frac{4x-5}{x^2-6} \Rightarrow h(0)=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6} \Rightarrow \left(0,\frac{5}{6}\right)$
	OX	Numerador = ***0***	$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow 1=0$ *falsedad* $\Rightarrow$ *No hay* $g(x)=\frac{3x^2-27x}{-2x+2} \Rightarrow 3x^2-27x=0 \Rightarrow Sol=\{0,9\} \Rightarrow (0,0);(9,0)$ $h(x)=\frac{4x-5}{x^2-6} \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow Sol=\left\{\frac{5}{4}\right\} \Rightarrow \left(\frac{5}{4},0\right)$
Irracionales	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\ f$	$f(x)=\sqrt{-2x-3} \Rightarrow f(0)=\sqrt{-3} \notin \Re \Rightarrow$ *No hay* $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+8}} \Rightarrow g(0)=\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}=\frac{-1}{2} \Rightarrow \left(0,\frac{-1}{2}\right)$
	OX	Radicando = ***0***	$f(x)=\sqrt{-2x-3} \Rightarrow -2x-3=0 \Rightarrow Sol=\left\{\frac{-3}{2}\right\} \Rightarrow \left(\frac{-3}{2},0\right)$ $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+8}} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow Sol=\{-1,1\} \Rightarrow (-1,0);(1,0)$
Exponenciales	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\ f$	$f(x)=e^{\frac{2x-1}{3x}} \Rightarrow f(0)=e^{\frac{-1}{0}}=??? \Rightarrow$ *No hay* $g(x)=2^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow g(0)=2^1=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	NUNCA	$f(x)=e^{\frac{2x-1}{3x}} \Rightarrow e^{\frac{2x-1}{3x}}=0 \Rightarrow$ *Nunca* $g(x)=2^{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow 2^{\sqrt{2x+1}}=0 \Rightarrow$ *Nunca*
Logarítmicas	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in Dom\ f$	$f(x)=\log(3x-2) \Rightarrow f(0)=\log(-2)=??? \Rightarrow$ *No hay* $g(x)=\log_3\left(\frac{2x^2-27}{-3}\right) \Rightarrow g(0)=\log_3 9=2 \Rightarrow (0,2)$
	OX	Argumento = ***1***	$f(x)=\log(3x-2) \Rightarrow 3x-2=1 \Rightarrow Sol=\{1\} \Rightarrow (1,0)$ $g(x)=\log_3\left(\frac{2x^2-27}{-3}\right) \Rightarrow \frac{2x^2-27}{-3}=1 \Rightarrow Sol=\left\{-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right\} \Rightarrow \left(-2\sqrt{3},0\right);\left(2\sqrt{3},0\right)$

	PUNTOS CORTE EJES			Ejemplos
Trigonométricas	Seno	OY	$(0, f(0))$ *si* $0 \in Dom\ f$	$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow (0,0)$ $g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
		OX	$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi, \forall k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \left\{\frac{(k\pi, 0)}{k} \in \mathbb{Z}\right\} = \{(0,0)\ ;\ (\pi, 0)\ ;\ (-2\pi, 0)\ ;\ \ldots\}$ $g(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left\{\frac{\left(\frac{4k-1}{4}\pi, 0\right)}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
	Coseno	OY	$(0, f(0))$ *si* $0 \in Dom\ f$	$f(x) = \cos x \Rightarrow (0,1)$ $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
		OX	$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \cos x \Rightarrow \left\{\frac{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$ $= \left\{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\ ;\ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)\ ;\ \left(\frac{-5\pi}{2}, 0\right)\ ;\ \ldots\right\}$ $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left\{\frac{\left(\frac{4k+1}{4}\pi, 0\right)}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
	Tangente	OY	$(0, f(0))$ *si* $0 \in Dom\ f$	$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow (0,0)$ $g(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (0,1)$
		OX	$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$	$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow \left\{\frac{(k\pi, 0)}{k} \in \mathbb{Z}\right\} = \{(0,0)\ ;\ (\pi, 0)\ ;\ (-2\pi, 0)\ ;\ \ldots\}$ $g(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left\{\frac{\left(\frac{4k-1}{4}\pi, 0\right)}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
Definidas a trozos	OY		$(0, f(0))$ *si* $0 \in Dom\ f$ Sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al ***0***.	$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0,0)$ $g(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ \frac{1}{x} & x > -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0} = ??? \Rightarrow$ *No hay*
	OX		-Cada fórmula igualada a ***0*** -Sólo valen las soluciones incluidas en el rango correspondiente	$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \Rightarrow Sol = \{0, 1\} \text{ y } 0 \le 0, 1 \not\le 0 \Rightarrow (0,0) \\ \ln x = 0 \Rightarrow Sol = \{1\} \text{ y } 1 > 0 \Rightarrow (1,0) \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ \frac{1}{x} & x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow Sol = \{-1\} \text{ y } -1 \not< -1 \Rightarrow \text{No hay} \\ \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow Sol = \varnothing \Rightarrow \text{No hay} \end{cases}$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

30. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x} \;;\; f(x)=\frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4} \;;\; k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}} \;;\; a(x)=L(x+2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abscisas		Ordenadas	Abscisas
a) $p(x)$			*b)* $q(x)$		
c) $r(x)$			*d)* $s(x)$		
e) $f(x)$			*f)* $g(x)$		
g) $h(x)$			*h)* $j(x)$		
i) $k(x)$			*j)* $l(x)$		
k) $m(x)$			*l)* $n(x)$		
m) $a(x)$			*n)* $b(x)$		
o) $c(x)$			*p)* $d(x)$		

31. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$$f(x)=2^{x-24}\cdot 4^{3x+1}\cdot 8^{-x-1}-1 \qquad h(x)=x^3+4x \qquad k(x)=e^{-2x}-22$$

$$g(x)=-7x^4-x^2+1 \qquad j(x)=\sqrt{15x-3\sqrt{-x-9}} \qquad l(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.6. Signo de una función

Los intervalos de signo de una función proporcionan una información muy útil para la representación gráfica. Para estudiarlos, hay que tener en cuenta:

1º Los puntos que no están en el dominio, ya que no tienen imagen y, por tanto, hay que estudiar el comportamiento de la función en un entorno de dichos puntos.

2º Los ceros, puesto que cuando la función vale cero puede ser que haya un cambio de signo en ese punto.

3º En las funciones definidas a trozos, los puntos donde cambia la definición, ya que las fórmulas son diferentes antes y después de esos puntos, lo que puede provocar un cambio de signo.

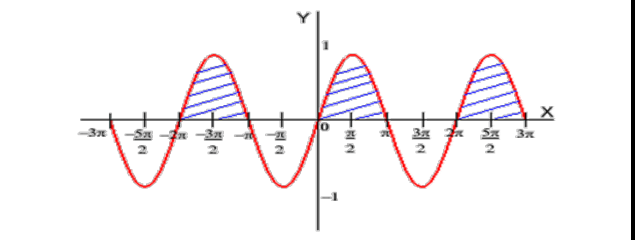
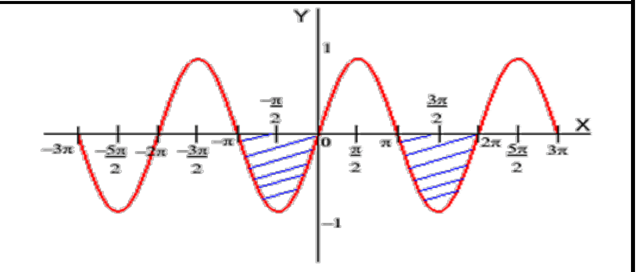
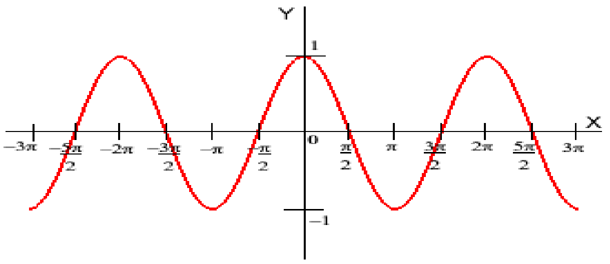
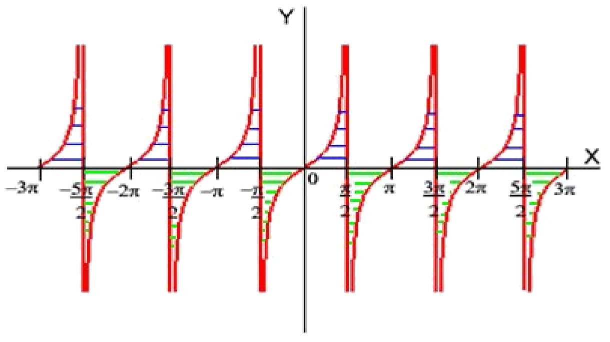
TIPO	***SIGNO***	Ejemplos

Polinomios	- Ceros
	- Recta
	- Estudio del signo:
	  * dar valores
	o
	  * los signos se alternan si hay tantas raíces como grado y son distintas.
		$p(x) = -3 \Rightarrow No\ hay\ ceros \Rightarrow \frac{-}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & \Re \end{cases}$
		$q(x) = 0 \Rightarrow Hay\ infinitos\ ceros \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & Nunca \end{cases}$
		$r(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow No\ hay\ ceros \Rightarrow \frac{+}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re \\ Negativo & Nunca \end{cases}$
		$s(x) = -4x + 8 \Rightarrow \frac{+\ \ -}{2} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & (-\infty, 2] \\ Negativo & (2, \infty) \end{cases}$
		$t(x) = -2x^2 + 3x \Rightarrow \frac{-\ \ +\ \ -}{0\ \frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ Negativo & (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \end{cases}$
		$f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \frac{+\ \ +}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re - \{-1\} \\ Negativo & Nunca \end{cases}$

Racionales	-Ceros y polos -Recta -Estudio del signo dando valores	$f(x) = \frac{-3x}{2x^2 + x} \Rightarrow \frac{+\ \ -\ \ -}{-\frac{1}{2}\ \ 0} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ Negativo & \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) - \{0\} \end{cases}$ $g(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \Rightarrow No\ hay\ ceros\ ni\ polos \Rightarrow \frac{+}{+} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & \Re \\ Negativo & Nunca \end{cases}$
Irracionales – Índice par	POSITIVO <u>siempre</u> en todo su dominio menos en los ceros.	$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x - 1}{x^2 - 4}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: &]-2, 1[\cup]2, \infty[\\ Negativo: & Nunca \end{cases}$
Irracionales – Índice impar	Signo del radicando	$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2+1}} \Rightarrow \frac{-\ +\ -\ +}{-2\ 1\ 2} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & (-2, 1) \cup (2, \infty) \\ Negativo & (-\infty, -2) \cup (1, 2)\ ) \end{cases}$ $g(x) = \sqrt[7]{-x^4 - 1} \Rightarrow \frac{-}{1} \Rightarrow \begin{cases} Positivo & Nunca \\ Negativo & \Re \end{cases}$
Exponenciales	POSITIVO <u>siempre</u> en todo su dominio.	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \Re - \{0\} \\ Negativo: & Nunca \end{cases}$ $g(x) = 7^{\sqrt{5x-2}} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \left(\frac{2}{5}, \infty\right) \\ Negativo: & Nunca \end{cases}$

Logarítmicas	0 < a < 1:
	  argumento<1 → +
	  argumento>1 → -
	a > 1:
	  argumento<1 → -
	  argumento>1 → +
		$f(x) = \log_{0.5}\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 1 \Rightarrow Sol =]0, 1[\\ \sqrt{x} > 1 \Rightarrow Sol =]1, \infty[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: &]0, 1[\\ Negativo: &]1, \infty[\end{cases}$
		$g(x) = L\left(x^2 - 2x + 1\right) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 1 \Rightarrow Sol =]-\infty, 0[\cup]2, \infty[\\ x^2 - 2x + 1 < 1 \Rightarrow Sol =]0, 2[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: &]-\infty, 0[\cup]2, \infty[\\ Negativo: &]0, 2[\end{cases}$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

TIPO		**SIGNO**		Ejemplos
Trigonométricas	Seno	+	$\left]2k\pi, (2k+1)\pi\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
		-	$\left](2k+1)\pi, (2k+2)\pi\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
	Coseno	+	$\left]\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
		-	$\left]\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
	Tangente	+	$\left]k\pi, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
		-	$\left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, k\pi\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$	
Definidas a trozos	- Ceros, puntos problemáticos y puntos donde cambia la definición - Recta - Estudio del signo, utilizando la fórmula correspondiente.			$f(x)=\begin{cases} L\,x & x\le 2 \\ x^2-3x & x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cccc} \text{Nada} & - & + & - & + \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \left]1,2\right]\cup\left]3,\infty\right[\\ Negativo: & \left]0,1\right[\cup\left]2,3\right[\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-1 \\ x-1 & x\ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccc} - & - & + \\ \hline -1 & 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} Positivo: & \left]1,\infty\right[\\ Negativo: & \left]-\infty,1\right[\end{cases}$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

32. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

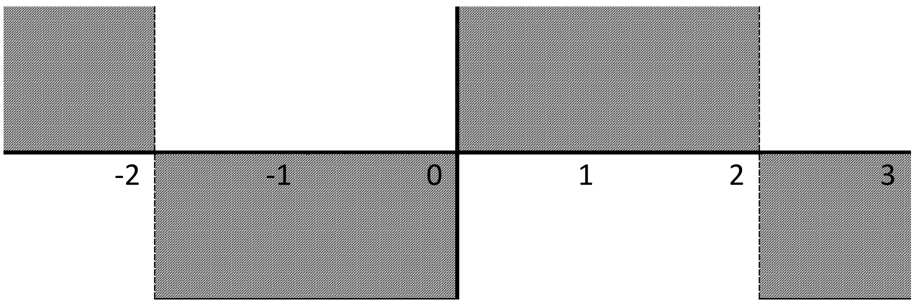
$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$			*b)* $q(x)$		
c) $r(x)$			*d)* $s(x)$		
e) $f(x)$			*f)* $g(x)$		
g) $h(x)$			*h)* $j(x)$		
i) $k(x)$			*j)* $l(x)$		
k) $m(x)$			*l)* $n(x)$		
m) $a(x)$			*n)* $b(x)$		
o) $c(x)$			*p)* $d(x)$		

33. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$$

la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

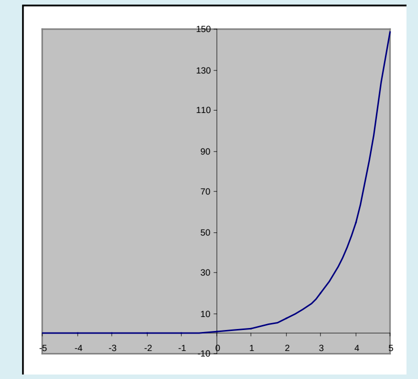
CURIOSIDADES. REVISTA

El crecimiento exponencial

Existen muchos fenómenos en la naturaleza que siguen un crecimiento exponencial.

En Biología se presenta cuando la tasa de variación de una población es proporcional a la población en cada instante, esto ocurre cuando no hay factores que limitan el crecimiento como ocurre con ciertas poblaciones de bacterias.

También aparece en cierto tipo de reacciones químicas cuando la velocidad de descomposición de una sustancia es proporcional a su masa, la más importante de estas reacciones es la desintegración radiactiva que se utiliza para asignar fecha a acontecimientos que ocurrieron hace mucho tiempo y ha sido un instrumento indispensable en Geología y Arqueología.



Fractales. La Geometría del Caos. El matemático Benoit Mandelbrot es el creador de la geometría fractal, gracias a la cual son posibles las mediciones de la longitud de muchas porciones del mundo natural. Casi todos los objetos que nos encontramos en plena naturaleza son profundamente irregulares, muy alejados de la regularidad de la geometría clásica. Sin embargo, tienen dentro de su irregularidad un orden asombroso.

[Más por menos: Fractales. La Geometría del Caos | RTVE Play]

La catenaria

La curva $y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$ se denomina catenaria, tiene la forma que toma un hilo flexible y homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

La constante k es el cociente entre el peso por unidad de longitud y la componente horizontal de la tensión que es constante.

La forma catenaria minimiza las tensiones, por esa razón, una curva catenaria invertida se usa en arquitectura, ya que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco, ha sido utilizada, sobre todo, por *Gaudí*.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Los logaritmos de Neper

Ábaco neperiano

Ábaco neperiano

En el **Museo Arqueológico de Madrid** hay dos ábacos confeccionados en el siglo XVII siguiendo las indicaciones del libro de **John Napier** "*Rabdología*" publicado en 1617. Es único en el mundo. No queda ningún otro ejemplar completo como éste. Puedes ver un mueble de madera de palosanto, con incrustaciones de marfil, con dos puertas, en una aparece el triángulo de Tartaglia, y en la otra, las tablas de las potencias. En él se guardan dos ábacos, el de los "***huesos de Napier***" y, en los cajones, el **ábaco *promptuario***.

Puerta con las potencias

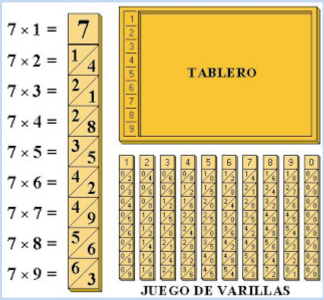
John Napier

En tiempo de Maricastaña (bueno, no tanto, en el Renacimiento, en 1550) nació en Escocia, John Napier, hijo de una familia noble, rica y calvinista. Por eso pudo dedicarse a lo que le gustaba, las Ciencias, llegando a ser conocido por sus vecinos como "*la maravilla de Merchiston*" por sus muchos inventos en diferentes campos: en cultivos, fertilizantes, armas para combatir a los españoles… (¡Curiosa paradoja! El único prontuario neperiano que se ha localizado en el mundo es propiedad de la católica monarquía española a la que Neper quería combatir). Uno de estos inventos fueron los **logaritmos**. Ya sabes, los logaritmos neperianos se llaman así en su honor.

John Napier

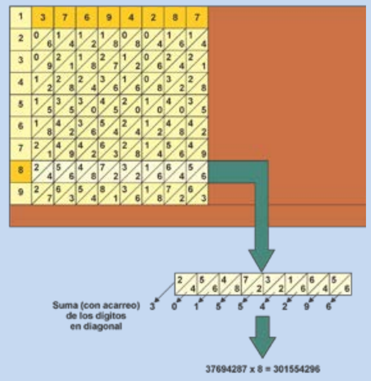
Para saber más sobre *Napier* y los logaritmos visita:
http://cifrasyteclas.com/2013/11/25/yo-tambien-vivi-enganado-el-logaritmo-neperiano-no-usaba-la-base-e/
Quizás, luego ya no llames a los logaritmos neperianos así, sino logaritmos naturales.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Los huesos de Napier

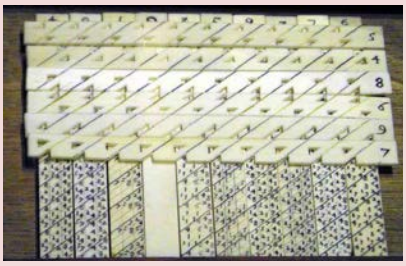
Consta de 60 varillas de marfil con forma de prisma cuadrangular que llevan grabadas las tablas de multiplicar del 1 al 9. Permiten multiplicar números de varias cifras por un número de una cifra, sin tener que saberse las tablas de multiplicar. Sólo hay que saber sumar. Se basa en la forma de multiplicar introducida por los árabes del *método de la celosía*. Ejemplares parecidos sí se conservan varios pues debieron ser muy usados.



¿Cómo se usan?

Ábaco promptuario

En los cajones del mueble de la figura arriba a la izquierda está el segundo ábaco de los que se guardan en el Museo Arqueológico, que permite multiplicar números de hasta 20 cifras por números de hasta 10 cifras, que pueden incluso ampliarse. Hay regletas de dos tipos: 100 verticales con números y similares a los huesos de Napier, con las tablas de multiplicar escritas por el método de la celosía, y 200 horizontales que constan de un número (multiplicando) y perforaciones triangulares, que se superponen a las anteriores. Con sólo sumar los números que permiten ver las tablillas perforadas se pueden multiplicar números grandes (sin saber la tabla de multiplicar). Este ábaco es único en el mundo.



Regletas del ábaco promptuario

Tablas de logaritmos

Utilizando un instrumento similar a este ábaco, Napier con la ayuda de Henry Briggs elaboró la primera tabla de logaritmos, poderosa herramienta de cálculo durante siglos.

Para saber más visita:
http://matemirada.wordpress.com/miscelanea-matematica/

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

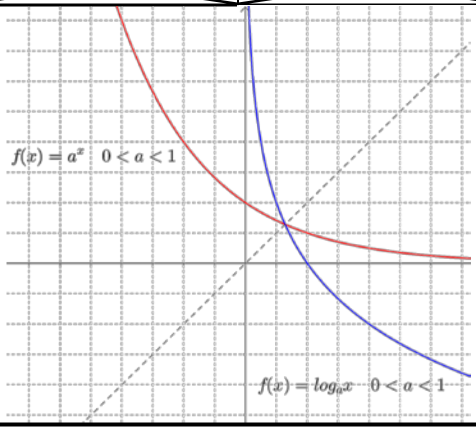
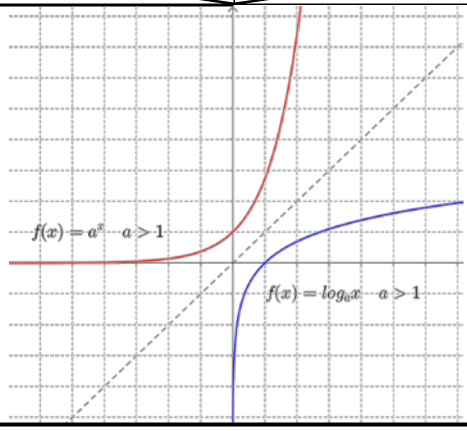
TIPOS DE FUNCIONES		FÓRMULA
ALGEBRAICAS	*Polinómicas*	Polinomio
	Racionales	Cociente de polinomios
	Irracionales	Raíz de una racional
TRASCENDENTES	*Exponenciales*	Exponencial (variable en el exponente)
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)
	Trigonométricas	Trigonométrica (variable como argumento de una razón trigonométrica)
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable

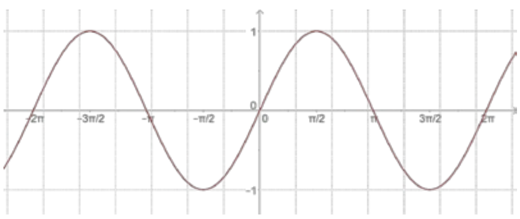
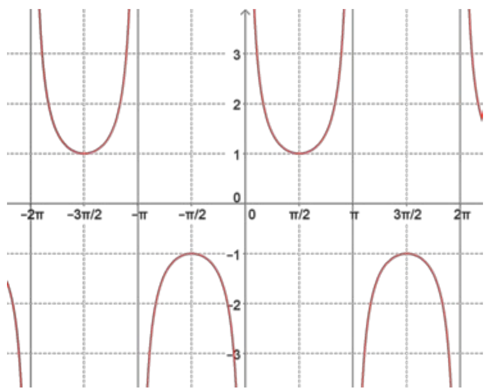
OPERACIÓN	EJEMPLO: $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=\frac{-3x}{x+1}$			
	Función suma $f+g$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $(f+g)(x)=\frac{-3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	Función resta $f-g$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $(f-g)(x)=\frac{3x^2+2x+2}{x\cdot(x+1)}$	Función producto $f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $(f\cdot g)(x)=\frac{-6}{x+1}$	Función cociente f/g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x+2}{-3x^2}$
Función compuesta	$\underbrace{f\circ g}_{g \text{ compuesto con } f}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)\underset{\text{ponemos } g(x)=\frac{-3x}{x+1}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } f,}{=}}\frac{2}{\left(\frac{-3x}{x+1}\right)}=\frac{2x+2}{-3x}$ $\underbrace{g\circ f}_{f \text{ compuesto con } g}$ (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha) $\Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2}{x}\right)\underset{\text{ponemos } f(x)=\frac{2}{x}}{\overset{\text{donde ponga } x \text{ en } g,}{=}}\frac{-3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)+1}=\frac{\frac{-6}{\cancel{x}}}{\frac{2+x}{\cancel{x}}}=\frac{-6}{x+2}$			
Función inversa f^{-1}: $\begin{cases} f\circ f^{-1}=I \\ f^{-1}\circ f=I \end{cases}$ Si existe, la inversa es única y su gráfica y la de la función son simétricas respecto a la de la función identidad.	1º Llamamos y a $f(x)$ 2º Despejamos x en función de y 3º Cambiamos los papeles de x e y	$g(x)=y=\frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y\cdot(x+1)=-3x \Rightarrow$ $\Rightarrow yx+y=-3x \Rightarrow yx+3x=-y \Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+3)=-y \Rightarrow x=\frac{-y}{y+3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-x}{x+3}$		

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES			
1) Dominio	Conjunto de valores que tienen imagen.		
2) Puntos de corte con los ejes	Ordenadas (OY)	$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$	Operación numérica
		$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay	Nada
	Abscisas (OX) -CEROS-	$f(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \ldots \Rightarrow (x_1,0);(x_2,0);\ldots$	Ecuación
3) Simetría	Par	$f(-x)=f(x)$	Operación algebraica
	Impar	$f(-x)=-f(x)$	

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

FAMILIAS DE FUNCIONES		Racional	Irracional: Índice par	Irracional: Índice impar	Exponencial	Logarítmica	Definida a trozos
Dominio (D)		$\Re - \{\text{polos}\}$	$\{x \in \Re, \text{radicando} \geq 0\}$	$\Re - \{\text{puntos problemáticos radicando}\}$	$\Re - \{\text{puntos problemáticos exponente}\}$	$\{x \in \Re \ \text{argumento} > 0\}$	-Valores de la variable -Puntos problemáticos de cada fórmula $\Re$ -{valores que no toma la variable y puntos problemáticos incluidos en el rango}
Puntos de corte con los ejes	OY	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$	$(0, f(0))$ si $f(0) \in D$ sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al 0
	OX	Numerador = 0	Radicando = 0	Radicando = 0	No hay	Argumento = 1	-Cada fórmula = 0 -Soluciones que pertenecen a su rango
Signo		- Ceros y polos - Estudio del signo en la recta real	Positivo siempre salvo en los ceros	Signo del radicando	Positivo en todo su dominio	$0 < a < 1$: argumento < 1: + argumento > 1: - $a > 1$: argumento < 1: - argumento > 1: +	- Ceros, polos y puntos donde cambia la definición - Estudio del signo en la recta real
Simetría	PAR	Todos los grados pares o impares	Nunca	Simetría del radicando	Argumento par	Argumento par	Es tan infrecuente la simetría en este tipo de funciones que no merece la pena estudiarla
	IMPAR	Todos los grados del n[dor] pares y del d[dor] impares o viceversa			Nunca	Nunca	

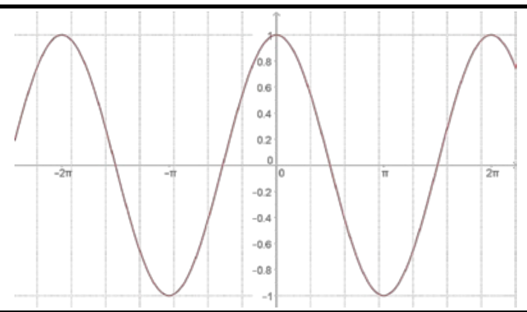
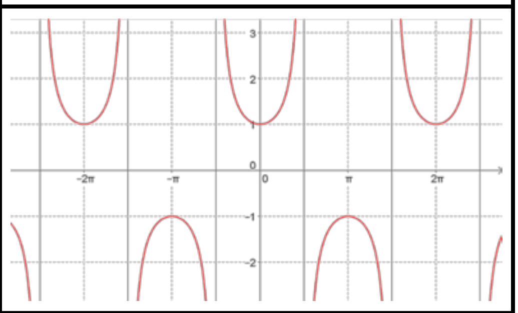
CARACTERÍSTICAS		$0 < a < 1$: a^x	$0 < a < 1$: $\log_a x$	$a > 1$: a^x	$a > 1$: $\log_a x$
Dominio		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re^+ =]0, \infty[$	$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re^+ =]0, \infty[$
Recorrido		$\Re^+ =]0, \infty[$	$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re^+ =]0, \infty[$	$\Re =]-\infty, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(0,1)$		$(0,1)$	
	Abscisas		$(1,0)$		$(1,0)$
Signo	*Positivo*	$\Re =]-\infty, \infty[$	$]0,1[$	$\Re =]-\infty, \infty[$	$]1,\infty[$
	Negativo		$]1,\infty[$		$]0,1[$
Simetría					
DIBUJO					

CARACTERÍSTICAS		sen x	cosec $x = \boldsymbol{1}$ / sen x
Dominio		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re - \left\{\frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
Periodo fundamental		$[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}\pi]$	$[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}\pi]$
Recorrido		$[-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}]$	$\Re - [-1,1] =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$	
	Abscisas	$(k\pi, 0) \ \ k \in \mathbb{Z}$	
Signo	*Positivo*	$]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$	$]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
	Negativo	$](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$	$](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
Simetría		Impar	Impar
DIBUJO			
Dominio		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re - \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$
Periodo fundamental		$[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}\pi]$	$[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}\pi]$
Recorrido		$[-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}]$	$\Re - [-1,1] =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$	
	Abscisas	$\ldots, (-\boldsymbol{2}\pi, \boldsymbol{0}), (-\pi, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}), (\pi, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{2}\pi, \boldsymbol{0}), \ldots$	
Signo	*Positivo*	$\ldots \cup]-\boldsymbol{2}\pi, -\pi[\cup]\boldsymbol{0}, \pi[\cup \ldots$	$\ldots \cup]-\boldsymbol{2}\pi, -\pi[\cup]\boldsymbol{0}, \pi[\cup \ldots$
	Negativo	$\ldots \cup]-\pi, \boldsymbol{0}[\cup]\pi, \boldsymbol{2}\pi[\cup \ldots$	$\ldots \cup]-\pi, \boldsymbol{0}[\cup]\pi, \boldsymbol{2}\pi[\cup \ldots$
Simetría		Impar	Impar

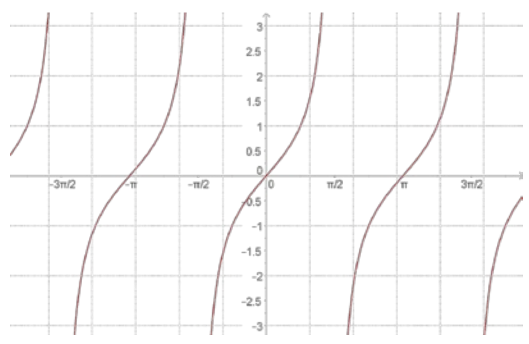
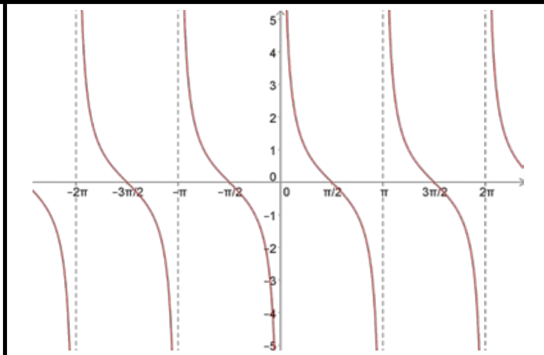
Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CARACTERÍSTICAS		$\cos x$	$\sec x = 1 / \cos x$
Dominio		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re - \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
Periodo fundamental		$[-\pi, \pi]$	$[-\pi, \pi]$
Recorrido		$[-1,1]$	$\Re - [-1,1] =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(0,1)$	$(0,1)$
	Abscisas	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \quad k \in \mathbb{Z}$	
Signo	*Positivo*	$\left]\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\left]\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right[\quad k \in \mathbb{Z}$
	Negativo	$\left]\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\left]\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right[\quad k \in \mathbb{Z}$
Simetría		Par	Par
DIBUJO			
Dominio		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re - \left\{\dots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{\frac{2,3\pi}{2}}, \dots\right\}$
Periodo fundamental		$[-\pi, \pi]$	$[-\pi, \pi]$
Recorrido		$[-1,1]$	$\Re - [-1,1] =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(0,1)$	$(0,1)$
	Abscisas	$\dots, \left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \dots$	
Signo	*Positivo*	$\dots \cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\cup \dots$	$\dots \cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\cup \dots$
	Negativo	$\dots \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \dots$	$\dots \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \dots$
Simetría		Par	Par

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CARACTERÍSTICAS		$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$	$\operatorname{cotg} x = \mathbf{1} / \operatorname{tg} x = \cos x / \operatorname{sen} x$
Dominio		$\Re - \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$	$\Re - \left\{\frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$
Periodo fundamental		$]-\pi/2, \pi/2[$	$]-\pi/2, \pi/2[$
Recorrido		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re =]-\infty, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(0,0)$	
	Abscisas	$(k\pi, 0) \quad k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
Signo	*Positivo*	$\left]k\pi, \frac{(2k+1)}{2}\pi\right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\left]k\pi, \frac{(2k+1)}{2}\pi\right[\quad k \in \mathbb{Z}$
	Negativo	$\left]\frac{(2k-1)}{2}\pi, k\pi\right[\quad k \in \mathbb{Z}$	$\left]\frac{(2k-1)}{2}\pi, k\pi\right[\quad k \in \mathbb{Z}$
Simetría		Impar	Impar
DIBUJO			
Dominio		$\Re - \left\{\ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\frac{\pi}{2,3\pi}}{2}, \ldots\right\}$	$\Re - \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$
Periodo fundamental		$]-\pi/2, \pi/2[$	$]-\pi/2, \pi/2[$
Recorrido		$\Re =]-\infty, \infty[$	$\Re =]-\infty, \infty[$
Puntos de corte con los ejes	*Ordenadas*	$(0,0)$	
	Abscisas	$\ldots,(-\pi,0),(0,0),(\pi,0),\ldots$	$\ldots,\left(\frac{-3\pi}{2},0\right),\left(\frac{-\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\ldots$
Signo	*Positivo*	$\ldots \cup \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \ldots$	$\ldots \cup \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \ldots$
	Negativo	$\ldots \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[\cup \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \ldots$	$\ldots \cup \left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[\cup \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \ldots$
Simetría		Impar	Impar

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función $f: \Re \to \Re$ dada por $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \le -1, \\ x^3 - x & \text{si } x > -1. \end{cases}$

2. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x+3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

a)	$(s+q)(x)$	*b)*	$(r+p)(x)$
c)	$(p-q)(x)$	*d)*	$(p+q+r+s)(x)$
e)	$(q-r-s)(x)$	*f)*	$(p-q+r-s)(x)$
g)	$(g+h)(x)$	*h)*	$(s-g)(x)$
i)	$(n-k)(x)$	*j)*	$(g+d)(x)$
k)	$(b-d)(x)$	*l)*	$(c+s)(x)$
m)	$(s \cdot q \cdot r)(x)$	*n)*	$(r \cdot p)(x)$
o)	$(q : p)(x)$	*p)*	$(s : q)(x)$
q)	$(g \cdot h)(x)$	*r)*	$(s : g)(x)$
s)	$(n \cdot k)(x)$	*t)*	$(g : d)(x)$
u)	$(s \circ q)(x)$	*v)*	$(r \circ p)(x)$
w)	$(q \circ p)(x)$	*x)*	$(g \circ h)(x)$
y)	$(s \circ g)(x)$	*z)*	$(n \circ k)(x)$

3. Considera la función $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \dfrac{2}{x}$, $y = x - 1$.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ $\quad h(x)=2^{-x+1}$ $\quad k(x)=2^x\cdot 30^{x-1}\cdot 12^{-x+1}$ $\quad m(x)=\sqrt[4]{-5+2x}$

$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+7}}$ $\quad j(x)=L\left(x^5-1\right)$ $\quad l(x)=\dfrac{x^2-9}{x^3+7x^2+15x+9}$ $\quad n(x)=\left(4x^2-4x+1\right)^{\frac{-1}{3}}$

a) Calcular las siguientes composiciones:

$f\circ h$; $g\circ h$; $g\circ j$; $k\circ h$; $g\circ h\circ j$; $m\circ j$; $l\circ h$; $m\circ h$; $j\circ h$; $l\circ m$

b) Calcular $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ y verificar que son las inversas de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

c) Calcular todos los dominios.

d) Calcular los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por $h(t)=5+4t-t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.

7. Considera las funciones f, g: $[0, 2\pi]\to\Re$, $f(x)=2\cdot sen(x)$ y $g(x)=sen(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g.

8. Sea la función dada por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a, b y c sabiendo que es impar y que pasa por el punto $(1,-2)$.

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x)=|x(x-2)|$ y $g(x)=x+4$. Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.

10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión $f(t)=-\dfrac{1}{5}t^2+2t+10 \quad 0\le t\le 12$.

a) Represente gráficamente la función.

b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?

11. Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$. Calcula su dominio.

12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y=e^{x+2}$, $y=e^{-x}$ y $x=0$.

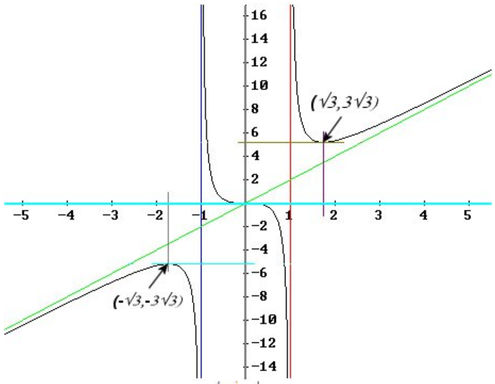
13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x\ge 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.

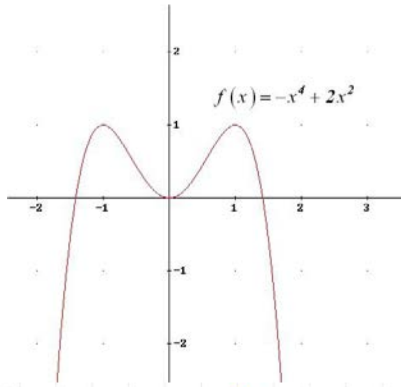
14. Considera la función definida por $g(x)=|ln(x)|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

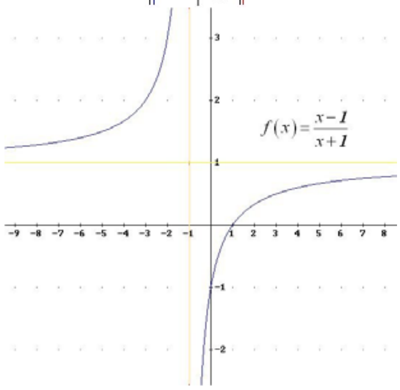
15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}x}{x^2}$ ($\mathrm{L}x$ indica logaritmo neperiano de x); $g(x)=(1-x^3)\cos x$ y $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$.

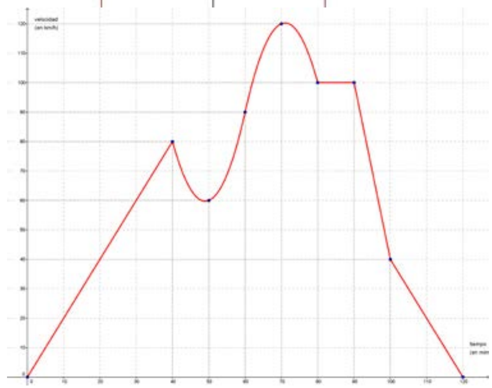
16. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.

17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a) 

b) 

c) 

d) 

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x)$ millones de €, siendo: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 5 \\ \dfrac{5}{2x} & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.

19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t)=-5t^2+40t$.

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

b) Represente gráficamente la función $h(t)$.

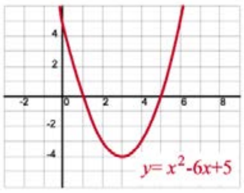
c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

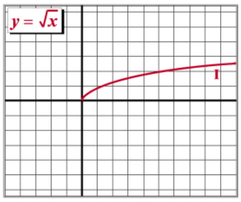
d) ¿En qué instante llega al suelo?

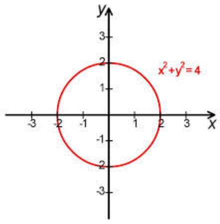
Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

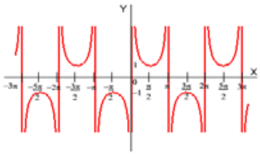
AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) 

b) 

c) 

d) 

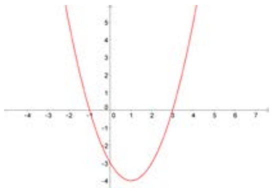
2. La fórmula de la composición $f \circ g$ de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

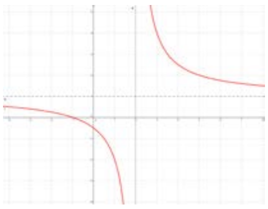
a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

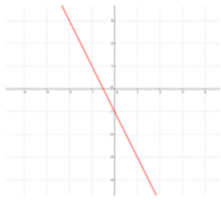
3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

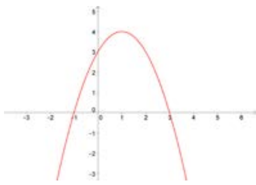
a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

a) 

b) 

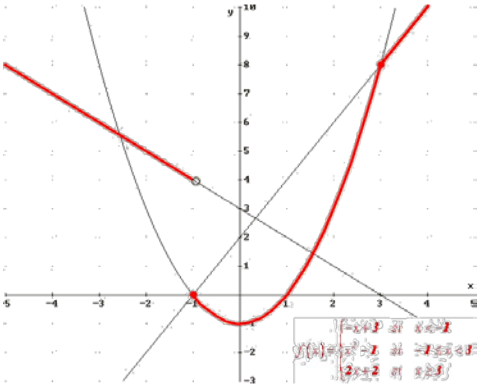
c) 

d) 

5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

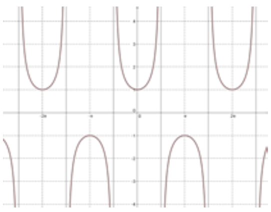
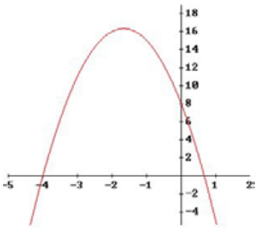
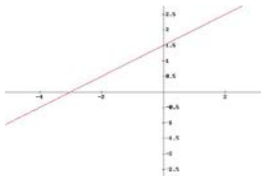
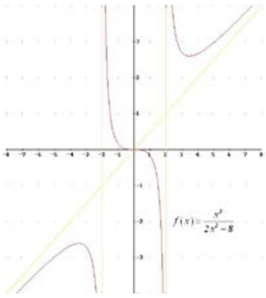
6. El recorrido de la función  es:

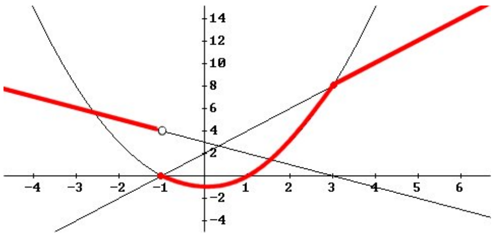
a) $\left[-1,\infty\right[$ b) $\left]-1,\infty\right[$ c) $\left]-\infty,-1\right]$ d) $\Re - \{4\}$

7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f\left(x\right)=\ln\left(x^2-3x+3\right)$ son:

a) No tiene b) $\left(1,0\right);\left(2,0\right)$ c) $\left(-1,0\right);\left(2,0\right)$ d) $\left(0,\ln 3\right)$

8. La única función impar entre las siguientes es:

a)  b)  c)  d) 

9. El intervalo donde la función  es negativa es:

	a)	(–1, 1)	b)	(–∞, –1)	c)	(–∞, 1)	d)	(–∞, 0)

10. La única función NO periódica de las siguientes es:

a) $f\left(x\right)=\text{sen}\left(x\right)$ b) $g\left(x\right)=\text{tg}\left(x\right)$ c) $h\left(x\right)=e^x$ d) $j\left(x\right)=\text{cosec}\left(x\right)$

Autor: José Gallegos Fernández

Revisores: Javier Rodrigo y Luis Carlos Vidal

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF