Soluciones de actividades y ejercicios
1º Bachillerato de Ciencias. Matemáticas I

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Libros Marea Verde de Matemáticas
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS REALES

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta (E) y cuáles la tienen periódica (P):

   a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

Solución: Periódica: a); c); f). Exacta: b); d); e).

2. Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta.

   a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

Solución: a) 2/3 = 0.6666… (P); b) 3/5 = 0.6 (E); c) 7/30 = 0.23333…. (P); d) 6/25 = 0.24 (E); e) 7/8 = 0.875 (E); f) 9/11 = 0.818181… (P).

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

   a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

Solución: a) 1/3 = 0.3333…. b) 1/9 = 0.1111….; c) 7/80 = 0.0875; d) 2/125 = 0.016; e) 49/400 = 0.1225; f) 36/11 = 3.272727...

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:

   a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23

Solución: a) 7.92835 = 992835/100000; b) 291.291835/1000000; c) 0.23 = 23/100.

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

   a) 2.353535….. b) 87.2365656565…. c) 0.9999….. d) 26.5735735735…..

Solución: a) 233/99; b) 863642/9900 = 431821/3300; c) 9/9 = 1; d) 23547/999 = 7849/333.

6. ¿Puedes demostrar que 4.99999… es igual a 5? ¿Calcula cuánto vale 2.5999…? *Ayuda*: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.

Solución: x = 4.9999…. $\Rightarrow$ 10x = 49.9999…. $\Rightarrow$ 10x – x = 9x = 49 – 4 = 45 $\Rightarrow$ x = 45/9 = 5; 2.5999… = 234/90 = 13/5.

7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

Solución: Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Vamos a suponer que $\sqrt[3]{7}$ es un número racional y llegar a una contradicción. Si $\sqrt[3]{7}$ es un número racional puede escribirse con una fracción p/q, que suponemos irreducible, $\sqrt[3]{7}$ = p/q. $\Rightarrow$ 7 = p^3/q^3 $\Rightarrow$ 7 $q^3 = p^3$, luego en la descomposición en factores primos de p^3 hay un 7, y por tanto p es múltiplo de 7 $\Rightarrow$ p = 7a $\Rightarrow$ 7 $q^3 = 7^3a^3$ $\Rightarrow$ $q^3 = 7^2a^3$ $\Rightarrow$ q también es múltiplo de 7, que contradice que la fracción p/q sea irreducible.

8. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

Solución: 47.

9. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar una razón?

Solución: 7 pues esa es la máxima potencia entre 5 y 2.

10. Haz la división 999999:7 y después haz 1:7, ¿es casualidad?

Solución: 999999/7 = 142857; 1/7 = 0.142857142857… No es casualidad

11. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

Solución: 999/37 = 27; 1/37 = 0.027027…

No es casualidad, si 1/b es periódico puro, el periodo es p y p tiene n cifras, se cumple que $\frac{10^n-1}{b}=p$

12. Utiliza la calculadora para realizar las operaciones:

   a) (33.67 + 1.91)3.52 b) (2/3)(3.1 + 9.1) c) $3.5^4(4.009 + 7.9)5.8$

   d) $\sqrt{5.7}+4.6-3\sqrt{7.2}$ e) $9\sqrt{3.1}+\sqrt[3]{2.6}-5\sqrt{5}$ f) 47^{789}

Solución: a) 125.2416 b) 8.13333 c) 244.515588 d) -1.062377 e) 6.040864

f) No se puede hacer con calculadora ni con ordenador. Es un número demasiado grande. Es 10^{1319}*1.9284.

13. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

Solución abierta: –0.2; 0; 0.7.

14. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1.5.

Solución abierta: 1.42; 1.43; 1.44; 1.45 y 1.46.

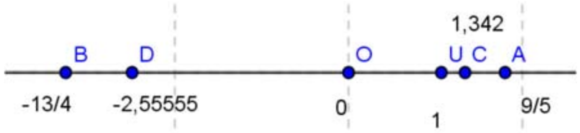
15. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π.

Solución abierta: $\frac{3{,}14+\pi}{2}=\frac{157+50\,\pi}{100}$, $\frac{\frac{157+50\,\pi}{100}+\pi}{2}=\frac{157+150\,\pi}{200}$, $\frac{\frac{157+150\,\pi}{200}+\pi}{2}=\frac{157+350\,\pi}{400}$, $\frac{\frac{157+350\,\pi}{400}+\pi}{2}=\frac{157+750\,\pi}{800}$, $\frac{\frac{157+750\,\pi}{800}+\pi}{2}=\frac{157+1550\,\pi}{1600}$

16. Representa en la recta numérica los siguientes números:

a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1.342, d) –2.555555….

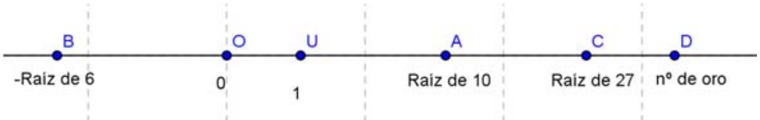
Solución gráfica:



17. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Solución gráfica:



18. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

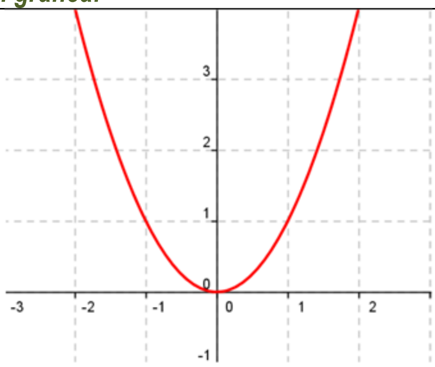
a) 5 b) –5 c) –π

Solución: a) 5; b) 5; c) π.

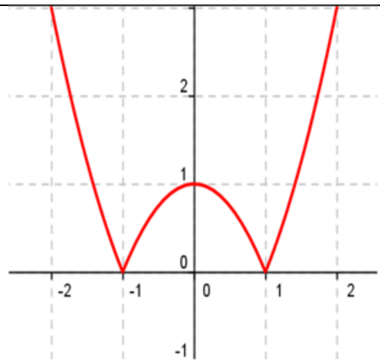
19. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2|$
b) $f(x) = |x^2 - 1|$
c) $f(x) = |\cos x|$
d) $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$

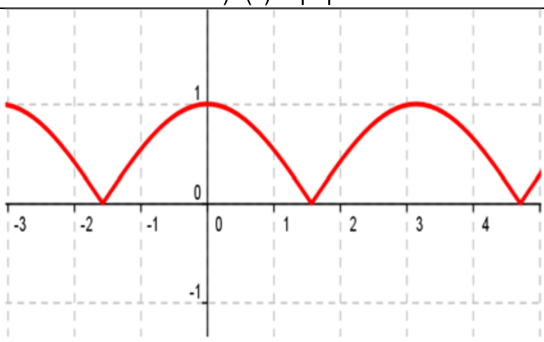
Solución gráfica:



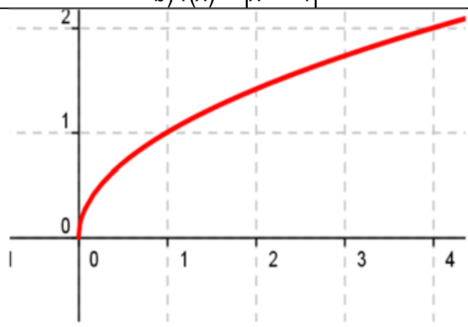
a) $f(x) = |x^2|$



b) $f(x) = |x^2 - 1|$



c) $f(x) = |\cos x|$



d) $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$

20. Dada la siguiente inecuación $3 + 2x < 5x^2 + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15.

Solución: 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15.

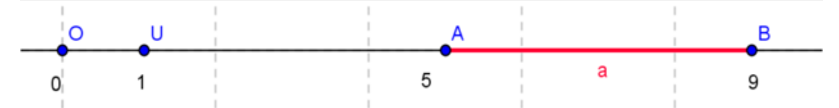
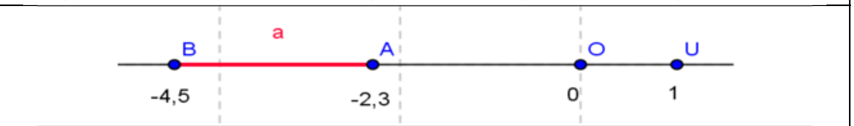
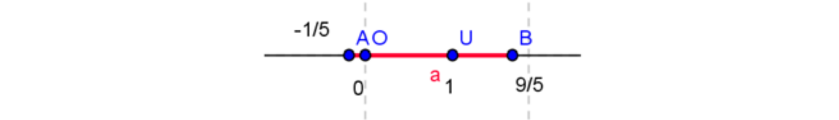
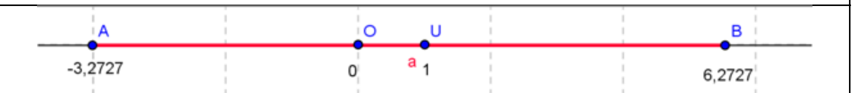
21. Escribe una desigualdad que sea cierta para x = 5 y falsa para x = 5.5.

Solución abierta: x < 5.2.

22. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

a) Dist(5, 9)
b) Dist(–2.3 , –4.5)
c) Dist(–1/5 , 9/5)
d) Dist(–3.272727…. , 6.27272727….).

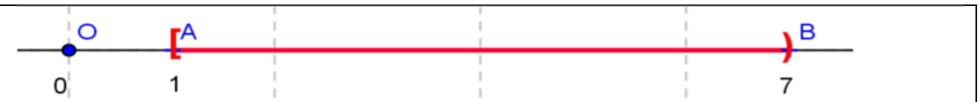
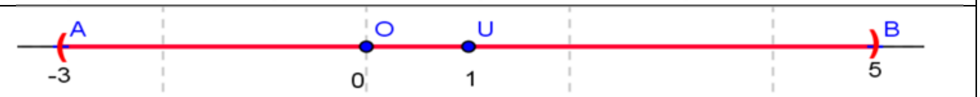
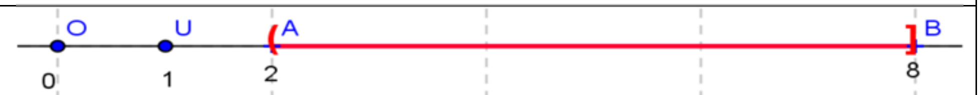
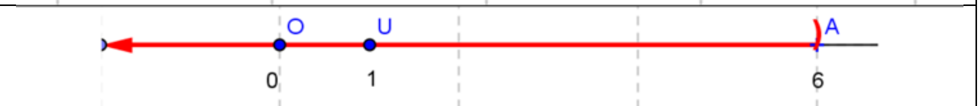
Solución gráfica: a) 4; b) 2,2; c) 2; d) 9.

a) Dist(5 , 9)	***4***	
b) Dist(–2.3, –4.5)	***2,2***	
c) Dist(–1/5, 9/5)	***2***	
d) Dist(–3.272727…. , 6.27272727….)	***9***	

23. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) (–∞, 6)

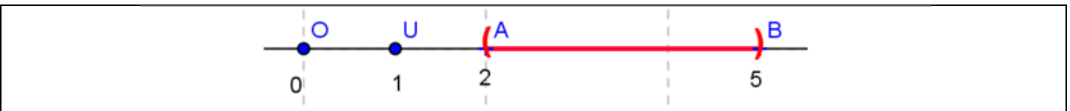
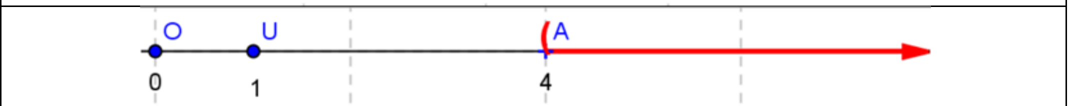
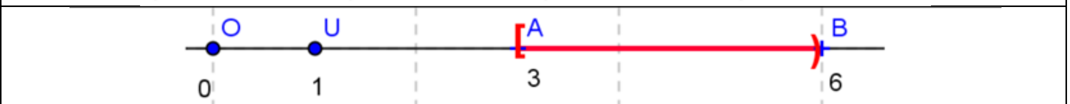
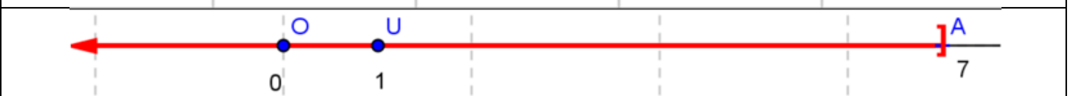
Solución gráfica:

a) {x ∈ R; 1 ≤ x < 7}	
b) {x ∈ R; –3 < x < 5}	
c) {x ∈ R; 2 < x ≤ 8}	
d) {x ∈ R; x < 6}	

24. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) 2 < x < 5 b) 4 < x c) 3 ≤ x < 6 d) x ≤ 7

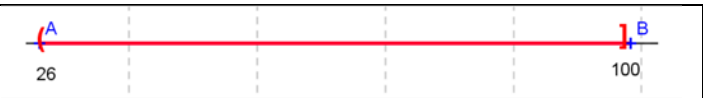
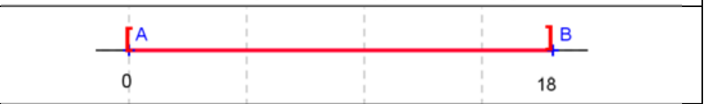
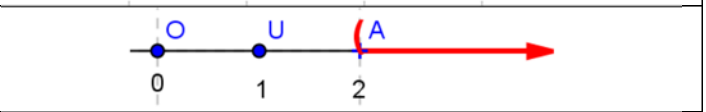
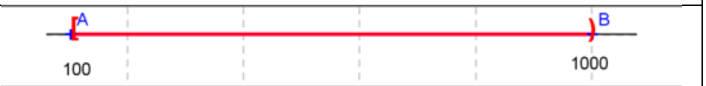
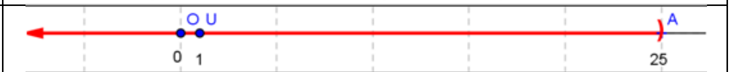
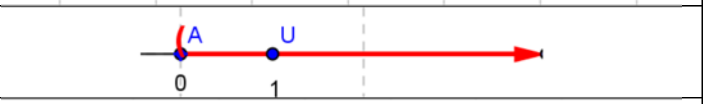
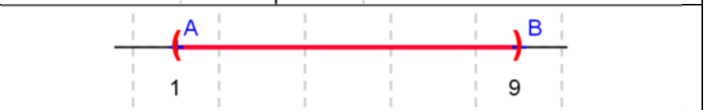
Solución gráfica:

a) (2, 5)	
b) (4, +∞)	
c) 3 ≤x < 6	
d) (–∞, 7]	

25. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Un porcentaje superior al 26 %.
b) Edad inferior o igual a 18 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25 ºC.
f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).
g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

Solución gráfica:

a) $(26,\ 100]$, $\{x \in \Re \,/\, 26 < x \leq 100\}$	
b) $[0,\ 18]$, $\{x \in \Re \,/\, 0 \leq x \leq 18\}$	
c) (2, +∞); $\{x \in \Re / x^3 > 8\}$	
d) [100, 1000); $\{x \in \Re \,/\, 100 \leq x < 1000\}$	
e) (–∞, 25); $\{x \in \Re \,/\, x < 25\}$	
f) (0, +∞); $\{x \in \Re \,/\, x > 0\}$	
g) (1, 9); $\{x \in \Re \,/\, 1 < x < 9\}$	

26. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) $E(1, 5)$
b) $E(-2, \frac{8}{3})$
c) $E(-10, 0.001)$

Solución: a) E(1, 5) = (–4, 6);

b) $E(-2, \frac{8}{3}) = (-2 - \frac{8}{3}, -2 + \frac{8}{3}) = (-14/3, 2/3);$

c) E(–10; 0.001) = (–10 – 0.001, –10 + 0.001) = (–10.001, –9.999).

27. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7)
b) (–7, –4)
c) (–3, 2)

Solución: a) E(5.5, 1.5); b) E(–5.5, 1.5); c) E(–0.5, 2.5).

28. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?
*Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

Solución: No se pueden poner como un intervalo, ya que sería el intervalo $(500, 1000)$***, por lo que 600.222333€ sería un sueldo, y no puede serlo al tener más de dos decimales.***

29. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

Solución:

30. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 5.8 b) 417 c) 417.00

Solución:

31. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

Solución:

32. Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a) $(8.91 \cdot 10^{-3}) \cdot (3.67 \cdot 10^{11})$ b) $(4.8 \cdot 10^{-5}) : (6.9 \cdot 10^{-8})$

Solución:

33. Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a) $(5.81 \cdot 10^{-12}) \cdot (4.79 \cdot 10^{9}) + 7.23 \cdot 10^{-4}$ b) $(5.44 \cdot 10^{-7}) : (2.5 \cdot 10^{7}) + 3.1 \cdot 10^{-10}$

Solución:

2. NÚMEROS COMPLEJOS

34. Comprueba que:

a) $(1-i)^4 = -4$

b) $\frac{5+10i}{3-4i} + \frac{2-i}{i} = -2$

c) $(1+i)^5 = -4-4i$

Solución: Es cierto

35. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\frac{68}{(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)}$

b) $(2+i) - i(1-2i)$

c) $\frac{2+i}{4-3i} + \frac{3+i}{5i}$

d) $(3-2i)\cdot(3+2i)$

Solución: a) 34i/5; b) 0; c) (2 – i)/5; d) 13.

36. Calcula: (*Ayuda*: sustituye *z* por *x* + i*y*)

a) $Im\ \frac{\bar{z}}{z}$

b) $Re(z^4)$

c) $(Re(z))^4$

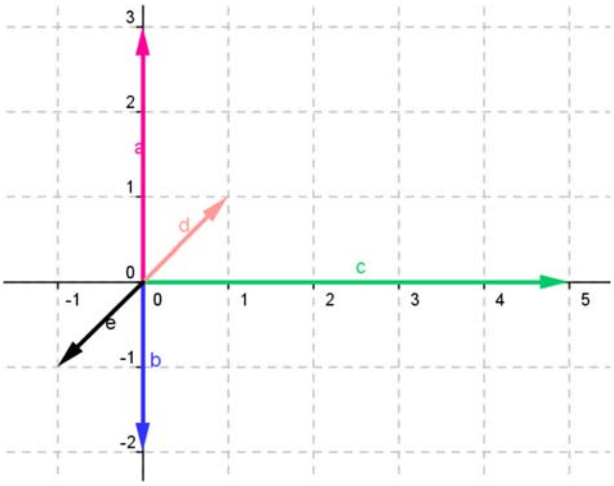
Solución: $a)\ -2xy/(x^2+y^2)$; $b)\ x^4+y^4-6x^2y^2$; $c)\ x^4$.

37. Para los siguientes números complejos:

$a = 3i$; $b = -2i$; $c = 5$; $d = 1+i$; $e = -1-i$

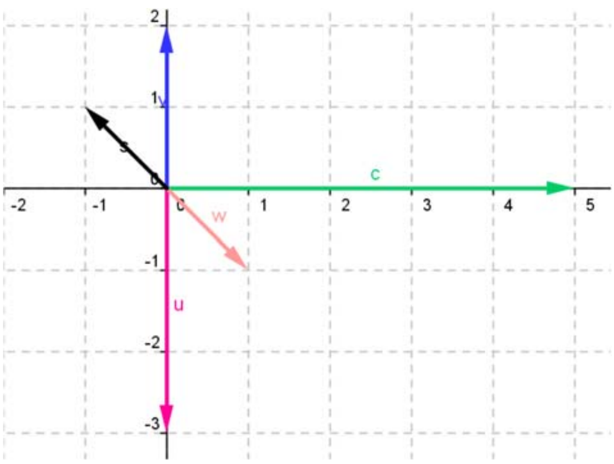
Represéntalos gráficamente.

Solución:



38. Representa gráficamente el conjugado de cada uno de ellos.

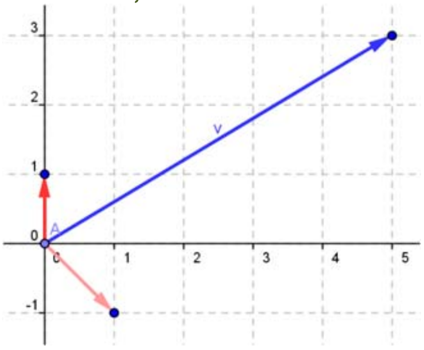
Solución:



39. Representa gráficamente las sumas:

a + *b* *a* + *c* *b* + *d* *d* + *e*

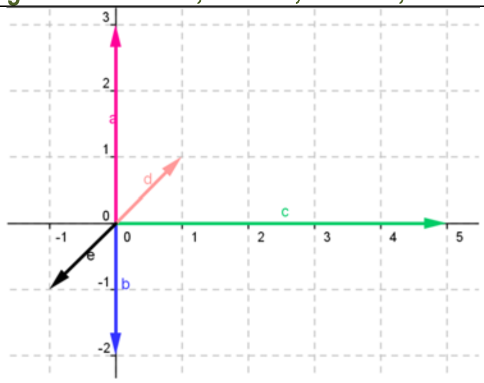
Solución gráfica: a + b = i; a + c = 5 + 3 i; b + d = 1 – i; d + e = 0.



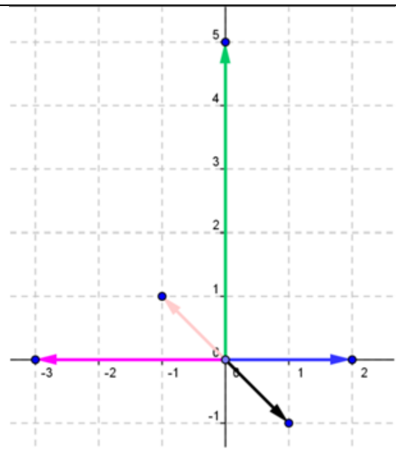
40. Representa gráficamente los productos:

a · i *b* · i *c* · i d · i *e* · i

Solución gráfica: a · ***i = –3;*** b · ***i = 2;*** c · ***i = 5i; d · i = –1 + i;*** e · ***i = 1 – i.***



Los originales: a, b, c, d y e



Los productos por i. Observa que giran 90º a la izquierda.

Analiza el resultado. Comprueba que multiplicar por i supone girar 90º el número complejo.

Solución: Multiplicar por i supone girar 90º al número complejo

41. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3}-i$ b) –2 – 2i c) $1-\sqrt{3}\,i$ d) –4i

Solución: a) Módulo = 2, Argumento principal = 330º; b) a) Módulo = $2\sqrt{2}$, Argumento principal = 225º; c) Módulo = 2, Argumento principal = 300º; d) Módulo = 4, Argumento principal = 270º;

42. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) i b) –i

c) 4 + 4i d) –4

Solución: a) $1_{\pi/2}$; b) $1_{3\pi/2}$; c) $2\sqrt{2}_{\pi/4}$; d) 4_{π}.

43. Comprueba los resultados siguientes:

a) $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$.

$$b)\ \sqrt[3]{27i} = \left\{ \begin{array}{l} 3\,e^{i\frac{\pi}{6}} \\ \\ 3\,e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ \\ 3\,e^{i\frac{9\pi}{6}} \end{array} \right\}$$

Solución: Es cierto

44. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $\dfrac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

***Solución:** a) $\sqrt{2}e^{i\pi/2}/2\sqrt{2}\ e^{i3\pi/4} = 1/2\ e^{i7\pi/4}$; b) $(1\ e^{i\pi/3})^{30} = 1\ e^{i10\pi} = 1$.*

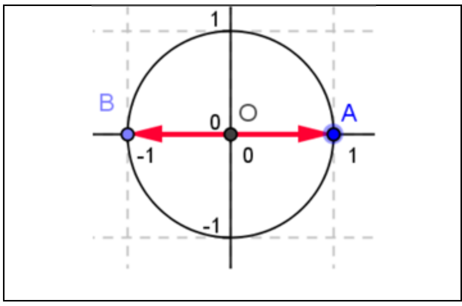
45. Resuelve las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

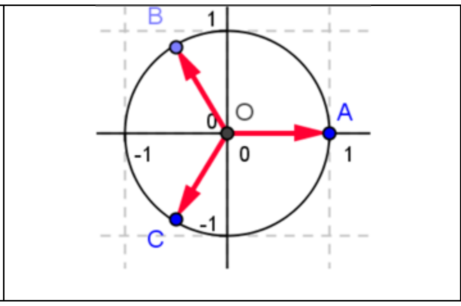
a) $x^2 = -1$
b) $x^3 = -8$
c) $x^4 + 16 = 0$

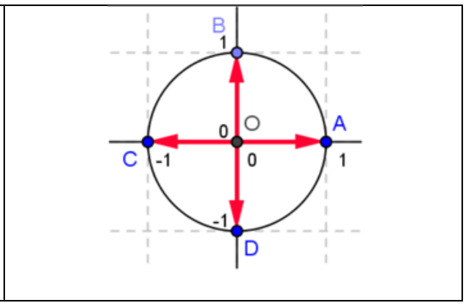
***Solución:** a) i y $-i$; b) -2, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$; c) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.*

46. Calcula las raíces n-ésimas de la unidad, para n = 2, 3 y 4. Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

***Solución gráfica:** $n = 2$: 1 y -1; $n = 3$: 1, $-1/2+\sqrt{3}i/2$, $-1/2-\sqrt{3}i/2$; $n = 4$: 1, i, -1, $-i$.*







3. LOGARITMOS

47. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

Solución:

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow \log_2 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_2 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow \log_5 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_5 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow \log_2 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow \log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

48. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

***Solución:** a) 5; b) 2; c) 41; d) 30.*

49. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

***Solución:** a) 3; b) 2; c) 2; d) -4.*

50. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

***Solución:** a) $x = 6$; b) 1/16; c) 5.*

51. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$ b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

***Solución:** a) 1.5; b) -8.*

52. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

***Solución:** a) 1/5(ln4 + 2 ln$x$ – 3) b) 3 log a + 2 log b – 4 log c – log d*

53. Utiliza la calculadora para obtener

a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

***Solución:** a) log 0.000142 = -3.8477117; b) log 142 = 2.15228834; c) log 9 + log 64 = 2.76042248*

54. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

Solución: a) log81 = 4*(0.4771212); b) log27 = 3*(0.4771212); c) log59049 = 10*(0.4771212) = 4.771212.

55. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Solución: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$ ***= log($m^{1/2}$) – log(t^2) – log(p) + log($h^{5/2}$) = log(($m^{1/2}\cdot h^{5/2}$)/ ($t^2\cdot$p))***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números reales

1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a\cdot c$ para los números: (pista: racionalizar)

a = 2.7 b = 3.292929... c = 0.01030303...

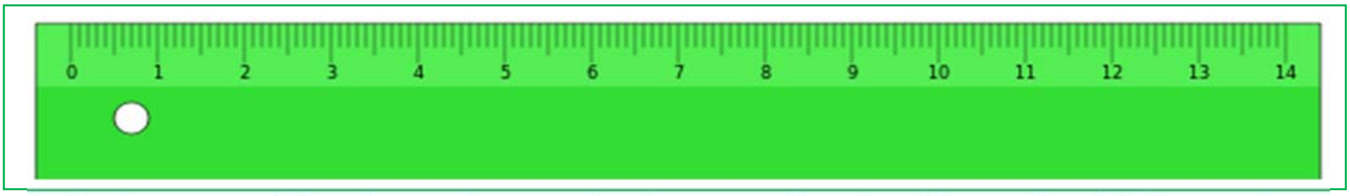
Solución: a + b = 5.99292929… = 59330/9900; c – a = –2.689696969…= –26628/9900; ac= 0.027818181… = 2754/99000.

2. Descubre cuál de estos números es irracional:

a) 3.1416 b) $\sqrt{4}$ c) π

Solución: c) π.

3. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.



Solución: Las marcas de la regla son números racionales, pero en la recta real hay muchos, infinitos, muchos más que números racionales (que son infinitos numerables) que son números irracionales (que son la potencia del continuo)

4. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

a) 7 b) 25/4

c) $\sqrt{45}$ d) $2\cdot\pi$

Solución gráfica: 25/4 = 6.25 < $2\cdot\pi$ ***= 6.28… <*** $\sqrt{45}$ ***= 6.7… < 7.***

5. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo (–1, 1).

Solución abierta: 0; 0.1; 0.11; 0.111; 0.1111; … ; 0.111…..

6. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) $|-5|$ b) $|4 - 4|$ c) $|3\cdot2+9|$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7^2}$

Solución: a) 0; b) 0; c) 15; d) $\sqrt{7}$ ***; e) 7.***

7. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (*pista*: x puede tener dos valores)

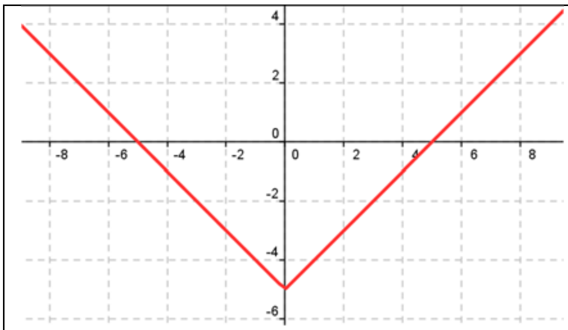
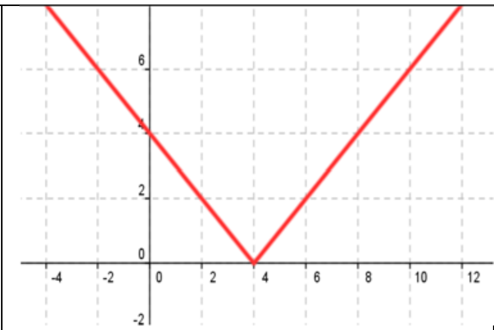
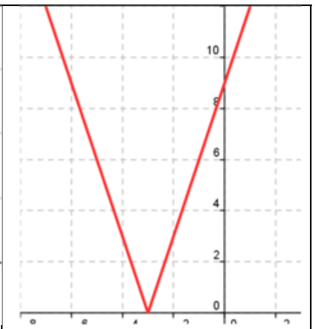
a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

Solución: a) 5 y –5; b) 4; c) –10 y 4.

8. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:

a) $f(x) = |x| - 5$ b) $f(x) = |x - 4|$ c) $f(x) = |3x + 9|$

Solución gráfica:

		
a) $f(x) = \lvert x \rvert - 5$	**b)** $f(x) = \lvert x - 4 \rvert$	**c)** $f(x) = \lvert 3x + 9 \rvert$

9. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).

Solución abierta:

10. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.

Solución: Con el primero gana 7 euros con cada producto. Con el segundo no gana nada.

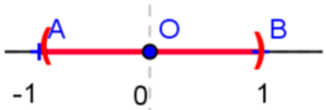
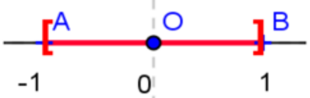
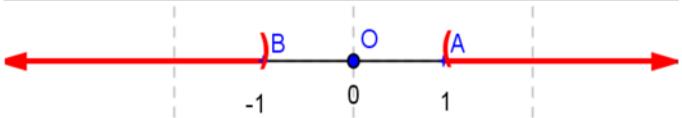
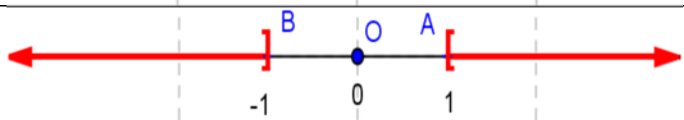
11. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las siete se encuentran a lo largo de una carretera recta, separadas unas de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos de ellas, puede identificarlas sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?

Solución: 21 km.

12. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

    a) $|x| < 1$
    b) $|x| \leq 1$
    c) $|x| > 1$
    d) $|x| \geq 1$

Solución gráfica:

a) $-1 < x < 1$	
b) $-1 \leq x \leq 1$	
c) $x < -1 \vee x > 1$	
d) $x \leq -1 \vee x \geq 1$	

13. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3.5 unidades de –2, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

Solución: –3 y 9;   –5.5 y 1.5;   9 –(–5.5) = 14.5.

14. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

Solución: [–3, 8)

15. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

Solución: [5, 11]

16. Determina los conjuntos A ∩ B, A U B, A – B y –A en los casos siguientes:

    a) A = [–11, –9]; B = (–1, 6)

    b) A = [–5, 5]; B = (3, 4)

***Solución:** a) $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$; $A - B = A = [-11, -9]$*
b) $A \cap B = B = (3, 4)$; $A \cup B = A = [-5, 5]$; $A - B = [-5, 3] \cup [4, 5]$.

17. Comprueba si:

a) $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

b) $|\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha| = |e^{i\theta}| = 1$.

Solución: Es cierto.

18. Calcula:

a) $(2 + i)^5$

b) $\frac{13}{|2-3i|}$

c) $\frac{(3+2i)^2}{(2+3i)^3}$

d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$

e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$

g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.

Solución: a) –50 + 25 i; b) $\sqrt{13}$; c) (5 + 12i)/(–46 + 9i); d) –2 + 2$\sqrt{3}$i; e) 16; f) 1 – i; g) $\frac{-1}{\sqrt{2^9}}$

19. Demuestra que z es real si y solo si $z = \bar{z}$.

Solución: Si $z = \bar{z}$, entonces x + iy = x – iy, luego y = 0, y z es un número real. Si z es real entonces z = x + 0i, su conjugado es igual a x = $z = \bar{z}$.

20. Verifica que el inverso de z, z^{-1}, es igual a $\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calcula el inverso de 2 + 3i.

Solución: Se verifica. 1/(2 + 3i) = (2 – 3i)/13.

21. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) –3 + 3i

b) –3

c) –3i

d) 3 – 3i.

Solución: a) 3 $\sqrt{2}$ y 3π/4; b) 3 y π; c) 3 y 3π/2; d) 3 $\sqrt{2}$ y 7π/4.

22. Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

a) 5i

b) –7i

c) 5 – 5i

d) $\sqrt{3}$ + i.

Solución: a) $5_{\pi/2}$ = 5(cos(π/2) + i sen(π/2)); b) $7_{3\pi/2}$ = 7(cos(3π/2) + i sen(3π/2)); c) $5\sqrt{2}_{7\pi/4}$ = 5$\sqrt{2}$ (cos(7π/4) + i sen(7π/4)); d) $2_{\pi/6}$ = 2(cos(π/6) + i sen(π/6)).

23. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos en forma polar:

a) De módulo 2 y argumento π/3

b) De módulo 3 y argumento –π/4

c) De módulo 1 y argumento π/2

d) De módulo 5 y argumento 2π/3

Solución: a) 1 + $\sqrt{3}$i; b) 3$\sqrt{2}$/2 – 3$\sqrt{2}$/2 i; c) i; d) 5/2 + 5$\sqrt{3}$/2 i.

24. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma trigonométrica:

 a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$
 b) $(4 - 4i)^{-11}$
 c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$.

***Solución:** a) $(2(\cos(\pi/6)+i\,sen(\pi/6))^{60} = 2^{60}(\cos(60\pi/6)+i\,sen(60\pi/6) = 2^{60}$; b) $1/(4\sqrt{2})^{11}{}_{(5\pi/4)} = -1/(4\sqrt{2})^{11} - 1/(4\sqrt{2})^{11}\,i$; c) 1*

25. Utiliza la fórmula de Moivre para expresar en función de *sen* θ y *cos* θ:
 a) *cos* 2θ
 b) *sen* 2θ
 c) *cos* 3θ
 d) *sen* 3θ.

***Solución:** $(\cos\theta + i\cdot sen\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot sen(n\theta) \Rightarrow$*

$(\cos\theta + i\cdot sen\,\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\cdot sen(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta + 2i\cos\theta\cdot sen\,\theta \Rightarrow$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta$ y $\quad sen(2\theta) = 2i\cos\theta\cdot sen\,\theta$;

$(\cos\theta + i\cdot sen\,\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\cdot sen(3\theta) = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, sen\,\theta i - 3\cos\theta sen^2\theta - sen^3\theta\, i \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta sen^2\theta$ y $\quad sen(3\theta) = 3\cos^2\theta\, sen\,\theta i - sen^3\theta\, i$.

26. Calcula el argumento principal de los siguientes números complejos:

 a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$ b) $\dfrac{-i}{1-i}$ c) $(1 - i\sqrt{3})^7$.

***Solución:** a) $5\pi/6$; b) $7\pi/4$; c) $\pi/6$.*

27. Calcula, representa en el plano complejo y escribe en forma binómica:

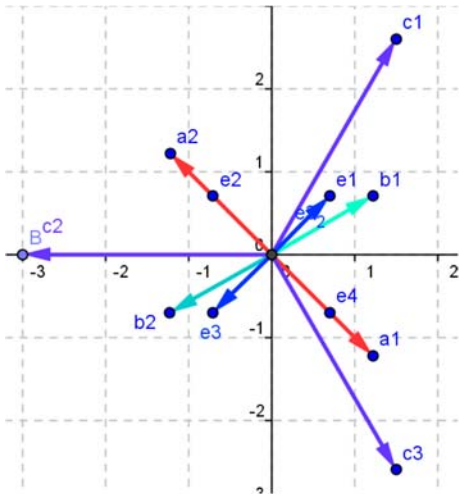
 a) $\sqrt{-3i}$ b) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{1-i}$ e) $\sqrt[4]{-81}$

.

***Solución gráfica:** a) $a1 = \dfrac{-\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ y $a2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$; b) $b1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ y $b2 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;*

c) $c1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$; $c2 = -3$; $c3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$; d) $d1 = \sqrt[6]{2}(\cos(315/3)+i\,sen(315/3))$;

e) $e1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $e2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $e3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; $e4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.



28. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^3 = -27$.
b) $x^4 = -81$.
c) $x^5 - 32 = 0$.
d) $x^3 - 8 = 0$.

Solución: *a) -3, $3/2 + \sqrt{3}/2\,i$, $3/2 - \sqrt{3}/2\,i$;*

b) $3/2(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$, $3/2(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)$, $3/2(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)$, $3/2(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)$.

c) 2; $2_{2\pi/5} = 2(\text{sen}(72º) + i\cos 72º)$; $2_{4\pi/5} = 2(\text{sen}144º + i\cos 144º)$; $2_{6\pi/5} = 2(\text{sen}216º + i\cos 216º)$; $2_{8\pi/5} = 2(\text{sen}288º + i\cos 288º)$;

d) 2; $\sqrt{3} - 1$; $-\sqrt{3} - 1$.

29. Calcula todos los valores de z para los que:

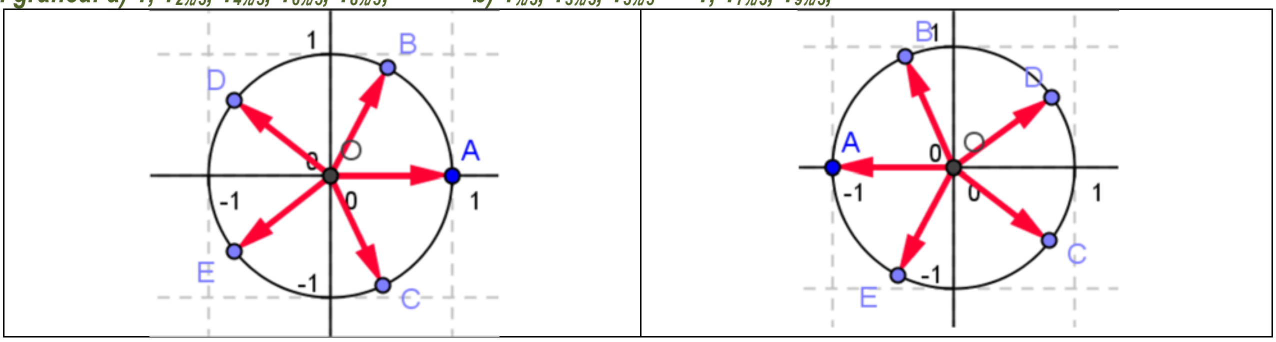
a) $z^6 + 64 = 0$.
b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.
c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Solución: *a) $\sqrt{3}+1$; $2i$; $-\sqrt{3}+1$; $-\sqrt{3}-1$; $-2i$; $\sqrt{3}-1$; b) $1/3$; -1; 3; 1;*

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^5 + z^3 + z) = (z + 1)z(z^4 + z^2 + 1) = 0$;

30. Calcula las raíces quintas de la unidad y represéntalas en el plano. Calcula también las raíces quintas de -1, represéntalas también. Generaliza este resultado.

Solución gráfica: *a) 1, $1_{2\pi/5}$, $1_{4\pi/5}$, $1_{6\pi/5}$, $1_{8\pi/5}$; b) $1_{\pi/5}$, $1_{3\pi/5}$, $1_{5\pi/5} = -1$, $1_{7\pi/5}$, $1_{9\pi/5}$,*



Las raíces n-ésimas de un complejo de módulo 1, están sobre la circunferencia de radio 1, separadas por un ángulo igual a 360º/n.

31. Calcula las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilízalas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.

Solución: $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $z^4 + 9 = (z^2 - \sqrt{6}z + 3)(z^2 + \sqrt{6}z + 3)$;

32. Resuelve la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

Solución: $z = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

33. Calcula a para que el número complejo $\frac{a+i}{3-i}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

Solución: *$3a + 1 = a + 3 \Rightarrow a = 2$.*

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de los siguientes números es irracional:

a) 6.3333333….. b) 7/3 c) e d) 5.98234234234….

Solución: c)

2. La solución de la ecuación $|3x + 9| = 21$ es:

a) $x = 10$, $x = –4$ b) $x = 10$ c) $x = –10$, $x = 4$ d) $x = –4$

Solución: c)

3. Determina el conjunto A – B si A = [–11, 9]; B = (–1, 6):

a) $[–11, –1) \cup [6, 9]$ b) $[–11, –1) \cup (6, 9]$ c) $[–11, –1] \cup (6, 9]$ d) $[–11, –1] \cup [6, 9]$

Solución: d)

4. Calcula $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

a) –46 + 9i b) 62 + 63i c) –46 + 63i d) Ninguna de las anteriores

Solución: d)

5. Resuelve la ecuación $x^4 = 1$.

a) $x = 1$ b) $x = 1$, $x = –1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1$, $x = \pm i$

Solución: d)

6. Expresa en forma binómica el siguiente número complejo de módulo 2 y argumento π/3

a) $1 + \sqrt{3}\, i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}\, i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2i$

Solución: a)

7. Calcula $(1 + i)^6$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\, i$ b) –8 c) 1 – i d) –8i

Solución: d)

8. Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo 5i:

a) 5(*cos*(π/2) + i*sen*(π/2)) b) (5, π/2) c) 5(*cos*(3π/2) + i*sen*(3π/2)) d) 5(*sen*(90º)+i*cos*(90º))

Solución: a)

9. Calcula el módulo y el argumento principal del siguiente número complejo –3 + 3i:

a) 18, 135º b) $3\sqrt{2}$, 3π/4 c) $3\sqrt{2}$, 7π/4 d) 3, 5π/4

Solución: b)

10. Calcula: $x = \sqrt{-1}$

a) $x = i$ b) $x = –i$ c) $x = i$, $x = –i$ d) No tiene solución

Solución: c)

CAPÍTULO 2: ÁLGEBRA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POLINOMIOS

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

   a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

Solución: Suma: $3x^4 + x^3 + x^2 - 3$ ***Resta:*** $-3x^4 - x^3 + x^2 - 1$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

   a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

   b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

Solución: a) $2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$; ***b)*** $-x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

   a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ b) $-7x^3 - 6x + 5$ c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

Solución: a) $-2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 1$; ***b)*** $7x^3 + 6x - 5$; ***c)*** $x^4 - 3x^2 + 8x - 7$

4. Considera los polinomios $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

Solución: p(–2) = 6 ***q(–2)*** = 7 ***s(–2)*** =13

5. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x \; -5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

Solución: p(3) = –134 ***–p(3) = 134***

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

   a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Solución: a) $-4x^3 + 3x^2 + 2x$ ***b)*** $2x^4 + 4x + 4$ ***c)*** $-2x^3 + 2x^2$

7. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

   a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$ b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

   c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

Solución: a) $-20x^6 + 8x^4$ ***b)*** $-6x^5 - 8x^4 - 3x^2 - 4x$ ***c)*** $-6a^4 - 7a^2b - 20b^2$ ***d)***

$-54a^3 + 336a^2 - 504a + 96$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

   a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$

Solución: a) 1/4; b) –1/2; c) –1.

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

   a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

   c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Solución: a) 6x⁴ + 12x³ – 18x; b) 12x² + 2x – 24; c) 23a²b – 6a⁴ – 20b²; d) – 54a³ +336a² – 504a + 96.

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

   a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$ b) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

Solución: a) $-10x^9 - 6x^7 + 2x^5$ ***b)*** $6x^5 + 10x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 12x$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

   a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$ b) $24x^4 - 30x^2$

Solución: a) $\boldsymbol{2x^2(-8x^2 - 10x + 5)}$ ***b)*** $\boldsymbol{6x^2(4x^2 - 5)}$

12. Realiza los cálculos:

   a) $(2 + 3a)^2$ b) $(-x + 3)^2$ c) $(-3x + 2)^2$ d) $(x^2 - 1)^3$ e) $(4x^2 + 2)^3$

Solución: a) $4 + 12a + 9a^2$ ***b)*** $x^2 - 6x + 9$ ***c)*** $9x^2 - 12x + 4$

d) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$ ***e)*** $64x^6 + 96x^4 + 48x^2 + 8$

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

Solución: a) $a^2+2ab+b^2+2bc+2ac+c^2$ ***b)*** $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x-5y)^2$ b) $(3x+y/3)^2$ c) $(5x^2-5/x)^2$
d) $(3a-b)^2$ e) $(a^2+b^2)^2$ f) $(3/5y-2/y)^2$

Solución: a) $4x^2+25y^2-20xy$; b) $9x^2+2xy+y^2/9$; c) $25x^4-50x+25/x^2$; d) $9a^2-6ab+b^2$; e) $a^4+2a^2b^2+b^4$; f) $9y^2/25-12/5+4/y^2$.

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) a^4+6a^2+9 b) $9x^2-6x+1$ c) $b^2-10b+25$
d) $4y^2+12y+9$ e) a^4-2a^2+1 f) y^4+6y^2+9

Solución: a) $(a^2+3)^2$; ***b)*** $(3x-1)^2$; ***c)*** $(b-5)^2$; ***d)*** $(2y+3)^2$; ***e)*** $(a^2-1)^2$; ***f)*** $(y^2+3)^2$.

16. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Solución: a) $16x^4-9y^2$; b) $4x^4-64$; c) $9x^2-x^4$.

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4-x^2-x+7$ entre x^2+2x+4.
b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$
c) $4x^5-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^3+x+3$
d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$
e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^3+1

Solución: a) Cociente: $2x^2-4x-1$; resto: $17x+11$; b) Cociente: -2; resto: $-4x^2+x+10$; c) Cociente: $-2x^2+2$; resto: $12x^2-5x+13$; d) Cociente: $-2x^2+3$; resto: $-3x^2+8$; e) Cociente: $-6x^2$; resto: $7x^2+1$.

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-x-3$ como polinomio cociente y $r(x)=-3x^2-1$ como resto.

Solución abierta: Por ejemplo: Dividendo: $x^5-x^4-3x^3-3x^2-1$; Divisor: x^3.

19. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+x+1$ entre $x-1$ b) x^4+2x^3-2x+1 entre $x-2$
c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x+1$ d) x^3-9x+1 entre $x-3$

Solución: a) Cociente = $-3x-2$; Resto = -1; b) Cociente = $x^3+4x^2+8x+14$; Resto = 29; c) Cociente = $4x^2-7x+7$; Resto = -8; d) Cociente = x^2+3x; Resto = 1.

20. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir x^3+2x^2+5x+7 entre $2x+3$.

Solución: Si, dividiendo entre $-3/2$.

21. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3+7x^2+2x+4$ en $x=5$.

Solución: -186

22. Emplea la regla de *Ruffini* para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

Solución: a) No b) Si c) Si d) Si

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$
c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

Solución: a) 1, –1, 2, –2; Raíz x = 1; b) 1, –1, 3, –3; Raíces: –3 y –1; c) 1, –1, 3, –3, 9, –9; Raíces: 2 y 1; d) 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6; Raíces 0 y –2.

24. Comprueba que $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

Solución: $2\cdot(-\frac{1}{2})^3+3\cdot(-\frac{1}{2})^2-11\cdot(-\frac{1}{2})-6=2\cdot(-\frac{1}{8})+3\cdot(\frac{1}{4})-11\cdot(-\frac{1}{2})-6=-\frac{2}{8}+\frac{3}{4}+\frac{11}{2}-6=0$

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2+4x-5$ b) $2x^3-9x^2+12x+2$

Solución: a) 1, –1, 5, –5, 1/3, –1/3, 5/3, –5/6; Ninguna

b) 1, –1, 2, –2, 1/2, –1/2;

26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

Solución: a) No; b) Si; c) Son las mismas.

27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

Solución abierta: Por ejemplo: (x – 2) · (x + 3) · (x + 5) (x + 1) que tiene 4 raíces distintas

28. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

Solución abierta: Por ejemplo: (x – 2) · (x + 3) · (x + 5)².

29. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

Solución abierta: Por ejemplo: (x – 2)⁴.

30. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$$

admite al número 0 como raíz.

Solución: Basta que a_0 sea igual a cero.

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$ admite al número 1 como raíz.

Solución: Debe verificar que $a_n + a_{n-1} + ... + a_0 = 0$

32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+5$ b) $-x+3$ c) $7x-5$ d) $-3x-11$

e) $-7x$ f) x^2-8x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+25x

Solución: a) x = –5 b) x = 3 c) x = 5/7 d) x = –11/3 e) x = 0 f) x = 0 y x = 8 g) x = 1 y x = –3/4

h) x = 0; x = +2 y x = –2 i) x = 0

33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

Solución: a) $\dfrac{x}{(x+1)\cdot(x-2)}$ ***b)*** $\dfrac{(x-1)}{(x-2)\cdot(x+4)}$ ***c)*** $\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+3)}$

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Solución: a) $\dfrac{x(x+2)}{(x^2+5)}$ b) $\dfrac{(a-5)}{(7a+4)}$ c) $\dfrac{(x+3y)}{4}$ d) $\dfrac{2ab+3}{(a+1)\cdot(a-1)}$

35. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

Solución: a) 2(3 – x)/(3x(x – 4)); b) (–4x² + 3x – 1)/((x + 1)(x – 1)²)

36. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$ c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

Solución: a) $\dfrac{6x^2+2x+4}{x\cdot(x^2+1)}$ b) $\dfrac{4x-5}{(x-2)\cdot(x+1)}$ c) $\dfrac{-1}{(x+3)\cdot(x-1)}$ d) $\dfrac{(x+3)}{(x^2+3)}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

Solución: a) $\dfrac{-4x^2-x-1}{x^3}$ b) $\dfrac{-7x^2+x-30}{x\cdot(x+3)^2}$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\dfrac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$ d) $\dfrac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+4a-5}{b+8a}$

Solución: Son ciertas

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO:

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{2x-4}{3x-2}=\dfrac{4}{7}$ b) $\dfrac{x+8}{x-1}-\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{12x}{x^2-1}$ c) $\dfrac{3(2x+1)}{4}-\dfrac{5x+3}{6}+4x+\dfrac{x+1}{3}=x+\dfrac{151}{12}$

Solución: a) x = 10 ***b) x = 2*** ***c) x = 3***

40. Resolver: a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(x+3)^2}{9}=1$ b) $\dfrac{x^2}{16}=1+\dfrac{(3/4)x}{9}$ c) $4x^4+8x^2-12=0$ d) $80x^4-48x^2-12=0$

Solución: a) x = 0 y x = –150/34 ***b) x = 4.72, x = –3.38*** ***c) x = +1; x = –1*** ***d)*** $x=\pm\sqrt{3}$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

Solución: El número 12.

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 m. Traza una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

Solución: Miden 24 m y 30 m.

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca. ¿Cuánto vale cada cosa?

Solución: Coche: 12000 €. ***Finca: 48000 €.*** ***Piso: 240000 €***

44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

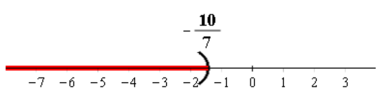
a) $5+3x<2x+4$ b) $3+4x\le 8x+6$ c) $5+4x>3x+2$ d) $1+3x\ge 5x+7$

Solución gráfica: a) x < –1; ***b) x ≥ 9/4;*** ***c) x > –3;*** ***d) x ≤ –3.***

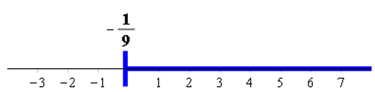
45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3+2x)<-(6x+8)$ b) $7(2+3x)\le 5(6x+3)$ c) $9(2+4x)+4(5x-2)>3(2x+1)$

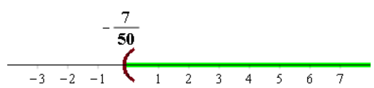
Solución: a) x < –10/7; ***b) x ≥ –1/9;*** ***c) x > – 7/50.***



a)



b)



c)

46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

Solución: a) $x < -1$ b) $x \geq 2$; c) $x < -1/7$ d) $x \geq 0$.

47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty)$ d) $(-\infty, 2)$

Solución abierta: Por ejemplo: a) $x \geq 2$; b) $x < 3$; c) $x > 4$; d) $x < 2$.

Otro ejemplo: a) $x - 2 \geq |2 - x|$; b) $x^3 - 27 < 0$; c) $x - 4 > x^2 + 2x + 2$; d) $x^3 < 2x + 4$.

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

Solución: a) $x \geq 3/2$ b) $x \leq -9$ c) $x \leq 2/7$ d) $x \leq 7/2$

49. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

Solución: a) $x \geq \pm 1$ b) $x \leq \pm 2$ c) $x > \pm 3$ d) No tiene solución real.
e) $x < \pm 5$ f) No tiene solución real g) $x > \pm 3$ h) No tiene solución real.

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

Solución: a) $x \leq 0; x \leq -1$ b) $x > 0, x > 5$ c) $x \leq 0; x \leq 8$ d) $x \leq 0; x \leq 3$ e) $x \geq 0; x \geq 3/2$ f) $x < 0$; $x < 1$

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$ g) $x^2 + x + 3 \geq 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

Solución: a) $-1 \leq x \leq 3$; b) $-4 \leq x \leq 2$; c) $x < -7$ o $x > -2$; d) Sin solución;
e) Toda la recta real; f) Toda la recta real; g) Toda la recta real; h) $-1 \leq x \leq 5/2$.

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$ b) $x^2 - x - 12 \leq 0$ c) $x^2 - x - 20 < 0$ d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$ h) $2x^2 + x - 15 < 0$

Solución: a) $x < -3$ o $x > 2$; b) $-3 \leq x \leq 4$; c) $-4 < x < 5$; d) $x \leq -7$ o $x \geq 2$;
e) $-1/2 < x < 2$; f) $-1 \leq x \leq 1/3$; g) $x \leq -3/5$ o $x \geq 2$; h) $-3 < x < 5/2$.

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Solución: a) $x \geq 1, x \geq -1$ *b)* $x \geq -2, x \geq 2$ *c)* $x \leq -3, x \geq -3, x \leq -2, x \geq -3$ *d)* $x \leq 2, x \geq 3$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}$

Solución: a) $x \leq 3, x \leq -3$ *b) $7x^2 - 14x - 55 \geq 0$, $x \leq -1.98...$ o $x \geq 23.98....$; c) $x^2 + 2x - 6 \leq 0$, $(-3.65..., 1.65...)$*

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

55. Resolver por el método de *Gauss* los sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$

Solución: a) $x = 16/15$; $y = 8/5$; $z = 37/15$; b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

56. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Solución: Compatible indeterminado: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$.

57. Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas lineales de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x-6y-4z=-7 \\ x+8y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x+2y-3z+8t=-7 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 4x-y+3z+12t=0 \end{cases}$

Solución: a) Incompatible; b) Incompatible.

58. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para revisar los ejercicios realizados.

Solución manipulativa.

59. Confecciona una hoja de cálculo similar para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el Método de Gauss.

Solución manipulativa para utilizar la hoja de cálculo. Ver el ejercicio anterior.

60. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

Solución: 1 kg de café natural cuesta 16/3 euros, 1 kg de café torrefacto cuesta 14/3 euros.

61. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

Solución: La madre tiene 30 años, el hijo mayor 10 años y el menor, 5 años.

62. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

Solución: El coche vale 12 000 €, el piso 240 000 €, y la finca vale 48 000 €.

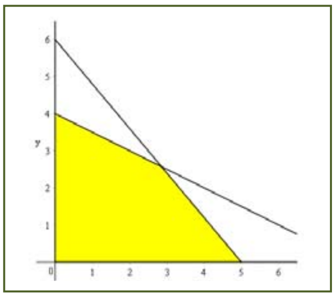
63. Las tres cifras de un número suman 18.Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

Solución: 963.

64. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x+5y \leq 30 \\ x+2y \leq 8 \end{cases}$$

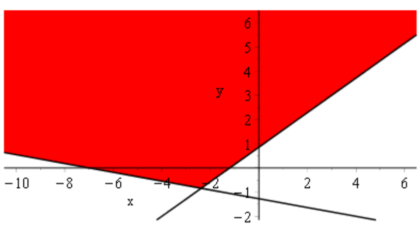
Solución:



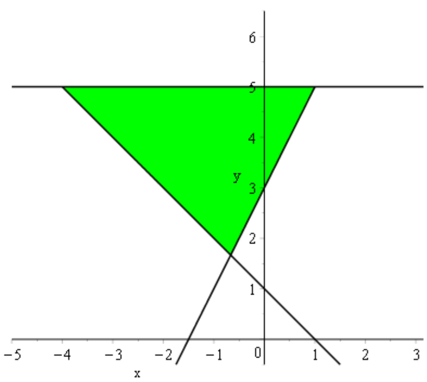
65. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1-\frac{2x-4-y}{3}+\frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+1)\cdot 10+x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x)-6x \end{cases}$

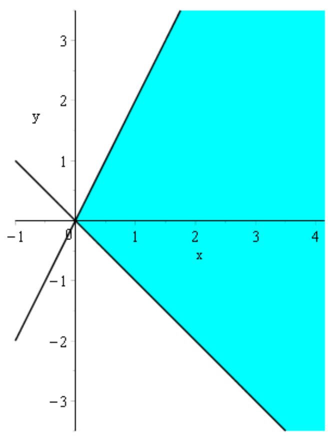
Solución:



a)



b)



c)

d) 4 ≤ x < 7.

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Polinomios

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ b) $\dfrac{-5x+7}{x^2-5x+6}$ c) $\dfrac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\dfrac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

Solución: a) Para x = –3 y x = 8 no pueden ser evaluadas; b) En x = 2 y x = 3 no pueden ser evaluadas. c) Puede ser evaluada para cualquier valor de x; d) Puede ser evaluada para cualquier valor de x e y excepto para x = 0 y para y = 0.

2. Calcular cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea –2 para $x = 0$.

$$\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$$

Solución: Para cualquier valor de m, ya que si x = 0, la expresión siempre vale –2.

3. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x) = 2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x) = 3x^2+5x-7$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p+q+r$ b) $p-q$ c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$

Solución: a) $2x^4+x^2+5x-5$; b) $-2x^4-6x^3+6x^2-10x-10$; c) $-9x^5-9x^4+16x^3-51x^2+15x+28$; d) $-9x^5-11x^4+13x^3-47x^2+10x+22$.

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ entre $3x^2+2x-5$

b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ entre x^3+3x+5

Solución: a) $C(x) = x^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}$; $R(x) = (-13/9)x - 41/9$; b) $C(x) = 6x^2-7x+-10$;$R(x) = 60x^2 - 15x - 55$..

5. Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

a) $\dfrac{x^5+7x^4-13x^3+5x^2-17x+5}{x-3}$ b) $\dfrac{x^5+x^4-3x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$ c) $\dfrac{9x^5+7x^4-3x^3+5x^2-17x-1}{x-1}$

Solución: Se utiliza el teorema del resto;
a) p(3) = 458; No es exacta; b) p(2) = 32; No es exacta; c) Si es exacta, p(1) = 0.

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x-4)(x+1) = x^2-3x-4$.

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x-4)(x+1)$ y $(x-4)^2(x+1)^2$, o por ejemplo: $(x-2)(x-3) = x^2-5x+6$ el de grado dos y x^3-5x^2+6x otro de grado 3.

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x-4)^2(x+1)^2$, o $(x-4)(x+1)(x^2+1)$, o $(x^2-1)(x^2+1)$.

9. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = x^6+x^4+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = 5x^4+5x^2+1$.

Solución abierta: Por ejemplo: x^5-4x^3-4x+1

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

a) $4x^3+11x^2+6x-3$ b) $3x^3-2x^2+6x-3$ c) $3x^3-4x^2+2x-1$ d) $2x^3+x^2-6x-3$

Solución: a) No tiene; b) No tiene; c) Es el 1; d) –1/2 es raíz

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x+3$ b) $5x^3+5x^2+x-1$ c) $2x^3+x^2+6x-3$ d) $3x^3-6x^2+x-2$

Solución: a) No podemos por ahora; b) No podemos por ahora; c) Tampoco; d) $(x-2)\cdot(3x^2+1)$.

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x-1}{x^2-3x}-\dfrac{4x}{x^2-6x+9}$ b) $\dfrac{x-1}{x^2-3x}-\dfrac{2x^2}{x^2-6x+9}$ c) $\dfrac{x+2}{x^2-3x}\cdot\dfrac{2x}{x^2-6x+9}$ d) $\dfrac{x-1}{x^2-3x}:\dfrac{2x}{x^2-6x+9}$

Solución: a) $\dfrac{-3x^2-4x+3}{(x-3)^2\cdot x}$ b) $\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2\cdot x}$ c) $\dfrac{2\cdot(x+2)}{(x-3)^3}$ d) $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2}$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) x^2-6x+9 b) x^4+8x^2+16 c) $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$ d) $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ f) x^2-36 g) $5x^2+1$ h) $5x^2-11$ i) x^4-3y^2

***Solución:** a) $(x-3)^2$; b) $(x^2+4)^2$; c) $(x+\sqrt{5}\,y)^2$; d) No;*

e) No; f) $(x+6)(x-6)$; g) No; h) $(\sqrt{5}\,x+\sqrt{11})(\sqrt{5}\,x-\sqrt{11})$; i) (x2 + $\sqrt{3}$ y)(x2 – $\sqrt{3}$ y)

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}+\dfrac{6}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

***Solución:** a) $\dfrac{-6x^2+26x+20}{2x\cdot(5-x)^2}$ b) $\dfrac{x^3+y^2\cdot x+y\cdot x^2+y^3}{x^3-x\cdot y^2-y\cdot x^2+y^3}$ c) $\dfrac{1}{(2x-1)}$*

15. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x-a}:\dfrac{x+a}{x-a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a-b}$

***Solución:** a) $\dfrac{x^6-1}{x^4+x}$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{(x+a)}$ c) $\dfrac{4}{(a+b)}$*

16. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a-y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

***Solución:** a) $\dfrac{(x+y)(y+a)(x-y+a)}{(x-y)(y-a)(x+y+a)}$; b) $\dfrac{x^3-x^2-3x+2}{x^2-3x-2}$; c) $\dfrac{(2x+3y)(2y-x)}{(3x+y)(5x+3y)}$*

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

17. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$ c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

***Solución:** a) x = 38/10 b) Sin solución c) Sin solución*

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son:

a) $\dfrac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x$ b) $x^4+8x^2-12=0$ c) $80x^4-48x^2+7=0$ d) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(x+5)^2}{25}=1$

***Solución:** a) 2 soluciones: –0.2965 y +2.6615 b) Dos soluciones: x = +1.13; x =–1.13*

c) 4 soluciones: $x=\pm\dfrac{1}{2}$; $x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{20}}$ d) Dos soluciones: x = 0 y x = –160/41

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:
    a) Escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras.
    b) Calcula la hipotenusa y los catetos.

***Solución:** a) Llamamos x a la longitud del cateto menor, $(x+3)^2 = x^2 + (x+1)^2$;*

b) Cateto menor = 2 + 2$\sqrt{3}$, cateto mayor = 3 + 2$\sqrt{3}$; hipotenusa = 5 + 2$\sqrt{3}$.

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

***Solución:** Ha ganado 14 partidas y perdido 8.*

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

***Solución:** Aristas 9 y 10 cm; Cubitos: 800.*

22. Las tres cifras de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

Solución: 987.

23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

Solución: 42, 41, 17 y 15 años.

24. Resuelve:

a) $\frac{x}{3} - 9 < 2$ b) $\frac{5x}{7} - 7 \le -5x$ c) $4(2x-3) > 1 - 7x$

d) $\frac{3(x+4)}{5} < 2x$ e) $\frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6}$ f) $\frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$

Solución: a) x < 33 ***b)*** $x \le \frac{49}{40}$ ***c) x > 13/15*** ***d) x > 12/7*** ***e) x > –8/5*** ***f) x < –1/13***

25. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$ c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$

Solución: a) $x \ge 2$ ***b)*** $x \le 3$ ***c)*** $x \le 5$ ***d)*** $x \ge -4$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \le 0$ c) $-x^2 + 49 \ge 0$ d) $5x^2 - 45 \ge 0$

e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$ g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \le 0$

Solución: a) –2 < x < 2 ***b)*** $-5 \le x \le 5$ ***c)*** $-7 \le x \le 7$ ***d)*** $-3 \le x \le 3$

e) –1/3 < x < 1/3 ***f) –3/4 < x < 374*** ***g) –6/7 < x < 6/7*** ***h) No tiene solución.***

27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-2x^2 + 50x \le 0$ b) $7x^2 + 3x \ge 0$ c) $2x^2 < 8x$

d) $-2x^2 - 24x \ge 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \ge 0$

Solución: a) $0 \le x \le 25$ ***b)*** $-3/7 \le x \le 0$ ***c) 0 < x < 4***

d) $-12 \le x \le 0$ ***e) –2 < x < 0*** ***f)*** $x \ge 0; x \le -6$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 \le 0$ b) $7x^2 > 0$ c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \ge 0$

Solución: a) x = 0; ***b) Toda la recta real;*** ***c) Toda la recta real;*** ***d) Toda la recta real;***

29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

Solución: ***a)*** $x \le -3/2$ ***o*** $x \ge 1$***;*** ***b) Toda la recta real;*** ***c) x = 1;***

d) Toda la recta real; ***e)*** $-2.4853... \le x \le 14.485...$***;*** ***f)*** $x \le -9$ ***o*** $x \ge 3$***;*** ***g)*** $-1/2 \le x \le 1/2$***.***

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de *Gauss* y discute el resultado:

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

Solución: a) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1;

b) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1; t = 1;

c) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 2;

d) Sistema compatible y determinado: x = 5/9, y = 11/3, z = 31/3;

e) Sistema compatible y determinado: x = 0, y = 0, z = 1;

f) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1, t = 1.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

   a) 17 b) 15 c) –3 d) –5

Solución: c) –3

2. Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

   a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

   c) debe ser de grado menor que 2. d) ninguna de las opciones precedentes.

Solución: c)

3. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

   a) tiene tres raíces reales b) tiene más de tres raíces reales

   c) tiene tres raíces complejas d) Tiene alguna raíz real.

Solución: d)

4. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces reales, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

Solución: No, si es de grado 4 tiene 4 raíces en el campo complejo, que pueden ser 4 raíces reales, 0 bien 2 raíces reales y 2 complejas, o las 4 complejas.

5. Tiene como solución x = 2 la inecuación siguiente:

   a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \le 2$ d) $x + 3 < 5$

Solución: c).

6. La ecuación $x^2 \le 4$ tiene de soluciones:

   a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

Solución: b)

7. La solución de la inecuación $|-x+7| \le 8$ es:

   a) [–1, 15] b) (–∞, –1] c) (–1, 1) d) [1, ∞)

Solución: a)

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x-9}$ son:

   a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \le 9/5$ d) $x \ge 9/5$

Solución: d)

9. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

   a) (1, 2) b) (–∞, 1) c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

Solución: a)

10. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

    a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

    b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

    c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

    d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

Solución: a) Falsa, sólo para dividir entre un polinomio de primer grado; b) Cierta, si el resto sale 0; c) Falsa, se suele usar con coeficientes enteros, pero es válida; d) Falsa. Sólo las raíces enteras y racionales.

CAPÍTULO 3: SUCESIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:
   a) 7, 10, 13, 16, … b) 2, 5, 10, 17,… c) 1, 3, 5, 7,… d) 0, 3, 8, 15, 24…

***Solución:** a)7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34…; b) 2, 3, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101…; c) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, …; d) 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99,…*

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

***Solución:** Sacando el término general de cada sucesión, sustituyendo el valor 100 en la n.*

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9.8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 10 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 30 segundos? Representa gráficamente esta sucesión.

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10				

Solución gráfica:

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10	19.8	29.6	294.2	10 + (n-1)·9.8 = 9,8n + 0,2

10 + 29(9.8) = 294.2 m/s.

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:
   a) $a_n = 3n^2 + 3$ b) $b_n = \frac{2n-1}{n+3}$ c) $c_1 = 1,\ c_n = 2c_{n-1} + 4$ d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

***Solución:** a) 6, 15, 30, 51; b) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1$; c) 1, 6, 16, 36; d) 2, 5, 19, 67.*

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:
   a) {–2, 2, –2, 2, –2, 2, –2, 2,…} b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…} c) {2, 4, 6, 8, 10,…} d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \ldots\right\}$

***Solución:** a) $a_n = (-2)\cdot(-1)^{n+1}$ b) $a_n = a_n + 2n-1$ c) $a_n = 2n$; d) $a_n = (2n-1)/(n^2+1)$*

6. En una sucesión el primer término es 5 y los demás se obtienen sumando 3 al término anterior. Hallar los 10 primeros términos de la sucesión.

***Solución:** 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32.*

7. Escribe el término general de las sucesiones:
   a) 6, 18, 54, 162, … b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, … c) 7, 0.7, 0.07, 0,007, … d) 2, 5, 8, 11, 15, …

***Solución:** a) $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$; b) $c_n = (n+2)/n$; c) $a_n = 7/10^{n-1}$ d) $a_n = 2 + 3(n-1)$.*

8. Un satélite artificial se puso en órbita a las 10 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 90 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta *n*-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 30 días más tarde a las 9 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

***Solución:** A)*

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado	*12*	*13.30*	*15*	*16.30*	*18*	*19.30*

B) $a_n = a_n + 90$; C) $a_n = a_{n-1} + 90$; D) $a_n = a_{n-1} + 90$

9. Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones siguientes e indica si son progresiones aritméticas, progresiones geométricas o de otro tipo.
   a) $a_n = 3 \cdot 3^n$ b) $a_n = 5n + 7$ c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$ d) $a_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n}$

***Solución:** a) 9, 27, 81, 243 (geométrica) b) 12, 17, 22, 27 (aritmética) c) 5, 11, 27, 47 (geométrica) e) 1/3, 5/6, 5/9, 9/12*

10. En las sucesiones del problema anterior que sean progresiones aritméticas, calcula la suma de los 6 primeros términos.

Solución: b) $S_6 = n\cdot(a_1 + a_6)/2$; $S_6 = 6\cdot(12 + 37)/2 = 176$.

11. En las que sean progresiones geométricas, calcula el producto de los 6 primeros términos y la suma de los 6 primeros términos.

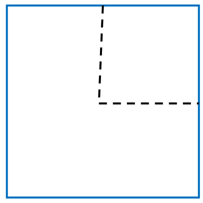
Solución: a) $S_6 = a_1\cdot(r^n-1)/r-1$; $S_6 = 9(3^6-1)/2 = 3276$; $P_6 = \pm\sqrt{(a_1.a_n)^n} = \pm\sqrt{(9\cdot 2187)^6} = 3^{27}$

12. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…

Solución: Es una progresión geométrica de término general $a_n = a_{n-1}\cdot r$ ***siendo*** $r = 1/2$.

Como $|r| < 1$ $S_\infty \approx \frac{a_1}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

13. Tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crece o disminuye? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área sobre la mesa o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



Solución: En la mano: 1, 1/4, $1/4^2$***, …. Disminuye;*** $1/4^{n-1}$;

Sobre la mesa: 0, 3/4, 3/4 + $(3/4)^2$***, …. Crecen;***

En área en la mano tiende a cero, mientras que el área sobre la mesa tiende a 1.

14. ***El error de Euler***: *Euler* fue un gran matemático, pero se encontró con el siguiente problema. Quizás tú seas capaz de ayudarle a resolverlo. Hizo la siguiente suma, donde r es un número positivo:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Primero sumó la primera parte, aplicando la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$: $\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$

Luego la segunda: $1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$

Y al sumar ambas obtuvo: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$, que evidentemente está mal pues la suma de infinitos números positivos no puede ser 0. ¿Dónde está el error?

Solución: La expresión $1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$ ***es cierta sólo si r, en valor absoluto es menor que 1.***

En la suma: $\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ ***en un caso es menor que uno, pero en el otro, no.***

15. Calcula la fracción generatriz del número $4.5\overset{\frown}{61}$.

Solución: 4516/990

16. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3.5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes.

¿Qué opción le interesa más?

Solución: la segunda opción.

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{n^2+2}{3n^2}$ b) $a_n = \frac{2n+2}{3(n+1)}$ c) $a_n = \frac{7}{5^n}$ d) $a_n = 4 + \frac{n+2}{n-3}$.

Solución: a) 1/3; b) 2/3; c) 0; d) 5.

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $a_n = \frac{5n^3+2n}{n-6}$ b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$ c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$ d) $a_n = 6 + \frac{5n+2}{2n-3}$

Solución: a) +∞; b) –1; c) 2; d) 17/2.

19. Escribe una sucesión cuyo límite sea 2, y otra de límite 0.

Solución abierta: Por ejemplo: $a_n = 2 + 1/n$; y $b_n = 1/n$.

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2-6}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{1+2n+7n^3}$ c) $\lim_{n\to\infty} \left(6-\frac{7}{n}\right)$ d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{n-3}-3\right)$

Solución: a) 0 b) 0 c) 6 d) –1

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n}$ b) $a_n = \left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2}$ c) $a_n = \left(1+\frac{7}{n+3}\right)^{n^2}$ d) $a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

Solución: a) e^0; b) $e\infty$ = +∞; c) e^∞ = +∞; d) e^∞ = +∞.

22. Calcula $1/e$ con tres cifras decimales exactas.

Solución: 0.3678

23. Calcula $\sqrt{e}$ con tres cifras decimales exactas.

Solución: 1.6487

24. Calcula el logaritmo neperiano de $1/e$ y de $\sqrt{e}$.

Solución: ln(1/e) = –1, ln($\sqrt{e}$) = 1/2.

25. Resuelve la ecuación $ln(x + 2) + ln(3x) = 1$

Solución: x = e, x = e/3 – 2

26. Resuelve la ecuación: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$.

Solución: x_1 = –1,74, x_2 = –4,25

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sucesiones

1. Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.

Solución: 2999.

2. El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia 1/2. Halla el primer término y el término 100.

Solución: a_1 = 3/2; a_{100} = 34.

3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.

Solución: 2, 4, 6.

4. Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1000 y 2000.

Solución: S = 35784; El primer término es 1008, y el término 24 es 1974.

5. La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60.5. Halla el primer término.

Solución: a_1 = 8.

6. El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5184 y el primer término es 3. Escribe el resto de términos.

Solución: r = 2; Los términos son: 3, 6, 12, 24.

7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?

Solución: 9650 €.

8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

***Solución:** $a_1 = 3$ $a_2 = 6$ $a_3 = 12$ $a_4 = 24$ $a_5 = 48$; $r = 2$.*

9. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

***Solución:** $x = 3$; $r = 2$; $x - 1 = 2$; $x + 1 = 4$; $2(x+1) = 8$.*

10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

***Solución:** 300.*

11. Halla la fracción generatriz del número decimal 0.12121212..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

Solución: $\frac{12}{100}+\frac{12}{100\cdot 100}+\frac{12}{100\cdot 100\cdot 100}+\ldots$

12. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?

***Solución:** Se sacaron el día 15: 0.015625 litros*

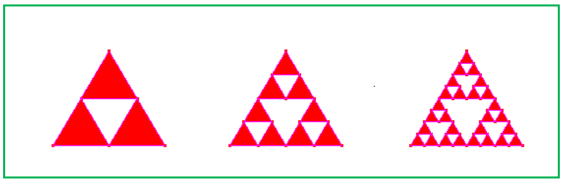
13. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

Solución:

$1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots$

$1 + 1/2 + 1/4 + \ldots + 1/2^{n-1} + \ldots + = 2$

14. *Triángulo de Sierpinski:* Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina *Triángulo de Sierpinski*, y es un fractal. A) Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? B) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



***Solución:** A) A, $(3/4)A$, $(9/16)A$, … , $(3/4)^{n-1}A$; Es decreciente; Tiende a 0; B) L, $2L$, $4L$, …, $2^{n-1}L$; Es creciente; Tiende a $+\infty$; Las longitudes tienden a $+\infty$, y las áreas a 0.*

Límite de sucesiones

15. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\frac{2n^3+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n=\frac{5n^2-4}{n^2-6n}$ c) $a_n=\frac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n=\frac{n-3}{n+7}$

***Solución:** a) 2 b) 5 c) 5/3 d) 1*

16. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\frac{2n^2+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n=\frac{5n-4}{n^2-6n}$ c) $a_n=\frac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n=\frac{-3}{n+7}$

***Solución:** a) 0 b) 0 c) 0 d) 0*

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\frac{2n^5+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n=\frac{5n^7-4}{n^2-6n}$ c) $a_n=\frac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n=\frac{n^2-3}{n+7}$

***Solución:** a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$*

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\frac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n=\frac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n=\frac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n=\frac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

***Solución:** a) 0 b) $+\infty$ c) 0 d) 1*

19. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(1 + \dfrac{3}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(1 - \dfrac{4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

Solución: a) 1 ***b) 1*** ***c) $e^{2/3}$***

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\dfrac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(\dfrac{5n^7 - 4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

Solución: a) $e^0 = 1$ ***b) $e^0 = 1$*** ***c) $e^{-\infty} = 0$.***

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2 + 2n}{n^2 - 6}\right)^{2n-3}$ b) $a_n = \left(\dfrac{n^2 - 4}{n^2 - 6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

Solución: a) e^4 ***b) e^6*** ***c) $e^{\frac{14}{3}}$***

Exponencial y logarítmica

22. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?

Solución: r = 0.046; En 100 días habrá aproximadamente 9123 peces.

23. Ingresamos en un banco 20.000 euros al 3 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?

Solución: 23.44.

24. Vanesa ha comprado un coche por 17.000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10 % cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?

Solución: Al cabo de 5 años por 10038 €, y a los 7 años: 8131 €.

25. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto, x, con su energía y (en ergios): $\log y = 11.4 + 1.5\,x$. Calcula la energía de un terremoto: a) de una intensidad 5 en dicha escala, y b) de una intensidad 7.

Solución: a) $7.94 \cdot 10^{18}$ ergios ***b) $7.94 \cdot 10^{21}$ ergios***

26. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de que tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?

Solución: 4860 cucarachas.

27. En la fórmula del término n–ésimo de una progresión geométrica, despeja n, aplicando logaritmos.

Solución: $n = (\log(a_n/a_1) - \log n) + 1$

28. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta 10 cm^3 que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta 10 cm^3 que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?

Solución: No sale exacto, entre 3 y 4.

29. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial: $(0.99)^n = 0.75$.

Solución: n = 28.6536.

30. Utiliza la calculadora para estimar el valor de 2^{63}. Estima también $2^{64} - 1$.

Solución: $2^{63} = 9.2233 \cdot 10^{18}$ · $2^{64} - 1 = 1.8446 \cdot 10^{19}$

31. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{2x-4} = 81$ b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$ c) $\sqrt[x-1]{8} = 2$ d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

Solución: a) x = 4; ***b) x = 2/7;*** ***c) x = 4;*** ***d) x = 15.***

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 7\cdot 4^{n-1}$?

a) 7 b) 4 c) –1 d) No es una progresión geométrica

Solución: a)

2. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar:

a) 1 b) 2 c) 11 d) 121

Solución: c)

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20,… es:

a) 220 b) 275 c) 55 d) 250

Solución: b)

4. La sucesión 1, 1/5, 1/25, 1/125,...:

a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5

c) Es una progresión geométrica de razón 1/5 d) Es una progresión aritmética de diferencia 1/5.

Solución: c)

5. La solución de la ecuación $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ es:

a) 40 b) 8 c) 10 d) 20

Solución: d)

6. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general:

a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$

Solución: d)

7. Pepa está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?

a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128

Solución: b)

8. A Luis le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832.04 € d) 7299.92 €

Solución: d)

9. La sucesión $a_n = \dfrac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ tiene como límite:

a) 0 b) ∞ c) –3/2 d) 7

Solución: d)

10. La sucesión $a_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ tiene como límite:

a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

Solución: b)

CAPÍTULO 4: TRIGONOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 60˚, 120˚, 225˚, 330˚.

***Solución:** 60º = π/3 rad; 120º = 2π/3 rad; 225º = 5π/4 rad; 330º = 11π/6 rad = 1,83π.*

2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\,\pi}{6}$ radianes.

***Solución:** 45º; 120º; 270º; 300º.*

3. ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?

***Solución:** π; π/2.*

4. Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4 m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿cuántas vueltas da por minuto?

***Solución:** Velocidad en rad/s = 2 rad/s; Velocidad en grados/s = 114,9 grad/s; Vueltas = 60/π vueltas por minuto.*

5. Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2 m. ¿Cuánto espacio ha recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera radio 0.5 m?

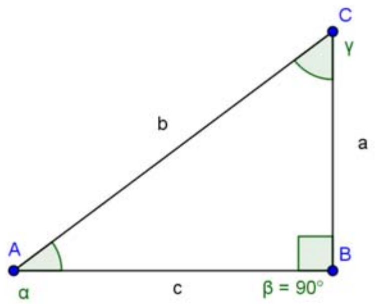
***Solución:** a) 6 m. b) 1.5 m.*

6. Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2 m. ¿cuánto espacio hemos recorrido? ¿y si tuviera radio 0.5 m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

***Solución:** Espacio1 = 4π/9 m. Espacio2 = π/9 m. Mas fácil en radianes.*

7. En la figura se verifica el teorema de *Pitágoras* $a^2 + c^2 = b^2$. Utilizando dicho teorema, demuestra la primera relación fundamental.

***Solución:** $a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow (a/b)^2 + (c/b)^2 = 1 \Rightarrow$ Como a/b = sen(α) y c/b = cos(α), entonces $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$.*



8. Utilizando las definiciones de las razones trigonométricas, demuestra la segunda relación fundamental.

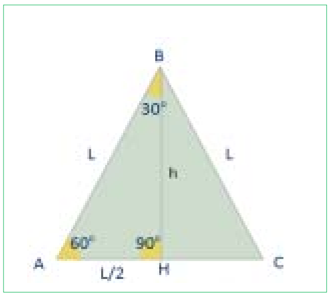
Solución: $tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$.

9. Utilizando la definición de las identidades, demuestra:

a) $1 + tg^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$ b) $1 + \cot g^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha)$

***Solución:** a) $1 + tg^2a = 1 + sen^2a/cos^2a = (cos^2a + sen^2a)/cos^2a = 1/ cos^2 a = sec^2a$;*

b) $1 + cotg^2a = 1 + cos^2a/sen^2a = (sen^2a + cos^2a)/sen^2a = 1/sen^2 a = cosec^2 a$



10. Comprueba las anteriores relaciones a partir de los ángulos de 30º y 60 º.

***Solución:** a) $1 + tg^2(30º) = 1 + ((L/2)/h)^2 = (h^2 + (L/2)^2)/h^2 = L^2/h^2 = sec^2(30º)$;*

$1 + tg^2(60º) = 1 + (h/(L/2))^2 = ((L/2)^2 + h^2)/(L/2)^2 = L^2/(L/2)^2 = sec^2(60º)$;

b) $1 + cotg^2(30º) = 1 + (h/(L/2))^2 = ((L/2)^2 + h^2)/(L/2)^2 = L^2/(L/2)^2 = cosec^2(30º)$;

$1 + cotg^2(60º) = 1 + ((L/2)/h)^2 = (h^2 + (L/2)^2)/h^2 = L^2/h^2 = cosec^2(60º)$;

11. Explica por qué el seno y el coseno de 45º son iguales, y por qué la tangente vale la unidad.

***Solución:** Compruébalo dibujando un triángulo rectángulo isósceles. Los dos catetos son iguales, luego el seno y el coseno coincide, y la tangente vale 1.*

12. Copia en tu cuaderno, sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

Solución:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente	Secante	Cosecante	Cotangente
135°	*sen(45º)*	*–cos(45º)*	*–tg(45º)*	*–sec(45º)*	*cosec(45º)*	*–cotg(45º)*
120°	*cos(30º)*	*–sen(30º)*	*–cotg(30)*	*–cosec(30º)*	*sec(30º)*	*–tg(30º)*
210°	*–sen(30º)*	*–cos(30º)*	*tg(30º)*	*–sec(30º)*	*–cosec(30º)*	*cotg(30º)*
315°	*–sen(45º)*	*cos(45º)*	*–tg(45º)*	*sec(45º)*	*–cosec(45º)*	*–cotg(45º)*
390°	*sen(30º)*	*cos(30º)*	*tg(30º)*	*sec(30º)*	*cosec(30º)*	*cotg(30º)*
3000°	*cos(30º)*	*–sen(30º)*	*–cotg(30º)*	*–cosec(30º)*	*sec(30º)*	*–tg(30º)*
–150°	*–sen(30º)*	*–cos(30º)*	*tg(30º)*	*–sec(30º)*	*–cosec(30º)*	*cotg(30º)*

13. Utiliza la calculadora para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360º cuyo seno es de 0.6.

Solución: ***x_1 = 36.86º; x_2 = 143.14º***

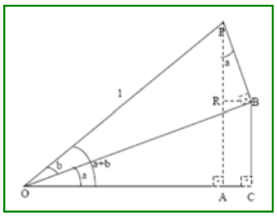
14. Utiliza la calculadora para encontrar todos los ángulos negativos menores, en valor absoluto, que 360º cuya tangente vale 4.

Solución: La calculadora nos dice que un ángulo de tangente 4 es 1.32581766 en radianes. En grados es, por tanto, 75.9637565. Los ángulos de tangente positiva están en el primer y tercer cuadrante, luego tenemos dos soluciones: –104.036243º y –284.036243º.

15. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360º y 720º cuyo coseno vale 0.75.

Solución: A_1 = 401.409º; A_2 = 678.591

2. CÁLCULO DE RAZONES DE UNOS ÁNGULOS A PARTIR DE OTROS



16. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º y 90º las razones trigonométricas de 75º, 120º, 150º, 105º y 135º

Solución: Desarrollar: 75 = 30+45; 120 = 90 + 30; 150 = 90 + 60; 105 = 60 + 45; 135 = 90 + 45.

sen(75º) = sen(30º + 45º) = 0.97; cos(75º) = cos(30º + 45º) = 0.26; tg(75º) = tg(30º + 45º) = 3.73.

sen(120º) = sen(90º + 30º) = 0.87; cos(120º) = cos(90º + 30º) = –0.5; tg(120º) = tg(90º + 30º) = –1.73.

sen(150º) = sen(90º + 60º) = 0.5; cos(150º) = cos(90º + 60º) = –0.87; tg(150º) = tg(90º + 60º) = –0.58.

sen(105º) = sen(60º + 45º) = 0.97; cos(105º) = cos(60º + 45º) = –0.26; tg(105º) = tg(60º + 45º) = –3.73.

sen(135º) = sen(90º + 45º) = 0.71; cos(135º) = cos(90º + 45º) = –0.71; tg(135º) = tg(90º + 45º) = –1.

17. Comprueba que las razones trigonométricas de 90º se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 30º y de 60º.

Solución: sen 90º = sen(30º + 60º) = sen 30º · cos60º + cos30º· sen60º = (1/2)(1/2) + ($\sqrt{3}$/2)($\sqrt{3}$/2) = 1/4 + 3/4 = 1

cos 90º = cos(30º + 60º) = cos30.cos60 – sen30.sen60 = ($\sqrt{3}$/2).(1/2) – (1/2).($\sqrt{3}$/2) = 0

tg 90º = tg(30º + 60º) = (tg30 + tg60)/(1 – tg30.tg60) = ((1/$\sqrt{3}$) + $\sqrt{3}$)/(1 – 1)). NO EXISTE.

18. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º y 90º las razones trigonométricas de 15º

Solución: Podemos utilizar que 15 = 45 – 30 o bien que 15 = 30/2.

sen(15º) = sen(45º – 30º) = 0.26; cos(15º) = cos(45º – 30º) = 0.97; tg(15º) = tg(45º – 30º) = 0.27.

19. Comprueba que las razones trigonométricas de 30º se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90º y de 60º.

Solución: 30 = 90 – 60, luego:

sen(30º) = sen(90º – 60º) = 0.5 = 1/2; cos(30º) = cos(90º – 60º) = 0.87 = $\sqrt{3}$/2; tg(30º)= tg(90º – 60º)= 0.58 =1/$\sqrt{3}$

20. Demuestra las fórmulas de ángulos complementarios usando las fórmulas de la resta. Es decir, verifica que $sen(90 - \alpha) = cos(\alpha)$ y las demás usando estas fórmulas. Observa que esta demostración es más general que la que hicimos antes, porque ahora α no tiene por qué ser agudo.

Solución: Complementarios sii A + B = 90: A = 90 – B desarrollar.

sen (90º – α) = sen(90º) · cos(α) – cos(90º) sen(α) = 1 · cos(α) – 0 sen(α) = cos(α).

cos(90º – α) = cos(90º) · cos(α) + sen(90º) sen(α) = 0 · cos(α) + 1 sen(α) = sen(α).

tg(90º – α) = (tg(90º) – tg(α))/(1 + tg(90º)·tg(α)) = (0 – tg(α))/(1 + 0·tg(α)) = 1/tg(α).

21. Calcula las razones trigonométricas de 22.5º y 11.25º a partir de las razones trigonométricas de 45º.

Solución: a) 45º = 22.5 = 45/2. Se usan las razones del ángulo mitad.

sen(22.5) = $\sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} =$ ***0.38268. Cos 22.5 =*** $\sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} =$ ***0.9238***

b) 11.25 = 22.5/2 resolución igual. Sen 11.25 = 0.1951; cos 11.25 = 0.9807.

22. Comprueba que las razones trigonométricas de 45º se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90º.

Solución: 45º = 90º / 2, luego se pueden usar las fórmulas del ángulo mitad.

23. Calcula $cos(3a)$ en función únicamente de $cos(a)$,

Solución: cos(3a) = 4cos³(a) – 3cos(a).

24. Calcula $sen(4a)$ en función únicamente de $sen(a)$ y $cos(4a)$ en función de $cos(a)$.

Solución: sen 4a = 4sen a·cos a(1 – 2 sen³a)· cos 4a = 8cos⁴a – 8 cos² a + 1.

25. Calcula sin hacer uso de la calculadora: a) $sen(75) - sen(15)$; b) $cos(15) - sen(15)$

Solución: sen 75 – sen 15 = 2 cos 45. sen 30 = . $2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot=\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 15 – sen 15 = sen 75 – sen 15 = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ***.***

26. Vuelve a calcularlo ahora, utilizando la calculadora. ¿Has obtenido lo mismo? ¿Qué has usado, grados o radianes?

Solución: Debe ser la misma, pero cuida usar bien los grados y los radianes. a) 0.707. b) 0.707.

27. Utiliza las transformaciones de sumas en productos para poner en función del seno y coseno del ángulo a:

a) $sen(45+a) + sen(45 - a)$; b) $cos(120+a) + cos(60 + a)$; c) $cos(270 - a) - cos(90 - a)$

Solución: a) $\sqrt{2}$***cos a; b) –***$\sqrt{3}$***sen a; c) –2sen a.***

28. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica:

a) $\frac{sen(5a)+sen(3a)}{\cos(5a)+\cos(3a)}$ b) $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}$

Solución: a) tg 4a; b) tg x.

3. ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

29. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $cos(3x) = 0$ b) $tg(2x) = -1$ c) $sen(4x) = -1$

Solución: a) x = 30 + k60; b) x = 135 + k180; c) x = 67.5 + k90;

30. Expresa en radianes las soluciones de la actividad resuelta ($sen(2x) = 1/2$) y de la actividad propuesta anterior.

Solución: a) $x_1 = \pi/6 + k\pi/3$ ***rad.*** $x_2 = 3\pi/6 + k\pi/3$ ***rad.***

b) $x_1 = 3\pi/8 + k\pi/2$ ***rad.*** $x_2 = 5\pi/8 + k\pi$ ***rad.***

c) $x = 3\pi/8 + k\pi/4$

d) sen (2x) = 1/2; $x_1 = \pi/6 + k\pi$; $x_2 = 5\pi/6 + k\pi$.

31. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $cos(5x) - cos(x) = 0$ b) $sen(2x) - sen(4x) = 0$

Solución: a) $x_1 = 0 + k60$; $x_2 = k90$; ***b)*** $x_1 = 30 + k60$; $x_2 = k180$;

32. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen(x) + cos(x) = 1$ b) $sen(2x) = 2\cdot\cos(x)$ c) $sen^2(x) - cos^2(x) - cos(2x) = 1$

Solución: a) $x_1 = 0 + 2k\pi$, $x_2 = 90^o + 2k\pi$, ***b) x = 90 + k180. c)*** $x_1 = 60 + k180$; $x_2 = -60 + k180$.

33. Resuelve los siguientes sistemas: a)

a) $\left.\begin{array}{l} x+sen^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} sen(x)\cdot\cos(y)=\frac{3}{4} \\ \cos(x)\cdot sen(y)=\frac{1}{4} \end{array}\right\}$

Solución: a) x = 1; y = 90 + k180; b) x = 60 + k180; y = 30 + k180.

34. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\left.\begin{array}{l} sen(x)-sen(y)=0 \\ x-y=\pi \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} sen(x)\cdot\cos(y)=\frac{1}{2} \\ x+y=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$

Solución: a) sen y =0; y = +kπ; k = 0.1,...; x = π + kπ.

b) sen x = $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_1 = \pi/4 + 2k\pi$; $y_1 = \pi/4 + 2k\pi$; $x_2 = -\pi/4 + 2k\pi$; $y_2 = 3\pi/4 + 2k\pi$

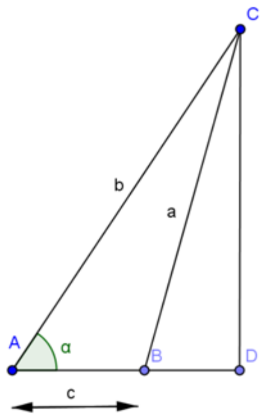
35. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\left.\begin{array}{l} \cos(x-y)=0 \\ \cos(x+y)=0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} sen(x-y)=1/2 \\ \cos(x-y)=1/2 \end{array}\right\}$

Solución: a) x = 90, y = 0 o bien x = 180, y = 90; o bien x = 270, y = 0; Todos ellos + k360.

b) INCOMPATIBLE.

4. RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

36. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [***Pista:*** los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].



***Solución:* Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura cae fuera del lado AB. Queremos calcular el lado $a = BC$. Por el teorema de Pitágoras es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB. Lo que sí tenemos es $b = AC$, $c = AB$ y el ángulo α. Sabemos que $sen(\alpha) = CD/AC \Rightarrow CD = ACsen(\alpha)$. Sabemos también $\cos(\alpha) = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC\cos(\alpha)$. Pero, por construcción $AD = AB + BD$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AD - AB$. Recapitulando y escribiendo en función de a, b y c que son los datos originales:**

$$CD = AC\,sen(\alpha) \Rightarrow CD = b\,sen(\alpha)$$

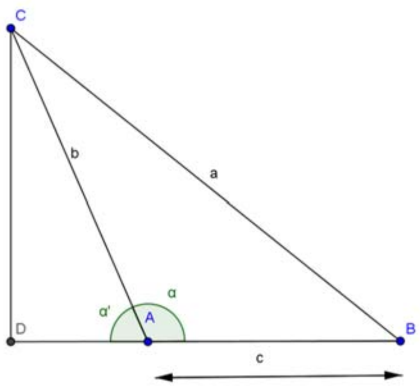
$$DB = AD - AB = b\cos(\alpha) - c$$

Finalmente* $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [b\cos(\alpha) - c]^2$. *Basta operar un poco:

$$a^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [b\cos(\alpha) - c]^2 = b^2 sen^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 sen^2(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2\left[sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right] + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Pero* $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.



37. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:

a) En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α'. Se cumple que $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$, ¿por qué?

b) Considera el triángulo rectángulo DBC y pon a en función de CD y DB.

c) De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b, c y α'.

d) Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b, c y α'. Al sustituir el $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ tienes el resultado.

***Solución:* a) El coseno de α es negativo.**

b) $a^2 = CD^2 + DB^2$;

c) $DB = c + b\cos(\alpha')$; $CD = b\,sen(\alpha')$;

d) $a^2 = b^2 sen^2(\alpha') + (c + b\cos(\alpha'))^2 = b^2 sen^2(\alpha') + c^2 + b^2\cos^2(\alpha') + 2cb\cos(\alpha') = b^2 + c^2 + 2cb\cos(\alpha') = b^2 - c^2 + 2cb\cos(\alpha)$

38. Dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medida pero debería ser muy similar.

***Solución:* a = 5.2646.**

39. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.

***Solución:* A = 21.78º, B = 38.21º, C = 120º.**

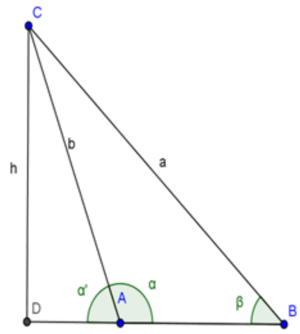
40. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones.

b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?

***Solución:* A_1 = 101.41º, B_1 = 30º, C_1 = 48.59º, a_1 = 2 cm; A_2 = 41.41º, B_2 = 30º, C_2 = 138.59, a_2 = 3.92 cm.**

41. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [***Pista:*** hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos]



Solución: Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura cae fuera del lado AB. Por definición de seno, tenemos $sen(\alpha') = \frac{h}{b}$ y también $sen(\beta) = \frac{h}{a}$. De este modo, despejando h en los dos lados e igualando $b\,sen(\alpha') = h = a\,sen(\beta)$. En otras palabras $b\,sen(\alpha') = a\,sen(\beta) \Rightarrow \frac{a}{sen(\alpha')} = \frac{b}{sen(\beta)}$. Pero $sen(\alpha') = sen(\alpha)$

42. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $sen\,90 = 1$

Solución: A = 90º sen B = b/a; a = b/senB; sen C = c/a; a = c/sen C, sen 90º = 1;

a/senA = b/senB = c/senC.

43. Como antes, dibuja un triángulo con b = 5, c = 8 y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^{\circ}$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a.

Solución: B = 37.73º, C = 102.37º, a = 5.26 cm. Indicación: trazar altura relativa al lado b y resolver triángulos rectángulos.

44. Un triángulo dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.

Solución: El otro ángulo mide 80º. Y los lados: 12.26 cm y 9.1 cm.

45. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados. a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos. b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?

Solución: a) C_1 = 19.47º, C_2 = 160.05º. b) A_1 = 130.53º, A_2 = 180 – (30 + 160.05) No admisible.

46. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?

Solución: Alt. = 15.5573 m.

47. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60°, y el Big Ben con un ángulo de 45°. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?

Solución: Altura = 32.67 m, Distancia = 17.32 m.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos y razones trigonométricas

1. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α. [Hay dos soluciones].

Solución: Primera solución: sen a = 2/3. tg a = $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Segunda solución: sen a = –2/3. tg a = $\frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2. Calcula sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas
   a) $sen(\alpha)$ = 0,2 (cuadrante II); b) $cos(\alpha)$ = –0,3 (cuadrante III) c) $tg(\alpha)$ = 2 (cuadrante I)

Solución: a) cos α = –0.98, tg α = –0.206; b) sen α = –0.95, tg α = 3.16; c) sen α = $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, ***cos α =*** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

3. Sabiendo que $sen\alpha = -\frac{4}{5}$, y que α es un ángulo del tercer cuadrante, halla el coseno y la tangente de dicho ángulo.

Solución: cos α = –3/5; tg α = 4/3.

4. Si tgx = 1/3, y x es un ángulo del primer cuadrante, calcula: a) $tg(180º – x)$ b) $sen(180º + x)$ c) $cos(360º – x)$

Solución: a) –1/3, b) $\frac{-1}{\sqrt{10}} = \frac{-\sqrt{10}}{10}$***; c)*** $\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

5. Sabiendo que $sen\alpha = 0.5$, y que α es un ángulo del SEGUNDO cuadrante, halla las otras cinco razones de dicho ángulo.

Solución: cos (α) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ***; tg(α) =*** $\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ***; sec(α) =*** $\frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ***. cosec(α) = 2.***

Identidades y ecuaciones trigonométricas

6. Resuelve: a) $3sen^2x + \cos^2 x + \cos x = 0$ b. $tgx = \sqrt{2}\cos x$

Solución: a) x = 180 + k360 = π + 2kπ; b) $x_1 = 45 + k360 = \pi/4 + 2k\pi$, $x_2 = 135 + k360 = 3\pi/4 + 2k\pi$.

7. Demuestra las siguientes identidades:

   a) $(tg\ x)(\cos\ x) = sen(x)$ b) $\cot g^2x - 1 = \frac{\cos(2x)}{sen^2x}$ c) $\sec^2 x = 1 + tg^2x$

   d) $1 + \cos(2x) = \frac{2}{1+tg^2x}$ e) $\operatorname{cosec}^2x = 1 + \cot g^2 x$ f) $\frac{\cos x + senx}{\cos x - senx}\cdot\cos 2x = 1 + sen\,2x$

Solución: a) tg(x) = sen(x)/cos(x) $\Rightarrow (tg\ x)(\cos\ x) = sen(x)$;

b) $\cot g^2(x) - 1 = \cos^2(x)/sen^2(x) - 1 = (\cos^2(x) - sen^2(x))/sen^2(x) = \cos(2x)/sen^2(x)$;

c) $1 + tg^2(x) = 1 + sen^2(x)/\cos^2(x) = (\cos^2(x) + sen^2(x))/\cos^2(x) = 1/\cos^2(x) = \sec^2(x)$;

d) $1 + \cos(2x) = 1 + \cos^2(x) - sen^2(x) = \cos^2(x) + \cos^2(x) = 2\cos^2(x)/1 = 2\cos^2(x)/(sen^2(x) + \cos^2(x)) = 2/(1 + sen^2(x)/\cos^2(x))$

e) $1 + \cot g^2(x) = 1 + \cos^2(x)/sen^2(x) = (sen^2(x) + \cos^2(x))/sen^2(x) = 1/sen^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$;

f) $\frac{\cos x + senx}{\cos x - senx}\cdot\cos 2x = \frac{\cos(x)+sen(x)}{\cos(x)-sen(x)}(\cos^2(x) - sen^2(x)) = \frac{\cos(x)+sen(x)}{\cos(x)-sen(x)}(\cos(x)-sen(x))(\cos(x)+sen(x)) = 1$

8. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:

   a) $sena\cdot sen(a-b) + \cos a\cdot\cos(a-b) = \cos b$; b) $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Solución: a)

$$sena\cdot sen(a-b) + \cos a\cdot\cos(a-b) = sena\cdot(sena\cos b + \cos a\,senb) + \cos a(\cos a\cos b - sena\,senb) =$$
$$sena\,sena\cos b + sena\cos a\,senb + \cos a\cos a\cos b - \cos a\,sena\,senb = sena\,sena\cos b + \cos a\cos a\cos b =$$
$$(sen^2a + \cos^2 a)\cos b = \cos b$$

b) tg(a + b) = (tga + tgb)/(1 – tga·tgb) $\Rightarrow$ ***tg(2α) = 2tg(α)/(1 – tg²(α)).***

9. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos 2\alpha - 3sen\,\alpha + 1 = 0$ b) $sen\,\alpha + \cos\,\alpha = 0$

Solución: a) sen a =1/2; $a_1 = \pi/6 + 2k\pi$; $a_2 = 5\pi/6 + 2k\pi$. ***b) a = 3π/4 +kπ.***

10. Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades: a) $\frac{1+tg^2x}{1+\cot g^2x} = tg^2x$ b) $\frac{sen(2x)}{1+\cos(2x)} = tg(x)$

Solución: a) Cierta. b) Cierta.

11. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades: a) $\frac{2senx}{tg2x}=\cos x-\frac{sen^2x}{\cos x}$ b) $\frac{1-sen^4x}{\cos^2 x}=2-\cos^2 x$

Solución: *a)* $\frac{2senx}{tg2x}=\frac{2senx}{2tgx/(1-tg^2x)}=\frac{2senx(1-tg^2x)}{2senx/\cos x}=\frac{1-sen^2x/\cos^2 x}{1/\cos x}=\cos x(\cos^2 x-sen^2x)/\cos^2 x=\cos x-\frac{sen^2x}{\cos x}$;

b) $\frac{1-sen^4x}{\cos^2 x}=\frac{(1+sen^2x)(1-sen^2x)}{\cos^2 x}=\frac{(1+sen^2x)\cos^2 x}{\cos^2 x}=1+sen^2x=1+(1-\cos^2 x)=2-\cos^2 x$

12. Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades: a) $\frac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$ b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$

Solución: *a)* $\frac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=\frac{1+sen^2(\alpha)/\cos^2(\alpha)}{1+\cos^2(\alpha)/sen^2(\alpha)}=\frac{sen^2(\alpha)(\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha))}{\cos^2(\alpha)(sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))}=\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$, *cierta;*

b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\frac{1-sen^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\frac{(1+sen(\alpha))(1-sen(\alpha))}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$, *cierta:*

13. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos x\cdot\cos 2x+2\cos^2 x=0$ b) $tgx-sen2x=0$

Solución: a) x_1 = 90º + 180k = π/2 + kπ; x_2 = 68.53º + k.360º = 1.196 + 2kπ;

b) x_1 = 0º + 180k = kπ; x_2 = 45º + 180k = π/4 + kπ.

14. Demuestra que son ciertas las igualdades: a) $\cos(\alpha-\beta)-(sen\beta)(tg\alpha)(\cos\alpha)=\frac{\cos\alpha}{\sec\beta}$ b) $sen(270-\alpha)+\cos(\alpha)=0$

Solución: *a)* $\cos(\alpha-\beta)-(sen\beta)(tg\alpha)(\cos\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta-(sen\beta)(sen\alpha/\cos\alpha)(\cos\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta-sen\beta sen\alpha=$
$=\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\sec\beta}$

b) $sen(270-\alpha)+\cos(\alpha)=sen(270)sen(\alpha)-\cos(270)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)=0-1\cdot\cos(\alpha)-\cos(\alpha)=0$

15. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2\alpha)+1=4\cos\alpha$ (dando TODAS las soluciones posibles).

Solución: α = 90 + k360 = π/2 + 2kπ.

16. Resuelve la ecuación trigonométrica $\frac{sen(2x)}{tgx}+\cos^2 x=1$ dando TODAS las soluciones posibles.

Solución: x_1 = 0 + k360 = 2kπ; x_2 = 180 + k360 = π + 2kπ; x_3 = 54.73 + k360; x_4 = –54.73 + k360; x_5 = 125,26 + k360; x6 = 234.73 + k360.

17. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2x)+\cos(x)=0.2$ dando TODAS las soluciones posibles.

Solución: cos x = 0.4219; x = ±65.04º + k360º.

18. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $sen^2(x)-sen(x)=0$ b) $\cos(x)+sen^2(x)=1$; c) $3tg^2(x)=\sec^2(x)$ d) $sen(2x)=0.5$

Solución: a) x_1 = k180. x_2 = 90 + k360. b) x_1 = 90 + k180. x_2 = k180; c) x_1 = 35.26 + k180. x_2 = –35 + k180. x_3 = 90 + k180.
d) x_1 = 15 + k180. x_2 = 75 + k180.

19. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\left.\begin{array}{l}x+sen^2y=2\\x+\cos^2y=1\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l}sen(x)\cdot\cos(y)=\frac{3}{4}\\\cos(x)\cdot sen(y)=\frac{1}{4}\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l}\cos(x)+\cos(y)=1\\\cos(x+y)=1\end{array}\right\}$

Solución: a) x_1 = 1; y_1 = 90 + k360. x_2 = 1; y_2 = -90 + k360.
b) x_1 = 60 + k360, y_1 = -60 + k360; x_2 = -60 + k360, y_2 = 60 + k360.
c) x_1 = 60 + k360, y_1 = 30 + k360, x_2 = -60 + k360, y_2 = 150 + k360.

20. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $sen(3x)-sen(30^\circ)=0$, c) $sen(2x)=2\cdot\cos(x)$

Solución: a) $x_1 = 7.5 + k180$; $x_2 = 105 + k180$; b) $x_1 = 10 + k120$, $x_2 = 50 + k120$. c) $x_1 = 90 + k180$, $x_2 = 90 + k360$.

21. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2$

b) $\dfrac{sen(2a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos 2a)}$

c) $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}$

d) $\dfrac{tg(a)}{tg(2a)-tg(a)}$

e) $\dfrac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}$

Solución: a) $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2 = 2$; b) $\dfrac{sen(2a)\cdot cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos 2a)} = 1$;

c) $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot cos^2(x)}{sen(x)} = -cotg\ x$; d) $\dfrac{tg(a)}{tg(2a)-tg(a)} = 1$; e) $\dfrac{sen(x-y)-sen(x+y)}{cos(x+y)-cos(x-y)} = \cos 2a$.

Problemas de resolución de triángulos

22. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36º y 48º. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 metros. Calcula la altura de la antena.

Solución: Altura = 58.34 m.

23. Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto AC = 15cm. y la altura relativa a la hipotenusa AD = 12cm.

Solución: a = 25 cm, b = 15 cm, c = 20 cm, B = 36.87 º, C = 53.13º.

24. Calcular el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 35 cm de perímetro. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.

Solución: Área = 84.6874 cm², Radio = 5.02 cm.

25. En un tramo de carretera la inclinación es del 5 % (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

Solución: sen a = 5/100; a = 2.8659 º; 5/100 = 100/x: x = 2000 m.

26. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?

Solución: A = 24.24º.

27. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: A = 55º, B = 98º, a = 7.5 cm. Resuélvelo.

Solución: b = 9.066 cm, c = 4.157 cm, C = 27º.

28. En un triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos A = 35º, b = 20 cm, c = 14 cm. Resuélvelo.

Solución: a = 11.72 cm, B = 78.18 º, C = 66.82 º.

29. Halla los ángulos de un triángulo del que se conocen los tres lados: a = 37 cm, b = 42 cm, c = 68 cm.

Solución: cos A = 0.8786. A = 28.5260 º. sen A = 0.4774; B = 32.8267 º. C = 118.6473 º.

30. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127º. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km. ¿Podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo=milla/hora; milla=1850 m).

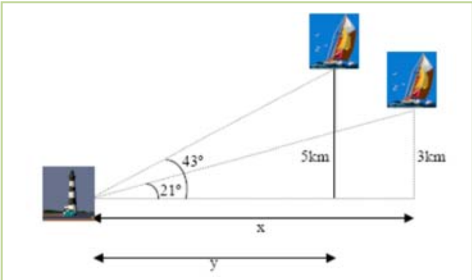
Solución: Distancia a las 3 h = 230.436 Km, por consiguiente, NO podrán ponerse en contacto.

31. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50º y el otro con un ángulo de 38º. ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?

Solución: Sea B la cometa. AB = 92.39 m. CB = 114.96 m.

32. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 70 metros. El cable más corto mide 90 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 42º. Calcula:
    a) La medida del otro cable.
    b) La distancia del globo al suelo.

Solución: a) 115.71 m, b) 77.427 m.



33. Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43º con la costa, y el barco B con 21º. El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcula distancia entre los barcos.

Solución: x = 7.8152: y = 5.3618; d(A, B) = 3.1654.

34. Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 140 m y 200 m respectivamente, y el ángulo comprendido entre

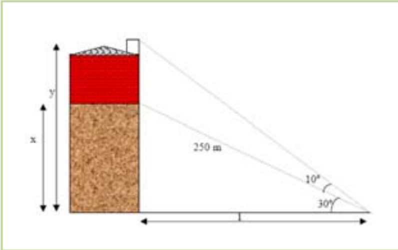
ambos es de 35º. Calcula el perímetro y la superficie de la finca.

Solución: Área = 8030 m², Perímetro = 457.16 m.

35. Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

Solución: Área = 21.4 cm², Perímetro = 17.63 cm.

36. Calcula la altura del edificio:

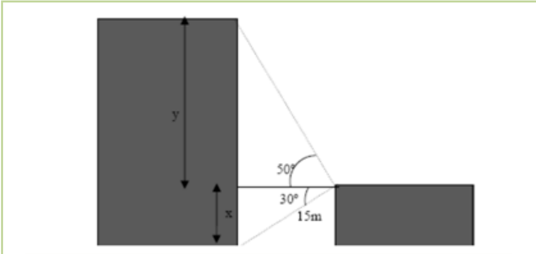


Solución: x = 125 m, y = 181.67 m.

37. Dos personas A y B distan entre sí 200m y ven un globo que está situado entre ambas. La primera persona lo ve con un ángulo de 30º y la segunda con un ángulo de 60º.
    a) ¿A qué distancia está *B* del globo?
    b) ¿A qué altura está el globo?
    c) Una persona que esté situada dentro del globo ¿Con qué ángulo ve a *A* y *B*?

Solución: a) 100 m. b) Altura = 86.60 m; c) A bajo ángulo de 30 º; B bajo ángulo de 60 º

38. Calcula la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo.



Solución: Altura = 22.98 m.

39. Deseamos medir la altura de un edificio. Si lo observamos desde un punto A lo vemos con un ángulo de 50º. Ahora bien, si lo contemplamos desde 20m más lejos el ángulo es de 40º. ¿Cuál es la altura del edificio? ¿A qué distancia está el punto B de dicho edificio?

Solución: d(A, H) = 47.59; h = 56.8135 m.

40. Calcula todos los ángulos de un triángulo de lados 4.5 y 6. ¿Hay más de una solución? Si hay más de una, calcúlalas todas, si hay una sola, explica por qué.

Solución: A = 82.82 º, B = 55.77º, C = 41.41º. Dados tres lados hay una única solución.

41. Justifica que hay EXACTAMENTE DOS triángulos con lados a = 4, b = 5 y ángulo α (el opuesto al lado a) igual a 45º.

Solución: sen B = 0.8838; Tenemos dos ángulos con ese valor del seno: B_1 = 62.11 º; C_1 = 72.89 º; c_1 = 5.409; B_2 = 117.89 º; C_2 = 17.11 º; c_2 = 1.664

42. Resuelve los siguientes triángulos: a) α = 45º, b = 50m, a = 40m; b) β = 30º, a = 5cm, b = 3cm
    c) α = 45º, γ = 60º, b = 20m d) γ = 45º , b = 10m, c = 6m; e) a = 5cm, b = 4cm, c = 4cm

Solución: a) β = 62.11 º, γ = 72.88 º, c = 54.06 cm.
b) α = 56.44 º, γ = 72.88 º, c = 54.06 cm.
c) β = 75º, a = 14.64 m. c = 17.93 m.
d) No existe triángulo. (sen B mayor que 1).
e) α = 77.36 º, β = γ = 51.32 º

43. Comenzamos en una ciudad A y observamos un cartel. La ciudad B está a 50 Km y la ciudad C a 40 Km. Medimos el ángulo que forman las dos carreteras y resulta ser de 60º. ¿A qué distancia está B de C? Desde la ciudad B ¿Con qué ángulo se ven las otras dos ciudades? [En otras palabras: si consideramos el triángulo ABC, ¿cuánto vale el ángulo β que corresponde al vértice B?]

Solución: BC = 45.82 km, B = 49.10 º

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula las siguientes razones trigonométricas sin hacer uso de la calculadora.
   a) $sen(-750°)$ b. $tg(570°)$ c. $cos(20\pi/3)$

Solución: a) sen(–750º) = 1/2; b) tg(570) = $\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) cos(20π/3) = –1/2

2. A partir de las razones trigonométricas de la suma calcula las siguientes razones trigonométricas:
   a. $sen(105°)$ b. $cos(75°)$

Solución: sen (105) = sen(60+45) = sen 60.cos45 + cos 60.sen 45 = $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ = 0.9659

cos(75) = sen(30+45) = cos 30.cos45 - sen 30.sen 45 = $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ =0.2588

3. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos a = 10 cm, b = 20 cm, $\hat{A}$ = 30º. Calcula los demás datos del triángulo. Calcula el área del triángulo

Solución: a = 10; b = 20; c = 17.32; Â = α = 30º, β = 90º; γ = 60º; Área = 86.60 m².

4. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60º En la misma dirección, pero formando un ángulo de 30 º vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?

Solución: Sí lo conseguirá. Están a 105.83 m.

5. Calcula sin utilizar la calculadora el resto de razones trigonométricas (seno, coseno) de α, sabiendo que $tg(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in$ 3er cuadrante.

Solución: sen a = $\frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; cos a = $\frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

6. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $6\cdot cos^2(x/2) + cos(x) = 1$ b. $sen(x) + cos(x) = \sqrt{2}$

Solución: a. Dos soluciones x = 120 + 360k o bien x = 240 + 360k
b. x = 45+180k, (x_2 = 135 + k360 no admisible).

7. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\begin{cases} sen(x)+sen(y)=1 \\ x+y=\pi \end{cases}$

   b. $\begin{cases} sen(x)+sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen(x)-sen(y)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ sen(x)+sen(y)=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Solución: a. Dos soluciones: Nótese que 2kπ va en direcciones opuestas: (π/3+2kπ, 2π/3–2kπ) , (2π/3+2kπ, π/3–2kπ)
En grados: (x = 60+360k,y = 120–360k), (x = 120+360k, y = 60–360k)
b. Dos soluciones: (x = 5π/12+2kπ, y = π/12–2kπ), (x = π/12+2kπ, y = 5π/12–2kπ);
En grados: (x = 75+360k, y = 15–360k), (x = 15+360k, y = 75–360k)
c. Cuatro soluciones: (x = π/3+2kπ, y = π/6–2kπ), (x = 2π/3+2kπ, y = π/6–2kπ), (x = π/3+2kπ, y = 5π/6–2kπ), (x = 2π/3+2kπ, y = 5π/6–2kπ),
En grados: (x = 60+360k, y = 30+360k), (x = 120+360k, y = 30+360k), (x = 60+360k, y = 150+360k), (x = 120+360k, y = 150+360k).

8. Demuestra las siguientes igualdades:
   a) $cos(x+y+z) = cos(x)\cdot cos(y)\cdot cos(z) - cos(x)\cdot sen(y)\cdot sen(z) - sen(x)\cdot cos(y)\cdot sen(z) - sen(x)\cdot sen(y)\cdot cos(z)$

   b) $\dfrac{sen^2(2a)}{(1-\cos^2 a)\cdot\cos(a)} = 4\cdot\cos(a)$

Solución: a) Aplicar las fórmulas de la suma para el coseno (dos veces) y para el seno.
b) Sustituir el sen(2a) por su valor y aplicar que 1–cos²a es el seno al cuadrado

9. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio. Calcula su área

Solución: perímetro = 300.sen 36º = 176.3355 m.; área = 713.292 m².

10. En las señales de tráfico que indican la pendiente de la carretera la información que nos dan es el porcentaje de subida en función del avance del coche. Calcula el ángulo para una pendiente del 15 %.

Solución: 8.67º

CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA ANALÍTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

VECTORES

1. Dados los puntos $P=(2,\ 2)$, $Q=(1,\ 0)$ y $R=(-2,\ 3)$ y los vectores $\vec{v}=(1,\ -1)$, $\vec{w}=(0\ ,\ -2)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

   a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v}-2\vec{w}$ c) $\vec{v}-\overrightarrow{RP}$ d) $P+\vec{v}$ e) $R+\overrightarrow{PQ}+\vec{w}$

Solución: a) QP = (1, 2) vector; b) (3, 1) Vector; c) (–3, 0) Vector; d) (3, 1) Punto; e) (–3, –1), Punto.

2. Dados tres puntos genéricos, $P=(p_1,\ p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$ y $R=(r_1,r_2)$, demuestra:

   a) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ}=(-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PQ}$

Solución: Teoría

3. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores.

   a) $(1,2)\cdot(-2,3)$ b) $(1,2)\cdot(0,0)$ c) $(1,2)\cdot(-2,1)$ d) $(3,2)\cdot(1,3)$

   e) $\overrightarrow{(-1,-2)}\cdot\overrightarrow{(2,0)}$ f) $\overrightarrow{(5,-1)}\cdot\overrightarrow{(3,-4)}$ g) $\overrightarrow{(0,1)}\cdot\overrightarrow{(-2,0)}$ h) $\overrightarrow{(3,4)}\cdot\overrightarrow{(-4,3)}$

Solución: a) 4; b) 0; c) 0; d) 9; e) –2; f) 19; g) 0; h) 0.

4. Considera tres vectores genéricos $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2)$ así como un escalar genérico k. Demuestra las propiedades 1 a 3 del producto escalar.

Solución: Teoría

5. En el problema anterior que dice "Calcula todos los lados y ángulos del triángulo A(1, 2), B(4, 2) y C(5, 5), repite el cálculo de ángulos cambiando el orden en que se toman los puntos $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$. ¿Cómo cambian los ángulos? ¿Por qué?

Solución: Estamos tomando los ángulos suplementarios de los del triángulo, por lo que los cosenos cambian de signo: $\cos\alpha=\frac{-12}{15}$; $\cos\beta=\frac{-\sqrt{10}}{10}$; $\cos\gamma=\frac{-13\sqrt{10}}{50}$

6. Calcula todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos de dos maneras. Primero con el método anterior y luego por el que se indica:
   a) $A=(1,1)$, $B=(1,4)$, $C=(2,2)$. Calcula los tres lados y luego usa trigonometría.
   b) $A=(1,-1)$, $B=(2,4)$, $C=(2,2)$. Calcula los lados a y c y el ángulo β y luego usa trigonometría.
   c) $A=(1,1)$, $B=(2,3)$, $C=(3,-2)$. Calcula el lado a y los ángulos β y γ y luego usa trigonometría.
   d) $A=(0,1)$, $B=(1,4)$, $C=(2,3)$. Calcula tres datos cualesquiera (los que sean, tres lados, dos ángulos y un lado…) y luego usa trigonometría.

Solución: a) a = $\sqrt{5}$; b = $\sqrt{2}$; c = 3; A = 45º, B = 26.56º, C = 108.43º

b) a = 2, b = $\sqrt{10}$; c = $\sqrt{26}$; A = 7.12º, B = 11.31º, C = 161.57º.

c) a = $\sqrt{26}$; b = $\sqrt{13}$; c = $\sqrt{5}$; A = 119.74º, B = 37.87º, C = 22.38º.

d) a = $\sqrt{2}$; c = $\sqrt{10}$; b = $\sqrt{8}$; A = 26.56º, B = 63.43º, C = 90º.

7. Calcula el área del triángulo de vértices A = (1, 1), B = (2, 2) y C = (4, 5). [*Pista*: Puedes calcular todos los lados y ángulos. La altura se calcula con trigonometría].

Solución: Área = 0,5 u². (u² unidades cuadradas).

8. Calcula el área del rectángulo $ABCD$ con A = (1, 2), B = (2, 4), C = (5, 3) y D = (4, 1).

Solución: AB·AD = 1. BC = AD. No es un rectángulo, es un romboide. Área = 6.708 u².

9. Calcula el área del rombo $ABCD$ con A = (1, 1), B = (4, 0), C = (3, 3) y D = (0, 4).

Solución: 8 u².

10. Calcula un vector que forme 60 grados con el vector $(1,0)$. Para ello, procede como sigue. Supón que el vector sea de la forma $(x,1)$ y plantea la ecuación $\cos 60^\circ=\frac{(x,1)(1,0)}{\|(x,1)\|\|(1,0)\|}$. Despejando x obtendrás el vector. ¿Serías capaz de calcular un vector UNITARIO (de módulo 1) que forme un ángulo de 60º con el vector $(1,0)$?

Solución:

a) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 1)$ ***b)*** $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$.

11. Considera un hexágono regular $ABCDEF$ de centro el origen. Si el punto B es el (1, 0), ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A y C? Calcula el ángulo del hexágono.

Solución: A = $(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$***, C =*** $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$***. Angulo central = 60º. Angulo interior = 120º.***

12. A = (1, 1), B = (2, 3) y C = (2, 8) son vértices (consecutivos) de un paralelogramo $ABCD$. Calcula el vértice D y el ángulo ABC.

Solución: D = (2, 3); ángulo ABC = 153.53º.

13. Mismo problema que el anterior con A = (2, 4), B = (3, 5) y C = (4, –1). ¿Se puede resolver el problema sean cuales sean A, B y C?

Solución: D = (3,–2). Ángulo = arc cos $(\frac{5}{\sqrt{74}})$ ***= 54.46º. Sí se puede siempre que A, B y C no estén alineados, es decir AB no es múltiplo de BC.***

14. Sean A = (2, 2) y B = (4, 6) dos vértices de un cuadrado. Calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado. (*Ayuda*: Hay dos soluciones, las dos con la misma área).

Solución: $C_1 = (0, 8)$, $D_1 = (-2, 4)$; $C_2 = (8, 4)$, $D_2 = (6, 0)$. ***Área = 20 u²***.

15. ¿Son los siguientes pares de vectores una base ortogonal? Justifica la respuesta.
    a. $(1, 2)$ y $(1, -2)$, b. $(1, -2)$ y $(2, 1)$ c. $(0, 1)$ y $(100, 0)$ d. $(1, 0)$ y $(0, 0)$

Solución: a) No, no son ortogonales. b) Si, son ortogonales. c) Si, son ortogonales; d) No porque módulo de (0, 0) es 0. No linealmente independientes.

16. Calcula un vector que forme con $(1, 4)$ una base ortogonal.

Solución abierta: Por ejemplo: (4, –1).

17. Calcula un vector perpendicular a $(1, 2)$ que tenga módulo 3 [*Pista*: calcula un vector perpendicular cualquiera. Al dividir por su módulo tendrá módulo 1. Basta multiplicar por la constante 3].

Solución: Hay dos soluciones $(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$ ***y*** $(\frac{-6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$.

18. ¿Forman los siguientes pares de vectores una base ortonormal? Justifica la respuesta.
    a. $(1, 0)$ y $(0, 1)$, b. $(1, -2)$ y $(2, 1)$ c. $(0, 1)$ y $(100, 0)$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$

Solución: a) SI. b) NO. c) NO. d) SI.

19. Si A = (1, 1) y B = (2, 3) son dos vértices de un cuadrado, calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado (*Cuidado*: hay dos soluciones, las dos con la misma área).

Solución: $C_1 = (4, 2)$; $D_1 = (3, 0)$. $C_2 = (0, 4)$, $D_2 = (-1, 2)$. ***Área = 5 u².***

20. Dado el vector $\vec{v} = (1, -2)$ calcula una base ortonormal que contenga a un múltiplo suyo. ¿Hay más de una solución al problema anterior? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

Solución: Base1 $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$; ***Base2*** $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$

2. RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

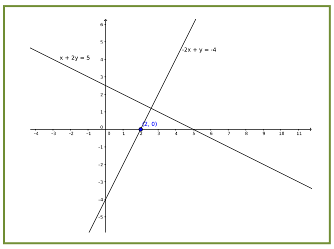
21. Dados los puntos $A = (1,4)$ y $B = (-3,6)$ calcula su punto medio:
    a. Construyendo el vector que los une.
    b. Con la fórmula. Comprueba que sale lo mismo.

Solución: El vector es AB = (–4, 2). A+1/2 (–4, 2) = (–1, 5) = (A+B)/2; M = (–1, 5).

22. Considera los puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Demuestra que con las dos maneras de calcular el punto medio sale lo mismo.

Solución: $A + 1/2\ AB = (a_1, a_2) + 1/2\ (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (a_1/2 + b_1/2, a_2/2 + b_2/2) = (A + B)/2$

23. Calcula una recta perpendicular a $r \equiv x + 2y = 5$ que pase por $(2, 0)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.



Solución: r: (x, y) = (2, 0) + t(2, 4), r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-0}{4}$***; r: y = 2x – 4.***

24. Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv 2x + y = 2$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

Solución: Son paralelas y distintas. No existen puntos de corte.

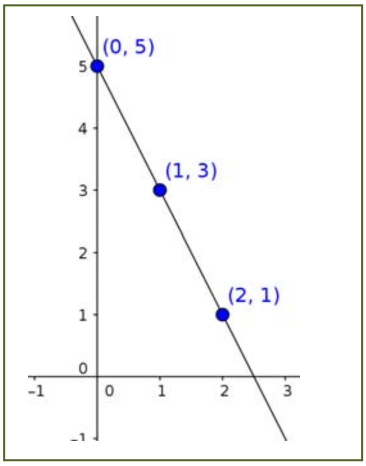
25. Consideremos la recta $r \equiv (1,3) + \lambda(1,-2)$.
    a. Calcula su pendiente.
    b. ¿Pertenece el punto $(2,\ 2)$ a la recta? ¿Y el punto $(0,-2)$?
    c. Da al menos tres puntos de la recta.
    d. Dibuja la recta.

Solución: a) Pendiente = –2;

b) No pertenece ninguno de los dos. Ni (2, 2), ni (0, –2) pertenecen a la recta.

c) Solución abierta. Por ejemplo: (1, 3), (2, 1), (0, 5).

d) Mostramos el dibujo al lado.



26. Suponte que la distancia de un punto a una recta es 0. ¿Qué significa ese resultado? Aplícalo a la recta $2x - y = 1$ y el punto (2, 3).

Solución: Significa que el punto está sobre la recta. Al sustituir ese punto en la ecuación de la recta se cumple la igualdad, (2·2–3 = 1) y se obtiene que la distancia es 0. D(P, r) = 0, pues P está en r

27. Considera la recta $x + 2y = 3$ y el punto A = (2, 3). Calcula el punto Q de mínima distancia y el simétrico de A respecto de la recta.

Solución: Q = (1, 1), A_1 = (0, –1).

28. Calcula la distancia al origen de las rectas que se indican.

a. $2x + y = 3$ b. $(x, y) = (1, -2) + \lambda$ c. $y = \dfrac{x}{2}$

Solución: a) d = $\frac{3}{\sqrt{5}}$; b) d = $\frac{3}{\sqrt{5}}$ c) d =0.

29. Calcula la distancia del punto (1, 2) a las rectas que se indican.

a. $x + 3y = 4$ b. $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ c. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$ d. $y - 2 = 4(x+1)$

Solución: a) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; b) 0; c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{8}{\sqrt{17}}$.

30. Una recta pasa por el punto (3, 1) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área seis unidades. Calcula dicha recta.

Solución: $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-1}{1}$.

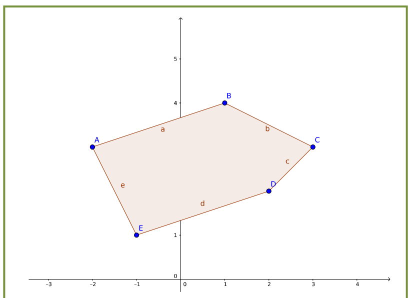
31. Calcula el punto de simétrico de A = (1, 2) respecto a la recta y = 3.

Solución: A' = (1, 4)

32. Consideremos un pentágono irregular $ABCDE$ formado por los puntos
A = (–2, 3), B = (1, 4), C = (3,3), D = (2, 2) y E = (–1, 1).
Dibújalo y calcula su área [Te recomendamos dividirlo en figuras más manejables].

Solución: ABDE paralelogramo de área = 7.035 u². Área BCD = 1.5 u².

Área ABCED = 8.535 u².



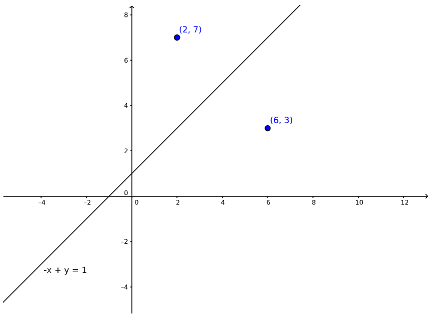
33. Consideremos un cuadrado $ABCD$. El punto A es (1, 2) y los puntos B y C están sobre la recta $y - x = 3$. Calcula los cuatro vértices del cuadrado y su área.

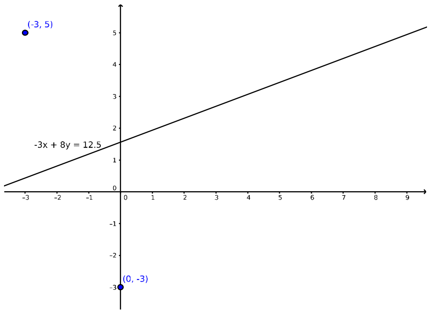
Solución: Hay dos soluciones B(0, 3), C(–1, 2), D(0, 1) y B(0, 3), C(1, 4), D(2, 3). En ambos el área es 2.

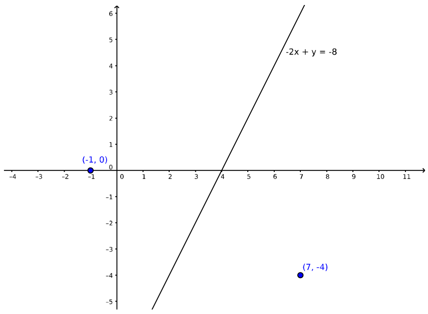
34. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. A = (2, 7) y B = (6, 3) b. A = (–3, 5) y B = (0, –3) c. A = (–1, 0) y B = (7, –4)

Solución:





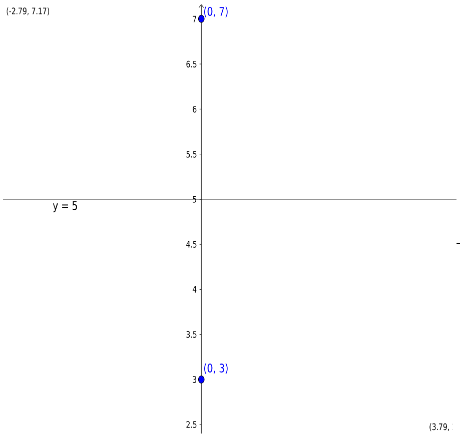


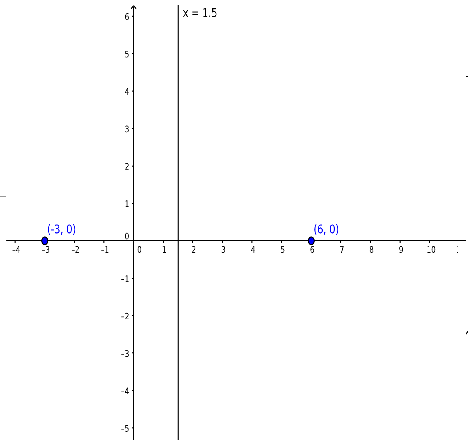
a) $x - y + 1 = 0$ ***b) $6x - 16y + 25 = 0$*** ***c) $2x - y + 8 = 0$.***

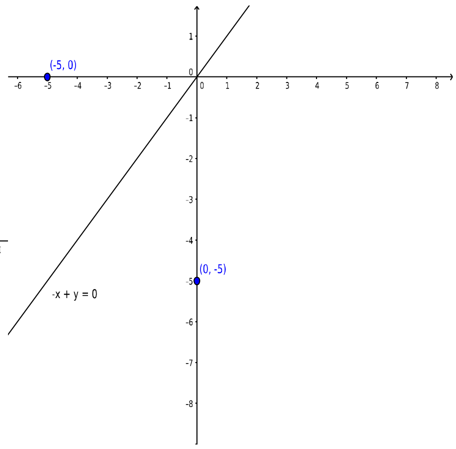
35. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. A = (0, 7) y B = (0, 3) b. A = (–3, 0) y B = (6, 0) c. A = (–5, 0) y B = (0, –5)

Solución:





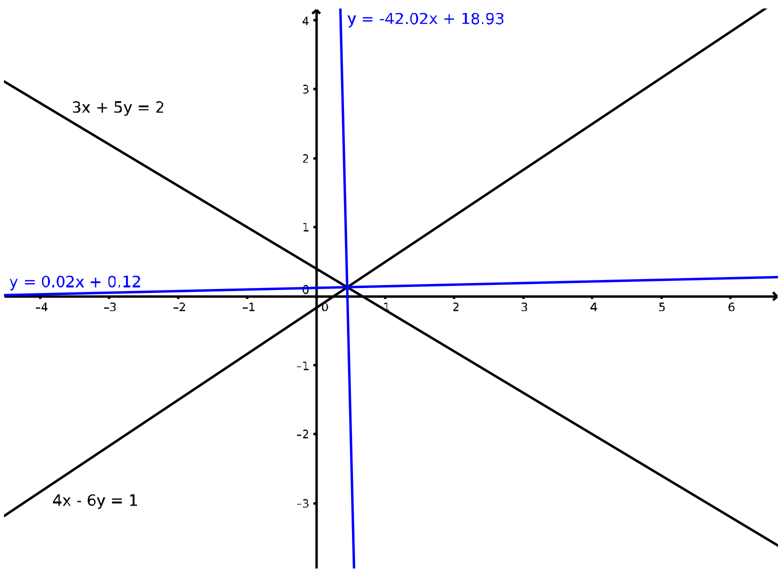


a) $y = 5$; ***b) $x = 1.5$;*** ***c) $x - y = 0$.***

36. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x + 2y - 5 = 0$ y $s : 2x - y - 8 = 0$ b. $r : 3x + 5y - 2 = 0$ y $s : 4x - 6y - 1 = 0$

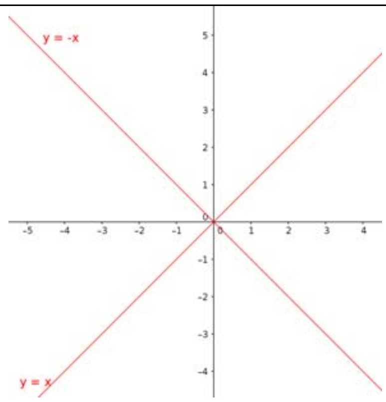
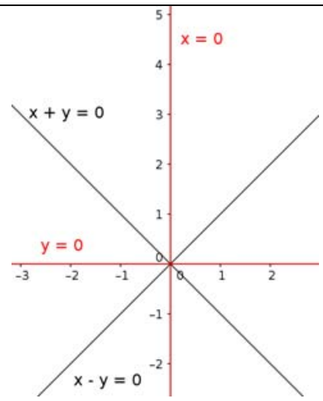
Solución: a) b_1: $x - 3y - 3 = 0$; b_2: $3x + y - 13 = 0$; b) $\sqrt{52}\ (3x + 5y - 2) = \mp\sqrt{34}\ (4x - 6y - 1)$



37. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x = 0$ y $s : y = 0$ b. $r : x + y = 0$ y $s : x - y = 0$

Solución: Las rectas originales están en negro y las bisectrices en rojo.

a) y = x e y = –x	***b) x = 0 e y = 0***
	

38. Dado el triángulo de vértices ABC, siendo A = (0, 0), B = (6, 0) y C = (4, 4), determina las ecuaciones de:

a. Sus mediatrices y las coordenadas del circuncentro
b. Sus bisectrices y las coordenadas del incentro
c. Sus alturas y las coordenadas del ortocentro
d. Sus medianas y las coordenadas del baricentro

Solución: a) Mediatrices: mBA: x = 3, mAC: x + y = 4, mBC: x – 2y – 1 = 0. Circuncentro (3, 1).

b) Bisectrices: bA: x + (–1– $\sqrt{2}$ ***)y = 0, x + (–1+*** $\sqrt{2}$ ***)y = 0; bB: 2x + (1 –*** $\sqrt{5}$ ***)y – 12 = 0, 2x + (1 +*** $\sqrt{5}$ ***)y – 12 = 0;***

bC: $\sqrt{5}$ ***(x – y) = (*** $\pm\sqrt{2}$ ***) (2x + y – 12). Incentro(3,6, 1,48).***

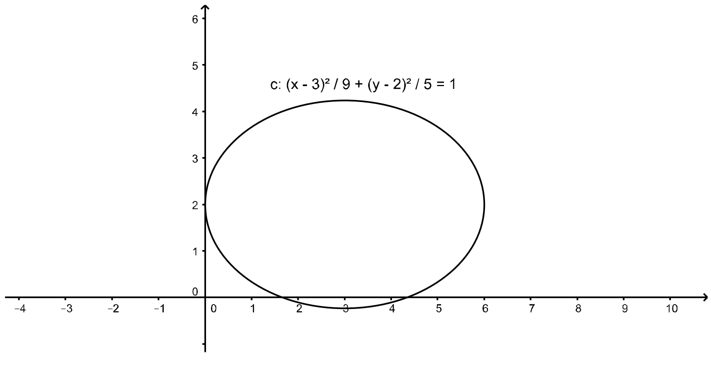
c) Alturas: aA: x – 2y = 0, aB: x + y – 6 = 0, aC: x = 4. Ortocentro(4, 2).

d) Medianas: mA:5x – 2y = 0, mB: 2x + y – 6 = 0, mC: x – 4y + 12 = 0. Baricentro(4/3, 10/3).

3. CÓNICAS

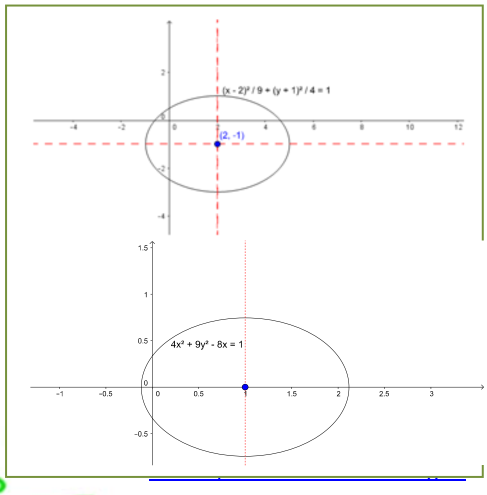
39. Una elipse tiene focos en (1, 2) y en (5, 2) y pasa por el punto (0, 2). Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

Solución: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$***; Excentricidad = 2/3.***



40. Calcula todos los elementos de las elipses siguientes y dibújalas.

a. $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ b. $4x^2 + 9y^2 - 8x = 0$



Solución: a) Centro = (2, –1), a = 3, b = 2, c = $\sqrt{5}$ ***; exc =*** $\sqrt{5}$ ***/3;***

Focos (2 + $\sqrt{5}$ ***, –1), (2 –*** $\sqrt{5}$ ***,–1), Ejes: y = –1, x = 2.***

Vértices: (2, 1), (2, –3), (5, –1), (–1, –1); Ecuación: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

b) $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y)^2}{4/9} = 1$ ***; Centro = (1, 0), a = 1, b = 2/3; c =*** $\sqrt{5}$ ***/3; exc =*** $\sqrt{5}$ ***/3;***

focos (1+ $\sqrt{5}$ ***/3, 0) (1–*** $\sqrt{5}$ ***/3, 0). V(0, 0) (2, 0).***

41. Considera la hipérbola $x^2 - y^2 + 2y = 0$. Calcula:

a. Su ecuación reducida.
b. Su centro y focos.
c. Sus asíntotas.

Solución: a) $(y - 1)^2 - x^2 = 1$; b) Centro (0, 1), focos $(0, 1+\sqrt{2})$ y $(0, 1-\sqrt{2})$. c) Asíntotas: y = x + 1, y = –x + 1.

42. Calcula todos los elementos de las hipérbolas siguientes y dibújalas.

a. $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$　　　b. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y = 0$

Solución: a) Hipérbola eje horizontal y = 2, a = 1, b = 2, exc = $\sqrt{5}$; Centro (–1,2) Vértices: (0, 2) (–2,2)

Focos (–1+ $\sqrt{5}$, 2) (–1– $\sqrt{5}$, 2), asíntotas y – 2 = 2(x + 1), y – 2 = - 2(x + 1).

43. Una hipérbola horizontal tiene centro en el (1, 2) y excentricidad 2. Sabiendo que pasa por el punto (4, 2), ¿cuál es su ecuación? [*Pista*: el parámetro a lo puedes sacar simplemente del dibujo].

Solución: $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{27} = 1$; a = 3, b = $\sqrt{27}$; c = 6, Focos: (7, 2), (–5, 2); Exc = 2.

Asíntotas: y – 2 = $\sqrt{3}$ (x – 1), y – 2 = – $\sqrt{3}$ (x – 1).

44. El vértice de una parábola vertical con las ramas hacia arriba es el punto (2, –1). Sabiendo que pasa por el punto (1, 0) escribe la ecuación de la parábola, dibújala y calcula su foco.

Solución: Parábola de eje x = 2; Ecuación: $y + 1 = (x - 2)^2$; Foco (2, –3/4); Directriz: y = –5/4; V(2, –1).

45. Identifica las figuras y dibújalas calculando su foco o focos.

a. $2y^2 + 3x = 0$　　　b. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

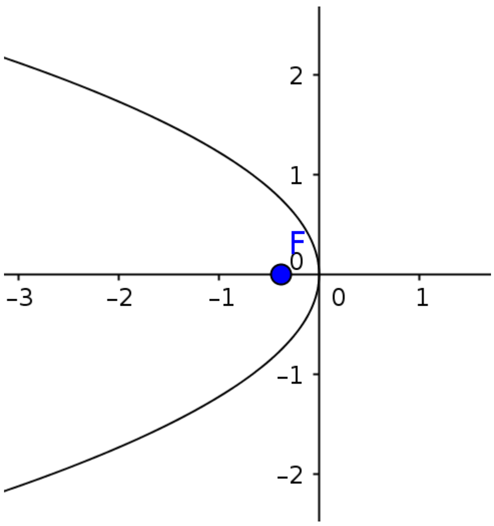
Solución:

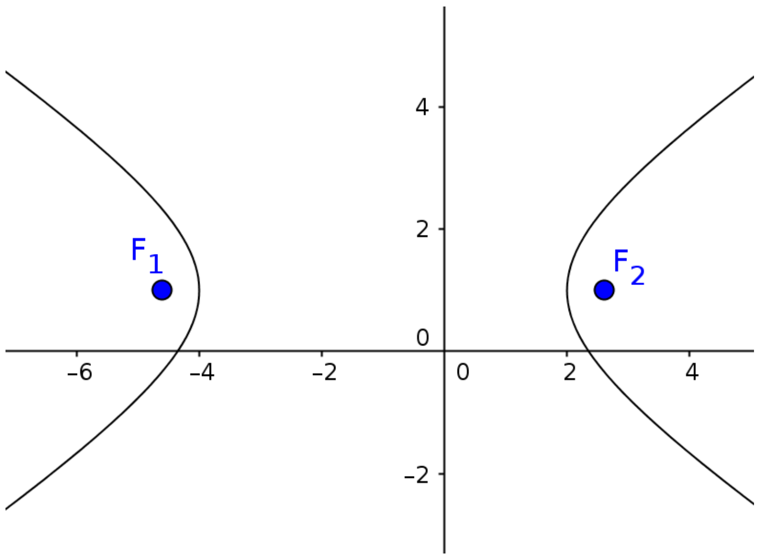
a) Parábola: $-2/3y^2$. Eje: y = 0; d: x = 3/8; Foco (–3/8, 0), Vértice (0, 0)

b) Hipérbola horizontal. Centro: (–1, +1), a = 3, b = 2, c = $\sqrt{13}$,

Focos (–1 – $\sqrt{13}$, 1), (–1 + $\sqrt{13}$, 1), V(2, 1), V'(–4, 1);

Asíntotas: y – 1 = (2/3)(x + 1), y – 1 = –(2/3)(x + 1)



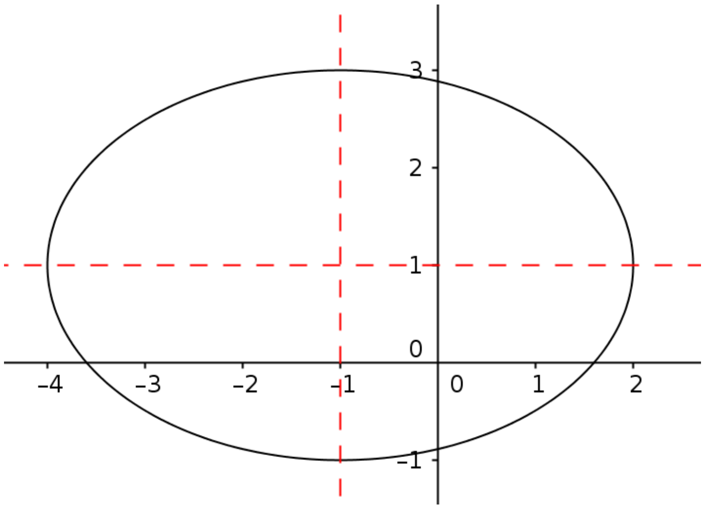


46. Identifica las figuras y dibújalas. En el caso de la hipérbola, calcula sus asíntotas.

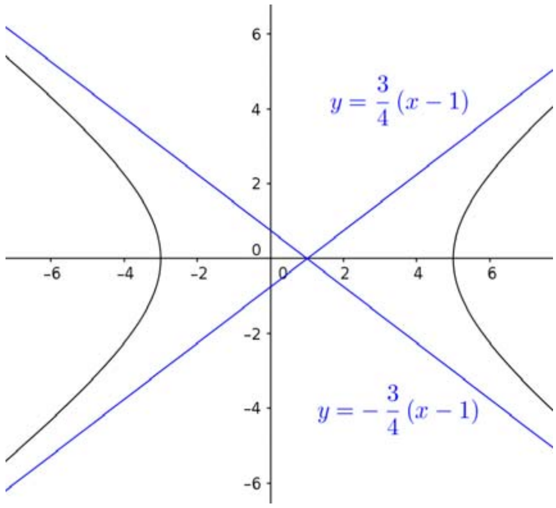
a. $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ b. $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Solución:

a) Elipse: Centro (–1, 1), Ejes: y = 1, x = –1;
a = 3, b = 2, c = $\sqrt{5}$, F(–1+$\sqrt{5}$, 1), F'(–1–$\sqrt{5}$,1).



b) Hipérbola horizontal. C(1, 0); F(6, 0), F'(–4, 0); a = 4, b = 3, c = 5, Asíntotas y – 1 = 3/4 (x–1), y – 1 = –3 /4 (x–1)

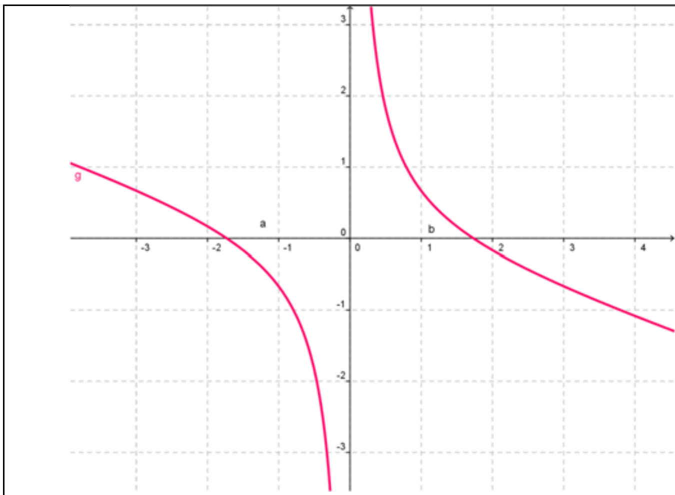


47. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

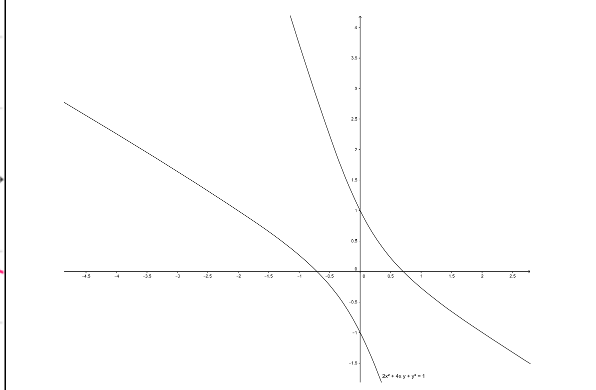
a. $x^2 + 3xy = 3$ c. $x^2 + 2xy + y^2 - 3y = 0$ e. $x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$

b. $2x^2 + 4xy + y^2 = 1$ d. $3x^2 - 6xy + y^2 - 2x = 0$ f. $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

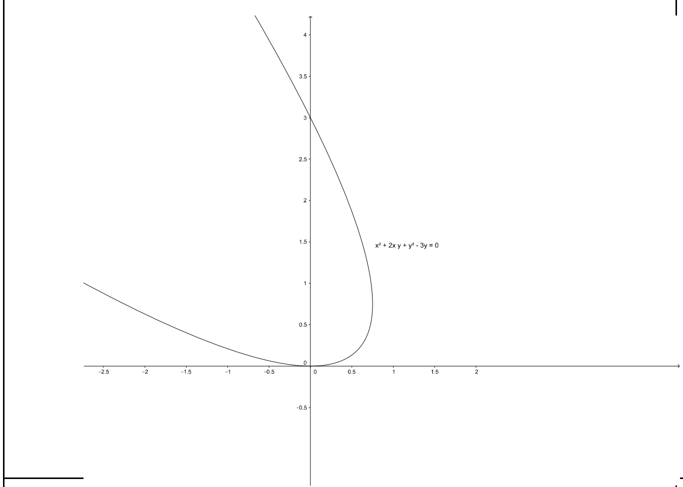
Solución:

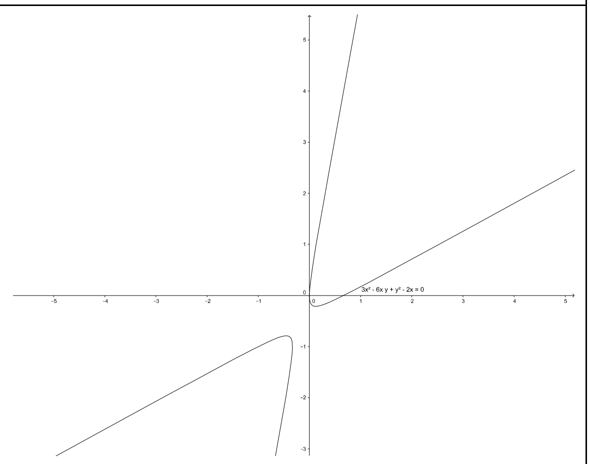


a)

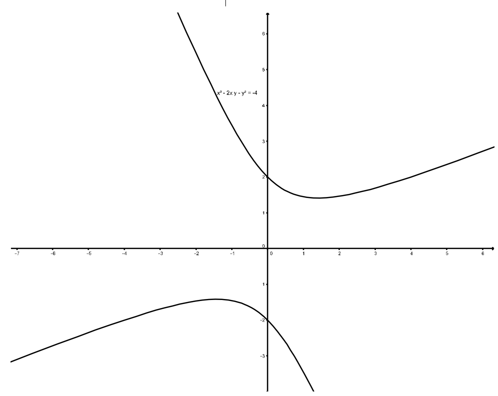


b)

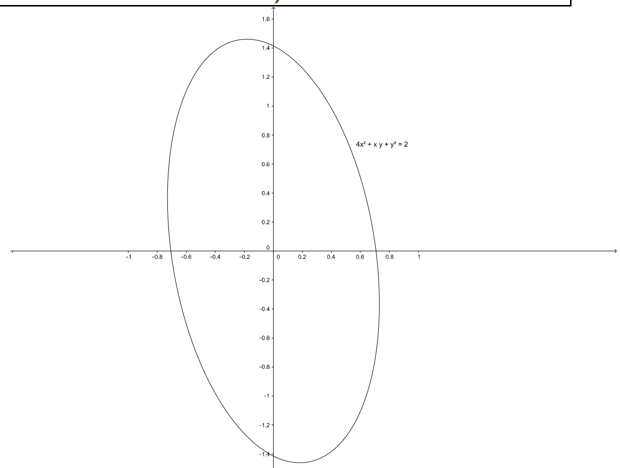




d)



e)



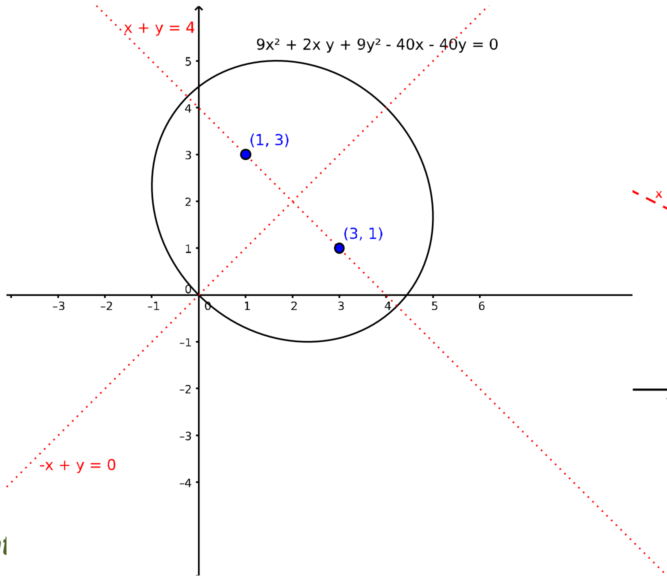
f)

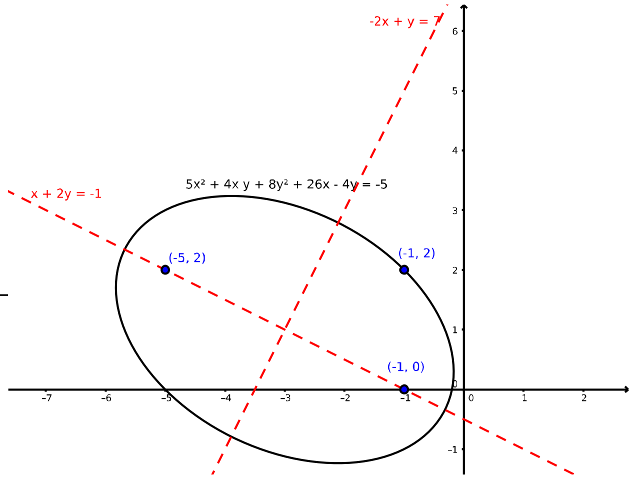
48. Dibuja con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes elipses y calcula sus ejes mayor y menor. ¿Serías capaz de calcular su excentricidad? [*Pista*: hazlo con el ordenador, cortando la elipse con la recta focal].

a. Una elipse con focos en (1, 3) y en (3, 1), que pasa por el origen.

b. Una elipse con focos en (–1, 0) y en (–5, 2) que pasa por el (–1, 2).

Solución:





a) Eje

Excent

(recta focal): x + 2y = –1,

2x + y = 7. Excentricidad 2.24/3 = 0.75

49. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes hipérbolas y calcula sus ejes mayor y menor.

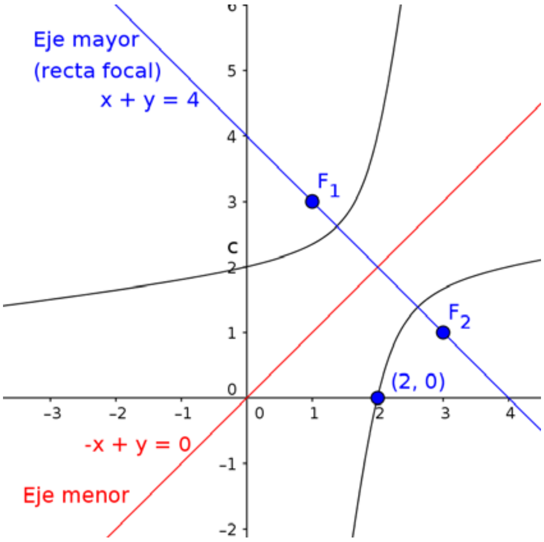
a. Una hipérbola con focos en (1, 3) y en (3, 1) que pasa por el (2, 0).

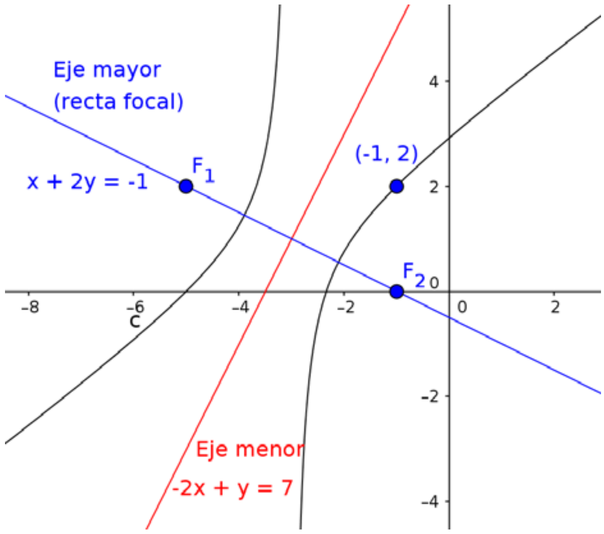
b. Una hipérbola con focos en (–1, 0) y en (–5, 2) que pasa por el (–1, 2).

Solución:

a) Eje mayor; x + y = 4; Eje menor: y = x.

b) Eje mayor: x + 2y + 1 = 0; Eje menor y = 2x + 7.





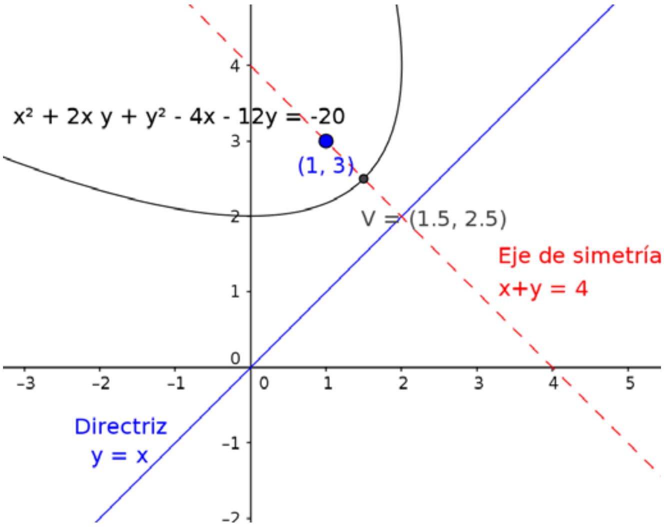
50. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes parábolas y calcula su eje de simetría y su vértice.

   a. Una parábola con foco en (1, 3) y recta directriz $y = x$.

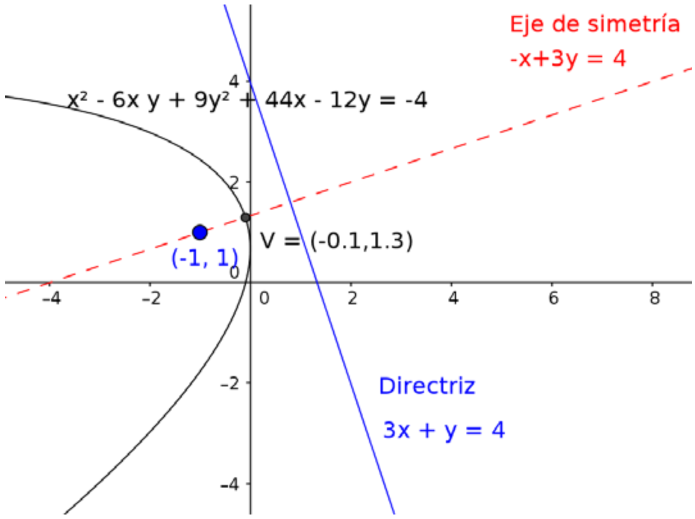
   b. Una parábola con foco en (–1, 1) y recta directriz $3x+y = 4$.

Solución:

a) Vértice en (1.5, 2.5). Eje de simetría x + y = 4



b) Vértice (–0.1, 1.3). Eje de simetría –x + 3y = 4



51. Calcula los focos y los parámetros a, b y c de las siguientes hipérbolas equiláteras y dibújalas:

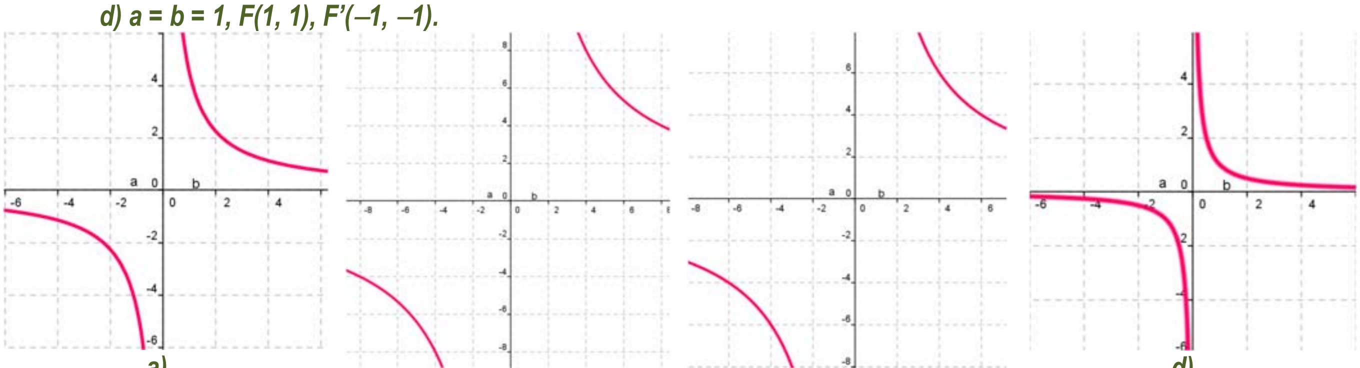
   a. $xy = 9/2$ b. $xy = 32$ c. $xy = 24$ d. $xy = 1$

Solución: a) a = b = 3, c = 3$\sqrt{2}$; F(3, 3), F'(–3, –3); Eje: x = y, Asíntotas: x = 0, y = 0;

b) a = b = 8, c = 8$\sqrt{2}$; F(8, 8), F'(–8, –8);

c) a = b = 4$\sqrt{3}$, c = 4$\sqrt{6}$; F(4$\sqrt{3}$, 4$\sqrt{3}$), F'(–4$\sqrt{3}$, –4$\sqrt{3}$);

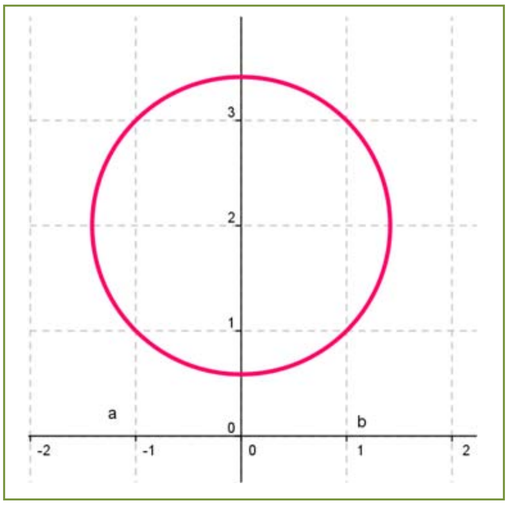
d) a = b = 1, F(1, 1), F'(–1, –1).



a) *b)* *c)* *d)*

52. Calcula la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene por focos $(2, 2)$ y $(-2, \ \ 2)$, así como sus parámetros a y b y su excentricidad. Dibújala.

Solución: x² + (y – 2)² = 2; Centro (0, 2), a = b = $\sqrt{2}$, c = 2, exc = $\sqrt{2}$.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Vectores

1. Dados los puntos $P=(2,-2)$, $Q=(1,1)$ y $R=(0,-2)$ y los vectores $\vec{v}=\overrightarrow{(2,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,0)}$ calcula, indicando si son puntos o vectores:

 a) $\overrightarrow{PQ}$ c. $2\vec{v}-\vec{w}$ e. $\vec{v}-\overrightarrow{RQ}$

 b) $Q+\overrightarrow{PQ}-\vec{w}$ d. $R+\vec{v}$ f. $\overrightarrow{QP}-2\vec{w}$

Solución: ***a) (–1, 3) punto.*** ***c) (3, –2) Vector*** ***e) (1, –4) Vector***
b) (–1, 4) punto. ***d) (2, –3) Punto*** ***f) (–1, –3) Vector***

2. Dados los puntos $P=(2,2)$, $Q=(1,0)$ y $R=(-2,3)$ y los vectores $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,-2)}$, calcula, indicando si son puntos o vectores:

 a) $\overrightarrow{QP}$ c. $3\vec{v}-2\vec{w}$ e. $\vec{v}-\overrightarrow{RP}$

 b) $R+\overrightarrow{PQ}+\vec{w}$ d. $P+\vec{v}$ f. $P+\overrightarrow{QP}-2\vec{v}$

Solución: vector: v, punto: P. a) (1, 2) v. b) (–2, 1) P. c) (1, –3) v. d) (–1, 2) P. e) (–3, 0) v. f) (1, 6) P.

3. Calcula el módulo del vector que une $P=(1,3)$ y $Q=(4,-3)$, ¿qué relación tiene con la distancia entre los puntos?

Solución: El módulo del vector y la distancia entre los puntos son iguales y 3 = d(P, Q) = Son iguales.

4. Divide el segmento formado por los puntos $P=(1,3)$ y $Q=(4,-3)$ en tres partes iguales.

Solución: Sean R y S los puntos intermedios: R(2, 1), S(3, –1)

5. Calcula una base ortogonal que contenga al vector $(1,-4)$.

Solución: Hay varias soluciones. Una es {(1, –4), (4, 1)}. Las demás son de la forma {(1, –4), k(4, 1)} para cualquier valor de k no nulo.

6. Calcula una base ortonormal que contenga a un vector paralelo a de $\vec{v}=(-2,3)$

Solución: Base $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

7. Calcula un vector perpendicular a $\overrightarrow{(1,-2)}$ y que tenga módulo 4.

Solución: Dos soluciones: $\left(\frac{8}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{8}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

8. Tres puntos de un rombo $ABCD$ son A = (2, 1), B = (4, 5) y C = (2, 9). Calcula:
 a) El ángulo que corresponde al vértice A.
 b) El perímetro (suma de lados) del rombo.
 c) El punto D.

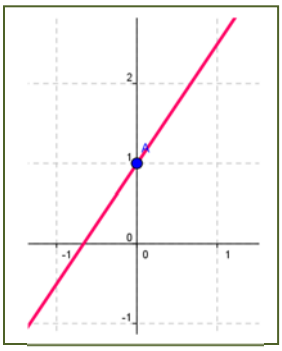
Solución: a) A = 53.13º, b) 8, c) D(0, 5).

9. Calcula el ángulo que forman las diagonales del rectángulo $ABCD$ siendo A = (1, 2), B = (1, 8), C = (4, 8). [El punto D puedes calcularlo].

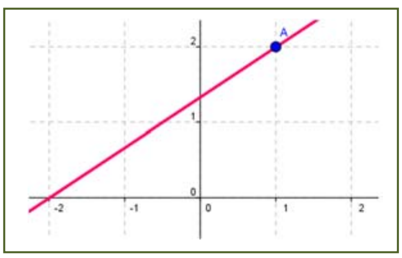
Solución: D = (4, 2); cos α = 27/45 = 3/5; α = 53.13º.

Rectas

10. Calcula la recta que es paralela a $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$ y pasa por el punto $(0,1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

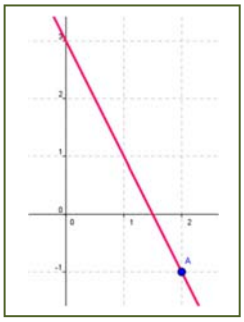


Solución: s: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}$, ***s: 3x – 2y + 2 = 0, s: y = 1.5x + 1.***



11. Calcula la recta que es paralela a $r\equiv 2x-3y=0$ y pasa por el punto $(1,2)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

Solución: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}$ ***; (x, y) = (1, 2) + t(3, 2); 2x – 3y + 4 = 0.***



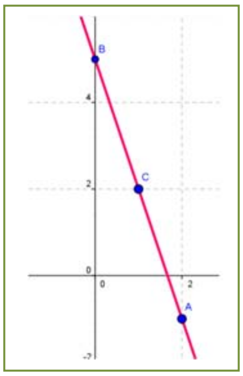
12. Calcular una recta perpendicular a $r \equiv y = 2x - 1$ que pase por $(2, -1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

Solución: (x, y) = (2, –1) + t(1, –2);, y + 2x – 3 = 0, y = –2x+3.

13. Sean las rectas $r \equiv (1, 1) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv x + y = 3$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

Solución: Las rectas son secantes y se cortan en el punto (0, 3).

14. Sean las rectas $r \equiv (0, -2) + \lambda\overrightarrow{(1, 4)}$ y $s \equiv 4x - y - 2 = 0$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.



Solución: Coincidentes. Todos los puntos de la recta son comunes.

15. Consideremos la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$.
    a) Calcula su pendiente.
    b) ¿Pertenece el punto $(0, 5)$ a la recta? ¿Y el $(1, 3)$?
    c) Da al menos tres puntos de la recta.
    d) Dibuja la recta.

Solución: a) Pendiente = –3; b) (0, 5) SI, (1, 3) NO;
d) Solución abierta. Por ejemplo: (1, 2), (0, 5), (2, –1).
e)

16. Consideremos la recta $y - 2x = 1$
    a) Calcular su pendiente y vector director.
    b) Dar una recta perpendicular a ella que pase por (1, 2). Exprésala en al menos cuatro formas.

Solución: a) Pendiente = –3; Vector director: (k, 2k); b) (x, y) = (1, 2) + t(–2, 1); x + 2y – 5 = 0; y = –0.5x + 2.5; $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{-2} = \dfrac{\boldsymbol{y}-2}{1}$.

17. Sean los puntos A = (1, 2) y B = (3, 0)
    a) Calcula el vector que los une.
    b) Calcula la recta que pasa por ambos y exprésala en tres formas distintas.
    c) ¿Pertenece el punto (2, 1) a la recta?, ¿y el (3, 1)?

Solución: a) AB = (2, –2); b) (1, 2) + λ(2, –2); x – 1 = 2 – y; y = –x + 3; x + y – 3 = 0; c) El punto (2, 1) sí pertenece, el punto (3, 1) no pertenece.

18. Sea la recta $r \equiv y = x - 2$.
    a) Calcula una recta perpendicular a ella y pase por (2, 1).
    b) Calcula una recta que pase por (–1, 3) y sea paralela a r.

Solución: a) x + y – 3 = 0; b) y = x + 4.

19. Halla la posición relativa de las rectas $x + y = 0$ y $s \equiv (x, y) = (1, 2) + \lambda\overrightarrow{(1, 1)}$ así como el ángulo que forman.

Solución: Se cortan en P(–0.5, 0.5); Ángulo = 90º, son perpendiculares.

20. Calcula la distancia del punto (2, –1) a la recta $y + x = 1$.

Solución: d(P, r) = 0. El punto pertenece a la recta.

21. Calcula la distancia al origen de las siguientes rectas:
    a. $(x, y) = (1,1) + \lambda\overrightarrow{(1,2)}$ b. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$ c. $y = 2x + 3$

Solución: a) D(O, r_a) = $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$***; b) D(O, r_b) =*** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$***; c) D(O, r_c) =*** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

22. Calcula la distancia al punto (1, –2) de las siguientes rectas.
    a. $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ b. $2x + y = 3$

Solución: a) d((1, –2), r) = $\sqrt{2}$***; b) d((1, –2), r) =*** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

23. Sea la recta $s: x - 2y + 1 = 0$
    a) Calcula una recta que sea perpendicular a ella y pase por (1, 1).
    b) Calcula una recta que pase por (0, 1) y sea paralela a s.

Solución: a) 2x + y – 3 = 0; b) x – 2y + 2 = 0.

24. Halla la posición relativa de las rectas $r: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1}$ y $s: (x,y) = (1,-2) + \lambda(1,1) = 0$ así como el ángulo que forman.

Solución: Son paralelas y distintas. Ángulo = 0º.

25. Tres puntos de un rectángulo $ABCD$ son A = (2, 1), B= (0, 7) y D = (5, 2). Se pide:
    a) Comprobar que el ángulo B es de 90º.
    b) Calcular las longitudes de los lados AB, CD y de la diagonal BD, del rectángulo.
    c) Calcular el punto C.

Solución: a) AD = BC = (3, 1). El producto escalar de BA con BC es 6 – 6 = 0, luego el ángulo B es de 90º.
b) long(AB) = long(CD) = $2\sqrt{10}$; long(BD) = $5\sqrt{2}$; c) C = (3, 8).

26. Calcula la distancia del punto A(1, 4) a la recta $y - x = 1$

Solución: d(A, r) = $\sqrt{2}$.

27. Tres puntos de un triángulo son A = (2, 1), B = (2, 8) y C = (4, –1). Calcular sus lados y ángulos.

Solución: a = $\sqrt{85}$, b = $\sqrt{8}$, c = 7; A = 135º, B = 12,53º, C = 32,47º.

28. Sea la recta $s: x + y = 4$.
    a) Calcula una recta perpendicular con ella y pase por (1, 1).
    b) Calcula la distancia de esa recta al punto (2, 3).

Solución: a) x – y = 0; b) d = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

29. Halla la posición relativa de las rectas $r: 3x + y = 5$ y $s: (x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 3) = 0$ así como el ángulo que forman.

Solución: Son paralelas (no coincidentes). Su ángulo es 0º (como en todas las paralelas).

30. Calcula la recta perpendicular a $y = 2x - 4$ que pase por el punto medio de A = (1, 3) y B = (3,-1)

Solución: P. Medio = (2, 1), x + 2y – 4 = 0.

31. En un paralelogramo $ABCD$ vienen dados por A = (1, 1), B = (2, 3) y C = 3, –1).
    a) Calcula el ángulo B (entre BA y BC).
    b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y C (la diagonal del paralelogramo).
    c) Calcula el perímetro de la figura.
    d) Calcula el punto D.

Solución: a) B = 40,6º. b) Recta A,C: x + y – 2 = 0. c) Perímetro = 12,72 . d) D(2, –3).

32. Ya sabes que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados. Escribe la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A = (2, 5) y B = (4, –1).

Solución: 3x + y – 11 = 0.

33. Recordemos que el circuncentro de un triángulo es el punto de corte de las mediatrices de sus lados. Calcula el circuncentro del triángulo A = (1, 2), B = (1, 6) y C = (3, 8) escribiendo las ecuaciones de las tres mediatrices.

Solución: Las mediatrices son mBC:x + y = 9, mAC:x + 3y = 17, mAB: y = 4. El circuncentro es (5, 4).

34. Recordemos que el baricentro de un triángulo es el punto de intersección de las medianas (la mediana es la recta que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto). Sabiendo esto, calcula el baricentro del triángulo A = (–2, 2), B = (1, 4) y C = (1, 0), escribiendo las ecuaciones de las tres medianas.

Solución: mA: y = 2, mB: 2x – y + 2 = 0, mC: 2x + y – 2 = 0, baricentro (0,2).

35. Ya sabes que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Escribe la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas $y = 2x + 3$, y $3x + 5y = 1$. ¿Cuántas hay? ¿Cómo son?

Solución: Hay 2: b1: $\frac{y-2x-3}{\sqrt{5}} = \frac{3x+5y-1}{\sqrt{34}}$, b2: $\frac{y-2x-3}{\sqrt{5}} = -\frac{3x+5y-1}{\sqrt{34}}$;

Calculando aprox. b1: –5,35y – 18,37x – 15,26 = 0, b2: 17,01y – 4,95x – 19,72 = 0. Son perpendiculares.

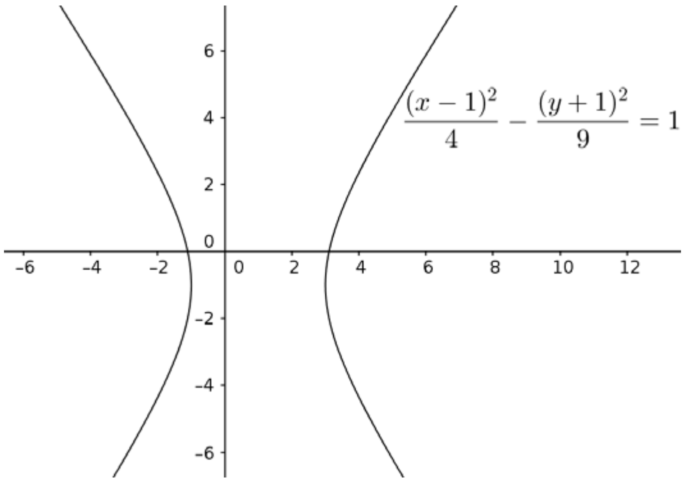
Cónicas

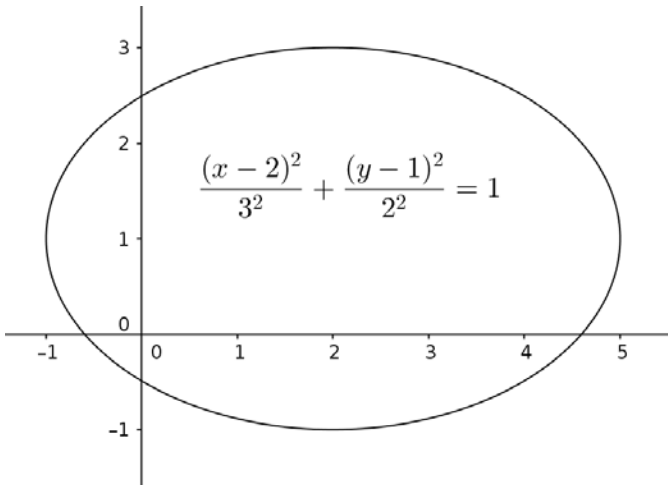
36. Calcula la circunferencia que pasa por el punto A = (1, 1) y tiene por centro a C = (–1, 3)

Solución: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

37. Identifica las figuras y dibújalas

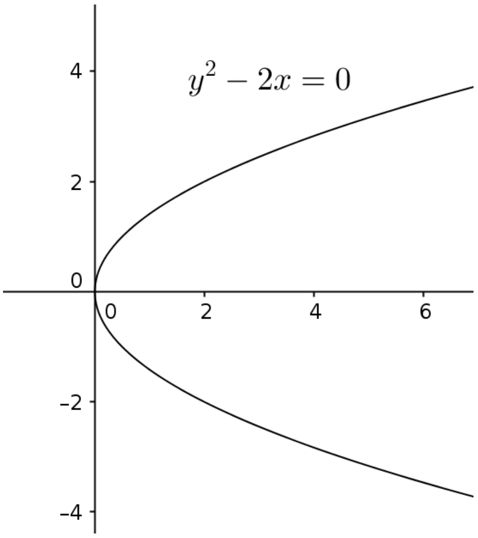
a. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$ b. $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$ c. $y^2-2x=0$ d. $x^2-2x+y^2=0$

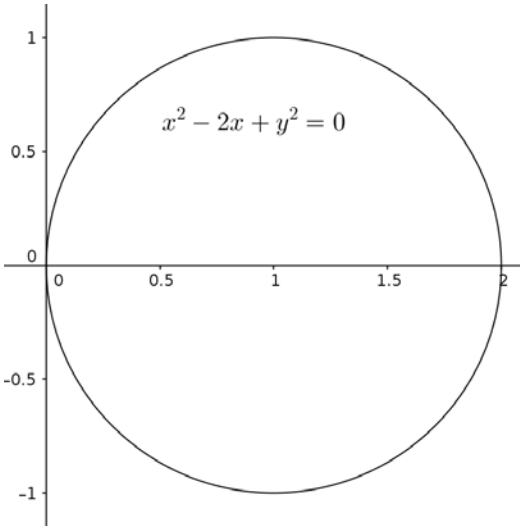




a) Hipérbola horizontal. Eje: y = –1, C(1, –1) a = 2, b = 3, c = $\sqrt{13}$; V(3, –1), V'(–1, –1). F(1 + $\sqrt{13}$,–1), (1 – $\sqrt{13}$, –1); Asíntotas: y + 1 = 1.5(x – 1), y + 1 = –1.5(x – 1).

b) Elipse horizontal eje: y = 1, C(2, 1), a = 3, b = 2, c = $\sqrt{5}$ V(2, 3), V'(2, –1), V''(5, 1), V_4(–1, 1); F(2– $\sqrt{5}$, 1) F'(2+ $\sqrt{5}$, 1)





c) Parábola horizontal y = 0, V(0, 0), F(0.5, 0) d: x =– 0.5.

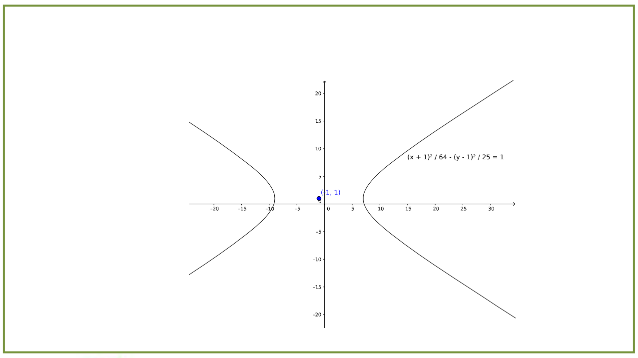
d) Circunferencia. C(1, 0), radio = 1.

38. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos A = (1, 4), B = (3, 4) y C = (5, 5).

Solución: C(2, 8.5), r = 4.61; $(x - 2)^2 + (y - 8.5)^2 = 21.25$.

39. Calcular la ecuación de una hipérbola con centro en (–1, 1) y radios 8 y 5. Dibuja dicha hipérbola

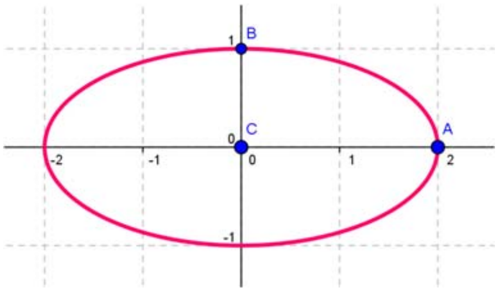
Solución: $\frac{(x+1)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$.



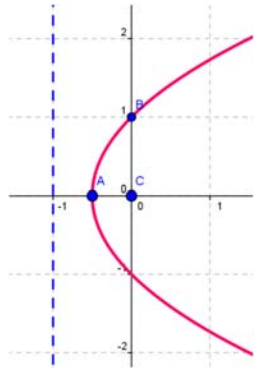
40. Identifica las figuras y dibújalas. Calcula el foco o focos.

a. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ b. $y^2-2x=1$ c. $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ d. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

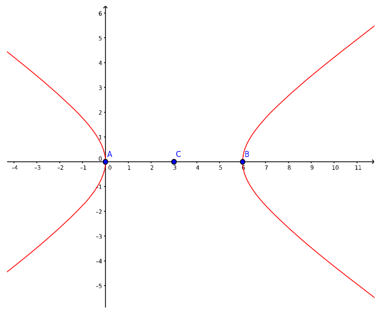
Solución:



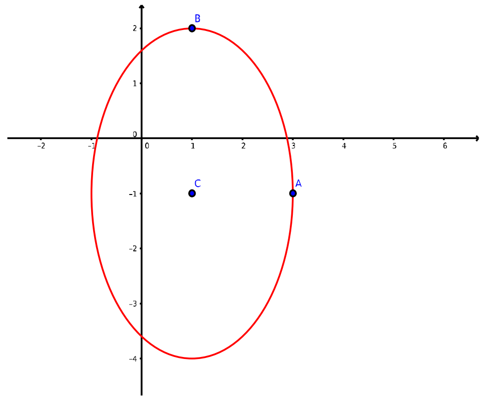
a) Elipse Centro = (0, 0); Vértices: (2, 0), (–2, 0), (0, 1), (0, –1), Focos: ($\sqrt{3}$, 0), (–$\sqrt{3}$, 0).



b) Parábola horizontal, Vértice =(–1/2, 0) Foco: (0, 0). D: x = –1.



c) Hipérbola horizontal Centro = (3, 0) eje: y = 0.a = 3, b = 2, Focos: (3+$\sqrt{13}$, 0), F(3–$\sqrt{13}$, 0) Vértices: (0, 0),(6, 0).



d) Elipse vertical, eje: x = 1, Centro = (1, –1), Vértices: (3, –1), (–1, –1), (1, 2) y (1, –4); Focos: (1, –1+$\sqrt{5}$), (1, –1–$\sqrt{5}$)

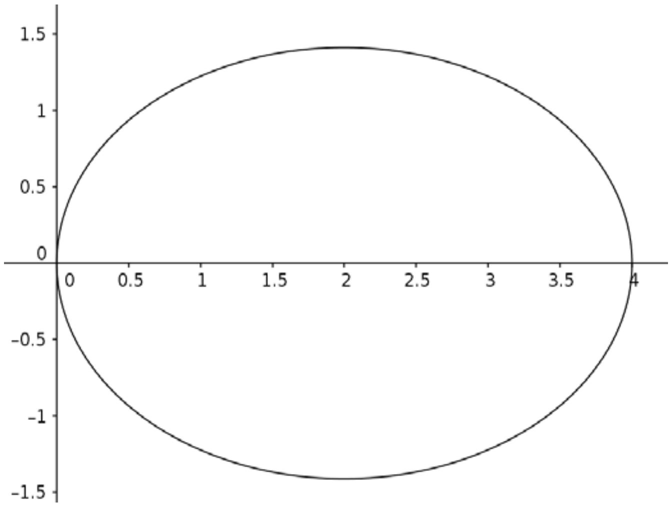
41. Identifica las figuras y dibújalas.

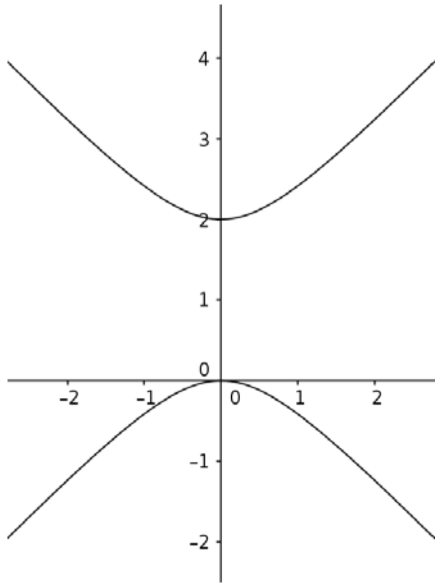
a. $x^2+2y^2-4x=0$ b. $x^2-y^2+2y=0$

Solución:

a) Elipse. Centro = (2, 0), Eje: y = 0, a = 2, b = $\sqrt{2}$, Vértices: (0, 0), (0, 4), Focos: (2–$\sqrt{2}$, 0), (2+$\sqrt{2}$, 0)

b) Hipérbola equilátera eje vertical: x = 0, Centro = (0, 1), Vértices: (0, 0), (0, 2), Focos: (0, 1+$\sqrt{2}$) , (0, 1–$\sqrt{2}$).



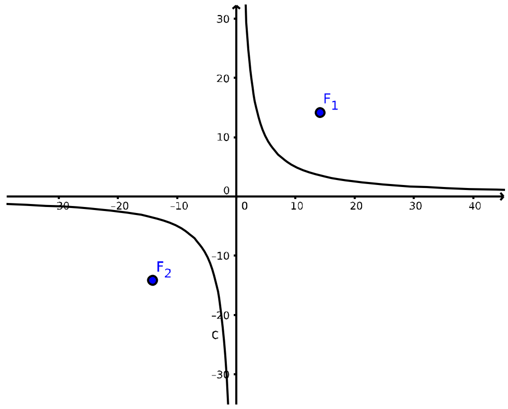


42. Calcula la circunferencia que pasa por A = (1, 4), B = (3, 6) y cuyo centro es su punto medio.

Solución: (x – 2)² + (y – 5)² = 2.

43. Considera la hipérbola equilátera $xy = 50$. Calcula sus focos, excentricidad y asíntotas y dibújala.

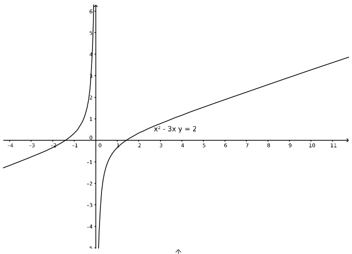
Solución: a = b = 10, c = 10 $\sqrt{2}$; EXC = $\sqrt{2}$; F(10 $\sqrt{2}$, 10 $\sqrt{2}$),(–10 $\sqrt{2}$, –10 $\sqrt{2}$), Asíntotas: x = 0, y = 0.

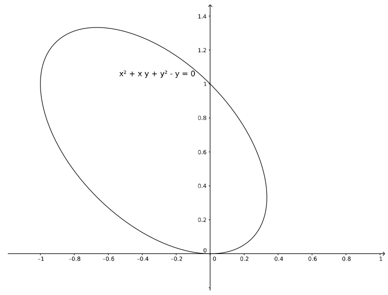


44. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

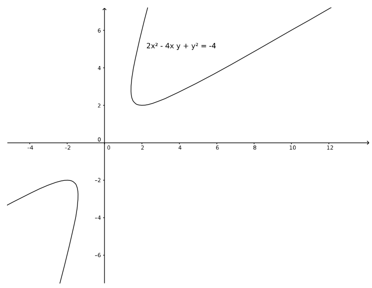
a) $x^2 - 3xy = 2$
c. $x^2 + xy + y^2 - y = 0$
e. $2x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$
d. $3x^2 - 6xy + 4y^2 - 2x = 0$
f. $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

Solución:

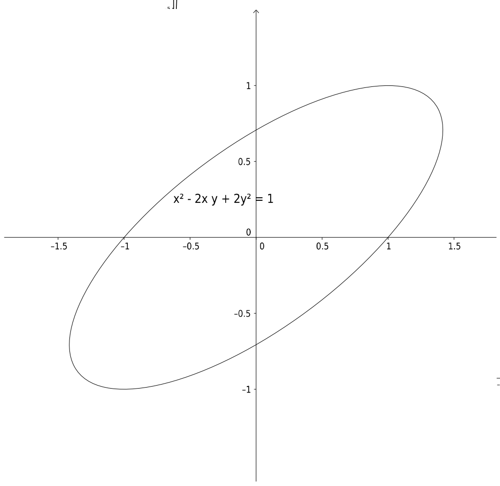


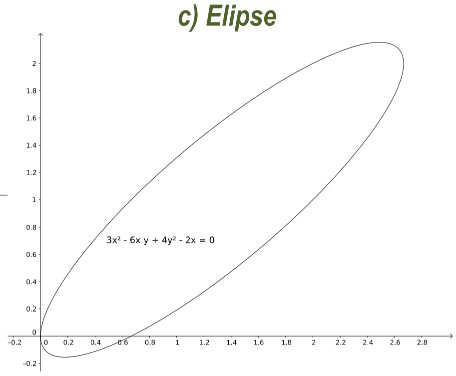


c) Elipse

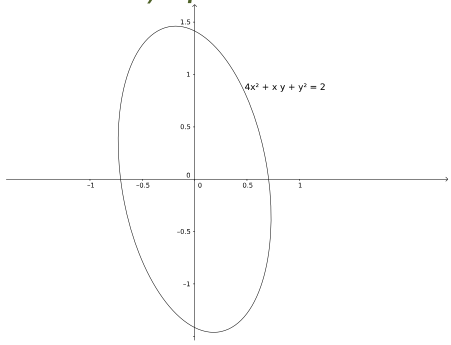


e) Hipérbola





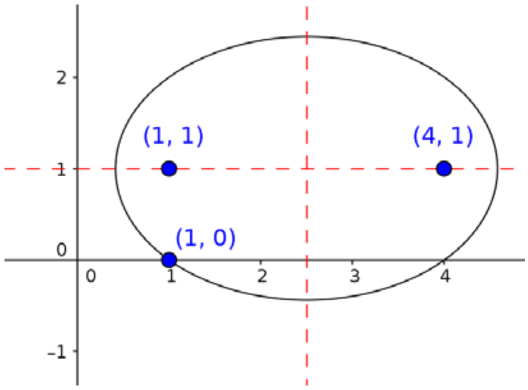
d) Elipse



f) Elipse

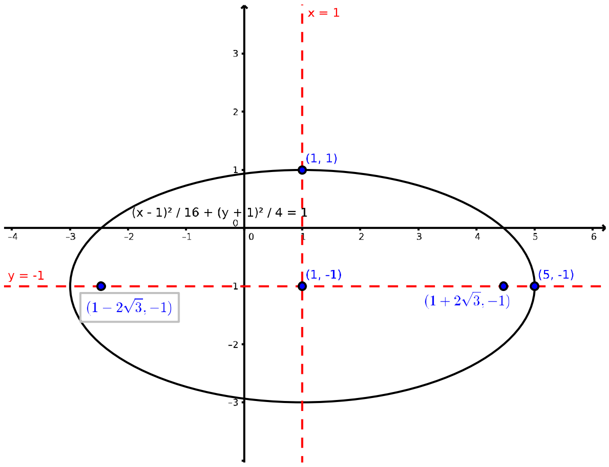
45. Una elipse tiene focos en (1, 1) y en (4, 1) y pasa por el punto (1, 0). Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

Solución: Su ecuación es $\frac{(x-5/2)^2}{(5/2)^2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$ ***y su excentricidad vale 3/5.***



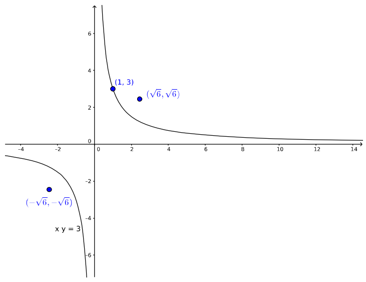
46. Una elipse tiene por centro el punto (1, –1) y pasa por los puntos (5, –1) y (1, 1). Sabiendo que su radio mayor es 4:
   a. Da su ecuación y dibuja la elipse.
   b. Calcula sus focos y excentricidad.

Solución: a) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$; ***b) F(1+2***$\sqrt{3}$***, –1), F'(1 –2***$\sqrt{3}$***, –1) , EXC =*** $\sqrt{3}$ ***/2.***



47. Una hipérbola equilátera con centro el origen pasa por el punto (1, 3). Calcula sus focos y dibújala.

Solución: xy = 3, F($\sqrt{6}$ ***,*** $\sqrt{6}$ ***), F'(–***$\sqrt{6}$ ***,–***$\sqrt{6}$ ***); V(***$\sqrt{3}$ ***,*** $\sqrt{3}$ ***), V'(–***$\sqrt{3}$ ***,–***$\sqrt{3}$ ***).***



48. Sabiendo que las asíntotas de una hipérbola son $y=2x$ e $y=-2x$ y que pasa por el punto (2,0) calcular la ecuación de dicha hipérbola.

Solución: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

49. Una hipérbola equilátera tiene como ecuación $xy=50$. Calcula sus focos.

Solución: Los focos son (10, 10) y (–10, –10).

AUTOEVALUACIÓN

1. Comenzamos en el punto (1, 1) y nos movemos primero con el vector $\vec{v} = (1, -3)$ y después con el vector $\vec{w} = (-4, 5)$.
    a. ¿En qué posición estamos al final?
    b. Si quisiéramos hacer los dos pasos en uno, ¿qué vector seguiríamos?

Solución: a) En el punto (–2, 3); b) El vector (–3, 2).

2. Dados los puntos $P = (2, 2)$, $Q = (1, 0)$ y el vector $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, calcula, indicando si son puntos o vectores:

    a. $\overrightarrow{QP}$ b. $2\overrightarrow{PQ} + 3\vec{v}$ c. $P + 2\vec{v}$

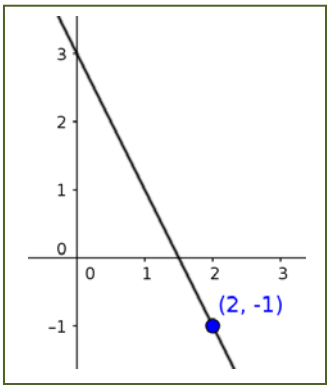
Solución: a) (1, 2) Vector. b) (1, –7) Vector; c) (4, 0) Punto.

3. Realiza las siguientes operaciones:

    a. $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(1, -2)}$ b. $(2, -3) \cdot [(0, 2) - (1, -1)]$

Solución: a) –3; b) –11.

4. Calcula la recta que es paralela a $r \equiv 2x + y = 5$ y pasa por el punto $(2, -1)$. Exprésala al menos de cuatro formas, calcula su pendiente y dibújala.



Solución: La recta es 2x + y = 3.

Otras formas alternativas son: y = –2x+3, o (x, y) = (2, 1) + λ(1, –2).

Pendiente = –2.

5. Calcula el ángulo entre las rectas $r \equiv x + 2y = 5$ y $y = x + 3$

Solución: 71.56 º.

6. Sean las rectas $r \equiv (1, 2) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv y - 2 = -2(x + 1)$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

Solución: Son paralelas no coincidentes. No tienen puntos de corte.

7. Calcula la distancia del punto (1, 3) a la recta $(x, y) = (2, 2) + \lambda\overrightarrow{(1, -1)}$ e interpreta el resultado

Solución: La distancia es 0. El punto está sobre la recta.

8. Consideremos el triángulo ABC rectángulo en B e isósceles. Si A = (2, 1) y B = (1, 4), calcula:
    a. El vértice C (hay dos soluciones posibles).
    b. Los otros dos ángulos del triángulo.
    c. El área y el perímetro del triángulo.

Solución: a) C = (4, 5) o bien C = (–2, 3); b) B = 90º, A = C = 45º ambos; c) Área = 5 u², perímetro = 7.63 u.

9. Tres puntos de un triángulo son A = (1, 1), B = (3, 3) y C = (5, 2). Calcula sus lados y ángulos.

Solución: lado(AB) = 2.82; lado(AC) = 4.12; lado (BC) = 2.23.

Ángulo(A) = 30.96 º; Ángulo(B) = 108.43 º; Ángulo(C) = 40.60 º.

10. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos A = (4, 5), B = (–3, 4) y C = (6, 1).

Solución: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

11. Calcula la ecuación de una elipse horizontal con centro en (–1, 3) y radios 2 y 4. Calcula sus focos y dibujarla. ¿Cómo cambiaría la respuesta si la elipse fuera vertical?

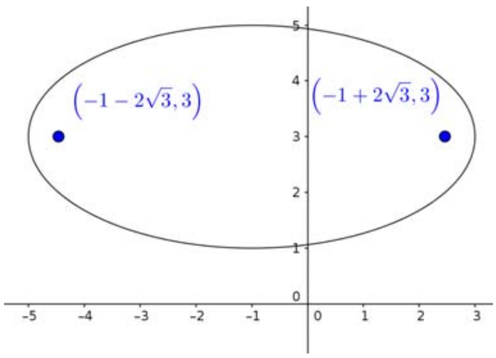
Solución:

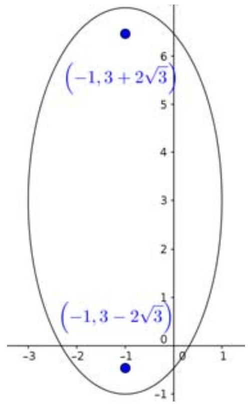
a) $\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1$;

Focos $(-1 + 2\sqrt{3}, 3)$ $(-1 - 2\sqrt{3}, 3)$

b) Vertical $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 = 1$

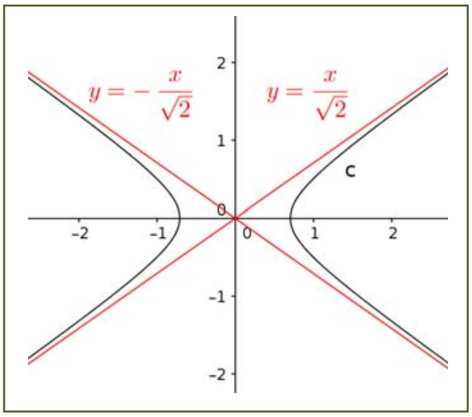
Focos $(-1, 3 - 2\sqrt{3})$ $(-1, 3 + 2\sqrt{3})$





12. Dibuja la hipérbola $4x^2 - 8y^2 = 2$ y sus asíntotas. Calcula sus focos y excentricidad.

Solución: Focos ($\sqrt{3}$ /2, 0) y ($-\sqrt{3}$ /2, 0). Excentricidad = $\sqrt{3}$.



13. Identifica las figuras y dibújalas

a. $4x^2 + 3y^2 - 8x = 0$

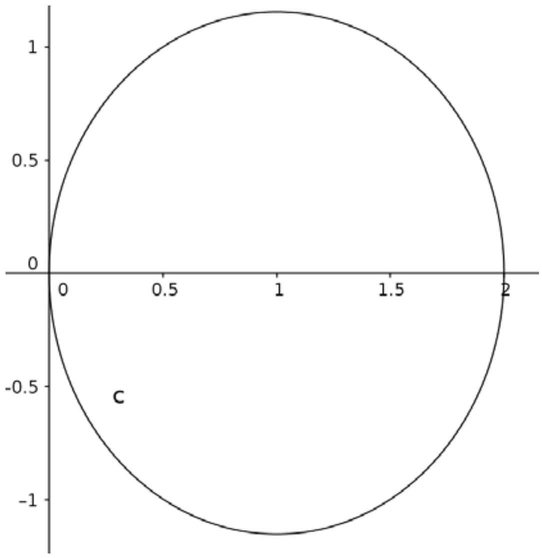
c. $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$

b. $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 2$

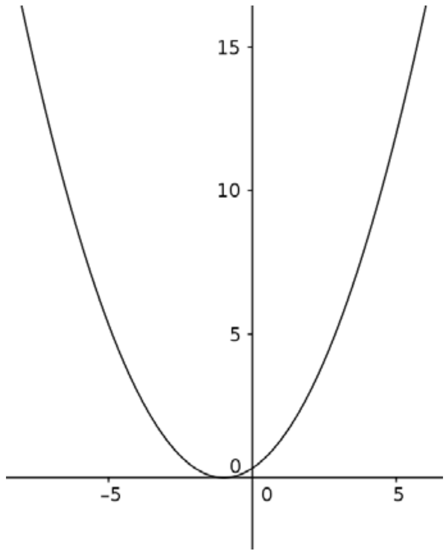
d. $4x^2 - 8x + 4y^2 - 16y + 4 = 0$

Solución:

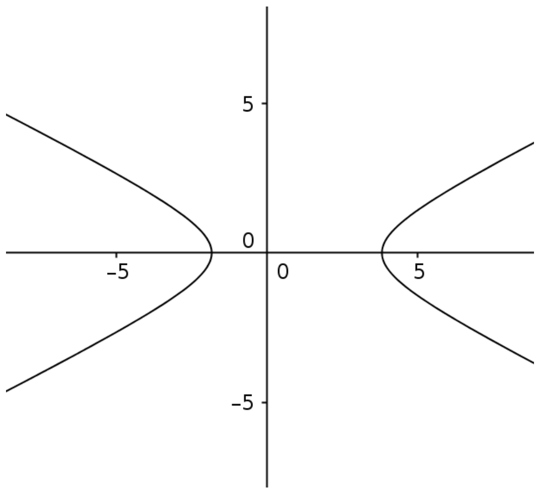
a) Elipse C(1, 0), a = 1, b = 2/$\sqrt{3}$;eje: y = 0, V(0, 0), V'(2, 0).



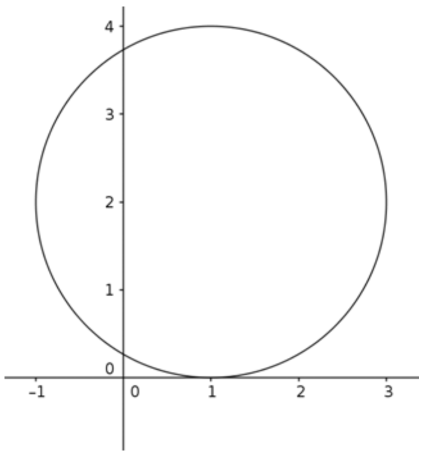
c) Parábola eje vertical, C(–1, 0), F(–1, 0.75), d: y = –0.75.



b) Hipérbola horizontal de eje y = 0, C(1, 0), a = $\sqrt{8}$, b = $\sqrt{2}$ V(0, –1.8) (0, 3.9)



d) Circunferencia de C(1, 2) y r = 2.



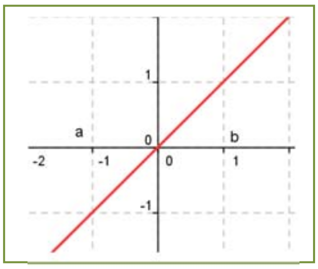
14. Una parábola vertical tiene el vértice en (1, 2) y las ramas hacia arriba. Si sabemos que pasa por el punto (0, 5) calcula su ecuación y su foco.

Solución: La ecuación es y – 2 = 3(x – 1)^2. Su foco está en (1, 25/12; d: y = 23/12..

CAPÍTULO 6: FUNCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

TIPOS DE FUNCIONES. GRÁFICAS



1. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

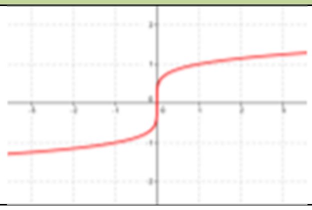
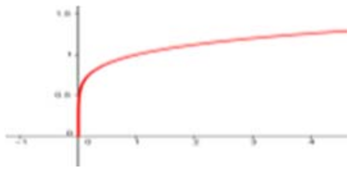
Solución:

x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*

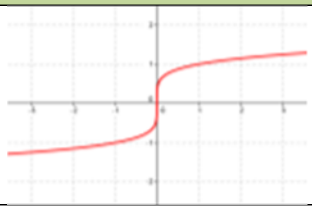
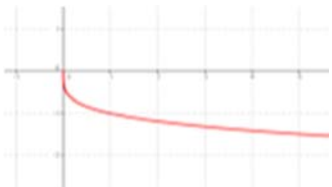
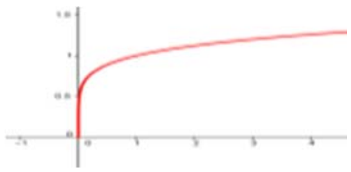
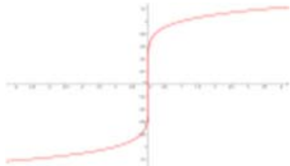
2. Calcula las imágenes de los números $-3; \frac{-1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$ por la función $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

Solución: f(–3) = –18; f(–1/2) = –4.25; f(0,1) = –2.81; f($\sqrt{2}$) = –2.17157288; f(3/2) = –2.25; f(10) = –83.

3. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

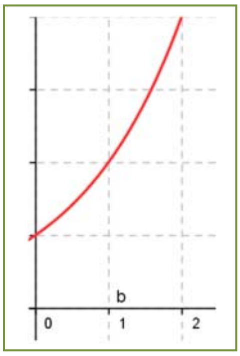
FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

Solución:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
		*X*		*X*	
	*X*				*X*

4. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.

Solución: $y = 2^x$.

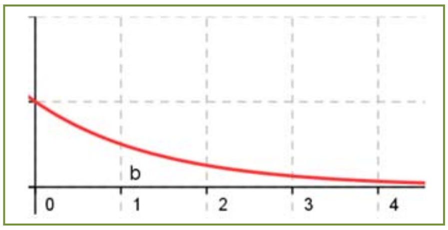


Horas transcurridas (x)	Número de bacterias (y)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
…	…

5. Vuelve a repetir otra vez el ejercicio anterior suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.

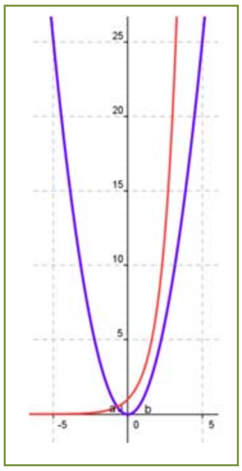
Solución: $y = (1/2)^x$.

Horas transcurridas (x)	Número de bacterias (y)
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
...	...



6. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

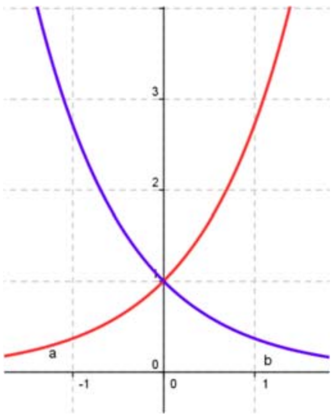
Solución:



7. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

Solución:

	–2	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
$y = e^x$	*0.135*	*0.368*	*1*	*2.718*	*7.389*	*20.086*
$y = e^{-x}$	*7.389*	*2.718*	*1*	*0.368*	*0.135*	*0.0498*

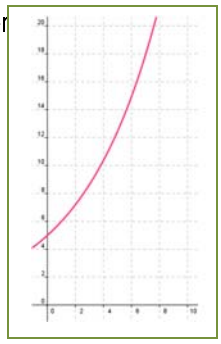


8. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.
   a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
   b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
   c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deber ejes.

Solución: b) $C = 5000(1.2)^n$

Años:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*
Capital:	*6000*	*7200*	*8640*	*10368*	*12441*	*14930*

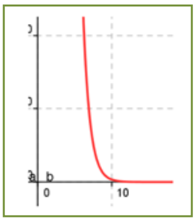
c) En el eje de abscisas las unidades son los años.
En el eje de ordenadas, el capital en miles de euros.



9. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 1/3 cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

(a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").

(b) Representa gráficamente estos datos.



Solución: $y = 10*3^{9-x}$.

x (hora)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (millones de bacterias)	$10*3^6$	$10*3^5$	$10*3^4$	$10*3^3$	$10*3^2$	10*3	10	10/3	10/9	10/27

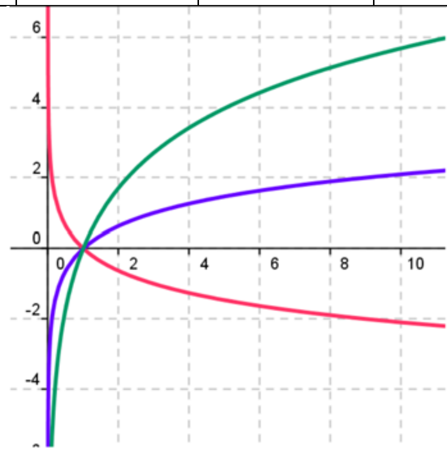
10. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{1/3} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, –1), donde a es la base.

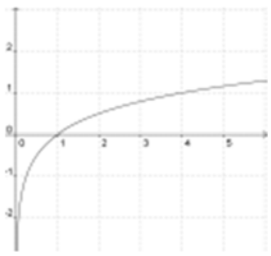
Solución:

x	1/3	2/3	1	3/2	3	4
$y = \log_3(x)$	–1	–0.37	0	0.37	1	1.26
$y = \log_{1/3}(x)$	1	0.37	0	–0.37	–1	–1.26
$y = \log_{1.5}(x)$	–2.71	–1	0	1	2.71	3.42

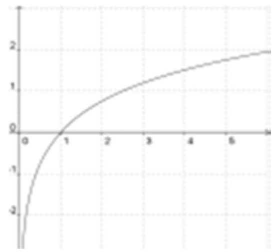


11. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

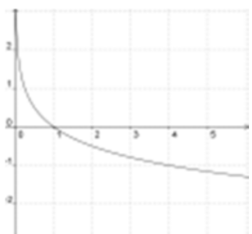
a)



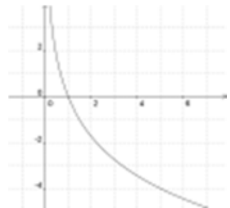
b)



c)



d)



Solución: a) $y = \log_4(x)$; ***b)*** $y = \log_2(x)$; ***c)*** $y = \log_{1/4}(x)$; ***d)*** $y = \log_{1/2}(x)$.

12. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x) + k$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: …………………………………………………………….................
- El período de la función: ……………………………………………………………………….
- El signo de la constante *k:* ……………………………………………………….………....

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

13. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x + k)$ de la función $f(x)$ con respecto a:
   - La gráfica de la función: ……………………………………………………….………...
   - El período de la función: ………………………………………………………………….
   - El signo de la constante k: ……………………………………………………………….

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

14. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $kf(x)$ en la función $f(x)$ con respecto a:
   - La gráfica de la función: …………………………………………………….…………
   - El período de la función: ………………………………………………………………….
   - El signo de la constante k: ……………………………………………………………….

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

15. Utiliza la función seno ($y=sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(kx)$ en la función $f(x)$ con respecto a:
   - La gráfica de la función: ………………………………………………………………….
   - El período de la función: ………………………………………………………………….
   - La constante k, su signo y que sea mayor o menor que 1: ……………………………...

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

16. Abre un nuevo archivo de *Geogebra*, representa la función tangente: $f(x) = \tan(x)$, estudia su comportamiento respecto a transformaciones de la forma $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$ y $f(kx)$ y busca alguna diferencia con la función $\cos(x)$ respecto a estas transformaciones.

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

17. Esboza, sin utilizar *Geogebra*, las gráficas de las funciones $f(x) = -\text{sen}(x + 1)$, $g(x) = 2\cos(3x)$ y $h(x) = \text{sen}(3x+2)$, calculando el período de cada una de ellas. Comprueba con *Geogebra* los resultados y justifícalos.

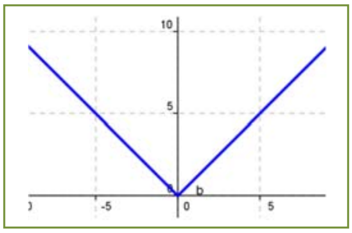
Solución manipulativa de uso de herramienta informática

18. Dibuja en la pantalla de *Geogebra* la función seno, y su derivada, la función coseno. Comprueba cómo se verifican las propiedades que ya conoces sobre crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Comprueba que cuando la función seno alcanza un máximo o un mínimo, la función coseno se anula. Comprueba que cuando la función seno es creciente, la función coseno es positiva, y que cuando la función seno es decreciente, la función coseno es negativa.

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

19. Representa gráficamente la función valor absoluto.

Solución:



20. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x<-4 \\ -x+2 & si\ \ -4\le x<0 \\ 5 & si\ \ 0\le x \end{cases}$$ Puntos: $-6; -4; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 1;\ \frac{3}{2};\ 4$

b) $$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & si\ \ x<-3 \\ x & si\ \ -3\le x<2 \\ \sqrt{x} & si\ \ 2\le x \end{cases}$$ Puntos: $-5; -3; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 2;\ \frac{9}{4};\ 4$

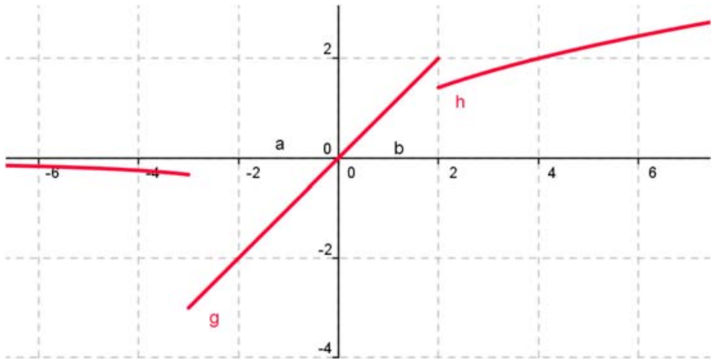
Solución: a)

x	*–6*	*–4*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	*1*	*3/2*	*4*
y	*35*	*6*	*5/2*	*2.2*	*5*	*5*	*5*	*5*

b)

x	*–5*	*–3*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	*2*	*9/4*	*4*
y	*–1/5*	*–3*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	$\sqrt{2}$	*3/2*	*2*

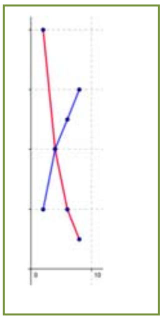
a)



b)

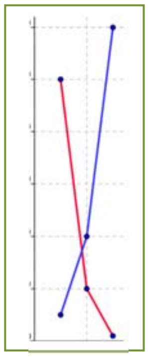
21. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100



Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

Solución:



22. Utiliza Geogebra para representar las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x+6 & si\, x\in(-\infty,-1) \\ -x+4 & si\, x\in[-1,2] \\ x^2-7x+12 & si\, x\in(2,\infty) \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\, x<-1 \\ e^x & si\ -1\le x\le 0 \\ x+1 & si\, x>0 \end{cases}$$

Solución manipulativa de uso de herramienta informática

23. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m^2, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1500	1000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio

Solución: b) (900, 180), a un precio de unos 900 euros, una cantidad de 180 pisos.

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

24. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x+3 \;;\; q(x) = 2x^2 - x + 7 \;;\; r(x) = -x^3 + 6 \;;\; s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x) = \frac{-3}{x} \;;\; h(x) = \frac{x+1}{x^2} \;;\; j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \;;\; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \;;\; n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \;;\; b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \;;\; c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \;;\; d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

Solución:

a)	$(p+q)(x)$ **= $2x^2 - 6x + 10$**	b)	$(q+r)(x)$ **= $-x^3 + 2x^2 - x + 13$**
c)	$(q+r+s)(x)$ **= $-x^3 + 5x^2 - 2x + 13$**	d)	$(s-q)(x)$ **= $x^2 - 7$**
e)	$(q-r)(x)$ **= $x^3 + 2x^2 - x + 13$**	f)	$(r-p)(x)$ **= $-x^3 + 5x + 3$**
g)	$(f+p)(x)$ **= $(2x-4)/(x+3) - 5x + 3$**	h)	$(j-f)(x)$ **= $(-x^2/(x^2-4)) - ((2x-4)/(x+3)$**
i)	$(g+k)(x)$ **= $-3/x + e^{x-4}$**	j)	$(m-a)(x)$ **= $(2/3)^x - L(x-2)$**
k)	$(b+d)(x)$ **= $\log((x^3-1)(x-1)/3)$**	l)	$(r+m)(x)$ **= $-x^3 + 6 + (2/3)^x$**
m)	$(p\cdot q)(x)$ **= $-10x^3 + x^2 - 32x + 2$**	n)	$(q\cdot r)(x)$ **= $-2x^5 + x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 6x + 42$**
o)	$(q\cdot r:s)(x)$ **= $(2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6)/(3x^2 - x)$**	p)	$(p:q)(x)$ **= $(-5x+3)/(2x^2 - x + 7)$**
q)	$(f\cdot p)(x)$ **= $(2x-4)/((x+3)(-5x+3))$**	r)	$(j\cdot f)(x)$ **= $-2x^2/(x^2 - x - 6)$**
s)	$(g:k)(x)$ **= $-3/(x\,e^{x-4})$**	t)	$(a\cdot b)(x)$ **= $L(x-2)\cdot\log((x-1)/3))$**
u)	$(p\circ q)(x)$ **= $-10x^2 + 10x - 32$**	v)	$(a\circ b)(x)$ **= $L(\log((x-1)/3 - 2))$**
w)	$(r\circ s)(x)$ **= $-(3x^2 - x)^3 + 6$**	x)	$(f\circ p)(x)$**= $(-10x + 2)/(-5x + 6)$**
y)	$(j\circ f)(x)$ **= $(-(2x-4)^2)/((2x-4)^2 - 4)(x+3))$**	z)	$(g\circ k)(x)$ **= $-3/e^{x-4}$**

25. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x+3 \;;\; q(x) = 2x^2 - x + 7 \;;\; r(x) = -x^3 + 6 \;;\; s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x) = \frac{-3}{x} \;;\; h(x) = \frac{x+1}{x^2} \;;\; j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \;;\; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \;;\; n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

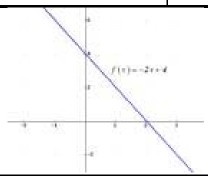
$$a(x) = L(x-2) \;;\; b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \;;\; c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \;;\; d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

Solución:

FUNCIÓN		INVERSA	FUNCIÓN		INVERSA
a)	$p(x)$	***y = (3 – x)/5***	b)	$q(x)$	***No existe***
c)	$r(x)$	$y = \sqrt[3]{6-x}$	d)	$s(x)$	***No existe***
e)	$f(x)$	***y = (3x + 4)/(2 – x)***	f)	$g(x)$	***y = –3/x***
g)	$h(x)$	***No existe***	h)	$j(x)$	***No existe***
i)	$k(x)$	***y = 4 + ln(x)***	j)	$l(x)$	$y = 1/\log_2(x)$
k)	$m(x)$	$y = \log_{(2/3)}(x)$	l)	$n(x)$	***y = ln(x)/(ln(x) –1)***
m)	$a(x)$	$y = 2 + e^x$	n)	$b(x)$	$y = 1 + 3\cdot 10^x$
o)	$c(x)$	***No existe***	p)	$d(x)$	$y = \sqrt[3]{1+10^x}$

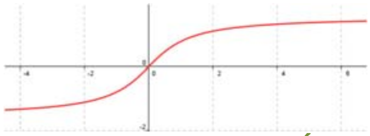
26. Calcula la función inversa de:

Solución: y = –x/2 + 2.



27. Realiza el proceso anterior para la función arco tangente: $y = arctgx \Leftrightarrow x = tg(y),\; y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Solución:



3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

28. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x^2-3}$		*b)* $j(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$		*d)* $k(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$		*f)* $l(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$		*h)* $m(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$	

Solución:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x^2-3}$	$\{x\in\Re;\ x\neq\pm\sqrt{3}\}$	*b)* $j(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-3 \text{ o bien } x>3\}$
c) $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-2/3 \text{ o bien } x>3\}$	*d)* $k(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$	$\{x\in\Re;\ x\neq2,\ x\neq-2\}$
e) $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq1\}$	*f)* $l(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}$	$\{x\in\Re;\ x>-2 \text{ y además } x<3\}$
g) $i(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq1,\ x\neq-1\}$	*h)* $m(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$	$\{x\in\Re;\ x\neq1\}$

29. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

Solución:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$	$\Re$	*b)* $q(x)$	$\Re$
c) $r(x)$	$\{x\in\Re;\ x<-1\}$	*d)* $s(x)$	$\Re$
e) $f(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-3\}$	*f)* $g(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq0\}$
g) $h(x)$	$\Re$	*h)* $j(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-2 \text{ y } x\neq2\}$
i) $k(x)$	$\Re$	*j)* $l(x)$	$\Re$
k) $m(x)$	$\Re$	*l)* $n(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq-1 \text{ y } x\neq1\}$
m) $a(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	*n)* $b(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq0\}$
o) $c(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	*p)* $d(x)$	$\{x\in\Re;\ x>\sqrt[3]{5}\}$

30. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x} \quad ; \quad f(x)=\frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4} \quad ; \quad k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}} \quad ; \quad a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

Solución:

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abscisas		Ordenadas	Abscisas
a) $p(x)$	*(0, 3)*	*(3/5, 0)*	b) $q(x)$	*(0, $\sqrt{7}$)*	*Ninguno*
c) $r(x)$	*Ninguno*	*(–1, 0)*	d) $s(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0), (1/3, 0)*
e) $f(x)$	*(0, –4/3)*	*(2, 0)*	f) $g(x)$	*Ninguno*	*Ninguno*
g) $h(x)$	*(0, 1)*	*(–1, 0)*	h) $j(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0), (2, 0)*
i) $k(x)$	*(0, 1/e⁴)*	*Ninguno*	j) $l(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0)*
k) $m(x)$	*(0, 2/3)*	*Ninguno*	l) $n(x)$	*(0, 1)*	*(–1, 0), (1, 0)*
m) $a(x)$	*(0, L(2))*	*(–1, 0)*	n) $b(x)$	*Ninguno)*	*(–2, 0), (2, 0)*
o) $c(x)$	*(0, log(1/4))*	*(–1, 0)*	p) $d(x)$	*Ninguno)*	*($\sqrt[3]{5}$, 0)*

31. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$$f(x)=2^{x-24}\cdot 4^{3x+1}\cdot 8^{-x-1}-1 \qquad h(x)=x^3+4x \qquad k(x)=e^{-2x}-22$$

$$g(x)=-7x^4-x^2+1 \qquad j(x)=\sqrt{15x-3\sqrt{-x-9}} \qquad l(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

Solución: f(x) no es simétrica. No corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en (0, 25/4);
g(x) es una función par; Corta al eje de abscisas aproximadamente en (–0.47, 0) y (0.3, 0), y al eje de ordenadas en (0, 1)
h(x) es impar, Puntos de intersección: (0, 0),
j(x) no es simétrica. No corta a los ejes.
k(x) no es simétrica. Puntos de intersección: (0, –21), (–ln(22)/2, 0);
i(x) es impar. No corta a los ejes.

32. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

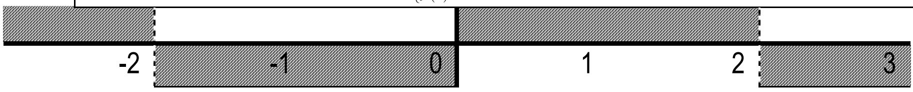
$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

Solución:

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$	*x < 3/5*	*x > 3/5*	b) $q(x)$	*ℜ*	*-----*
c) $r(x)$	*x < –1*	*-----*	d) $s(x)$	*x < 0 y x > 1/3*	*0 < x < 1/3*
e) $f(x)$	*x > 2*	*x < 2*	f) $g(x)$	*x < 0*	*x > 0*
g) $h(x)$	*x > –1*	*x < –1*	h) $j(x)$	*–2 < x < 0*	*x < –2 y x > 0*
i) $k(x)$	*ℜ*	*-----*	j) $l(x)$	*ℜ*	*-----*
k) $m(x)$	*ℜ*	*-----*	l) $n(x)$	*ℜ*	*-----*
m) $a(x)$	*x > –1*	*–2 < x < –1*	n) $b(x)$	*x < –2 o x > 2*	*–2 < x < 2*
o) $c(x)$	*x < –1 y x > 3*	*–1 < x < 3*	p) $d(x)$	*x > $\sqrt[3]{5}$*	*log(5) < x < $\sqrt[3]{5}$*

33. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases}\text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$	la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



Solución:

a) p(x)	*0 3/5*			*b) q(x)*	*0 1 2*	
		1 2				

c) r(x)	*-1*			*d) s(x)*	*0*		*1/3 1*
						1/5	

e) f(x)		*2*		*f) g(x)*	*0*	
	0 1					*1 2*

g) h(x)		*0 1*		*h) j(x)*		*-1 0*	
	-1				*-2*		*1*

i) k(x)	*0 1 2*		*j) l(x)*	*0 1 2*

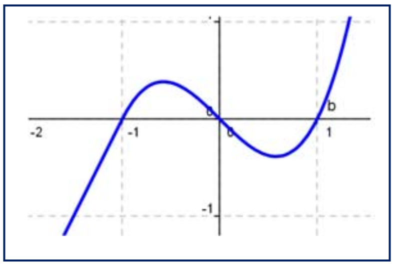
k) m(x)	*0 1 2*		*l) n(x)*	*0 1 2*

m) a(x)			*0*		*n) b(x)*	*-2*		*2*
		-2 -1						

o) c(x)	*-1*				*p) d(x)*			$\sqrt[3]{5}$
		-1 0 3					*log(5)* $\sqrt[3]{5}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función f: $\Re \to \Re$ dada por $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \le -1, \\ x^3-x & \text{si } x > -1. \end{cases}$



Solución:

2. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$p(x) = -5x+3$; $q(x) = 2x^2 - x + 7$; $r(x) = -x^3 + 6$; $s(x) = 3x^2 - x$

$f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$; $g(x) = \dfrac{-3}{x}$; $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$; $j(x) = \dfrac{-x^2}{x^2-4}$

$k(x) = e^{x-4}$; $l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$; $m(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; $n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

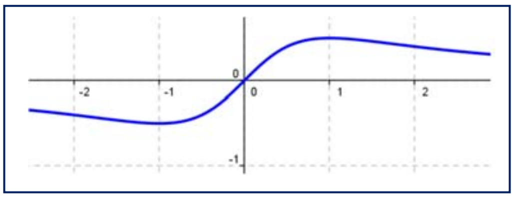
$a(x) = L(x-2)$; $b(x) = \log\left(\dfrac{x-1}{3}\right)$; $c(x) = L\left(\dfrac{x^2-1}{2x+4}\right)$; $d(x) = \log\left(x^3-1\right)$

Solución:

a)	$(s+q)(x)$ = $5x^2 - 2x + 7$	b)	$(r+p)(x)$ = $-x^3 - 5x + 9$
c)	$(p-q)(x)$ = $-2x^2 - 4x + 4$	d)	$(p+q+r+s)(x)$ = $-x^3 + 5x^2 - 7x + 16$
e)	$(q-r-s)(x)$ = $x^3 - x^2 - 2x + 1$	f)	$(p-q+r-s)(x)$ = $-x^3 - 5x^2 - 3x + 2$
g)	$(g+h)(x)$ = $(-2x^2 + x)/x^2$	h)	$(s-g)(x)$ = $3x^2 - x + 3/x$
i)	$(n-k)(x)$ = $e^{x/(x-1)} - e^{x-4}$	j)	$(g+d)(x)$ = $-3/x + \log(x^3 - 1)$
k)	$(b-d)(x)$ = $\log(1/(3(x^2 + x + 1))$	l)	$(c+s)(x)$ = $L((x^2 - 1)/(2x + 4)) + 3x2 - x$
m)	$(s \cdot q \cdot r)(x)$ = $(3x^3 - x)(2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6)$	n)	$(r \cdot p)(x)$ = $(-x^3 + 6)(-5x + 3)$
o)	$(q : p)(x)$ = $(2x^2 - x + 7)/(-5x + 3)$	p)	$(s : q)(x)$ = $(3x^2 - x)/(2x^2 - x + 7)$
q)	$(g \cdot h)(x)$ = $(-3x - 3)/x^4$	r)	$(s : g)(x)$ = $-x^3 + x^2/3$
s)	$(n \cdot k)(x)$ = $e^{(x-4)+(x/(x-1))}$ = $e^{(x2 - 4x + 4)/(x - 1)}$	t)	$(g : d)(x)$ = $-3/(x(\log(x^3 - 1))$
u)	$(s \circ q)(x)$ = $3((2x^2 - x + 7)^2 - (2x^2 - x + 7))$	v)	$(r \circ p)(x)$ = $-(-5x + 3)^3 + 6$
w)	$(q \circ p)(x)$ = $2(-5x + 3)^2 - (-5x + 3) + 7 = 50x^2 - 55x + 22$	x)	$(g \circ h)(x)$ = $-3x^2/(x+1)$
y)	$(s \circ g)(x)$ = $27/x^2 + 3/x$	z)	$(n \circ k)(x)$ = $\dfrac{e^{x-4}}{e^{e^{x-4}} - 1}$

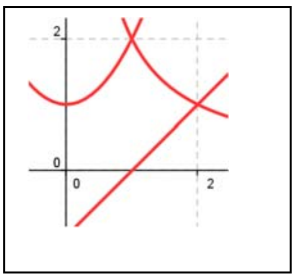
3. Considera la función f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

Solución: Dominio = $\Re$; Puntos de intersección con los ejes: (0, 0).
Es una función impar. Negativa si x < 0 y positiva si x > 0.



4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \dfrac{2}{x}$ e $y = x - 1$.

Solución: El recinto de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0).



5. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ $\quad h(x)=2^{-x+1}$ $\quad k(x)=2^x\cdot 30^{x-1}\cdot 12^{-x+1}$ $\quad m(x)=\sqrt[4]{-5+2x}$

$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+7}}$ $\quad j(x)=L\left(x^5-1\right)$ $\quad l(x)=\dfrac{x^2-9}{x^3+7x^2+15x+9}$ $\quad n(x)=\left(4x^2-4x+1\right)^{\frac{-1}{3}}$

a) Calcula las siguientes composiciones:

$$f\circ h\ ;\ g\circ h\ ;\ g\circ j\ ;\ k\circ h\ ;\ g\circ h\circ j\ ;\ m\circ j\ ;\ l\circ h\ ;\ m\circ h\ ;\ j\circ h\ ;\ l\circ m$$

Solución: ***foh(x) =*** $2^{(-3x+3)}-3\cdot 2^{(-2x+2)}+3\cdot 2^{(-x+1)}-1$; $g\circ h=\sqrt{\dfrac{2^{-x+1}-2}{2^{-x+1}+7}}$; $g\circ j=\sqrt{\dfrac{L(x^5-1)-2}{L(x^5-1)+7}}$;

$k\circ h=2^{2^{-x+1}}\cdot 30^{2^{-x+1}-1}\cdot 12^{-2^{-x+1}+1}$; $g\circ h\circ j=\sqrt{\dfrac{2^{-L(x^5-1)+1}-2}{2^{-L(x^5-1)+1}+7}}$; $m\circ j=\sqrt[4]{-5+2L(x^5-1)}$;

$m\circ h=\sqrt[4]{-5+2\cdot 2^{-x+1}}$; $j\circ h=L((2^{-x+1})^5-1)$; $l\circ m=\dfrac{(\sqrt[4]{-5+2x})^2-9}{(\sqrt[4]{-5+2x})^3+7(\sqrt[4]{-5+2x})^2+15\sqrt[4]{-5+2x}+9}$.

b) Calcula $f^{-1}(x),\ h^{-1}(x), k^{-1}(x), j^{-1}(x),\ n^{-1}(x)$ y verificar que son las inversas de $f(x),\ h(x),\ k(x), j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

Solución: h⁻¹(x) = 1 – log₂(x); $j^{-1}(x)=\sqrt[5]{e^x+1}$ ***; Con*** $g^{-1}(x)$ ***calculando y =*** $(7x^2+2)/(1-x^2)$ ***se añaden ramas, y lo mismo con m(x)***

c) Calcula todos los dominios.

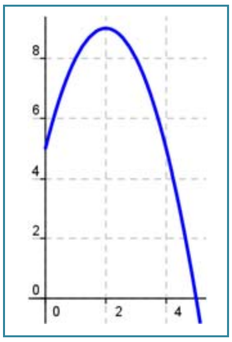
Solución: f: Todo ℜ; h: Todo ℜ; k: Todo ℜ; m: x > 5/2; g: x > 2; j: x > 1; l: {x∈ℜ; x ≠ –3 y x ≠ –1}; n: {x∈ℜ; x ≠ 1/2}.

d) Calcula los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

Solución: f: (1, 0), (0, 1); h: (0, 2); k: (0, 24/30); m: ($\sqrt[4]{5/2}$ ***, 0); g: (2, 0); j: (*** $\sqrt[5]{2}$ ***, 0); l: (0, –1); (3, 0), (–3, 0); n: (0, 1).***

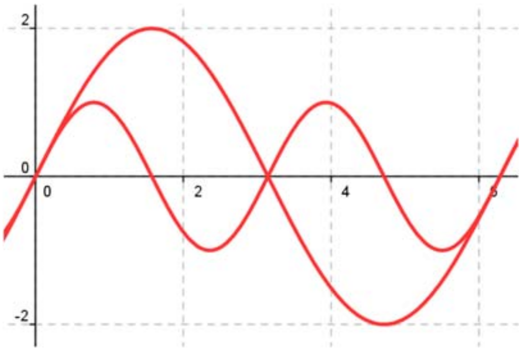
6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por $h(t)=5+4t-t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.

Solución: El objeto se lanza desde una altura de 5 m. Al cabo de 1 s está a 8 m. Alcanza su altura máxima a los 2 segundos y es de 9 m. Llegará al suelo a los 5 segundos.



7. Considera las funciones f, g: $[0, 2\pi]\to\Re$, $f(x)=2\cdot sen(x)$ y $g(x)=sen(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g.

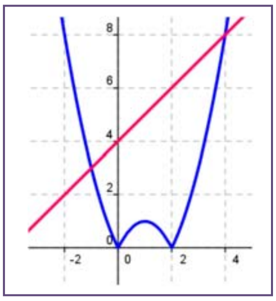
Solución:



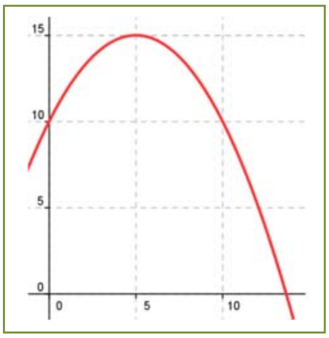
8. Sea la función dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que es impar y que pasa por el punto (1, –2).

Solución: a = c = 0; b = –3; f(x) = x³ – 3x.

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$. Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.

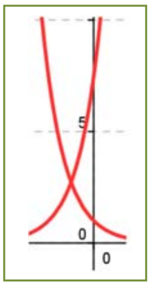


Solución: Puntos de corte: (–1, 3) y (4, 8).



10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10 \quad 0 \le t \le 12$. a) Representa gráficamente la función. b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?

Solución: b) A las 6 horas, 14.8 céntimos de euro; A las 12 horas, 5.2 céntimos de euro.



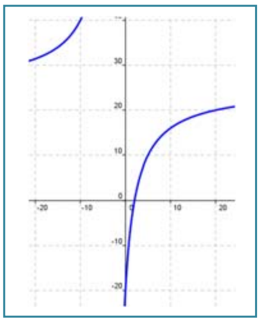
11. Considera la función definida por $f(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$. Calcula su dominio.

Solución: Está definida únicamente para valores positivos de x.

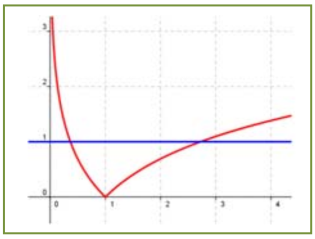
12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

Solución: Tiene de vértices (1, 0), (e², 0) y (–1, e).

13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \ge 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.



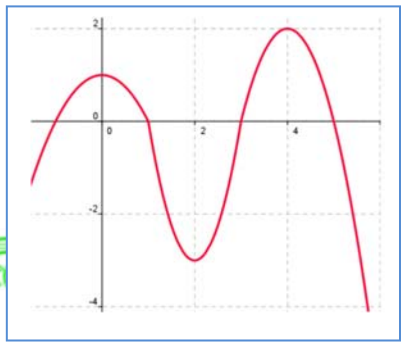
Solución: Dominio: La función está definida en toda la recta real salvo en el punto x = –5/2;
Intersección con los ejes: (2, 0), (0, –20). No es simétrica.
Tiene una asíntota vertical para x = –5/2. Para x < –5/2 y para x > 2 la función es positiva, y para –5/2 < x < 2 es negativa.



14. Considera la función definida por $g(x) = |ln(x)|$ (donde *ln* denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g* y la recta *y* = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Solución: La recta horizontal y = 1 corta a la función en (1/e, 1) y en (e, 1)

15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{Lx}{x^2}$ (Lx indica



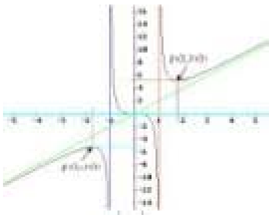
logaritmo neperiano de *x*); $g(x)=(1-x^3)\cos x$ y $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$.

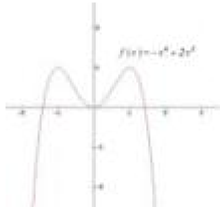
Solución: Dom f = {x∈ℜ; x > 0}; Dom g = ℜ; Dom h = ℜ.

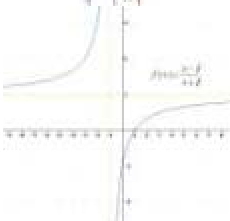
16. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.

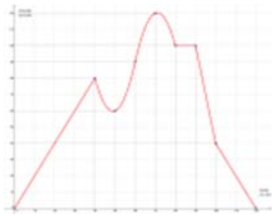
Solución: Dominio: ℜ; Es continua en ℜ.
Puntos de corte: (–1, 0), (0, 1), (1, 0), (3, 0), (5, 0).
Negativa: x < –1, 1 < x < 3, x > 5; Positiva: –1 < x < 1, 3 < x < 5.

17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a) 

b) 

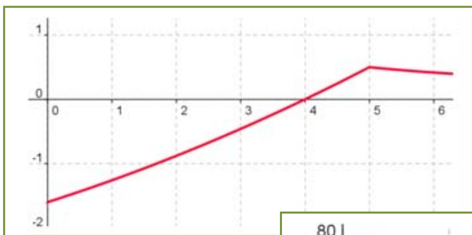
c) 

d) 

Solución: a) Dominio: {x∈ℜ; x ≠ –1, x ≠ 1}; Puntos de intersección: (0, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; –1 < x < 0, 1 < x}; Negativo: {x∈ℜ; x < –1, 0 < x < 1};
b) Dominio: ℜ; Puntos de intersección: (0, 0), ($-\sqrt{2}$, 0), ($+\sqrt{2}$, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; $-\sqrt{2}$ < x < $+\sqrt{2}$}; Negativo: {x∈ℜ; x < $-\sqrt{2}$, x > $+\sqrt{2}$};
c) Dominio: {x∈ℜ; x ≠ –1}; Puntos de intersección: (0, –1), (1, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; x < –1, 1 < x}; Negativo: {x∈ℜ; –1< x < 1};
b) Dominio: ℜ; Puntos de intersección: (0, 0), ($-\sqrt{2}$, 0), ($+\sqrt{2}$, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; $-\sqrt{2}$ < x < $+\sqrt{2}$}; Negativo: {x∈ℜ; x < $-\sqrt{2}$, x > $+\sqrt{2}$};
d) Dominio: {x∈ℜ; 0 ≤ x ≤ 120}; Puntos de intersección: (0, 0), (120, 0); Signo positivo todo el dominio.

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de *x* millones de euros produce una ganancia de *f*(*x*) millones de €, siendo: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{50}+\dfrac{8x}{25}-\dfrac{8}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 5 \\ \dfrac{5}{2x} & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.

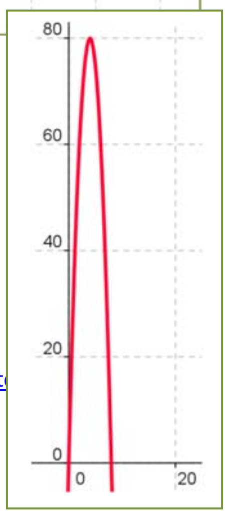
Solución: Las abscisas varían entre 0 y +∞, que es el dominio de la función, las ordenadas varían entre –8/5 y 1/2. Los puntos de corte con los ejes son: (0, –8/5) y (4, 0). Asíntota horizontal y = 0. Es continua en todo su dominio. Alcanza un máximo en (5, 1/2). Los beneficios son negativos para inversiones menores a 4 millones de euros, El beneficio es máximo para 5 millones y luego desciende.



19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "*h*" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "*t*" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t)=-5t^2+40t$.

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

b) Represente gráficamente la función *h(t)*.



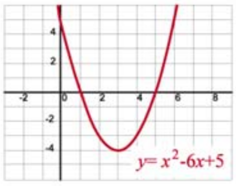
c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

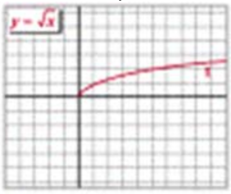
d) ¿En qué instante llega al suelo?

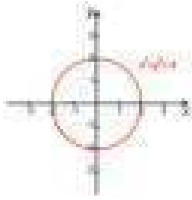
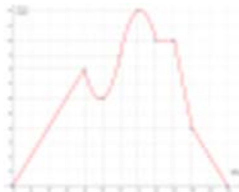
Solución: a) Se alcanza la altura máxima, de 89 metros, a los 4 segundos;
c) Está a los 60 metros de caída a los 6 segundos;
d) Llega al suelo a los 8 segundos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) 

b) 

c) 
d) 

Solución: c)

2. La fórmula de la composición fog de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

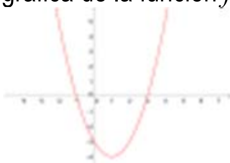
Solución: a)

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

Solución: d)

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

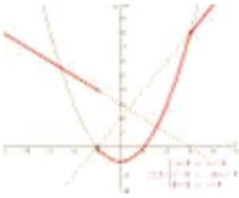
a) 
b)
c)
d) 

Solución: d)

5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

Solución: c)

6. El recorrido de la función  es:

a) $[-1, \infty[$ b) $]-1, \infty[$ c) $]-\infty, -1]$ d) $\Re - \{4\}$

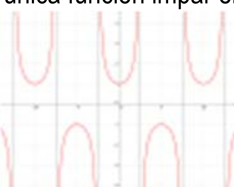
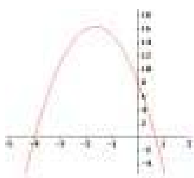
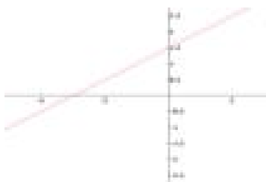
Solución: a)

7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ son:

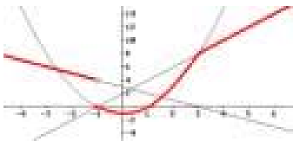
a) No tiene b) $(1,0);(2,0)$ c) $(-1,0);(2,0)$ d) $(0, \ln 3)$

Solución: b)

8. La única función impar entre las siguientes es:

a) 
b) 
c) 
d)

Solución: d)

9. El intervalo donde la función  es negativa es:

a) $]-1, 1[$ b) $]-\infty, -1[$ c) $]-\infty, 1]$ d) $]-\infty, 0[$

Solución: a)

10. La única función NO periódica de las siguientes es:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$ b) $g(x) = \text{tg}(x)$ c) $h(x) = e^x$ d) $j(x) = cosec(x)$

Solución: c)

CAPÍTULO 7: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE LÍMITE

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x\to+1} x = 1$.

***Solución:** Si $\lim_{x\to+1} x = 1$ entonces $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $(f(1-\delta), f(1+\delta)) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Para que esto se verifique debe ser $f(1-\delta) > 1-\varepsilon$ y $f(1+\delta) < 1+\varepsilon$. Trabajando con las desigualdades se comprueba que basta con elegir $\delta < \varepsilon$, luego dado ε basta elegir $\delta < \varepsilon$ para que se verifique ese es el límite.*

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & si\ x<1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & si\ x\geq 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & si\ x<1 \\ \frac{x-1}{x^2} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

***Solución:** a) 1 y 1. Existe el límite en x = 1 y vale 1; b) 1/6 y 5/4. No existe el límite en x = 1; c) 7/5 y 0. No existe el límite en x = 1*

3. Escribe la definición de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

***Solución:** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists k < 0$ tal que, si $x < k$, $x \in X$, se cumple $|f(x)| > M$.*

4. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

***Solución:** Definición: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k > 0$ tal que, si $|x| > k$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$. En este caso $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k > 0$ tal que, si $x > k$, $x \in X$, se cumple $|1/x - 0| < \varepsilon \Rightarrow 1/x < \varepsilon \Rightarrow 1/\varepsilon < x$, luego dado ε basta elegir k mayor que $1/\varepsilon$, para que se verifique el límite.*

5. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

***Solución:** Definición: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x)| > k$. En este caso $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < x < \delta$, $x \in X$, se cumple $1/x > k \Rightarrow 1/k > \delta > x$, luego dado $k > 0$ basta elegir $\delta < 1/k$ para que se verifiquen las condiciones.*

6. Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

a) $\lim_{x\to\infty} -x^2$ b) $\lim_{x\to\infty} +x^2$ c) $\lim_{x\to3} x^2$ d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$

***Solución:** a) Infinito de variable infinita: L = –∞; b) Infinito de variable infinita: L = +∞; c) Finito de variable finita: L=9; d) Finito de variable finita: L = 0.*

7. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x\to+\infty} -x^3$ b) $\lim_{x\to-\infty} -x^3$ c) $\lim_{x\to\infty} x^2$ d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$ e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$

***Solución:** a) –∞; b) +∞;* c) +∞; d) 0^+; e) 0^+.

8. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x\to1^+} \frac{5}{x-1}$ b) $\lim_{x\to1^-} \frac{5}{x-1}$ c) $\lim_{x\to3^+} \frac{-5}{x-3}$ d) $\lim_{x\to3^-} \frac{-5}{x-3}$

***Solución:** a) +∞;* b) –∞; c) –∞; d) +∞.

9. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$; b) $f(x) = \frac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$;

c) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$; d) $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

***Solución:** a) x = 1; b) x = 2; x = 3; c) x = 1; d) x = 1, x = 3, x = 5, x = –1.*

10. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}$ b) $f(x)=\dfrac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$ d) $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

Solución: a) y = 1;   b) y = 3;   c) y = 1/2;   d) y = 0.

11. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x)=\dfrac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

Solución: a) y = x + 3; b) y = 3x + 27; c) y = 1/2x + 1/2,   d) y = 2x – 2.

12. Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=(x+4)^2$ b) $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x)=x^3+4$ d) $f(x)=\dfrac{2x^5+4}{x+1}$

Solución: a) Rama parabólica; b) Asíntota horizontal y = 0, siempre por encima de 0; c) Para +∞ tiende a +∞, y para –∞ tiende a –∞; d) Rama parabólica, se comporta como y = x^4.

2. CÁLCULO DE LÍMITES

13. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

Solución: ±∞.

14. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución: ±∞.

15. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

Solución: ±∞.

16. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

Solución: ±∞.

17. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

Solución: 1/6.

18. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)$

Solución: –1.

19. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)$

Solución: 1/36.

20. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$

Solución: 1/4.

21. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$

Solución: $\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

22. Calcula el límite: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$

Solución: –1/4.

23. Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

Solución: a) 1; b) ∞; c) 0; d) 2.

24. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

Solución: a) –1; b) 3; c) 3/2; d) 0.

25. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$ b) $\lim_{x\to\infty}(senx)$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2}\right)$ d) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)$ e) $\lim_{x\to 0^+}(\ln(x))$

Solución: a) ∞; b) No existe; c) 3; d) +∞; e) –∞.

26. Determina los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

Solución: a) ∞; ***b)*** $e^{2/3}$; c) 1; d) $e^{2/25}$.

27. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

Solución: a) ∞; ***b) 0; c) 1; d) 0.***

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $f(x)=\sqrt{x-5}$ c) $f(x)=\log_2(x-3)$ d) $f(x)=\begin{cases}2+x^2 & si\ x\le 0\\ 1+e^x & si\ x>0\end{cases}$

Solución: a) Continua en ℜ –{1, –1}; b) Continua en {x∈ℜ; x ≥ 5}; c) Continua en {x∈ℜ; x >3};
d) Cada una de las ramas es una función continua, y en x = 0, ambos límites laterales valen lo mismo, 2, por lo que la función es continua en toda la recta real.

29. Determina el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\ x\le 1\\ k+x & si\ x>1\end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

Solución: 1 = k + 1 ⇒ k = 0.

30. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & si & x<-1\\ 2+x^2 & si & -1\le x\le 1\\ \frac{3}{x} & si & x>1\end{cases}$ b) $f(x)=x-\sqrt{x-2}$ c) $f(x)=|x-3|-1$

Solución: a) Las ramas primera y segunda son funciones polinómicas luego son siempre continuas, la rama tercera no es continua en x = 0, pero ese valor no es mayor que 1, En x = –1 la rama primera se acerca a 5, y la segunda vale 3, luego no es continua. En x = 1 la rama segunda vale 3, y la tercera se acerca a 3, luego en ese punto la función es continua. Continua en ℜ – {–1}; b) La función raíz es continua cuando el radicando toma valores cero o positivos, luego es continua en {x∈ℜ; x ≥ 2}; Continua en {x∈ℜ; x ≥ 5}; c) La función valor absoluto es siempre continua, luego la función es continua en toda la recta real.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

Solución: a) –1/9; b) 0; c) –9; d) 1; e) –12; f) 0; g) 98/5.

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)$

Solución: –∞; b) 0; c) –3; d) 0; e) –1; f) –∞; g) 0; h) –∞.

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$ g) $f(x)=\ln\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$ h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-5x}{(x-1)^2}}$

Solución: a) No tiene asíntota horizontal, tiene asíntota oblicua: y = x + 1; Asíntota vertical: x = 3;
b) Asíntota horizontal: y = 0; asíntotas verticales x = 2, x = –2;
c) Asíntota horizontal: y = 1, asíntotas verticales: x = 2. La recta x = –2 no es asíntota vertical;
d) Asíntota horizontal: y = 1, asíntotas verticales: x=1, x = –1;
e) Asíntota vertical; y = 0, asíntota vertical: x = 1;
f) Asíntota horizontal y = –5, asíntota vertical: x = 1;
g) Sólo está definida para x < 0; Asíntota horizontal: y = 0 cuando x tiende a –∞; Asíntota vertical: x = 0;
h) Asíntota horizontal: y = 0; No tiene asíntota vertical pues sólo está definida para x < 0.

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} 3^x & x<-2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 1 \\ \log_2 x & x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x^2-3x & 0\le x<3 \\ \sqrt{x-3} & x\ge 3 \end{cases}$ c) $h(x)=|x^2-5x|$

Solución: a) Continua en ℜ – {–2, 1}; Discontinuidad de primera especie con salto finito; b) Continua en ℜ – {0}; En x = 0 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito. En x = 3 es continua; c) Continua en todo ℜ.

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=|x^2-25|$ b) $g(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

Solución: a) Continua en todo ℜ; b) Continua en ℜ – {0}; Discontinuidad de primera especie con salto de tamaño 2; c) Continua en ℜ – {3}; Discontinuidad de primera especie con salto infinito.

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-4x+3}$ b) $g(x)=\dfrac{7x+2}{x^2+x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

Solución: a) Es continua en ℜ – {1, 3}, En x = 1 y x = 3 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito.
b) Es continua en ℜ – {0, –1}, En x = 0 y x = –1 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito.
c) Es continua en ℜ – {–1, 3}, En x = 3 y x = –1 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito.

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

Solución: ***a) La función no está definida en el intervalo (–2, 3). La función es continua en su dominio de definición:*** (–∞,–2] ∪. [3, –∞). ***En los extremos x = –2 y x = 3 no existe uno de los límites laterales.***

b) La función está definida para x < –2, y es continua en todo su dominio. Para valores próximos a x = 2, no está definida pues el radicando es negativo.

c) b) La función está definida para x < 0, y es continua en todo su dominio. Para valores próximos a x = 3, no está definida pues el radicando es negativo.

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x)=\ln\left(-x^2-x+2\right)$ c) $h(x)=\ln\left(\dfrac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

Solución: a) La función y = (4 – x)/(x – 5) tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito en x = 5, pero la función logaritmo no está definida para valores negativos, luego sólo está definida en el intervalo [4, 5),

b) La función es continua en (–∞,–2) ∪ (1, ∞), En x = –2, y x = 1, discontinuidad de segunda especie.

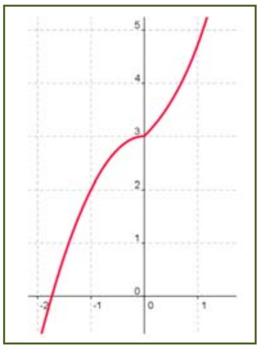
c) La función es continua en (–∞,–3) ∪ (3, ∞), teniendo en x = –3 y x = 3, discontinuidad de segunda especie.

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ b) $g(x)=e^{\sqrt{x-5}}$ c) $h(x)=2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

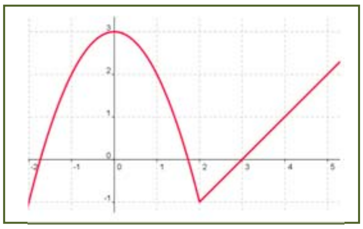
Solución: a) Continua en $\Re$ ***– {–7}; Discontinuidad de primera especie con salto infinito; b) Continua en {x∈***$\Re$***; x ≥ 5}, que es el dominio de definición de la función; c) Continua en {x∈***$\Re$***; x ≥ 5} – {–1, 1}; Discontinuidad de primera especie con salto infinito.***

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x<0\\ 2+e^x & x\geq 0\end{cases}$



a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica

Solución: a) Está definida por dos funciones continuas. La única duda es en x = 0. Calculamos los dos límites laterales y ambos valen 3, por tanto, la función es continua en todo $\Re$.

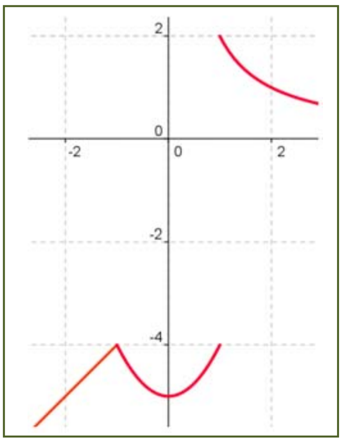


11. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x<2\\ k+x & x\geq 2\end{cases}$ a) Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real. Representa su gráfica

Solución: La función está definida por dos funciones continuas, luego el único caso dudoso es x = 2.

Para que sea continua en 2, deben coincidir los límites laterales. 3 – (2)² = –1, por lo que k + 2 = –1, y k = –3.

12. Dada la función $f(x)=\begin{cases}x-3 & \cdots x<-1\\ x^2-5 & -1\leq x<1\\ \dfrac{2}{x} & x\geq 1\end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica



Solución: La función está formada por 3 trozos, los dos primeros son funciones polinómicas, luego son siempre continuas, el tercero no sería continua en x = 0, pero para ese valor no está definido pues lo está para valores mayores de 1.

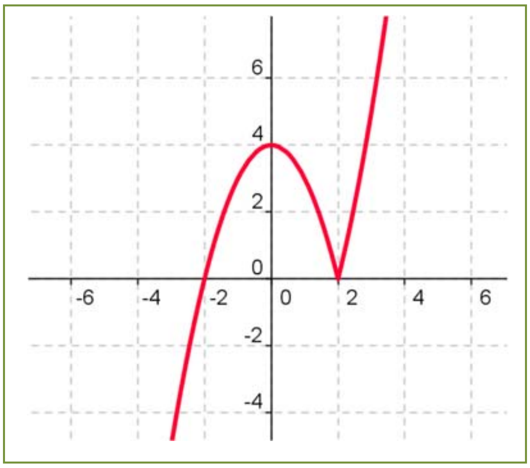
Quedan por estudiar los puntos de unión, x = -1 y x = 1. Calculamos los límites laterales: –1 – 3 = –4, (–1)² – 5 = 1 – 5 = –4. Ambos límites laterales coinciden, luego es continua para x = –1; (1)² – 5 = –4, 2/1 = 2. Ahora son distintos. La función es discontinua en x = 1, con una discontinuidad de primera especie de salto finito igual a 6.

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & x<2\\ x^2-4 & x\geq 2\end{cases}$. a) Estudia su continuidad.

b) Representa su gráfica

***Solución:** a) La función es continua en toda la recta real.*

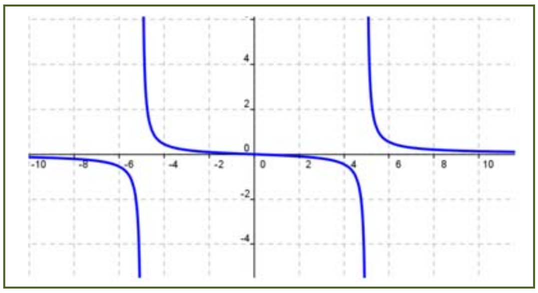
Está formada por dos funciones polinómicas, siempre continuas. El único punto dudoso es x = 2, y los dos límites laterales coinciden, valen 0.



14. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

***Solución:** Tiene una asíntota horizontal, y = 0; y dos asíntotas verticales: x = 5 y x = –5.*

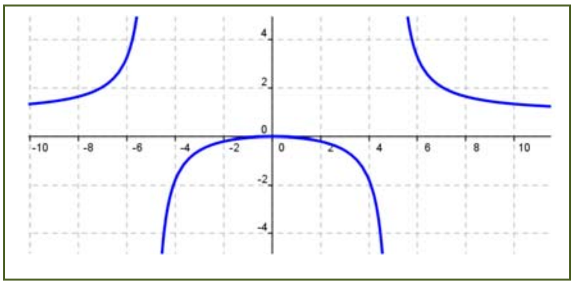
Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, es decir: x = 5 y x = –5, donde hay una discontinuidad de primera especie infinita.



15. Esboza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

***Solución:** Tiene una asíntota horizontal, y = 1; y dos asíntotas verticales: x = 5 y x = –5.*

Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, es decir: x = 5 y x = –5, donde hay una discontinuidad de primera especie infinita.



AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2/3

Solución: a)

2. El límite $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-x-2)\cdot\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) –1

Solución: a)

3. El límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) –2/3 d) –1

Solución: c)

4. El límite $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ vale:

a) 1/2 b) 0 c) $-\infty$ d) –1

Solución: a)

5. El límite $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

Solución: a)

6. El límite $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

Solución: c)

7. El límite $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1

Solución: a)

8. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3}{x} & si\ x<0\\ 3x+2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en x = 0.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: d)

9. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$ en x = 2.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: c)

10. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x>2\end{cases}$ en x = 2.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: b) Basta definir que f(2) = 8.

CAPÍTULO 8: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

***Solución:** a) TVM[–3, 2] = 3, TVM[1, 5] = 3, TVM[0, 3] = 3; b) TVM[–3, 2] = –2, TVM[1, 5] = –2, TVM[0, 3] = –2; c) TVM[–3, 2] = 1, TVM[1, 5] = 1, TVM[0, 3] = 1. La tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre igual a la pendiente de la recta.*

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

***Solución:** TVM[–3, 2] = –1, TVM[1, 5] = 6, TVM[0, 3] = 3. Ahora no es constante.*

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

***Solución:** TVM[–3, 2] = 7, TVM[1, 5] = 31, TVM[0, 3] = 9.*

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.
b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].
c) ¿Es constante?

***Solución:** a) v_m = 24.3 m/s; b) v_m [0, 6] = 38,3 m/s, v_m [2, 10] = 25 m/s; v_m [6, 14] = 13,7 m/s. c) No es constante. La velocidad va disminuyendo.*

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].
b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?
c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

***Solución:** a) v_m [0, 40] = 18 m/s; b) v_m [15, 25] = 14 m/s; v_m [20, 30] = 13 m/s. No es constante; c) 120 Km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.*

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.
b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.
c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.
d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

***Solución:** a) Solución gráfica; b) $a_m(0, 10) = 25$ km/h²; c) $a_m(10, 90) = 0$ km/h²; d) $a_m(90, 100) = -25$ km/h².*

7. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos viene dada por la función: $y = 40x - 5x^2$.

a) Escribe una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿Tiene sentido para valores de x menores que 0? ¿Y mayores a 8?
b) Calcula la velocidad media del objeto en los intervalos siguiente: [0, 2], [0, 8], [1, 4], [4, 8] y [1, 8].
c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

***Solución:** a) Solución gráfica. No tiene sentido para valores negativos ni para valores mayores de 8. Sólo tiene sentido para $0 \le x \le 8$; b) v_m [0, 2] = 30 m/s, v_m [0, 8] = 0 m/s, v_m [1, 4] = 15 m/s, v_m [4, 8] = –20 m/s, v_m [1, 8] = –5 m/s; c) y(4) = 80 m.*

8. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x – 4$ b) $y = –2x – 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x – 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

Solución: a) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 3; b) y'(1) = y'(3) = y'(5) = –2; c) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 0.5; d) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 1. La derivada es constante.

9. Halla la derivada de la función $y = x^2 – 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

Solución: y'(1) = 2; y'(3) = 6; y'(5) = 10. No es constante.

10. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

Solución: y'(1) = 3; y'(3) = 27; y'(5) = 75.

11. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 40x – 5x^2$. Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 6$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

Solución: v(0) = 40; h = y(0) = 0 m; v(2) = 20; h = y(2) = 60 m; v(4) = 0; h = y(4) = 80 m; v(6) = -20 m/s; h = y(6) = 60 m. La altura máxima es de 80 metros.

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x – 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.

Solución: 110.6 m/s.

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x – 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x – 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

Solución: Antes de x = 3 la velocidad es de 110 m/s, y después de 118.6 m/s.

14. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = 1/2gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8):

a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 4 segundos en llegar a ella?

b) ¿A qué velocidad llagará si se lanza desde una altura de 10 metros?

Solución: a) 40 m/s; b) 14 m/s.

15. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x – 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

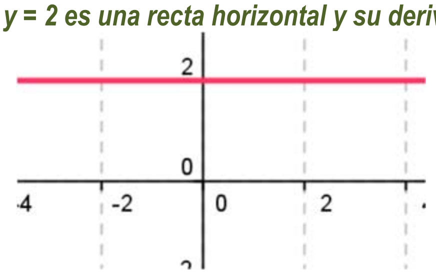
Solución: y'(2) = m = 49.2.

16. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

Solución: d' = 1.2 t³; v(3) = 32.4 m/s; v(4) = 76.8 m/s; v(7) = 411.6 m/s; v(10) = 1200 m/s.

17. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3... a$. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

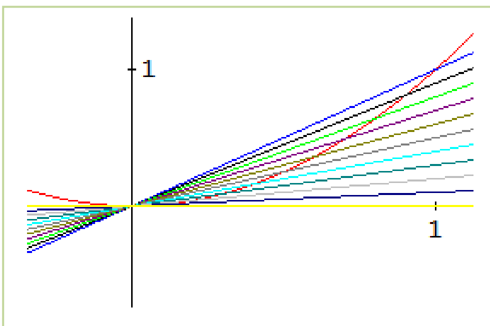
Solución gráfica: y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0. Igual le ocurre a y = b.



18. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las abscisas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

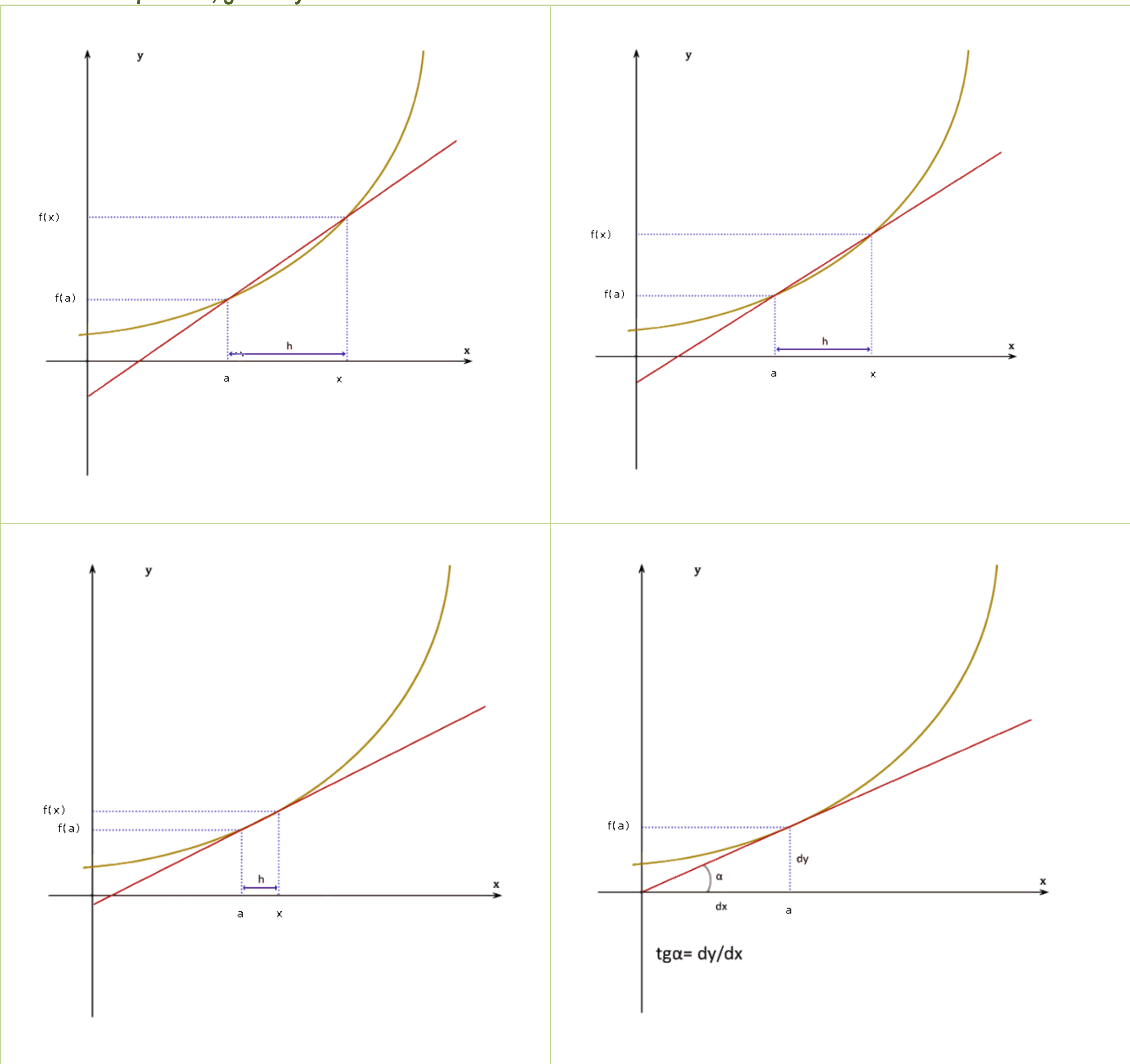
Solución manipulativa, gráfica y abierta:

Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).



19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.

Solución manipulativa, gráfica y abierta:

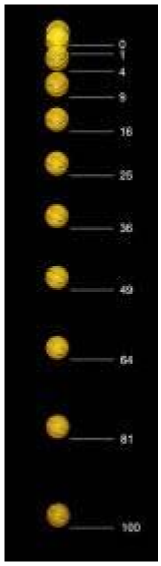


20. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5'43)$ y $f'(-7)$.

Solución: y'(1) = 1; y'(a) = 2a – 1; f'(1) = 1, f'(2) = 3, f'(12) = 23, f'(5.43)= 9.86 y f'(–7) = –15.

21. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica[1], las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

Solución: *$y = f(t) = t^2$; $y' = v = 2t$; $a = y'' = 2$.*



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo, para t = 1, 2, 3, 4, 5 …

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada							

Solución:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 2$	$f'(x) = 4x+3$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Solución: *La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.*

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

24. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

Solución: *a) $f'(x) = 24x^{23}$; b) $g'(x) = 60x^9$; c) $h'(x) = 78/7x^{12}$; d) $j'(x) = 12x^3 - 10x$; e) $p'(x) = 15x^2 - 1$.*

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

Solución: *a) $y' = 1 - 10x$; b) $y' = 12x - 7 + 15x^4$; c) $y' = 14/3x^6 + 8x^4 - 9x^3$; d) $y = 8x^7 - 1$.*

26. Un determinado gas ocupa un volumen de 2 m³ a una presión de 5 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por V = 10/P. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 10 Newtons por m²? ¿Y cuándo es de 20 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

Solución: *$V'(10) = -1/10$; $V'(20) = -1/40$. No es la mitad.*

27. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

Solución: *$y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(1) = 1/2$; $y'(4) = 1/4$; $y'(5) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$*

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

Solución: *a) $y' = 48x^7 + 101x^5 - 10x$; b) $y' = 245x^6 - 20x^3 + 84x^2$; c) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(7x^3 - 15x)$*

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{x+2}$

Solución: *a) $y' = \dfrac{4}{(x+3)^2}$; b) $y' = 2x + 5x^2 - 2$; c) $y' = \dfrac{-6x^2 + 30x - 5}{18x^4 - 12x^3 + 2x^2}$; d) $y' = \dfrac{\sqrt{x}(x/2 + 3)}{(x+2)^2}$*

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \dfrac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.

Solución: *a) $y' = \dfrac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; b) $y' = \dfrac{-11x^4 + 35x}{6\sqrt[6]{x^5}(x^3+5)^2}$; c) $y' = \dfrac{9}{4}\sqrt[4]{x^9} - \dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^7}}$; d) $y' = \dfrac{\frac{5}{6}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{11}{3}\sqrt[6]{x^5}}{(x+2)^2}$*

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Solución: *a)* $y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}\cdot(5x^4 - 21x^2)$; *b)* $y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6 \cdot (9x^2 - 10x)$;

c) $y' = \frac{5}{4}\sqrt{(4x^5 - 8x^3)^3}\cdot(20x^4 - 24x^2)$; *d)* $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{2x^2 + 4x^7}\cdot(4x + 28x^6)$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}(x^4 - 6x^3)^2}$ b) $y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3 - 5}}$ c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3}$ d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$

Solución: *a)* $y' = \frac{3(x-6)x^2(14x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 70x^2 - 441x + 490)|x|}{2|x-6|(2x^3+7)^2\sqrt{\frac{x(3x-5)}{2x^3+7}}}$; *b)* $y' = \frac{x^6 + 4x^4 - 20x^3 + 63x^2 + 40x}{2\sqrt{x^2+3}(x^3-5)^2\sqrt{\frac{x^2-7}{x^3-5}}}$;

c) $y' = \frac{3(5x+3)^2(20x^2 + 24x - 3)}{x^4(4x-1)^4\sqrt{\frac{32(5x+3)^3}{x^3(4x-1)^3}}}$ *d)* $y' = \frac{1 + \frac{3}{x^4}}{6\sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}\right)^2}\cdot\sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = log_2(3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \ln\sqrt{\frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x - 2}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Solución: *a)* $y' = \frac{12(5x^4 - 21x^2)log(e)}{x^5 - 7x^3}$; *b)* $y' = \frac{7(9x^2 - 10x)log_2(e)}{3x^3 - 5x^2}$;

c) $y' = \frac{5}{2}\cdot\frac{20x^4 - 24x^2}{4x^5 - 8x^3} - \frac{3}{2(3x-2)}$; *d)* $y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{4 + 28x^5}{x - 2x^6}$

34. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{x^5 - 7x^3}$ b) $y = (x+1)^{3x^3 - 5x^2}$ c) $y = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(x-1)^{(2x^2 + 4x^7)^4}}$

Solución: *a)* $y' = x^{x^5 - 7x^3}((5x^4 - 21x^2)ln(x) + (x^4 - 7x^2))$; *b)* $y' = (x+1)^{3x^3 - 5x^2}\left((9x^2 - 10x)ln(x+1) + \frac{3x^3 - 5x^2}{x+1}\right)$;

c) $y' = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}(20x^2(4x^5 - 8x^3)^4(5x^2 - 6))$; *d)* $y' = \sqrt[3]{(x-1)^{(2x^2+4x^7)^4}}\left(\frac{1}{3}(2x^2 + 4x^7)^3\left(4\,ln(x-1) + \frac{2x^2 + 4x^7}{x-1}\right)\right)$

35. Utilizando que la derivada de $y = e^x$ es $y' = e^x$, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 - 7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$ c) $y = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(2x^2 + 4x^7)^4}}$

Solución: *a)* $y' = e^{x^5 - 7x^3}(5x^4 - 21x^2)$ *b)* $y' = 7(e^{3x^3 - 5x^2})^6\, e^{3x^3 - 5x^2}(9x^2 - 10x)$

c) $y' = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}\,5(4x^5 - 8x^3)^4(20x^4 - 24x^2)$; *d)* $\frac{e^{(2x^2+4x^7)^4}\cdot 4(2x^2 + 4x^7)^3\cdot(4x + 28x^6)}{3\sqrt[3]{(e^{(2x^2+4x^7)^4})^2}}$

36. Recuerda la definición de cosecante: $cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: $(cosec(x))' = -\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

Solución: Utilizamos la derivada de un cociente y se obtiene: $(cosec(x))' = -\frac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

37. Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

Solución: Utilizamos la derivada de un cociente y se obtiene: $(\sec(x))' = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

38. Recuerda la definición de cotangente: $cotg(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$. Demuestra que: $(cotg(x))' = -\dfrac{1}{sen^2(x)}$

***Solución:** Utilizamos la derivada de un cociente, simplificamos y se obtiene:* $(cotg(x))' = -\dfrac{1}{sen^2(x)}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sen(x^5 - 7x^3)$ b) $y = (sen(3x^3 - 5x^2))^7$ c) $y = sen^5(x) \cdot cos^3(x)$ d) $y = \sqrt[3]{sen\left(2x^2 + 4x^7\right)^4}$

Solución: a) $y' = (5x^4 - 21x^2)\cos(x^5 - 7x^3)$; b) $y' = 7(sen^6(3x^3 - 5x^2)(\cos(3x^3 - 5x^2)(9x^2 - 10x)$;
c) $y' = 5sen^4(x)cos^4(x) \cdot 3sen^6(x)\cos^2(x)$; d) $(8x^4(14x^2+5)\cos(2x^5(2x^2+1))\sin(2x^5(2x^2+1))^{(1/3)})/3$.

40. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(e^{x^5} + 4x^3)$ b) $y = (cotg(5x^3 - 3x^2))^4$ c) $y = sen(cos(tg(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(2x+1))^4}$

Solución: a) $y' = -sen(e^{x^5} + 4x^3)\,(e^{x^5} \cdot 5x^4 + 12x^2)$ b) $y' = -\dfrac{4\cot g^3(5x^3 - 3x^2)(15x^2 - 6x)}{sen^2(5x^3 - 3x^2)}$;

c) $-2x^2(35x^2-9)sec(x^3(7x^2-3))^2$; d) $(8ch(2x+1) \cdot ch(sh(2x+1))^{(1/3)} \cdot sh(sh(2x+1)))/3$

41. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = tg\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ b) $f(x) = (2-3x)sh(2-3x)$ c) $f(x) = tg\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$ d) $f(x) = \dfrac{senx - x\cos x}{\cos x + xsenx}$

Solución: a) $f'(x) = (1+tg^2\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}})\dfrac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}$ b) $f'(x) = -3sh(2-3x) - 3(2-3x)ch(2-3x)$;

c) $f'(x) = -\dfrac{(36sen^2x - 16senx + 18\cos^2 x + 27\cos x)\sec(\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x})^2}{2(2\cos x + 3)^2\sqrt{4-9senx}}$ d) $(x^2*(sen^2(x) + cos^2(x))/(x \cdot sen(x) + cos(x))^2$.

42. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{x+1}$ b) $y = \ln(\arccos x)$ c) $y = arctg\ (e^{2x+3})$ d) $y = \arccos(sen(\cos x))$

Solución: a) $y' = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x+1}}$ b) $y' \dfrac{-1}{\arccos(x)\sqrt{1-x^2}}$; c) $y' = (2e^{(2x+3)})/(e^{(4x+6)}+1)$; d) $\dfrac{sen(x)\cos(\cos(x))}{\sqrt{1-sen^2(\cos(x))}}$

43. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{\dfrac{1+senx}{1-senx}}$ b) $y = e^{\arccos\sqrt{x+3}}$ c) $y = sen(arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ d) $y = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

Solución: a) $y' = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{-sen(x)}\,|sen(x)-1|}$ b) $y' = \dfrac{-e^{\arccos\sqrt{x+3}}}{2\sqrt{-x^2-5x-6}}$

c) $y' = \cos(arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}})\dfrac{1}{1+(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}})^2}\dfrac{(1+x^2)}{(1-x^2)}$ d) $y' = \dfrac{9}{(9-2x^2)\sqrt{9-x^2}}$

44. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg\ sh\ \sqrt{2x+3}$ b) $y = \ln(\arg th(5x))$ c) $y = \arg\ ch\,(e^{4x-1})$ d) $y = \arg sh(\arg th(x))$

Solución: a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(2x+4)(2x+3)}}$ b) $y' = \dfrac{-5}{(argth(5x))(1-25x^2)}$; c) $y' = \dfrac{4e^{4x}}{\sqrt{e^{8x} - e^2}}$; d) $y' = -\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{\arg th^2(x)+1}}$

45. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{\dfrac{1+shx}{1-shx}}$ b) $y = \sqrt{e^{\arg ch\sqrt{x+3}}}$ c) $y = sh(\arg th\dfrac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}})$ d) $y = \arg ch\dfrac{senx}{\sqrt{9-sen^2x^2}})$

Solución: a) $y' = \dfrac{ch(x)}{\sqrt{2}\sqrt{1+sh(x)}(1-sh(x)}$ b) $y' = \dfrac{\sqrt{e^{\arg\ ch\sqrt{x+3}}}}{4\sqrt{x^2+5x+6}}$;

c) $y' = -\dfrac{28x + 27((9-4x^2)^3)}{(2x-3)(2x+3)\sqrt{(9-4x^2)((9-4x^2)-(3x+7)^2)^3}}$; d) $y' = \dfrac{\cos(x)sen^2(x^2) - 2xsen(x)\cos(x^2)sen(x^2) - 9\cos(x)}{(sen^2(x^2)-9)\sqrt{sen^2(x^2)+sen^2(x)-9}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

46. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$

Solución: y = 33x – 31.

47. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

Solución: En x = 0, y = 0.05x; En x = 1, y = 0.03x + 0.01; En x = 2, y = 0.01x – 0.04: En x = 3, y = -0.01x + 0.09.

48. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 20t + 0.5t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

Solución: La aceleración es constante, a = 1 km/h²; A las 100 horas.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

Solución: y = x³ + 3x es siempre creciente; y = x³ – 3x: (–∞, –1) creciente, (–1, 1) decreciente, (1, + ∞) creciente.
En x = 0 es creciente, y en x = 2 y x = -2 es decreciente.

50. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$; b) $y = 5x^4 - 2$; c) $y = 3x^3 + 1$; d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; e) $y = 7x^3 - 3x$.

Solución: a) (0, 3) máximo; b) (0, –2) mínimo; c) creciente siempre;

d) (0, 5) máximo; (1/2, 19/4) y (–1/2, 19/4) mínimos; e) $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Máximo,*** $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Mínimo.***

51. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

Solución: Es un cubo de un dm de lado.

52. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

Solución: a) Siempre creciente; b) (1, 3) mínimo, (–1, 9) máximo; c) (4, 0) mínimo;

e) No tiene máximos ni relativos ni absolutos, y hay infinitos mínimos (x, 3) para $-1 \le x \le 2$.

f)

53. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

Solución: La función es creciente. En [–4, 3] tiene un mínimo en x = –4 y un máximo en x = 3. En [0, 5] la función tiene un mínimo para x = 0, y un máximo en x = 5. Son relativos y absolutos

54. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

Solución: Mínimo relativo y absoluto: (–2, 0). Máximo relativo: (–3, 1); Máximo relativo y absoluto: (5, 7).

55. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

Solución: x = 5/3 cm; Altura = 20/3 cm; r = $\frac{50\sqrt{2}}{3}$ ***cm.***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Definición de derivada

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.

Solución: y'(2) = 12

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

Solución: y'(1) = 1/2

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.

Solución: y'(4) = –1/32.

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 – 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: y'(1) = 1

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x – 3$ en $x = 2$.

Solución: y'(2) = 1.

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^2 + 2x – 3$ b) $y = 2x^3 – 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 – 5x + 2$ d) $y = 8x^7 – 9x^6 – 5x^3$

Solución: a) $y' = 8x + 2$; b) $y' = 6x^2 – 6x + 7$; c) $y' = 2x – 5$; d) $y' = 56x^6 – 54x^5 – 15x^2$

7. Calcula:

a) $D(5x^2 + 7x^4 – 3x)$ b) $D(6x^5 – 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 – 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 – 9x^6 – 2x^8)$

Solución: a) $10x + 28x^3 – 3$; b) $30x^4 – 16x + 7 + 15x^2$; c) $5x^4 – 28x^3 + 6x^2$; d) $9x^2 – 54x^5 – 16x^7$.

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2 + 3x – 1/x$ b) $y = 5x^3 – 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{(x+3)\cdot(x^2-5x+2)}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}$

Solución: a) $14x + 3 + 1/x^2$; b) $15x^2 – 4x + 1/(2\sqrt{x})$;

c) $y' = \dfrac{-5x^3+6x^2+13x+6}{2\sqrt{x}(x+3)^2\cdot(x^2-5x+2)^2}$; d) $y = \dfrac{-x^3-15x^2-15x-25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 – 8/(3x)$ b) $y = 5x^3/2 – 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$ c) $7y = 4x^3/3 – 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

Solución: a) $14x/3 + 3/5 + 8/3x^2$; b) $(15/2)x^2 – (4/3)x + 6/(10\sqrt{x})$; c) $(4/7)x^2 – 10/49 – 1/(2x\sqrt{x})$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \dfrac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \dfrac{(8x+5x^2)\cdot(2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \dfrac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$

Solución: a) $y' = \dfrac{2x^2+8x-16}{(x+2)^2}$; b) $y' = (2(84x^3 – 39x^2 + 6x + 20))/(7x – 1)^2$

c) $y' = (60x^7 + 185x^6 + 144x^5 – 35x^2 – 105x – 84)/(2x + 3)^2$; d) $y' = (5x^2 – 78x – 225)/((x + 2)^2 (x + 3)^2)$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5$ d) $y = (2x^2 + 5x)^9$

Solución: a) $y' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$; b) $y' = (2x(3x+4))/(3(2x^3+4x^2 – 1)^{(2/3)})$;

c) $y' = 75x^2(5x^3 + 2)^4$; d) $y' = 9(2x^2 + 5x)^8(4x + 5)$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}\cdot(x^7 + 3x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5\cdot(x^5 – 6x^8)$ d) $y = \dfrac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

Solución: a) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}(x^7+3x^2)^6 + \sqrt{x^3+5}\cdot 6(x^7+3x^2)^5(7x^6+6x)$;

b) $y' = (2x^2 + 8x + 3)/(3(x + 1)^2\cdot(2x^3 + 4x^2 – 1)^{(2/3)})$;

c) $y' = 5(5x^3 + 2)^4\cdot(15x^2)(x^5 – 6x^8) + (5x^3 + 2)^5 (5x^4 – 48x^7)$;

d) $y' = (2x^{11}\cdot(2x – 5)^8\cdot(133x^2 – 280x + 150))/(7x – 5)^3$;

13. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (3x)^{x^5-2x^3}$ b) $y = (2x+4)^{(5x^3+7x^2)}$ c) $y = e^{(2x^5-5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x+5)^{(x^4-6x^5)^3}}$

Solución: a) $y' = (3x)^{x^5-2x^3}((5x^4 - 6x^2)\ln(3x) + x^4 - 2x^2)$;

b) $y' = (2x+4)^{(5x^3+7x^2)}(15x^2 + 14)\ln(2x + 4) + (5x^3 + 7x)/(x + 2)$;

c) $y' = e^{(2x^5-5x^3)^5}(5(2x^5 - 5x^3)^4(10x^4 - 15x^2)$;

d) $y' = \sqrt[3]{(2x+5)^{(x^4-6x^5)^3}}\ (x^4 - 6x^5)^2(4x^3 - 30x^4)\ln(2x + 5) + (2/3)(x^4 - 6x^5)^3/(2x + 5)$.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$ c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

Solución: a) $y' = e^{x^5+4x^3}(5x^4 + 12x^2)$; b) $y' = 7(e^{2x^3-7x^2})^7(6x^2 - 14x)$;

c) $y' = e^{(3x^5+5x^3)^5}\,5(3x^5 + 5x^3)^4\cdot(15x^4 + 15x^2)$; d) $y' = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}\cdot 2(6x^5 - 9x^8)(30x^4 - 72x^7)$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln((7x^5 - 2x^3)^{12}(2x + 3))$ b) $y = \ln\sqrt{(3x^3 + 2x^2)^3}$ c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{4x^5 - 7x}{6x - 1}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(x^4 - 2x^5)^2}$

Solución: a) $y' = \dfrac{12(35x^4 - 6x^2)}{7x^5 - 2x^3} + \dfrac{2}{2x + 3}$; b) $y' = \dfrac{3(9x^2 + 4x)}{2(3x^3 + 2x^2)}$;

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{20x^4 - 7}{4x^5 - 7x} - \dfrac{6}{6x - 1}\right)$; d) $y' = \dfrac{2(4x^3 - 10x^4)}{3(x^4 - 2x^5)}$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3 + sen(x^2)}$ b) $f(x) = sen(sh^3 2x)$ c) $f(x) = ch(sh(5x))$ d) $f(x) = th(2x + 3x^2)$

Solución: a) $f'(x) = \dfrac{-sen(x)(3 + sen(x^2)) - 2x\cos(x)\cos(x^2)}{(3 + sen(x^2))^2}$; b) $f'(x) = \cos(sh^3 2x)sh^2(2x)ch(2x)$;

c) $f'(x) = 5sh(sh(5x))\cdot ch(5x)$; d) $f'(x) = (1 - th^2(2x + 3x^2))(2 + 6x)$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 9\sqrt{sen^3(5x + 2)}$ b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{3 + 2\cos(x)}{3 - 2\cos(x)}}$ c) $f(x) = ch(sen(5x - 2)^2)$ d) $f(x) = \ln(\cos^2(x - 1))$

Solución: a) $f'(x) = \dfrac{135\cos(5x - 2)\sqrt{sen(5x - 2)}}{2}$; b) $f'(x) = \dfrac{-6sen(x)}{9 - 4\cos^2(x)}$;

c) $f'(x) = 10\cos(5x - 2)\cdot sen(5x - 2)\cdot sh(sen(5x - 2)^2)$; d) $f'(x) = \dfrac{-sen2(x - 1)}{\cos^2(x - 1)}$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x^5 - 7x^3)\cdot sen(x^5 - 7x^3)$ b) $y = \cos^7(3x^3 - 5x^2)\cdot sen^5(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = \cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos\left(2x^2 + 4x^7\right)^4}$

Solución: a)) $y' = (5x^4 - 21x^2)\cos(2(x^5 - 7x^3))$;

b) $y' = -x(9x - 10)\cdot\cos(x^2\cdot(3x - 5))^6\cdot sen(x^2\cdot(3x - 5))^4\cdot(7sen(x^2(3x - 5))^2 - 5\cos(x^2(3x - 5))^2)$;

c) $y' = -sen(4x^5 - 8x^3)^5\cdot 5\cdot(4x^5 - 8x^3)^5\cdot(20x^4 - 24x^2)$;

d) $y' = -(128x^7(2x^5 + 1)^3\cdot(7x^5 + 1)\cdot sen(16x^8\cdot(2x^5 + 1)^4))/(3\cos(16x^8\cdot(2x^5 + 1)^4)^{(2/3)})$;

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sh(2e^{x^5} - 5x^3)^2$ b) $y = (tg(5x^3 - 3x^2))^4$ c) $y = sen(\cos(tg(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(2x + 1))^4}$

Solución: a) $y' = ch(2e^{x^5} - 5x^3)^2\cdot 2(2e^{x^5} - 5x^3)\cdot(2e^{x^5}\cdot 5x^4 - 15x^2)$; b) $y' = 4(tg(5x^3 - 3x^2))^3(1 + tg^2(5x^3 - 3x^2))\cdot(15x^2 - 6x)$;

c) $y' = -2x^5\cdot(7x^2 - 3)\cdot(35x^2 - 9)\cdot\sec(x^6(7x^2 - 3)^2)^2\cdot sen(tg(x^6(7x^2 - 3)^2))\cdot\cos(\cos(tg(x^6(7x^2 - 3)^2)))$;

d) $y' = (4\cosh(2x + 1)sh(2x + 1)\cdot sh(sh(2x + 1)^2))/(3ch(sh(2x + 1)^2)^{(2/3)})$;

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = sen\dfrac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}}$ b) $f(x)=(3x-5x^2)ch(3x-5x^2)$ c) $f(x)=tg\dfrac{\sqrt{25-14senx}}{4+5\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{shx-xchx}{chx+xshx}$

Solución: a) $f'(x)=\cos\dfrac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}}\cdot\dfrac{18e^{3x}}{(3-2e^{3x})^2}$;

b) $f'(x)=(3-10x)ch(3x-5x^2)+(3x-5x^2)sh(3x-5x^2)\cdot(3-10x)$;

c) $f'(x)=-\dfrac{(70sen(x)^2-125sen(x)+35\cos(x)^2+28\cos(x))\sec(\dfrac{\sqrt{25-14sen(x)}}{5\cos(x)+4})^2}{(5\cos(x)+4)^2\sqrt{25-14sen(x)}}$;

d) $f'(x) = -(x^2\cdot sh(x)^2 + 2sh(x)^2 - x^2\cdot ch(x)^2)/(x\cdot sh(x) + ch(x))^2$.

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\sqrt{e^{2shx-1}}$ b) $f(x)=arcsen\dfrac{5-3x^2}{5+3x^2}$ c) $f(x)=7\arccos\dfrac{4senx+3}{5-2senx}$ d) $f(x)=arcsen\dfrac{2\cos x}{4senx+3\cos x}$

Solución: a) $f'(x) = ch(x)$; **b)** $f'(x)=\dfrac{-\sqrt{60}}{5+3x^2}$;

c) $f'(x)=\dfrac{91\cos(x)}{(2sen(x)-5)\sqrt{-3sen(x)^2-11sen(x)+4}}$;

d) $f'(x)=\dfrac{8}{\sqrt{24\cos(x)sen(x)-11\cos(x)^2+16}\sqrt{24\cos(x)sen(x)-7\cos(x)^2+16}}$.

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen(e^{2x-3})$ b) $y=\sqrt{\ln(\arccos x)}$ c) $y = arctg(\ln\sqrt[3]{3x-2})$ d) $y = arcsen(tg(sen(5x-1)))$

Solución: a) $y'=\dfrac{2e^{2x-3}}{\sqrt{1-(e^{2x-3})^2}}$; **b)** $y'=\dfrac{-1}{2\arccos(x)\sqrt{(1-x^2)\ln(\arccos(x))}}$;

c) $y'=\dfrac{3}{(1+(\ln\sqrt[3]{3x-2})^2(3x-2)}$; **d)** $y'=\dfrac{5(1+tg^2(sen(5x-1))\cos(5x-1)}{\sqrt{1-(tg^2(sen(5x-1))}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\sqrt{\dfrac{3+2senx}{3-2senx}}$ b) $y=e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$ c) $y=\cos(arcsen\dfrac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}})$ d) $y=arcsen\dfrac{2x}{\sqrt{8-x^2}})$

Solución: a) $y'=\dfrac{\cos x}{\sqrt{9-4sen^2x}}$; **b)** $y=\dfrac{e^{arcsen\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{(6-2x)(2x-5)}}$;

c) $y'=\dfrac{5(3x-4)(4x-5)}{(3x^2-5)^2\sqrt{\dfrac{19x^2-40x+20}{3x^2-5}}}$; **d)** $y'=\dfrac{16}{(8-x^2)\sqrt{8-5x^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\sqrt{5x-7}$ b) $y=\ln(\sqrt{arcsen(2x+1)})$ c) $y = arcsen(e^{4x-7})$ d) $y=arctg(\arccos(sen(2x-1)))$

Solución: a) $y'=\dfrac{5}{2(2x-6)\sqrt{5x-7}}$; **b)** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{-x(x+1)}arcsen(2x+1)}$

c) $y'=\dfrac{4e^{4x-7}}{\sqrt{1-e^{8x-14}}}$; **d)** $y'=-\dfrac{2\cos(2x-1)}{\sqrt{1-sen(2x-1)^2}(\arccos(sen(2x-1)^2+1)}$.

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg\ ch\sqrt{x-2}$ b) $y = \ln(\arg sh(2x-3))$ c) $y = \arg\ th(e^{3x-5})$ d) $y = \arg ch\sqrt{\arg th(x)}$

Solución: ***a)*** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{(x-3)(x-2)}}$; ***b)*** $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2-6x+5\ \arg sh(2x-3)}}$

c) $y' = \dfrac{3e^{3x-5}}{1-e^{6x-10}}$; ***d)*** $y' = -\dfrac{1}{2(x-1)(x+1)\sqrt{\arg th(x)-1}\sqrt{\arg th(x)}}$.

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg ch\sqrt{\dfrac{3+2chx}{3-2chx}}$ b) $y = \sqrt{e^{\arg sh\sqrt{5x-2}}}$ c) $y = ch(\arg sh\dfrac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}})$ d) $y = \arg th\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}})$

Solución: a) $y' = \dfrac{3sh(x)}{(6-2ch(x))\sqrt{ch(x)(3+2ch(x))}}$; ***b)*** $y' = \dfrac{5e^{\arg sh\sqrt{5x-2}}}{2\sqrt{e^{\arg sh\sqrt{5x-2}}}\sqrt{3-5x}\sqrt{5x-2}}$

c) $y' = \dfrac{\sqrt{5}(2x-5)(9x-10)}{(3x-5)^2(3x+5)^2\sqrt{\dfrac{x^2+4x-10}{9x^2-25x}}}$; ***d)*** $y' = \dfrac{2x\cos(x)\cos(x^2)sen(x^2)-sen(x)\cos(x^2)^2+4sen(x)}{\sqrt{4-\cos(x^2)^2}\cos(x^2)^2+\cos(x)^2-4}$

Aplicaciones de la derivada

27. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: x = 0: y = -3 x; x = 1: y = –2; x = 2: y = 9x – 16.

28. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

Solución: a) y = 12x – 16; b) y = 8x – 7; c) y = 3.

29. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución: a) m = 30; b) m = –2; c) m = 2.

30. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

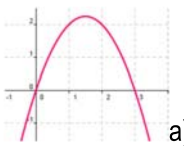
a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

Solución: a) (1, 0), (–1, 4); b) (3, 18), (–3, –18).

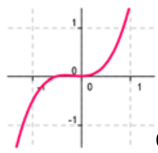
31. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

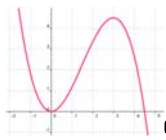
Solución: y = 0.

32. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?


a)


b)


c)


d)

Solución: d)

33. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Solución: $y = 12x - 16\sqrt{2}$; $y = 12x + 16\sqrt{2}$. ***La pendiente mínima es m = –12 que se alcanza en (0 ,0).***

34. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

Solución: y = 2. Corta en (2, 2).

35. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Solución: a = 1, b = 1, c = 0.

36. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

Solución: a = 1, b = – 4, c = 3.

37. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Solución: a = 1/4.

38. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

Solución: (–∞, 0) creciente; (0, +∞) decreciente.

39. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

Solución: La función es decreciente en toda la recta real.

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Solución: (–∞, -1) creciente; (-1, +1) decreciente; (1, +∞) creciente.

41. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: (–∞, 1) creciente; (1, 3) decreciente; (3, +∞) creciente. (1, 10) máximo; (3, 6) mínimo.

42. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: (–∞, 0) creciente; (0, +1) decreciente; (1, +∞) creciente. (0, 3) máximo, (1, 2) mínimo.

43. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: ***(–∞,*** $-\sqrt{3}$ ***) creciente; (*** $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ ***) decreciente; (*** $\sqrt{3}$ ***, +∞) creciente.***

($-\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$ ***) máximo, (*** $\sqrt{3}$, $-6\sqrt{3}$ ***) mínimo.***

44. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–7, 2] y en el intervalo [0, 8].

Solución: La función es siempre creciente, por tanto, tiene en [–7, 2] un mínimo relativo en (–7, –1162) y un máximo relativo en (2, 152), y en [0, 8] tiene un mínimo relativo y absoluto en (0, 0), y un máximo relativo y absoluto en (8, 2240).

45. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Solución: Nunca se anula la derivada. La función no es derivable en x = –3, f(–3) = 0. Tiene un mínimo absoluto en (–3, 0). No tiene máximos.

Problemas

46. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

Solución: v(0) = 15 m/s; v(5) = 23 m/s; t = 11.25 s.

47. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los t = 0 segundos, y a los t = 5 segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

Solución: a = 1.6 m/s² es constante.

48. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para t = 90 segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

Solución: r' = 0.001 mm/grado. Es constante; T'(30) = 0.5555…; T'(90) = 0.062;
r'(10) = 0.005 mm/s; r'(30) = 0.000555…mm/s; r'(90) = 0.000062 mm(s.

49. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

Solución: t = 3.4 s; d'(3.4) = 34 m/s; d'(4.8) = 48 m/s; d'(7.4) = 74 m/s.

50. Se ha lanzado desde la superficie de la Tierra una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 4.9t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad terrestre. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 10 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

Solución: A) a = 9.8 m/s²; B) 29.39 m; C) 2.5 s; D) 4.897 ≈ 5 s; E) 250 m:

51. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

Solución: A) 1.7 m/s²; B) 180 m; C) 15 s; D) 30 s; E) 160 m.

52. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0.83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

Solución: d'(1) = 1.66 m/s; d'(4) = 6.64 m/s; v(8) = 13.28 m/s; v(30) = 49.8 m/s. La altura debe ser menor que 120 m.

53. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1.86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Solución: v(1) = 3.72 m/s; v(4) = 14.88 m/s; v(8) = 29.76 m/s; v(30) = 111.6 m/s: a = 3.72 m/s².

54. La distancia. d. en metros. recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11.44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

Solución: v(1) = 22.88 m/s; v(4) = 91.52 m/s; v(8) = 183.04 m/s; v(30) = 686.4 m/s: a = 22.88 m/s².

55. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 - 4t + 3$ b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $e = -t^2 + 4t + 3$ d) $e = (3t - 4)^2$

Solución: a) v = 2t – 4; a = 2 m/s²; b) v = 6t² – 10 t + 4; a = 12 t – 10; c) v = –2 t + 4; a = –2; d) v = 6(3t – 4); a = 18 m/s².

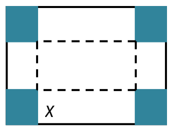
56. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Solución: v(2) = 0.012 m/min; v(5) = 0.012 m/min.

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

Solución: v(2) = 0.92 m/s; v(4) = 2.08 m/s; v(7) = 4.27 m/s; v(15) = 12.75 m/s; A los 31 segundos pueden fallarle los frenos, luego debería de comenzar a frenar antes.

58. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.

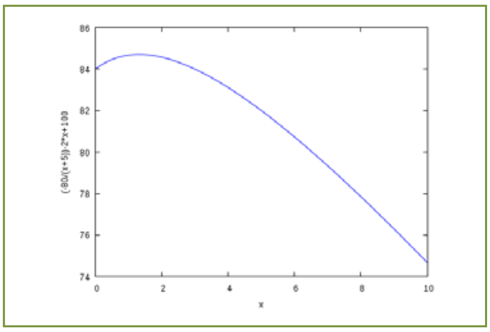


Solución: x ≈ 3.7 cm.

59. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Solución: $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$; $h = \dfrac{75}{\sqrt[3]{45\pi}}$.

60. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.



Solución: y = 100 – 80/(x + 5) – 2x; y' = 80/(x² + 10x + 25) – 2.

61. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba y alcanza una altura $h = 1.6t - 0.16t^2$ metros al cabo de t segundos. ¿Qué altura alcanza la piedra?

Solución: h = 4 m.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim_{b \to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$

Solución: c)

2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

Solución: c)

3. La derivada de $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ es:

a) 15/11 b) –10/25 c) –16/121 d) 1/3

Solución: c)

4. La derivada de $y = e^{x^2 + 3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

Solución: a)

5. La derivada $y = cos(x^3)$ es:

a) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x^3))$ b) $y' = -sen(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -sen(x^3) \cdot cos(3x^2)$ d) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x))$

Solución: b)

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

Solución: c)

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

Solución: d)

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

Solución: c)

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

Solución: d)

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (–1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
c) (6, –324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

Solución: d)

CAPÍTULO 9: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
   a) La superficie de las provincias españolas.
   b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
   c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
   d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
   e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Solución: Son fenómenos aleatorios: b), d) ; No lo son: a), c), e).

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

Solución: {A, E, I, O, U}

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

Solución: {Cae de punta, no cae de punta}

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

Solución abierta: Por ejemplo: 1) Sacar dos caras. 2) Las dos monedas sean distintas.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

Solución abierta: 1) La cifra de las unidades sea par; 2) La cifra de las unidades sea un 7.:

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Solución abierta: Por ejemplo: sacar figura; sacar un as; casar un oro.

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Solución: $A \cup B = A$, $A \cap B = B$ y $A - B$ son las figuras que NO son as.

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

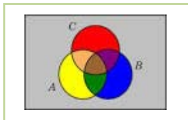
Solución: {1, 2, 3, 4}

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

Solución: Son incompatibles. Su intersección es el suceso imposible.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".

Solución abierta: Por ejemplo: 1) sacar un rey; 2) sacar una carta entre 3 y 6; 3) sacar sota.



11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

Solución: $A \cup B \cup C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B - A \cap B \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B \cap C) \cup (B \cap C - A \cap B \cap C) \cup (A - A \cap B - A \cap C) \cup (B - A \cap B - B \cap C) \cup (C - C \cap A - C \cap B)$.

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

Solución: A) Hay 9 personas que toman café y té; B) 6 y 18; C) a) $A \cap B$: 9; b) $(A \cup B)^C$: 2; c) $A \cup B$: 33; d) $(A - A \cap B)$: 6 21; D) A/B : 9; E) 33; 2; F) 33 + 2 = 35.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman sólo té, que 5 personas toman té y chocolate pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas tomaban al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer datos nuevos.

Solución: Los datos están mal, no puede haber 12 personas que tomen sólo té, y sólo 5 que tomen té y chocolate.

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

Solución: 1/4.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Estudiaría las frecuencias relativas.

16. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

Solución: P(no 5) = 5/6; P(no múltiplo de 3) = 4/6; P(no menor que 2) = 5/6.

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Solución: P(ninguna cara) = 1/4; P(al menos una cara) = 3/4; 1/4 + 3/4 = 1. Son sucesos contrarios.

18. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = sacar un as en la primera extracción, $\overline{A}$ = no sacar as, y B = sacar un as en la segunda extracción, $\overline{B}$ = no sacar as en la segunda extracción. A) ¿Cuál es la probabilidad de sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? B) ¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? C) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases? D) ¿Y la de sacar un solo as? E) ¿Y la de sacar al menos un as?

Solución gráfica: A) 0/39; B) 29/39; C) 9/156; D) 60/156 = 5/13; E) 23/52.

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "no salen 2 ases" y la de "no sale ningún as".

Solución: 49/52 y 29/52.

20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Solución: Con reemplazo: 1/1000; Sin reemplazo: P = (4·3·2)/40·39·38) = 1/2470.

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

Solución: 1/36.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

Solución: P(ningún 6) = 25/36. P(al menos un 6) = 1 – 25/36 = 11/36.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

Solución: a) P(A) = 5/36; P(B) = 8/36; b) $\mathbf{P(A \cap B)}$ = 2/36 ((3, 5) y (5, 3)); $\mathbf{P(A \cup B)}$ = 11/36; $\mathbf{P(A \cap \overline{B})}$ = 3/36;

$\mathbf{P(\overline{A} \cap B)}$ ***= 6/36;*** $\mathbf{P(\overline{A} \cap \overline{B})}$ ***= 25/36; c)*** $\mathbf{P(A/B)}$ ***= 2/8;*** $\mathbf{P(A/\overline{B})}$ ***= 3/28;*** $\mathbf{P(\overline{A}/B)}$ ***= 6/8.***

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla: La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. La probabilidad de que no ocurra B. La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

Solución: $\mathbf{P(A \cup B)}$ ***= 19/24;*** $\mathbf{P(\overline{B})}$ ***= 1/4;*** $\mathbf{P(\overline{A} \cup \overline{B})}$ ***= 9/24; P(A/B) = 5/6.***

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto *B*? Sabiendo que un cliente ha comprado *A*, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado *C* pero no *B*?

Solución: Compran sólo B 8 % clientes; P((C y noB)/A) = 2/100.

26. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que *P*(*A*) = 1/3, *P*(*B*) =1/5 y *P*(*AUB*) = 7/15, hallar: La probabilidad de que se verifique *A* y *B*. La probabilidad de que se verifique *A* y no *B*. La probabilidad de que no se verifique ni *A* ni *B*. La probabilidad de que no se verifique *A*, si no se ha verificado *B*.

Solución: $\mathbf{P(A \cap B)}$ = 1/15; $\mathbf{P(A \cap \overline{B})}$ = 4/15; $\mathbf{P(\overline{A} \cap \overline{B})}$ = 8/15; $\mathbf{P(\overline{A} / \overline{B})}$ = 14/15.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} / B)$, $P(\overline{B} / A)$.

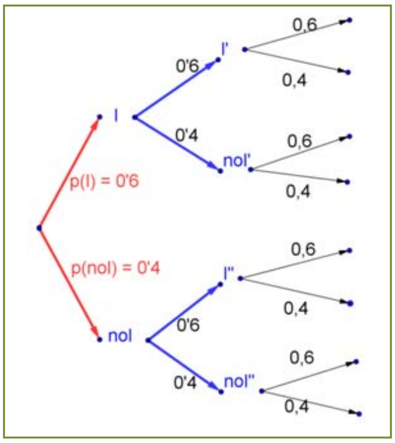
Solución: $\mathbf{P(A \cup B)}$ = 19/20; $\mathbf{P(A \cap B)}$ = 3/10; $\mathbf{P(\overline{A} / B)}$ **= 2/5;** $\mathbf{P(\overline{B}}$ / A) = 3/5.

28. Se considera dos sucesos *A* y *B* tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota*. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso *S*. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso *S* condicionada al suceso *T*

Solución: a) $P(A \cap B)$***.= 1/12; (b)*** $P(B) = 1/4$; ***(c)*** $P(\overline{B}/A) = 3/4$; ***(d)*** $P(\overline{A}/\overline{B})$ ***= 2/3.***

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0.6$.

Solución gráfica: P(al menos uno intencionado) =
1 – P(ninguno intencionado) =
1 – 0.4·0.4·0.4 = 0.936.



30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridd: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

Solución: P(fallo) = 0.04·0.02·0.01 = 0.000008; P(todo bien) = 1 – P(fallo) = 1 – 0.000008 = 0.999992.

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Solución: P(fallo) = 0.003; a) P(desechar ambas) = 0.000009; b) P(desechar sólo una) = 2(0.997*0.003) = 0.005982; c) P(ninguna) = 0.997*0.997 = 0.994; d) P(sólo la tercera) = 0.997*0.997*0.003*0.997 = 0.00297.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Solución: A) 1/4 + 1/4 = 1/2; B) 2(1/8) = 1/4; C) 2(1/16) = 1/8; D) 1/2 +1/4 + 1/8 = 7/8.

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala. b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$. c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

Solución:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0.27	***0.29***	0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)	***0.31***	***0.13***	***0.44***
Totales	0.58	***0.42***	1

b) $P(V \cap C)$ ***= 0.27;*** $P(V \cap U)$ ***= 0.29;*** $P(M \cap C)$ ***= 0.31;*** $P(M \cap U)$ ***= 0.13;*** $P(V)$ ***= 0.56;*** $P(M)$ ***= 0.44;*** $P(C)$ ***= 0.58 y*** $P(U)$ ***= 0.42.***

c) $P(U/V)$ ***= 0.29/0.56 = 0.52;*** $P(C/V)$ ***= 0.27/0.56 = 0.48;*** $P(V/U)$ ***= 0.29/0.42 = 0.69;*** $P(V/C)$ ***= 0.27/0.58 = 0.47. Los sucesos V y C son dependientes pues P(V) = 0.56*** $\neq$ ***P(V/C) = 0.47.***

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

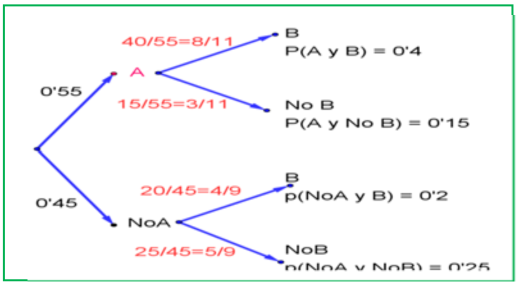
Solución abierta: Debe ser similar a la del problema anterior, pero en lugar de V y M se añaden tres filas con leves (L), graves (G) y mortales (M).

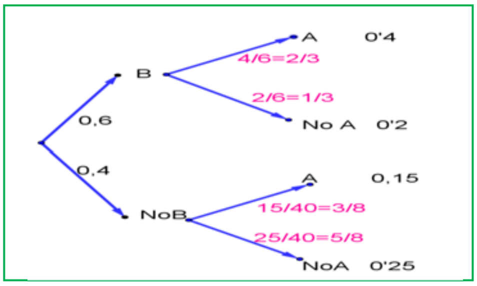
	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Leves (L)			
Graves (G)			
Mortales (M)			

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

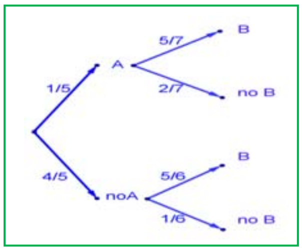
	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No B = $\overline{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

Solución gráfica:



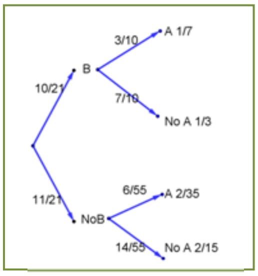


36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



Solución gráfica:

	A	noA	Totales
B	*5/35 = 1/7*	*20/30 = 1/3*	*10/21*
No B	*2/35*	*4/30 = 2/15*	*11/21*
Totales	*7/35 = 1/5*	*24/30 = 4/5*	*1*



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Solución: P(A/negra) = 1/4.

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula: La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$ La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

Solución: a) p(M/C) = 50/80 = 5/8; b) p(noM/C) = 30/80 = 3/8.

39. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.
(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.
(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

Solución:

	H	*M*	
D	*1/12*	*1/25*	*37/300*
D^c	*5/12*	*23/50*	*263/300*
	1/2	*1/2*	*1*

a) P(D^c) = 263/300; b) P(D/M) = 2/25; c) P(D) = 37/300.

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que: a) El segundo caramelo sea de fresa. b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero. (Selectividad)

Solución: P(2º fresa) = (7/17)(12(18) + (10/17)(9/16) ≈ 0,6; b) P(igual sabor) = (7/17)(6/18) + (10/17)(9/16) ≈ 0.47.

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar. a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés. b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Solución: P(inglés) = 3/5; P(turista/inglés) = 4/9.

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que: a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo. b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre *A*.

Solución: P(no satisfecho) = 0.0665; P(A/ no satisfecho) = 55/133.

43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

Solución:

	Fabricado Correcto (FC)	*Fabricado Defectuoso (FD)*	
Dispositivo Correcto (DC)	*0.978*	*0.002*	*0.98*
Dispositivo Defectuoso (DD)	*0.002*	*0.018*	*0.02*
	0.98	*0.02*	*1*

A) P(FC/DD) = 0.002/0.02 = 0.1; B) P(FD/DC) = 0.002/0.98 = 0.00204.
B)

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

Solución: P(negra) = (1/3)(4/10) + (1/3)(1/6) + (1/3)(3/8) = 113/360.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

Solución: P(impar) = 1/2 .

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución: P(deportista y no lector) = 0.25; P(deportista / lector) = 0.5.

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.
a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.
b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina *B*?

Solución: a) P(no D) = 67/120; P(B/D) = 3/265.

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela. A) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación? B) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín? C) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento? D) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución: A) 200/480; B) 280/480; C) P(perfeccionamiento/benjamín) = 90/160; D) P(benjamín/iniciación) = 70/200.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Probabilidad

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

Solución: 20 estudian francés e inglés: No estudian ni francés ni inglés 20 estudiantes.

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

Solución: a) 1/2; b) 5/6; c) 1/2; d) 1/6; e) 5/6.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

Solución: P(chico y azules) = 8/38; P(chico o azules) = 31/38.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

Solución: P(Juan o Jorge) = 3/5.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

Solución: A) 1/2; B) 1/2; C) 3/4; D) 1/4; E) 1/2.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

Solución: A) $(1/2)^3$ = 1/8; B) 7/8; C) 3/8.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

Solución: P(1) = 0; P(2) = 1/36; P(3) = 2/36; P(4) = 3/36; P(5) = 4/36; P(6) = 5/36; P(7) = 6/36; P(8) = 5/36; P(9) = 4/36; P(10) = 3/36; P(11) = 2/36; P(12) = 1/36.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

Solución: En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216; y la suma 6 + 3 + 1 puede salir en (6, 3, 1), (6, 1, 3), (3, 6, 1), /3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), luego su probabilidad es 6/216.

P(9) = (1 + 6 + 3 + 3 + 6 + 3)/216 = 22/216. P(10) = (3 + 3 + 6 + 6+ 3 + 6)/216 = 27/216.

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

Solución: P(A) = 1/4; P(B) = 1/4, si los números primos son el 2, 3 y 5; P(C) = 1/2.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

Solución: Es igualmente probable. Son ambos sucesos de probabilidad $(1/2)^{50}$.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

Solución: P(cruz) = 1/3; P(cara) = 2/3.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

Solución: 3/7.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

Solución: a) 1/2; b) 1/48; c) Una pareja $7C_{12,2}/C_{14,4}$. Dos parejas: $C_{7,2}/C_{14,4}$; d)

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

Solución: P(2) = 1/9; P(1) = 2/9; A) P(impar) = 6/9; B) P(primo) = (1 + 2 + 2)/9 = 5/9; C) P = 4/9; D) P(primo o impar) = 7/9.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

Solución: A) P = 1/22; B) P = 5/11; C) P = 6/11; D) P = 9/22.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

Solución: A) 1/6; B) 1/6; C) 1/4.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

Solución: A) 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8; B) $1/2^9 + 1/2^{10}$ + …. = 1 – 1/2 + 1/4 + 1/8 + $1/2^4$ + … $1/2^8$ = 1 – 255/256 = 1/256.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

Solución: P = 1 – (2/20)*(1/19) = 378/380 = 189/190.

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Solución: 1/3.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
   a) 5/6 b) 11/36 c) 35/36 d) 30/36

Solución: b)

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: c)

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: a)

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
   a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

Solución: b)

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:
   a) $P(A) + P(noA) = 1$
   b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$
   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Solución: a)

6.

7.

8.

9.

10.

CAPÍTULO 10: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16			16	0.4
19	15			
22	6	0.15	37	0.925
25				

Solución:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16	***10***	***0.25***	16	0.4
19	15	***0.375***	***31***	***0.775***
22	6	0.15	37	0.925
25	***3***	***0.075***	***40***	***1***

2. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60		60
[10, 20[		0.4	
[20, 30[	30		170
[30, 40[		0.1	
[40, 50]			200

Solución:

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60	***0.3***	60
[10, 20[	***80***	0.4	***140***
[20, 30[	30	***0.15***	170
[30, 40[	***20***	0.1	***190***
[40, 50]	***10***	***0.05***	200

3. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.
   a) Intención de voto de un partido
   b) Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
   c) Número de calzados.
   d) Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
   e) Marcas de cerveza
   f) Número de empleados de una empresa
   g) Altura
   h) Temperatura de un enfermo.

Solución: Cualitativas: a), e); Cuantitativas discretas: b), c), f); Cuantitativas continuas: d), g), h).

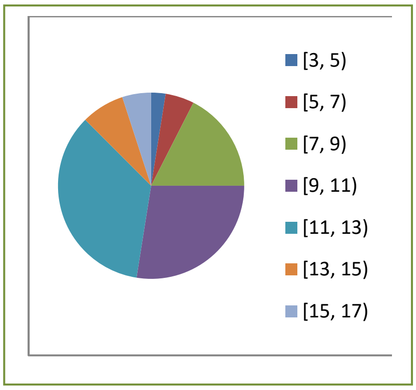
4. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

10.5 11.2 9.9 15.0 11.4 12.7 16.5 10.1 12.7 11.4 11.6 6.2 7.9 8.3 10.9 8.1 3.8 10.5 11.7 8.4 12.5 11.2 9.1 10.4 9.1 13.4 12.3 5.9 11.4 8.8 7.4 8.6 13.6 14.7 11.5 11.5 10.9 9.8 12.9 9.9

Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

Solución:

Tiempo (meses)	*[3, 5)*	*[5, 7)*	*[7, 9)*	*[9, 11)*	*[11, 13)*	*[13, 15)*	*[15, 17)*
Frec. Abs.	*1*	*2*	*7*	*11*	*14*	*3*	*2*



5. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

a) Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.

b) Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.

c) ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?

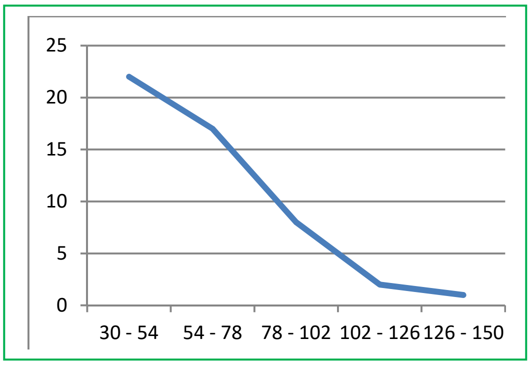
d) Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).

Solución:

a)

30	*40*	*50*	*60*	*70*	*75*	*80*	*90*	*100*	*120*	*150*
5	*7*	*10*	*0*	*11*	*6*	*5*	*0*	*3*	*2*	*1*

30 - 54	*54 - 78*	*78 - 102*	*102 - 126*	*126 - 150*
22	*17*	*8*	*2*	*1*



b) 22 %; c) 35.

6. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

a) Construye la tabla de frecuencias con estos datos.

b) ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?

c) ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?

d) ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?

e) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.

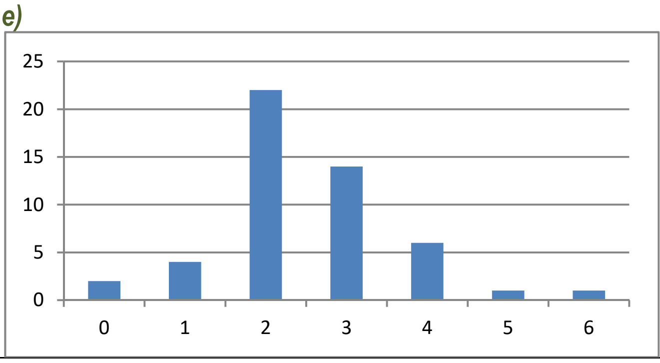
f) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

Solución: a)

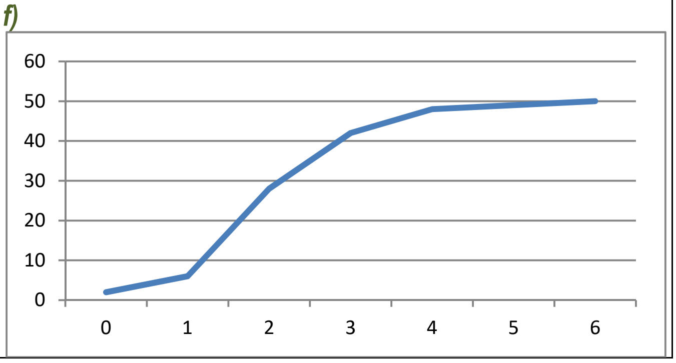
Nº Hijos	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Fr. Abs.	*2*	*4*	*22*	*14*	*6*	*1*	*1*

b) 14; c) 28 %; d) 44 % y 56 %.

e)



f)



7. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebes y se tiene:

3.2 3.7 4.2 4.6 3.7 3.0 2.9 3.1 3.0 4.5 4.1 3.8 3.9 3.6 3.2 3.5 3.0 2.5 2.7 2.8 3.0 4.0 4.5 3.5 3.5 3.6 2.9 3.2 4.2 4.3 4.1 4.6 4.2 4.5 4.3 3.2 3.7 2.9 3.1 3.5

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Si sabemos que los bebes que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?

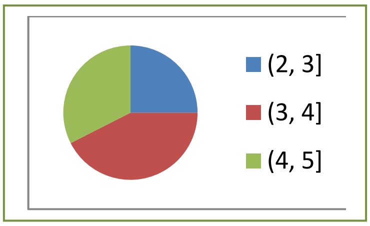
c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?

d) Representa gráficamente la información recibida.

Solución:

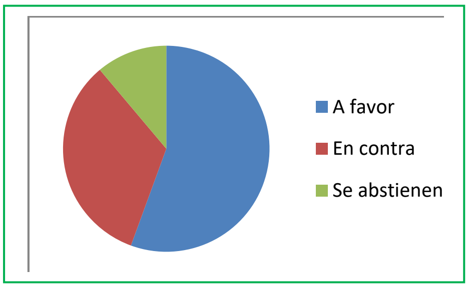
Peso (kg)	*(2, 3]*	*(3, 4]*	*(4, 5]*
Fr. Abs.	*10*	*17*	*13*

b) Hay 6 bebés que pesan menos de 3 kg, un 15 %; c) Hay 7 + 13 bebés que pesan más de 3.5 kg, un 50 %.



8. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Represента la información mediante un diagrama de sectores

Solución:



9. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son: 74.001 74.003 74.015 74.000 74.005 74.002 74.005 74.004

Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.

Solución: Media = 74.0044; Mediana = 74.0035; Varianza = 0.00002; Desviación típica = 0.00466; Rango = 0.015.

10. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.

Solución:

Datos (xi)	*38432*	*384343*	*38436*	*38438*	*38440*
Frecuencias (fi)	*4*	*8*	*4*	*3*	*8*
*xi*fi*	*153728*	*3074744*	*153744*	*115314*	*307520*

Suma de las frecuencias = 27. Suma (xi*fi) = 3805050.

11. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:

a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000

b) El salario más frecuente.

c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
[0,1500[	2145
[1500, 2000[	1520
[2000, 2500[	840
[2500, 3000[	955
[3000, 3500[	1110
[3500, 4000[	2342
[4000, 5000[	610
[5000, 10000[	328
$\geq$10000	150

Solución: a) 2646 €; b) 3750 €; c) Aproximadamente 2500 €.

12. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

Solución: Mediana: 7; Moda: 7; Primer cuartil aproximadamente: 7.5; Tercer cuartil: 15; Nonagésimo percentil aproximadamente: 1.

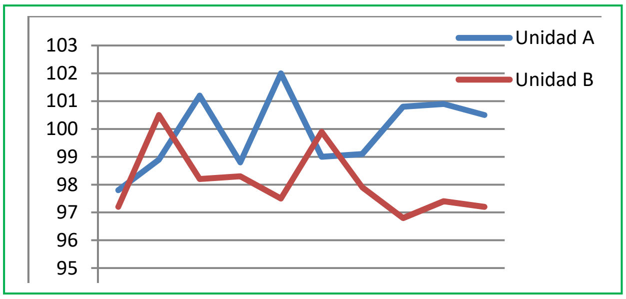
13. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

Unidad A 97.8 98.9 101.2 98.8 102.0 99.0 99.1 100.8 100.9 100.5

Unidad B 97.2 100.5 98.2 98.3 97.5 99.9 97.9 96.8 97.4 97.2

a) Haz una representación gráfica de estas muestras.

b) Determina las medias y las varianzas.



Solución:

	Media	***Varianza***
Unidad A	***99.9***	***1.8***
Unidad B	***98.09***	***1.5***

14. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	***Nº de familias***
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?

d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

Solución: a) 3.82; b) Entre 2 y 4 miembros; c) Unas 5 personas; d) Menos de 7.

15. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	a	32	35	33	b	35

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3.6.

Solución: Media = (a + 511 + 5b)/200 = 3,6; a + b = 65; a + 5 b = 209; a = 29; b = 36;

x_i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
n_i	***29***	***32***	***35***	***33***	***36***	***35***

La moda es 5. La mediana es 3.1.

16. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) Calcula la media y la mediana muestrales.

b) Halla los cuartiles primero y tercero.

c) Halla los percentiles cincuenta y noventa.

d) Calcula el rango muestral.

e) Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

Solución: a) Media = 65.86; Mediana = 67.5;

b) Cuartil primero: 59.5; Cuartil tercero = 75;

c) Percentil cincuenta = 67.5; Percentil noventa = 79.5;

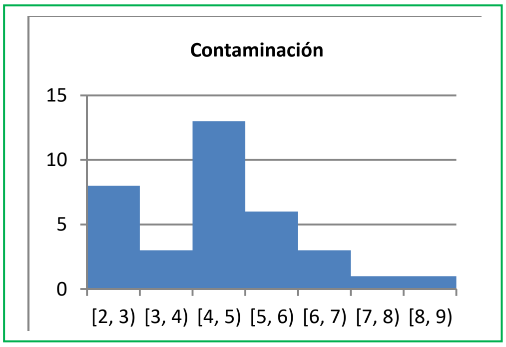
d) Rango = 53; e) Varianza = 72; Desviación estándar = 12.16.

17. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.
6.5 2.1 4.4 4.7 5.3 2.6 4.7 3.0 4.9 8.6 5.0 4.9 4.0 3.4 5.6 4.7 2.7 2.4
2.7 2.2 5.2 5.3 4.7 6.8 4.1 5.3 7.6 2.4 2.1 4.6 4.3 3.0 4.1 6.1 4.2

a) Construye un histograma.
b) Determina los cuartiles.
c) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

b) Cuartil 1: 3; Mediana = 4.6; Cuartil 3 = 5.25; c) Media = 4.4; Desviación típica = 1.6.



2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. COVARIANZA

18. Los datos siguientes son las calificaciones obtenidas por los estudiantes de un grupo de 25 de 1º de bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y Lengua.

Matemáticas	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Lengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemáticas	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Lengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

a) Escribe la tabla de frecuencias conjunta.
b) Proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en ambas asignaturas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Matemáticas, proporción estudiantes que obtiene más de un cinco en Lengua.
c) ¿Son independientes las calificaciones de Matemáticas y Lengua?
d) Representa gráficamente.
e) Calcula el coeficiente correlación.

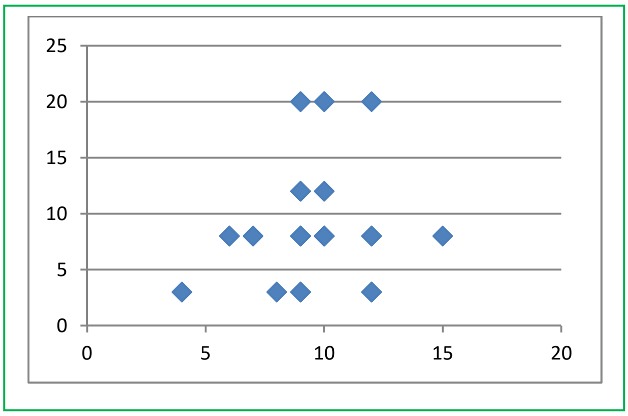
Solución: b) El 88 % obtienen más de 5 en ambas asignaturas; El 88 % en matemáticas y el 92 % en lengua; c) Están muy relacionadas. e) Coeficiente de correlación = 0.87, positivo y muy alto.

19. Para realizar un estudio sobre la utilización de una impresora en un determinado departamento, se midió en un día los minutos transcurridos entre las sucesivas utilizaciones X y el número de páginas impresas Y, obteniéndose los siguientes resultados.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	12
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3

a) Escribe la distribución de frecuencias conjunta. Porcentaje de veces que transcurren más de nueve minutos desde la anterior utilización y se imprimen menos de doce páginas. Número de veces que se imprimen menos de doce páginas y transcurren nueve minutos desde la utilización anterior.
b) Frecuencias marginales. Veces que se imprimen como mucho doce páginas. Número de páginas que se imprimen en el 80 % de las ocasiones.
c) Calcula la distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones.
d) Dibuja el diagrama de dispersión.

Solución:



20. Las estaturas de los 30 niños nacidos en una maternidad durante una semana fueron los siguientes:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Peso	3.2	4.1	4.5	3.0	3.6	2.9	3.8	3.8	3.6	3.9	3.0	3.8	4.1	3.5	4.0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3.1	3.3	3.9	3.7	4.1	4.2	3.5	3.8	3.6	3.4	4.6	3.5	3.6	3.1	4.0

a) Construye una tabla de doble entrada, agrupando los pesos en intervalos de 0.5 kg.

b) ¿Es la estatura independiente del peso?

Solución:

a) Solución abierta

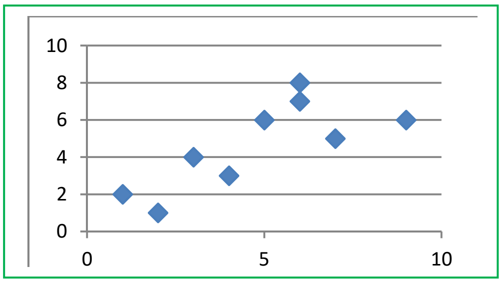
Estatura	***3***	***3.5***	***4***	***4.5***
Peso	***6***	***10***	***12***	***2***

b) Coeficiente de correlación = 0.75. La estatura depende del peso.

21. En el examen de una asignatura que consta de parte teórica y parte práctica, las calificaciones de nueve alumnos fueron:

Teoría	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Práctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. Dibuja la nube de puntos. Comenta los resultados.



Solución:

Covarianza = 4.04: Coeficiente de correlación = 0.76.

La correlación es positiva pero no es muy fuerte.

22. Se desea investigar el ganado caprino y el ganado ovino de un país. En la tabla de doble entrada adjunta se presentan los resultados de un estudio de 100 explotaciones ganaderas, seleccionadas aleatoriamente del censo agropecuario. Se proporcionan las frecuencias conjuntas del número de cabezas (en miles) de cabras X y ovejas Y que poseen las explotaciones.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

a) Halla las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales.

b) Halla el número medio de ovejas condicionado a que en la explotación hay 2000 cabras.

c) Halla el número medio de cabras que tienen aquellas explotaciones que sabemos que no tienen ovejas.

d) Halla la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables.

Solución: a) MediaX = 1.76; MediaY = 1.56; VarX = 1.38; VarY = 1.53; sX = 1.18; sY = 1.24;

b) 24000 ovejas; c) 1.83; d) Covarianza = –0.898; Coeficiente de correlación = –0.61.

23. El volumen de ahorro y la renta del sector familias en millones en euros constantes de 2005 para el periodo 2005-2014 fueron.

Años	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

a) Recta regresión del ahorro sobre la renta.

b) Recta de regresión de la renta sobre el ahorro.

c) Para el año 2015 se supone que la renta era de 24.1 millones de euros. ¿cuál será el ahorro esperado para el año 2015?

d) Estudiar la fiabilidad de la predicción anterior.

Solución: a) y = 0.11x + 1.59; b) y = 0.314x + 20.27; c) Ahorro = 4.23; d) ro² = 0.75; La fiabilidad es mayor cuanto mayor sea el coeficiente de correlación.

24. Se midió el tiempo en segundos que tardaron en grabarse los mismos 24 ficheros en un lápiz USB X y en un disco duro exterior Y.

X	1.2	1	1.1	0.5	1.1	1.5	1	1.4	1.4	1.3	0.4	0.3
Y	1.3	1.1	1.2	0.4	1.2	1.4	1.1	1.6	1.6	1.5	0.4	0.3

X	0.3	1.5	1.4	1.1	1.2	1.2	0.4	0.5	1.3	1.5	1.2	0.2
Y	0.3	1.6	1.3	1.1	1.3	1.1	0.4	0.4	1.4	1.6	0.9	0.3

a) Construye la tabla de frecuencias conjunta. ¿Cuál es el porcentaje de ficheros que tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo? ¿Cuántos ficheros tardan en grabarse entre 0.6 y 1.2 segundos en el primer tipo de memoria? ¿Cuánto tiempo tardan como mucho en gravarse al menos el 90 % de los ficheros en el segundo tipo de memoria?

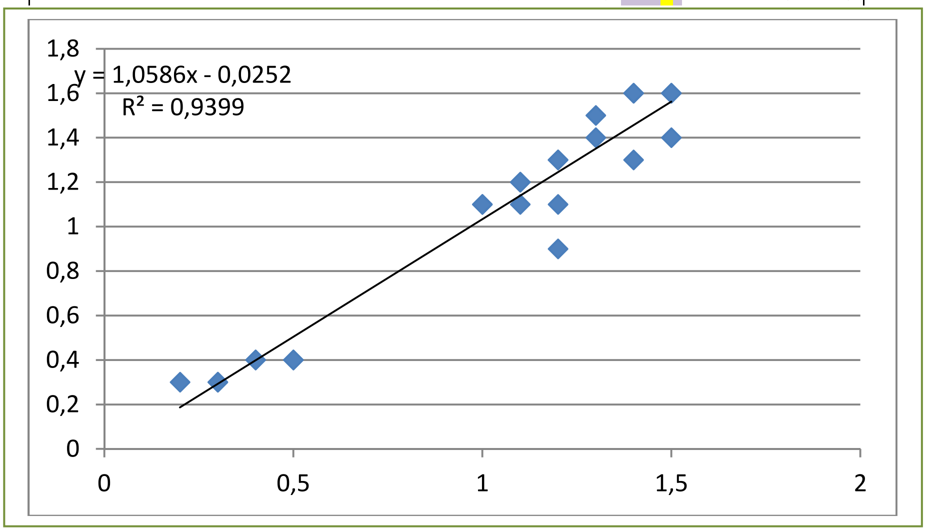
b) Halla la tabla de frecuencias condicionadas de los tiempos del segundo tipo de memoria de aquellos programas que tardaron 1.2 en el primer tipo de memoria. ¿Cuál es la proporción de estos programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria?

c) Representa gráficamente los datos y comenta el resultado obtenido.

d) Si un fichero tarda 0.8 segundos en grabarse en el primer tipo de memoria, ¿cuántos segundos tardara en grabarse en el segundo tipo? Dar una medida de fiabilidad. ¿Confirma esta medida lo comentado en el apartado c)?

Solución: a) Sólo 3, luego el 12.5 % tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo; 9 ficheros, luego el 37.5 % en el primer tipo tardan entre 0.6 y 1.2 segundos en grabarse; El 83.3 % tardan como mucho 1.5 segundos en gravarse.

	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	
0.3	1	2													3
0.4			2	2											4
0.5															0
0.6															0
0.7															0
0.8															0
0.9											1				1
1															0
1.1									2	1	1				4
1.2										2					2
1.3											2		1		3
1.4												1		1	2
1.5												1			1
1.6													2	2	4
	1	2	2	2	0	0	0	0	2	3	4	2	3	3	24

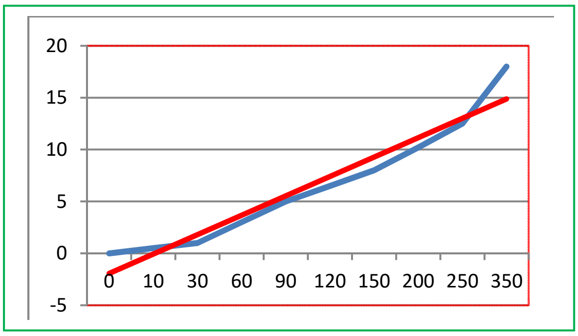


c) La correlación es alta; Los ficheros más rápidos lo son con ambos tipos, y los más lentos también;
d) Tardará 0.82 segundos, lo que confirma lo del apartado c); El coeficiente de correlación da una medida de la fiabilidad, y vale 0.97, muy alto y positivo.

25. De un muelle se cuelgan pesos y obtenemos los alargamientos siguientes.

Peso gr X	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Alargamiento cm Y	0	0.5	1	3	5	6.5	8	10.2	12.5	18

Encuentra la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 y 500 gr. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?



Solución: Recta de regresión: $y = \overline{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^{\,2}}(x - \overline{x})$

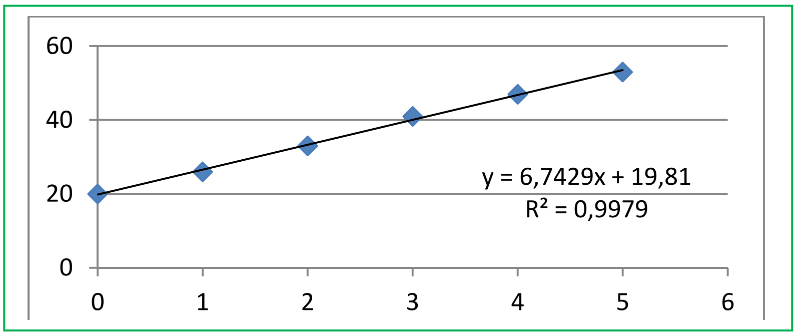
y = 6.5 + (596/12871)(x -126) = 0.05 x – 0.64;
Para 100 gr, se alarga 3.77 cm, y para 500 gr, 21.42 cm. Es más fiable para 100 gr.

26. La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cubico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido.

Número de horas	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cubico en función del tiempo.
b) ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cubico es previsible encontrar cuando transcurran 6 horas? ¿Es buena esta predicción?

Solución: a) y = 6.7x + 19.8;
b) 60; La predicción es buena, pues el coeficiente de correlación es muy alto.

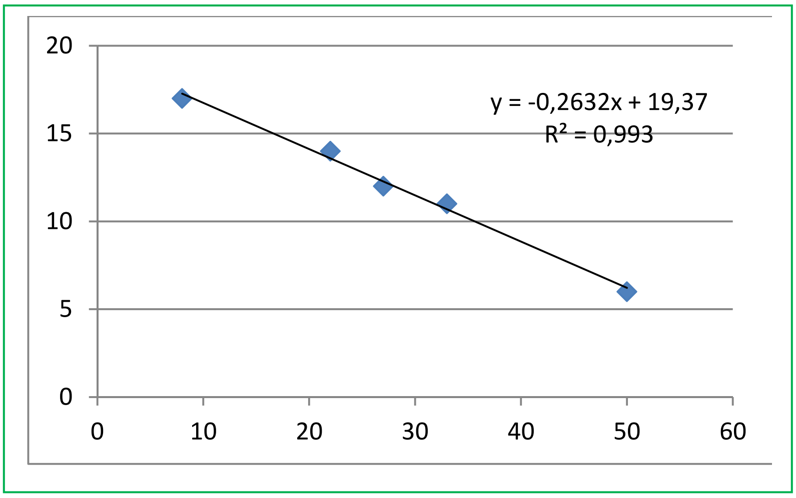


27. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía a medida que pasa el tiempo según los datos recogidos en la tabla:

Tiempo: h	8	22	27	33	50
Altura: m	17	14	12	11	6

a) Encuentra el coeficiente correlación entre el tiempo y la altura. Da una interpretación de él.
b) ¿Qué altura se alcanzará cuando hayan transcurrido 40 horas?
c) Cuando la altura alcanza 2 m suena una alarma. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que suene la alarma?

Solución: a) Coeficiente de correlación = –0.9965; es muy alto en valor absoluto, y negativo.
b) 8.8 m;
c) A las 66 horas.



28. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y la tasa de inflación en los meses indicados de un determinado año, va a ser:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Tasa inflación	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

a) Representa la nube de puntos.

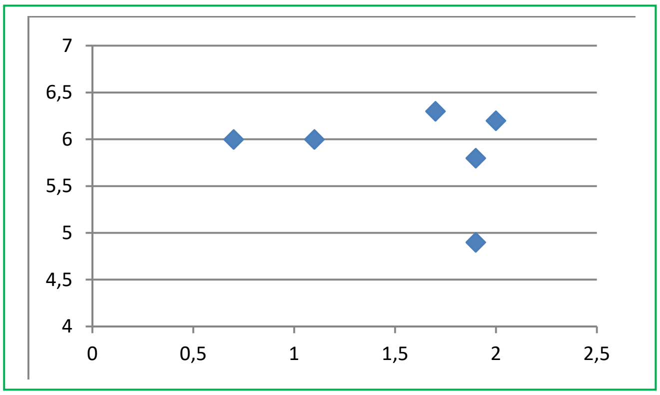
b) Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.

c) ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

Solución:

b) Coeficiente de correlación = -0.24, negativo y muy bajo.

c) Por lo que no se puede estimar la tasa de inflación con el IPC



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística descriptiva unidimensional

1. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m³ durante 10 semanas, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6

Calcula:

a) Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda

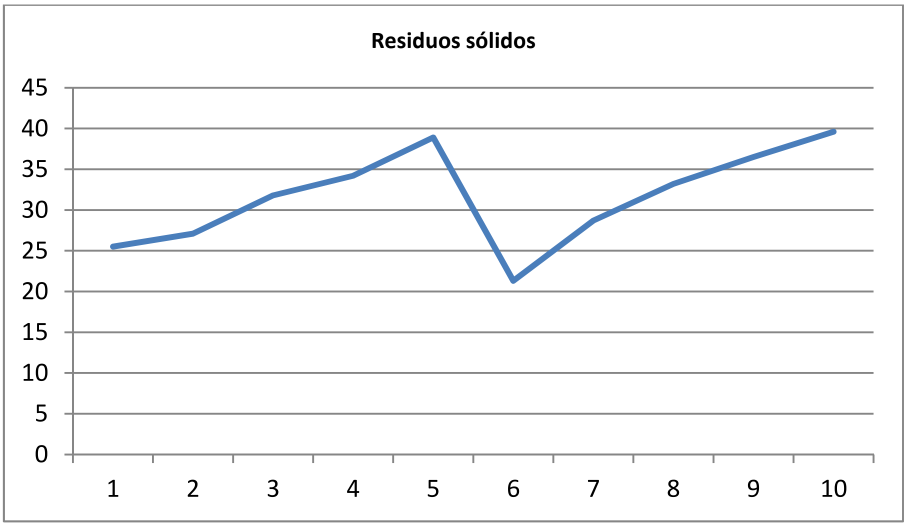
b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que, en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

Solución: a) Media = 31.68: Mediana = 32.5; Moda, No se repite ningún valor.

b) Desviación típica = 5.99; varianza = 35.8, coeficiente de variación = 0.19, valor mínimo = 21.3, valor máximo = 39.6, recorrido = 18.3, primer cuartil = 27.5; tercer cuartil =35.9; intervalo intercuartílico = 8.4.

c)



Parece que durante 5 semanas aumenta el volumen de residuos recogidos, en la semana sexta desciende, para volver a aumentar en las semanas siguientes.

2. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

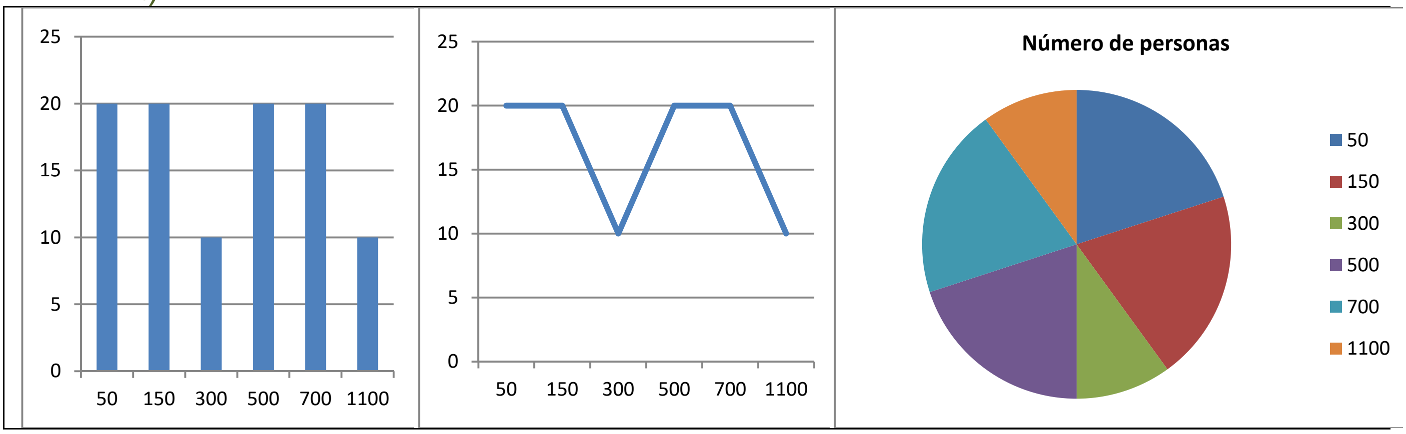
Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.
c) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
d) Calcula la media y la desviación típica.
e) Calcula la mediana y los cuartiles.

Solución: a)

Marcas de clase	50	150	300	500	700	1100
Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias absolutas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias relativas	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1
Frecuencias absolutas acumuladas	20	40	50	70	90	100
Frecuencias relativas acumuladas	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1

b)



c)

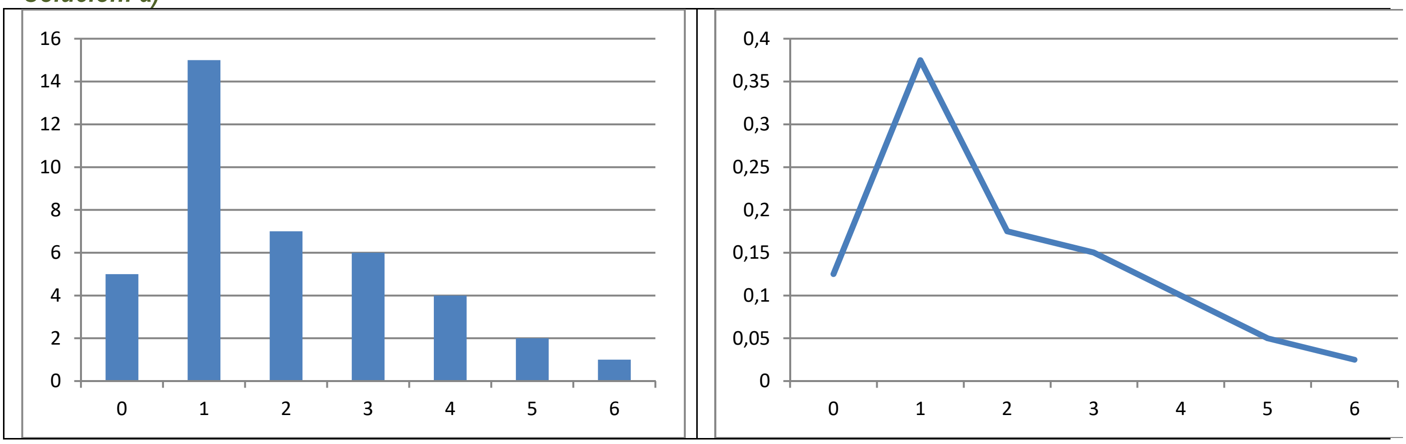
d) Media = 420; Desviación típica = 326.5; e) Mediana = 300; Cuartil 1 = 125; Cuartil 3 = 625.

3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
b) Calcula la media, la mediana y la moda.

Solución: a)



b) Media = 1.975; Mediana = 1.5; Moda = 1.

4. Se ha preguntado a 50 estudiantes de 1º de Bachillerato por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

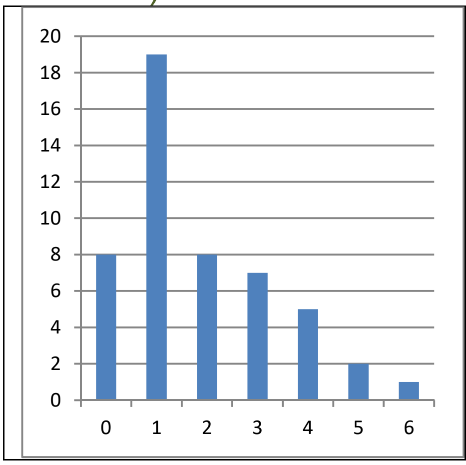
a) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.

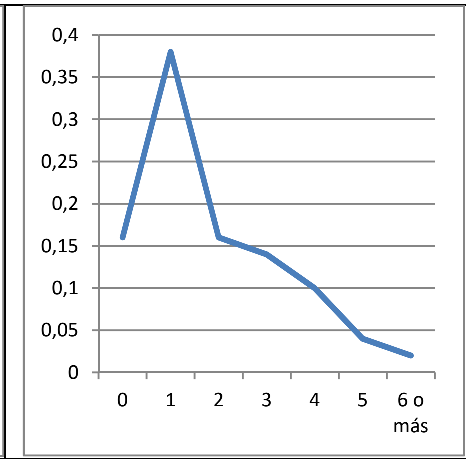
b) Haz un histograma.

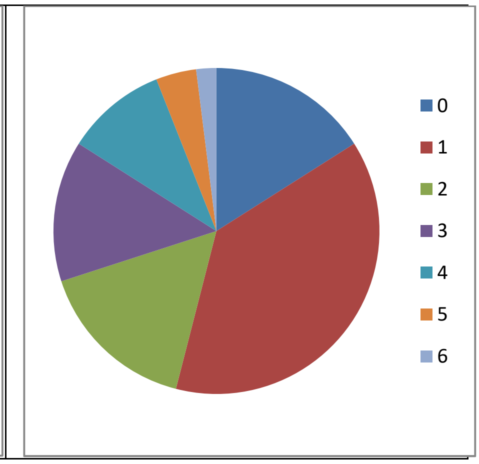
c) Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.

d) Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

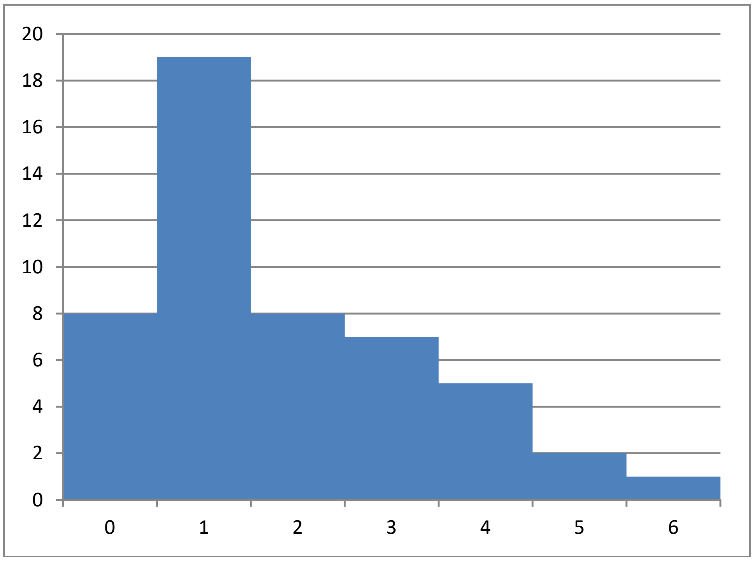
Solución: a)







b)



c) Media = 1.84; Mediana = 1.3; Moda = 1; Cuartil 1 = 0.9; Cuartil 2 = 2.7;

d) Varianza = 2.214; Desviación típica = 1.488; Recorrido = 7; Intervalo intercuartilico = 1.8.

Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

5. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m³ durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

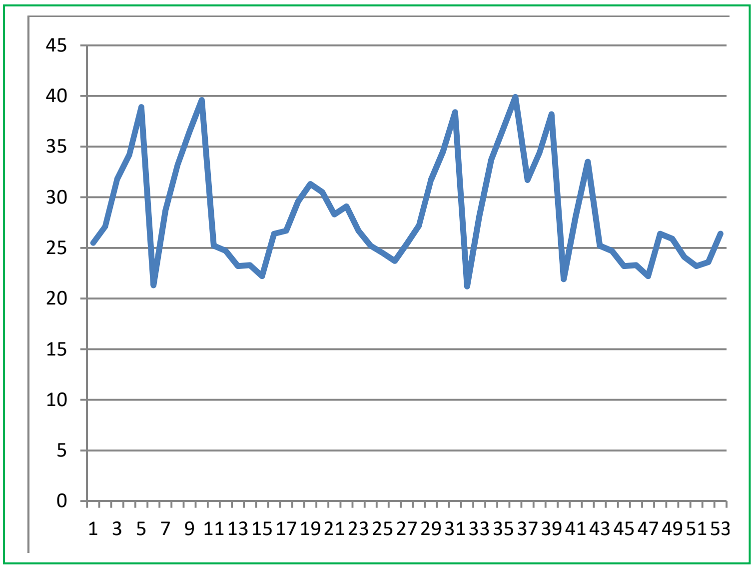
Parámetros estadísticos

a) Las medidas de centralización: la media, mediana, moda

Solución: media = 28.5, mediana = 26.7, moda = 25.2.

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

Solución: desviación típica = 5.3, varianza = 28.2, coeficiente de variación = 0.19, valor mínimo = 21.2, valor máximo = 39.9, recorrido = 18.7, primer cuartil = 24.5, tercer cuartil = 31.8; intervalo intercuartílico = 7.3.



c) Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.

Solución: Coeficiente de asimetría = 0.68; Curtosis = -0.63.

d) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que, en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

Parece que hay un ciclo cada 4 o 5 semanas.

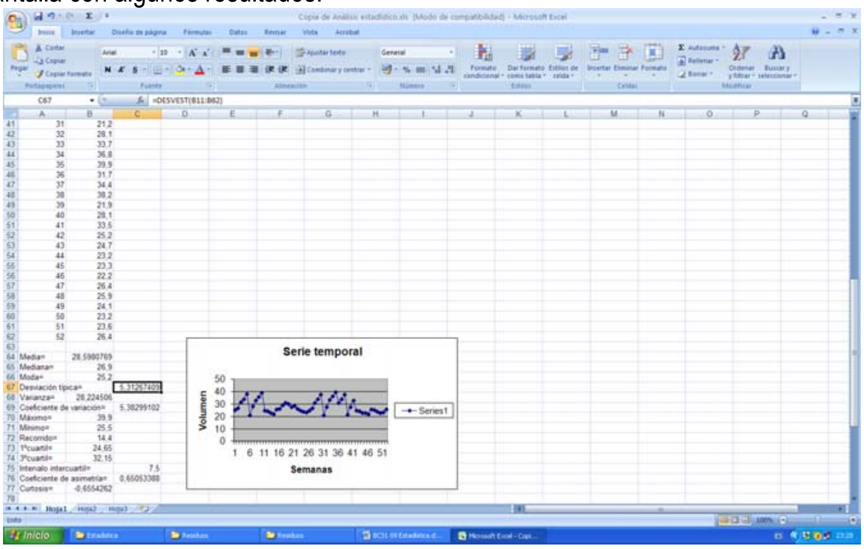
Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52.

Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.

En la casilla A11 un título, por ejemplo, “Residuos sólidos”.

En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.

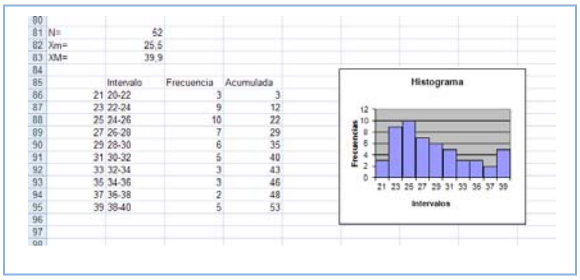
Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



6. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un histograma para mejor determinar su distribución. Para ello:

a) Indica el número total de datos, N, el menor valor: X_m, el mayor valor, X_M, y el recorrido R.

b) La cantidad de barras del histograma, k, se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h, en 2, y el número de barras, k, en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.



80				
81	N=	52		
82	Xm=	25,5		
83	XM=	39,9		
84				
85		Intervalo	Frecuencia	Acumulada
86	21	20-22	3	3
87	23	22-24	9	12
88	25	24-26	10	22
89	27	26-28	7	29
90	29	28-30	6	35
91	31	30-32	5	40
92	33	32-34	3	43
93	35	34-36	3	46
94	37	36-38	2	48
95	39	38-40	5	53
96				
97				

c) Calcula y representa en el histograma los puntos m, $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente.

Estadística descriptiva bidimensional

7. En una muestra de 10 personas miramos su color de ojos y pelo y encontramos que hay 5 morenos de ojos marrones, 1 moreno de ojos verdes, 3 rubios de ojos azules y 1 rubio de ojos verdes. A) Representa en una tabla de doble entrada esta situación. B) Escribe la tabla de frecuencias relativas. C) Escribe las frecuencias absolutas y relativas marginales. D) Escribe la distribución de frecuencias condicionadas.

Solución:

Frecuencias absolutas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	5		5
Ojos verdes	1	1	2
Ojos azules		3	3
Marginales	6	4	10

Frecuencias relativas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	0.5	0	0.5
Ojos verdes	0.1	0.1	0.2
Ojos azules	0	0.3	0.3
Marginales	0.6	0.4	1

d) Color de ojos condicionado al color de pelo

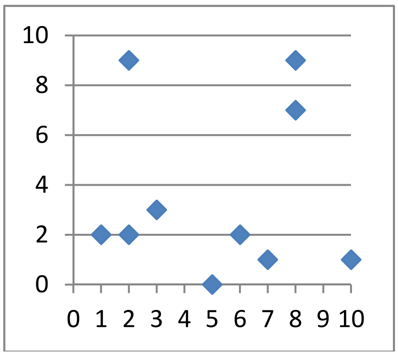
	Moreno	Rubio
Ojos marrones	0.8333333	0
Ojos verdes	0.1666667	0.25
Ojos azules	0	0.75

d) Color de pelo condicionado al color de ojos

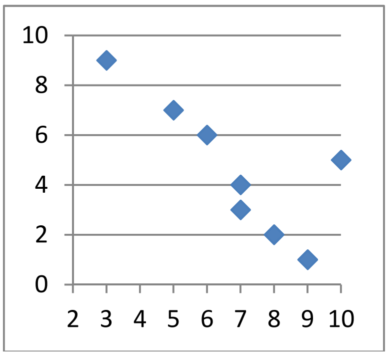
	Moreno	Rubio
Ojos marrones	1	0
Ojos verdes	0.5	0.5
Ojos azules	0	1

8. Lola ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas. y ha obtenido: –0.8, 0.85 y 0.03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?

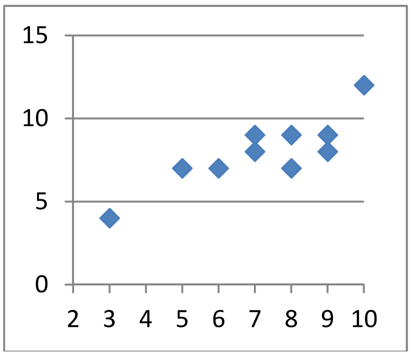
A



B



C

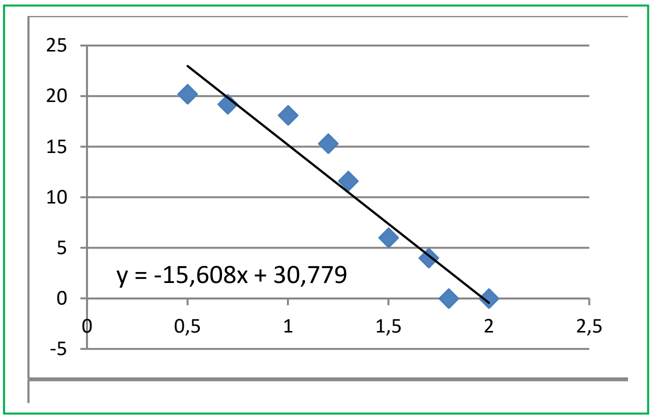


Solución: A = 0.03; B = –0.8; C = 0.85.

9. En una tienda quieren estudiar las ventas del pan de molde en función del precio. Para ello prueban cada semana con un precio distinto y calculan las ventas realizadas. Han obtenido los siguientes datos:

Precio (euros)	0.5	0.7	1	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
Ventas (medias)	20.2	19.2	18.1	15.3	11.6	6	4	0	0

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión (nube de puntos) e indica a qué conclusiones crees que se va a llegar.
b) Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
c) Deciden poner un precio de 1.4 euros, ¿cuáles opinas que serían las ventas medias semanales?



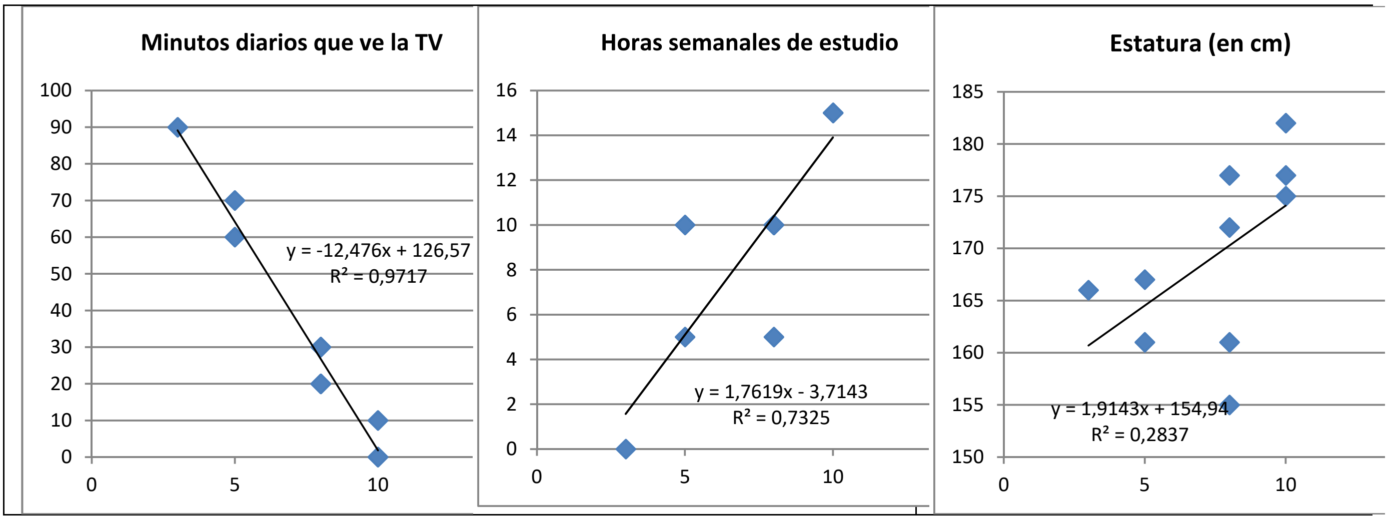
Solución: a) La nube de puntos indica que vamos a tener una correlación fuerte y negativa;
b) Covarianza = –3.54; Coeficiente de correlación = –0.96; Recta de regresión:
y = 10.5 –13.9 (x –1.3) = 28.5 –13.9x;
c) Ventas de 9.1.

10. Preguntamos a 10 estudiantes de 1º de Bachillerato por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Horas semanales de estudio	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Estatura (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Queremos estudiar la relación entre las calificaciones de Matemáticas y las otras tres variables. Para ello dibuja los diagramas de dispersión, y calcula los coeficientes de correlación y las rectas de regresión.

Solución:



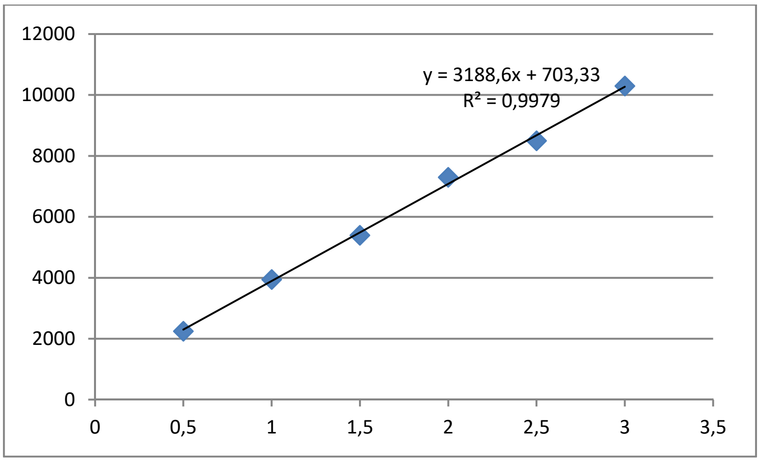
Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y los minutos diarios de ver la TV se observa que existe una correlación alta en valor absoluto, pero negativa.
La recta de regresión es y = –12.47 x + 126.57, y el coeficiente de correlación = 0.986; A más tiempo dedicado a ver la TV, peores notas en Matemáticas.
Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas semanales de estudio se observa que existe una correlación alta y positiva.
La recta de regresión es y = 1.76 x – 3.7, y el coeficiente de correlación = 0.86; A más horas de estudio, mejores notas en Matemáticas.
Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y la estatura se observa que existe una correlación muy pequeña.
La recta de regresión es y = 1.9 x +155, y el coeficiente de correlación = 0.53; Hay poca relación.

11. Una compañía aérea realiza un estudio sobre la relación entre las variables X, tiempo de un vuelo, en horas; e Y, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros, y se han obtenido los siguientes datos.

X (horas)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Y (litros)	2250	3950	5400	7300	8500	10300

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.
b) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpreta los resultados.
c) Calcula la ecuación de las rectas de regresión.

Solución: a)



b) Covarianza = 2325; Coeficiente de correlación = 0.83

c) Recta de regresión: Litros = 3188 * Horas + 703.

12. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Elige una muestra de 10 personas y hazles dos preguntas con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calza, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música, la calificación en Matemáticas de su último examen… Representa los datos obtenidos en una tabla de doble entrada. Haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:
    a) Escribe en tu cuaderno una tabla de doble entrada de frecuencias absolutas, frecuencias relativas. Obtén las distribuciones marginales y condicionadas.
    b) Con las distribuciones unidimensionales, dibuja los diagramas de barras, diagramas de líneas y diagramas de sectores. Calcula las medias, medianas y modas. Calcula las varianzas y las desviaciones típicas. Calcula los cuartiles y los intervalos intercuartílicos.
    c) Con las distribuciones bidimensionales, dibuja un diagrama de dispersión, y calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
    d) Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Solución manipulativa y abierta:

Utiliza una hoja de cálculo con un ordenador

13. El objetivo de esta práctica es estudiar la dispersión entre dos variables, mediante una nube de puntos o diagrama de dispersión, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

En 10 países se anotan los ingresos medios, en euros, por habitante y año, y el porcentaje medio en los residuos sólidos de comida.

Se obtiene:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

a) Abre una hoja de cálculo. Copia los datos. Calcula la media y la desviación típica de las x, y la media y la desviación típica de las y.

b) Representa la nube de puntos.

c) Observa que si $x - \overline{x}$ e $y - \overline{y}$ tienen el mismo signo quedan en los cuadrantes I y III y si lo tienen distinto en II y IV.

d) Organiza en Excel una hoja de cálculo que te permita calcular la correlación.

e) Ahora vamos a mejorar nuestro gráfico.

f) Escribe la ecuación de la recta de regresión.

Solución manipulativa:

14. Se recoge en una tabla la altura (en metros) de un padre y de la de su hijo con 15 años de edad.

Padre	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Hijo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95

a) Utiliza el ordenador para representar el diagrama de dispersión.

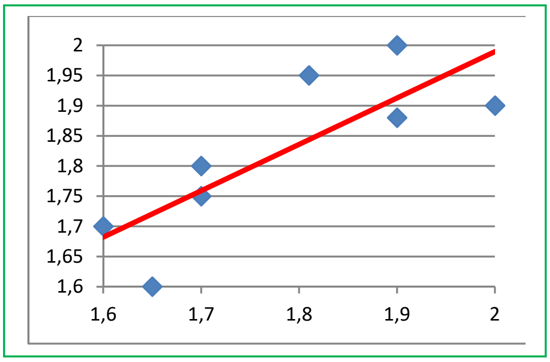
b) Dibuja la recta de regresión.

c) Utiliza la recta para determinar que altura del hijo correspondería a una altura del padre de 1.75 m.

Solución:

b) y = 0.67x + 0.62

c) 1.7975



AUTOEVALUACIÓN

Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

1. La media de errores es
   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Solución: c)

2. La media de tiempos es
   a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Solución: a)

3. La desviación típica de errores es
   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Solución: c)

4. La desviación típica de tiempos es
   a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Solución: b)

5. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:
   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5.9, 6.1 y 7.3 d) 6, 7 y 8

Solución: d)

6. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:
   a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6.5, 7.5 y 8.5 d) 6, 7 y 8

Solución: a)

7. La covarianza es:
   a) 1.21 b) –1.5 c) –1.4 d) 1.425

Solución: d)

8. El coeficiente de correlación es:
   a) 0.8 b) –0.8 c) –0.7 d) 0.7

Solución: a)

9. La recta de regresión lineal de los errores sobre el tiempo es:
   a) $y = 3.1 – 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.71x$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 – 0.8x$

Solución: b)

10. La recta de regresión lineal del tiempo sobre los errores es:
    a) $y = 3.1 – 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.7$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 – 0.8x$

Solución: c)