Soluciones de actividades y ejercicios 1º Bachillerato Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Marea verde de Matemáticas

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS REALES

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica:

a) 1/9 b) 7/5 c) 9/50 d) 2/25 e) 1/8 f) 3/22

Solución: a) 1/9 (P) b) 7/5 (E) c) 9/50 (E) d) 2/25 (E) e) 1/8 (E) f) 3/22 (P)

2. Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

Solución: a) 1/9 = 0.111… b) 7/5 = 1.4 c) 9/50 = 0.18 d) 2/25 = 0.08 e) 1/8 =0.125 f) 3/22 = 0.1363636…

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

a) 1/5 b) 1/3 c) 5/9 d) 2/25 e) 11/400 1/11

Solución: a) 1/5 = 0.2 b) 1/3 = 0.333… c) 5/9 = 0.555… d) 2/25 = 0.08 e) 11/400 = 0.0275 1/11 = 0 090909…

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, después comprueba con la calculadora si está bien:

a) 8.35; b) 791.297835; c) 0.47

Solución: a) 835/100; b) 791297835/1000000; c) 47/100.

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

a) 9.464646….. b) 91.02545454…. c) 0.9999….. d) 3.267123123123…..

Solución: a) 937/99; b) 9011/99; c) 1; d) 3264/999.

6. ¿Puedes demostrar que 2.99999… es igual a 3? ¿Calcula cuánto vale 1.5999…? *Ayuda*: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.

Solución: x = 2.9999…. $\Rightarrow$ 10x = 29.9999…. $\Rightarrow$ 10x – x = 9x = 29 – 2 = 27 $\Rightarrow$ x = 27/9 = 3; 1.5999… = 144/90 = 8/5.

7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

Solución: Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Vamos a suponer que $\sqrt[3]{7}$ es un número racional y llegar a una contradicción. Si $\sqrt[3]{7}$ es un número racional puede escribirse con una fracción p/q, que suponemos irreducible, $\sqrt[3]{7}$ = p/q. $\Rightarrow$ 7 = p^3/q^3 $\Rightarrow$ 7 q^3 = p^3, luego en la descomposición en factores primos de p^3 hay un 7, y por tanto p es múltiplo de 7 $\Rightarrow$ p = 7a $\Rightarrow$ 7 q^3 = 7^3a^3 $\Rightarrow$ q^3 = 7^2a^3 $\Rightarrow$ q también es múltiplo de 7, que contradice que la fracción p/q sea irreducible.

8. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

Solución: 47.

9. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar una razón?

Solución: 7 pues la máxima potencia entre 5 y 2.

10. Haz la división 999999:7 y después haz 1:7, ¿es casualidad?

Solución: 999999/7 = 142857; 1/7 = 0.142857142857… No es casualidad

11. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

Solución: 999/37 = 27; 1/37 = 0.027027… No es casualidad, si 1/b es periódico puro, el periodo es p y p tiene n cifras, se cumple que $\frac{10^n-1}{b}=p$

12. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

Solución abierta: –0.2; 0; 0.7.

13. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1.5.

Solución abierta: 1.42; 1.43; 1.44; 1.45 y 1.46.

14. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π.

Solución abierta: Por ejemplo, 3.141, 3.1415, 3.1412; 3.1413; 3.14159…

15. Representa en la recta numérica los siguientes números:

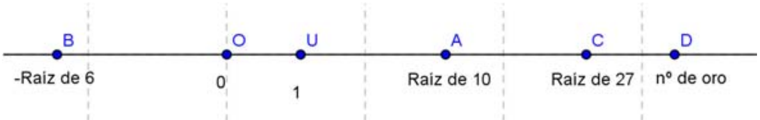
a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1.342, d) −2.555555….

Solución gráfica:

16. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Solución gráfica:



17. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

a) 5 b) −5 c) −π

Solución: ***a) 5,*** ***b) 5,*** ***c) π***

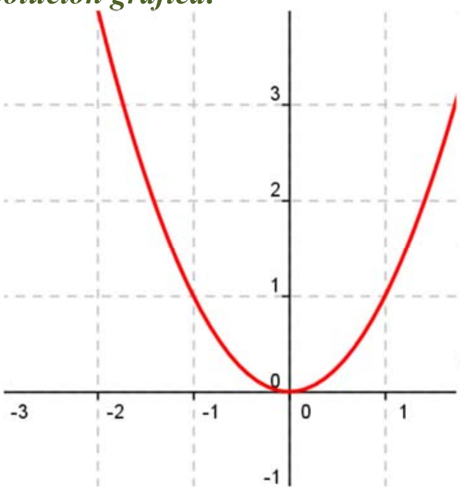
18. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2|$

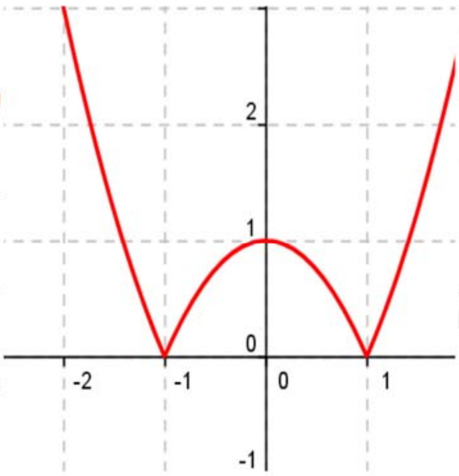
b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c)) $f(x) = |\sqrt{x}|$

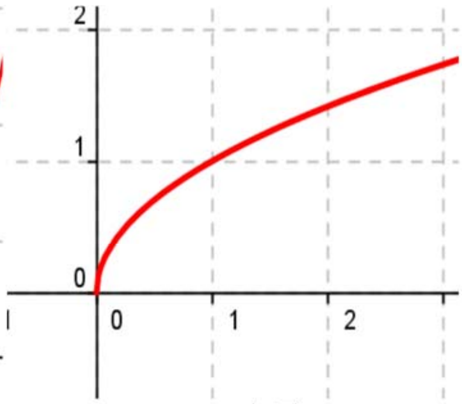
Solución gráfica:



a) $f(x) = |x^2|$



b) $f(x) = |x^2 - 1|$



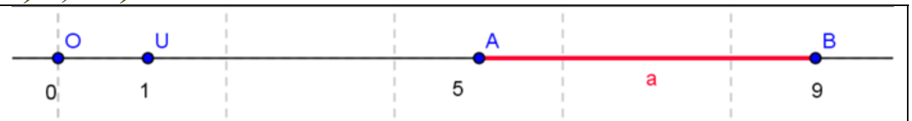
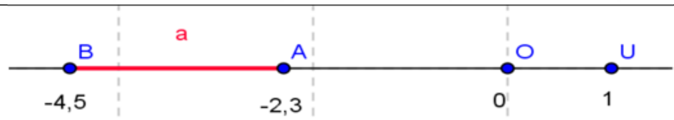
c) $f(x) = |\sqrt{x}|$

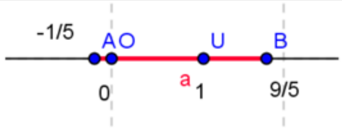
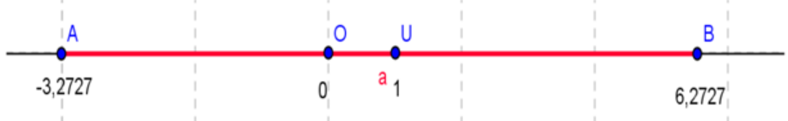
19. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

a) Dist(5, 9) b) Dist(−2.3, −4.5)

c) Dist(−1/5, 9/5) d) Dist(−3.272727…. , 6.27272727….).

Solución gráfica: a) 4; ***b) 2,2; c) 2;*** ***d) 9.***

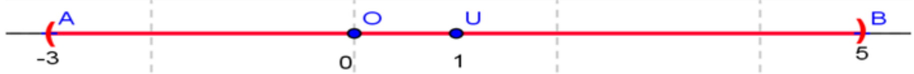
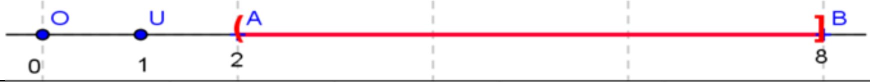
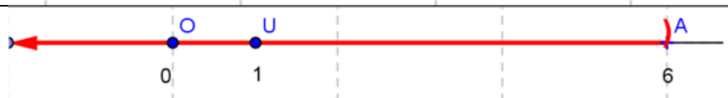
a) Dist(5 , 9)	***4***	
b) Dist(−2.3, −4.5)	***2,2***	

c) Dist(–1/5, 9/5)	*2*	
d) Dist(–3.272727…. , 6.27272727….)	*9*	

20. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) (–∞, 6)

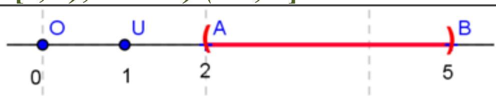
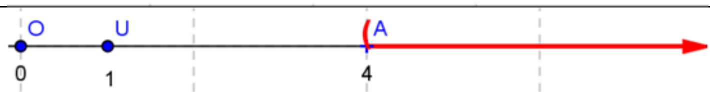
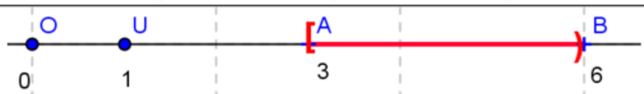
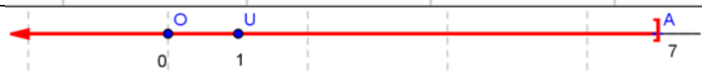
Solución gráfica:; ; ; .

a) {x ∈ R; 1 ≤ x < 7}	
b) {x ∈ R; –3 < x < 5}	
c) {x ∈ R; 2 < x ≤ 8}	
d) {x ∈ R; x < 6}	

21. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

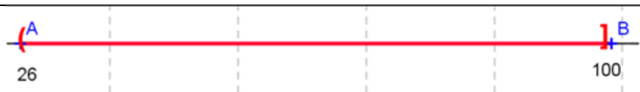
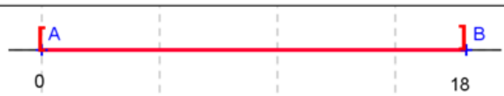
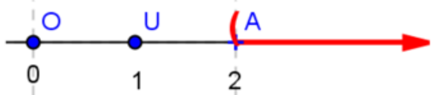
Solución gráfica: a) (2, 5); b) (4, +∞); c) [3, 6); d) (–∞, 7].

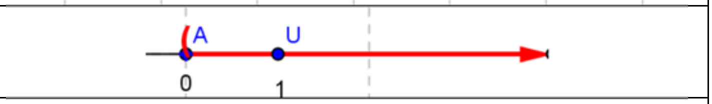
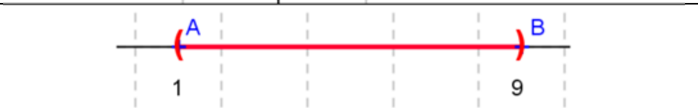
a) (2, 5)	
b) (4, +∞)	
c) 3 ≤ x < 6	
d) (–∞, 7]	

22. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Un porcentaje superior al 26 %.
b) Edad inferior o igual a 18 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25 ºC.
f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).
g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

Solución gráfica:

a) (26, 100], $\{x \in \Re / 26 < x \leq 100\}$	
b) [0, 18], $\{x \in \Re / 0 \leq x \leq 18\}$	
c) (2, +∞); $\{x \in \Re / x^3 > 8\}$	

d) [100, 1000); $\{x \in \Re \ / \ 100 \le x < 1000\}$	
e) (–∞, 25); $\{x \in \Re \ / \ x < 25\}$	
f) (0, +∞); $\{x \in \Re \ / \ x > 0\}$	
g) (1, 9); $\{x \in \Re \ / \ 1 < x < 9\}$	

23. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) $E(1, 5)$
b) $E(-2, 8/3)$
c) $E(-10, 0.001)$

Solución: a) E(1, 5) = (–4, 6);
b) E(–2, 8/3) = (–2 –8/3, –2 +8/3) = (–14/3, 2/3);
c) E(–10; 0.001) = (–10 – 0.001, –10 + 0.001) = (–10.001, –9.999).

24. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7)
b) (–7, –4)
c) (–3, 2)

Solución: a) E(5.5, 1.5); b) E(–5.5, 1.5); c) E(–0.5, 2.5).

25. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?

**Pista*: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

Solución: No se pueden poner como un intervalo, ya que sería el intervalo $(500, 1000)$***, por lo que 600.222333€ sería un sueldo, y no puede serlo al tener más de dos decimales.***

26. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	**1**	**2**	**3**	**4**
$\sqrt{10}$	*3*	*3.1*	*3.16*	*3.162*
1/9	*0*	*0.1*	*0.11*	*0.111*
3.7182	*3*	*3.7*	*3.71*	*3.718*
42.27	*40*	*42*	*42.2*	*42.27*

27. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

Solución: 1.62; Error absoluto < 0.002; Error relativo = 0.001966….

28. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 6.3 b) 562 c) 562.00

Solución: a) $EA \le 0.05$; ***b)*** $EA \le 0.5$; ***c)*** $EA \le 0.0005$.

29. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

Solución: Peso mínimo: 2250 g; Peso máximo: 2750 g; $EA \le 250$ ***g.***

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

30. Calcula las siguientes potencias:

a) -2^5 b) $(2 + 1)^4$ c) $-(-2x)^3$

***Solución:** a) –32; b) 81; c) $8x^3$.*

31. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

***Solución:** a) $(x + 1)^4$ b) $(x+2)^{-1} = \frac{1}{x+2}$ c) $(x - 1)^{12}$ d) $(x+3)^{-2} = \frac{1}{(x+3)^2}$*

32. Calcula las siguientes operaciones con potencias:

a) $2^5 \cdot 4^2$ b) $(3^3)^3$ c) $7^3 / 7^0$

d) $4^4/4^{-5}$ e) $5^{-5} \cdot 25^{-2}$ f) $(7^{-3})^{-3}$

g) $4^{-3} / 7^0$ h) $7^{-4}/7^{-5}$

***Solución:** a) 2^9; b) 3^9; c) 7^3; d) 4^9; e) $(1/5)^9$; f) 7^9; g) $(1/4)^3$; h) 7.*

33. Simplifica:

a) $\frac{a^2 \cdot b^3}{(a \cdot b)^4}$ **b)** $\frac{(2x-1)^8 \cdot (2x-1)}{(2x-1)^7}$ **c)** $\frac{y^6 \cdot z^{-5} \cdot x^2}{y^8 \cdot z^{-6} \cdot x^3}$ **d)** $\frac{(3x-1)^7 \cdot (3x-1)^5}{(3x-1)^0}$

***Solución:** a) $1/(a^2 \cdot b)$; b) $(2x - 1)^2$; c) $z/(y^2 \cdot x)$; d) $(3x - 1)^{12}$.*

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

34. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6.b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

***Solución:** a) a^4b^6 b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt{x+1}$*

35. Halla:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

***Solución:** a) $\sqrt[8]{\frac{y}{5}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{2}}$*

36. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

***Solución:** a) $\sqrt[4]{\frac{y}{5}}$ b) $(x+3)\sqrt[5]{x+3}$*

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION

37. Escribe bajo un solo radical y simplifica: $\sqrt[2]{2.\sqrt[2]{3.\sqrt[2]{4.\sqrt[2]{5.\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

Solución: $\sqrt[64]{2^{53} \cdot 5^4 \cdot 3^{18}}$

38. Calcula y simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3.y^3}.\sqrt[3]{x^4.y^5}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$

Solución: $xy\sqrt[4]{xy^3}$

39. Realiza la siguiente operación: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

Solución: $(4x^3 + x + 1)\sqrt{x}$

40. Calcula y simplifica: $\sqrt[2]{\frac{3}{x}}\sqrt[3]{\frac{x^2}{8}}\sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

Solución: $\frac{3}{2}\sqrt[12]{\frac{x^2}{5^3}}$

41. Racionaliza la expresión: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

Solución: $\frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{x-2y}$

42. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Solución: $5-\sqrt{6}$

43. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

Solución: $25+10\sqrt{5}-2\sqrt{10}-4\sqrt{2}$

5. NOTACION CIENTÍFICA

44. Calcula:

a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

Solución: a) $1.44\cdot10^9$ b) $1.625\cdot10^2$

45. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}}{10^6-5\cdot10^5}$ b) $\frac{7.35\cdot10^4}{5\cdot10^{-3}}+3.2\cdot10^7$

Solución: a) $1.46\cdot10^{-9}$ b) $4.67\cdot10^7$

46. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

Solución: a) $5.1\cdot10^{11}$ b) $4.7\cdot10^{-19}$

6. LOGARITMOS

47. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

Solución:

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow \log_2 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_2 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow \log_5 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_5 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow \log_2 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow \log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

48. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

Solución: a) 5; b) 2; c) 41; d) 30.

49. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

Solución: a) 3; b) 2; c) 2; d) –4.

50. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

Solución: a) $x = 6$; b) 1/16; c) 5.

51. Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Solución: a) 6 – 2 – 2 – 1/2 = 3/2; b) – 5 – 3 – 0 = –8.

52. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

Solución: a) (1/5)(ln4 + 2 ln(x) – 3 ln(e)) = (1/5)(ln4 + 2 ln(x) – 3); b) 3log(a) + 2 log(b) – 4 log(c) – log(d).

53. Utiliza la calculadora para obtener a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

Solución: a) log 0.000142 = -3.8477117; b) log 142 = 2.15228834; c) log 9 + log 64 = 2.76042248

54. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

Solución: a) log81 = 4*(0.4771212); b) log27 = 3*(0.4771212); c) log59049 = 10*(0.4771212) = 4.771212.

55. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Solución: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$ ***= log(m^{1/2}) – log(t²) – log(p) + log(h^{5/2}) = log((m^{1/2} · h^{5/2})/ (t² ·p))***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números reales

1. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales y pasa a fracción los racionales:

$0; -0.2; \sqrt{5}; 3'72; \frac{-1}{7}; 2'321321..; -9'9; 9^1; \sqrt{\sqrt{4}}; 3'222; 5'034212121.$

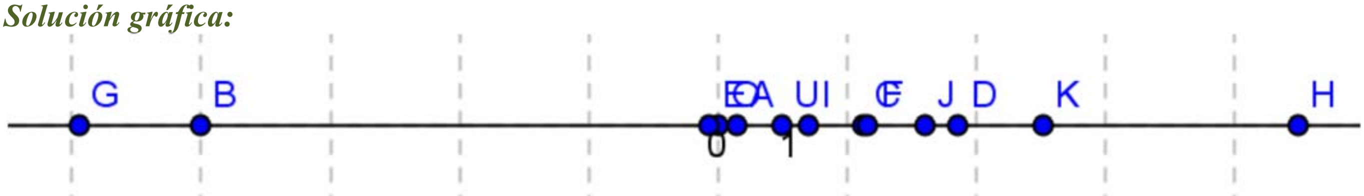
Solución: Irracionales: $\sqrt{5}$; $\sqrt{\sqrt{4}}$; ***Racionales: 0; –0.2;***

$3'72; \frac{-1}{7}; 2'321321...; -9'9; 9^1; 3'222; 5'034212121...$

2. Representa, aproximadamente, en la recta real los números:

$0.3; -8; \sqrt{3}; 1.2222\ldots; 3.5; \sqrt{7}; \frac{1}{7}; 3.777\ldots$

Solución gráfica:



3. Escribe dos números en las condiciones siguientes:

a) Mayores que 0.12 y menores que 0.13

b) Comprendidos entre 2.35 y 2.36. Comprueba que la diferencia entre estos números y 2.36 es menor que una centésima

Solución abierta: a) 0.125; 0.126; b) 2.351; 2.355. Las diferencias con 2.36 son: 0.009 y 0.005 menores que 0.01.

4. Dados los intervalos:

$A = \{x \in \Re;\ -10 \le x < 1\}$; $B = \{x \in \Re;\ 1/2 < x \le 3\}$; $C = \Re - (1, 2)$

a) Represéntalos en la recta real

b) Calcula sus longitudes

c) Calcula: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap C) \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$

Solución gráfica: b) 11; 2.5; ∞; c) $A \cup B = \{x \in \Re;\ -10 \le x \le 3\}$; $A \cap B = \{x \in \Re;\ 1/2 < x < 1\}$; $A \cup C = C$; $(A \cap C) \cup B = A \cup B = \{x \in \Re;\ -10 \le x \le 3\}$; $A \cup B \cup C = \Re$; $A \cap B \cap C = \{x \in \Re;\ 1/2 < x < 1\}$.

5. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (*Pista*: x puede tener dos valores)

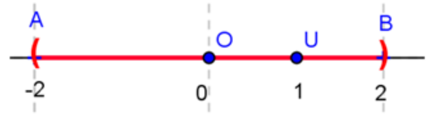
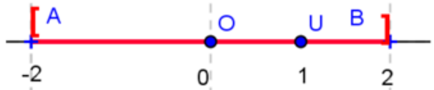
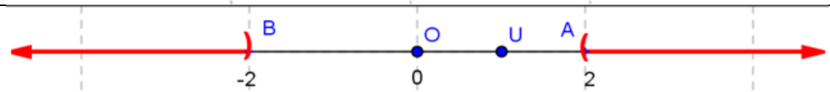
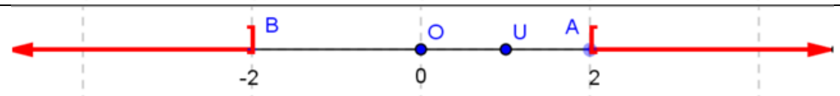
a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

Solución: a) 5 y –5; b) 4; c) –10 y 4.

6. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

a) $|x| < 2$ b) $|x| \leq 2$ c) $|x| > 2$ d) $|x| \geq 2$

Solución gráfica:

a) $-2 < x < 2$	
b) $-2 \leq x \leq 2$	
c) $x < -2 \vee x > 2$	
d) $x \leq -2 \vee x \geq 2$	

7. Halla dos números que disten 4 unidades de 2, y otros dos que disten 2.5 unidades de –3, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

Solución: –2 y 6; –5.5 y 0.5; 6 –(–5.5) = 11.5.

8. Escribe el intervalo $[-2, 6] \cap (2, 9)$.

Solución: (2, 6]

9. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

Solución: [5, 11]

10. Cuál es el error absoluto y el error relativo cometidos al hacer las siguientes aproximaciones:

a) $\sqrt{3}$ por 1.73 b) $\pi + 1$ por 4.1 c) Redondeo a cuatro cifras del número π

Solución: a) 0.0020508… y 0.001184…; b) 0.041592… y 0.01004267…; c) -0.0000073464 y -0.0000023384…

Potencias

11. Expresa en forma de potencia:

a) $\frac{1}{64}$ b) $\frac{t}{t^5}$ c) $(\frac{1}{z+1})^2$ d) $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ e) $\frac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

Solución: a) 2^{-6} ***b)*** t^{-4} ***c)*** $(z+1)^{-2}$ ***d)*** 3^{14} ***e)*** $x^{-10}y^{-3}$

12. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Solución: a) 2 b) 5 c) $125\sqrt[3]{5}$ ***d)*** $8\sqrt[3]{2}$ ***e)*** $\frac{1}{2\sqrt[5]{2}}$

13. Calcula:

a) $\frac{(x+1)^2 \cdot (x+1)^3}{(x+1)^4}$ b) $\frac{(2x-3)^7 \cdot (2x-3)^5}{(2x-3)^6}$ c) $\frac{(5y+1)^6 \cdot (5y+1)^2}{(5y+1)^8}$ d) $\frac{(x-1)^4 \cdot (x-1)^0}{(x-1)^3}$

Solución: a) (x + 1); b) $(2x-3)^6$***; c) 1; d) (x – 1)***

Radicales

14. Expresa en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

Solución: a) $\sqrt[9]{x^7}$ ***b)*** $\sqrt[3]{m^5 \cdot n^3}$ ***c)*** $\sqrt[15]{x^2}$ ***d)*** $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

15. Expresa en forma de radical:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

Solución: a) $x^{\frac{10}{3}}$ ***b)*** $a^{\frac{7}{2}}$ ***c)*** $a^{\frac{k}{nm}}$ ***d)*** $x^{\frac{5x+1}{3}}$ ***e)*** $x^{(3x+2)/2}$ ***f)*** $x^{\frac{1}{60}}$

16. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a.\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Solución: a) $a^{\frac{2}{3}}$ ***b)*** $5^{\frac{5}{6}}$ ***c)*** $a^{\frac{-5}{6}}$ ***d)*** $2^{\frac{1}{3}}$ ***e)*** $a^{\frac{1}{2}}$ ***f)*** $2^{\frac{-1}{4}}$ ***g)*** $a^{\frac{1}{6}}$

17. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot\sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

Solución: a) $\sqrt[3]{2^2}$ ***b)*** $\sqrt[10]{2^3}$ ***c)*** $\sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}}$ ***d) x*** ***e) 2*** ***f)*** $\sqrt[4]{xy^2}$ ***g)*** $\sqrt[100]{x^{47}\cdot 3^{20}}$

18. Extrae factores del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ e) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ f) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ g) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

Solución: a) $2x\sqrt[3]{2^2x}$ ***b)*** $3ab\sqrt[3]{3b^2c}$ ***c)*** $2^2\sqrt{2}$ ***d)*** $\frac{1}{c}\sqrt[4]{\frac{5^2a^2b}{c^2}}$

e) $\frac{2a^2}{b^2}\sqrt{2a}$ ***f)*** $\frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$ ***g)*** $\frac{2^2a}{3b^2}\sqrt{\frac{2a}{5}}$

19. Introduce factores en el radical:

a) $2.\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3.\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2.\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Solución: a) $\sqrt{6}$ ***b)*** $\sqrt{6}$ ***c)*** $\sqrt[3]{2}$ ***d)*** $\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ ***e)*** $\sqrt{3}$ ***f)*** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

20. Calcula

a) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^4}\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

Solución: a) ***ab^2*** ***b)*** ***2^25a^3b*** ***c)*** $\sqrt[12]{\frac{2}{5}}$ ***d)*** $\frac{1}{2}$ ***e)*** $\frac{3}{2}$ ***f)*** $\sqrt[6]{2}$

21. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Solución: a) $5\sqrt{2}$ ***b)*** $2\sqrt{2a}$ ***c)*** $2\sqrt{5}$ ***d)*** $\frac{5}{8}\sqrt{7}$ ***e)*** $\frac{3}{2}\sqrt[5]{3}$ ***f)*** $\sqrt[5]{3}$ ***g)*** $6\sqrt{6}$

22. Racionaliza los denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Solución: a) $\frac{5\sqrt[3]{2^2}}{2}$ ***b)*** $6+3\sqrt{3}$ ***c)*** $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ ***d)*** $6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$ ***e)*** $3-\sqrt{6}$ ***f)*** $4-\sqrt{15}$

23. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Solución: a) $2\sqrt{5}-3$ ***b)*** $3\sqrt{2}-1$ ***c)*** $10+3\sqrt{2}+\sqrt{15}+2\sqrt{30}$ ***d)*** $\frac{11+4\sqrt{6}}{-5}$ ***e)*** $2\sqrt{3}$ ***f)***

$x-\sqrt{x^2-1}$

24. Efectúa y simplifica: a) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)(3+2\cdot\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Solución: a) 1 b) $4-\sqrt{5}$ ***c)*** $\sqrt{3}-2$

25. Utiliza la calculadora para efectuar: a) $\sqrt{357}+\sqrt{87}-\sqrt{531}$; b) $\sqrt{\frac{38}{59}}:\sqrt{\frac{26}{31}}$

Solución: a) $\sqrt{357}+\sqrt{87}-\sqrt{531}$***= 51.2652599; b)*** $\sqrt{\frac{38}{59}}:\sqrt{\frac{26}{31}}$ ***= 0.77828964***

Logaritmos

26. Desarrolla los siguientes logaritmos: a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$ b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

Solución: a) (3/2)ln(x) – 2ln(y) + 4 ln(z); b) (1/4)[5(log₃x + log₃y) – 1/2 log₃z – 2 log₃e.

27. Simplifica la siguiente expresión: $\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$

Solución: $\log_3(5\cdot 9^{7/3})/a^3$.

Notación científica:

28. La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5.98\cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.

Solución: $1.9734\cdot 10^{30}$ ***kg***

29. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?

Solución: $1.38\cdot 10^{26}$

30. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2 en el año 1995, cantidad que representa el 53.5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

Solución: $2.24\cdot10^{13}$ Tn

31. Expresa en notación científica:

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1 628 000 €

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0.000000000066 m

Solución: a) $1.628\cdot10^{6}$ b) $5.2285\cdot10^{12}$ c) $6.6\cdot10^{-11}$

32. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$ b) $(4\cdot10^{-12})\cdot(5\cdot10^{-3})$ c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$ d) $3.1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$ e) $(4\cdot10^{5})^{-2}$

Solución: a) $2.4\cdot10^{12}$ b) $2\cdot10^{-14}$ c) $2.5\cdot10^{15}$ d) $3.12\cdot10^{12}$ e) $6.25\cdot10^{-12}$

33. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$ b) $\frac{0.000541\cdot10\,318\,000}{1\,520\,000\cdot0.00302}$ c) $(0.0073)^2\cdot(0.0003)^2$ d) $\frac{2\,700\,000-13\,000\,000}{0.00003-0.00015}$

Solución: a) $1.592\cdot10^{3}$ b) 1.216 c) $4.7961\cdot10^{-12}$ d) $8.58\cdot10^{10}$

34. Efectúa y expresa el resultado en notación científica: a) $\frac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}}{10^{6}-5\cdot10^{5}}$ b) $\frac{7.35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3.2\cdot10^{7}$ c) $(4.3\cdot10^{3}-7.2\cdot10^{5})$

Solución: a) $1.46\cdot10^{-9}$ b) $4.67\cdot10^{7}$ c) $-7.157\cdot10^{5}$

35. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica: $(5.24\cdot10^{6})\cdot(8.32\cdot10^{5})$:

a) $4.35968\cdot10^{12}$ b) $43.5968\cdot10^{13}$ c) $4.35968\cdot10^{11}$ d) $4.35968\cdot10^{13}$

Solución: a) Correcto b) No notación científica c) Incorrecto d) Incorrecto

AUTOEVALUACION

1. El número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

Solución: a)

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. El resultado es: a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

Solución: c)

3. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

Solución: c)

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

Solución: b)

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6.b^7.c^6}}$

a) $5^3.a.b.c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2.c}$ b) $5\cdot a^2.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$ c) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^3.b^2.c^3}$ d) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$

Solución: d)

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}.a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3.a^{-2}$

Solución: b)

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

Solución: c)

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2.(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8.(x+2)^9.(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$

Solución: c)

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Solución: b)

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83\cdot10^9+6.932\cdot10^{12}-7.5\cdot10^{10}$

a) $6.86283.10^{12}$ b) $6.86283\cdot10^{13}$ c) $6.8623\cdot10^{11}$ d) $6.8628\cdot10^{12}$

Solución: a)

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5'24\cdot10^{10}}{6'3\cdot10^{-7}}$

a) $0.8317.10^{17}$ b) $8.317\cdot10^{16}$ c) $8.317\cdot10^{15}$ d) $83.17.10^{16}$

Solución: b)

CAPÍTULO 2: ÁLGEBRA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POLINOMIOS.

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

Solución: Suma: $3x^4 + x^3 + x^2 - 3$ ***Resta:*** $-3x^4 - x^3 + x^2 - 1$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

Solución: a) $2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ ***b)*** $-x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ b) $-7x^3 - 6x + 5$ c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

Solución: a) $-2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ ***b)*** $7x^3 + 6x - 5$ ***c)*** $x^4 - 3x^2 + 8x - 7$

4. Considera los polinomios $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

Solución: p(–2) = 6 ***q(–2)*** = 7 ***s(–2)*** =13

5. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x - 5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

Solución: p(3) = –134 ***–p(3) = 134***

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Solución: a) $-4x^3 + 3x^2 + 2x$ ***b)*** $2x^4 + 4x + 4$ ***c)*** $-2x^3 + 2x^2$

7. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$ b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

Solución: a) $-20x^6 + 8x^4$ ***b)*** $-6x^5 - 8x^4 - 3x^2 - 4x$ ***c)*** $-6a^4 - 7a^2b - 20b^2$ ***d)*** $-54a^3 + 336a^2 - 504a + 96$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$

Solución: a) 1/4; b) –1/2; c) –1.

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Solución: a) $6x^4 + 12x^3 - 18x$; ***b)*** $12x^2 + 2x - 24$; ***c)*** $23a^2b - 6a^4 - 20b^2$; ***d)*** $-54a^3 + 336a^2 - 504a + 96$.

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$ b) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

Solución: a) $-10x^9 - 6x^7 + 2x^5$ ***b)*** $6x^5 + 10x^4 - 17x^3 - 15x^2 + 12x$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$ b) $24x^4 - 30x^2$

Solución: a) $2x^2(-8x^2 - 10x + 5)$ ***b)*** $6x^2(4x^2 - 5)$

12. Realiza los cálculos:

a) $(2+3a)^2$ b) $(-x+3)^2$ c) $(-3x+2)^2$ d) $(x^2-1)^3$ e) $(4x^2+2)^3$

Solución: a) $4+12a+9a^2$; ***b)*** x^2-6x+9 ***c)*** $9x^2-12x+4$; ***d)*** $x^6-3x^4+3x^2-1$; ***e)*** $64x^6+96x^4+48x^2+8$.

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

Solución: a) $a^2+2ab+b^2+2bc+2ac+c^2$ ***b)*** $a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 - 5/x)^2$
d) $(3a - b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

Solución: a) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$; ***b)*** $9x^2 + 2xy + y^2/9$; ***c)*** $25x^4 - 50x + 25/x^2$;
d) $9a^2 - 6ab + b^2$; ***e)*** $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$; ***f)*** $9y^2/25 - 12/5 + 4/y^2$.

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 - 6x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Solución: a) $(a^2+3)^2$; ***b)*** $(3x-1)^2$; ***c)*** $(b-5)^2$; ***d)*** $(2y+3)^2$; ***e)*** $(a^2-1)^2$; ***f)*** $(y^2+3)^2$.

16. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Solución: a) $16x^4 - 9y^2$; ***b)*** $4x^4 - 64$; ***c)*** $9x^2 - x^4$.

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4-x^2-x+7$ entre x^2+2x+4. b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$
c) $4x^5-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^3+x+3$ d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$
e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^3+1

Solución: a) Cociente: $2x^2 - 4x - 1$; resto: $17x + 11$; b) Cociente: -2; resto: $-4x^2 + x + 10$;
c) Cociente: $-2x^2 + 2$; resto: $12x^2 - 5x + 13$; d) Cociente: $-2x^2 + 3$; resto: $-3x^2 + 8$;
e) Cociente: $-6x^2$; resto: $7x^2 + 1$.

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-x-3$ como polinomio cociente y $r(x)=-3x^2-1$ como resto.

Solución abierta: Por ejemplo: Dividendo: $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 1$; Divisor: x^3.

19. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+x+1$ entre $x-1$ b) x^4+2x^3-2x+1 entre $x-2$
c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x+1$ d) x^3-9x+1 entre $x-3$

Solución: a) $-3x - 2$. Resto -1 b) $x^3 + 4x^2 + 8x + 14$. Resto 29.
c) $4x^2 - 7x + 7$. Resto -8. d) $x^2 + 3x - 6$. Resto; -17

20. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir x^3+2x^2+5x+7 entre $2x+3$.

Solución: El factor seria $x = -3/2$. El cociente quedaría: $x^2 - 1/2x + 23/4$. Resto -5

21. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3+7x^2+2x+4$ en $x=5$.

Solución: -186

22. Emplea la regla de *Ruffini* para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

Solución: a) No; b) Si; c) Si; d) Si

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$
c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

Solución: a) Las posibles raíces son: +1, –1, +2, –2. Siendo raíz +1.

b) Las posibles raíces son: +1, –1, +3, –3. Las raíces son: –1, –3.
c) Las posibles raíces son: +1, –1, +3, –3, +9, –9. Las raíces son: +3, –3.
d) Posibles raíces: +1, –1, +2, –2, +3, –3, +6, –6. Las raíces son: –2.

24. Comprueba que $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

Solución: $2\cdot(-\frac{1}{2})^3 + 3\cdot(-\frac{1}{2})^2 - 11\cdot(-\frac{1}{2}) - 6 = 2\cdot(-\frac{1}{8}) + 3\cdot(\frac{1}{4}) - 11\cdot(-\frac{1}{2}) - 6 = -\frac{2}{8} + \frac{3}{4} + \frac{11}{2} - 6 = 0$

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x - 5$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

Solución: a) Posibles raíces serían: +1, –1, +5, –5. No tiene ninguna raíz racional.
b) Posibles raíces serían: +1, –1, +2, –2. No tendría ninguna raíz racional.

26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?
b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

Solución: a) No; b) Si; c) Tienen las mismas raíces.

27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)^2$ que tiene 3 raíces distintas

28. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)^2$.

29. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

Solución abierta: Por ejemplo: $(x - 2)^4$.

30. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

Solución: Basta que a_0 sea igual a cero.

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ admite al número 1 como raíz.

Solución: Debe verificar que $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x + 5$ b) $-x + 3$ c) $7x - 5$ d) $-3x - 11$
e) $-7x$ f) $x^2 - 8x$ g) $4x^2 - x - 3$ h) $x^3 - 4x$ i) $x^3 + 25x$

Solución: a) $x = -5$ b) $x = 3$ c) $x = 5/7$ d) $x = -11/3$
e) $x = 0$ f) $x = 0$ y $x = 8$ g) $x = 1$ y $x = -3/4$ h) $x = 0$; $x = +2$ y $x = -2$
i) $x = 0$

33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

Solución: a) $\frac{x}{(x+1)\cdot(x-2)}$ ***b)*** $\frac{(x-1)}{(x-2)\cdot(x+4)}$ ***c)*** $\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x+3)}$

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$ c) $\frac{x^2 y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3 b - ab}$

Solución: a) $\frac{x(x+2)}{(x^2+5)}$ ***b)*** $\frac{(a-5)}{(7a+4)}$ ***c)*** $\frac{(x+3y)}{4}$ ***d)*** $\frac{2ab+3}{(a+1)\cdot(a-1)}$

35. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

Solución: ***a)*** $\frac{5(x+2)(x-2)+[-3(x+4)\cdot(x+2)]}{-3(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}$ ***b)*** $\frac{-4x^2+3x+1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$

36. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}$ c) $\frac{-x}{x^2+3x}\cdot\frac{1}{x-1}$ d) $\frac{x-2}{x^2+3x}:\frac{x-2}{x+3}$

Solución: ***a)*** $\frac{6x^2+2x+4}{x\cdot(x^2+1)}$ ***b)*** $\frac{4x-5}{(x-2)\cdot(x+1)}$ ***c)*** $\frac{-1}{(x+3)\cdot(x-1)}$ ***d) 1/x***

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3}-\frac{3x+2}{x^2}$ b) $\frac{x-2}{x^2+3x}-\frac{8}{x+3}$

Solución: ***a)*** $\frac{-4x^2-x-1}{x^3}$ ***b)*** $\frac{-7x-2}{x\cdot(x+3)}$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{2x+4}$ d) $\frac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\frac{3ab+4a-5}{b+8a}$

Solución: Son ciertas

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-4}{3x-2}=\frac{4}{7}$ b) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}$ c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=x+\frac{151}{12}$

Solución: ***a)*** $x = 6$ ***b)*** $x = 2$ ***c)*** $x = 3$

40. Resolver:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{9}=1$ b) $x^2/16 = 1 + (3/4)x/9$ c) $4x^4 + 8x^2 – 12 = 0$ d) $80x^4-48x^2-12=0$

Solución: ***a)*** $x = 0$ ***y*** $x = –150/34$ ***b)*** $x = 4.72…$, $x = -3.39…$ ***c)*** $x = +1$; $x = –1$ ***d)*** $x=\pm\sqrt{3}$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De que número se trata?

Solución: El número 12.

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metro. Trazar una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

Solución: 30 m y 24 m.

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

Solución: Coche: 12000 €. Finca: 48000 €. Piso: 240 000 €

44. Confecciona una hoja de cálculo que te permita resolver ecuaciones de segundo grado

Solución: Ver Ecuaciones y Sistemas.

45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \le 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \ge 5x + 7$

Solución: ***a)*** $x < –1$ ***b)*** $x\ge-\frac{3}{4}$ ***c)*** $x > –3$ ***d)*** $x \le -3$

46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

Solución: a) $x < -10/7$ ***b)*** $x \geq -\frac{1}{9}$ ***c)*** $x > -7/50$

47. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

Solución: a) $x < -1$ ***b)*** $x \geq 2$ ***c)*** $x < -1/7$ ***d)*** $x \geq 0$

48. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty)$ d) $(-\infty, 2)$

Solución abierta: Por ejemplo: a) $x \geq 2$; ***b)*** $x < 3$; ***c)*** $x > 4$; ***d)*** $x < 2$.

Otro ejemplo: a) $x - 2 \geq |2 - x|$; ***b)*** $x^3 - 27 < 0$; ***c)*** $x - 4 > x^2 + 2x + 2$; ***d)*** $x^3 < 2x + 4$.

49. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

Solución: a) $x \geq 3/2$ ***b)*** $x \leq -9$ ***c)*** $x \leq 2/7$ ***d)*** $x \leq 7/2$

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$

e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

Solución: a) $x \geq \pm 1$ ***b)*** $x \leq \pm 2$ ***c)*** $x > \pm 3$ ***d) No tiene solución real.***

e) $x < \pm 5$ ***f) No tiene solución real*** ***g)*** $x > \pm 3$ ***h) No tiene solución real.***

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$

d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

Solución: a) $x \leq 0; x \leq -1$ ***b)*** $x > 0; x > 5$ ***c)*** $x \leq 0; x \leq 8$ ***d)*** $x \leq 0; x \leq 3$ ***e)*** $x \geq 0; x \geq 3/2$ ***f)*** $x < 0 ; x < 1$

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$ f) $x^2 + 8x + 16 > 0$ g) $x^2 + x + 3 \geq 0$ h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

Solución: a) $[-1, 3]$ ***b)*** $[-4, 2]$ ***c)*** $[-7, -2]$ ***d)*** $x = 3$

e) Sin solución. ***f)*** $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$ ***g) Sin solución*** ***h)*** $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$

53. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$ *b)* $x^2 - x - 12 \leq 0$ *c)* $x^2 - x - 20 < 0$ *d)* $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$ *f)* $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$ *g)* $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$ *h)* $2x^2 + x - 15 < 0$

Solución: a) $x < -3$ ***o*** $x > 2$; ***b)*** $x \leq -3$ ***o*** $x \geq 4$; ***c)*** $(-4, 5)$; ***d)*** $x \leq -7$ ***o*** $x \geq 2$;

e) $(-1/2, 2)$; ***f)*** $[-1, 1/3]$; ***g)*** $x \leq -3/5$ ***o*** $x \geq 2$; ***h)*** $x < -3$ ***o*** $x > 5/2$.

54. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2-1}$ b) $\sqrt{-x^2+4}$ c) $\sqrt{x^2+5x+6}$ d) $\sqrt{x^2-5x+6}$

Solución: a) $x \geq 1, x \geq -1$ ***b)*** $x \geq -2, x \geq 2$ ***c)*** $x \leq -3, x \geq -3, x \leq -2, x \geq -3$ ***d)*** $x \leq 2, x \geq 3$

55. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}$

Solución: a) $x \leq 3, x \leq -3$ ***b)*** $7x^2 - 14x - 55 \geq 0$, $x \leq -1.98\ldots$ ***o*** $x \geq 23.98\ldots$; ***c)*** $x^2 + 2x - 6 \leq 0$, $(-3.65\ldots, 1.65\ldots)$

56. Confecciona una hoja de cálculo que te permita resolver sistemas de dos ecuaciones.

Solución: *Ver* [***Ecuaciones y Sistemas***]*.*

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

57. Resolver por el método de *Gauss* los sistemas:

$$\text{a)}\begin{cases}4x+2y-z=5\\5x-3y+z=3\\2x-y+z=3\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x+y+z=0\\7x+2y-z=0\\3x+5y+4z=0\end{cases}$$

Solución: a) $x = 16/15$; $y = 8/5$; $z = 37/15$; ***b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.***

58. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases}x+2y-z=1\\2x+y-2z=2\\x-y-z=1\end{cases}$$

Solución: Compatible indeterminado: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$.

59. Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas lineales de ecuaciones.

$$\text{a)}\begin{cases}x-6y-4z=-7\\x+8y+4z=6\\x+y=1\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}x+y-6z-4t=6\\3x+2y-3z+8t=-7\\3x-y-6z-4t=2\\4x-y+3z+12t=0\end{cases}$$

Solución: a) Incompatible; ***b) Incompatible.***

60. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

Solución: 1 kg de café natural cuesta 16/3 euros, 1 kg de café torrefacto cuesta 14/3 euros.

61. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

Solución: La madre tiene 30 años, el hijo mayor 10 años y el menor, 5 años.

62. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300 000 €. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

Solución: El coche vale 12 000 €, el piso 240 000 €, y la finca vale 48 000 €.

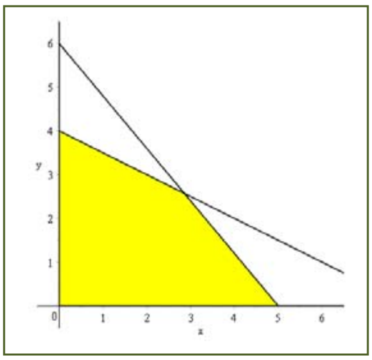
63. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

Solución: 963.

64. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases}x\ge 0\\y\ge 0\\6x+5y\le 30\\x+2y\le 8\end{cases}$$

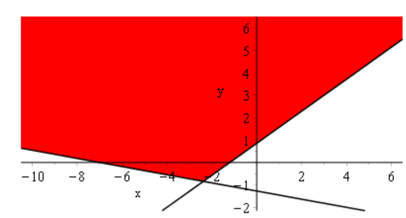
Solución:



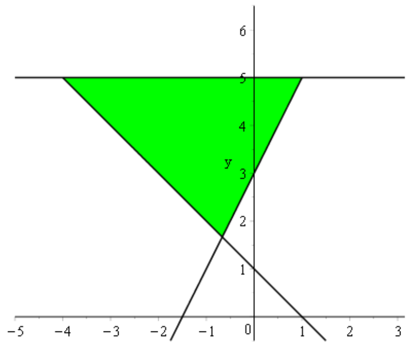
65. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{x-2y+3}{3} \geq \dfrac{x-y+1}{2} \\ 1-\dfrac{2x-4-y}{3}+\dfrac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+1)\cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x)-6x \end{cases}$

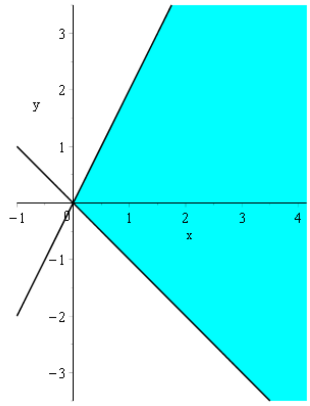
Solución:



a)



b)



d)

d) 4 ≤ x < 7.

4. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

66. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5 % anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?
b. ¿Cuánto costaba hace 4 años?
c. ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?

Solución: a) 21.88 €; b) 14.81 €; c) 14.21 años.

67. Calcula el tiempo que debe de estar colocado un capital de 4500 € en una cuenta corriente al 2 % de interés compuesto anual para que el capital se duplique

Solución: 35 años.

68. Calcula el tiempo necesario para que un capital impuesto a interés compuesto al 3 % anual se duplique. ¿Y para que se triplique?

Solución: Se duplica a los 23.45 años; se triplica a los 37.17 años.

69. ¿Durante cuánto tiempo hemos de abonar mensualidades de 60 € al 4 % anual para conseguir capitalizar 6 500 €?

Solución: Al abonar la mensualidad número 93 se superaron los 6 500 €.

70. El abuelo de Luis, al nacer éste, decidió ingresar en un banco un capital de 3 600 € a interés compuesto anual del 3 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

Solución: a) 7537.60 €; b) 7578.87 €.

71. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 €.La capitalización es mensual al 3% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4años?

Solución: 3063.51 €.

72. Una persona compra un piso en 90 000 €. A la firma del contrato entrega 18 000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra el 2 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

Solución: 364.24 €.

73. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 3 %, cada anualidad de amortización asciende a 16 200 €. ¿Cuánto costó el camión?

Solución: 172286.28 €.

74. Confecciona una hoja de cálculo que te permita resolver problemas de interés compuesto, capitalización y amortización.

***Solución:** Ver la hoja [Interés compuesto](#).*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Polinomios:

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

 a) $\frac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ b) $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$ c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

***Solución:** a) Para x = –3 y x=8 no pueden ser evaluadas; b) En x = 2 y x = 3 no pueden ser evaluadas. c) Puede ser evaluada para cualquier valor de x; d) Puede ser evaluada para cualquier valor de x e y excepto para x = 0 y para y = 0.*

2. Calcular cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea –2 para $x = 0$.

$$\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$$

***Solución:** Para cualquier valor de m, ya que si x = 0, la expresión siempre vale –2.*

3. Consideremos los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x)=2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x)=3x^2+5x-7$. Realiza las siguientes operaciones:

 a) $p+q+r$ b) $p-q$ c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$

***Solución:** a) $2x^4 + x^2 + 5x - 5$; b) $-2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 10x - 10$; c) $-9x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 51x^2 + 15x + 28$; d) $-9x^5 - 11x^4 + 13x^3 - 47x^2 + 10x + 22$.*

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

 a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ entre $3x^2+2x-5$

 b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ entre x^3+3x+5

***Solución:** a) $C(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}$; R(x) = (–13/9)x – 41/9; b) $C(x)=6x^2-7x+-10$;R(x) = $60x^2 - 15x - 55$..*

5. Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

 a) $\frac{x^5+7x^4-13x^3+5x^2-17x+5}{x-3}$ b) $\frac{x^5+x^4-3x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$ c) $\frac{9x^5+7x^4-3x^3+5x^2-17x-1}{x-1}$

***Solución:** Se utiliza el teorema del resto;*
a) p(3) = 458; No es exacta; b) p(2) = 32; No es exacta; c) Si es exacta, p(1) = 0.

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

***Solución abierta:** Por ejemplo: $(x - 4)(x + 1) = x^2 - 3x - 4$.*

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

***Solución abierta:** Por ejemplo: $(x - 4)(x + 1)$ y $(x - 4)^2(x + 1)^2$, o por ejemplo: $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$ el de grado dos y $x^3 - 5x^2 + 6x$ otro de grado 3.*

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

***Solución abierta:** Por ejemplo: $(x - 2)^2(x - 3)^2$ o $(x - 4)^2(x + 1)^2$, o $(x - 4)(x + 1)(x^2 + 1)$, o $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$.*

9. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^6+x^4+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=5x^4+5x^2+1$.

***Solución abierta:** Por ejemplo: $x^5 - 4x^3 - 4x + 1$*

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

 a) $4x^3+11x^2+6x-3$ b) $3x^3-2x^2+6x-3$ c) $3x^3-4x^2+2x-1$ d) $2x^3+x^2-6x-3$

Solución: a) No tiene raíces enteras o racionales b) No tiene raíces enteras o racionales c) x = 1; d) x = –1/2

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x+3$ b) $5x^3+5x^2+x-1$ c) $2x^3+x^2+6x-3$ d) $3x^3-6x^2+x-2$

Solución: a) Polinomio irreducible. b) Polinomio irreducible; c) Polinomio irreducible; d) (x – 2)·(3x² + 1).

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{4x}{x^2-6x+9}$ b) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x^2}{x^2-6x+9}$ c) $\frac{x+2}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}$ d) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}$

Solución: a) $\frac{-3x^2-4x+3}{(x-3)^2\cdot x}$ ***b)*** $\frac{x^2-4x+3}{(x-3)^2\cdot x}$ ***c)*** $\frac{2\cdot(x+2)}{(x-3)^3}$ ***d)*** $\frac{x^2-4x+3}{2x^2}$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) x^2-6x+9 b) x^4+8x^2+16 c) $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$ d) $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ f) x^2-36 g) $5x^2+1$ h) $5x^2-11$ i) x^4-3y^2

Solución: a) (x – 3)²; b) (x² + 4)²; c) (x + √5 y)²; d) No;

e) No; f) (x + 6)(x – 6); g) No; h) (√5 x + √11)(√5 x – √11); i) (x2 + √3 y)(x2 – √3 y)

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)}+\frac{6}{2(5-x)}$ b) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

Solución: a) $\frac{-6x^2+26x+20}{2x\cdot(5-x)^2}$ ***b)*** $\frac{x^3+y^2\cdot x+y\cdot x^2+y^3}{x^3-x\cdot y^2-y\cdot x^2+y^3}$ ***c)*** $\frac{1}{(2x-1)}$

15. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^3+\frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x-a}:\frac{x+a}{x-a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a-b}$

Solución: a) $\frac{x^6-1}{x^4+x}$ ***b)*** $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{(x+a)}$ ***c)*** $\frac{4}{(a+b)}$

16. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a-y}}$ b) $\left(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

Solución: a) $\frac{(x+y)(y+a)(x-y+a)}{(x-y)(y-a)(x+y+a)}$***;*** ***b)*** $\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^2-3x-2}$***;*** ***c)*** $\frac{(2x+3y)(2y-x)}{(3x+y)(5x+3y)}$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

17. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{3x-1}{2x-4}=\frac{5}{9}$ b) $\frac{x}{2}+5=\frac{3x}{6}-7$ c) $\frac{5}{x+1}=\frac{5x}{x-1}-2$

Solución: a) x = 38/10 b) Sin solución c) Sin solución

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son:

a) $\frac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x$ b) $x^4+8x^2-12=0$ c) $80x^4-48x^2+7=0$ d) $\frac{x^2}{16}+\frac{(x+5)^2}{25}=1$

Solución: a) 2 soluciones: –0.2965 y +2.6615 b) Dos soluciones: x = +1.13; x = –1.13

c) 4 soluciones: $x=\pm\frac{1}{2}; x=\pm\sqrt{\frac{7}{20}}$ ***d) Dos soluciones: x = 0 y x = –160/41***

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:

a) Escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras.
b) Calcula la hipotenusa y los catetos.

Solución: a) Llamamos x a la longitud del cateto menor, $(x+3)^2 = x^2 + (x+1)^2$;

b) Cateto menor = $2 + 2\sqrt{3}$, cateto mayor = $3 + 2\sqrt{3}$; hipotenusa = $5 + 2\sqrt{3}$.

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

Solución: Ha ganado 14 partidas y perdido 8.

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

Solución: Aristas 9 y 10 cm; Cubitos: 800.

22. Las tres cifras de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

Solución: 987.

23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

Solución: 42, 41, 17 y 15 años.

24. Resuelve:

a) $\frac{x}{3} - 9 < 2$; b) $\frac{5x}{7} - 7 \le -5x$; c) $4(2x-3) > 1 - 7x$; d) $\frac{3(x+4)}{5} < 2x$; e) $\frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6}$; f) $\frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$

Solución: a) x < 33 b) $x \le \frac{49}{40}$ ***c) x > 13/15 d) x > 12/7 e) x > –8/5 f) x < –1/13***

25. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$ c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$

Solución: a) $x \ge 2$ ***b)*** $x \le 3$ ***c)*** $x \le 5$ ***d)*** $x \ge -4$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \le 0$ c) $-x^2 + 49 \ge 0$ d) $5x^2 - 45 \ge 0$
e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$ g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \le 0$

Solución: a) –2 < x < 2 b) $-5 \le x \le 5$ ***c)*** $-7 \le x \le 7$ ***d)*** $-3 \le x \le 3$

e) –1/3 < x < 1/3 f) –3/4 < x < 374 g) –6/7 < x < 6/7 h) No tiene solución.

27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-2x^2 + 50x \le 0$ b) $7x^2 + 3x \ge 0$ c) $2x^2 < 8x$
d) $-2x^2 - 24x \ge 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \ge 0$

Solución: a) $0 \le x \le 25$ ***b)*** $-3/7 \le x \le 0$ ***c) 0 < x < 4***

d) $-12 \le x \le 0$ ***e) –2 < x < 0 f)*** $x \ge 0; x \le -6$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 \le 0$ b) $7x^2 > 0$ c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \ge 0$

Solución: a) $x \le 0$ ***b) x > 0 c) Sin solución. d)*** $x \ge 0$

29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$
d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

Solución: a) $-1 \le x \le \frac{3}{2}$ ***b)*** $x \ge -1$ ***c)*** $x \ge 1$

d) Para cualquier valor de x e) $x \ge 6$ ***f)*** $-6 \le x \le 3$

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de *Gauss* y discute el resultado:

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

Solución: a) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1;
b) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1; t = 1;
c) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 2;
d) Sistema compatible y determinado: x = 5/9, y = 11/3, z = 31/3;
e) Sistema compatible y determinado: x = 0, y = 0, z = 1;
f) Sistema compatible y determinado: x = 1, y = 1, z = 1, t = 1.

31. Utiliza la hoja de cálculo Sistemas y ecuaciones para comprobar los ejercicios de ecuaciones de segundo grado, inecuaciones sistemas e inecuaciones.

Solución manipulativa y abierta

Problemas de Matemáticas Financieras

32. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 100 €. La capitalización es mensual al 5 % anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?

Solución: 5323.58 €.

33. La abuela de María, al nacer ésta, decidió ingresar en un banco un capital de 6 000 € a interés compuesto anual del 7.5%. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?

Solución: a) 36 590.04 €; b) 37 805.63 €.

34. Tasa Anual Equivalente (T.A.E.). Si colocamos 600 € al 8 % anual con capitalización trimestral, en un año, ¿qué montante genera? A que tanto por ciento debemos colocar el mismo capital para generar el mismo montante si la capitalización es anual.

Solución: a) 649.46 €; b) 8.24 €.

35. Calcula el T.A.E. en los siguientes casos:
    a) Partiendo del montante que se genera en el problema anterior, cuando los intereses se devengan mensualmente al 3% anual.
    b) Los intereses se devengan trimestralmente al 4 % anual.
    c) Los intereses se devengan diariamente al 5 % anual.
    d) Encuentra la fórmula general para calcular el T.A.E.

Solución: a) El montante no influye: 3.04 % TAE; b) 4.06 % TAE; c) 5.17 % TAE;

d) $100\cdot\left[\left(1+\frac{i}{100n}\right)^n-1\right]$ ***donde i es el interés anual en tanto por ciento, y n el número de veces en las que, durante un año, y de forma regular, se devengan intereses.***

36. Una persona compra un piso por 150 000 €. A la firma del contrato entrega 30 000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra un 9 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?

Solución: 1 079.67 €.

37. Tu hermana se ha comprado una moto cuyo valor es de 18 000 €. La va a pagar mediante cuotas trimestrales de 75 € al 6 % anual. ¿Cuántos años tardará en pagar la moto?

Solución: Con esa cuota trimestral y ese interés, nunca la pagará.

38. Al comienzo de cada uno de 4 años consecutivos depositamos en una libreta de ahorro 2000 €. Al comenzar el quinto año, sacamos 6000 € de la libreta. ¿Qué cantidad de dinero queda en la libreta si sabemos que los intereses son compuestos al 4.5 % anual?

Solución: 2 941.42 €.

39. ¿A qué tanto por ciento anual debe prestarse un capital puesto a interés compuesto para que en 20 años se duplique? ¿Y para que se duplique en 10 años?

Solución: a) 3.53 %; b) 7.18 %.

40. ¿Cuál es la cuota mensual de amortización de un préstamo hipotecario de 54 000 € a 15 años al 5 % anual? ¿Qué cantidad de dinero pagamos durante los 15 años?

Solución: a) 427.03 €; b) 76 865.40 €.

41. Utiliza la hoja de cálculo Interés compuesto para comprobar los ejercicios de interés compuesto, capitalización, amortización…

Solución manipulativa y abierta

AUTOEVALUACIÓN

1. Completa adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado *igual o menor a dos*
   b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado *igual o menor a dos*
   c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado *cuatro*
   d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado *igual o menor a dos*

Solución:

2. Considera el polinomio $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. ¿Cuál de los siguientes números enteros es un candidato *razonable* para ser una raíz suya?
   a) 3 b) 2 c) –11 d) –7

Solución: a)

3. La desigualdad $2 < x < 7$ se verifica para los valores:
   a) 2, 3 y 6 b) 3, 4.7 y 6 c) 3, 5.2 y 7 d) 4, 5 y 8

Solución: b)

4. La solución de la inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ es:
   a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10.2$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$

Solución: b)

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?
   a) $\begin{cases} x+y>40 \\ y-x\le 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\ge 40 \\ y-x<8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y>40 \\ x-y<8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y<40 \\ x-y\le 8 \end{cases}$

Solución: a)

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm; b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4 cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm

Solución: a)

7. Una inecuación cuya solución sea el intervalo (–∞, –5) es:
   a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$

Solución: d)

8. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:
   a) (1, 2) b) (–∞, 1) c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

Solución: a)

9. ¿Cuál es la solución del siguiente sistema de ecuaciones?: $\begin{cases} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{cases}$
   a) $x = 5\ \ y = 0\ z = -2$ b) $x = 5\ y = 0\ z = 1$ c) $x = -2\ y = 0\ z = 5$ d) $x = 0\ y = -z = -2$

Solución: a)

10. En el mercado de ocasión del coche usado nos venden un coche por 3000 €. La empresa tiene una entidad financiera que cobra un 8 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?
    a) 135.682 € b) 136.482 € c) 135.383 € d) 136.3853 €

Solución: a)

CAPÍTULO 3: FUNCIONES

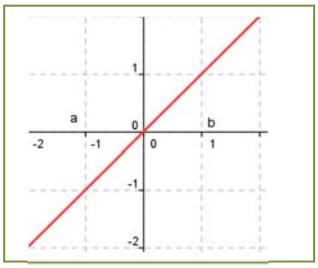
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TIPOS DE FUNCIONES

1. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

Solución:

x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*



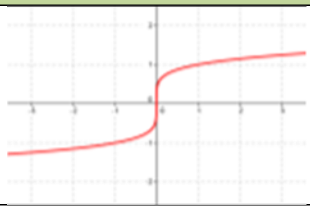
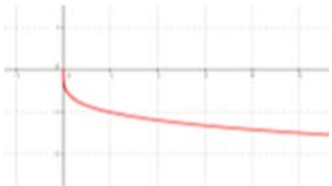
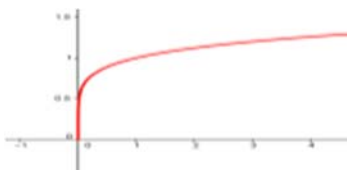
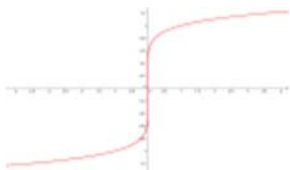
2. Calcula las imágenes de los números $-3; \frac{-1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$ por la función: $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

***Solución:** $f(-3) = -18$; $f(-1/2) = -4.25$; $f(0.1) = -2.81$; $f(\sqrt{2}) = -2.17157288$; $f(3/2) = -2.25$; $f(10) = -83$.*

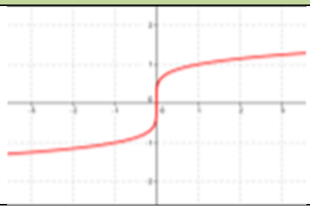
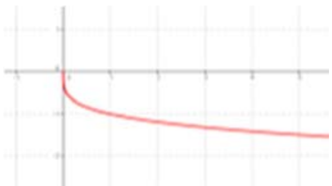
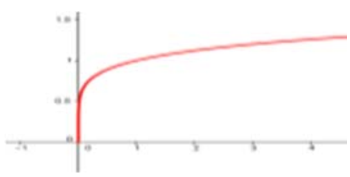
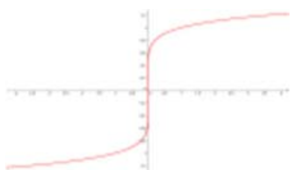
3. Utiliza la recta anterior ($y = 3.5x + 42$) para obtener el porcentaje de curaciones esperado para una dosis de 7.3 mg.

***Solución:** 67.55 %.*

4. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

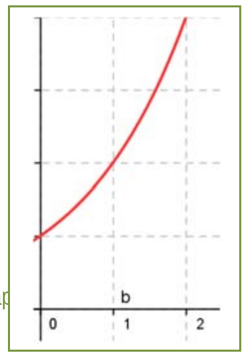
Solución:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
		*X*		*X*	
	*X*				*X*

5. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.

***Solución:** $y = 2^x$.*

Horas transcurridas (x)	**Número de bacterias (y)**
0	1
1	2

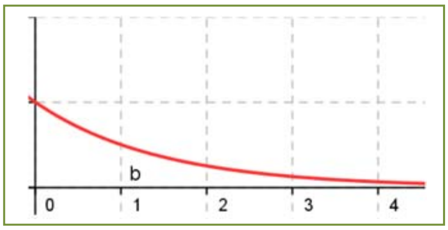


2 3 4 …	4 8 16 …

6. Vuelve a repetir otra vez el ejercicio anterior suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.

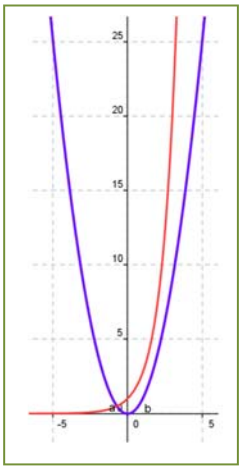
Solución: $y = (1/2)^x$.

Horas transcurridas (x)	Número de bacterias (y)
0 1 2 3 4 …	1 1/2 1/4 1/8 1/16 …



7. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

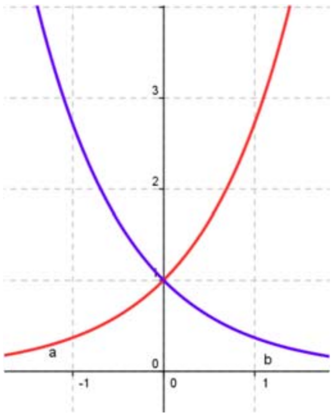
Solución:



8. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

Solución:

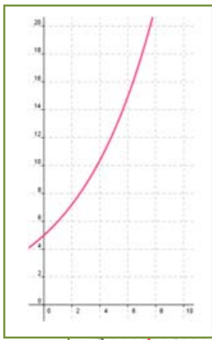
	–2	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
$y = e^x$	*0.135*	*0.368*	*1*	*2.718*	*7.389*	*20.086*
$y = e^{-x}$	*7.389*	*2.718*	*1*	*0.368*	*0.135*	*0.0498*



9. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Solución: b) $C = 5\,000(1.2)^n$



Años:	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***10***
Capital:	***6 000***	***7 200***	***8 640***	***10 368***	***12 441***	***14 930***

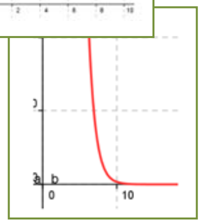
c) En el eje de abscisas las unidades son los años.
En el eje de ordenadas, el capital en miles de euros

10. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

(a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").

(b) Representa gráficamente estos datos.

Solución: $y = 10*3^{9-x}$.



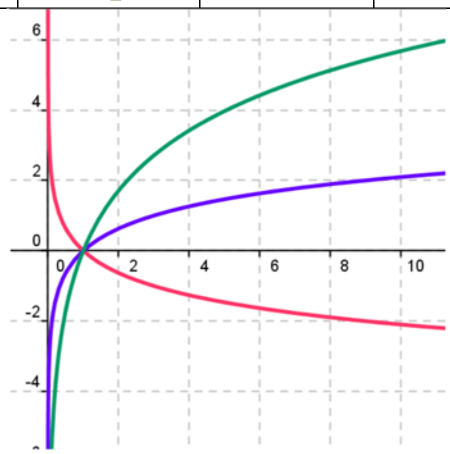
x (hora)	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***
y (millones de bacterias)	***$10*3^6$***	***$10*3^5$***	***$10*3^4$***	***$10*3^3$***	***$10*3^2$***	***10*3***	***10***	***10/3***	***10/9***	***10/27***

11. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = log_3\, x$ b) $f(x) = log_{1/3}\, x$ c) $f(x) = log_{1,5}\, x$

Solución:

x	***1/3***	***2/3***	***1***	***3/2***	***3***	***4***
$y = log_3(x)$	***–1***	***–0.37***	***0***	***0.37***	***1***	***1.26***
$y = log_{1/3}(x)$	***1***	***0.37***	***0***	***–0.37***	***–1***	***–1.26***
$y = log_{1.5}(x)$	***–2.71***	***–1***	***0***	***1***	***2.71***	***3.42***

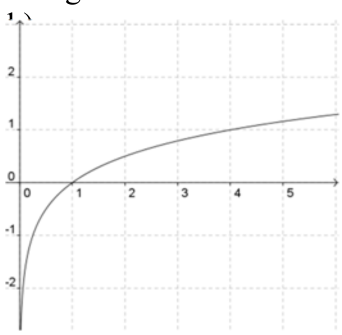


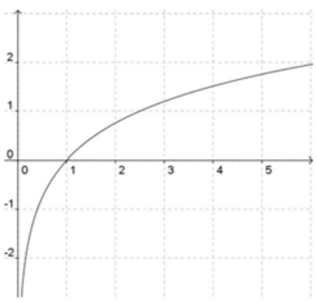
12. Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (a, 1) y (1/a, –1), donde a es la base.

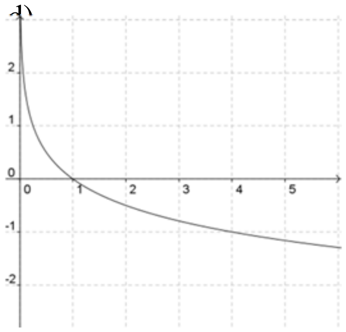
Solución: En efecto todas las gráficas pasan por (1, 0); $y = log_3(x)$ pasa por (3, 1) y (1/3, –1);
$y = log_{1/3}(x)$ pasa por (1/3, 1) y (3, –1); $y = log_{3/2}(x)$ pasa por (3/2, 1) y (2/3, –1).

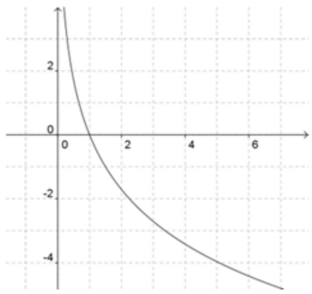
13. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

a)

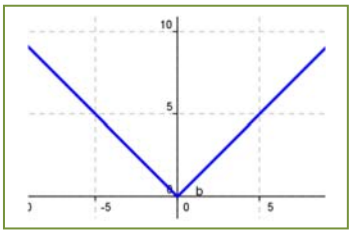




c) 



***Solución:** a) $y = \log_4(x)$; b) $y = \log_2(x)$; c) $y = \log_{1/4}(x)$; d) $y = \log_{1/2}(x)$.*



14. Representa gráficamente la función valor absoluto.

Solución:

15. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x < -4 \\ -x + 2 & si \;\; -4 \le x < 0 \\ 5 & si \;\; 0 \le x \end{cases}$ Puntos: $-6; -4; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 1;\ \frac{3}{2};\ 4$

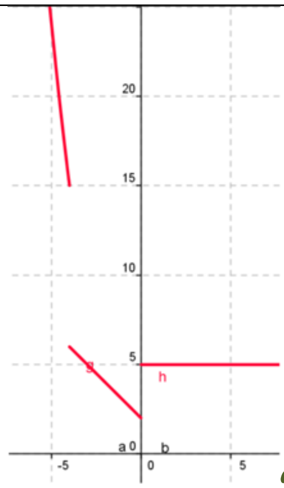
b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \;\; x < -3 \\ x & si \;\; -3 \le x < 2 \\ \sqrt{x} & si \;\; 2 \le x \end{cases}$ Puntos: $-5; -3; -\frac{1}{2}; -0'2;\ 0;\ 2;\ \frac{9}{4};\ 4$

***Solución:** a)*

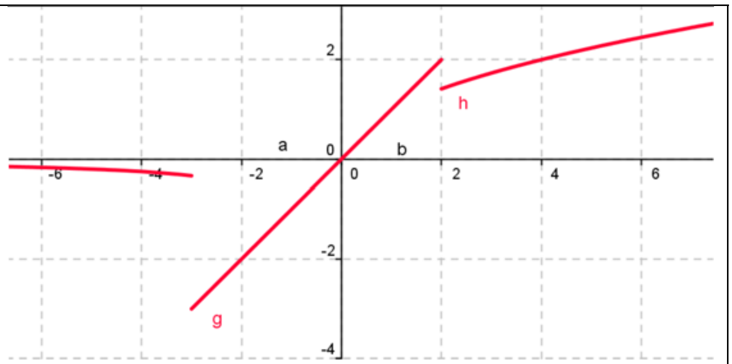
x	*–6*	*–4*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	*1*	*3/2*	*4*
y	*35*	*6*	*5/2*	*2.2*	*5*	*5*	*5*	*5*

b)

x	*–5*	*–3*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	*2*	*9/4*	*4*
y	*–1/5*	*–3*	*–1/2*	*–0.2*	*0*	$\sqrt{2}$	*3/2*	*2*



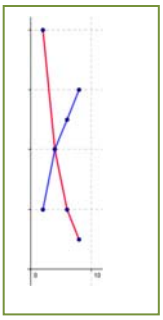
a)



b)

16. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

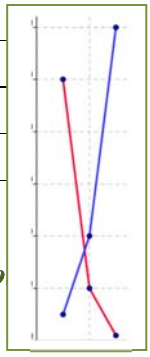


Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

Solución:

17. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m^2, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1500	1000	
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	



a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio

Solución: b) (900, 180), a un precio de unos 900 euros, una cantidad de 180 piso

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

18. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \;;\; q(x) = 2x^2 - x + 7 \;;\; r(x) = -x^3 + 6 \;;\; s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x) = \frac{-3}{x} \;;\; h(x) = \frac{x+1}{x^2} \;;\; j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \;;\; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \;;\; n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \;;\; b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \;;\; c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \;;\; d(x) = \log\left(x^3-1\right)$$

Solución:

a)	$(p+q)(x) = 2x^2 - 6x + 10$	*b)*	$(q+r)(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 13$
c)	$(q+r+s)(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 13$	*d)*	$(s-q)(x) = x^2 - 7$
e)	$(q-r)(x) = x^3 + 2x^2 - x + 13$	*f)*	$(r-p)(x) = -x^3 + 5x + 3$
g)	$(f+p)(x) = (2x-4)/(x+3) - 5x + 3$	*h)*	$(j-f)(x) = (-x^2/(x^2-4)) - ((2x-4)/(x+3))$
i)	$(g+k)(x) = -3/x + e^{x-4}$	*j)*	$(m-a)(x) = (2/3)^x - L(x-2)$
k)	$(b+d)(x) = \log((x^3-1)(x-1)/3)$	*l)*	$(r+m)(x) = -x^3 + 6 + (2/3)^x$
m)	$(p\cdot q)(x) = -10x^3 + x^2 - 32x + 2$	*n)*	$(q\cdot r)(x) = -2x^5 + x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 6x + 42$
o)	$(q\cdot r : s)(x) = (2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6)/(3x^2 - x)$	*p)*	$(p : q)(x) = (-5x + 3)/(2x^2 - x + 7)$
q)	$(f\cdot p)(x) = (2x-4)/((x+3)(-5x+3))$	*r)*	$(j\cdot f)(x) = -2x^2/(x^2 - x - 6)$
s)	$(g : k)(x) = -3/(x\, e^{x-4})$	*t)*	$(a\cdot b)(x) = L(x-2)\cdot\log((x-1)/3))$
u)	$(p\circ q)(x) = -10x^2 + 10x - 32$	*v)*	$(a\circ b)(x) = L(\log((x-1)/3 - 2))$
w)	$(r\circ s)(x) = -(3x^2 - x)^3 + 6$	*x)*	$(f\circ p)(x) = (-10x + 2)/(-5x + 6)$
y)	$(j\circ f)(x) = (-(2x-4)^2)/((2x-4)^2 - 4)(x + 3))$	*z)*	$(g\circ k)(x) = -3/e^{x-4}$

19. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

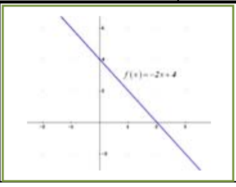
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3 - 1)$$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) $p(x)$	$y = (3 - x)/5$	*b)* $q(x)$	*No existe*
c) $r(x)$	$y = \sqrt[3]{6 - x}$	*d)* $s(x)$	*No existe*
e) $f(x)$	$y = (3x + 4)/(2 - x)$	*f)* $g(x)$	$y = -3/x$
g) $h(x)$	*No existe*	*h)* $j(x)$	*No existe*
i) $k(x)$	$y = 4 + \ln(x)$	*j)* $l(x)$	$y = 1/\log_2(x)$
k) $m(x)$	$y = \log_{(2/3)}(x)$	*l)* $n(x)$	$y = \ln(x)/(\ln(x) - 1)$
m) $a(x)$	$y = 2 + e^x$	*n)* $b(x)$	$y = 1 + 3 \cdot 10^x$
o) $c(x)$	*No existe*	*p)* $d(x)$	$y = \sqrt[3]{1 + 10^x}$

20. Calcula la función inversa de:



Solución: $y = -x/2 + 2$.

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

21. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-3}$		b) $j(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x)=\sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		d) $k(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e) $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$		f) $l(x)=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$		h) $m(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$	

Solución:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-3}$	$\{x\in\Re;\ x\neq\pm\sqrt{3}\}$	b) $j(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-3$ o bien $x>3\}$
c) $g(x)=\sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$	$\{x\in\Re;\ x<-2/3$ o bien $x>3\}$	d) $k(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-4}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 2,\ x\neq -2\}$
e) $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1\}$	f) $l(x)=\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	$\{x\in\Re;\ x>-2$ y además $x<3\}$
g) $i(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1,\ x\neq -1\}$	h) $m(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$	$\{x\in\Re;\ x\neq 1\}$

22. Estudia la simetría del resto de las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante.

Solución: Las funciones tangente, cotangente y cosecante son impares. La función secante es par.

23. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \quad ; \quad q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \quad ; \quad r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \quad ; \quad s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x)=\frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \quad ; \quad l(x)=2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x)=L(x+2) \quad ; \quad b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$	$\Re$	b) $q(x)$	$\Re$
c) $r(x)$	$\{x\in\Re;\ x<-1\}$	d) $s(x)$	$\Re$
e) $f(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq -3\}$	f) $g(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq 0\}$
g) $h(x)$	$\Re$	h) $j(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq -2$ y $x\neq 2\}$
i) $k(x)$	$\Re$	j) $l(x)$	$\Re$
k) $m(x)$	$\Re$	l) $n(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq -1$ y $x\neq 1\}$
m) $a(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	n) $b(x)$	$\{x\in\Re;\ x\neq 0\}$
o) $c(x)$	$\{x\in\Re;\ x>-2\}$	p) $d(x)$	$\{x\in\Re;\ x>\sqrt[3]{5}\}$

24. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x} \;;\; f(x)=\frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4} \;;\; k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}} \;;\; a(x)=L(x+2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abscisas		Ordenadas	Abscisas
a) $p(x)$	*(0, 3)*	*(3/5, 0)*	b) $q(x)$	*(0, $\sqrt{7}$)*	*Ninguno*
c) $r(x)$	*Ninguno*	*(–1, 0)*	d) $s(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0), (1/3, 0)*
e) $f(x)$	*(0, –4/3)*	*(2, 0)*	f) $g(x)$	*Ninguno*	*Ninguno*
g) $h(x)$	*(0, 1)*	*(–1, 0)*	h) $j(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0), (2, 0)*
i) $k(x)$	*(0, 1/e^4)*	*Ninguno*	j) $l(x)$	*(0, 0)*	*(0, 0)*
k) $m(x)$	*(0, 2/3)*	*Ninguno*	l) $n(x)$	*(0, 1)*	*(–1, 0), (1, 0)*
m) $a(x)$	*(0, L(2))*	*(–1, 0)*	n) $b(x)$	*Ninguno)*	*(–2, 0), (2, 0)*
o) $c(x)$	*(0, log (1/ 4))*	*(–1, 0)*	p) $d(x)$	*Ninguno)*	*($\sqrt[3]{5}$, 0)*

25. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$$f(x)=2^{x-24}\cdot 4^{3x+1}\cdot 8^{-x-1}-1 \qquad h(x)=x^3+4x \qquad k(x)=e^{-2x}-22$$

$$g(x)=-7x^4-x^2+1 \qquad j(x)=\sqrt{15x-3\sqrt{-x-9}} \qquad l(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

***Solución:** f(x) no es simétrica. No corta al eje de abscisas. Corta al eje de ordenadas en (0, 25/4);*

g(x) es una función par; Corta al eje de abscisas aproximadamente en (-0.47, 0) y (0.3, 0), y al eje de ordenadas en (0, 1)

h(x) es impar, Puntos de intersección: (0, 0),

j(x) no es simétrica. No corta a los ejes.

k(x) no es simétrica. Puntos de intersección: (0, -21), (-ln(22)/2, 0);

l(x) es impar. No corta a los ejes.

26. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \;;\; q(x)=\sqrt{2x^2-x+7} \;;\; r(x)=\sqrt[4]{-x^3-1} \;;\; s(x)=\sqrt[3]{3x^2-x}$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \;;\; g(x)=\frac{-3}{x} \;;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2+1} \;;\; j(x)=\frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \;;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \;;\; n(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

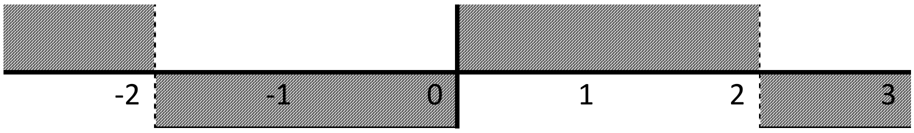
$$a(x)=L(x+2) \;;\; b(x)=\log\left(\frac{x^2}{4}\right) \;;\; c(x)=L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \;;\; d(x)=\log\left(x^3-5\right)$$

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$	*x < 3/5*	*x > 3/5*	b) $q(x)$	$\Re$	-----
c) $r(x)$	*x < –1*	-----	d) $s(x)$	*x < 0 y x > 1/3*	*0 < x < 1/3*
e) $f(x)$	*x > 2*	*x < 2*	f) $g(x)$	*x < 0*	*x > 0*
g) $h(x)$	*x > –1*	*x < –1*	h) $j(x)$	*–2 < x < 0*	*x < –2 y x > 0*
i) $k(x)$	$\Re$	-----	j) $l(x)$	$\Re$	-----
k) $m(x)$	$\Re$	-----	l) $n(x)$	$\Re$	-----
m) $a(x)$	*x > –1*	*–2 < x < –1*	n) $b(x)$	*x < –2 o x > 2*	*–2 < x < 2*
o) $c(x)$	*x < –1 y x > 3*	*–1 < x < 3*	p) $d(x)$	*x >* $\sqrt[3]{5}$	*log(5) < x <* $\sqrt[3]{5}$

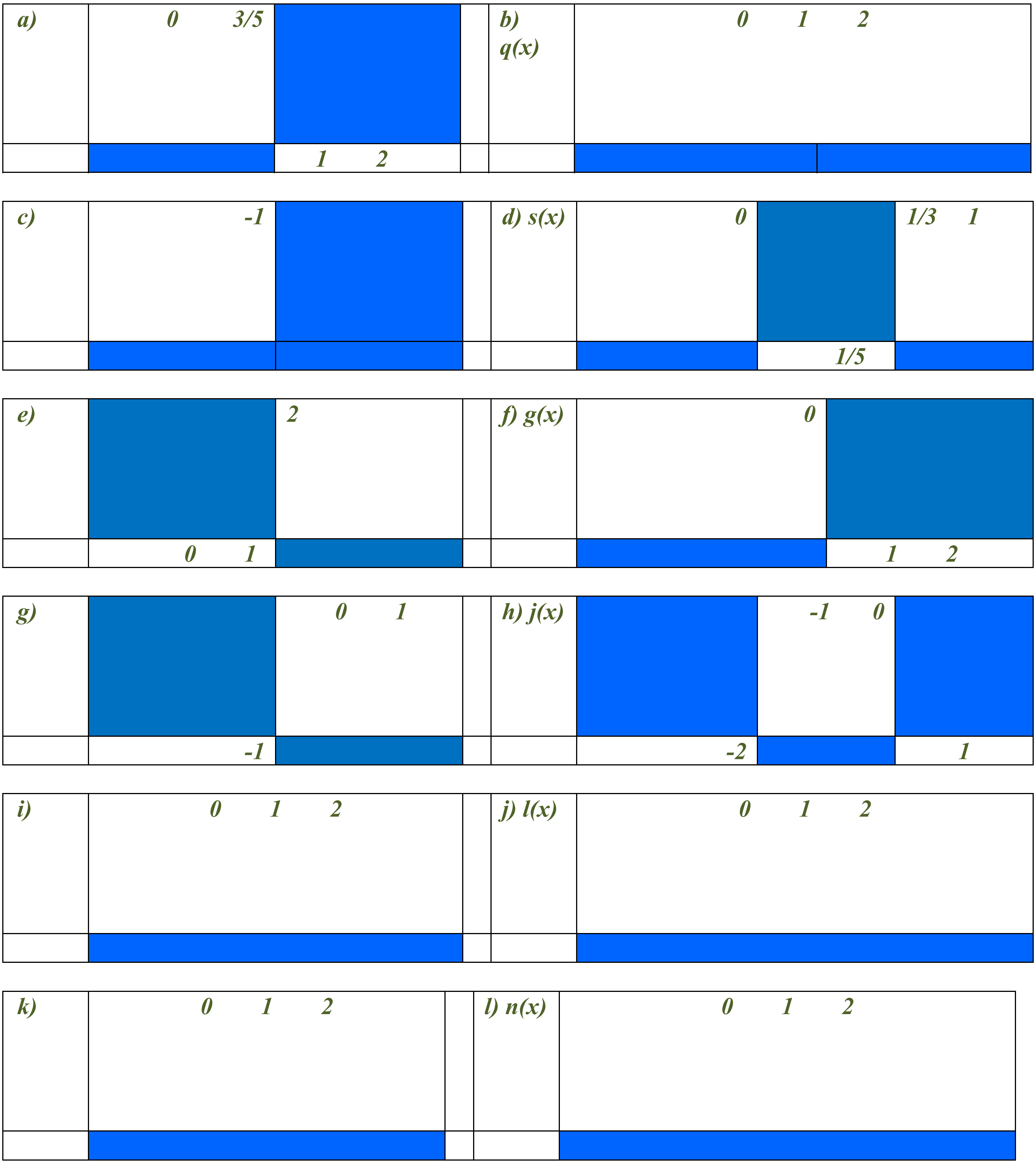
27. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow$$

la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



Solución:



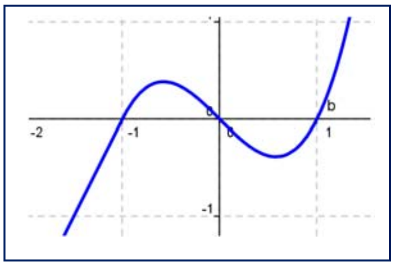
m)			*0*		*n)* *b(x)*	*-2*		*2*
		-2 *-1*						

o)	*-1*				*p)* *d(x)*			$\sqrt[3]{5}$
		-1 *0* *3*					*log(5)* $\sqrt[3]{5}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función f: $\Re \to \Re$ dada por $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le -1, \\ x^3-x & \text{si } x>-1. \end{cases}$

Solución:



2. Copia en tu cuaderno y realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x)=-5x+3 \;\; ; \;\; q(x)=2x^2-x+7 \;\; ; \;\; r(x)=-x^3+6 \;\; ; \;\; s(x)=3x^2-x$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x+3} \;\; ; \;\; g(x)=\frac{-3}{x} \;\; ; \;\; h(x)=\frac{x+1}{x^2} \;\; ; \;\; j(x)=\frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x)=e^{x-4} \;\; ; \;\; l(x)=2^{\frac{1}{x}} \;\; ; \;\; m(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x \;\; ; \;\; n(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$$

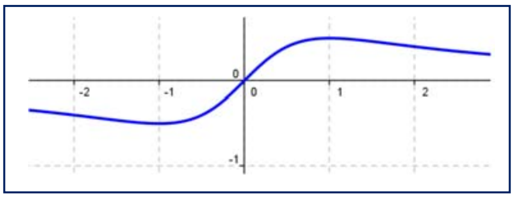
$$a(x)=L(x-2) \;\; ; \;\; b(x)=\log\left(\frac{x-1}{3}\right) \;\; ; \;\; c(x)=L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \;\; ; \;\; d(x)=\log\left(x^3-1\right)$$

Solución:

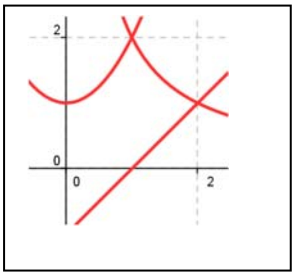
a)	$(s+q)(x) = 5x^2 - 2x + 7$	*b)*	$(r+p)(x) = -x^3 - 5x + 9$
c)	$(p-q)(x) = -2x^2 - 4x + 4$	*d)*	$(p+q+r+s)(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 16$
e)	$(q-r-s)(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$	*f)*	$(p-q+r-s)(x) = -x^3 - 5x^2 - 3x + 2$
g)	$(g+h)(x) = (-2x^2 + x)/x^2$	*h)*	$(s-g)(x) = 3x^2 - x + 3/x$
i)	$(n-k)(x) = e^{x/(x-1)} - e^{x-4}$	*j)*	$(g+d)(x) = -3/x + \log(x^3 - 1)$
k)	$(b-d)(x) = \log(1/(3(x^2 + x + 1)))$	*l)*	$(c+s)(x) = L((x^2 - 1)/(2x + 4)) + 3x2 - x$
m)	$(s\cdot q\cdot r)(x) = (3x^3 - x)(2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6)$	*n)*	$(r\cdot p)(x) = (-x^3 + 6)(-5x + 3)$
o)	$(q:p)(x) = (2x^2 - x + 7)/(-5x + 3)$	*p)*	$(s:q)(x) = (3x^2 - x)/(2x^2 - x + 7)$
q)	$(g\cdot h)(x) = (-3x - 3)/x^4$	*r)*	$(s:g)(x) = -x^3 + x^2/3$
s)	$(n\cdot k)(x) = e^{(x-4)+(x/(x-1))} = e^{(x2 - 4x + 4)/(x - 1)}$	*t)*	$(g:d)(x) = -3/(x(\log(x^3 - 1))$
u)	$(s\circ q)(x) = 3((2x^2 - x + 7)^2 - (2x^2 - x + 7))$	*v)*	$(r\circ p)(x) = -(-5x + 3)^3 + 6$
w)	$(q\circ p)(x) = 2(-5x + 3)^2 - (-5x + 3) + 7 = 50x^2 - 55x + 22$	*x)*	$(g\circ h)(x) = -3x^2/(x+1)$
y)	$(s\circ g)(x) = 27/x^2 + 3/x$	*z)*	$(n\circ k)(x) = e^{\frac{e^{x-4}}{e^{x-4}-1}}$

3. Considera la función f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

Solución: Dominio = $\Re$; Puntos de intersección con los ejes: (0, 0). Es una función impar. Negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$.



4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{x}$ e $y = x - 1$.



Solución: El recinto de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0).

5. Consideremos las siguientes funciones:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $\quad h(x) = 2^{-x+1}$ $\quad k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1}$ $\quad m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$

$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$ $\quad j(x) = L\left(x^5 - 1\right)$ $\quad l(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$ $\quad n(x) = \left(4x^2 - 4x + 1\right)^{\frac{-1}{3}}$

a) Calcula las siguientes composiciones:
$f \circ h$; $g \circ h$; $g \circ j$; $k \circ h$; $g \circ h \circ j$; $m \circ j$; $l \circ h$; $m \circ h$; $j \circ h$; $l \circ m$

b) Calcula $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ y verifica que son las inversas de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

c) Calcula todos los dominios.

d) Calcula los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

Solución: a) foh(x) = $2^{(-3x+3)} - 3 \cdot 2^{(-2x+2)} + 3 \cdot 2^{(-x+1)} - 1$; $g \circ h = \sqrt{\frac{2^{-x+1} - 2}{2^{-x+1} + 7}}$; $g \circ j = \sqrt{\frac{L(x^5 - 1) - 2}{L(x^5 - 1) + 7}}$;

$k \circ h = 2^{2^{-x+1}} \cdot 30^{2^{-x+1} - 1} \cdot 12^{-2^{-x+1} + 1}$; $g \circ h \circ j = \sqrt{\frac{2^{-L(x^5 - 1)+1} - 2}{2^{-L(x^5 - 1)+1} + 7}}$; $m \circ j = \sqrt[4]{-5 + 2L(x^5 - 1)}$;

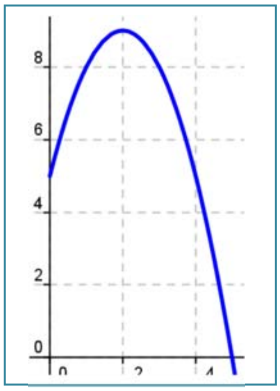
$m \circ h = \sqrt[4]{-5 + 2 \cdot 2^{-x+1}}$; $j \circ h = L((2^{-x+1})^5 - 1)$; $l \circ m = \frac{(\sqrt[4]{-5+2x})^2 - 9}{(\sqrt[4]{-5+2x})^3 + 7(\sqrt[4]{-5+2x})^2 + 15\sqrt[4]{-5+2x} + 9}$.

b) $h^{-1}(x) = 1 - \log_2(x)$; $j^{-1}(x) = \sqrt[5]{e^x + 1}$; Con $g^{-1}(x)$ calculando $y = (7x^2+2)/(1 - x^2)$ se añaden ramas, y lo mismo con m(x)

c) f: Todo $\Re$; h: Todo $\Re$; k: Todo $\Re$; m: $x > 5/2$; g: $x > 2$; j: $x > 1$; l: $\{x \in \Re;\ x \neq -3 \text{ y } x \neq -1\}$; n: $\{x \in \Re;\ x \neq 1/2\}$.

d) f: (1, 0), (0, 1); h: (0, 2); k: (0, 24/30); m: ($\sqrt[4]{5/2}$, 0); g: (2, 0); j: ($\sqrt[5]{2}$, 0); l: (0, –1); (3, 0), (–3, 0); n: (0, 1).

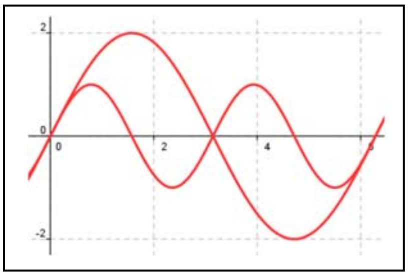
6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de *t* segundos, viene dada por $h(t) = 5 + 4t - t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.



Solución: El objeto se lanza desde una altura de 5 m. Al cabo de 1 s está a 8 m. Alcanza su altura máxima a los 2 segundos y es de 9 m. Llegará al suelo a los 5 segundos.

7. Considera las funciones *f, g*: $[0, 2\pi] \to \Re$, $f(x) = 2 \cdot sen(x)$ y $g(x) = sen(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de *f* y de *g*.

Solución:

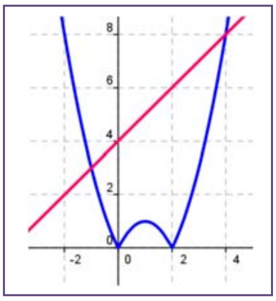


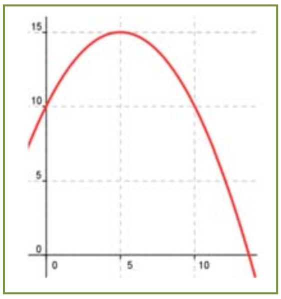
8. Sea la función dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina *a, b* y *c* sabiendo que es impar y que pasa por el punto (1, –2).

Solución: a = c = 0; b = –3; f(x) = x³ – 3x.

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x + 4$. Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.

Solución: Puntos de corte: (–1, 3) y (4, 8)





10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión:

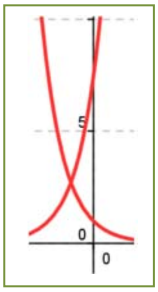
$$f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 100 \le t \le 12.$$

a) Representa gráficamente la función. b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?

Solución: b) A las 6 horas, 14.8 céntimos de euro; A las 12 horas, 5.2 céntimos de euro.

11. Considera la función definida por $f(x) = \frac{2\log x}{x^2}$. Calcula su dominio.

Solución: Está definida únicamente para valores positivos de x.



12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

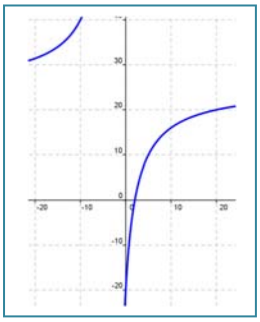
Solución: Tiene de vértices (1, 0), (e², 0) y (–1, e).

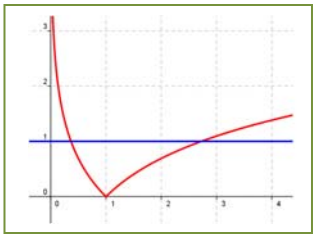
13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x-100}{2x+5}$, donde *x* representa los años de vida de la empresa, cuando $x \ge 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.

Solución: Dominio: La función está definida en toda la recta real salvo en el punto x = –5/2;

Intersección con los ejes: (2, 0), (0, –20). No es simétrica.

Tiene una asíntota vertical para x = –5/2. Para x < –5/2 y para x > 2 la función es positiva, y para –5/2 < x < 2 es negativa.



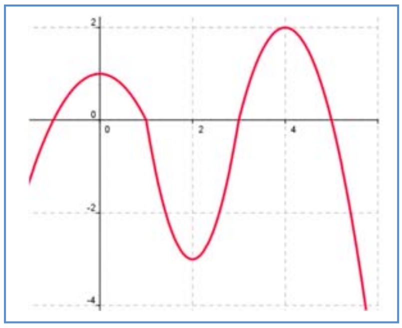


14. Considera la función definida por $g(x)=|ln(x)|$ (donde *ln* denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g* y la recta *y* = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Solución: La recta horizontal y = 1 corta a la función en (1/e, 1) y en (e, 1)

15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x)=\frac{Lx}{x^2}$ (Lx indica logaritmo neperiano de x); $g(x)=(1-x^3)\cos x$ y $h(x)=4x^3-5x+\frac{1}{e^x}$.

Solución: Dom f = {x∈ℜ; x > 0}; Dom g = ℜ; Dom h = ℜ.



16. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.

Solución:

Dominio: ℜ

Es continua en ℜ

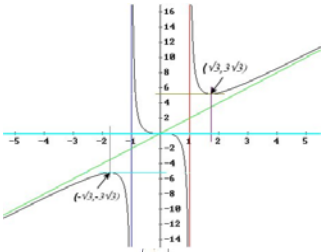
Puntos de corte: (–1, 0), (0, 1), (1, 0), (3, 0), (5, 0).

Negativa: x < –1, 1 < x < 3, x > 5.

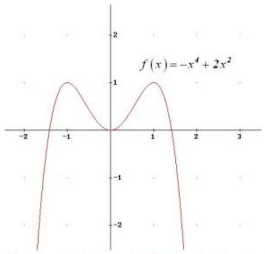
Positiva: –1 < x < 1, 3 < x < 5.

17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

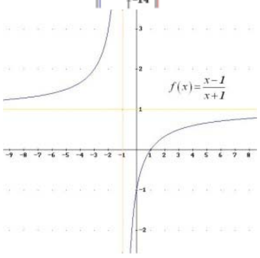
a)



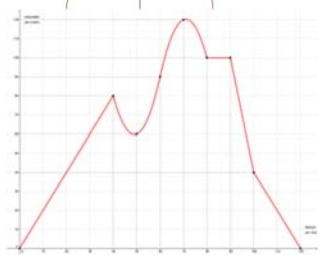
b)



c)



d)



Solución: a) Dominio: {x∈ℜ; x ≠ –1, x ≠ 1}; Puntos de intersección: (0, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; –1 < x < 0, 1 < x}; Negativo: {x∈ℜ; x < –1, 0 < x < 1};

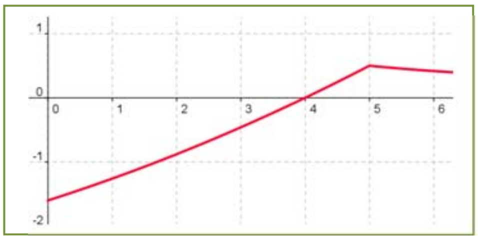
b) Dominio: ℜ; Puntos de intersección: (0, 0), ($-\sqrt{2}$, 0), ($+\sqrt{2}$, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; $-\sqrt{2}$ < x < $+\sqrt{2}$}; Negativo: {x∈ℜ; x < $-\sqrt{2}$, x > $+\sqrt{2}$};

c) Dominio: {x∈ℜ; x ≠ –1}; Puntos de intersección: (0, –1), (1, 0); Signo positivo: {x∈ℜ; x < –1, 1 < x}; Negativo: {x∈ℜ; –1< x < 1};

b) Dominio: $\Re$; Puntos de intersección: (0, 0), ($-\sqrt{2}$, 0), ($+\sqrt{2}$, 0); Signo positivo: {$x\in\Re$; $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$}; Negativo: {$x\in\Re$; $x < -\sqrt{2}$, $x > +\sqrt{2}$};

d) Dominio: {$x\in\Re$; $0 \le x \le 120$}; Puntos de intersección: (0, 0), (120, 0); Signo positivo todo el dominio.

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de *x* millones de euros produce una ganancia de *f*(*x*) millones de €, siendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.

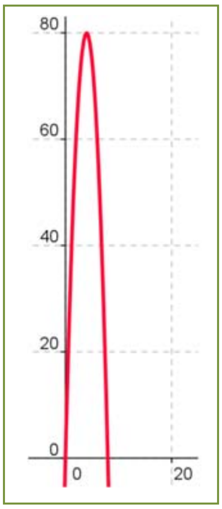


Solución: Las abscisas varían entre 0 y +∞, que es el dominio de la función, las ordenadas varían entre –8/5 y 1/2. Los puntos de corte con los ejes son: (0, –8/5) y (4, 0). Asíntota horizontal y = 0. Es continua en todo su dominio. Alcanza un máximo en (5, 1/2).

Los beneficios son negativos para inversiones menores a 4 millones de euros, El beneficio es máximo para 5 millones y luego desciende.

19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "*h*" (en metros) a la que se encuentra en cada instante "*t*" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.

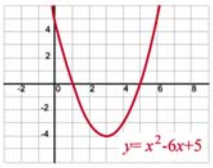
a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
b) Represente gráficamente la función *h(t)*.
c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?
d) ¿En qué instante llega al suelo?

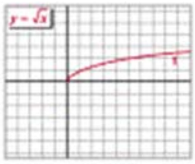


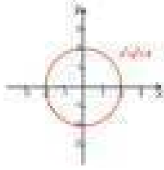
Solución: a) Se alcanza la altura máxima, de 89 metros, a los 4 segundos;
c) Está a los 60 metros de caída a los 6 segundos;
d) Llega al suelo a los 8 segundos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución: c)

2. La fórmula de la composición fog de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

a) $-2x^2 + 3$ b) $2x^2 - 3$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 4x - 1$

Solución: a)

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

a) $\frac{x+2}{x-1}$ b) $\frac{-x+1}{x+2}$ c) $\frac{2x+1}{x-1}$ d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

Solución: d)

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

a) 

b)

c)

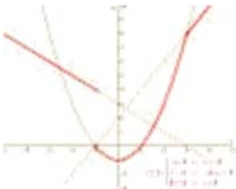
d) 

Solución: d)

5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

a) $\Re$ b) $\Re - \{1\}$ c) $\Re - \{-1, 1\}$ d) $\Re - \{0\}$

Solución: c)

6. El recorrido de la función  es:

a) $[-1, \infty[$ b) $]-1, \infty[$ c) $]-\infty, -1]$ d) $\Re - \{4\}$

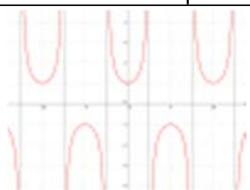
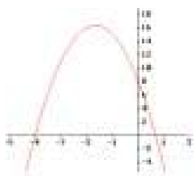
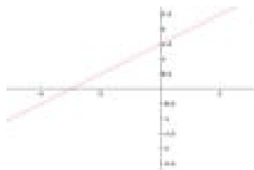
Solución: a)

7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ son:

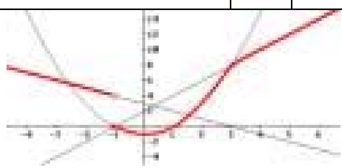
a) No tiene b) $(1,0);(2,0)$ c) $(-1,0);(2,0)$ d) $(0, \ln 3)$

Solución: b)

8. La única función impar entre las siguientes es:

a)		b)		c)		d)	

Solución: d)

9. El intervalo donde la función  es negativa es:

a) $]-1, 1[$ b) $]-\infty, -1[$ c) $]-\infty, 1]$ d) $]-\infty, 0[$

Solución: a)

10. La única función NO periódica de las siguientes es:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$ b) $g(x) = \text{tg}(x)$ c) $h(x) = e^x$ d) $j(x) = \text{cosec}(x)$

Solución: c)

CAPÍTULO 4: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LÍMITES

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim\limits_{x\to+1} x = 1$.

Solución: Si** $\lim\limits_{x\to+1} x = 1$ **entonces ∀ε > 0 ∃δ > 0 tal que (f(1 – δ), f(1 + δ)) ⊂ (1 – ε, 1 + ε). Para que esto se verifique debe ser f(1 – δ) > 1 – ε y f(1 + δ) < 1 + ε. Trabajando con las desigualdades se comprueba que basta con elegir δ < ε, luego ese es el límite.

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x+3}{x+5} & si\ x<1 \\ \dfrac{5x^2}{x+3} & si\ x\geq 1 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{7}{x^2+4} & si\ x<1 \\ \dfrac{x-1}{x^2} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

Solución: a) 1 y 1. Existe el límite en x = 1 y vale 1; b) 1/6 y 5/4. No existe el límite en x = 1; c) 7/5 y 0. No existe el límite en x = 1

3. Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} +x^2$ c) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$

Solución: a) Infinito de variable infinita: L = –∞; b) Infinito de variable infinita: L = +∞; c) Finito de variable finita: L = 9; d) Finito de variable finita: L = 0.

4. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$

Solución: a) –∞; b) +∞; c) +∞; d) 0^+; e) 0^+.

5. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{5}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{5}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{-5}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{-5}{x-3}$

Solución: a) +∞; b) –∞; c) –∞; d) +∞.

6. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

Solución: ±∞.

7. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución: ±∞.

8. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

Solución: ±∞.

9. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$

Solución: ±∞.

10. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

Solución: 1/6.

11. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)$

Solución: –1.

12. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)$

Solución: 1/36.

13. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$

Solución: 1/4.

14. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$

Solución: $\dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

15. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$

Solución: –1/4.

16. Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

Solución: a) 1; ***b)*** **∞; c) 0; 2.**

17. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{x+1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

Solución: a) –1; b) 3; c) 3/2; d) 0.

18. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}(senx)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^5-7x}{x^5+100x^2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x))$

Solución: a) **∞;** ***b) No existe; c) 3; d)*** **+∞; e) –∞.**

19. Determina los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

Solución: a) **∞;** ***b)*** **$e^{2/3}$; c) 1; d) $e^{2/25}$.**

20. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

Solución: a) **∞;** ***b) 0; c) 1; d) 0.***

2. ASÍNTOTAS

21. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$ b) $f(x)=\dfrac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$ d) $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

Solución: a) x = 1; b) x = 2; x = 3; c) x = 1; d) x = 1, x = 3, x = 5, x = –1.

22. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\dfrac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$ **d)** $f(x)=\dfrac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

Solución: a) y = 1; b) y = 3; c) y = 1/2; d) y = 0.

23. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x)=\dfrac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

Solución: a) y = x + 3; b) y = 3x + 27; c) y = 1/2x + 1/2, d) y = 2x – 2.

24. Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=(x+4)^2$ b) $f(x)=\dfrac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x)=x^3+4$ d) $f(x)=\dfrac{2x^5+4}{x+1}$

Solución: a) Rama parabólica; b) Asíntota horizontal y = 0, siempre por encima de 0; c) Para +∞ tiende a +∞, y para –∞ tiende a –∞; d) Rama parabólica, se comporta como $y = x^4$.

3. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

25. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ b) $f(x)=\sqrt{x-5}$ c) $f(x)=\log_2(x-3)$ d) $f(x)=\begin{cases}2+x^2 & si\ x\le 0\\ 1+e^x & si\ x>0\end{cases}$

Solución: a) Continua en ℜ –{1, –1}; b) Continua en {x∈ℜ; x ≥ 5}; c) Continua en {x∈ℜ; x >3}; d) Cada una de las ramas es una función continua, y en x = 0, ambos límites laterales valen lo mismo, 2, por lo que la función es continua en toda la recta real.

26. Determina el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\ x\le 1\\ k+x & si\ x>1\end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

Solución: 1 = k + 1 ⇒ k = 0.

27. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & si & x<-1\\ 2+x^2 & si & -1\le x\le 1\\ \dfrac{3}{x} & si & x>1\end{cases}$ b) $f(x)=x-\sqrt{x-2}$ c) $f(x)=|x-3|-1$

Solución: a) Las ramas primera y segunda son funciones polinómicas luego son siempre continuas, la rama tercera no es continua en x = 0, pero ese valor no es mayor que 1, En x = –1 la rama

primera se acerca a 5, y la segunda vale 3, luego no es continua. En x = 1 la rama segunda vale 3, y la tercera se acerca a 3, luego en ese punto la función es continua. Continua en $\Re$ – {–1};
b) La función raíz es continua cuando el radicando toma valores cero o positivos, luego es continua en $\{x \in \Re;\ x \geq 2\}$; Continua en $\{x \in \Re;\ x \geq 5\}$;
c) La función valor absoluto es siempre continua, luego la función es continua en toda la recta real.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2+3x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

Solución: a) –1/9; b) 0; c) –9; d) 1; e) –12; f) 0; g) 98/5.

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x+2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x-3}{x+2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}\right)$

Solución: a) –∞; b) 0; c) –3; d) 0; e) –1; f) –∞; g) 0; h) –∞.

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-4}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x) = \dfrac{-5x}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = \dfrac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$ g) $f(x) = \ln\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$ h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-5x}{(x-1)^2}}$

Solución: a) No tiene asíntota horizontal, tiene asíntota oblicua: y = x + 1; Asíntota vertical: x = 3;
b) Asíntota horizontal: y = 0; asíntotas verticales x = 2, x = –2;
c) Asíntota horizontal: y = 1, asíntotas verticales: x = 2. La recta x = –2 no es asíntota vertical;
d) Asíntota horizontal: y = 1, asíntotas verticales: x=1, x = –1;
e) Asíntota vertical; y = 0, asíntota vertical: x = 1;
f) Asíntota horizontal y = –5, asíntota vertical: x = 1;
g) Sólo está definida para x < 0; Asíntota horizontal: y = 0 cuando x tiende a –∞; Asíntota vertical: x = 0;
h) Asíntota horizontal: y = 0; No tiene asíntota vertical pues sólo está definida para x < 0.

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} 3^x & x<-2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 1 \\ \log_2 x & x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<0 \\ x^2-3x & 0\le x<3 \\ \sqrt{x-3} & x\ge 3 \end{cases}$ c) $h(x)=\left|x^2-5x\right|$

***Solución:** a) Continua en ℜ – {–2, 1}; Discontinuidad de primera especie con salto finito; b) Continua en ℜ – {0}; En x = 0 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito. En x = 3 es continua; c) Continua en todo ℜ.*

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\left|x^2-25\right|$ b) $g(x)=2-\frac{|x|}{x}$ c) $h(x)=\frac{x^2-2|x|}{x-3}$

***Solución:** a) Continua en todo ℜ; b) Continua en ℜ – {0}; Discontinuidad de primera especie con salto de tamaño 2; c) Continua en ℜ – {3}; Discontinuidad de primera especie con salto infinito.*

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\frac{3x+5}{x^2-4x+3}$ b) $g(x)=\frac{7x+2}{x^2+x}$ c) $h(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

***Solución:** a) Es continua en ℜ′– {1, 3}, En x = 1 y x = 3 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito.*

b) Es continua en ℜ′– {0, –1}, En x = 0 y x = –1 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito.

c) Es continua en ℜ′– {–1, 3}, En x = 3 y x = –1 tiene discontinuidad de primera especie con salto infinito. [

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$

***Solución:** a) La función no está definida en el intervalo (–2, 3). La función es continua en su dominio de definición: (–∞,–2] ∪. [3, –∞). En los extremos x = –2 y x = 3 no existe uno de los límites laterales.*

b) La función está definida para x < –2, y es continua en todo su dominio. Para valores próximos a x = 2, no está definida pues el radicando es negativo.

c) b) La función está definida para x < 0, y es continua en todo su dominio. Para valores próximos a x = 3, no está definida pues el radicando es negativo.

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x)=\ln\left(-x^2-x+2\right)$ c) $h(x)=\ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

***Solución:** a) La función y = (4 – x)/(x – 5) tiene una discontinuidad de primera especie con salto infinito en x = 5, pero la función logaritmo no está definida para valores negativos, luego sólo está definida en el intervalo [4, 5),*

b) La función es continua en (–∞,–2) ∪ (1, ∞), En x = –2, y x = 1, discontinuidad de segunda especie.

c) La función es continua en (–∞,–3) ∪ (3, ∞), teniendo en x = –3 y x = 3, discontinuidad de segunda especie.

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

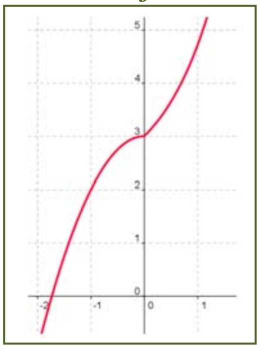
d) $f(x)=e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ $g(x)=e^{\sqrt{x-5}}$ $h(x)=2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

***Solución:** a) Continua en ℜ – {–7}; Discontinuidad de primera especie con salto infinito;*

b) Continua en {x ∈ℜ; x ≥ 5}, que es el dominio de definición de la función;

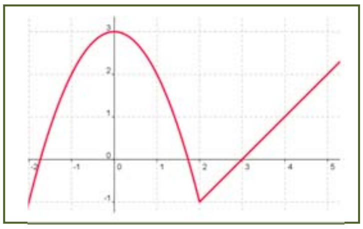
c) Continua en $\{x \in \Re;\ x \geq 5\} - \{-1, 1\}$; Discontinuidad de primera especie con salto infinito.

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 0 \\ 2 + e^x & x \geq 0 \end{cases}$



a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica

Solución: a) Está definida por dos funciones continuas. La única duda es en x = 0. Calculamos los dos límites laterales y ambos valen 3, por tanto la función es continua en todo $\Re$.

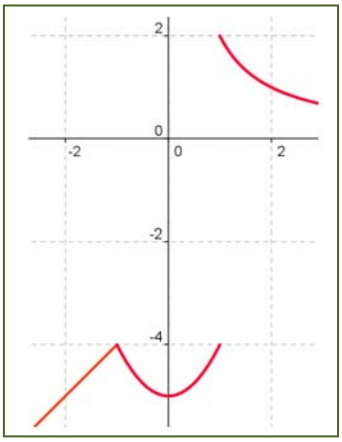


11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 2 \\ k + x & x \geq 2 \end{cases}$ a) Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real. Representa su gráfica

Solución: La función está definida por dos funciones continuas, luego el único caso dudoso es x = 2.

Para que sea continua en 2, deben coincidir los límites laterales. $3 - (2)^2 = -1$, por lo que $k + 2 = -1$, y $k = -3$.

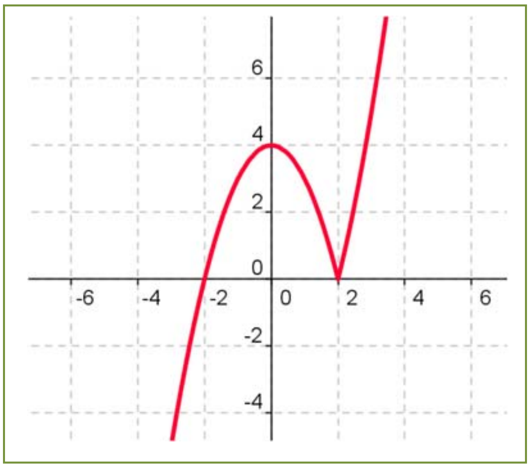
12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \cdots x < -1 \\ x^2 - 5 & -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica



Solución: La función está formada por 3 trozos, los dos primeros son funciones polinómicas, luego son siempre continuas, el tercero no sería continua en x = 0, pero para ese valor no está definidopues lo está para valores mayores de 1.

Quedan por estudiar los puntos de unión, x = -1 y x = 1. Calculamos los límites laterales: $-1 - 3 = -4$, $(-1)^2 - 5 = 1 - 5 = -4$. Ambos límites laterales coinciden, luego es continua para $x = -1$; $(1)^2 - 5 = -4$, $2/1 = 2$. Ahora son distintos. La función es discontinua en x = 1, con una discontinuidad de primera especie de salto finito igual a 6.

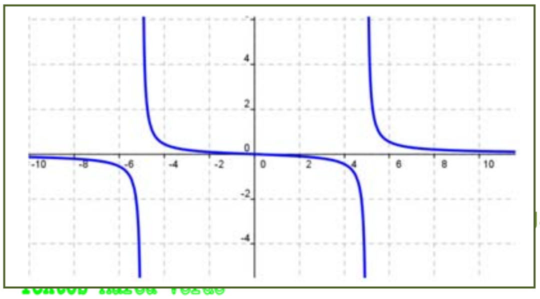
13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 2 \\ x^2 - 4 & x \geq 2 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica



Solución: a) La función es continua en toda la recta real. Está formada por dos funciones polinómicas, siempre continuas. El único punto dudoso es x = 2, y los dos límites laterales coinciden, valen 0.

14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Solución: Tiene una asíntota horizontal, y = 0; y dos asíntotas verticales: x = 5 y x = –5.

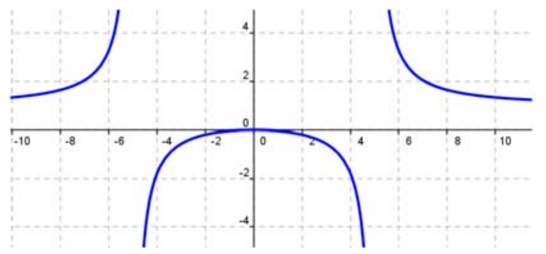


Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, es decir: x = 5 y x = –5, donde hay una discontinuidad de primera especie infinita.

15. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Solución: Tiene una asíntota horizontal, y = 1; y dos asíntotas verticales: x = 5 y x = –5.

Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, es decir: x = 5 y x = –5, donde hay una discontinuidad de primera especie infinita.



16. Utiliza GeoGebra para dibujar, de nuevo, la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$. Estudia su simetría.

Solución: Es una función par.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2/3

Solución: a)

2. El límite $\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)\cdot\left(\frac{1}{x+2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) –1

Solución: a)

3. El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) –2/3 d) –1

Solución: c)

4. El límite $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ vale:

a) 1/2 b) 0 c) –∞ d) –1

Solución: a)

5. El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

Solución: a)

6. El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

Solución: c)

7. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1

Solución: a)

8. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-3}{x} & si\ x<0\\ 3x+2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en $x = 0$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: d)

9. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$ en $x = 2$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: c)

10. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x>2\end{cases}$ en $x = 2$.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Solución: b) Basta definir que f(2) = 8.

CAPÍTULO 5: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA.

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

Solución: a) TVM[–3, 2] = 3, TVM[1, 5] = 3, TVM[0, 3] = 3; b) TVM[–3, 2] = –2, TVM[1, 5] = –2, TVM[0, 3] = –2;

c) TVM[–3, 2] = 1, TVM[1, 5] = 1, TVM[0, 3] = 1. La tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre igual a la pendiente de la recta.

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

Solución: TVM[–3, 2] = –1, TVM[1, 5] = 6, TVM[0, 3] = 3. Ahora no es constante.

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

Solución: TVM[–3, 2] = 7, TVM[1, 5] = 31, TVM[0, 3] = 9.

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (*t*) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (*d*) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

c) ¿Es constante?

Solución: a) v_m = 24.3 m/s; b) v_m [0, 6] = 38.3 m/s, v_m [2, 10] = 25 m/s; v_m [6, 14] = 13.7 m/s. c) No es constante. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

Solución: a) v_m [0, 40] = 18 m/s; b) v_m [15, 25] = 14 m/s; v_m [20, 30] = 13 m/s. No es constante; c) 120 Km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22,2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.

b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

Solución: a) Solución gráfica; b) $a_m(0, 10) = 25$ km/h^2; c) $a_m(10, 90) = 0$ km/h^2; d) $a_m(90, 100) = -25$ km/h^2.

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: B(x) = x2 + 7x + $\sqrt{x}$, donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.

Solución: TVM[0, 100] = 107.1; TVM[25, 100] = 132,2..

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = x + $\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

Solución: a) TVM[100, 2500] = 2600.9.

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

Solución: a) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 3; b) y'(1) = y'(3) = y'(5) = –2; c) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 0,5; d) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 1. La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

Solución: y'(1) = 2; y'(3) = 6; y'(5) = 10. No es constante.

11. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

Solución: y'(1) = 3; y'(3) = 27; y'(5) = 75.

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x - 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.

Solución: 110.6 m/s.

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

Solución: Antes de x = 3 la velocidad es de 110 m/s, y después de 118.6 m/s.

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

Solución: y'(2) = m = 49.2.

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

Solución: d' = 1.2 t³; v(3) = 32.4 m/s; v(4) = 76.8 m/s; v(7) = 411.6 m/s; v(10) = 1200 m/s.

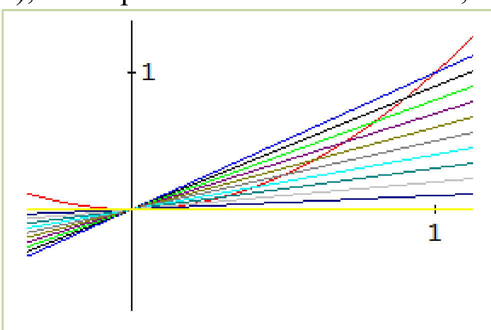
16. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3... a$. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

Solución gráfica: y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0. Igual le ocurre a y = b.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las abscisas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

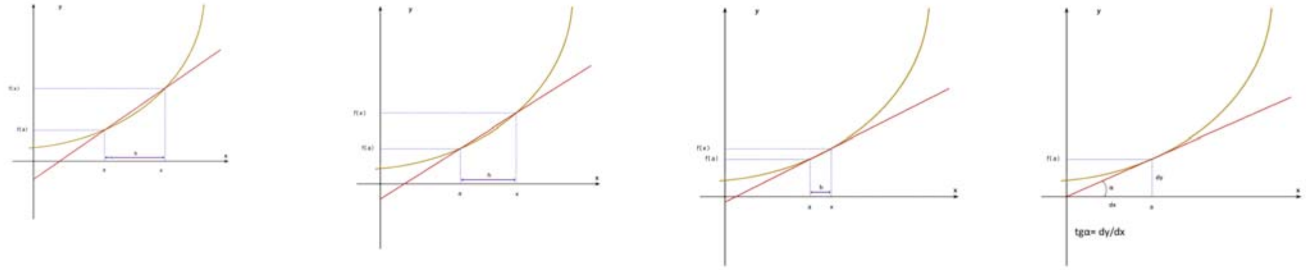
Solución manipulativa, gráfica y abierta:

Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).



18. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.

Solución gráfica:

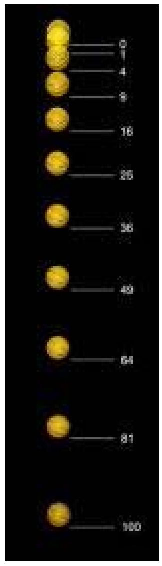


19. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

Solución: I'(x) = 2 + 2x; Es la tasa de variación instantánea de los ingresos por persona contratada.

20. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica[1], las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para $t = 1, 2, 3, 4, 5, ...$, el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

Solución: $y = f(t) = t^2$; $y' = v = 2t$; $a = y'' = 2$.



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo, para t = 1, 2, 3, 4, 5 ...

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ y $f'(-7)$.

Solución: $y'(1) = 1$; $y'(a) = 2a - 1$; $f'(1) = 1$, $f'(2) = 3$, $f'(12) = 23$, $f'(5.43) = 9.86$ y $f'(-7) = -15$.

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada							

Solución:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 1$	$f'(x)$	$f'(x) = 2$	$f'(x) = 4x+3$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Solución: La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

24. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

Solución: a) $f'(x) = 24x^{23}$; b) $g'(x) = 60x^9$; c) $h'(x) = 78/7x^{12}$; d) $j'(x) = 12x^3 - 10x$; e) $p'(x) = 15x^2 - 1$.

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

Solución: a) $y' = 1 - 10x$; b) $y' = 12x - 7 + 15x^4$; c) $y' = 14/3x^6 + 8x^4 - 9x^3$; d) $y = 8x^7 - 1$.

26. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en $x = 1, 4, 5$... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

Solución: $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(1) = 1/2$; $y'(4) = 1/4$; $y'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

Solución: a) $y' = 48x^7 + 101x^5 - 10x$; b) $y' = 245x^6 - 20x^3 + 84x^2$; c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(7x^3 - 15x)$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$

Solución: a) $y' = \frac{4}{(x+3)^2}$; b) $y' = 2x + 5x^2 - 2$; c) $y' = \frac{-6x^2 + 30x - 5}{18x^4 - 12x^3 + 2x^2}$; d) $y' = \frac{\sqrt{x}(x/2+3)}{(x+2)^2}$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \frac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.

Solución: a) $y' = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; b) ; b) $y' = \frac{-11x^4 + 35x}{6\sqrt[6]{x^5}(x^3+5)^2}$ c) $y' = \frac{9}{4}\sqrt[4]{x^9} - \frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}}$; d)

$$y' = \frac{\frac{5}{6}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{11}{3}\sqrt[6]{x^5}}{(x+2)^2}$$

30. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes $C(x)$ y de la función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

Solución: $C'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $B'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Son la tasa de variación instantánea.

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Solución: a) $y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11} \cdot (5x^4 - 21x^2)$; b) $y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6 \cdot (9x^2 - 10x)$; c) $y' = \frac{5}{4}\sqrt{(4x^5 - 8x^3)^3} \cdot (20x^4 - 24x^2)$; d) $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{2x^2 + 4x^7} \cdot (4x + 28x^6)$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}(x^4 - 6x^3)^2}$ b) $y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3 - 5}}$ c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3}$ d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$

Solución: a) $y' = \dfrac{3(x-6)x^2(14x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 70x^2 - 441x + 490)|x|}{2|x-6|(2x^3+7)^2\sqrt{\dfrac{x(3x-5)}{2x^3+7}}}$; ***b)*** $y' = \dfrac{x^6 + 4x^4 - 20x^3 + 63x^2 + 40x}{2\sqrt{x^2+3}(x^3-5)^2\sqrt{\dfrac{x^2-7}{x^3-5}}}$;

c) $y' = \dfrac{3(5x+3)^2(20x^2+24x-3)}{x^4(4x-1)^4\sqrt{\dfrac{32(5x+3)^3}{x^3(4x-1)^3}}}$ ***d)*** $y' = \dfrac{1+\dfrac{3}{x^4}}{6\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{x-\dfrac{2}{x^3}}\right)^2}\cdot\sqrt{x-\dfrac{2}{x^3}}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

33. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$

Solución: y = 33x – 31.

34. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

Solución: En x = 0, y = 0.05x; En x = 1, y = 0.03x + 0.01; En x = 2, y = 0.01x – 0.04: En x = 3, y = –0.01x + 0.09.

35. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$, donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

Solución: a) y'= 10t – 1.2 t², y'(3) = 30 – 10.8 > 0. Creciente. b) 10t – 1.2t² = 0 → t(10 – 1.2t) = 0 → t = 0, 10 = 1.2t → t = 8.333. Aproximadamente a poco más de los 8 meses empiezan a descender los ingresos.

36. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

Solución: y = x³ + 3x es siempre creciente; y = x³ – 3x: (–∞, –1) creciente, (–1, 1) decreciente, (1, + ∞) creciente.

En x = 0 es creciente, y en x = 2 y x = –2 es decreciente.

37. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

Solución: Es creciente.

38. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$; b) $y = 5x^4 - 2$; c) $y = 3x^3 + 1$; d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; e) $y = 7x^3 - 3x$.

Solución: a) (0, 3) máximo; b) (0, –2) mínimo; c) creciente siempre;

d) (0, 5) máximo; (1/2, 19/4) y (–1/2, 19/4) mínimos; e) $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Máximo,*** $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Mínimo.***

39. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

Solución: Es un cubo de un dm de lado.

40. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

Solución: a) Siempre creciente; b) (1, 3) mínimo, (–1, 9) máximo; c) (4, 0) mínimo; d) No tiene máximos ni relativos ni absolutos, y hay infinitos mínimos (x, 3) para –1 ≤ x ≤ 2.

41. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-4, 3]$ y en el intervalo $[0, 5]$.

***Solución:** La función es creciente. En $[-4, 3]$ tiene un mínimo en $x = -4$ y un máximo en $x = 3$. En $[0, 5]$ la función tiene un mínimo para $x = 0$, y un máximo en $x = 5$. Son relativos y absolutos*

42. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-3, 5]$.

***Solución:** Mínimo relativo y absoluto: $(-2, 0)$. Máximo relativo: $(-3, 1)$; Máximo relativo y absoluto: $(5, 7)$.*

43. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

***Solución:** $x = 5/3$ cm; Altura = $20/3$ cm; $r = \frac{50\sqrt{2}}{3}$ cm.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Definición de derivada

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.

***Solución:** $y'(2) = 12$*

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

***Solución:** $y'(1) = 1/2$*

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.

***Solución:** $y'(4) = -1/32$.*

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

***Solución:** $y'(1) = 1$*

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

***Solución:** $y'(2) = 1$.*

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

***Solución:** a) $y' = 8x + 2$; b) $y' = 6x^2 - 6x + 7$; c) $y' = 2x - 5$; d) $y' = 56x^6 - 54x^5 - 15x^2$*

7. Calcula:

a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

***Solución:** a) $10x + 28x^3 - 3$; b) $30x^4 - 16x + 7 + 15x^2$; c) $5x^4 - 28x^3 + 6x^2$; d) $9x^2 - 54x^5 - 16x^7$.*

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)\cdot(x^2-5x+2)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}$

***Solución:** a) $14x + 3 + 1/x^2$; b) $15x^2 - 4x + 1/(2\sqrt{x})$;*

c) $y' = \frac{-5x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{2\sqrt{x}(x+3)^2\cdot(x^2-5x+2)^2}$; d) $y = \frac{-x^3 - 15x^2 - 15x - 25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$ b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$ c) $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

***Solución:** a) $14x/3 + 3/5 + 8/3x2$; b) $(15/2)x^2 - (4/3)x + 6/(10\sqrt{x})$; c) $(4/7)x^2 - 10/49 - 1/(2x\sqrt{x})$*

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \frac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \frac{(8x+5x^2)\cdot(2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \frac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$

Solución: a) $y' = \dfrac{2x^2+8x-16}{(x+2)^2}$***;*** ***b) y' = (2 (84x³ – 39x² + 6x + 20))/(7x – 1)²***

c) y' = (60x⁷ + 185x⁶ + 144x⁵ – 35x² – 105x – 84)/(2x + 3)²; ***d) y' = (5x² – 78x – 225)/((x + 2)² (x + 3)²)***

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5$ d) $y = (2x^2 + 5x)^9$

Solución: a) $y' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$***;*** ***b) y'= (2x(3x+4))/(3(2x³+4x² – 1) ^(2/3));***

c) y' = 75x²(5x³ + 2)⁴; ***d) y' = 9(2x² + 5x)⁸(4x + 5)***

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7 + 3x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5 \cdot (x^5 - 6x^8)$ d) $y = \dfrac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

Solución: a) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}(x^7+3x^2)^6 + \sqrt{x^3+5}\cdot 6(x^7+3x^2)^5(7x^6+6x)$***;*** ***b) y' = (2x² + 8x + 3)/(3 (x + 1)²·(2x³ + 4x² – 1) ^(2/3));***

c) y' = 5(5x³ + 2)⁴·(15x²)(x⁵ – 6x⁸) + (5x³ + 2)⁵ (5x⁴ – 48x⁷); ***d) y' = (2x¹¹·(2x – 5)⁸·(133x² – 280x + 150))/(7x – 5) ³;***

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$ c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

Solución: a) $y' = e^{x^5+4x^3}(5x^4+12x^2)$***;*** ***b)*** $y' = 7(e^{2x^3-7x^2})^7(6x^2-14x)$***;***

c) $y' = e^{(3x^5+5x^3)^5}\,5(3x^5+5x^3)^4(15x^4+15x^2)$***;*** ***d)*** $y' = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}\cdot 2(6x^5-9x^8)(30x^4-72x^7)$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(x^5 - 7x^3)\cdot sen(x^5 - 7x^3)$ b) $y = cos^7(3x^3 - 5x^2)\cdot sen^5(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos\left(2x^2+4x^7\right)^4}$

Solución: a)) y' = (5x⁴ – 21x²) cos(2(x⁵ – 7x³));

b) y' = –x(9x – 10)·cos(x²·(3x – 5)) ⁶·sen(x²·(3x – 5))⁴·(7sen(x² (3x – 5)) ² – 5cos(x² (3x – 5)) ²);

c) y' = –sen(4x⁵ – 8x³)⁵·5·(4x⁵ – 8x³)⁵·(20x⁴ – 24 x²);

d) y' = –(128x⁷ (2x⁵ + 1) ³·(7x⁵ + 1)·sen(16x⁸·(2x⁵ + 1)⁴))/(3cos(16x⁸·(2x⁵ + 1)⁴)^(2/3));

Aplicaciones de la derivada

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: x = 0: y = -3 x; x = 1: y = –2; x = 2: y = 9x – 16.

16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

Solución: a) y = 12x – 16; b) y = 8x – 7; c) y = 3.

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución: a) m = 30; b) m = –2; c) m = 2.

18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

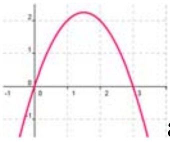
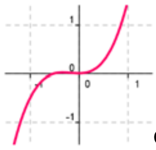
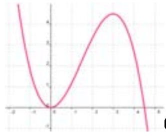
a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

Solución: a) (1, 0), (–1, 4); b) $(\sqrt{3}, 2), (-\sqrt{3}, 2)$***.***

19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

Solución: y = 0.

20. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

 a)  b)  c)  d)

Solución: d)

21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Solución: $y = 12x - 16\sqrt{2}$; $y = 12x + 16\sqrt{2}$. La pendiente mínima es $m = -12$ que se alcanza en (0, 0).

22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

Solución: y = 2. Corta en (2, 2).

23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Solución: a = 1, b = 1, c = 0.

24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

Solución: a = 3, b = – 4, c = 1.

25. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Solución: a = 1/4.

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

Solución: $(-\infty, 0)$ creciente; $(0, +\infty)$ decreciente.

27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

Solución: La función es decreciente en toda la recta real.

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Solución: $(-\infty, -1)$ creciente; $(-1, +1)$ decreciente; $(1, +\infty)$ creciente.

29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: $(-\infty, 1)$ creciente; (1, 3) decreciente; $(3, +\infty)$ creciente. (1, 10) máximo; (3, 6) mínimo.

30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: $(-\infty, 0)$ creciente; (0, +1) decreciente; $(1, +\infty)$ creciente. (0, 3) máximo, (1, 2) mínimo.

31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: $(-\infty, -\sqrt{3})$ creciente; $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ decreciente; $(\sqrt{3}, +\infty)$ creciente.
$(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ máximo, $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ mínimo.

32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.

Solución: La función es siempre creciente, por tanto tiene en [–7, 2] un mínimo relativo en (–7, –1 162) y un máximo relativo en (2, 152), y en [0, 8] tiene un mínimo relativo y absoluto en (0, 0), y un máximo relativo y absoluto en (8, 2 240).

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: Nunca se anula la derivada. La función no es derivable en x = –3, f(–3) = 0. Tiene un mínimo absoluto en (–3, 0). No tiene máximos.

Problemas

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

***Solución:** v(0) = 15 m/s; v(5) = 23 m/s; t = 11.25 s.*

35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 – 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

***Solución:** r' = 0.001 mm/grado. Es constante; T'(30) = 0.5555…; T'(90) = 0.062; r'(10) = 0.005 mm/s; r'(30) = 0.000555…mm/s; r'(90) = 0.000062 mm/s.*

36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

***Solución:** t = 3,4 s; d'(3.4) = 34 m/s; d'(4.8) = 48 m/s; d'(7.4) = 74 m/s.*

37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 – 4t + 3$ b) $e = 2t^3 – 5t^2 + 4t – 3$ c) $e = –t^2 + 4\,t + 3$ d) $e = (3t – 4)^2$

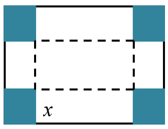
***Solución:** a) $v = 2t – 4$; $a = 2$ m/s^2; b) $v = 6t^2 – 10\,t + 4$; $a = 12\,t – 10$; c) $v = –2\,t + 4$; $a = –2$; d) $v = 6(3t – 4)$; $a = 18$ m/s^2.*

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

***Solución:** v/2) = 0.012 m/min; v(5) = 0.012 m/min.*

39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

***Solución:** v(2) = 0.92 m/s; v(4) = 2.08 m/s; v(7) = 4.27 m/s; v(15) = 12.75 m/s; A los 31 segundos pueden fallarle los frenos, luego debería de comenzar a frenar antes.*



40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.

***Solución:** x ≈ 3.7 cm.*

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Solución: $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$; $h = \frac{15}{2\pi\sqrt[3]{45}}$.

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 – 80/(x + 5)$. Sin embargo el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

***Solución:** $y = 100 – 80/(x + 5) – 2x$; $y' = 80/(x^2 + 10x + 25) – 2$.*

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La

producción total es igual a $y = u\cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

Solución: Aumenta un 5 % anual.

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u\cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

Solución: $y' = 9t^2 + 18t$.

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

Solución: Disminuye un 2 % anual.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim\limits_{b\to x}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ d) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$

Solución: c)

2. La derivada de $y = \sqrt{x}\cdot(x-1)$ en $x = 1$ es:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

Solución: c)

3. La derivada de $y = \dfrac{x^2+1}{x^3+3}$ en $x = 2$ es:

a) 15/11 b) –10/25 c) –16/121 d) 1/3

Solución: c)

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x\cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2\cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2}\cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

Solución: a)

5. La derivada $y = cos(x^3)$ es:

a) $y' = 3(cos(x))^2\cdot(-sen(x^3))$ b) $y' = -sen(x^3)\cdot 3x^2$ c) $y' = -sen(x^3)\cdot cos(3x^2)$ d) $y' = 3(cos(x))^2\cdot(-sen(x)$

Solución: b)

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

Solución: c)

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

Solución: d)

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

Solución: c)

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x-4)\,x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

Solución: d)

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (–1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
c) (6, –324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

Solución: d)

CAPÍTULO 6: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16			16	0.4
19	15			
22	6	0.15	37	0.925
25				

Solución:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16	***10***	***0.25***	16	0.4
19	15	***0.375***	***31***	***0.775***
22	6	0.15	37	0.925
25	***3***	***0.075***	***40***	***1***

2. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60		60
[10, 20[		0.4	
[20, 30[	30		170
[30, 40[		0.1	
[40, 50]			200

Solución:

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60	***0.3***	60
[10, 20[	***80***	0.4	***140***
[20, 30[	30	***0.15***	170
[30, 40[	***20***	0.1	***190***
[40, 50]	***10***	***0.05***	200

3. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.

a) Intención de voto de un partido b) Número de correos electrónicos que recibes en un mes.

c) Número de calzados d) Número de kilómetros recorridos en fin de semana.

e) Marcas de cerveza f) Número de empleados de una empresa

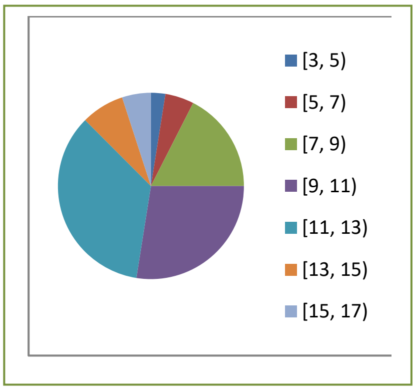
g) Altura h) Temperatura de un enfermo.

Solución: Cualitativas: a), e); Cuantitativas discretas: b), c), f); Cuantitativas continuas: d), g), h).

4. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

10.5 11.2 9.9 15.0 11.4 12.7 16.5 10.1 12.7 11.4 11.6 6.2 7.9
8.3 10.9 8.1 3.8 10.5 11.7 8.4 12.5 11.2 9.1 10.4 9.1 13.4 12.3
5.9 11.4 8.8 7.4 8.6 13.6 14.7 11.5 11.5 10.9 9.8 12.9 9.9

Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.



Solución:

Tiempo (meses)	*[3, 5)*	*[5, 7)*	*[7, 9)*	*[9,*	*[11,*	*[13,*	*[15,*
Frec. Abs.	*1*	*2*	*7*	*11*	*14*	*3*	*2*

5. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

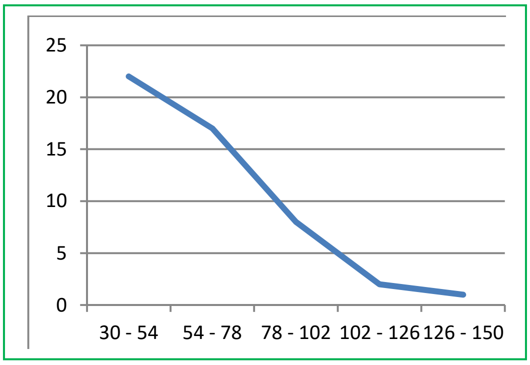
Determinar:

a) Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.

b) Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.

c) ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?

d) Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).



Solución:

a)

30	*40*	*50*	*60*	*70*	*75*	*80*	*90*	*100*	*120*	*150*
5	*7*	*10*	*0*	*11*	*6*	*5*	*0*	*3*	*2*	*1*

30 - 54	*54 - 78*	*78 - 102*	*102 - 126*	*126 - 150*
22	*17*	*8*	*2*	*1*

b) 22 %; c) 35.

6. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

a) Construye la tabla de frecuencias con estos datos.

b) ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?

c) ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?

d) ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?

e) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.

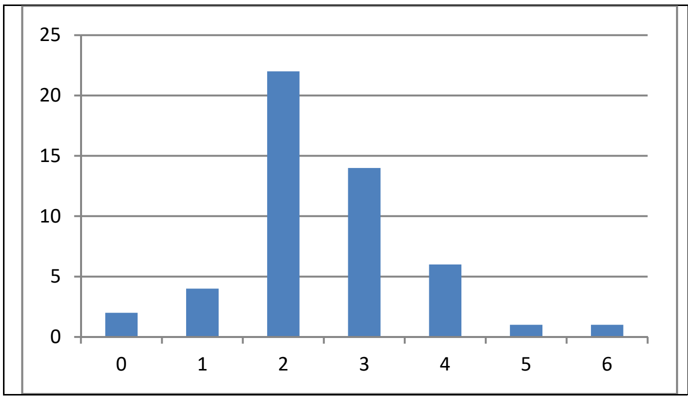
f) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

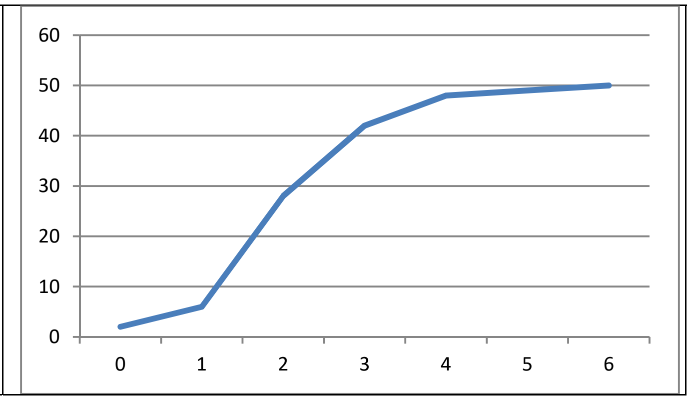
Solución: a)

Nº Hijos	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Fr. Abs.	*2*	*4*	*22*	*14*	*6*	*1*	*1*

b) 14; c) 28 %; d) 44 % y 56 %.

e)	*f)*


25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6


60
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6

7. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebes y se tiene:

3.2 3.7 4.2 4.6 3.7 3.0 2.9 3.1 3.0 4.5 4.1 3.8 3.9 3.6 3.2 3.5 3.0 2.5 2.7 2.8 3.0 4.0 4.5 3.5 3.5 3.6 2.9 3.2 4.2 4.3 4.1 4.6 4.2 4.5 4.3 3.2 3.7 2.9 3.1 3.5

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Si sabemos que los bebes que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?

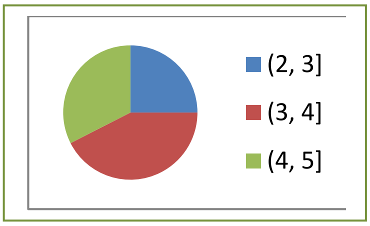
c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?

d) Representa gráficamente la información recibida.

Solución:

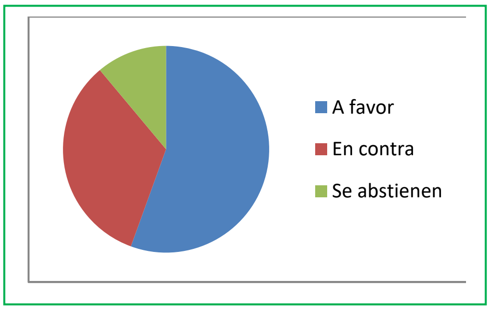
Peso (kg)	*(2, 3]*	*(3, 4]*	*(4, 5]*
Fr. Abs.	*10*	*17*	*13*

b) Hay 6 bebés que pesan menos de 3 kg, un 15 %; c) Hay 7 + 13 bebés que pesan más de 3.5 kg, un 50 %.



8. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Representa la información mediante un diagrama de sectores

Solución:



9. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son: 74.001 74.003 74.015 74.000 74.005 74.002 74.005 74.004 Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.

Solución: Media = 74.0044; Mediana = 74.0035; Varianza = 0.00002; Desviación típica = 0.00466; Rango = 0.015.

10. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.

Solución:

Datos (xi)	*38432*	*384343*	*38436*	*38438*	*38440*
Frecuencias (fi)	***4***	***8***	***4***	***3***	***8***
*xi*fi*	*153728*	*3074744*	*153744*	*115314*	*307520*

Suma de las frecuencias = 27. Suma (xi*fi) = 3805050.

11. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:

a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000

b) El salario más frecuente.

c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
[0,1500[	2145
[1500, 2000[	1520
[2000, 2500[	840

[2500, 3000[	955
[3000, 3500[	1110
[3500, 4000[	2342
[4000, 5000[	610
[5000, 10000[	328
≥10000	150

Solución: a) 2646 €; b) 3750 €; c) Aproximadamente 2500 €.

12. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

Solución: Mediana: 7; Moda: 7; Primer cuartil aproximadamente: 7.5; Tercer cuartil: 15; Nonagésimo percentil aproximadamente: 1.

13. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

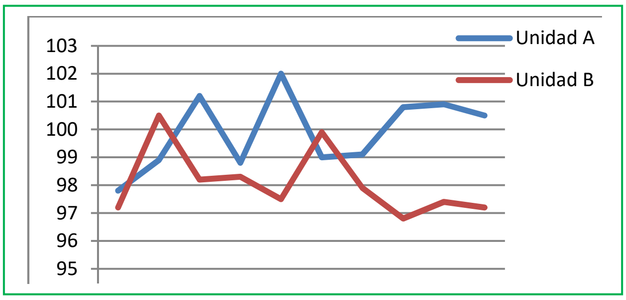
Unidad A	97.8	98.9	101.2	98.8	102.0	99.0	99.1	100.8	100.9	100.5
Unidad B	97.2	100.5	98.2	98.3	97.5	99.9	97.9	96.8	97.4	97.2

a) Haz una representación gráfica de estas muestras.

b) Determina las medias y las varianzas.

Solución:

	Media	*Varianza*
Unidad A	***99.9***	***1.8***
Unidad B	***98.09***	***1.5***



14. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	*Nº de familias*
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?

d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

Solución: a) 3.82; b) 3; c) Con más de 4 componentes entrarían seguro, y casi todos los de 2 a 3 componentes, pero 15 no entrarían; d) El 80 % de las familias tienen menos de 6 componentes.

15. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{n_i}$	*a*	32	35	33	*b*	35

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3.6.

Solución:

Media = (a + 511 + 5b)/200 = 3.6; a + b = 65; a + 5 b = 209; a = 29; b = 36;

x_i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
n_i	***29***	***32***	***35***	***33***	***36***	***35***

La moda es 5. La mediana es 3.1.

16. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) Calcula la media y la mediana muestrales.
b) Halla los cuartiles primero y tercero.
c) Halla los percentiles cincuenta y noventa.
d) Calcula el rango muestral.
e) Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

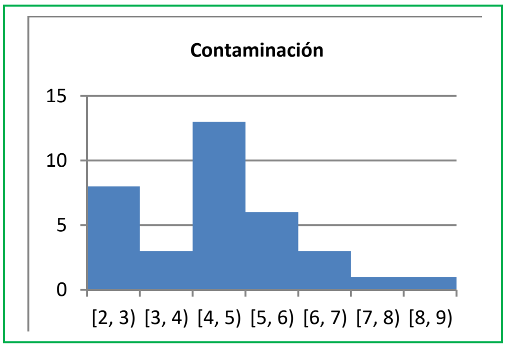
Solución: a) Media = 65.86; Mediana = 67.5;
b) Cuartil primero: 59.5; Cuartil tercero = 75;
c) Percentil cincuenta = 67.5; Percentil noventa = 79.5;
d) Rango = 53;
e) Varianza = 72; Desviación estándar = 12.16.

17. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.

6.5 2.1 4.4 4.7 5.3 2.6 4.7 3.0 4.9 8.6 5.0 4.9 4.0 3.4 5.6 4.7 2.7 2.4 2.7 2.2 5.2 5.3 4.7 6.8 4.1 5.3 7.6 2.4 2.1 4.6 4.3 3.0 4.1 6.1 4.2

a) Construye un histograma.
b) Determina los cuartiles.
c) Calcula la media y la desviación típica.

Solución: b) Cuartil 1: 3; Mediana = 4.6; Cuartil 3 = 5.25;
c) Media = 4.4; Desviación típica = 1.6.



2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. 3. COVARIANZA

18. Los datos siguientes son las calificaciones obtenidas por los estudiantes de un grupo de 25 de 1º de bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y Lengua.

Matemáticas	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Lengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemáticas	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Lengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

a) Escribe la tabla de frecuencias conjunta.

b) Proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en ambas asignaturas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Matemáticas, proporción estudiantes que obtiene más de un cinco en Lengua.

c) ¿Son independientes las calificaciones de Matemáticas y Lengua?

d) Representa gráficamente.

e) Calcula el coeficiente correlación.

Solución: b) El 88 % obtienen más de 5 en ambas asignaturas; El 88 % en matemáticas y el 92 % en lengua; c) Están muy relacionadas. e) Coeficiente de correlación = 0.87, positivo y muy alto.

19. Para realizar un estudio sobre la utilización de una impresora en un determinado departamento, se midió en un día los minutos transcurridos entre las sucesivas utilizaciones X y el número de páginas impresas Y, obteniéndose los siguientes resultados.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	12
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3

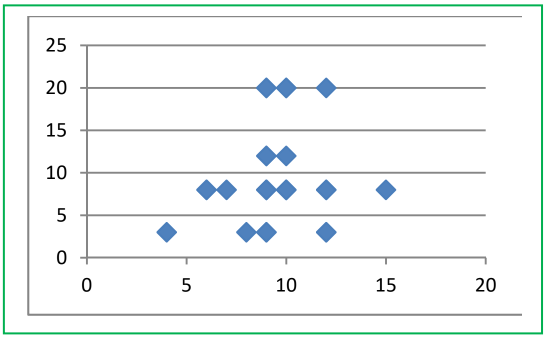
a) Escribe la distribución de frecuencias conjunta. Porcentaje de veces que transcurren más de nueve minutos desde la anterior utilización y se imprimen menos de doce páginas. Número de veces que se imprimen menos de doce páginas y transcurren nueve minutos desde la utilización anterior.

b) Frecuencias marginales. Veces que se imprimen como mucho doce páginas. Número de páginas que se imprimen en el 80 % de las ocasiones.

c) Calcula la distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones.

d) Dibuja el diagrama de dispersión.

Solución:



20. Las estaturas de los 30 niños nacidos en una maternidad durante una semana fueron los siguientes:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Peso	3.2	4.1	4.5	3.0	3.6	2.9	3.8	3.8	3.6	3.9	3.0	3.8	4.1	3.5	4.0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3.1	3.3	3.9	3.7	4.1	4.2	3.5	3.8	3.6	3.4	4.6	3.5	3.6	3.1	4.0

a) Construye una tabla de doble entrada, agrupando los pesos en intervalos de 0.5 kg.

b) ¿Es la estatura independiente del peso?

Solución:

a) Solución abierta

Estatura	***3***	***3,5***	***4***	***4,5***

Peso	*6*	*10*	*12*	*2*

b) Coeficiente de correlación = 0.75. La estatura depende del peso.

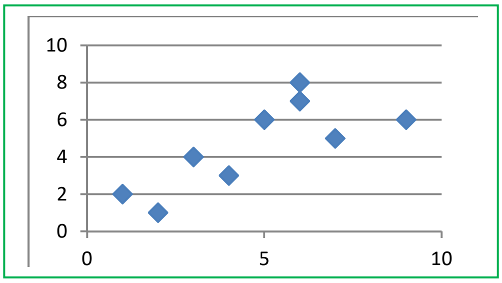
21. En el examen de una asignatura que consta de parte teórica y parte práctica, las calificaciones de nueve alumnos fueron:

Teoría	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Práctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. Dibuja la nube de puntos. Comenta los resultados.

Solución:

Covarianza = 4.04: Coeficiente de correlación = 0.76.
La correlación es positiva pero no es muy fuerte.



22. Se desea investigar el ganado caprino y el ganado ovino de un país. En la tabla de doble entrada adjunta se presentan los resultados de un estudio de 100 explotaciones ganaderas, seleccionadas aleatoriamente del censo agropecuario. Se proporcionan las frecuencias conjuntas del número de cabezas (en miles) de cabras X y ovejas Y que poseen las explotaciones.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

a) Halla las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales.

b) Halla el número medio de ovejas condicionado a que en la explotación hay 2000 cabras.

c) Halla el número medio de cabras que tienen aquellas explotaciones que sabemos que no tienen ovejas.

d) Halla la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables.

Solución: a) MediaX = 1.76; MediaY = 1.56; VarX = 1.38; VarY = 1.53; sX = 1.18; sY = 1.24; b) 24000 ovejas; c) 1.83; d) Covarianza = –0.898; Coeficiente de correlación = –0.61.

23. El volumen de ahorro y la renta del sector familias en millones en euros constantes de 2005 para el periodo 2005-2014 fueron.

Años	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

a) Recta regresión del ahorro sobre la renta.

b) Recta de regresión de la renta sobre el ahorro.

c) Para el año 2015 se supone que la renta era de 24.1 millones de euros. ¿cuál será el ahorro esperado para el año 2015?

d) Estudiar la fiabilidad de la predicción anterior.

Solución: a) $y = 0.11x + 1.59$; b) $y = 0.314x + 20.27$; c) Ahorro = 4.23; d) $ro^2 = 0.75$; La fiabilidad es mayor cuanto mayor sea el coeficiente de correlación.

24. Se midió el tiempo en segundos que tardaron en grabarse los mismos 24 ficheros en un lápiz USB *X* y en un disco duro exterior *Y*.

X	1.2	1	1.1	0.5	1.1	1.5	1	1.4	1.4	1.3	0.4	0.3
Y	1.3	1.1	1.2	0.4	1.2	1.4	1.1	1.6	1.6	1.5	0.4	0.3

X	0.3	1.5	1.4	1.1	1.2	1.2	0.4	0.5	1.3	1.5	1.2	0.2
Y	0.3	1.6	1.3	1.1	1.3	1.1	0.4	0.4	1.4	1.6	0.9	0.3

a) Construye la tabla de frecuencias conjunta. ¿Cuál es el porcentaje de ficheros que tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo? ¿Cuántos ficheros tardan en grabarse entre 0.6 y 1.2 segundos en el primer tipo de memoria? ¿Cuánto tiempo tardan como mucho en gravarse al menos el 90 % de los ficheros en el segundo tipo de memoria?

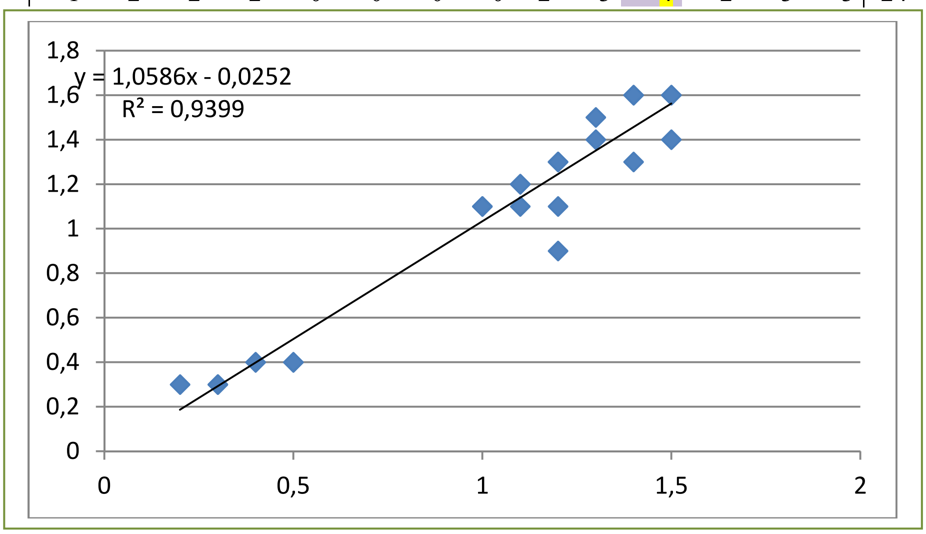
b) Halla la tabla de frecuencias condicionadas de los tiempos del segundo tipo de memoria de aquellos programas que tardaron 1.2 en el primer tipo de memoria. ¿Cuál es la proporción de estos programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria?

c) Representa gráficamente los datos y comenta el resultado obtenido.

d) Si un fichero tarda 0.8 segundos en grabarse en el primer tipo de memoria, ¿cuántos segundos tardara en grabarse en el segundo tipo? Dar una medida de fiabilidad. ¿Confirma esta medida lo comentado en el apartado c)?

Solución: a) Sólo 3, luego el 12.5 % tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo; 9 ficheros, luego el 37.5 % en el primer tipo tardan entre 0.6 y 1.2 segundos en grabarse; El 83.3 % tardan como mucho 1.5 segundos en gravarse.

	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	
0.3	1	2													3
0.4			2	2											4
0.5															0
0.6															0
0.7															0
0.8															0
0.9											1				1
1															0
1.1									2	1	1				4
1.2										2					2
1.3											2		1		3
1.4												1		1	2
1.5												1			1
1.6													2	2	4
	1	2	2	2	0	0	0	0	2	3	4	2	3	3	24

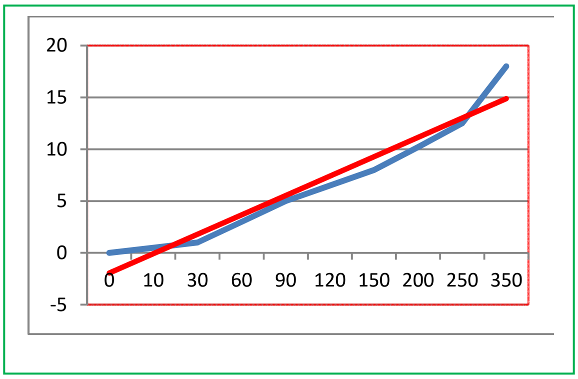


c) La correlación es alta; Los ficheros más rápidos lo son con ambos tipos, y los más lentos también;
d) Tardará 0.82 segundos, lo que confirma lo del apartado c); El coeficiente de correlación da una medida de la fiabilidad, y vale 0.97, muy alto y positivo.

25. De un muelle se cuelgan pesos y obtenemos los alargamientos siguientes.

Peso gr X	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Alargamiento cm Y	0	0.5	1	3	5	6.5	8	10.2	12.5	18

Encuentra la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 y 500 gr. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?



Solución: Recta de regresión: $y = \overline{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})$

y = 6.5 + (596/12871)(x -126) = 0.05 x – 0.64;
Para 100 gr, se alarga 3.77 cm, y para 500 gr, 21.42 cm.
Es más fiable para 100 gr.

26. La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cubico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido.

Número de horas	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cubico en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cubico es previsible encontrar cuando transcurran 6 horas? ¿Es buena esta predicción?

Solución: a) Gérmenes = 6.74*Horas + 13.07; b) 53.5 gérmenes; Coeficiente de correlación = 0.9989; es una predicción muy buena.

27. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía a medida que pasa el tiempo según los datos recogidos en la tabla:

Tiempo: *h*	8	22	27	33	50
Altura: *m*	17	14	12	11	6

a) Encuentra el coeficiente correlación entre el tiempo y la altura. Da una interpretación de él.

b) ¿Qué altura se alcanzara cuando hayan transcurrido 40 horas?

c) Cuando la altura alcanza 2 m suena una alarma. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que suene la alarma?

Solución: a) Coeficiente correlación = –0.997; Es un coeficiente de valor absoluto muy alto, aunque negativo, al aumentar el tiempo disminuye la altura; b) 8.6 m; c) Algo más de 65 minutos.

28. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y la tasa de inflación en los meses indicados de un determinado año, va ser:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Tasa inflación	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

a) Representa la nube de puntos.

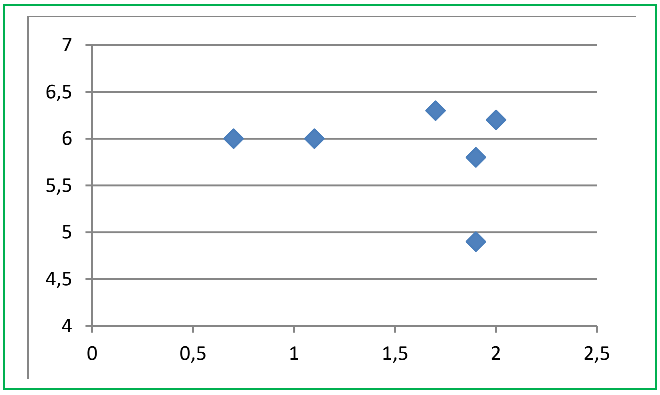
b) Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.

c) ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

Solución:

b) Coeficiente de correlación = –0.24, negativo y muy bajo.

c) Por lo que no se puede estimar la tasa de inflación con el IPC



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística descriptiva unidimensional

1. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante 10 semanas, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6

Calcula:

a) Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda

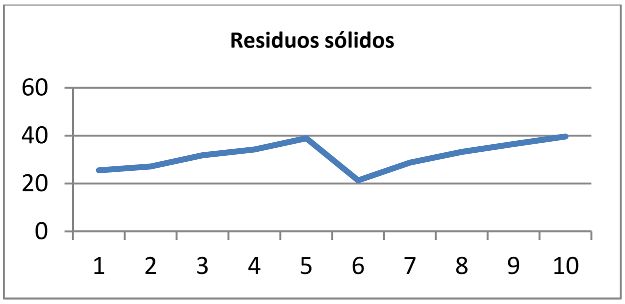
b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

Solución: a) Media = 31.68: Mediana = 32.5; Moda, No se repite ningún valor.

b) Desviación típica = 5.99; varianza = 35.8, coeficiente de variación = 0.19, valor mínimo = 21.3, valor máximo = 39.6, recorrido = 18.3, primer cuartil = 27.5; tercer cuartil =35.9; intervalo intercuartílico = 8.4.

c)



Parece que durante 5 semanas aumenta el volumen de residuos recogidos, en la semana sexta desciende, para volver a aumentar en las semanas siguientes.

2. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

b) Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.

c) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.

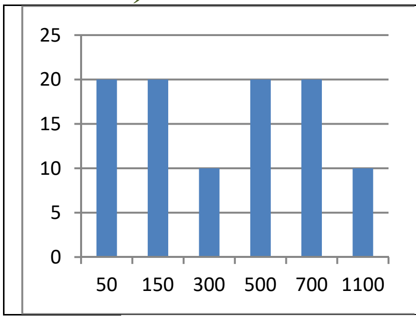
d) Calcula la media y la desviación típica.

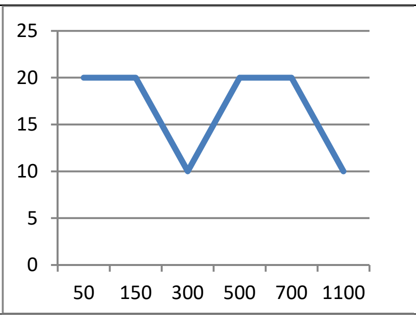
e) Calcula la mediana y los cuartiles.

Solución: a)

Marcas de clase	50	150	300	500	700	1100
Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias absolutas	20	20	10	20	20	10
Frecuencias relativas	0.2	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1
Frecuencias absolutas acumuladas	20	40	50	70	90	100
Frecuencias relativas acumuladas	0.2	0.4	0.5	0.7	0.9	1

b)





d) Media = 420; Desviación típica = 326.5; e) Mediana = 300; Cuartil 1 = 125; Cuartil 3 = 625.

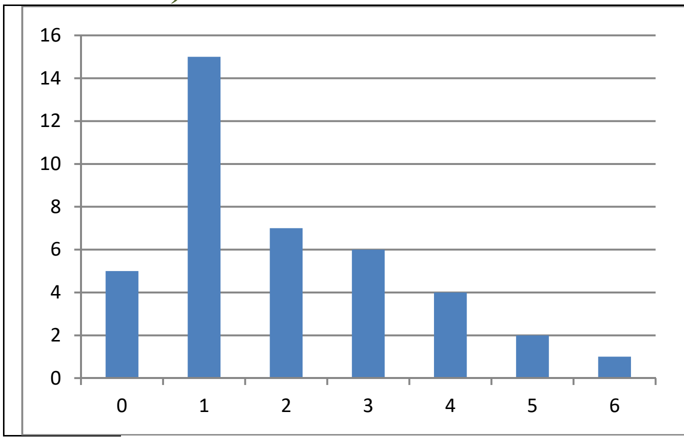
3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

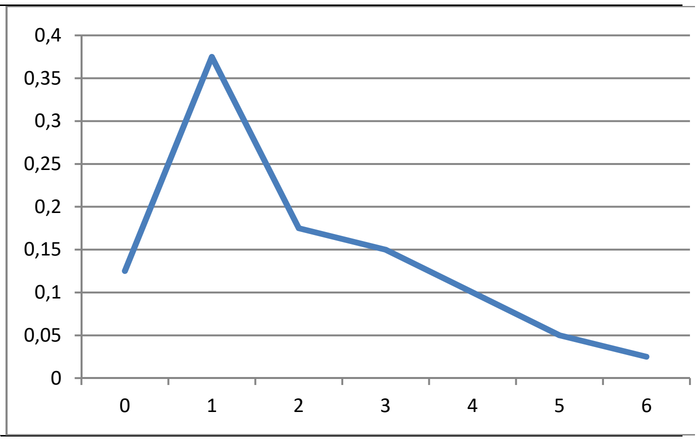
Número de hermanos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6 o más**
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

Solución: a)





b) Media = 1.975; Mediana = 1.5; Moda = 1.

4. Se ha preguntado a 50 estudiantes de 1º de Bachillerato por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6 o más**
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

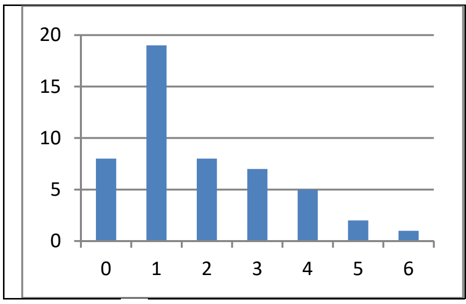
a) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.

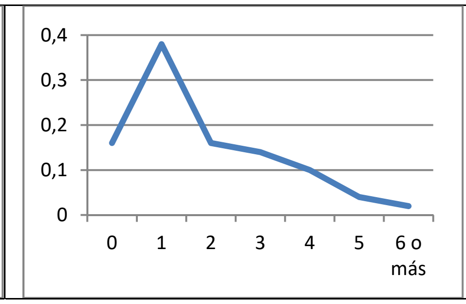
b) Haz un histograma.

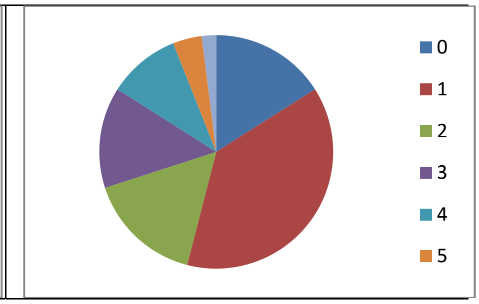
c) Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.

d) Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

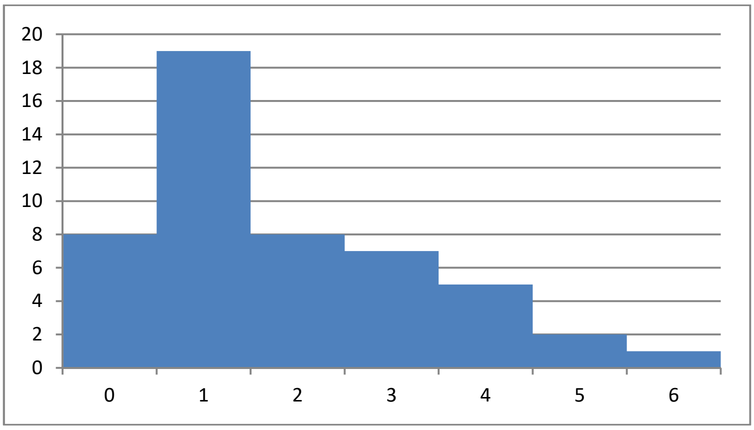
Solución: a)







b)



c) Media = 1.84; Mediana = 1.3; Moda = 1; Cuartil 1 = 0.9; Cuartil 2 = 2.7;

d) Varianza = 2.214; Desviación típica = 1.488; Recorrido = 7; Intervalo intercuartílico = 1.8.

5. **Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador**

Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

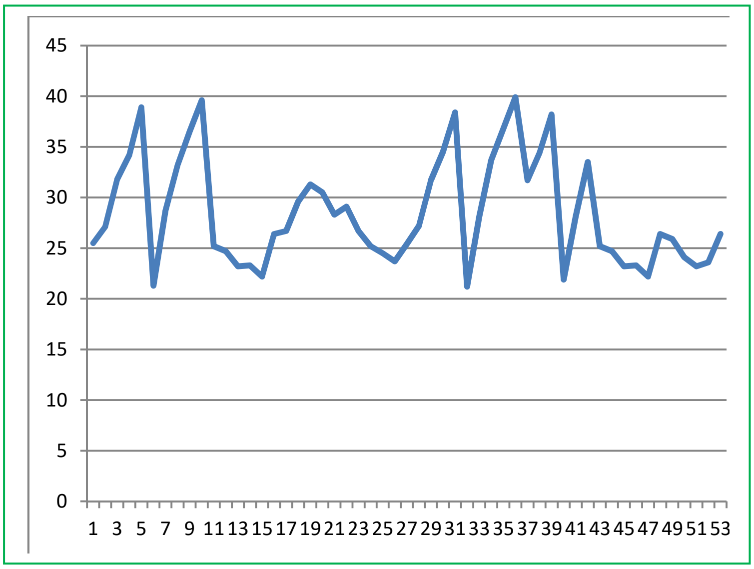
Parámetros estadísticos

a) Las medidas de centralización: la media, mediana, moda

Solución: media = 28.5, mediana = 26.7, moda = 25.2.

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

Solución: desviación típica = 5.3, varianza = 28.2, coeficiente de variación = 0.19, valor mínimo = 21.2, valor máximo = 39.9, recorrido = 18.7, primer cuartil = 24.5, tercer cuartil = 31.8; intervalo intercuartílico = 7.3.



c) Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.

Solución: Coeficiente de asimetría = 0.68; Curtosis = -0.63.

d) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

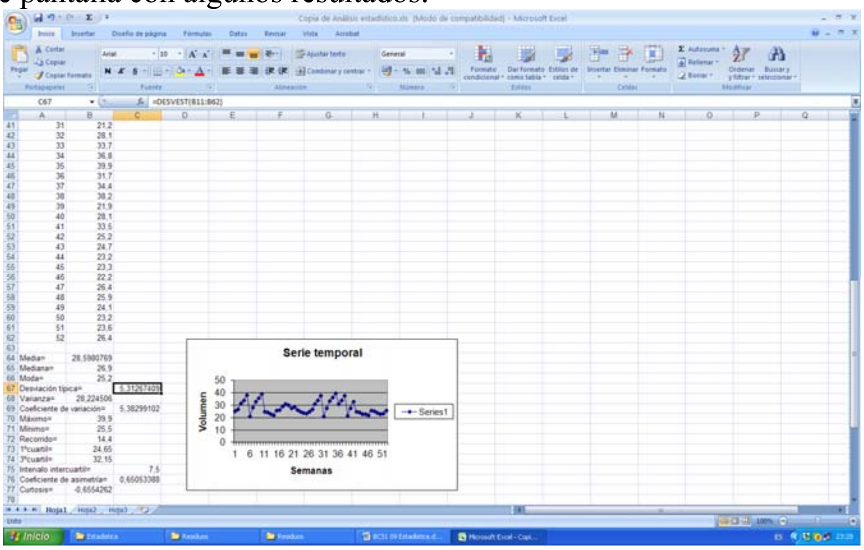
Parece que hay un ciclo cada 4 o 5 semanas.

Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52. Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.

En la casilla A11 un título, por ejemplo, "Residuos sólidos".

En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.

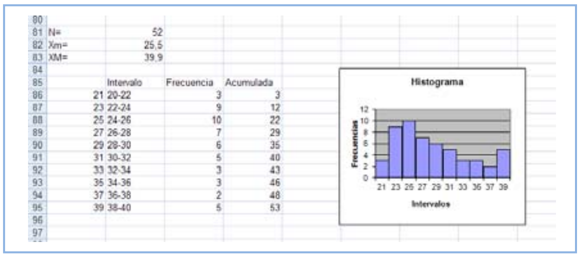
Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



6. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un histograma para mejor determinar su distribución. Para ello:

a) Indica el número total de datos, N, el menor valor: X_m, el mayor valor, X_M, y el recorrido R.

b) La cantidad de barras del histograma, k, se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h, en 2, y el número de barras, k, en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.



c) Calcula y representa en el histograma los puntos m, $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente.

- Vamos a investigar qué ocurre al hacer un cambio de variables. Dijimos que si consideramos $y_i = a + bx_i$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

a) Abre Excel. Introduce los datos: X = 255, 271, 318, 342, 389,... en la columna A, a partir de la fila 11. ¿Qué cambio de variable se ha hecho? Observa: $x = X/10$.

b) En la columna C, a partir de la fila 11 escribe los límites de clase, en la columna D el valor medio, en la columna E vamos a contar las frecuencias absolutas y en la columna F las frecuencias acumuladas. Utiliza la función CONTAR.SI para contar. Por ejemplo, escribe en E11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escribe =E11. En E12 escribe CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la tabla de frecuencias. Escribe títulos en la fila 10.

c) Calcula la media y la desviación típica. Para ello escribe en la fila 3 y 4, columna B, las funciones =PROMEDIO(A11:A63) y =DESVEST(A11:A63). Escribe los resultados con 2 decimales.

d) ¿Cómo obtienes ahora la media y la desviación típica de los datos reales? ¿Cómo deshaces el cambio? Si no lo recuerdas, o no tienes seguridad, investígalo. Calcula la media y la desviación típica, antes y después del cambio. Escribe este resultado, en general, para un cambio de variables lineal $y = ax+b$.

e) Dibuja el histograma. No olvides nunca indicar las unidades en ambos ejes, y toda la información que ayude a comprender el gráfico. Añade siempre el tamaño, N, y los valores de la media y la desviación típica.

f) Discute el resultado. ¿Es grande la dispersión? La distribución, ¿es simétrica?

- Otra investigación: Vamos a investigar la distribución de la media. Para ello vamos a tomar muestras de tamaño 5. Utiliza la columna G. En G11 escribe =PROMEDIO(B11:B15), en G12 la media de B16 a B20, y así hasta el final. Tenemos calculadas las 10 medias de muestras de tamaño 5. Calcula la media y la desviación típica de estas medias. Compara con los resultados anteriores. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

Estadística descriptiva bidimensional

7. En una muestra de 10 personas miramos su color de ojos y pelo y encontramos que hay 5 morenos de ojos marrones, 1 moreno de ojos verdes, 3 rubios de ojos azules y 1 rubio de ojos verdes. A) Representa en una tabla de doble entrada esta situación. B) Escribe la tabla de frecuencias relativas. C) Escribe las frecuencias absolutas y relativas marginales. D) Escribe la distribución de frecuencias condicionadas.

Solución:

Frecuencias absolutas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	5		5
Ojos verdes	1	1	2
Ojos azules		3	3
Marginales	6	4	10

Frecuencias relativas	Moreno	Rubio	
Ojos marrones	0.5	0	0.5
Ojos verdes	0.1	0.1	0.2
Ojos azules	0	0.3	0.3
Marginales	0.6	0.4	1

d) Color de ojos condicionado al color de pelo

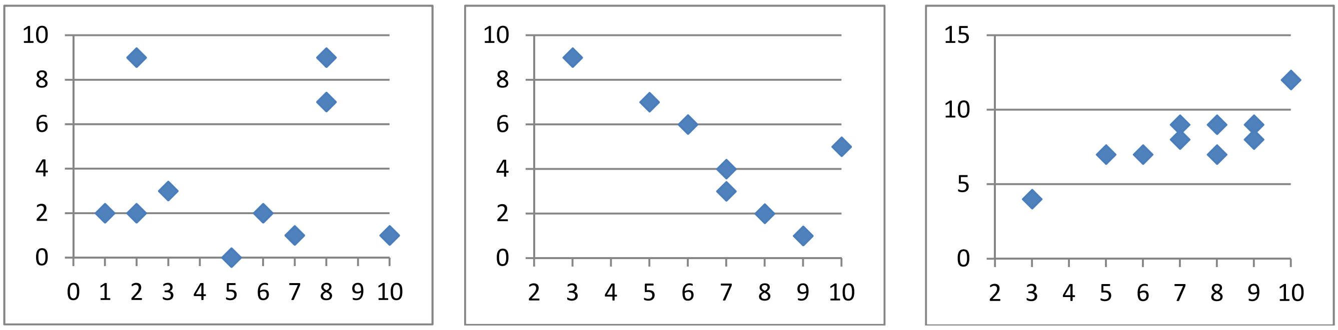
	Moreno	Rubio
Ojos marrones	0.8333333	0
Ojos verdes	0.1666667	0.25
Ojos azules	0	0.75

d) Color de pelo condicionado al color de ojos

	Moreno	Rubio
Ojos marrones	1	0
Ojos verdes	0.5	0.5
Ojos azules	0	1

8. Lola ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0.8, 0.85 y 0.03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?

A B C



Solución: A = 0.03; B = –0.8; C = 0.85.

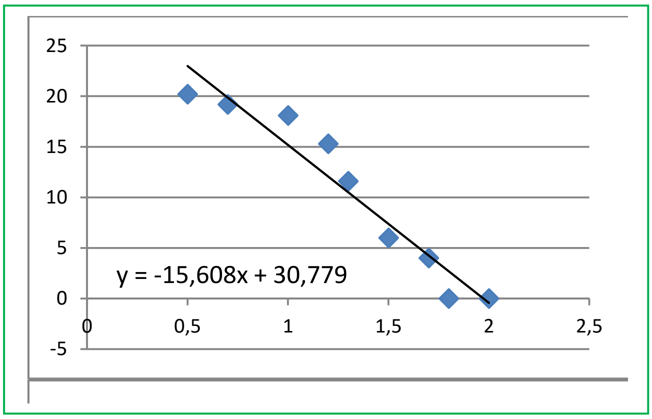
9. En una tienda quieren estudiar las ventas del pan de molde en función del precio. Para ello prueban cada semana con un precio distinto y calculan las ventas realizadas. Han obtenido los siguientes datos:

Precio (euros)	0.5	0.7	1	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
Ventas (medias)	20.2	19.2	18.1	15.3	11.6	6	4	0	0

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión (nube de puntos) e indica a qué conclusiones crees que se va a llegar.

b) Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

c) Deciden poner un precio de 1.4 euros, ¿cuáles opinas que serían las ventas medias semanales?



Solución: a) La nube de puntos indica que vamos a tener una correlación fuerte y negativa; b) Covarianza = –3.54; Coeficiente de correlación = –0.96; Recta de regresión:

$$y = 10.5 - 13.9\,(x - 1.3) = 28.5 - 13.9x;$$

c) Ventas de 9.1.

10. Una compañía aérea realiza un estudio sobre la relación entre las variables *X*, tiempo de un vuelo, en horas; e *Y*, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros, y se han obtenido los siguientes datos.

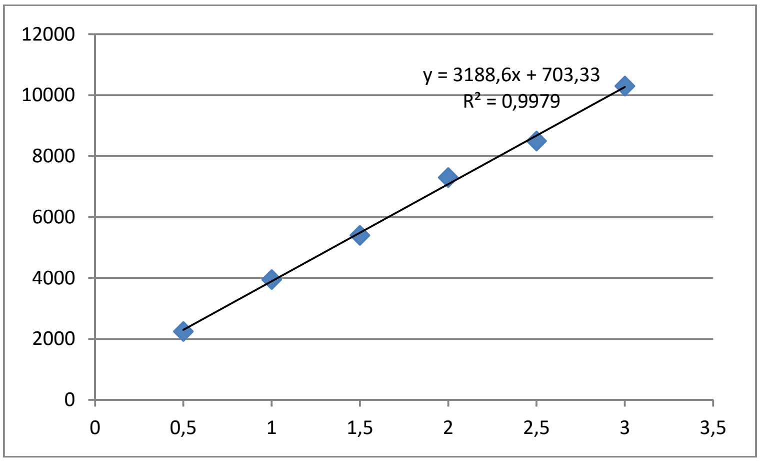
X (horas)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Y (litros)	2250	3950	5400	7300	8500	10300

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

b) Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpreta los resultados.

c) Calcula la ecuación de las rectas de regresión.
d) Calcula el coeficiente de determinación.

Solución: a)



b) Covarianza = 2325; Coeficiente de correlación = 0.83

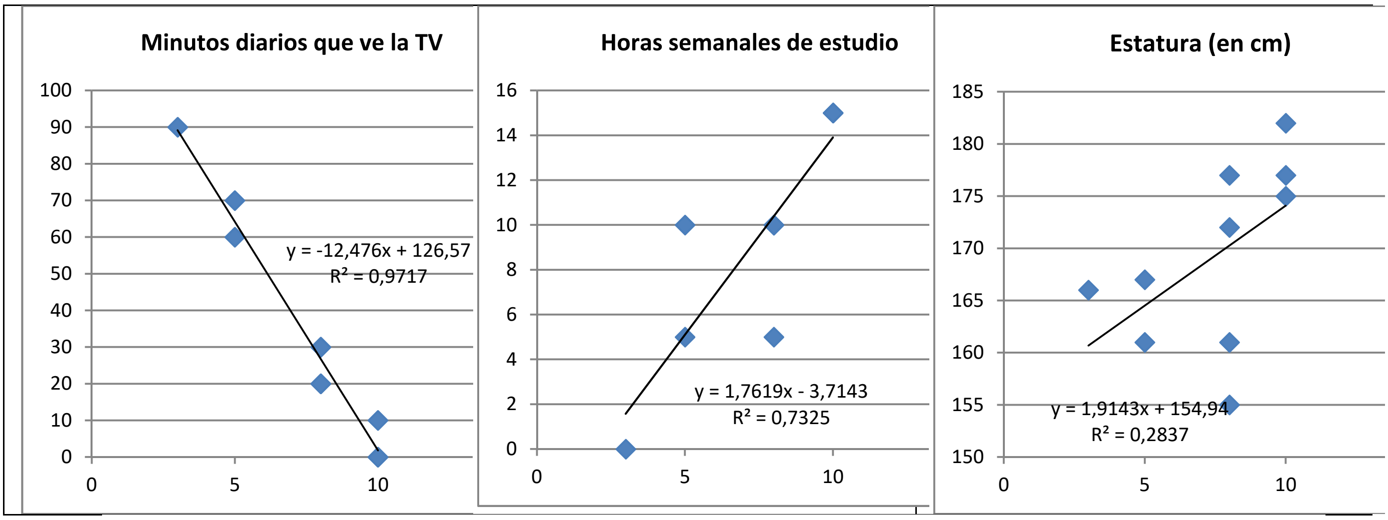
c) Recta de regresión: Litros = 3188 * Horas + 703.

11. Preguntamos a 10 estudiantes de 1º de Bachillerato por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Horas semanales de estudio	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Estatura (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Queremos estudiar la relación entre las calificaciones de Matemáticas y las otras tres variables. Para ello dibuja los diagramas de dispersión, y calcula los coeficientes de correlación y determinación. Calcula las rectas de regresión.

Solución:



Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y los minutos diarios de ver la TV se observa que existe una correlación alta en valor absoluto, pero negativa.

La recta de regresión es y = –12.47 x + 126.57, y el coeficiente de correlación = 0.986; A más tiempo dedicado a ver la TV, peores notas en Matemáticas.

Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y las horas semanales de estudio se observa que existe una correlación alta y positiva.

La recta de regresión es y = 1.76 x – 3.7, y el coeficiente de correlación = 0.86; A más horas de estudio, mejores notas en Matemáticas.

Al estudiar la relación entre las calificaciones en Matemáticas y la estatura se observa que existe una correlación muy pequeña.
La recta de regresión es y = 1.9 x +155, y el coeficiente de correlación = 0.53; Hay poca relación.

12. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Elige una muestra de 10 personas y hazles dos preguntas con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calza, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música, la calificación en Matemáticas de su último examen… Representa los datos obtenidos en una tabla de doble entrada. Haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de doble entrada de frecuencias absolutas, frecuencias relativas. Obtén las distribuciones marginales y condicionadas.
b) Con las distribuciones unidimensionales, dibuja los diagramas de barras, diagramas de líneas y diagramas de sectores. Calcula las medias, medianas y modas. Calcula las varianzas y las desviaciones típicas. Calcula los cuartiles y los intervalos intercuartílicos.
c) Con las distribuciones bidimensionales, dibuja un diagrama de dispersión, y calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
d) Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Solución abierta:

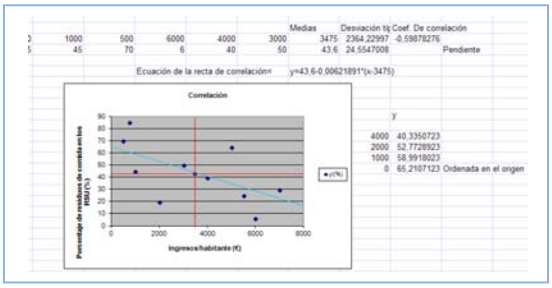
Utiliza una hoja de cálculo con un ordenador

13. El objetivo de esta práctica es estudiar la dispersión entre dos variables, mediante una nube de puntos o diagrama de dispersión, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

En 10 países se anotan los ingresos medios, en euros, por habitante y año, y el porcentaje medio en los residuos sólidos de comida. Se obtiene:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

a) Abre una hoja de cálculo. Copia los datos. Calcula la media y la desviación típica de las x, y la media y la desviación típica de las y.



b) Representa la nube de puntos. Selecciona los datos, incluyendo a las medias. Aprieta el botón de asistente de gráficos y elige **XY (Dispersión)**. En títulos escribe como **Título del gráfico** *Correlación*, en **Eje de valores (X)** describe la variable x sin olvidar decir las unidades, escribe: *Ingresos/habitante (€),* en **Eje de valores (Y)** describe la variable y sin olvidar decir las unidades, escribe: *Porcentaje de residuos de comida en los RSU (%)*. En **Leyenda** elige no mostrar leyenda.

c) Observa que si $x - \bar{x}$ e $y - \bar{y}$ tienen el mismo signo quedan en los cuadrantes I y III y si lo tienen distinto en II y IV. Cuenta los puntos que quedan en los cuadrantes I y III, cuenta los que quedan en los cuadrantes II y IV. Nos puede dar una idea de la correlación. ¿Va a ser positiva o negativa? ¿Es una correlación fuerte o débil? ¿Entre que valores puede variar el coeficiente de correlación? Estima a ojo un valor para esa correlación.

d) Organiza en Excel una hoja de cálculo que te permita calcular la correlación. Escribe los datos en las filas 3 y 4. En L3 y L4 calcula las medias utilizando la función **PROMEDIO**. En M3 y M4 calcula la desviación típica utilizando la función **DESVEST**. En N3 calcula el coeficiente de correlación, utilizando la función:

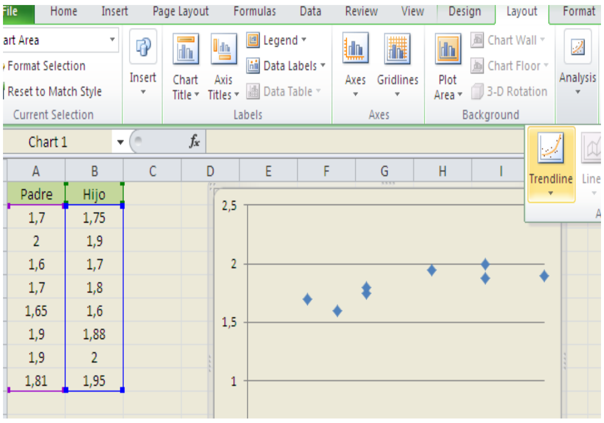
COEF.DE.CORREL(B3:K3;B4:K4)

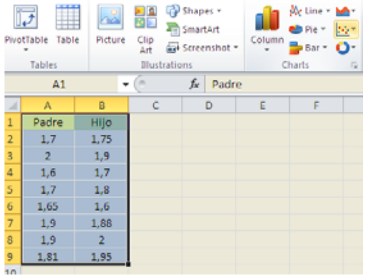
e) Ahora vamos a mejorar nuestro gráfico. Observa que si colocas al ratón encima de un punto indica las coordenadas. Traza las rectas $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ que indican las medias. Utiliza para ello la paleta de dibujo. Dibújalas en color rojo.

f) La recta de regresión es la recta que hace mínimas las distancias de la nube de puntos. Es la recta: $y = \bar{y} + \rho\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$. Calcula en N4 la pendiente de la recta. Escribe la ecuación de la recta. Observa el gráfico. ¿Cómo la habrías estimado a ojo? Evalúa la pendiente y la ordenada en el origen.

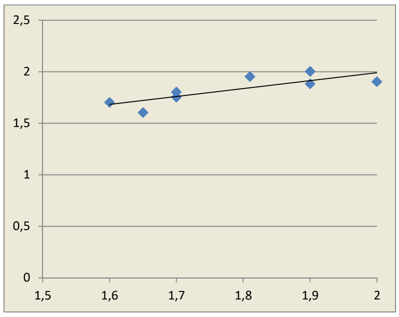
14. Se recoge en una tabla la altura (en metros) de un padre y de la de su hijo con 15 años de edad.

Padre	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Hijo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95





a) Utiliza el ordenador para representar el diagrama de dispersión. Copia los datos en una hoja de cálculo en las columnas A y B. Señala las dos series y elige *insertar gráfico de dispersión*. Automáticamente verás que aparece el diagrama de dispersión (nube de puntos). Juega con las opciones para modificar el título, el formato, la escala de los ejes…



b) Dibuja la recta de regresión. Pincha sobre un punto de la nube, y elige "*Agregar línea de tendencia*". Para que dibuje el ordenador la recta de regresión la línea de tendencia debe ser *Lineal*. En la pantalla que aparece marcamos la casilla que dice: "*Presentar ecuación en el gráfico*" y la casilla que dice "*Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico*". Al final, si lo has hecho bien, el dibujo debe ser más o menos algo similar a esto:

c) Utiliza la recta para determinar que altura del hijo correspondería a una altura del padre de 1.75 m.

b) y = 0.67x + 0.62; c) 1.7975;

AUTOEVALUACIÓN

Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

1. La media de errores es

a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Solución: c)

2. La media de tiempos es

a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9

Solución: a)

3. La desviación típica de errores es

a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Solución: c)

4. La desviación típica de tiempos es

a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2

Solución: b)

5. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:

a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5.9, 6.1 y 7.3 d) 6, 7 y 8

Solución: d)

6. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:

a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6.5, 7.5 y 8.5 d) 6, 7 y 8

Solución: a)

7. La covarianza es:

a) 1.21 b) –1.5 c) –1.4 d) 1.425

Solución: d)

8. El coeficiente de correlación es:

a) 0.8 b) –0.8 c) –0.7 d) 0.7

Solución: a)

9. La recta de regresión lineal de los errores sobre el tiempo es:

a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.71x$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

Solución: b)

10. La recta de regresión lineal del tiempo sobre los errores es:

a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.7$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

Solución: c)

CAPÍTULO 7: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROBABILIDAD

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

- **a)** La superficie de las provincias españolas.
- **b)** Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
- **c)** El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
- **d)** Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
- **e)** Saber si el próximo año es bisiesto.

Solución: Son fenómenos aleatorios: b), d); No lo son: a), c), e).

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

Solución: {A, E, I, O, U}

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

Solución: {Cae de punta, No cae de punta}

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

Solución abierta: Por ejemplo: 1) Sacar dos caras. 2) Las dos monedas sean distintas.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

Solución abierta: 1) La cifra de las unidades sea par; 2) La cifra de las unidades sea un 7.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Solución abierta: Por ejemplo: sacar figura; sacar un as; casar un oro.

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Solución: $A \cup B = A$, $A \cap B = B$ ***y*** $A - B = \varnothing$.

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

Solución: {1, 2, 3, 4}

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

Solución: Son incompatibles. Su intersección es el suceso imposible.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".

Solución abierta: Por ejemplo: 1) sacar un rey; 2) sacar una carta entre 3 y 6; 3) sacar sota.

11. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

Solución: 10/40 = 1/4.

12. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Estudiaría las frecuencias relativas.

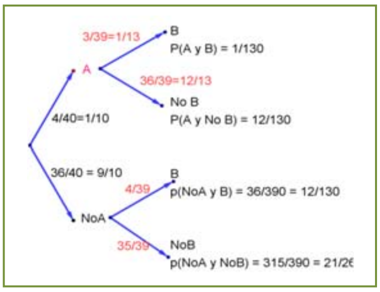
13. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

Solución: P(no 5) = 5/6; P(no múltiplo de 3) = 4/6; P(no menor que 2) = 5/6.

14. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Solución: P(ninguna cara) = 1/4; P(al menos una cara) = 3/4; 1/4 + 3/4 = 1. Son sucesos contrarios.

15. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en



la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

Solución gráfica: P(B/noA) = 4/39; P(noB/noA) = 35/39; P(dos ases) = 1/130;
P(un solo as) = 12/130 + 12/130 = 12/65.

16. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

Solución: P(no salen 2 ases) = 1 – (4/40)(3/39) = 129/130; P(ningún as) = (36/40)(35/39) = 21/26.

17. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Solución: Con reemplazo: 1/1000; Sin reemplazo: P = (4·3·2)/40·39·38) = 1/2470.

18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

Solución: 1/36.

19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

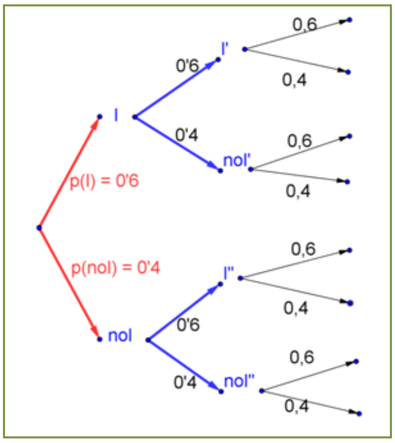
Solución: P(ningún 6) = 25/36. P(al menos un 6) = 1 – 25/36 = 11/36.

20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A) = 5/36$ (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B) = 8/36$ (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

Solución: a) $P(A) = 5/36$; $P(B) = 8/36$; ***b)*** $P(A \cap B) = 2/36$ ***((3, 5) y (5, 3));*** $P(A \cup B) = 11/36$; $P(A \cap \overline{B}) = 3/36$;
$P(\overline{A} \cap B) = 6/36$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 34/36$; ***c)*** $P(A/B) = 2/8$; $P(A/\overline{B}) = 3/28$; $P(\overline{A}/B) = 6/8$.

21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0.6$.

Solución gráfica: P(al menos uno intencionado) =
1 – P(ninguno intencionado) =
1 – 0.4·0.4·0.4 = 0.936.



22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

Solución: P(fallo) = 0.04·0.02·0.01 = 0.000008; P(todo bien) = 1 – P(fallo) = 1 – 0.000008 = 0.999992.

23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Solución: P(fallo) = 0.003; a) P(desechar ambas) = 0.003*0.003 = 0.000009; b) P(desechar sólo una) = 2(0.997*0.003) = 0.005982; c) P(ninguna) = 0.997*0.997 = 0.994; d) P(sólo la tercera) = 0.997*0.997*0.003*0.997 = 0.00297.

24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Solución: A) 1/4 + 1/4 = 1/2; B) 2(1/8) = 1/4; C) 2(1/16) = 1/8; D) 1/2 +1/4 + 1/8 = 7/8.

25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (*C*)	**Accidente en zona urbana (*U*)**	**Totales**
Accidente con víctimas (*V*)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

Solución:

	Accidente en carretera (*C*)	**Accidente en zona urbana (*U*)**	**Totales**
Accidente con víctimas (*V*)	0.27	***0.30***	0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)	***0.31***	***0.13***	***0.44***
Totales	0.58	***0.43***	1

b) $P(V \cap C) = 0.27$; $P(V \cap U) = 0.30$; $P(M \cap C) = 0.31$; $P(M \cap U) = 0.13$; $P(V) = 0.56$; $P(M) = 0.44$; $P(C) = 0.58$y $P(U) = 0.43$.

c) $P(U/V) = 0.30/0.56 = 0.54$; $P(C/V) = 0.27/0.56 = 0.48$; $P(V/U) = 0.30/0.43 = 0.7$; $P(V/C) = 0.27/0.58 = 0.47$. Los sucesos V y C son dependientes pues $P(V) = 0.56 \neq P(V/C) = 0.47$.

26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (*C*) o urbanos (*U*), pero que ahora los clasificamos en leves (*L*), graves (*G*) o mortales (*M*). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

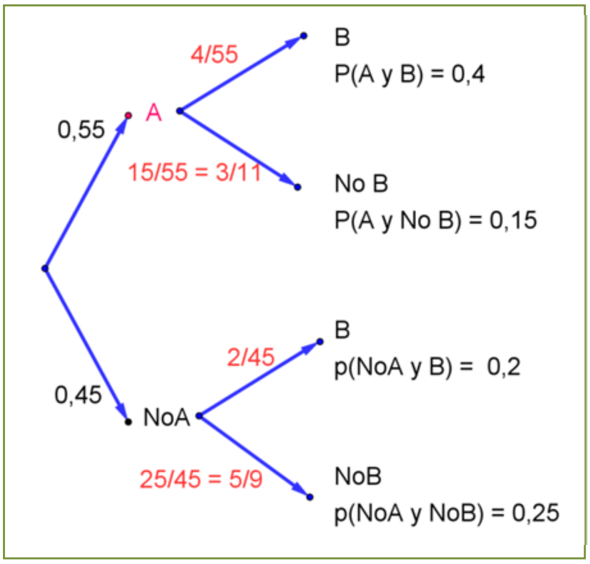
Solución abierta: Debe ser similar a la del problema anterior, pero en lugar de V y M se añaden tres filas con leves (L), graves (G) y mortales (M).

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Leves (L)	*400*	*300*	*700*
Graves (G)	*125*	*75*	*200*
Mortales (M)	*75*	*25*	*100*
Totales	*600*	*400*	*1000*

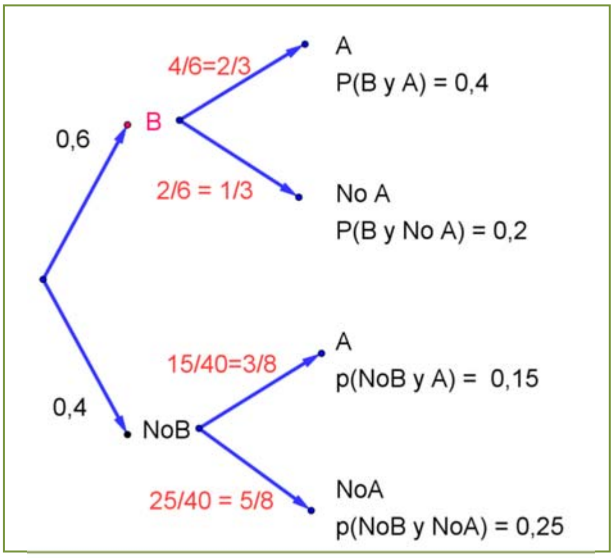
27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	**No *A* = $\bar{A}$**	
B	0.4	0.2	0.6
No *B* = $\bar{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

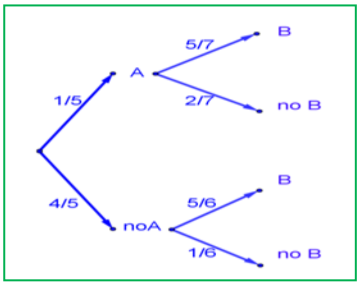
Solución gráfica:



4/55
B
P(A y B) = 0,4
0,55
A
15/55 = 3/11
No B
P(A y No B) = 0,15
B
2/45
p(NoA y B) = 0,2
0,45
NoA
25/45 = 5/9
NoB
p(NoA y NoB) = 0,25



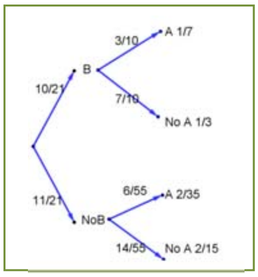
4/6=2/3
A
P(B y A) = 0,4
0,6
B
2/6 = 1/3
No A
P(B y No A) = 0,2
A
15/40=3/8
p(NoB y A) = 0,15
0,4
NoB
25/40 = 5/8
NoA
p(NoB y NoA) = 0,25



28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.

Solución gráfica:

	A	noA	Totales
B	*5/35 = 1/7*	*20/30 = 1/3*	*10/21*
No B	*2/35*	*4/30 = 2/15*	*11/21*
Totales	*7/35 = 1/5*	*24/30 = 4/5*	*1*



29. Tenemos dos urnas, *A* y *B*. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *A*?

Solución: P(A/negra) = 1/4.

30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (*M*)	**Placebo (no *M*)**	
Curados (*C*)	50	30	80
No curados (no *C*)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: *P*(*M*/*C*)

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: *P*($\overline{M}$ /*C*).

Solución: a) p(M/C) = 50/80 = 5/8; b) p(noM/C) = 30/80 = 3/8.

Problemas propuestos en Selectividad

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

Solución:

	Fabricado Correcto (FC)	***Fabricado Defectuoso (FD)***	
Dispositivo Correcto (DC)	*0.978*	*0.002*	*0.98*
Dispositivo Defectuoso (DD)	*0.002*	*0.018*	*0.02*
	0.98	*0.02*	*1*

A) P(FC/DD) = 0.002/0.02 = 0.1; B) P(FD/DC) = 0.002/0.98 = 0.00204.

B)

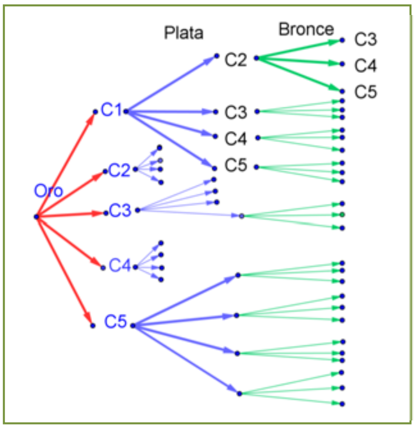
32. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

Solución: P(negra) = (1/3)(4/10) + (1/3)(1/6) + (1/3)(3/8) = 113/360.

33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

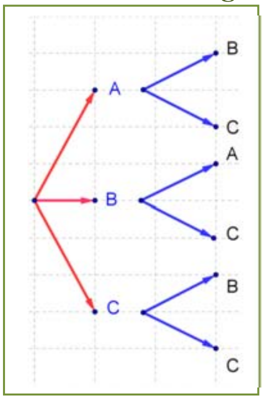
Solución: 1/2.

2. COMBINATORIA



34. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

Solución gráfica: Observa el diagrama en árbol. La medalla de oro la puede ganar cualquiera de los 5 corredores, C1, C2, C3, C4 o C5. Si la gana C1, la medalla de plata la puede ganar alguno de los otros 4, nunca C1, luego la podría ganar C2, C3, C4 o C5. Si la gana C2, la medalla de bronce la puede ganar 3 corredores: C3, C4 o C5. Por tanto las formas posibles de ganar las medallas son: 5·4·3 = 60.



35. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras?

b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

Solución gráfica: a) Distintas: 3·2 = 6; Repetidas: 3·3 = 9; b) Palabras de 3 letras: 5·27·22 = 2970.

36. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

Solución gráfica: 4·2·3 = 24 modelos diferentes. No puede.

37. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

Solución: $P_5 = 120$.

38. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Solución gráfica: Cada uno de los 4 puede llegar el primero. Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, y 3. Si la carrera no está amañada hay $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 24 formas distintas de llegar a la meta.

39. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Solución: $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

40. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Solución: Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.
Se pueden ordenar de P_{28} = 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes

41. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Solución: $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

42. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Solución: ***$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.***

43. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{11!}$; f) $\frac{677!}{676!}$.

Solución: a) 5; ***b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$;*** ***c) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/3 \cdot 2 \cdot 1 = 504$;*** ***d) $7 \cdot 6 = 42$;*** ***e) $13 \cdot 12 = 156$;*** ***f) 677.***

44. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Solución: ***a) n+1;*** ***b) n+4;*** ***c) n +3;*** ***d) n.***

45. Expresa utilizando factoriales:

a) $5{\cdot}4{\cdot}3$; b) $10{\cdot}11{\cdot}12{\cdot}13$; c) $8{\cdot}7{\cdot}6$; d) $10{\cdot}9$.

Solución: ***a) 5! / 2!;*** ***b) 13! / 9!;*** ***c) 8! /5!;*** ***d) 10! / 8!.***

46. Expresa utilizando factoriales:

a) $(n+3){\cdot}(n+2){\cdot}(n+1)$; b) $n{\cdot}(n+1){\cdot}(n+2){\cdot}(n+3)$; c) $n{\cdot}(n+1){\cdot}(n+2){\cdot}\ldots{\cdot}(n+k)$.

Solución: ***a) (n+3)! / n!;*** ***b) (n+3)! / (n−1)!;*** ***c) (n+k)! / (n−1)!***

47. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

Solución: $P_{30} = 30!$

48. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Solución: $P_9 = 9! = 362\,880$.

49. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

Solución: $9 \cdot VR_{9,3} = 243$.

50. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

Solución: Suponemos que los números pueden empezar por 0: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 196\,830\,000$.

51. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Solución: $VR_{2,8} = 256$.

52. Calcula: a) $VR_{5,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{10,2}$; d) $VR_{2,10}$.

Solución: ***a) 32;*** ***b) 256;*** ***c) 100;*** ***d) 4 096***

53. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 4 elementos tomadas de 5 en 5.
b) Las variaciones con repetición de 8 elementos tomadas de 2 en 2.
c) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 4 en 4.

Solución: a) $VR_{4,5} = 4^5$; ***b) $VR_{8,2} = 8^2$;*** ***c) $VR_{7,4} = 7^4$.***

54. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

Solución: $22 \cdot 27 \cdot 27 = 16\,038$.

55. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Solución: $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

56. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Solución: Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras. Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el

cero pero no la colocada en primer lugar. Para la tercera 8 y para la cuarta 7; En total 9 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 = 136 080 posibilidades.

57. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Solución: $V_{11,4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$.

58. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Solución: $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$

59. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

Solución: $V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

60. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

Solución: a) $V_{10,6} = 10*9*8*7*6*5 = 151\ 200$; b) $V_{9,5} = 9*8*7*6*5 = 15\ 120$; c) $V_{7,4} = 7*6*5*4 = 840$.

61. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

Solución: a) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; b) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; c) $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

62. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Solución: $C_{7,5} = 21$.

63. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Solución: $C_{10,3} = 120$

64. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Solución: $C_{52,5} = 1\ 497\ 000\ 960$

65. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

Solución:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

66. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m.

Solución: $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$; $64 = 2^6$.

67. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Solución: $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$ y $C_{5,5} = 1$.

68. Desarrolla $(a + b)^6$

Solución: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

69. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

Solución: a) $(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$;

b) $(x - 3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$;

c) $(x + 2)^7 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$;

d) $(-x + 3)^5 = 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$.

70. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

Solución: $10\,(3x)^3(x^2/2)^2 = (270/4)\,x^7$. El coeficiente es $270/4 = 135/2$.

71. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

Solución: $(\sqrt{2})^5 - 5(\sqrt{2})^4(x/2) + 10(\sqrt{2})^3(x/2)^2 - 10(\sqrt{2})^2(x/2)^3 + 5(\sqrt{2})(x/2)^4 - (x/2)^5 =$
$4\sqrt{2} - 10x + 5\sqrt{2}x^2 - 5/2x^3 + (5\sqrt{2}/16)x^4 - x^5/32$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Probabilidad

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

Solución: 20 estudian francés e inglés: No estudian ni francés ni inglés 20 estudiantes.

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

Solución: a) 1/2; b) 5/6; c) 1/2; d) 1/6; e) 5/6.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

Solución: P(chico y azules) = 8/38; P(chico o azules) = 31/38.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

Solución: P(Juan o Jorge) = 3/5.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

Solución: A) 1/2; B) 1/2; C) 3/4; D) 1/4; E) 1/2.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

Solución: *A)* $(1/2)^3 = 1/8$; ***B) 7/8; C) 3/8.***

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

Solución: P(1) = 0; P(2) = 1/36; P(3) = 2/36; P(4) = 3/36; P(5) = 4/36; P(6) = 5/36; P(7) = 6/36; P(8) = 5/36; P(9) = 4/36; P(10) = 3/36; P(11) = 2/36; P(12) = 1/36.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

$9 = 3 + 3 + 3 \quad 10 = 4 + 3 + 3$
$9 = 4 + 3 + 2 \quad 10 = 4 + 4 + 2$
$9 = 4 + 4 + 1 \quad 10 = 5 + 3 + 2$
$9 = 5 + 2 + 2 \quad 10 = 5 + 4 + 1$
$9 = 5 + 3 + 1 \quad 10 = 6 + 2 + 2$
$9 = 6 + 2 + 2 \quad 10 = 6 + 3 + 1$

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216; y la suma 6 + 3 + 1 puede salir en (6, 3, 1), (6, 1, 3), (3, 6, 1), /3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), luego su probabilidad es 6/216.

P(9) = (1 + 6 + 3 + 3 + 6 + 3)/216 = 22/216. P(10) = (3 + 3 + 6 + 6+ 3 + 6)/216 = 27/216.

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

Solución: P(A) = 1/4; P(B) = 1/4, si los números primos son el 2, 3 y 5; P(C) = 1/2.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

Solución: Es igualmente probable. Son ambos sucesos de probabilidad $(1/2)^{50}$.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

Solución: P(cruz) = 1/3; P(cara) = 2/3.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

Solución: 3/7.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

Solución: a) 1/2; b) 1/48; c) Una pareja $7C_{12,2}/C_{14,4}$. ***Dos parejas:*** $C_{7,2}/C_{14,4}$; ***d)***

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

Solución: P(2) = 1/9; P(1) = 2/9; A) P(impar) = 6/9; B) P(primo) = (1 + 2 + 2)/9 = 5/9; C) P = 4/9; D) P(primo o impar) = 7/9.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

Solución: A) P = 1/22; B) P = 5/11; C) P = 6/11; D) P = 9/22.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

Solución: A) 1/6; B) 1/6; C) 1/4.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

Solución: $A)\ 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8;\ B)\ 1/2^9 + 1/2^{10} + \ldots = 1 - 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/2^4 + \ldots 1/2^8 = 1 - 255/256 = 1/256.$

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

Solución: P = 1 – (2/20)*(1/19) = 378/380 = 189/190.

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Solución: 1/3.

Combinatoria

20. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Solución: $P_5 = 5! = 120$; $P_8 = 8! = 40\,320$.

21. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Solución: Hay 24 maneras de hacerse la fotografía. Y hay $2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 8$ ***maneras de hacerse la fotografía alternando chicos y chicas***

22. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Solución: $P_9 = 9! = 363\,880$ ***maneras de introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes.***

23. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Solución: $P_7 = 7! = 5040$ ***formas de llegar a la meta. La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040.***

24. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Solución: Hay $P_5 = 5! = 120$ ***números distintos de 5 cifras diferentes. Si empiezan por 5 hay*** $P_4 = 4! = 24$ ***números. Si empiezan por 5 y terminan por 7 hay*** $P_3 = 3! = 6$ ***números.***

25. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

Solución: Se pueden formar $P_3 = 6$ ***banderas distintas con 3 franjas y 3 colores. Con 6 colores se pueden formar*** $V_{6,3} = 120$ ***banderas distintas con tres franjas. Y si no es preciso que las franjas tengan colores distintos tenemos*** $VR_{6,3} = 216$ ***banderas diferentes.***

26. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

Solución: Hay $V_{6,3} = 120$ ***números de 3 cifras distintas. Son impares 60. Para calcular los múltiplos de 4 analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64. En total tenemos*** $7 \cdot 6 = 42$ ***múltiplos de 4.***

27. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

Solución: $VR_{6,34} = 6^{34}$. ***La suma: En las unidades hay igual número de 1, que 2… que 6, Por tanto hay*** 6^{34}, ***Las unidades suman*** $6^{34}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 6^{34} \cdot 21$. ***Lo mismo suman las cifras de las decenas, centenas… Por tanto la suma total valdrá:*** $6^{34} \cdot (1034 + 1033 + \ldots + 10 + 1) \cdot 21$.

28. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

Solución: María tiene $V_{7,6} = 5\,040$ ***para ordenar las películas entre los 7 días de la semana. Si sólo va 3 días al cine el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.***

29. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

Solución: Tenemos $V_{6,4} = 360$ ***números con 4 dígitos formados por las 6 cifras, como hay 60 que empiezan por 0 tenemos 300 números de cuatro cifras. Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir 120 números.***

30. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ó 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Solución: Con una secuencia de 8 dígitos se pueden formar $VR_{2,8} = 256$ bytes. Con una secuencia de 16 dígitos se pueden formar $VR_{2,16} = 65\,536$ bytes. Y con solo 4 dígitos sólo podríamos formar $VR_{2,4} = 16$ bytes, no podemos escribir las letras del alfabeto.

31. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

Solución: $C_{8,4} = 70$.

32. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

Solución: Se pueden hacer $C_{4,2} = 6$ mezclas diferentes.

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Solución: Hay $C_{30,3} = 4\,060$ maneras de elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30. Solución abierta.

34. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Solución: Hay $C_{5,3} = 10$ productos. Sólo uno es entero. Hay $C_{3,2} = 3$ productos cuyo resultado es un número racional y $C_{4,2} = 6$ productos cuyo resultado es un número irracional.

35. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

Solución: $C_{7,4} = 35$.

36. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

Solución: Hay $C_{9,3} = 84$ formas.

37. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Solución: Hay $C_{15,2} = 105$ posibilidades. Hay $C_{5,2} = 10$ posibilidades de que no te sepas ninguno de los dos temas y la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas es 10/105 = 0,09.

38. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Solución: $C_{7,4} = 35$ opciones

39. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Solución: Hay $C_{12,4} = 495$ sucesos en los que se obtienen 4 éxitos y de estos en $C_{11,3} = 165$ se tiene éxito en el último tiro.

40. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Solución: Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener 12 resultados. Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos 24 resultados. Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos 288 resultados.

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

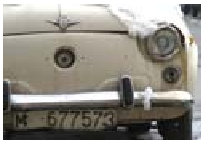
Solución: Si hubo 91 apretones $C_{x,2} = 91$ y había 14 personas. Si hubo $C_{x,2} = 45$ apretones había 10 personas.

42. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Solución: Con 4 cifras podemos formar $VR_{10,4} = 10\,000$ contraseñas. No tienen ningún número repetido $V_{10,4} = 5\,040$, por lo tanto tienen algún número repetido 4 960 contraseñas. Tienen el número 0 repetido dos veces $C_{9,2} \cdot PR_{4,2} = 432$ contraseñas y cualquier número repetido dos veces 432 contraseñas.

43. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Solución: Si sólo recuerda el comienzo, 656, son $C_{5,4}*10*10*P_6 = 360\,000$. Las posibilidades de acertar: 1/360000; Si además recuerda el 77 del final: $V_{5,4} = 120$ posibilidades, luego la probabilidad de acertar con una llamada es 1/120.



44. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Solución: Con M 123456 había 1 000 000 matrículas diferentes, con M 1234 A había $VR_{10,4}*28 = 280\,000$ distintas, y con 1234 ABC hay $VR_{10,4}*VR_{28,2} = 18\,000\,000$.

45. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

Solución: 7.

46. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Solución: $C_{7,3}*C_{4,2} = 35*6 = 210$. Si yo soy un experto: $C_{6,2}*C_{4,2} = 15*6 = 90$.

47. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

Solución: $V_{8,2} = 8*7 = 54$.

48. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Solución: La probabilidad de que ninguno lo pueda llevar es 1/3, luego son unos 122 días al año..

49. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Solución: Las posibilidades son acertar las 3 tiradas o acertar 2 tiradas o acertar 1 tirada o no acertar ninguna tirada: $C_{10,3} + C_{10,2} + C_{10,1} + C_{10,0} = 120 + 45 + 10 + 1 = 176$. Si la primera no se acierta: $C_{10,2} = 45$.

50. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Solución: $PR_{6,4} = 6^4 = 1296$ formas distintas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
   a) 5/6 b) 11/36 c) 35/36 d) 30/36

Solución: b)

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: c)

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: a)

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
   a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

Solución: b)

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:
   a) $P(A) + P(noA) = 1$
   b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$
   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Solución: a)

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
   a) 58 b) 120 c) 96 d) 192

Solución: c)

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:
   a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080

Solución: a)

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

Solución: b)

9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

Solución: a)

10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
    a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

Solución: b)

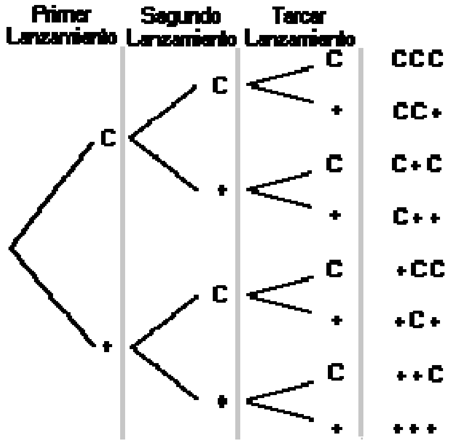
CAPÍTULO 8: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama en árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.

Solución gráfica:

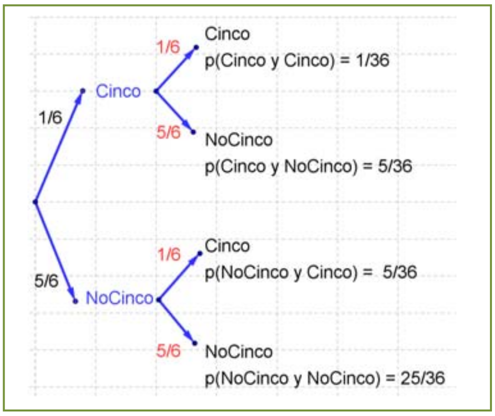


Número de caras	*0*	*1*	*2*	*3*
Función de cuantía: p(x)	*1/8*	*3/8*	*3/8*	*1/8*
Función de distribución: F(x)	*1/8*	*4/8 = 1/2*	*7/8*	*8/8 = 1*

2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.

Solución:

Número de 5s:	*0*	*1*	*2*
Función de cuantía: p(x)	*25/36*	*10/36*	*1/36*
Función de distribución: F(x)	*25/36*	*35/36*	*36/36 = 1*



3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

Solución: 800 euros.

4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cara o cruz (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, ¡que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar! Imagina que lleva 500 euros. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades y sus probabilidades. B) La distribución de probabilidad: Ganancia (x) → Probabilidad (x). C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

Solución gráfica:

	Probabilidad	*Ganancia*
Probabilidad de ganar 10 euros	*63/64*	*10*
Probabilidad de perder	*1/64*	*320*

E(x) = 10(63/64) – 320(1/64) = 310/64. Es ventajoso si llevamos suficiente dinero. Pero con 500 euros ya no tiene dinero para la séptima jugada seguida de pérdidas.

5. Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?

Solución: Sea x la cantidad apostada

P(x)	*1/6*	*15/36*	*15/36*
Ganancia	*3x – x = 2x*	*x – x = 0*	*x – x = 0*

E(x) = 2/6. La mejor estrategia es apostar al 7.

6. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:

Sexo del recién nacido:	chica	chico
Probabilidad:	0.485	0.515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

Solución: $P(x=7)=\binom{10}{7}\cdot 0.485^7\cdot 0.515^3$

7. Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No lo calcules, sólo plantea como lo calcularías).

Solución: $\sum_{x=6}^{15}\binom{20}{x}\cdot 0.12^x\cdot 0.88^{20-x}$

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.

Solución: $E(x) = 1;\ \sigma^2 = 1/2;\ \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1

Solución: A) P(caras < 1) = P(caras = 0) = 1/8. B) P(caras ≤ 1) = P(caras = 0) + P(caras = 1) = 1/2.

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

Solución: A) P(caras < 3) = 1/2. B) P(caras ≤ 3) = 13/16.

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

Solución: P(caras < 5) = $\sum_{x=0}^{4}\binom{15}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{15-x}=\frac{1941}{2^{15}}$

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

Solución: P(número de 5s > 10) = $\sum_{x=11}^{15}\binom{15}{x}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{15-x}$

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consume de una fábrica se ha comprobado que el 90 % son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, varianza y desviación típica.

Solución: $E(x) = 450;\ \sigma^2 = 45;\ \sigma \approx 6{,}7.$

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80 % de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

Solución: 800 curaciones.

15. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) $P(z \le 0.37)$; b) $P(z < 1.51)$; c) $P(z \ge 0.87)$; d) $P(z \le -0.87)$; e) $P(0.32 < z < 1.24)$.

Solución: a) $P(z \le 0.37) = 0.9345$; ***b)*** $P(z < 1.51) = 0.1922$; ***c)*** $P(z \ge 0.87) = 0.1922$; ***d)*** $P(z \le -0.87) = 0.1922$;

e) $P(0.32 < z < 1.24) = 2670$

16. Se trata a pacientes con trastorno del sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

Solución: P(x < 300) = 0.3707.

17. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m^2 con una desviación típica de 80 mm/m^2. Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m^2. b) La precipitación esté entre 400 y 510 mm/m^2. c) La precipitación sea menor de 300 mm/m^2.

Solución: a) P(x < 500) = 0.2676; b) P(400 < x < 510) = 0.5058; c) P(x < 300) = 0.0307.

18. En el caso del problema anterior de una N(450, 80) determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Solución: $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.8544$, $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$

19. En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alcance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

Solución: a) P(x = 25), o mejor, P(x ≥ 25) = 0.0062; b) P(x < 25) = 0.9938; c) P(18 < x < 22) = 0.6826; d) Rápido si su velocidad es mayor que 22 km/h, muy rápido si 24 km/h, lento si 18 km/h, y muy lento si 18 km/h.

20. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿Y de que sea mayor que 800?

Solución: P(400 < x < 600) ≈ 1; P(x < 800) ≈ 0.

21. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70 % de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida media sea superior a 1000 horas?

Solución: P(20 < x < 30) = 0.0823.

22. Una compañía aérea ha estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan, por lo que venden más billetes que las plazas disponibles. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas (con lo que suelen reservar hasta 270). Calcula la probabilidad de que lleguen 260 pasajeros. En 500 vuelos de dicho avión, ¿en cuántos consideras que habrá exceso de pasajeros?

Solución: $\binom{270}{260}\left(\frac{95}{100}\right)^{260}\left(\frac{5}{100}\right)^{10}$.

$$P(\text{haya exceso de pasajeros}) = P(\text{lleguen más de }260) = \sum_{n=261}^{270} P(\text{lleguen }n) = \sum_{n=261}^{270}\binom{270}{n}\left(\frac{95}{100}\right)^{n}\left(\frac{5}{100}\right)^{270-n} \approx \frac{13}{100}$$

En 500 vuelos aproximadamente habrá exceso de viajeros en 65 vuelos

23. Rehaz los cálculos de la actividad resuelta anterior para un nivel de confianza del 99 %.

Solución: Como 700/2000 = 35, una primera respuesta podría ser que 0.35·8000000 = 2800000 votos, pero, ¿qué confianza podemos tener de ese resultado.

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, 1 – α. Sea α = 0.01 y 1 – α = 0.99.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media μ = np = 2000·p y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000\cdot p(1-p)}$. ***Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea:*** $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.99$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$P(\mu - k\sigma - 0.5 \le X \le \mu + k\sigma + 0.5) \ge 0.99$.

Tipificamos: $P(\frac{-k\sigma - 0'5}{\sigma} \le Z \le \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma}) \ge 0.99$.

Obtenemos que $z = \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma} \ge 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \ge 2.58\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que: $P(2796519 \le x \le 2803480) \ge 0.99$.

24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: $P(1198643 \le x \le 1201357) \ge 0.95$.

25. Se lanza 600 veces un dado y contamos el número de 5s. a) ¿Cuál es el intervalo simétrico respecto de la media con una probabilidad de 0.99? b) Lo mismo con una probabilidad del 0.6.

Solución: a) $P(76 \le x \le 124) \ge 0.99$; b) $P(92 \le x \le 108) \ge 0.6$.

26. En una actividad anterior vimos que en una compañía aérea se había estudiado que el 5 % de las personas que reservan un billete para un vuelo no se presentan. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas. ¿Qué número de reservas n puede aceptar la compañía admitiendo una probabilidad del 0.02 para que el número de reservas supere al número de plazas? (*Ayuda*: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0.02 \Rightarrow p(x \le 260) = 1 - p(x > 260) \ge 0.98$).

Solución: Solución: Se cumple que $p(x \le 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{n}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{n-i} \ge 0.98$. ***Probando con*** $n > 260$, ***se cumple que el primer n en el que la probabilidad baja de 0,98 es 268:***

$p(x \le 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{268}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{268-i} = 0.95\ldots$ ***Por tanto*** $n = 267$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuenta el número de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

Solución gráfica:

Número de treses	*0*	*1*	*2*	*3*
Función de cuantía: p(x)	*125/216*	*75/216*	*15/216*	*1/216*
Función de distribución: F(x)	*125/216*	*200/216*	*215/216*	*216/216*

E(x) = 0.5; $\sigma^2 = 0.666\ldots$; $\sigma = 0.816$.

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga ganamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿Y en 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

Solución:

Número de caras	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Ganar	*–3*	*5 – 3 = 2*	*10 – 3 = 7*	*15 – 3 = 12*	*20 – 3 = 17*
p(x)	*1/16*	*4/16*	*6/16*	*4/16*	*1/16*

En una jugada se espera ganar 7 euros, en 20 se espera 140 euros y en 100 jugadas, 700 euros.

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, "suma de puntos obtenidos". A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?

Solución gráfica: A)

Suma	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
p(x)	*1/24*	*2/24*	*3/24*	*4/24*	*4/24*	*4/24*	*3/24*	*2/24*	*1/24*

B) E(x) = 3.33… euros.

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

Solución: $P(x = X) = \binom{10}{X} \cdot 0.2^X \cdot 0.8^{10-X}$;

P(x = 9) o P(x = 10) = $\binom{10}{9} \cdot 0{,}2^9 \cdot 0{,}8^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot 0{,}2^{10} = 0.2^9 \cdot (8 + 0.2) = 0.0000042$.

5. Si $p(x)$ es la probabilidad de tener x éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$, y $p(x+1)$ es la de obtener $x+1$ éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente: $p(x+1) = \frac{p(x)}{x+1}(n-x)\frac{p}{q}$

Solución:

$$P(x+1) = \binom{n}{x+1} \cdot p^{x+1} \cdot q^{n-x-1} = \frac{n!}{(x+1)!\,(n-x-1)!} \cdot p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q}$$
$$= \frac{n!\,(n-x)}{x!\,(x+1)(n-x)!} \cdot p^x \cdot p \cdot \frac{q^{n-x}}{q} = \frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}$$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al dos por 1 a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale un impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale, ¿Te parece un juego equitativo?

Solución: E(x) = –10/ 37. No es equitativo. Gana la banca.

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparece cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si en el segundo, 20, si en el tercero, 40, … y en el *n*-ésimo, $10 \cdot 2^{n+1}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

Solución: Con 5 jugadas E(x) = 25 €, con 10 jugadas E(x) = 50 €.

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0.95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

Solución: $P(143 \leq x \leq 191) \geq 0.95$.

9. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ calcula $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Determina también la media y la desviación típica.

Solución: $P(x = 0) = 0.0282$, $P(x \neq 0) = 0.972$, $P(x = 10) = 0.028$ y $P(x = 7) = 0.009$; $E(x) = 3$; $\sigma^2 = 2.1$; $\sigma = 1.45$.

10. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:

a) 0 caras, b) 1 cara, c) 2 caras, d) 3 caras

Solución: $P(0) = 1/32$; $P(1) = 5/32$; $P(2) = 10/32$; $P(3) = 10/32$.

11. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z = 0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1.82)$, d) $P(z > 1.82)$.

Solución: a) $P(z = 0) = 0$, b) $P(z < 0) = 0.5$, c) $P(z = 1.82) = 0$, d) $P(z > 1.82) = 0.0344$.

12. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.

Solución: a) $P(z > 4) = 0$, b) $P(z < 4) = 1$, c) $P(z > 1) = 0.1587$, d) $P(z < 1) = 0.8413$.

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1.3 < z < 4)$, c) $P(-0.2 < z < 2.34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.

Solución: a) $P(1 < z < 2) = 0.1359$, b) $P(-1.3 < z < 4) = 0.9032$, c) $P(-0.2 < z < 2.34) = 0.5694$, d) $P(-1 < z < 1) = 0.6826$

14. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

Solución: a) $P(x > 4) = 0.0668$, b) $P(x < 4) = 0.9332$, c) $P(x > 1) = 0.5$, d) $P(x < 1) = 0.5$

15. Calcula en una distribución normal $N(0.5, 0.2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

Solución: a) $P(x > 4) = 0$, b) $P(x < 4) = 1$, c) $P(x > 1) = 0.0062$, d) $P(x < 1) = 0.9938$.

16. Calcula en una distribución normal $N(1, 1/2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1.3 < x < 4)$, c) $P(-0.2 < x < 2.34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.

Solución: a) $P(1 < x < 2) = 0.4772$, b) $P(-1.3 < x < 4) = 1$, c) $P(-0.2 < x < 2.34) = 0.9881$, d) $P(-1 < x < 3) = 1$

17. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Compara con los resultados obtenidos en el ejercicio 9.

Solución: $\mu = 3$, $\sigma = 1.45$; $P(x = 0) = 0.984$, $P(x \neq 0) = 0.016$, $P(x = 10) = 0$ y $P(x = 7) = 0,008$.

18. En una distribución binomial $B(100, 0.4)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \leq 50)$, $P(x \geq 50)$ y $P(40 \leq x \leq 50)$.

Solución: $\mu = 40$, $\sigma = 4.898$; P(x > 40) = 0.4602, P(x ≤ 50) = 0.9738, P(x ≥ 50) = 0.0262 y P(40 ≤ x ≤ 50) = 0.9476.

19. En una distribución binomial $B(1000, 0.5)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ y $P(50 \leq x \leq 150)$.

Solución: $\mu = 500$, $\sigma = 15.81$; P(x < 200) = 0, P(x = 150) = 1, P(x < 150) = 1 y P(50 ≤ x ≤ 150) = 1.

20. En una distribución binomial $B(1000, 0.05)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 200)$, $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ y $P(50 \leq x \leq 200)$.

Solución: $\mu = 50$, $\sigma = 6.89$; P(x > 200) = 0, P(x = 200) = 0, P(x < 200) = 1y P(50 ≤ x ≤ 200) = 0.5279.

21. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

Solución: $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.31$; $P(x > 2) = P(z > 4.51) = 0$.

22. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0.4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:

a) María gane alguna vez. b) Raquel gane al menos una vez. c) Raquel gane más de la mitad de las partidas. d) María gane 2 partidas.

Solución: a) P(María gane alguna vez) = 0.9534. b) P(Raquel gane al menos una vez) = 0.9959. c) P(Raquel gane más de la mitad de las partidas) = 0.5443. d) P(María gane 2 partidas) = 0.2488.

23. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina la probabilidad de que: a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm. b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm. c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

Solución: a) $P(x > 190) = 0.2646$; b) $P(x < 160) = 0.0918$; c) $P160 < x < 190)$ 0.6536.

24. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que: a) Un opositor obtenga 120 puntos. b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban? c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20 % de los mejores, ¿cuántos puntos debe obtener un opositor para aprobar?

Solución: a) Si es una distribución normal, 0. Si la consideramos binomial, 0.0054; b) Aprueban un 2 %; c) Más de 108 puntos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se lanza un dado tres veces y se anota el número de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:

a) $B(4, 1/6)$ b) $B(4, 1/4)$ c) $B(3, 1/6)$ d) $B(3, 5/6)$

Solución: c)

2. En la distribución anterior, la media es:

a) $\mu = 4/6$ b) $\mu = 1/2$ c) $\mu = 15/6$ d) $\mu = 1$

Solución: b)

3. Y la varianza es:

a) $\sigma^2 = 15/12$ b) $\sigma^2 = 5/6$ c) $\sigma^2 = 1/36$ d) $\sigma^2 = 5/12$

Solución: d)

4. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(z \leq 2.02)$, que vale:

a) $P(z \leq 2.02) = 0.0217$ b) $P(z \leq 2.02) = 0.9772$ c) $P(z \leq 2.02) = 0.0228$ d) $P(z \leq 2.02) = 0.9783$

Solución: d)

5. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(0.5 < z < 1.5)$, que vale:

a) 0.3417 b) 0.9332 c) 0.6915 d) 0.2742

Solución: a)

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de $P(x < \mu)$ es:

a) –0.4 b) 0.5 c) 0.6 d) No puede saberse

Solución: b)

7. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ el valor de $P(x = 0)$ es:

a) 0.11 b) 0.0198 c) 0.00001024 d) 0.8

Solución: b)

8. El 2 % de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0.6011 b) 0.7635 c) 0.9357 d) 0.8655

Solución: c)

9. Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0.5987 b) 0.4027 c) 0.9357 d) 0.8074

Solución: a)

10. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Juegan 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0.0123 b) 0.5 c) 0.8972 d) 0.9877

Solución: d)

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)

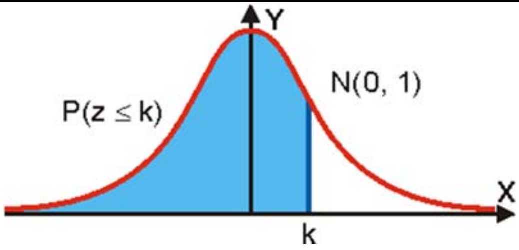


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000