Soluciones de actividades y ejercicios 2º Bachillerato de Ciencias

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual, Álvaro Valdés y autores de Marea Verde.

Revisor: José Ángel Benítez Pulido.

CAPÍTULO 1: MATRICES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE MATRIZ

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2 000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1 000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.

Solución:

Colecta	Lechugas	Naranja	Melones
Años anteriores	***500***	***1 000 kg.***	***400***
2014	***1 000***	***2 000 kg.***	***500***

Ganancias	Lechugas	Naranja	Melones
2014	***1 000 c.***	***6 000 c.***	***2 500 c.***

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:

a) Un calendario.
b) La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).
c) El disco duro de un ordenador.
d) Un armario donde se guarda una colección de copas.
e) Los lineales de un supermercado.
f) Una pantalla de televisión.
g) El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.
h) Los buzones de una vivienda.
i) Los pupitres de una clase.

Solución: Recuerda: Las matrices son un conjunto de números reales dispuestos en filas y columnas. Son matrices: a) y g), y pueden serlo, si sustituimos la información por números: b), c) y f), y extendiendo la definición a "… dispuestos en filas y columnas" pero que usualmente no son numéricos, podrían representarse con una matriz: d), e), h, i).

3. Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

Solución abierta: Las taquillas de la recepción de un hotel para dejar correspondencia, llaves, etc., para las diferentes habitaciones de cada planta. (No es una matriz numérica pero se disponen los datos en filas y columnas). Siempre que queramos organizar datos como:

a. La disponibilidad de artículos de diferentes marcas en una tienda dependiendo de la talla.
b. El número de alumnos matriculados en una academia en los diferentes idiomas que se imparten en los diferentes niveles en los que estén.
c. Distribución de la producción de varios artículos entre varios clientes de una empresa.
d. Coste del transporte por unidad de una determinada materia prima desde varios orígenes a varios destinos.

4. Escribe tres matrices fila.

Solución abierta: Por ejemplo: (1, 2, 3); (0, 5); (7, 9, 2, 5).

5. Escribe tres matrices columna.

Solución abierta: Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

Solución abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. OPERACIONES CON MATRICES

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ calcula:

a) $A + 3B$ b) $2A + B - 5C$

Solución: ***a)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{9} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-18} & \mathbf{17} \\ \mathbf{-42} & \mathbf{-12} & \mathbf{32} \end{pmatrix}$.

10. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?

Solución: A·B = $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{18} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-23} & \mathbf{19} & \mathbf{19} \end{pmatrix}$; ***B·A =*** $\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{26} & \mathbf{2} & \mathbf{-20} \\ \mathbf{15} & \mathbf{3} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$.

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $3A^t - B^2$.

Solución: $3A^t - B^2 = 3\begin{pmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 12 & 0 & -8 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 & -8 \\ -9 & 0 & 8 \\ 6 & -21 & 21 \end{pmatrix}$.

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & \frac{-14}{57} & \frac{-2}{19} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

D no es invertible, es singular, ya que su rango es 1 pues solo tiene una fila o columna linealmente independiente.

13. Resuelve la ecuación matricial $M{\cdot}X + N = P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Solución: $X = (P - N){\cdot}M^{-1}$.

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Solución: ***$r(A) = 2$; $r(B) = 3$; $r(C) = 1$; $r(D) = 1$.***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&0\\-1&-2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + B$
b) $A - B - C$
c) $3A + 5B - 6C$

Solución

a) $A + B = \begin{pmatrix}5&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

b) $A - B - C = \begin{pmatrix}-2&-3\\3&2\end{pmatrix}$

c) $3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix}29&-15\\7&-19\end{pmatrix}$

1. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\\0&4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&-1&2\\0&5&3\end{pmatrix}$, calcula AB y BA. ¿Es el producto conmutativo?

Solución: $AB = \begin{pmatrix}4&-6&-1\\8&13&13\\0&20&12\end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix}2&1\\10&27\end{pmatrix}$ El producto no es conmutativo.

2. Calcula los productos posibles entre las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}$.

Solución: $A\cdot B=\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ $C\cdot A=\begin{pmatrix}3&5&7\\7&15&8\end{pmatrix}$ $C\cdot B=\begin{pmatrix}4\\16\end{pmatrix}$ El resto de los productos no se pueden realizar

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}$, calcula $3A^t - B^2$.

Solución: $3A^t - B^2 = \begin{pmatrix}12&4&2\\1&9&5\\17&15&23\end{pmatrix}$

4. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) A + B *b) 3A - 4B* *c) AB* *d) AD* *e) BC* *f) CD* *g)* A^tC

Solución

a) $\boldsymbol{A+B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$; b) $\boldsymbol{3A-4B}=\begin{pmatrix}3 & -15 & -10\\ 16 & 8 & -21\end{pmatrix}$;

c) $A\cdot B \rightarrow$ No se puede realizar el producto. d) $\boldsymbol{A\cdot D}=\begin{pmatrix}7\\ -1\end{pmatrix}$;

e) $\boldsymbol{B\cdot C}=\begin{pmatrix}-11 & 3 & 12 & -18\\ 11 & -5 & -8 & -6\end{pmatrix}$ f,g) $C\cdot D$ y $A^tC \rightarrow$ No se puede realizar el producto

5. ¿Es posible que para dos matrices *A* y *B* no cuadradas puedan existir *AB* y *BA*?

Solución: Si una matriz A tiene dimensión mxn y otra matriz B tiene dimensión nxm se pueden realizar los dos productos.

$$A_{mxn}\cdot B_{nxm}=C_{mxm}$$
$$B_{nxm}\cdot A_{mxn}=C_{nxn}$$

6. a) Calcula A^{50} y A^{97} para la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$.

Solución a) $\boldsymbol{A^{50}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A^{97}}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

b) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

7. Calcula A^n, para $n\in\mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: a) Si A = $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ entonces $\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}\\ 2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$

b) Si A = $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ entonces $\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) Si A = $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ entonces $\boldsymbol{A^n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

8. Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A\cdot B = B\cdot A$. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ halla las matrices B que conmuten con A.

Solución: $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$

9. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$ ***y*** $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}}$

10. Sean las matrices $A = 2\cdot\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$.

Calcula cada uno de los productos $A{\cdot}B$, $D{\cdot}E$, $E{\cdot}B$, $C{\cdot}E$.

Solución: $\boldsymbol{A \cdot B = \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 2my \end{pmatrix}}$; $\boldsymbol{DE = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}}$; ***EB = (15+my);*** $\boldsymbol{CE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30x & 10mx \end{pmatrix}}$

11. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3, en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

Solución: a) x + z = 5; x = 2; y = 3; z = 3.

b) El producto AB no puede efectuarse.

12. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X, tal que $X{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Una matriz Y tal que $A{\cdot}Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) X = (–1, –1, –1); b) La matriz Y no existe.

13. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$;

b) No tiene: 8 – 8 = 0;

c) $\boldsymbol{\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}}$; ***d)*** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}}$

14. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

Solución: $(AB)^t=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ *y* $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/14 & 1/2\\ 3/14 & -1/2\end{pmatrix}$

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de A
b) Comprueba que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$
c) Halla una matriz X tal que $A\cdot X=B$, siendo $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$; *b)* $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$; *c)* $X=\begin{pmatrix}4/3 & 0\\ -4/3 & -2\end{pmatrix}$

17.- Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

18. - Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ obtén, si procede, $(B\cdot A)^{-1}$.

Solución: $(BA)^{-1}=\begin{pmatrix}4/15 & 1/15\\ -1/10 & 1/10\end{pmatrix}$

19.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A\cdot B$
b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

Solución: a) $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

b) $B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

Como se puede observar, se verifica que: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ *ya que se verifica que:*

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$,, por lo que $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

20. – Sea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ comprueba que $A^t=A^{-1}$ y calcula $(A\cdot A^t)^{2003}$.

Solución: $A^t=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. *Son iguales.* $(A\cdot A^t)^{2003}=I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

21.- Sean las matrices: $C=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Halla C^{-1} y D^{-1}

b) Calcula la matriz inversa de $C\cdot D$

c) Comprueba que $(C\cdot D)^{-1} = D^{-1}\cdot C^{-1}$.

Solución:

a) $C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1/2 & 3/2 & 1/2\end{pmatrix}$; $D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

b) $(C\cdot D)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1 & 2 & 2\\ 3/2 & 5/2 & 3/2\end{pmatrix}$

c) $D^{-1}C^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1 & 2 & 2\\ 3/2 & 5/2 & 3/2\end{pmatrix}=(C\cdot D)^{-1}$

22.- Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X + N = P$ siendo

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \text{ y } P=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1}\cdot(2\cdot B + 3\cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X\cdot A = A + I$

Solución: a) $A^{-1}\cdot(2B+3I)=\begin{pmatrix}-2 & -7\\ -9 & -14\end{pmatrix}$

b) $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

24. - Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación $X\cdot A\cdot B - X\cdot C = 2\cdot C$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 5/2\end{pmatrix}$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: a) r(A) = 2; b) r(B) = 2; r(C) = 4.

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

***Solución:** a) Si a = 4 entonces r(A) = 2 y si a ≠ 4 entonces r(A) = 3.*

b) Si a = 1 entonces r(B) = 1, si a = –2 entonces r(B) = 2 y si a ≠ 1, –2 entonces r(B) = 3.

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

28. - Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

a) $\begin{cases} 2X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución:

a) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

29. - Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

***Solución:** a)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{pmatrix}$

30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75\\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25\end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

Solución; a) $B\cdot A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75\\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}= \begin{array}{c} \\ \text{reducido} \\ \text{normal}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{inglés} & \text{alemán}\end{array}\\ \begin{pmatrix}215 & 149\\ 345 & 281\end{pmatrix}\end{array}$

b) $\begin{pmatrix}30 & 20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}215 & 149\\ 345 & 281\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13350 & 10090\end{pmatrix}$

Se han recaudado 13 350 € en los grupos de inglés y 10 090 € en los grupos de alemán.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor *C*	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

Solución: Pagará en total 6 425 €.

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Solución: a) Construimos la matriz A de dimensión $2x3$ ***que representa las unidades fabricadas, en la que las filas representan el modelo de lavadora (A y B), y las columnas cada una de las terminaciones (N, L y S).***

$$A=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}$$

Construimos la matriz B de dimensión $3x2$ ***que representa las horas de trabajo, en la que las filas representan la terminación (N, L y S) y las columnas el tipo de trabajo (taller y administración).***

$$B=\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1{,}2\\ 33 & 1{,}3\end{pmatrix}$$

b) La matriz pedida debe tener dimensión $2x2$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}400 & 200 & 50\\ 300 & 100 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25 & 1\\ 30 & 1{,}2\\ 33 & 1{,}3\end{pmatrix}= \begin{array}{c} \\ máquina\_A \\ máquina\_B\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{taller} & \text{administración}\end{array}\\ \begin{pmatrix}17650 & 705\\ 11490 & 459\end{pmatrix}\end{array}$$

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$. Justifica el resultado.

***Solución:** Sean A y B las siguientes matrices de orden dos:* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$*. Si multiplicamos por λ a la suma de ambas matrices quedará:*

$$\lambda(A+B)=\lambda\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda(a+e) & \lambda(b+f) \\ \lambda(c+g) & \lambda(d+h) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a+\lambda e & \lambda b+\lambda f \\ \lambda c+\lambda g & \lambda d+\lambda h \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos a cada matriz por λ y luego sumamos, se obtiene:

$$\lambda A+\lambda B=\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a+\lambda e & \lambda b+\lambda f \\ \lambda c+\lambda g & \lambda d+\lambda h \end{pmatrix}.$$

Por tanto si se verifica la igualdad.

34. - Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A\cdot B$. Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

***Solución:** El producto de dos matrices simétricas no es necesariamente una matriz simétrica. Contraejemplo:*

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *dos matrices simétricas y su producto* $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *no lo es.*

35. - Sea la matriz $M=\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r\cdot s\neq 1$.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k\in\mathbb{N}$.

Solución: $M^2=\begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{pmatrix}$; $M^3=\begin{pmatrix} 0 & r^2s \\ s^2r & 0 \end{pmatrix}$; $M^4=\begin{pmatrix} r^2s^2 & 0 \\ 0 & r^2s^2 \end{pmatrix}$; $M^{2k}=\begin{pmatrix} r^ks^k & 0 \\ 0 & r^ks^k \end{pmatrix}$.

36. - Sea el conjunto de matrices definido por: $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix};\ a,b\in R\right\}$

a) Comprueba que $A, B\in\mathbb{M}$, también $A+B\in\mathbb{M}$ y $A\cdot B\in\mathbb{M}$

b) Encuentra todas las matrices $C\in\mathbb{M}$, tales que $C^2=C$.

***Solución:** a)* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}\in M$; $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}\in M$;

b) a = b = 1/2.

37. - Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A\cdot A^t=I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A\cdot B$ es una matriz ortogonal.

***Solución:** Para que sea A·B ortogonal se debe verificar que* $(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^t=I$.

Sabemos que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$, *por lo que:* $(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^t=(A\cdot B)\cdot B^t\cdot A^t=A\cdot I\cdot A^t=A\cdot A^t=I$.

Por tanto si A y B son ortogonales su producto A·B también lo es.

38. – Considera las matrices A, B y C definidas como:

$$A_{3\times 3} = \left(a_{ij} = i + j\right),\ \forall i, j = 1,2,3;$$
$$B_{2\times 3} = \left(b_{ij} = i - j\right),\ \forall i = 1,2;\ j = 1,2,3;$$
$$C_{3\times 2} = \left(c_{ij} = 2i + j\right),\ \forall i = 1,2,3;,\ j = 1,2$$

a) Construye las tres matrices.
b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.
c) Analiza cuáles de los productos $A\cdot A$, $A\cdot B$, $A\cdot C$, $B\cdot A$, $B\cdot B$, $B\cdot C$, $C\cdot A$, $C\cdot B$ o $C\cdot C$ pueden realizarse.
d) Determina el rango de las tres matrices A, B y C.

Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. ***Son simétricas A y At.***

c) Se pueden realizar los siguientes productos: A·A, A·C, B·A, B·C, y C·B.
d) Rg(A) = 2;   Rg(B) = 2;   Rg(C) = 2.

39. – Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ en la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2.
b) Calcula $P = M^2 + I$.
c) Comprueba que $P^2 = P$.
d) Comprueba que $P\times M = M\times P = O$.

Solución: a) $M^2 = \begin{pmatrix} x^2-1 & xy & xz \\ xy & y^2-1 & yz \\ xz & yz & z^2-1 \end{pmatrix}$. ***Se observa que la matriz M es antisimétrica y M² es simétrica;***

b) $P = M^2 + I = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$. ***La matriz P es simétrica.***

c) Al realizar el producto, sacar factor común y sustituir $x^2 + y^2 + z^2 = 1$***, efectivamente se comprueba que*** $P^2 = P$.

d) Realizando el producto se comprueba que se obtiene la matriz nula de orden 3.

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

1.- La dimensión de la matriz *A* es:

a) 3 b) 2 c) 2 x 3 d) 3 x 2

Solución: c)

2.- La matriz *A* es:

a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

Solución: d)

3.- La suma de las matrices *A* y *B* es:

$a)\, A+B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b)\, A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}$ $c)\, A+B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$

$d)\, A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -9\end{pmatrix}$

Solución: b)

4.- El producto 3*A* es:

$a)\, 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b)\, 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -9\end{pmatrix}$ $c)\, 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -21\end{pmatrix}$ $d)\, 3A+B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -21\end{pmatrix}$

Solución: c)

5.- Indica qué afirmación es cierta

a) Las matrices *A* y *B* se pueden multiplicar b) Las matrices *A* y *B* no se pueden multiplicar

c) Ambas tienen matriz inversa d) Sus matrices traspuestas son iguales

Solución: b)

Dadas las matrices $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

6.- La matriz identidad es la matriz: a) *C*; b) *D*; c) *E*; d) *F*.

Solución: b)

7.- El producto de las matrices *E* y *F* es:

$a)\, EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $b)\, EF=\begin{pmatrix}1 & 5 & 13\\ 0 & 12 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $c)\, EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 13 & 9\end{pmatrix}$ $d)\, EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 4 & 10 & 16\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$

Solución: d)

8.- La matriz inversa de la matriz *F* es:

$a)\, F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b)\, F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 11 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $c)\, F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $d)\, F^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Solución: a)

9.- La matriz traspuesta de la matriz *F* es:

a) $F^t=\begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $F^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; c) $F^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; d) $F^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

Solución: d)

10.- El rango de la matriz *C* es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la nula. b) Calcula A^{13}. c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$

Solución: a) $A^3=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$

b) $A^{13}=\left(A^3\right)^4 A = A = \begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$;

c) $A^2X+I=A \Rightarrow A^3X+A=A^2 \Rightarrow X=A^2-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

(2) a) Define rango de una matriz.

b) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos?

Solución: a) Es el máximo número de columnas linealmente independientes que tiene la matriz; b) El rango es 2, ya que las dos columnas que quedan son linealmente independientes. No se puede asegurar, por ejemplo esta matriz: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ ***tiene rango 3, ya que*** $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10\neq 0$***, pero si quitamos la primera fila y columna queda*** $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$***, de rango 1 al ser la segunda fila opuesta a la primera***

(3) Sea A una matriz ($m \times n$)

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (\,0 \quad 0\,)$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Solución: a) Cualquier matriz B de orden 1xm lo cumple, ya que el producto sería 1xn;

b) Sólo si m=1, ya que B ha de ser de orden nxk para que el producto sea mxk. En ese caso, cualquier matriz B de orden nxk valdría.

c) $B=(0 \quad 0 \quad 1)$ ***cumple que*** $B\,A=(0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=(0 \quad 0)$

(4) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y el vector $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $A\cdot X = 0\cdot X$.
b) Todos los vectores X tales que $A\cdot X = 3\cdot X$.
c) Todos los vectores X tales que $A\cdot X = 2\cdot X$.

Solución: a) $AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=0X=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x-y=0\\ 2x+4y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y=x, x+2x=3x=0\Leftrightarrow y=x=0\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

b) $AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=3X=\begin{pmatrix}3x\\ 3y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2x+y=0\\ 2x+y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y=-2x\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ -2x\end{pmatrix}$

c) $AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=2X=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x+y=0\\ 2x+2y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow y=-x\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix}$

(5) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$$

Se pide calcular, explicando todos los pasos necesarios:

a) Las matrices A^2 y A^3.
b) Los números reales a y b para los cuales se verifica $(I + A)^2 = a\cdot I + b\cdot A$.

Solución: a) $A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17^2-290 & 0\\ 0 & 17^2-290\end{pmatrix}=-I\Rightarrow A^3=-IA=-A=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}$

b) $(I+A)^2=(I+A)(I+A)=I+A+A+A^2=2A=aI+bA\Leftrightarrow(2-b)A=aI\Leftrightarrow b=2, a=0$ *(ya que si* $b\neq 2$, $A=\frac{a}{2-b}I$ *y A sería diagonal, contradicción).*

(6) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix}a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2 × 2, se pide:

a) Calcula el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
b) Calcula B en el caso $a = 1$.

Solución: a) $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+2z & ay+2t\\ 3x+7z & 3y+7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}ax+2z=1\\ 3x+7z=1\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}ay+2t=1\\ 3y+7t=1\end{matrix}\right\}$ *Los 2 sistemas tienen solución si y sólo si* $\begin{vmatrix}a & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=7a-6\neq 0\Leftrightarrow a\neq\frac{6}{7}$

b) Si a = 1, los sistemas quedan $\left.\begin{matrix}x+2z=1\\ 3x+7z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3x+6z=3\\ 3x+7z=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow z=-2, x=1-2z=5, y=5, t=-2$, *luego* $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

(7) Una matriz 2×2 se dice que es triangular si el primer elemento de su segunda fila es 0. Encuentra todas las matrices triangulares B tales que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow B\,B^t = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b\,c \\ b\,c & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2=27 \\ b\,c=4 \\ c^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$

Si $c = 2\sqrt{2}$, $b = \frac{4}{c} = \sqrt{2}$, $a^2+b^2 = a^2+2 = 27 \Rightarrow a = \pm 5$, *luego tenemos las soluciones:*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si $c = -2\sqrt{2}$, $b = \frac{4}{c} = -\sqrt{2}$, $a^2+b^2 = a^2+2 = 27 \Rightarrow a = \pm 5$, *luego tenemos las soluciones:*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(8) Comprueba razonadamente que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, entonces se deduce que el producto de los cuadrados de dichas matrices es igual al cuadrado del producto de dichas matrices.

b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3\cdot A + 2\cdot I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula.

c) Calcula razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores a y b que hacen que $A^2 = a\cdot A + b\cdot I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 = 3\cdot A + 2\cdot I$.

Solución: a) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = O$$

c) $A^2 = 3A + 2I = aA + bI \Leftrightarrow (3-a)A = (b-2)I$. *Si* $a \neq 3$:

$$A = \frac{b-2}{3-a}I \Rightarrow A^2 = \frac{(b-2)^2}{(3-a)^2}I = 3A + 2I = \left(\frac{3b-6}{3-a} + 2\right)I = \frac{3b-2a}{3-a}I \Leftrightarrow \frac{(b-2)^2}{3-a} = 3b - 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 9b - 3ab - 6a + 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + (3a-13)b - 2a^2 + 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{13 - 3a \pm \sqrt{(3a-13)^2 + 8a^2 - 24a - 16}}{2} = \frac{13 - 3a \pm \sqrt{17a^2 - 102a + 153}}{2} =$$

$$= \frac{13 - 3a \pm \sqrt{17(a-3)^2}}{2} = \frac{(\sqrt{17}-3)a + 13 - 3\sqrt{17}}{2}, \frac{-(\sqrt{17}+3)a + 13 + 3\sqrt{17}}{2}$$

Otra solución es $a = 3, b = 2$

(9) a) Calcula las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} 2\cdot X+Y=B \\ X-2Y=C \end{cases}$ donde:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcula $(2\cdot X+Y)\cdot X-(2\cdot X+Y)\cdot(2Y)$.

$$\left.\begin{matrix}2X+Y=B\\X-2Y=C\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2X+Y=B\\2X-4Y=2C\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5Y=B-2C\Rightarrow Y=\frac{1}{5}(B-2C)=$$

Solución: a) $$=\frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix},$$

$$X=2Y+C=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

b) $$(2X+Y)X-(2X+Y)2Y=(2X+Y)(X-2Y)=BC=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

(10) Calcula todos los valores reales x, y, z, t para los cuales se verifica $A\cdot X=X\cdot A$, donde

$$X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \quad y \quad A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z&y+2t\\3x+4z&3y+4t\end{pmatrix}=XA=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y&2x+4y\\z+3t&2z+4t\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}2z=3y\\2x+3y-2t=0\\3x+3z-3t=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow z=\frac{3y}{2},\left.\begin{matrix}2x+3y-2t=0\\3x+\frac{9y}{2}-3t=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow z=\frac{3y}{2},2x+3y-2t=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2t-3y}{2},z=\frac{3y}{2}$$

(11) Tenemos las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-5&6\\1&-1&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula la matriz $B=A\cdot(A+4\cdot I)$.
c) Determina los números reales que cumplen: $A^{-1}=x\cdot A+y\cdot I$, $A^2=z\cdot A+t\cdot I$,

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-5&6\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-5&6\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&-8\\-12&16&-24\\-4&4&-4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Solución: a) y b) $\Rightarrow B=A(A+4I)=A^2+4A=\begin{pmatrix}0&4&-8\\-12&16&-24\\-4&4&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-4&8\\12&-20&24\\4&-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=-4I\Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{4}(A+4I)=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-1\end{pmatrix}$$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-1\end{pmatrix}=xA+yI=\begin{pmatrix}-x&-x&2x\\3x&-5x&6x\\x&-x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&0&0\\0&y&0\\0&0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+y&-x&2x\\3x&-5x+y&6x\\x&-x&y\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4},\ y=-1$$

(Cumplen todas las condiciones)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&4&-8\\-12&16&-24\\-4&4&-4\end{pmatrix}=zA+tI=\begin{pmatrix}-z&-z&2z\\3z&-5z&6z\\z&-z&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t&0&0\\0&t&0\\0&0&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z+t&-z&2z\\3z&-5z+t&6z\\z&-z&t\end{pmatrix}\Leftrightarrow z=t=-4$$

(12) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\y&3&5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&x&1\\3&z&x+z\end{pmatrix}$

dos matrices de orden (2×3) en las que x, y y $z\in\mathbb{R}$ denotan valores numéricos desconocidos.
a) Determina, razonadamente, los valores de x, y y $z\in\mathbb{R}$ de manera que $B=A$.
b) ¿Es posible el cálculo de $A\times B$? Razona la respuesta

Solución: a) $x=2, y=2, z=3$ ***(cumplen la última condición); a) No, ya que el número de columnas de A no es igual al número de filas de B***

(13) Sea $6\cdot A+2\cdot I=B$ una expresión matricial, donde B denota la matriz cuadrada de orden (2×2): $B=\begin{pmatrix}6&1\\3&-1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden correspondiente:

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A?
b) Determina los elementos que integran la matriz A, esto es, $a_{ij}\in A_{\times q}$.
c) Calcula $A+2\cdot I$.

Solución: a) 2x2; b) $A=\frac{1}{6}(B-2I)=\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}6&1\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

c) $A+2I=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

(14) Sean A y B dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2A+B=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix} \qquad 3A+2B=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}\\ 3\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 4\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & 24 & 14\\ 8 & 4 & 14\end{pmatrix}\\ 3\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}10 & 24 & 14\\ 8 & 4 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 14\\ -12 & -6 & -21\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}-2\,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & -2 & 28\\ -24 & -12 & -42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 14 & -21\\ 28 & 14 & 49\end{pmatrix}$$

(15) Sean X e Y dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix} \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 5\,\boldsymbol{X}+3\,\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}\\ 3\,\boldsymbol{X}+2\,\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 10\,\boldsymbol{X}+6\,\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 30\end{pmatrix}\\ 9\,\boldsymbol{X}+6\,\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 27\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}-3\,\boldsymbol{X}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ -6 & 9\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

(16) Se llama "traza" de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Halla A, matriz de tamaño (2×2), sabiendo que la traza de $A\cdot A^t$ es cero.

Solución: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ***:***

$$tr\left(A\,A^t\right)=tr\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\right)=tr\begin{pmatrix}a^2+b^2 & \dots\\ \dots & c^2+d^2\end{pmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2=0\Rightarrow a=b=c=d=0\Rightarrow A=O$$

(17) Sea A una matriz que tiene tres filas; sea B la matriz que resulta de sustituir en A la 1ª fila por la suma de las otras dos. ¿Qué debe ocurrir entre las filas de A para que A y B tengan el mismo rango?

Solución: Que sean linealmente dependientes, ya que como la primera fila de B es linealmente dependiente con las otras dos, para que tengan el mismo rango la primera fila de A ha de ser dependiente con las otras dos.

(18) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $A\cdot B = B\cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

a)

$$AB=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+5c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=BA=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}5a+2c=5a+2b\\5b+2c=2a+5b\\2a+5c=7c\\2b+5c=7c\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow a=b=c$$

b)

$$B^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B^3=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\4&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&2^2&0\\2^2&2^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ldots,B^{10}=\begin{pmatrix}2^9&2^9&0\\2^9&2^9&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(19) Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A\cdot B)^t$ y $(B\cdot A)^t$.

b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X+(A\cdot B)^t=C$.

Solución: a) $$(AB)^t=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&3\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&8&6\\0&0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&8&0\\3&6&1\end{pmatrix},\ (BA)^t=\left(\begin{pmatrix}1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)^t=(6)^t=(6)$$

b) $$X=2\left(C-(AB)^t\right)=2\left(\begin{pmatrix}0&4&-3\\-2&9&-6\\1&-4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&0\\4&8&0\\3&6&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2&4&-6\\-12&2&-12\\-4&-20&6\end{pmatrix}$$

(20) Calcula todas las matrices X tales que $A \cdot X + B = X$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución: Si $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$,

$$AX + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+1 & y+t-2 \\ x+z & y+t-1 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+z+1 = x \\ y+t-2 = y \\ x+z = z \\ y+t-1 = t \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z = -1, t = 2, x = 0, y = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(21) Calcula dos números naturales a y b menores que 10 y tales que la siguiente matriz tenga rango 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Solución: a = b = 0; 4 a = 5b $\Rightarrow$ a = 5 y b = 4.

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: a) 7; b) 3; c) 1.

2. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Solución: a) 8; b) –2; c) –16.

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

Solución: $|A| = -|B|$

.

4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

Solución: Permutamos las filas y después las columnas y calculamos, obteniendo que: $|A| = |B|$.

5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

Solución: En la matriz A hemos permutado las filas 1 y 2, y luego las filas 2 y 3, obteniendo la matriz C, y calculado sus determinantes, obteniendo que: $|A| = |C|$.

6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

Solución: $|A| = |D|$.

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

Solución: La propiedad 5 dice: "Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Sea A la matriz inicial y B la matriz obtenida permutando dos filas, entonces $|A| = -|B|$***. Ahora permutamos dos columnas de la matriz B obteniendo la matriz D, entonces:*** $|B| = -|D|$.

Por tanto $|A| = -|B| = -(-|D|) = |D|$.

8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

Solución: El determinante de una matriz con dos líneas (filas o columnas) iguales es cero, por tanto si permutamos filas o columnas seguirá siendo 0 su determinante.

9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.

Solución: Se deduce de la propiedad 5 que dice: "Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo".

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1+2C_2]{} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$

Solución: Por la propiedad 3 podemos descomponer el segundo determinante en suma de tres determinantes. El primero es el de partida, y los otros dos son cero, pues tienen dos columnas iguales.

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres: A

a) $A=\begin{pmatrix}6&1&5\\7&-2&1\\-4&-3&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\-1&2&3\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-2\\2&-1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$

Solución: Lo comprobamos con la matriz A y se haría igual con el resto de matrices:

$$|A|=\begin{vmatrix}6&1&5\\7&-2&1\\-4&-3&0\end{vmatrix}$$ ***= -– 4 –-105 – 40 + 18 = – 149 + 18 = – 131.***

Si transformamos la matriz A realizando la transformación $C_3 = C_3 + C_1 + 2\ C_2$ (sumando a la columna que sustituimos una combinación lineal de las demás, podría ser cualquier otra) nos queda el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix}6&1&13\\7&-2&4\\-4&-3&-10\end{vmatrix}$$ ***= 120 – 16 – 273 – 104 + 72 + 70 = 262 – 396 = – 131.***

Nos da el mismo valor el determinante ya que:

$$\begin{vmatrix}6&1&13\\7&-2&4\\-4&-3&-10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&5+6+2(1)\\7&-2&1+7++2(-2)\\-4&-3&0-4+2(-3)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}6&1&5\\7&-2&1\\-4&-3&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6&1&6\\7&-2&7\\-4&-3&-4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}6&1&1\\7&-2&-2\\-4&-3&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&5\\7&-2&1\\-4&-3&0\end{vmatrix}$$

Los dos últimos determinantes de los tres en los que se ha descompuesto el determinante tienen dos columnas iguales, por tanto su valor es 0.

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$, pero no se verifique que $|A\cdot B|=|B\cdot A|$.

Solución: Si las matrices son cuadradas siempre se verifica la expresión pues sabemos que $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$ y $|B\cdot A| = |B|\cdot|A|$. Siempre se verifica la propiedad conmutativa del producto por lo que $|A|\cdot|B| = |B|\cdot|A|$, por lo que, si las matrices son cuadradas $|A\cdot B| = |B\cdot A|$.

13. Dadas dos matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:

a) $(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+B^2$

b) $(A+B)^2=A^2+B^2+2\cdot A\cdot B$

c) $(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

d) $(A-B)^2=A^2+B^2-2\cdot A\cdot B$

e) $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

f) $|(A+B)^2|=|A|^2+|B|^2$

g) $|(A+B)^2|=|A|^2+|B|^2+2\cdot|A|\cdot|B|$

h) $|(A-B)^2|=|A|^2-|B|^2$

i) $|(A-B)^2|=|A|^2+|B|^2-2\cdot|A|\cdot|B|$

j) $|(A+B)\cdot(A-B)|=|A|^2-|B|^2$

Solución: Falsas: a); c); f; g; h; i; j. Recuerda: El determinante de una suma NO es igual a la suma de los determinantes. Sólo son ciertas si las matrices son conmutativas: b); d); e)

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Solución: 4.

15. Halla el valor de a que verifica: $\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$

Solución: 24 = 8a $\Rightarrow$ a = 3.

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina: a) $|A|$ y $|B|$; b) $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $[\mathrm{Adj}(B)]^t$; c) $A \cdot [\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $B \cdot [\mathrm{Adj}(B)]^t$. ¿Qué observas?

Solución: a) $|A|$ ***= –131;*** $|B|$ ***= –8; b) (Adj(A))ᵗ =*** $\begin{pmatrix} 3 & -15 & 11 \\ 4 & 20 & 29 \\ -29 & 14 & -19 \end{pmatrix}$ ***y (Adj(B))ᵗ =*** $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$***;***

c) A(Adj(A))ᵗ = $\begin{pmatrix} -131 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & 0 \\ 0 & 0 & -131 \end{pmatrix}$ ***y B(Adj(B))ᵗ =*** $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$***.***

Al multiplicar se obtiene una matriz diagonal con los elementos de la diagonal todos iguales al valor del determinante de la matriz de inicio.

17. a) Calcula la matriz adjunta de: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj}(C)]^t$ y efectúa el producto $C \cdot [\mathrm{Adj}(C)]^t$. c) ¿Qué observas?

Solución: a) Adj(C) = $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ***; b)*** $|C|$ ***= –7; (Adj(C))ᵗ =*** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ ***; C(Adj(C))ᵗ =*** $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

4. MATRIZ INVERSA

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A \cdot A^{-1} = I$ y $B \cdot B^{-1} = I$

Solución: Comprobado.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$

***Solución:** a) –2; b) 22; c) ab + 25; d) $a^2 - b^2$; e) 0;*
f) –2; g) 2; h) 79; i) $a^3 - 3a + 2$; j) $-m^2 - 4m + 1$.

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$

***Solución:** a) Descomponemos el determinante en suma de dos determinantes, y permutando filas observamos que son dos determinantes iguales, luego vale 0: b) A la tercera columna le sumamos la segunda. La columna así obtenida tiene todos sus elementos iguales luego es proporcional a la primera, por lo que el determinante vale 0.*

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ son múltiplos de 15.

***Solución:** a) En la tercera fila sacamos 5 factor común. A la tercera columna le hemos restado la segunda. Ahora de la tercera columna podemos sacar el factor 3:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) En la primera fila sacamos3 factor común. En la tercera columna podemos sacar el factor 5:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

***Solución:** a) Operando filas y columnas obtenemos que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

b) De igual modo se comprueba con b)

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución: $A1 = 1/5 \cdot \begin{vmatrix} -40 & 25 & 40 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $\quad A2 = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

6.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ calcula, sin desarrollar, el valor de $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix}$ *y*

permutando filas y columnas $(-3)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 9$.

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} =$ $\qquad$ b) $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} =$ $\qquad$ c) $\begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$

Solución: a) 12; b) 12; c) –6.

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3\cdot A^t$ vale -1215?

Solución: $3^n (-5) = -1215 \Rightarrow n = 5$.

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\cdot 1 & y\cdot 1 & z\cdot 1 \\ x\cdot x & y\cdot y & z\cdot z \\ x^2\cdot x & y^2\cdot y & z^2\cdot z \end{vmatrix} = x\cdot y\cdot z\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

Solución: $|A^{-1}| = 1/3$; $|B^t A| = 6$; $|(AB^{-1})^t| = 3/2$.

11.- Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

Solución: $a\cdot b\cdot c$.

12.- Demuestra que: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2$ y $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$

Solución: ***Dejamos la primera fila igual, en la segunda, la 1ª – 2ª, en la tercera, la 1ª – 3ª, en la cuarta, la 1ª – 4ª, y desarrollamos por la segunda columna. Descomponemos en suma de dos determinantes. Y se obtiene: $-ab^2 - a(-(1+a)b^2) = a^2b^2$; Hacemos lo mismo con el otro determinante y se obtiene $(a-1)^3(a+3)$.***

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

Solución: a) $|A| = 28$; $\alpha_{32} = 9$; $\alpha_{13} = -8$; $A_{22} = 11$; $A_{12} = -12$;

b) $A_{23} = 5$; $\alpha_{11} = 8$; $A_{13} = -8$; $|A|\,x + A_{23} + 3\,\alpha_{11} = 28x + 5 + 3\cdot 8 = -2 - 8x$; $x = -31/36$.

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$\lvert -3A \rvert = 9$	$\frac{\lvert A \cdot A^t \rvert}{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3x3}$	$4\lvert A \rvert - 7\lvert A^t \rvert = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6x6}$
$\lvert 4A - A^t \rvert = -3^2$	$\lvert A^{-1} \rvert = -3^{-1}$	$\frac{\lvert 3A - A^t \rvert}{\lvert 3A^t + A \rvert} = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9}\lvert A^{-1} \rvert - 6\lvert A^t \rvert^2 = 1$	$\lvert 3^{-2} A^t \rvert = -\frac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

Solución:

Verdaderas: $|-3A| = 9$; $\frac{|A \cdot A^t|}{3} = 3^{-3}$; $4|A| - 7|A^t| = 1$; $|4A - A^t| = -3^2$; $|3^{-2} A^t| = -\frac{1}{3^7}$

Falsas: $A^3 \notin \mathcal{M}_{3x3}$ ***pues si es una matriz cuadrada de orden 3;***

$2A \in \mathcal{M}_{6x6}$ ***pues*** $2A \in \mathcal{M}_{3x3}$; $|A^{-1}| = -3^{-1}$ ***pues*** $|A^{-1}| = -3$;

$\frac{|3A - A^t|}{|3A^t + A|} = (-2)^{-3}$ ***pues es igual a $1/2^3$;*** $\frac{1}{9}|A^{-1}| - 6|A^t|^2 = 1$ ***pues es igual a –1.***

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3x3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A| \cdot |B|^{-1}$; $|3B^{-1} \cdot A|$; $|3A \cdot B^t|$; $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$

Solución: $|A^{-1}| = -9$; $|B^{-1}| = 1/3$; $|A|\,|B^{-1}| = -1/3^3$; $|3B^{-1}A| = -1$; $|3AB^t| = -9$; $|(B^{-1}A^{-1})^t| = -3$.

16. - Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\frac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1+4F_3, -F_4, 2F_3$.

Solución: a) –81/8; b) –1/2; c) 4/6⁴; d) –24.

17.- Para los determinantes $A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}$ $A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{12}, cuando existan.

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

Solución:

	A_1	A_2	A_3
α_{11}	$a^2 - b^2$	b	$b - bd - cb$
α_{23}	$ab - b^2$	No existe	$a^2b + abd - (ab + a^2bd)$
α_{32}	$ab - b^2$	No existe	$2(a^2cd + ad)$
α_{12}	$ab - b^2$	a	$-a^2c - ad - a$
A_{11}	α_{11}	α_{11}	α_{11}
A_{23}	$-\alpha_{23}$	No existe	$-\alpha_{23}$
A_{32}	$-\alpha_{32}$	No existe	$-\alpha_{32}$
A_{12}	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{12}$

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

Solución: a) $|A| = 1$; b) $|A| = 1$ o bien $|A| = -1$.

19.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

Solución: a) $|A| = 0$; b1) $|A| = (-2)(-8) + (1)(-8) + 1(-8) = 0$; b2) $|A| = (2)(5) + (2)(-1) + 1(-8) = 0$

20.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$

Solución: $|A \cdot B| = 7$; $|C| = -12$; $|A^t \cdot B^t| = 0$; $|C \cdot B \cdot A| = 0$; $|C|^2 = 144$.

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3x$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x - 3$

Solución: a) x = 7; b) x = 4 y x = –1.

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

Solución: a) $x = -5$: $x^3 - 18x + 35 = 0$. b) Sin soluciones reales: $x^2 - 4x + 25 = 0$.

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A - x\cdot I| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

Solución: $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: |A| = –5; |B| = 3; |D| = 7; |E| = 14; |F| = 6; |G| = –4; |H| = –20; |J| = 7.

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.

b) Desarrollando por los elementos de una línea.

Solución: 3.

26. - Comprobar el valor de los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$

Solución: Comprobado.

27.- Calcula el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: –168.

28.- Calcula los determinantes siguientes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución: a) –295; b) $(x + 1)^4$.

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x+6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución: a) $8x^2 + 15x - 62 = 0$, $x = 2$ y $x \approx -3{,}875$; b) $x = 2$ y $x = -6$.

30.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1-7x$

Solución: a) $4x^2 + 7x - 57 = 0$, $x = 3$ y $x = -4{,}75$; b) $x = -1$ y $x = -2$.

31.- Halla las matrices inversas de las matrices: a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 5/6 & -2/3 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} \frac{-20}{41} & \frac{-8}{41} & \frac{17}{41} \\ \frac{-7}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{8}{41} \\ \frac{25}{41} & \frac{10}{41} & \frac{-11}{41} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \frac{ac-bc}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{b^2-c^2}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{c^2-ab}{b^2-ab+ac-bc} \\ \frac{0}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{c-b}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{b-c}{b^2-ab+ac-bc} \\ \frac{b-a}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{a-b}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{a-c}{b^2-ab+ac-bc} \end{pmatrix}$

32.- Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es cierto que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?

b) Calcula, si es posible, la inversa de $A \cdot B$.

Solución: a) $|AB| = 23$ y $|BA|$ ***= 0, luego son distintos; b)*** $\begin{pmatrix} -3/23 & 5/23 \\ -10/23 & 9/23 \end{pmatrix}$.

33. - Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

Solución: Calculamos su determinante y lo igualamos a 0, $|A| = t^2 + 3t = 0$. Luego no existe matriz inversa para $t = 0$ y $t = -3$.

34.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, averigua para qué valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para $\lambda = -3$.

Solución: Calculamos su determinante y lo igualamos a 0, $|A| = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$. Luego no existe matriz inversa para $\lambda=3$ y $\lambda=-2$. Para $\lambda = -3$, la matriz inversa es: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

35.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: A^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

36.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.
b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.
c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean <u>todos no nulos</u> y que el valor de uno de ellos sea <u>nulo</u>.
d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P| \cdot |Q|$
e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13} x^2 - |M| x + 4A_{32} = 2$

Solución: a) $|M|$ = 13, distinto de cero, luego existe su matriz inversa. M^{-1} = $\begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-6}{13} & -\frac{9}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$

b) M = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$***, la primera simétrica y la segunda antisimétrica.***

c) Solución abierta: Por ejemplo: M = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. ***Todos los elementos son no nulos, pero los determinates son nulos, pues la primera matriz tiene las filas primera y segunda iguales y la segunda, la primera y la tercera fila.***

d) $|M|$ = 13 es distinto de 0 + 0, y de 0*0.

e) $3x^2 - 13x + 4\cdot(-9) = 2$; $3x^2 - 13x - 38 = 0$; $x = 19/3$ y $x = -2$.

37.- ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa? Halla la inversa para $a = 2$.

Solución: El determinante se anula para $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$. Para $\alpha = 2$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

38.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A? $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$.

Solución: a) La matriz A no es invertible para a = 3; b) $|AA^t| = 0$; $|A^tA| = 0$.

39.- Sea C la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?
b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

Solución: a) La matriz C no es invertible para m = –1; b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

40.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $x = 2$.
c) Con $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

Solución: a) La matriz A es invertible para x distinto de 1 y distinto de 3;

b) $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) Para x = 5 el determinante de A vale –8, luego $b^3 = -1/8$, b = –1/2.

41.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3x3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$ b) $B \cdot X - 2B = 3X$ c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

Solución: a) $X = B \cdot A^{-1}$; b) $X = (B - 3I)^{-1} \cdot 2B$; c) $X = A^{-1} \cdot (2B^t + A) \cdot C^{-1}$.

42.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

43.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M. $M=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que cumple $X\cdot M+M=2M^2$

Solución: a) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ ***; b) X =*** $\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$.

44.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & a & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) ¿Qué valores de a hacen singular la matriz C?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A\cdot B\cdot C=D$ tenga sentido?

c) Calcula B para el valor $a=1$.

Solución: a) a = 0 y a = 2; b) 2 x 3; c) B = $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ -10 & 5 & 2\end{pmatrix}$

45.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix}5 & x & -2\\ 4 & 3 & 9\\ 1 & 0 & 7\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}x-1 & 2 & 2\\ 2 & x-1 & 2\\ 1 & 1 & x-2\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & x\\ 2 & x & 2 & 2\\ 3 & 5 & x & 3\\ 4 & 4 & 4 & x+3\end{vmatrix}=0$

Solución: a) x = 111/19; b) x = 3 (doble) y x = –2; c) x = 1, x = 2 y x = 3.

46.- Halla el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Solución: a) 2; b) 2; c) 3; d) 2.

47. - Halla el rango de las siguientes matrices:

$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4\\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15\\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9\end{pmatrix}$

Solución: rg(A) = 1; rg(B) = 3; rg(C) = 2.

48.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}a & 0 & 4\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 2 & a\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$

Solución: a) Para a = 1, el rango es 1, y para a distinto de 1 el rango es 2;
b) Para a = 2, el rango es 1, y para a distinto de 2 el rango es 2;
c) Para a = 2 o para a = 1, el rango es 2, y para a distinto de 0 o 1 el rango es 3;
d) Para a = 1, el rango es 1, para a igual a –2, el rango es 2, para a distinto de 1 y de –2, el rango es 3.

49. - Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$A=\begin{pmatrix}x & 3 & 0\\ 0 & 1 & -x\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & -1\\ 1 & x & x & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$

Solución: Para x = 0 o x = 2, el rg(A) = 2, y para x distinto de 0 y de 2 el rg(A) = 3;
Para x = 1, el rg(B) = 2, y para x distinto de 1 el rg(B) = 3;
Para x = 2/3, el rg(C) = 2, y para x distinto de 2/3 el rg(C) = 3.

50.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-x & 1 & 1\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 1 & -x\end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación $\det(A)=0$

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

Solución: a) x = –1 (doble) y x = 2;

b) Para x = –1 el rg(A) = 1, para x = 2, el rg(A) = 2, y para x distinto de –1 y de 2 el rg(A) = 3

51. - Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}m & 2 & 6\\ 2 & m & 4\\ 2 & m & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de m.

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A{\cdot}X=B$?

c) Calcula X para $m=0$.

Solución: a) Para m = 2 o m = –2, el rg(A) = 2, y para m distinto de 2 y de –2 el rg(A) = 3;

b) 3 x 2;

c) X = $\begin{pmatrix}5/2 & -2\\ 4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

52.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A\cdot X=B$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

b) $B\cdot X=C$, siendo $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B+2C$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 9 & 3 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$

d) $A\cdot X+B=2C$ siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución: a) X = $\begin{pmatrix}16 & -32\\ -6 & 13\end{pmatrix}$***;***

b) X = $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -3 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$***;***

c) X = $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$***;***

d) X = $\begin{pmatrix}5/2 & -3/2 & 2\\ 3/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.- El valor del determinante de la matriz *A* es:

a) 4 b) 0 c) –4 d) 8

Solución: a)

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz *B* es:

a) 0 b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) –4 d) $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Solución: a)

3.- El valor del determinante de la matriz *B* es:

a) 4 b) 0 c) 8 d) –8

Solución: b)

4.- El rango de *B* es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Solución: c)

5.- La matriz inversa de *A* es:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Solución: d)

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz *F* es:

$a)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a)

7.- El rango de la matriz *C* es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: c)

8.- La matriz de determinante nulo es:

a) *C* b) *D* c) *E* d) *F*

Solución: a)

9.- El determinante de la matriz 5*CD* es:

a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

Solución: b)

10.- El rango de la matriz *CF* es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: a)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A\cdot C$ y $C\cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

b) Calcula $(B - I)^2$.

c) Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

Solución:

(2) Dados los números reales a, b, c y d, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x\cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)\cdot x + \det(A)$, donde $\mathrm{tr}(A)$ es la traza de la matriz A, es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A.

Solución:

(3) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de la matriz A.

b) Halla el determinante de la matriz $3\cdot A$.

c) Halla el determinante de la matriz $(3\cdot A)^3$.

Solución:

(4) Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A\cdot(A - 2\cdot I)$.

b) Justifica razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A - 2\cdot I)$.

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $(A - I)$.

c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda\cdot(A - 2\cdot I)$.

Solución:

(5) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sec\theta & \mathrm{tg}\,\theta & 0 \\ \mathrm{tg}\,\theta & \sec\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de θ la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución:

(6) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$.

d) Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$.

Solución:

(7) Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

Solución:

(8) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$

a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$. b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b.

Solución:

(9) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

Solución:

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que: $\begin{vmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{vmatrix} = (a-3)\cdot(a-4)\cdot(a+2)$

b) Calcula: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

(11) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula su inversa, si existe.

b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A.

c) Resuelve la ecuación

$$x \cdot \left(A^4 + A^2 - A\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6\cdot A - 9\cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A.

b) 1) Estudia si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6\cdot B - 9\cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

Solución:

(13) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

Solución:

(14) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)

b) Calcula todas las matrices diagonales que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.

c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

Solución:

(15) Sea la matriz $\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$

a) Calcula el valor de su determinante en función de a.

b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

Solución:

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j}?

b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

Solución:

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la ecuación polinómica: $p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. Enuncia las propiedades utilizadas.

Solución:

(18) Dada la siguiente matriz de orden n: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

(19) Dada la matriz: $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a.

b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha inversa para a = 2.

Solución:

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$, siendo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

(21) Calcula los valores de *b* para los cuales la matriz *A* tiene inversa. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

(22) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix}=0$

Solución:

(23) Obtén razonadamente:

a) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2=B$.

b) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$A^2-9\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Sabiendo que el determinante de A es positivo.

Solución:

(24) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y se sabe que *T* es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) ½ *T* b) M^4 c) TM^3T^{-1}

Solución:

(25) Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

a) Obtén razonadamente el valor de *x* para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6.

b) Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$.

c) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y.

Solución:

(26) Se da la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

a) Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m.

b) Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m=1$.

c) Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m=1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

Solución:

(27) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

a) $|A+B|$ y $\frac{1}{2}\left|(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$

Solución:

(28) Dada la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Calcula, en función de a, le determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios.

b) Determina, razonadamente, los números reales a, para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

Solución:

(29) Dadas las matrices cuadradas $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A, incluyendo en la respuesta todos los pasos.

b) Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3\ A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.

c) Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:

$$x\cdot I + y\cdot A + z\cdot A^2 = B.$$

Solución:

(30) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - I)^2\cdot(A - 5I)$ donde I es la matriz identidad.

b) Obtén la matriz traspuesta de la matriz A.

c) Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

Solución:

(31) Tenemos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Justifica que existe la matriz inversa de A, calcúlala y calcula el determinante de A^{-1}.

b) Calcula el determinante de la matriz B, $B = A(A + 4\cdot I)$.

c) Determina los números reales x, y, z, t que cumplen:

$$A^{-1} = x\cdot A + y\cdot I \quad , \quad A^2 = z\cdot A + t\cdot I.$$

Solución:

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Analiza y resuelve, cuando sea posible, los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+2x=11 \end{cases}$

Solución: a) x = –3, y = –3; b) x = –22, y = –4; c) Incompatible; d) Indeterminado.

2. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+2x=11 \end{cases}$

Solución: a) Forma matricial: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$

b) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $B^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -14 \\ -1 & 3 & 10 \end{array}\right)$

c) Forma matricial: $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $C^* = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -7 \end{array}\right)$

d) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $D^* = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 33 \\ 2 & 3 & 11 \end{array}\right)$

3. Para los sistemas anteriores, calcula el determinante de la matriz A que has obtenido y utiliza la expresión: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ e $y = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ para intentar resolverlos.

Solución: a) x = 3/–1; y = 3/–1; b) x = –22/1: y = –4/1; c) det(A) = 0; det: 1, 3; d) det(A) = 0; det: 0, 0.

4. Para los sistemas anteriores, analiza qué relación existe entre el valor del determinante de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible o Sistema Incompatible que hiciste en la primera actividad propuesta.

Solución: Si det(A) es distinto de 0, el sistema es compatible, si det(A) = 0, y los otros determinanates son distintos de 0, el sistema es incomtable, pero si son 0, entonces es indeterminado.

5. Para los sistemas anteriores, determina el rango de la matriz ampliada que has obtenido y analiza qué relación existe entre dicho rango, el de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible Determinado, Sistema Compatible Indeterminado o Sistema Incompatible.

Solución: a) r(A) = 2 y r(Am) = 2, Sistema Compatible Determinado;
b) r(A) = 2 y r(Am) = 2, Sistema Compatible Determinado;
c) r(A) = 1 y r(Am) = 2, Sistema Incompatible;
d) r(A) = 1 y r(Am) = 1; Sistema Comtatible Indeterminado.

6. Decide cuáles de los siguientes sistemas puede resolverse con esta metodología matricial:

a) $\begin{cases} x^2+2xy=3x \\ 2x+y=3-y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-4 \\ x+3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\cdot y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-y^2=12 \\ x+y=3 \end{cases}$

Solución: Sólo b) x = –13/2, y = 5/2. Los otros son sistemas de segundo grado.

7. Dadas las siguientes matrices A, B y A^*, determina los sistemas lineales asociados:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$; c) $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+3y=1 \end{cases}$; ***b)*** $\begin{cases} 3y=3 \\ 2x-2y=12 \end{cases}$; ***c)*** $\begin{cases} -x+y=3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$; ***d)*** $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -x-y=0 \end{cases}$

8. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3x+y+5 \\ 2x-3y+15=3x+2y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y=4+x+y \\ 3-x+2y=y-x \end{cases}$; c) $\begin{cases} 12+x-4y=3-2x+4y \\ 7-y+4x=7+y-x \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5=3x+3y \\ 3=x-y \end{cases}$

Solución: a) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & -15 \end{array}\right)$

b) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $B^*=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$

c) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $C^*=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -8 & -9 \\ 5 & -2 & 0 \end{array}\right)$

d) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; ***Matriz ampliada:*** $D^*=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

9. Razona qué valores debe tener el parámetro m para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

a) $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ mx-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-14 \\ -x+y=m \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+y=6 \\ 3x-y=-7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9y+6x=33 \\ 3y+mx=11 \end{cases}$

Solución: a) Si m ≠ 3/2, el sistema es compatible determinado, si m = 3/2, el sistema es incompatible; b) Para todo valor de m el sistema es compatible determinado; c) Si m ≠ –3, el sistema es compatible determinado, si m = –3, el sistema es incompatible; d) Si m ≠ 2, el sistema es compatible determinado, si m = 2, el sistema es compatible indeterminado.

10. Determina si los sistemas siguientes son equivalentes o no:

a) $\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=-2 \\ x+3y=-4 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ 3x-y+4z=6 \\ 2x+2y+3z=7 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-9y+5z=-3 \\ x+3y-z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

Solución: a) Los sistemas son equivalentes. Compatibles determinados de solución x = –1, y = –1.
b) Los sistemas no son equivalentes. El primero es compatible indeterminado y el segundo, incompatible.

11. Determina el valor de m para que los sistemas siguientes sean equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -x+my=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x-y-z=m \\ -x+y+2z=2 \end{cases}$

Solución: a) m = –2;
b) No existe ningún valor de m que los haga equivalentes. El primero es compatible determinado de solución x = 8/7; y = 11/7; z = 12/7; En el segundo, el determinante de la matriz de los coeficientes es cero, luego nunca puede ser compatible determinado.

12. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -x+3y+3z=2 \\ x-3y+4z=5 \\ -2x-3y-3z=-5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x-3y-3z=5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ 2x+2y+6z=1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} w-x+y+z=5 \\ w+x-y-z=3 \end{cases}$

Solución: a) (1 /4, –3 /4, 1 /4); b) (–1, 2, –3); c) (1 /2, –3/2, 1); d) Sistema indeterminado (3/2–z/2, –7/2+z/2, z)

13. Resuelve el sistema de la actividad resuelta anterior $\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

Solución: Comprobado. En efecto x = 50, y = 30, z = 10.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

Solución: a) (1 /4, –3/4, 1/4); b) (–1, 2, –3); c) (1/2, –3/2, 1); d) Sistema indeterminado (3/2–z/2, –7/2+z/2, z)

2. – Dados los sistemas: a) $\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y=3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y\ \ =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.

b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

Solución: a) Forma matricial: $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$; ***Det A = –7 $\neq$ 0; Tipo Cramer; x = –2; y = –1.***

b) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; ***Det A = 13 $\neq$ 0; Tipo Cramer; x = 15/13; y = –10/13.***

c) Forma matricial: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; ***Det A = 18 $\neq$ 0; Tipo Cramer; x = 2; y = –1; z = –1.***

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$

Solución: a) Sistema compatible indeterminado: x = α, y = –3 + 2α, $\alpha \in \Re$; Infinitas soluciones.

b) Sistema compatible determinado: x = 3/2, y = 0; Solución única.

c) Sistema incompatible.

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Solución: a) x = 1/3; y = –2/3; z = 5/3; b) x = –2, y = 7, z = –4; c) x = 1, y = 1, z = –1; d) x = –4, y = 6, z = 1.

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible: a) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$

Solución:

a) Si a = –8 es compatible indeterminado. En caso contrario es compatible determinado.

Para a = –8 la solución es (29 +12 z, –19 + 20 z, z). En otro caso (232–29a , 19a–152, 0) / (8–a)

b) Si m = 1 compatible indeterminado. Si m = –1 incompatible. En otro caso compatible indeterminado.

Para m = 1 la solución es (–2z / 7, –z /7, z). Para m distinto de 1 y –1, $\frac{1}{7m^2-7}(2-2m, 1-m, 7m-7)$

6. – Dado el sistema $\begin{cases}(a+2)x+(a-1)y-z=3\\ ax-y+z=3\\ x+ay-z=1\end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a=-1$.

Solución: a) El sistema es compatible determinado si a es distinto de 0 y distinto de –1; Si a = 0 el sistema es incompatible; Si a = –1 el sistema es compatible indeterminado.

c) Para a = –1 las soluciones son: x = α – 1, y = –2, z = α, con $\alpha \in \Re$.

d)

7. – Dadas las ecuaciones: $\begin{cases}6x-9y+2z=5\\ 2x-3y+z=4\end{cases}$ se pide:

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

Solución abierta: Por ejemplo: a) 2x – 3y + z = 0; b) x = 7.

8. – Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases}2x+3y-z=-2\\ x+2y+2z=1\end{cases}$ se pide:

a) Discute y resuelve, cuando sea posible.

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución ii) muchas soluciones iii) no tenga solución

Solución: a) Sistema compatible indeterminado. Las soluciones son: x = –7 + 8α, y = 4 – 5α, z = α, con $\alpha \in \Re$.

b) i) Solución abierta, por ejemplo: z = 1, siendo entonces la solución única: x = 1, y = –1, z = 1;

ii) Solución abierta, por ejemplo: 3x + 5y + z = 9, que es combinación lineal de las ecuaciones;

iii) Solución abierta, por ejemplo: 3x + 5y + z = 0, que es combinación lineal de las ecuaciones excepto el término independiente.

9. – Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases}x+y+3z=0\\ -2x-3y+z=0\\ 3x+2y+4z=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-y+3z=0\\ 2y-z=0\\ -2x+3y-4z=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}y=x+3z-y\\ x=z-2y+x\\ z=x-2y-2z\end{cases}$

Solución: a) Compatible determinado. Solución única (0, 0, 0).

b) Compatible indeterminado. (–5y/2, y, 2y)

c) Compatible determinado. Solución única (0, 0, 0).

10. – Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x & 1\\ x & m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}y-2\\ -m\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3x\\ 4x\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A\cdot B$, $E\cdot D$, $D\cdot E$.

b) Si $C-2AB=-D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

Solución: a) A·B = $\begin{pmatrix}x-y\\ x-my\end{pmatrix}$ ***, E·D = (19x), D·E =*** $\begin{pmatrix}3x & 12x\\ 4x & 16x\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}x+3y=2\\ 2x+2my=m\end{cases}$ ***; Si m es distinto de 3, el sistema es compatible determinado, con solución única.***

Si m = 3, es sistema es incompatible.

11. – Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z\neq 0$

Solución: a) $\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=2a \\ x+y+z=2a \end{cases}$ ***; b) El sistema es incompatible si a es distinto de 0, y compatible indeterminado si a = 0; Para ningún valor de a, tiene solución única; c) Para a = 0, la solución es: x = 0, y = –α, z = α, con $\alpha \in \Re$, luego una solución podría ser: x = 0, y = –1, z = 1.***

12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 €. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución: 100 billetes de 50 €, 75 billetes de 20 € y 50 billetes de 10 €.

13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

Solución: 25 billetes de 10 €, 15 de 20 € y 20 de 50 €.

14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

Solución: Número 369.

15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

Solución: 38 aciertos, 18 fallos y 4 preguntas en blanco.

16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución: Migato: 62 %; Catomeal: 22 %; Comecat 16 %.

17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

Solución: Padre 32, madre 30, hija 8.

18. – Una persona invirtió 72 000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5 520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

Solución: En la empresa A invirtió 6 000 €, en la B, 54 000 €, y en la C, 12 000 €.

19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

Solución: De la clase A, 50 kg; de la B, 20 kg; y de la C, 10 kg.

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución: La madre tiene 44 años, el hijo mayor, 18 años y el menor, 16 años.

21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

Solución: a) $\begin{cases} 2x+3y+mz=112 \\ 2x-3y-m=-56 \\ 3x+mz=28m \end{cases}$ ***. El sistema es compatible indeterminado para m = 3 y es incompatible para cualquier otro valor de m.***

b) El precio del anticaspa debe ser necesariamente 3. Si no, no se puede resolver.

c) No es posible resolverlo. El sistema es incompatible.

22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1.18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son ”m” euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12.60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de ”m”) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de ”m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

Solución: a) $\begin{cases} 1{,}2x+1{,}18y=mz+46{,}80 \\ y=z \\ 1{,}2x=1{,}18y+12{,}60 \end{cases}$ ***siendo x el número de litros de la gasolinera A, y el de B y z el de C;***

b) Si m $\neq$ ***2.36 el sistema es compatible determinado, y si m = 2.36, el sistema es incompatible.***

23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

Solución: a) 6€; b) No podemos saber cuánto vale un café.

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2z+2y=5 \\ 2y-x+z=11 \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: d)

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

Solución: d)

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

Solución: d)

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Solución: a)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y+z=3x \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Solución: b)

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

Solución: b)

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

Solución: c)

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $x+y+z=7$

Solución: a)

9.- Indica la afirmación que es correcta:

a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.
b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.
c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.
d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$; a) Obtén su matriz de coeficientes. b) Calcula el determinante de la matriz anterior. c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

Solución: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ***; b) 6; c) Sí.***

(2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

a) Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación.

b) Calcula el determinante de la matriz del sistema.

Solución: a) Si llamamos x al número de alumnos en la primera titulación, y al número de alumnos en la segunda titulación, z al número de alumnos en la tercera titulación, el sistema es:

c) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=352 \\ z&=\frac{1}{3}x \\ x-y&=2z-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{4}{3}x+y&=352 \\ \frac{1}{3}x-y&=-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3}x=350 \Rightarrow x=210, y=72, z=70$; ***b) El sistema es equivalente a***

d) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=352 \\ \frac{1}{3}x-z&=0 \\ x-y-2z&=-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 352 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ***, por lo que*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = --\frac{1}{3}-1+\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$

(3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres. A) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior. B) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en A). C) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?

Solución: a) Si llamamos x al número de canastas de 2, y al número de canastas de 3, z al número de canastas de 1, el sistema es; $\left.\begin{aligned} 2x+3y+z&=64 \\ z&=5y+2 \\ x&=z+2 \end{aligned}\right\}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ***c) x = 19 canastas dobles, y = 3 canastas triples y z = 17 tiros libres.***

(4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1150 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución?

b) Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?

Solución: a) Si llamamos x al número de acciones de BBA, y al número de acciones de NKO, el sistema es

$$\left.\begin{aligned}6x+my&=800\\6\frac{x}{2}+m2y&=1150\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}6x+my&=800\\3x+2my&=1150\end{aligned}\right\}$$

; el sistema no puede tener más de una solución porque la segunda ecuación no es proporcional a la primera, al ser el coeficiente de x en la segunda ecuación la mitad que en la primera y el coeficiente de y el doble; b) El sistema sería:

$$\left.\begin{aligned}6x+5y&=800\\3x+10y&=1150\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}6x+5y&=800\\6x+20y&=2300\end{aligned}\right\}\Rightarrow 15y=1500\Rightarrow y=100$$

(5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es *m* veces el número de bolsas de gominolas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?

b) Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

Solución: a) $\begin{cases}2x+4y=200\\ x=my\end{cases}$ ***. El sistema es incompatible para m = -2 y es compatible determinado en otro caso. Por tanto, sí, es posible pues para m = 2 es correcto.***

c) 20 bolsas de gominolas.

d)

(6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a *m* Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h?

b) Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?

Solución: a) Si llamamos x al tiempo que circula por la primera vía, y al tiempo que circula por la segunda vía, el sistema es $\left.\begin{aligned}100x+my&=1240\\x+y&=11\end{aligned}\right\}$ ***; No puede ser que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea de 100 Km/h, ya que entonces para que el sistema fuera compatible la primera ecuación tendría que ser 100 veces la segunda, lo que no cumple el término independiente; b) El sistema sería:***

$$\left.\begin{aligned}100x+120y&=1240\\x+y&=11\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}5x+6y&=62\\y&=11-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow 5x+66-6x=62\Rightarrow x=4\ horas$$

(7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de m alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan m euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 euros al mes?

b) Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?

Solución: a) Si llamamos x al número de alumnos de nivel básico, y al número de alumnos de nivel avanzado, el sistema es $\left.\begin{matrix} m\,x + 2\,m\,y = 3000 \\ x + y = m \end{matrix}\right\}$ ***; el sistema no puede tener más de una solución porque la primera ecuación no es proporcional a la segunda, al ser el coeficiente de x en la primera ecuación m veces el de la primera y el coeficiente de y 2 m veces; b) Si*** $m = 50$***, el sistema queda***

$$\left.\begin{matrix} 50\,x + 100\,y = 3000 \\ x + y = 50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 50 - y,\, 50\,(50 - y) + 100\,y = 2500 + 50\,y = 3000 \Rightarrow y = 10 \text{ €}$$

(8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene m hijos más que Juan y m veces los de Luis.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de hijos de Juan y Luis. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

Solución: a) Si llamamos x al número de hijos de Juan, y al número de hijos de Luis, el sistema es:

$\left.\begin{matrix} x + y = 10 \\ x + m = m\,y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 10 \\ -x + m\,y = m \end{matrix}\right\}$ ***; se cumple que*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m + 1$***, luego el sistema tiene solución única si m es distinto de -1. Para m = -1 el sistema es incompatible.***

b) Si $m = 2$***, el sistema queda:*** $\left.\begin{matrix} x + y = 10 \\ -x + 2\,y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 10 - y,\, y - 10 + 2\,y = 2 \Rightarrow y = 4 \text{ hijos}$ ***. Juan tiene 6 hijos, Luis, 4, y Javier tiene 8 hijos.***

(9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

Solución: a) $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ x + 1 = y \end{cases}$

b) 7 hombres, 8 mujeres y 5 niños

(10) Considere el sistema $\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$; a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a.

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso $a = 1$.

Solución: a) Se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -a & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 2a^2 + 9 + 2a + 6a - 3a = -2a^2 + 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{-4} = 3, -\frac{3}{2},$$

Luego si $a \neq 3, -\frac{3}{2}$ ***el sistema tiene solución única. Si*** $a=3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 27 + 18 + 12 - 27 + 18 = 60 \neq 0$$ ***, luego el sistema es incompatible. Si*** $a = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - \frac{27}{8} + 18 + 12 - 6 - \frac{27}{4} - 9 = 9 - \frac{81}{8} \neq 0$$ ***, luego el sistema es incompatible.***

b) Si $a=1$ ***se cumple que:***

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 5y - 5z = -5 \\ 2y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2, 2 - z = -1, x = 2 + y - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2, z = 3, x = 1$$

(11) Dado el sistema $\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$

a) Estudie su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvalo cuando $a = 0$.

Solución: a) Se cumple que: $\begin{vmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a - 2a - 2 = a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2, -1$

Luego si $a \neq 2, -1$ ***el sistema tiene solución única.***

Si $a = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 9 - 2 = -1 \neq 0$***, luego el sistema es incompatible.***

Si $a = -1$ ***la segunda ecuación queda 0=2, luego el sistema es incompatible;***

b) Si $a=0$ ***el sistema queda:***

$$\left.\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -x, z = y - 2 = -x - 2, -x - 2x + x + 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = -\frac{5}{2}$$

(12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) Obtener las ecuaciones del sistema.
b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.
c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

Solución: a) El sistema es $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+4z=0 \\ -x+y+2z=5 \end{array}\right\}$ ***;***

b) Se cumple que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-4+2-1-4-4=-13 \neq 0$ ***, luego el rango es 3;***

c) Como el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, el sistema tiene una única solución.

(13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?
b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a? ¿Tenía más soluciones el sistema?
c) Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.

Solución: a) No hay solución si a = 1

b) Tendría que ser a = 1 /2. Y sí, hay más soluciones (de hecho hay infinitas).

c) Valdría cualquier a que no fuera 1 ni 1 /2. Por ejemplo para a = 0 obtenemos (1,0,0).

(14) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$
b) Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.
c) Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?
d) Encontrar, si es posible, una solución.

Solución:

(15) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -3 & a\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\ a\\ a\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ donde a es desconocido.

a) Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B. ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?

b) Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C, ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

Solución: a) $AB+C=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2x & -1\\ -x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\ 2z\\ -z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\ 2x-y+2z\\ -x+y-z\end{pmatrix}$;

b) $AB+C=\begin{pmatrix}x+y+z\\ 2x-y+2z\\ -x+y-z\end{pmatrix}=3D=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x+y+z=3\\ 2x-y+2z=0\\ -x+y-z=1\end{matrix}\right\}$;

c) Se cumple que: $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=1-2+2-1-2+2=0$

, $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1+6-3-2=0$ ***luego el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado luego tiene infinitas soluciones;***

d) Si sumamos la primera ecuación y la tercera, obtenemos $2y=4\Rightarrow y=2$. ***Sustituyéndolo en la primera, obtenemos*** $x+2+z=3\Rightarrow z=1-x$. ***Esto también cumple la segunda ecuación, luego la solución es:*** $(x,2,1-x)$

(16) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x & 2\\ 0 & m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ 10x\end{pmatrix}$, $D=10\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}3 & m\end{pmatrix}$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A\cdot B$, $D\cdot E$, $E\cdot B$.

b) Si $AB+C=D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

Solución:

(17) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

a) Si $AB-C=D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a.

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$

Solución: a) $\begin{cases} ax = 6 - ay \\ y - ay = 1 - a \end{cases}$

b) Sí, descartamos a = 0.

c) Sí, descartamos a = 1 (y obviamente también a = 0).

d) Sí, a = 1.

(18) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

Solución:

(19) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

Solución:

(20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno.

Solución:

CAPÍTULO 4: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO - VECTORES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

2. VECTORES EN EL ESPACIO

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen $A\,(-1, 1, 2)$ y extremo $B\,(3, 1, -4)$.

Solución: AB = (4, 0, –6); |AB| = $\sqrt{52}$

2. Dados los puntos $P = (2,\ 2, 3)$, $Q = (1,\ 0, 5)$ y $R = (-2,\ 3, 4)$ y los vectores $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

   a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

Solución: a) $\overrightarrow{QP}$ ***= (1, 2, –2), vector con origen en Q y extremo en P; b)*** $3\vec{v} - 2\vec{w}$ ***= (3, 1, 7), vector ya que el producto de un escalar por un vector es un vector y la suma o diferencia de vectores es un vector;***

c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ ***= (–3, 0, 4), vector diferencia de dos vectores;***

d) $P + \vec{v}$ ***= (3, 1, 6), punto. Estamos sumando el vector de posición del punto P con un vector, y obtenemos un vector de posición de un nuevo punto;***

e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$ ***= (–3, –1, 7), punto. La suma de un punto por un vector es un punto.***

3. Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R = (r_1, r_2, r_3)$, demuestra:

   a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

Solución: Comprobado.

4. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (-6, 3, 0)$ y $\vec{w} = (7, 2, -1)$ calcula:

   a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}$ b) $2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w}$ c) $3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 3\vec{w}$ d) $3\vec{u} - 2(\vec{v} + \vec{w})$

Solución: a) (50, –5, 10); b) (28, –8, 8); c) (60, –21, 12); d) (1, –19, 17).

5. Dados los puntos $A\,(0, -2, 6)$ y $B\,(4, 8, -4)$, determina el punto medio del segmento AB.

Solución: M = (2, 3, 1).

6. Comprueba si los puntos $A\,(3, 2, 1)$, $B\,(4, 4, -2)$ y $C\,(4, -1, 3)$ están alineados.

Solución: No están alineados.

7. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:

   $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, 0, 1)$ y $\vec{w} = (4, 2, -7)$.

   $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (2, 4, 0)$.

   $C = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}\}$, con $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 2, -7)$ y $\vec{x} = (0, 0, 1)$

Solución: A) independientes; B) dependientes; C) dependientes.

3. PRODUCTO ESCALAR

8. Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (0, 1, -3)$ y $\vec{v} = (-3, 4, 6)$

Solución: uv = 0 + 4 + (–3)6 = –14.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Dados los vectores libres:

a) Representa los vectores: $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$ y $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$.

b) Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Solución: a) Solución gráfica; b) d = b – c – 2a .

2. - Dados $\vec{a} = (2,-1)$ y $\vec{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

Solución: m = 3/2.

3. - Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\vec{x} = (-2,3)$ e $\vec{y} = (6,-9)$ b) $\vec{x} = (-1,-2,3)$, $\vec{y} = (-2,0,1)$, $\vec{z} = (2,-4,5)$ y $\vec{t} = (3,2,-4)$

c) $\vec{x} = (2,1,0,-1)$, $\vec{y} = (1,-3,-1,0)$ y $\vec{z} = (3,-2,-1,1)$

Solución: a) No, b) No; c) Sí.

4. - a) Dados los vectores $\vec{x} = (1,3,-2)$ e $\vec{y} = (3, m,-6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente dependientes. b) Si $m = -2$, ¿se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1,8,1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$?

Solución: a) m = 9; b) No.

5. - Dados los vectores $\vec{u} = (-3,4,0)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ y $\vec{w} = (0,-m,1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución: m = 1/3.

6. - Dados los vectores $\vec{x} = (1,-2,0)$, $\vec{y} = (3,-1,2)$ y $\vec{z} = (-m,-1,-2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes. En este caso, expresa $\vec{z}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Solución: m = 2; $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$.

7. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1, m)$, $\vec{v} = (0, m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes. b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, y halla dicha combinación. c) Sean coplanarios.

Solución: a) m distinto de 1; b) m = 1; $\vec{v} = -\vec{u} + \vec{w}$; c) m = 1.

8. - Los vectores $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (-1,0,1)$ y $\vec{z} = (2,1,1)$, ¿forman una base de V^3? En caso afirmativo:

a) Halla las componentes del vector $\vec{u} = (3,-2,5)$ respecto de dicha base. b) Halla las componentes en la base canónica $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ del vector $\vec{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ son 2, -3 y 2 respectivamente.

Solución: Son base; a) (14, 7, –2); b) (9, 2, –1).

9. - Halla un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

Solución abierta:

10. - De un segmento $\overline{AB}$, el punto B tiene de coordenadas $(-2,0,6)$ y el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-3,2,2)$. Halla las coordenadas del punto A y divide el segmento $\overline{AM}$ en cuatro partes iguales.

Solución: A = (–4, 4, –2); P1 = (–3.75, 3.5, 1), P2 = (–3.5, 3, 0), P3 = (–3.25, 2.5, 1).

11. - De un segmento $\overline{AB}$, se sabe que $\overrightarrow{AB} = (3,-4,-2)$ y que el punto medio del segmento tiene de coordenadas $M\ (-1,0,3)$. Halla las coordenadas de A y B y dividir el segmento $\overline{AB}$ en 3 partes iguales.

Solución: A = (–5/2, 2, 4); B = (1/2, –2, 2); P1 = (–3/2, 2/3, 10/3); P2 = (–1/2, –2/3, 8/3).

12. - Dados los puntos $A\ (2,0,1)$ y $B\ (0,-2,3)$, halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

Solución: C = (1, –1, 2); D = (4, 2, –1).

13. - De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se sabe que $|\vec{u}| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$ y los dos vectores forman un ángulo de 120°. Halla $|\vec{v}|$, $\text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ y $\text{proy}_{2\vec{v}}\,\vec{u}$.

Solución: $|\vec{v}| = 8$; $\text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v} = -4$; $\text{proy}_{2\vec{v}}\,\vec{u} = -3/2$.

14. - ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ siendo $|\vec{u}|=3$ y $|\vec{v}|=2$?

Solución: No puede.

15. - Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3,6)$ y $\vec{v}=(3,-6,2)$, calcula:

a) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$. b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}$. c) El ángulo formado por ellos.
d) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{u}-\vec{v}$. e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tenga módulo 3. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución: a) 36; b) módulo de $\vec{u}$ = 7; módulo de $\vec{v}$ = 7; c) 42.72º; d) 68.65º; e) $\left(\frac{6}{\sqrt{5}},\ \frac{3}{\sqrt{5}},\ 0\right)$. Hay infinitas soluciones.

16. - Dados los vectores $\vec{u}=(1,-2,2)$ y $\vec{v}=(4,-4,-2)$, calcula: a) El producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$. b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}-\vec{u}$. c) El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$. d) Los cosenos directores de $\vec{v}$. e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ que tenga módulo 6.

Solución: a) 48; b) módulo de $\vec{u}$ = 3; módulo de $\vec{v}-\vec{u}$ es igual a raíz de 29; c) 43.49º; d) 2/3, –2/3, –1/3;

e) $\left(\frac{36\sqrt{77}}{25},\ \frac{6\sqrt{77}}{5},\ \frac{24\sqrt{77}}{25}\right)$.

17. - Calcula las componentes de un vector $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u}=(4,-2,1)$ y su módulo sea 3 y las de otro vector $\vec{w}$ que sea unitario pero con sentido opuesto al vector $\vec{u}$. ¿Cuáles son los cosenos directores de $\vec{u}$?

Solución: $\vec{v}=\left(\frac{12}{\sqrt{21}},\ \frac{-6}{\sqrt{21}},\ \frac{3}{\sqrt{21}}\right)$; $\vec{w}=\left(\frac{-4}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{-1}{\sqrt{21}}\right)$; $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{21}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{21}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{21}}$

18. - Los cosenos directores del vector $\vec{u}$ son: $\cos\alpha=0{,}2$, $\cos\beta=0{,}3$ y $\cos\gamma=0{,}87$. Si $|\vec{u}|=6$, ¿cuáles son sus componentes?

Solución: No puede ser pues no verifican que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$ sea igual a 1.

19. - Un vector $\vec{u}$ forma con los vectores $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ de la base ortonormal ángulos de 45° y 60°, y con el vector $\vec{u}_1$ un ángulo agudo. Si $|\vec{u}|=4$, determina las componentes del vector $\vec{u}$.

Solución: (2, $2\sqrt{2}$, 2).

20. - Determina, si es posible, el valor de m de modo que $\vec{u}=(m,-2,3)$ y $\vec{v}=(-1,m,1)$ sean: a) Paralelos. b) Perpendiculares

Solución: a) Nunca pueden ser paralelos; b) m = 1.

21. - a) Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(-1,m,4)$ y $\vec{v}=(m,-3,2)$ sean perpendiculares.

b) ¿Qué ángulo formarán para $m=0$ los vectores $(\vec{u}+2\vec{v})$ y $(\vec{u}-\vec{v})$?

Solución: a) m = 2; b) 91.96º.

22. - De dos vectores ortogonales se sabe que $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=7$ y $|\vec{u}+\vec{v}|=5$. Halla $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.

Solución: 4 y 3.

23. - Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $|\vec{u}|=16$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=24$, calcula el módulo de $\vec{v}$.

Solución: $\sqrt{232}$

24. - Dados los vectores $\vec{u}=(2,3,8)$ y $\vec{v}=(-1,2,0)$ calcula: a) Las componentes de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$. b) Un vector de la misma dirección que $\vec{v}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$. c) Un vector perpendicular a ambos y de módulo 2.

Solución: a) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right)$; b) (–0.8, 1.6, 0); c) $\left(\frac{32}{3\sqrt{41}},\ \frac{16}{3\sqrt{41}},\ \frac{-14}{3\sqrt{41}}\right)$.

25. - Sea $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ una base de vectores tal que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$, $|\vec{w}|=1$ y además verifica que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=3$ y $\vec{v}\cdot\vec{w}=12$. Calcula el valor de m para que $\vec{a}=11\vec{u}+m\vec{v}+3\vec{w}$ y $\vec{b}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ sean ortogonales.

Solución: La base dada es imposible.

26. - Dados los vectores $\vec{a} = (1,0,1)$, $\vec{b} = (2,-1,-2)$ y $\vec{c} = (1,-3,2)$, determina un vector unitario (de módulo 1) que siendo coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sea ortogonal (perpendicular) a $\vec{c}$.

Solución: $\left(\frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}, \frac{7}{\sqrt{83}}\right)$

27. - Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 7$. ¿Qué ángulo forman?

Solución: 78.46º.

28. - Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v}| = 4$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, halla: a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$ b) $|\vec{u}-\vec{v}|$ y $|2\vec{u}-\vec{v}|$ c) El ángulo que forman los vectores $(\vec{u}-\vec{v})$ y $(2\vec{u}-\vec{v})$

Solución: a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *= 6;* $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$ *= 4; b)* $|\vec{u}-\vec{v}|$ *= 6;* $|2\vec{u}-\vec{v}|$ *= 4; c) El ángulo que forman los vectores* $(\vec{u}-\vec{v})$ *y* $(2\vec{u}-\vec{v})$ *es 88.41º.*

Solución: a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *= 6;* $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$ *= 4; b)* $|\vec{u}-\vec{v}|$ *=* $\sqrt{7}$ *;* $|2\vec{u}-\vec{v}|$ *= 2; c) El ángulo que forman los vectores* $(\vec{u}-\vec{v})$ *y* $(2\vec{u}-\vec{v})$ *es 40.89º.*

29. - Determina, si es posible, el valor de α de modo que los vectores $\vec{u} = (1,\alpha,2)$ y $\vec{v} = (1,-2,-\alpha)$:

a) Sean paralelos. b) Sean perpendiculares. c) Formen un ángulo de 60°.

Solución: a) α *= –2; b)* α *= 1/4; c)* α *= –0.39443 o* α *= –7.60553.*

30. - Halla todos los vectores de módulo 3 que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (1,-1,1)$ y de 135° con $\vec{v} = (-1,1,0)$.

Solución: (2.56066, –0.43934, 1.5) y (0.43934, –2.56066, 1.5).

31. - Halla todos los vectores de módulo 6 que formen un ángulo de 90° con $\vec{u} = (1,-1,0)$ y 45° con $\vec{v} = (-1,0,1)$.

Solución: (0, 0, 6) y (–4, –4, 2)

32. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,-2)$, $\vec{v} = (-1,0,3)$ y $\vec{w} = (2,-1,-2)$, calcula:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w}\times\vec{v}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}|$ b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

Solución: a) $|\vec{u}|$ *= 3,* $|\vec{w}\times\vec{v}|$ *=* $\sqrt{26}$ *y* $|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}|$ *=; b)* $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$ *= –9 y* $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ *= 16.*

33. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,4,-8)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$ y $\vec{w} = (2,1,-1)$ halla:

a) $|\vec{v}|$ y $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}\times\vec{w}|$ y $|(\vec{u}\times\vec{w})\times\vec{v}|$

Solución: a) $|\vec{v}|$ *=* $\sqrt{2}$ *y* $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ *= –31; b)* $|\vec{u}|$ *= 9,* $|\vec{v}\times\vec{w}|$ *=* $\sqrt{11}$ *y* $|(\vec{u}\times\vec{w})\times\vec{v}|$ *=.*

34. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,3)$, $\vec{v} = (4,0,-3)$ y $\vec{w} = -2\vec{u}+3\vec{v}$, calcula:

a) $|\vec{w}|$, $|\vec{w}\times\vec{v}|$ y $|\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})|$ b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$, $\vec{v}\times(\vec{u}-\vec{w})$ y $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

Solución: a) $|\vec{w}|$ *= 19,* $|\vec{w}\times\vec{v}|$ *=* $\sqrt{1800}$ *y* $|\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})|$ *=* $285\sqrt{2}$ *;*

b) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$ *= 0,* $\vec{v}\times(\vec{u}-\vec{w})$ *= (–27, –45, –36) y* $|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ *= 900.*

35. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,-1,1)$ y $\vec{v} = (2,3,4)$ calcula: a) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ y el ángulo que forman. b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$. c) Un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución: a) $|\vec{u}|$ *=* $\sqrt{3}$ *,* $|\vec{v}|$ *=* $\sqrt{29}$ *,* α *= 71.24º; b) (–7, –2, 5); c)* $\left(\frac{-7}{\sqrt{78}}, \frac{-2}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right)$ *; d) A =* $\sqrt{78}$ *.*

36. - Dados los vectores $\vec{u} = (-1,m,2)$, $\vec{v} = (2,-1,-4)$ y $\vec{w} = (3,-1,-5)$, se pide: a) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan distinta dirección. b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. c) Un vector que tenga módulo $3\sqrt{6}$ y que sea perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $2\vec{v}-\vec{w}$.

Solución: a) Para distinta dirección: m $\neq$ *–1/2 ; b) Para que sean ortogonales: m = –10; c) (–3, 6, –3).*

37. - Dados los vectores $\vec{u} = (1,1,m)$, $\vec{v} = (0,m,-1)$ y $\vec{w} = (1,2m,0)$, determina el valor de m para que: a) Sean linealmente independientes. b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Halla dicha combinación. c) Sean coplanarios. d) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ valga 125 u^2.

Solución: a) m $\neq$ *1; b) y c) m = 1; (0, 1, –1) = (–1)(1, 1, 1) + (1)(1, 2, 0); d) m = 55.9 y m = –55.9*

38. - En un sistema de referencia ortogonal $R=\{O,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, donde $|\vec{u}_1|=1$, $|\vec{u}_2|=2$ y $|\vec{u}_3|=2$, tenemos los vectores $\vec{a}=\vec{u}_1+\vec{u}_2-2\vec{u}_3$ y $\vec{b}=2\vec{u}_1-\vec{u}_2+\vec{u}_3$. Con estos datos se pide: a) $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$. c) $\vec{u}_2\times\vec{u}_3$, $\vec{u}_3\times\vec{u}_1$, $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$, $\vec{b}\times\vec{a}$ y área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. d) Repite los apartados anteriores en el caso de ser un sistema de referencia ortonormal.

***Solución:** a) $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$ = 0, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_2$ = 0, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2$ = 4, $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3$ = 4; b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = –10, $|\vec{a}|$ = $\sqrt{21}$, $|\vec{b}|$ = $\sqrt{12}$, α = 129.046º;*

c) $\vec{u}_2\times\vec{u}_3$ = $4\vec{u}_1$, $\vec{u}_3\times\vec{u}_1$ = $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ = $\vec{u}_3$, $\vec{b}\times\vec{a}$ = (–1, 3, –3) y A = 13;

d) $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$ = $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_2$ = 0, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2$ = $\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3$ = 1; $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = –1, $|\vec{a}|$ = $|\vec{b}|$ = $\sqrt{6}$, α = 99.59º;

$\vec{u}_2\times\vec{u}_3$ = $\vec{u}_1$, $\vec{u}_3\times\vec{u}_1$ = $\vec{u}_2$, $\vec{u}_1\times\vec{u}_2$ = $\vec{u}_3$, $\vec{b}\times\vec{a}=(1,-5,3)$ y A = $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.

39. - Encuentra un vector $\vec{x}$ que tenga de módulo 3, y tal que si $\vec{y}=(3,-3,0)$ verifique: $\vec{x}\times\vec{y}=(6,6,3)$.

***Solución:** (1, –2, 2) y (–2, 1, 2).*

40. – Sean $A(m-2,m,-5)$, $B(m,1,-5)$ y $C(-1,3,m)$ los vértices de un triángulo ABC. ¿Cuánto vale m para que el triángulo sea rectángulo en B?

***Solución:** m = 0.*

41. - Los vértices de un triángulo ABC son $A(\lambda,2,-1)$, $B(5,3,-4)$ y $C(7,\lambda,-2)$. ¿Cuánto vale λ para que el triángulo sea rectángulo en B?

***Solución:** λ = 1.*

42. - Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,1,1)$ y $B(0,2,0)$. Si $O(0,0,1)$ es el centro de dicho paralelogramo, halla las coordenadas de los otros dos vértices y el área del paralelogramo.

***Solución:** C = (–1, –1, 1); D = (0, –2, 0).*

43. - Dados los puntos $A(-4,2,-1)$, $B(-1,1,1)$ y $C(2,m,3)$, se pide hallar el valor de m para que los tres puntos: a) estén alineados. b) formen un triángulo rectángulo donde $\hat{B}=90^\circ$. c) formen un triángulo isósceles, siendo $\hat{A}$ el ángulo desigual. d) formen un triángulo de área $\sqrt{52}$ u².

***Solución:** a) m = 0; b) m = 14; c) No hay solución; d) m = –28.2143 y m = ± 4.*

44. - Dados los puntos $A(1,1,-1)$, $B(-1,-1,0)$ y $C(3,m,-2)$, se pide: a) Hallar para qué valores del parámetro *m* están alineados. b) Hallar si existen valores de *m* para los cuales A, B y C son tres vértices de un paralelogramo de área $2\sqrt{5}$ u² y, en caso afirmativo, calcularlos. c) Hallar para qué valor de m formarán un triángulo rectángulo en B, y calcular el área.

***Solución:** a) m = 3; b) m = 1 y m = 5; c) m = –6; A = $9\sqrt{5}$ u².*

45. - Dados los puntos $A(0,0,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,1,1)$ calcula: a) El área y el perímetro del triángulo de vértices A, B y C. b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D. c) El volumen del paralelepípedo determinado por esos cuatro puntos. d) El área de una de las caras laterales.

***Solución:** a) A = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ u²; perímetro = $3\sqrt{2}$; b) 2/3 u³; c) 4 u³; d) S = $\sqrt{19}$.*

46. - Sea la pirámide de vértices $A(0,1,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(-1,1,0)$ y $D(1,-2,2)$, calcula: a) El área del paralelogramo determinado por los puntos A, B y C. b) El área de cada cara. c) Su volumen.

***Solución:** a) A = 2; b) A_1 = 1 u²; A_2 = $\sqrt{13}$ u²; A_3 = $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ u²; A_4 = $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$ u²; c) 6 u³.*

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los vectores de componentes (1, 3, –2) y (3, x, –6), indica el valor de x para que los dos vectores sean linealmente dependientes.

   a) 6 b) 9 c) –3 d) –6

Solución: b)

2. El módulo del vector de origen A(–2, 3, –2) y extremo B(2, 0, –2) es:

   a) $\sqrt{82}$ b) 25 c) $\sqrt{41}$ d) 5

Solución: d)

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ el vector $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ tiene de componentes:

   a) (15, –15, 15) b) (9, –15, 15) c) (15, 15, 15) d) (15, –12, 15)

Solución: a)

4. Dados los puntos $A(4,-1,5)$ y $B(2,7,-5)$, las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

   a) (3, 3, 0) b) (6, –6, 10) c) (3, 4, 0) d) (6, –4, 10)

Solución: a)

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$, su producto escalar es:

   a) 15 b) –15 c) –3 d) –6

Solución: b)

6. Dado el vector $\vec{v}=(-6,3,0)$ indica cuál de los vectores $\vec{u}$ es ortogonal a él:

   a) $\vec{u}=(1,-3,5)$ b) $\vec{u}=(1,-2,5)$ c) $\vec{u}=(1,2,7)$ d) $\vec{u}=(2,5,5)$

Solución: c)

7. Dados los puntos $A(4,-1,5)$, $B(2,7,-5)$ y C (6, –7, 16) el área del triángulo construido sobre ellos es:

   a) 150 b) 201 c) 30 d) $\sqrt{201}$

Solución: d)

8. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$, su producto vectorial es:

a) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,-30,-15)$ b) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,15,15)$ c) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,30,-15)$ d) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,-30,15)$

Solución: a)

9. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ y $\vec{w}=(1,1,1)$, su producto mixto es:

   a) –60 b) 45 c) –15 d) 0

Solución: a)

10. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$ y $\vec{w}=(1,1,1)$, el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos es:

    a) 60 b) 45 c) 15 d) 0

Solución: a)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

http://pedroreina.net/pau/

http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

http://www.segundoperez.es/

https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Busca el área del polígono de vértices $A\,(4,7,8)$, $B\,(2,3,4)$, $C\,(-1,-2,1)$ y $D\,(1,2,5)$.

Solución:

(2) Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son $M\,(1,0,0)$, $N\,(0,1,0)$ y $P\,(0,0,1)$. a) Obtén las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo. b) Halla el área del triángulo.

Solución:

(3) Los puntos $P\,(2,0,0)$ y $Q\,(0,4,2)$ son dos vértices de un triángulo isósceles. Obtén las coordenadas del tercer vértice sabiendo que el punto es de la forma $R\,(x,0,20)$. ¿Es única la solución?

Solución:

(4) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\,(-1,1,0)$, $B\,(0,1,1)$, $C\,(3,0,0)$ y $D\,(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\,(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcule:
a) Los vértices de la cara superior. b) El volumen del paralelepípedo.

Solución:

(5) Sean los puntos $A\,(x,4,3)$, $B\,(1,2,2)$ y $C\,(-1,0,1)$. a) ¿Para qué valores de x los puntos no forman un triángulo? b) Con $x=1$ calcula el área del triángulo que forman los puntos.

Solución:

(6) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores del espacio, indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones no tienen sentido:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \qquad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c} \qquad (\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c} \qquad |\vec{a}|\cdot\vec{b} \qquad (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

Solución:

(7) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos vale cero: $[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$ $\quad [\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}]$ $\quad [\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}]$

Solución:

(8) Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser ciertas, justifícalas; en caso contrario, pon ejemplos que lo confirmen. a) El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos es siempre distinto de cero.b) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores del espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ no nulos que satisfacen la condición $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$, entonces se verifica que $\vec{b}=\vec{c}$.

Solución:

(9) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tales que $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Solución:

(10) Dados los puntos $A\,(2,-2,1)$, $B\,(0,1,-2)$, $C\,(-2,0,4)$ y $D\,(2,-6,2)$: a) Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y halla la distancia entre los dos lados paralelos. b) Halla el área del triángulo ABC.

Solución:

(11) ¿Es siempre cierto que $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$? En caso afirmativo, justifícalo; en caso contrario, pon un ejemplo que lo confirme.

Solución:

(12) Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$ calcula: a) El área del triángulo de vértices A, B y C. b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

Solución:

(13) a) Demuestra que si tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son perpendiculares entre sí entonces se verifica:

$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2$ donde $|\vec{w}|$ denota el módulo del vector $\vec{w}$.

b) Dados los vectores $\vec{v}_1=(1,1,-1)$, $\vec{v}_2=(1,0,1)$ halla un vector $\vec{v}_3$ tal que:

$$|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2$$

c) Dado el vector $\vec{v}=(1,2,3)$, halla los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

a) $\vec{v}_1$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas; b) $\vec{v}_1$ es perpendicular a $\vec{v}_2$ c) $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$

Solución:

(14) Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice D y calcula el área de dicho paralelogramo.

b) Clasifica el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

(15) Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overrightarrow{CB}=-3\cdot\overrightarrow{AB}$.

a) Calcula el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

b) Si $A(1,2,-1)$ y $B(3,6,9)$, halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

(16) Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

a) Comprueba que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

b) Halla el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Solución:

(17) Resuelve la siguiente ecuación vectorial: $\vec{x}\times(2,1,-1)=(1,3,5)$ sabiendo que $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

Solución:

(18) Dados los vectores $\vec{u}=(a,1+a,2a)$, $\vec{v}=(a,1,a)$ y $\vec{w}=(1,a,1)$, se pide:

a) Determina los valores de a para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}=(3,3,0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a=2$.

c) Justifica razonadamente si para $a=0$ se cumple la igualdad $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$.

Solución:

CAPÍTULO 5: RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\left(-1,-4,2\right)$ y tiene por vector director $\vec{v}=\left(-3,-1,5\right)$

Solución: Ecuación vectorial: OP = (–1, –4, 2) + t(–3, –1, 5)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-1-3t \\ y=-4-t \\ z=2+5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} 3y-x+11=0 \\ 5y+z+18=0 \end{cases}$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\left(4,-3,-2\right)$ y tiene por vector director $\vec{v}=\left(-1,0,6\right)$

Solución: Ecuación vectorial: OP = (4, –3, –2) + t(–1, 0, 6)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=4-t \\ y=-3 \\ z=-2+6t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{z+2}{6};y=-3$

Ecuación implícita: $\begin{cases} 6x+z=22 \\ y=-3 \end{cases}$

3. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto $A\left(0,1,0\right)$ y tiene por vector director $\vec{v}=\left(-2,0,0\right)$

Solución: Ecuación vectorial: OP = (0, 1, 0) + t(–2, 0, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-2t \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $y=1;z=0$

Ecuación implícita: $\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\left(0,0,0\right)$ y $B\left(3,-4,1\right)$.

Solución: Ecuación vectorial: OP = (0, 0, 0) + t(3, –4, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=-4t \\ z=t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-4}=z$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x=3z \\ y=-4z \end{cases}$

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\ (3,\ -2,\ 6)$ y $B\ (1,\ -5,\ 7)$.

Solución: Ecuación vectorial: OP = (3, –2, 6) + t(2, 3, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 - t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-6}{-1}$ ***Ecuación implícita:*** $\begin{cases} x + 2z = 15 \\ y + 6z = 34 \end{cases}$

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A\ (2,\ -1,\ 6)$ y $B\ (7,\ -2,\ -1)$.

Solución: Ecuación vectorial: OP = (2, –1, 6) + t(–5, 1, 7)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 5t \\ y = -1 + t \\ z = 6 + 7t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-6}{7}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x + 5y + 3 = 0 \\ 7y - z + 13 = 0 \end{cases}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,-2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1,-2,3)$. Expresa dicha recta de todas las formas posibles. b) ¿Pertenece el punto $B\ (3,-5,4)$ a dicha recta? ¿Y el punto $C\ (-2,\ 5,\ -7)$? c) Halla el valor de m y n para que el punto $D\ (m,-7,2n)$ pertenezca a dicha recta.

Solución: a) Ecuación vectorial: OP = (1, –1, –2) + t(1, –2, 3)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} -2x - y + 1 = 0 \\ 3y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$

b) El punto $B\ (3,-5,4)$ ***pertenece a la recta, pues verifica sus ecuaciones, y el punto*** $C\ (-2,\ 5,\ -7)$ ***no pertenece, pues no las verifica.***

c) m = 4, n = 7/2; D = (4, –7, 7/2).

2. - Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por los puntos $A\ (0,-1,0)$ y $B\ (1,1,0)$. Hallar un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

Solución: a) Ecuación vectorial: OP = (0, –1, 0) + t(1, 2, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1}; z = 0$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

b) Cualquier punto de la recta está alineado con A y B. Basta con dar valores al parámetro t. Por ejemplo, para t = 3 C = (3, 5, 0)

c) Ahora basta con que no pertenezca a la recta. Por ejmplo: D = (3, 7, 0).

3. - Dados los puntos $A(2,0,1)$ y $B(0,-2,3)$, se pide: a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos. b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

Solución: a) Ecuación vectorial: OP = (2, 0, 1) + t(–1, –1, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

b) Para que estén alineados con A y B deben verificar la ecuación de la recta. Para que C esté entre A y B imponemos que, por ejemplo valga 1, un valor entre 2 y 0, entonces t = 1, y = –1, z = 2; C = (1, –1, 2).

c) Si x = 3, entonces t = –1, y = 1, z = 0; D = (3, 1, 0).

4. - Expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

a) $r:\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b) $s:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ c) $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d) $s:\begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases}$

Solución: a) Ecuación vectorial: OP = (0, 0, –1) + t(1, 2, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$

b) Ecuación vectorial: OP = (–1, 3, 2) + t(1, 2, –1)

Ecuación continua: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} -2x-y+5=0 \\ y+2z-7=0 \end{cases}$

c) Ecuación vectorial: OP = (3, –1, 1) + t(–1, 1, 2)

Ecuación continua: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2y-z+3=0 \end{cases}$

d) Ecuación vectorial: OP = (0, –1, –1) + t(–2, 1, 1/2)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = -1+t \\ z = -1+\frac{1}{2}t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{1/2}$

5. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r:\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ y además halla: a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea - 4. b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

Solución: Ecuación vectorial: OP = (–1, –1, 2) + t(–1, 3, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = -1-2t \\ y = -1+3t \\ z = 2+t \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x+2z=3 \\ y-3z+7=0 \end{cases}$

a) t = 5/3; P = (–13/3, 4, 11/3);

b) t = 1; Q = (–3, 2, 3).

6. - Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1}$ y halla un punto de la misma cuya primera coordenada sea –4.

Solución: Ecuación vectorial: OP = (1/2, 3, 0) + t(5/2, –2, 1/3)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 1/2 + (5/2)t \\ y = 3 - 2t \\ z = t/3 \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-1/2}{5/2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1/3}$ ***Ecuación implícita:*** $\begin{cases} 4x + 5y - 17 = 0 \\ y + 6z - 3 = 0 \end{cases}$

Sustituimos –4 en la ecuación de la recta y calculamos y, z: P = (–4, 33/5, 3/5)

7. - Halla las ecuaciones de los ejes OX, OY, OZ y exprésala de todas las formas posibles.

Solución:

Eje OX: Ecuación vectorial: OP = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje OY: Ecuación vectorial: OP = (0, 0, 0) + t(0, 1, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje OZ: Ecuación vectorial: OP = (0, 0, 0) + t(0, 0, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

8. - Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A\,(2,1,-1)$ y es paralela: a) Al eje OY. b) A la recta de ecuación $r: \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$ Exprésala de todas las formas posibles.

Solución: a) Ecuación vectorial: OP = (2, 1, –1) + t(0, 1, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} x = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

b) Ecuación vectorial: OP = (2, 1, –1) + t(–2, 3, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{array}\right\}$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$

Ecuación implícita: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$

9. - Dada la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-1}$ se pide: a) Expresa dicha recta de todas las formas posibles. b) Halla un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 4. c) Halla la ecuación de una recta s que sea paralela a la recta r y que pase por el punto $B\ (1,-2,0)$

Solución: a) r: Ecuación vectorial: OP = (1, 0, –2) + t(3, –1, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 1+3t \\ y = -t \\ z = -2-t \end{matrix}\right\}$ ***Ecuación implícita:*** $\begin{cases} x+3y-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

b) t = 5; P = (16, –5, –7);

c) s: (x, y, z) = (1, –2, 0) + t(3, –1, –1)

10. - Expresa de todas las formas posibles la recta $r: \begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

Solución: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (4/3, 2/3, 0) + t(1, 1, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 4/3+t \\ y = 2/3+t \\ z = t \end{matrix}\right\}$ ***Ecuación continua:*** $\frac{x-4/3}{1} = \frac{y-2/3}{1} = \frac{z}{1}$

s: (x, y, z) = (1, –2, –1) + t(1, 1, 1)

11. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

Solución: Obtenemos tres puntos del plano: A = (3, 0, 0); B = (0, –6, 0); C = (0, 0, 2), y con ellos, dos vectores directores: u = (1, 2, 0) y v = (0, 3, 1)

Ecuación vectorial: (x, y, z) = (3, 0, 0) + λ(1, 2, 0) + μ(0, 3, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 3+\lambda \\ y = 2\lambda+3\mu \\ z = \mu \end{matrix}\right\}$

Para hallar tres puntos del plano que estén alineados buscamos una recta contenida en el plano, por ejemplo: x = y, y calculamos z de forma que el punto pertenezca al plano. De esta forma obtenemos, por ejemplo:

A = (0, 0, 2); B = (3, 3, 1); C = (6, 6, 0).

12. - Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos: a) Pasa por el punto $A(3,2,-1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$. b) Pasa por los puntos $A(1,2,0)$ y $B(-1,1,2)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$. c) Pasa por los puntos $A(0,-2,1)$, $B(-2,0,-1)$ y $C(1,-2,0)$.

Solución: a) Ecuación vectorial: (x, y, z) = (3, 2, –1) + λ(–1, 1, 0) + μ(2, 0, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 3-\lambda+2\mu \\ y = 2+\lambda \\ z = -1-\mu \end{matrix}\right\}$

Ecuación implícita: x + y + 2z = 3.

b) Ecuación vectorial: (x, y, z) = (1, 2, 0) + λ(1, –2, 1) + μ(–2, –1, 2)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = 1+\lambda-2\mu \\ y = 2-2\lambda-\mu \\ z = \lambda+2\mu \end{matrix}\right\}$

Ecuación implícita: 4x + 4y + 5z = 12.

c) Pasa por el punto A = (0, –2, 1) y tiene como vectores de orientación: B – A $\to$ u = (–1, 1, –1), B –C $\to$ v = (–3, 2, –1) Ecuación vectorial: (x, y, z) = (0, –2, 1) + λ(–1, 1, –1) + μ (–3, 2, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = -\lambda-3\mu \\ y = -2+\lambda+2\mu \\ z = 1-\lambda-\mu \end{matrix}\right\}$

Ecuación implícita: x + 2y + z – 3 = 0.

13. - Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

Solución:

Plano OXY: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (0, 0, 0) + λ(1, 0, 0) + μ(0, 1, 0)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: z = 0.

Plano OXZ: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (0, 0, 0) + λ(1, 0, 0) + μ(0, 0, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\mu \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: y = 0.

Plano OYZ: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (0, 0, 0) + λ(0, 1, 0) + μ(0, 0, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: x = 0.

14. - Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P(8,9,1)$ y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad \text{y} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{array}\right\}$$

Solución: Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=8-2\lambda-\mu \\ y=9-\lambda+3\mu \\ z=1+2\lambda-3\mu \end{array}\right\}$

15. - Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-2,0,1)$ y contiene a la recta r de ecuación $r: \frac{x}{2} = y-1 = 2-z$.

Solución: Pasa por los puntos A(-2, 0, 1) y B(0, 1, 2). Tiene como vectores de orientación: v = (2, 1, -1) y w = (2, 1, 1)

Ecuación vectorial: (x, y, z) = (-2, 0, 1) + λ(2, 1, -1) + μ(2, 1, 1)

Ecuación implícita: x – 2y + 2 = 0

16. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Solución: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (3, –2, –1) + λ(3, –2, –1) + μ(3, –2, 1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=3+3\lambda+3\mu \\ y=-2-2\lambda-2\mu \\ z=-1-\lambda+\mu \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: 2x + 3y = 0.

17. - Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta $r: -x+2 = 3y = 1-z$.

Solución: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (0, 0, 0) + λ(–2, 0, 1) + μ(1, 1/3, –1)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-2\lambda+\mu \\ y=\mu/3 \\ z=\lambda-\mu \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: x + 3y + 2z = 0.

18. - Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M\ (-1,2,1)$ y a la recta $r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

Solución: Ecuación vectorial: (x, y, z) = (–1, 2, 1) + λ(–2, –1, 3) + μ(1, 0, –2)

Ecuación paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x=-1-2\lambda+\mu \\ y=2-\lambda \\ z=1+3\lambda-2\mu \end{array}\right\}$

Ecuación implícita: 2x – y + z + 3 = 0.

19. - Calcula para qué valor de m los puntos $A\ (1,m,2)$, $B\ (2,3,m)$ y $C\ (-1,-9,8)$ están alineados. En el caso de que $m=0$, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto $M\ (2,1,-2)$ a dicho plano?

Solución: Para ningún valor de m pueden estar los tres puntos alineados.

Para m = 0; 2y +3 z = 6.

El punto M no pertenece al plano.

20. - Halla el plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} y=1+x \\ z=-1-2x \end{cases}$ y es paralelo a $s:\dfrac{x+1}{3}=1-y=\dfrac{z}{3}$.

Solución: Ecuación implícita: x – 9y – 4z + 5 = 0.

21. - Calcula m y n para que la recta $r:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: mx+2y-4z-2n=0$.

Solución: m = 3; n = 23/2.

22. - Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

Solución: Escribimos las dos rectas como intersección de planos y calculamos los rangos de las matrices de los coeficientes y de las ampliadas. Obtenemos que las dos rectas se cruzan.

23. - Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas: $r:\dfrac{x+m}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{n}$ $\quad s:\begin{cases} -x+y-z=-2 \\ 2x+4y-3z=5 \end{cases}$

Solución: $m=-\dfrac{11n+24}{5n+12}$ ***; Si*** $m=-\dfrac{11n+24}{5n+12}$ ***las rectas son secantes, y si es distinto, se cruzan.***

24. - Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

a) $\begin{cases} r:\dfrac{x-1}{2}=-y+2=\dfrac{z}{2} \\ \pi: x+4y+z+2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r:\begin{cases} -x+3y-z+2=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} r:\begin{cases} -x+2y+z-4=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases} \\ \pi: 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} r:\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z}{-2} \\ \pi: x-4y-z-4=0 \end{cases}$

Solución: a) La recta es paralela al plano;

b) Se cortan;

c) Se cortan.

d) Se cruzan.

25. - Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+4y-6z=-4 \\ \pi_2: x-2y+3z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \pi_1: 2x-y+z=1 \\ \pi_2: -6x+3y-3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \pi_1: x-y+3z=4 \\ \pi_2: -2x+3y-z=3 \\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \pi_1: 3x-y+z=-1 \\ \pi_2: x+y-5z=1 \\ \pi_3: 2x-3y-z=-1 \end{cases}$

Solución: a) Coincidentes

b) Paralelos

c) No tienen ningún punto en común

d) Se cortan en un punto

26. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases}\pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2 \\ \pi_2: x-2y+\lambda z=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\pi_1: -x+2y+z=2 \\ \pi_2: x+\lambda y-2z=1 \\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3\end{cases}$ c) $\begin{cases}\pi_1: x-y+2z=4 \\ \pi_2: 2x+y+z=3 \\ \pi_3: 3x+\lambda y+6z=-8\end{cases}$ d) $\begin{cases}\pi_1: x+\lambda y-z=2 \\ \pi_2: 2x-y+\lambda z=5 \\ \pi_3: x+10y-6z=1\end{cases}$

Solución: a) Si λ = 2, los planos son coincidentes. Si $\lambda \neq 2$, se cortan.

b) Si $\lambda = \pm 3$ los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas. Si $\lambda \neq \pm 3$, se cortan en un punto.

c) Si λ = –3, el plano π_2 corta a los otros dos en rectas paralelas. Si $\lambda \neq -3$, se cortan en un punto.

d) Si λ = 3 o λ = –5, los planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas. En caso contrario, se cortan en un punto.

27. - Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases} r: x+1=-y-2=\frac{z}{2} \\ \pi: x-3y+\lambda z+2=0\end{cases}$ b) $\begin{cases} r: \begin{cases}2x+y-2z+4=0 \\ x-y+z-4=0\end{cases} \\ \pi: x+4y+\lambda z-2=0\end{cases}$

Solución: a) Si λ = –2, la recta es paralela al plano. Si $\lambda \neq -2$, se cortan en un punto, que depende del valor de λ: $\left(\frac{27-4\lambda}{4+\lambda}, \frac{\lambda-7}{4+\lambda}, -\frac{11}{4+\lambda}\right)$

b) Si $\lambda \neq 17/3$, se cortan en un punto

28. - Dadas las rectas $r: \frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{-1}$ y $s: x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ se pide: a) Posición relativa de ambas rectas. b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

Solución: a) Se cortan en un punto: (–2, 2, –2).

b) x – 5y –3z + 6 = 0

29. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: x=y=z$ y $s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$. a) Estudia su posición relativa. b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta $t: (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$.

Solución: a) Las rectas se cruzan.

b) $\begin{cases}3x-2y-z=0 \\ x-y-z+2=0\end{cases}$

30. - Dados los planos $\pi_1: 3x+2y-z=6$ y $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto $M(1,0,-1)$ es paralela a los dos planos.

Solución: r: (x, y, z) = (1, 0, –1) + t(1, –1, 1).

31. - Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r: \frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{m}$, $s: x+1=-y=z-2$, hallar: a) El valor de m para que ambas rectas se corten. b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a r y s. c) La ecuación de la recta que pasa por el punto $M(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

Solución: a) m = 1.

b) π: (x, y, z) = (–4, 3, –1) + λ(4, –2, –5) + μ(1, –1, 1).

c) (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(7, 9, 2)

32. - Dada la recta $r: \begin{cases}x-y+3z+4=0 \\ -2x+y-z+2=0\end{cases}$ y el plano $\pi: 4x-my+5z-n=0$ calcula: a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean: i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano. b) Para $m=-1$ y $n=2$, el punto de intersección de la recta y el plano. c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

Solución: a) i) m = 13/5; n $\neq$ 2; ii) Nunca podrán ser perpendiculares; iii) m = 13/5 y n = 2.

b) P = (86/9, 170/9, 16/9)

c) Q = (0, –5, –3).

33. - Dadas las rectas $r: \frac{x}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{-1}$ y $s: x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $M\ (-1,1,1)$ y es perpendicular a ambas rectas.

Solución: (x, y, z) = (–1, 1, 1) + t(1, –5, –3).

34. - Dadas las rectas $r: \begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y $s: \frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$, se pide: Posición relativa de ambas rectas. Ecuación de la recta que pasa por $M\ (-1,-1,0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

Solución: Las rectas se cruzan

(x, y, z) = (–1, –1, 0) + t(5, –8, –1).

35. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\ (1,0,-1)$, $B\ (1,1,0)$ y el tercer vértice es el punto de corte del plano OXZ con la recta $r: x = 2y + 2 = z - 1$.

Solución: $A = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

36. - Dados los puntos $A\ (-1,2,0)$, $B\ (-3,3,-1)$ y $C\ (1,a,1)$, se pide: Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados. Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A. Halla la ecuación de una mediana.

Solución: a = 1.

Perímetro = $\sqrt{6} + 6 + \sqrt{14}$ ***= 12.19 u; Área =*** $\sqrt{5}$ ***u²; Áltura = 0.75 u.***

37. - Los puntos $P\ (0,1,0)$ y $Q\ (-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta $r: \{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r. a) Determina las coordenadas de S. b) Calcula el área del triángulo PQS.

Solución: a) S = (4, 1, 1)

b) Área = 2.5 u².

38. - Los puntos $A\ (0,-2,0)$ y $B\ (-1,0,1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles. a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta $r: \{y = -5, z = 0\}$. b) Halla el valor del ángulo desigual.

Solución: a) C = (–9, –5, 0)

c) cos α ***= 0.97;*** α ***= 14.84º.***

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 1, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (1,1,1)$ es:

   a) $(x,y,z)=(1,1,1)+t\cdot(0,1,2)$; b) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$; c) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; d) $2x-3y+1=0$

Solución: b)

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(2, 4, 7)$ es:

   a) $(x,y,z)=(3,1,2)+t\cdot(2,4,7)$; b) $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$; c) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{5}$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+5t \\ y=1+5t \\ z=2+9t \end{array}\right\}$

Solución: c)

3. El vector director de la recta $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ es:

   a) $(1,-1,0)$; b) $(1,0,1)$; c) $(-1,1,1)$; d) $(1,1,1)$

Solución: d)

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$ es:

   a) $(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(2,4,7)+\mu(0,1,0)$; b) $3x-z=11$; c) (x, y, z) = (3, 1, 2) + λ(0, 1, 0) + μ(1, 2, 3)

Solución: c)

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y contiene a la recta $(x,y,z)=(1,1,1)+t(0,0,1)$ es:

   a) (x, y, z) = (3, 1, 2) + λ(2, 0, 1) + μ(0, 0, 1); b) $x=3$; c) $y=2$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda+\mu \end{array}\right\}$

Solución: a)

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 1, 2)$ y de vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$ es:

   a) $(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$; b) $z=2$; c) $y=1$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=2+\mu \end{array}\right\}$

Solución: b)

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$, $C(0, 0, 7)$ es:

   a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1$; b) $x-z=3$; c) $x+z=7$; d) $\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=5\lambda \\ z=7\mu \end{array}\right\}$

Solución: a)

8. Los planos $x-z=3$ y $x+z=7$ son:

   a) coincidentes; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

Solución: c) y d)

9. Las rectas $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{array}{l} x=3+4t \\ y=1+6t \\ z=2+10t \end{array}\right\}$ son:

   a) coincidentes; b) paralelas; c) secantes; d) se cruzan

Solución: b)

10. El plano $x-z=3$ y la recta $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ son:

    a) la recta está contenida en el plano; b) paralelos; c) secantes; d) ortogonales

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Los puntos $P\ (1,1,0)$ y $Q\ (0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r:\{y=0, z=1\}$. a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores. b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

Solución:

(2) Los puntos $P\ (1,-1,1)$ y $Q\ (3,-3,3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x+y=0$. a) Determina los vértices restantes. b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices calculados. c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

Solución:

(3) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\ (-1,1,0)$, $B\ (0,1,1)$, $C\ (3,0,0)$ y $D\ (2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\ (-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula:

a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior. b) Los vértices de la cara superior. c) El volumen del paralelepípedo.

Solución:

(4) Los puntos $A\ (1,1,0)$, $B\ (1,1,1)$, $C\ (2,3,0)$ y D forman un paralelogramo. Calcula: a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B. b) El área del paralelogramo. c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

Solución:

(5) Sea el plano $\pi:\{x=2+t, y=s, z=1-2s+2t\}$ y la recta $s: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=z$. a) Encuentra la posición relativa de los mismos. b) Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(-1,0,2)$, es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s.

Solución:

(6) Dados los puntos $A\ (1,1,0)$ y $B\ (0,0,2)$ y la recta $r:\{x=1, y=1+\lambda, z=1+\lambda\}$, halla: a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C. b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r.

Solución:

(7) Considere las rectas $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z$ y $s: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=z$. a) Da su posición relativa. b) Obtén, si es posible, un plano paralelo a s que contenga a r.

Solución:

(8) Dado el punto $A\ (1,1,1)$ y la recta $r: \left.\begin{array}{l} x-y=-1 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$, calcula: a) Un vector $\vec{u}$ director de la recta r. b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A. c) La recta s que pasa por el punto A, está contenida en el plano π anterior, y su dirección es perpendicular a la de la recta r.

Solución:

(9) Sean el plano $\pi: ax+2y-4z=b$ y la recta $r: \frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$. a) Con $a=1$, estudia la posición relativa de la recta y el plano. b) Siguiendo con $a=1$, calcula b para que el punto $(3,1,-3)$ pertenezca a la recta y al plano. c) Determina los valore de a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

Solución:

(10) Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes OX, OY y OZ tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 metros respectivamente. a) Halla la ecuación del plano π. b) Halla la ecuación de la recta r que contiene a los puntos $A(2,0,3)$ y $B(0,6,a)$ y estudie la posición relativa de π y r según los valores de a. c) Para el caso $a=2$, halla el punto donde se cortan π y r.

Solución:

(11) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,-1,3)$, y el plano π que contiene a los puntos $A(1,0,1)$, $B(2,-1,3)$ y $C(4,1,0)$. Calcula: a) Las ecuaciones implícitas de r y π. b) La posición relativa de r y π.

Solución:

(12) Se considera la recta $r:\left.\begin{matrix}2x-y-5=0\\x+z-2=0\end{matrix}\right\}$. a) Determina el plano π que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas. b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto $(1,0,1)$.

Solución:

(13) Se consideran las rectas $r:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=z+1$ y $s:\{x=1+t, y=m+3t, z=-1+3t\}$. a) Calcule m para que las rectas se corten en un punto. b) Para ese m halle el punto de corte.

Solución:

(14) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y es paralelo a las rectas: $r:\left.\begin{matrix}x=-t\\y=3t\\z=t\end{matrix}\right\}$ y $s:\left.\begin{matrix}2x-2y=4\\y-z=-3\end{matrix}\right\}$

Solución:

(15) Encuentra una ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo al plano determinado por el punto $P(1,-1,0)$ y la recta que pasa por el punto $Q(2,2,2)$ y tiene vector director $\vec{v}=(1,2,3)$.

Solución:

(16) Considera los planos $\pi_1: 2x-y+z=0$ y $\pi_2: z-3=0$. a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2. b) Encuentra, si es posible, una recta paralela a π_1 y a π_2 que pase por el punto $(2,2,-1)$.

Solución:

(17) Halla los planos que pasando por $A(0,2,0)$ y $B(0,0,2)$, corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6.

Solución:

(18) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x+y-2z-1=0$ con los ejes coordenados.

Solución:

(19) Dado el plano de ecuación $\pi: x-2y+2z+7=0$, los puntos $A(0,1,2)$, $C(-1,m,2)$ y sea B el pie de la perpendicular trazada desde el punto A al plano. a) Determina el valor de m para que el triángulo ABC sea rectángulo en B y calcula su área. b) Halla los dos ángulos restantes de dicho triángulo.

Solución:

(20) Dado el punto $A(1,-1,1)$ y los planos $\pi_1: 2x+y-z+4=0$ y $\pi_2: x-2y+z-2=0$, halla: a) La ecuación de la recta que pasa por el punto A y es paralela a los planos π_1 y π_2. b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π_2 corta a los ejes. c) El volumen del tetraedro de vértice el punto A y de base el triángulo del apartado anterior.

Solución:

(21) Halla el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto $A(1,1,1)$ y los puntos en que el plano $\pi: 2x+3y+z-6=0$ corta a los ejes coordenados.

Solución:

(22) Dada la recta $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=z-1$ y el plano $\pi: x+ay-z+2=0$, hallar el valor de a para que: a) La recta sea paralela al plano. b) La recta corte al plano. c) La recta sea perpendicular al plano. d) El volumen del tetraedro que tiene como vértices el origen de coordenadas y los puntos donde el plano corta a los ejes valga $\frac{1}{2}$ u^3.

Solución:

(23) Dados los planos $\pi_1: 2x+z-1=0$ $\pi_2: x+z+2=0$ $\pi_3: x+3y+2z-3=0$ se pide: a) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2. b) Calcula el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

Solución:

(24) Dados el plano $\pi_1: 2x-y=2$, y la recta $r: \left.\begin{matrix} x=1 \\ y-2z=2 \end{matrix}\right\}$ a) Estudia la posición relativa de r y π. b) Determina el plano que contiene a r y es perpendicular a π. c) Determina la recta que pasa por $A\left(-2,1,0\right)$, corta a r, y es paralela a π.

Solución:

(25) Sean las rectas: $r: x-2=\frac{y-1}{k}=z+1$ y $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$. a) Halla k para que r y s sean coplanarias.

b) Para el valor anterior de k, halla la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) Para el valor anterior de k, halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Solución:

(26) Halla una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r: $r:\{x=1+t, y=-1+2t, z=t\}$

y es perpendicular al plano π: $\pi: 2x+y-z=2$

Solución:

(27) Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+az=2 \qquad \pi_2: x+ay+z=-1 \qquad \pi_3: ax+y+z=3$$

Se pide: a) Calcula los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

b) Para los valores de a calculados, halla unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

(28) Dados el plano $\pi: x+3y-z=1$ y la recta $s: \frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$

a) Halla la ecuación general del plano π. que contiene a r y es perpendicular a π.

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

Solución:

(29) Dados los puntos $A\left(1,0,1\right)$ y $B\left(0,2,0\right)$, y el plano $\pi: x-2y-z-7=0$, determina el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Solución:

(30) Dadas las rectas: $r: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$ y $s:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x \quad +z=1 \end{cases}$

a) Halla el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

(31) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P\left(3,-1,0\right)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$s:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$$

Solución:

CAPÍTULO 6: GEOMETRÍA MÉTRICA EN EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ÁNGULOS EN EL ESPACIO

1. Realiza en tu cuaderno los doce dibujos y comprueba las relaciones vectoriales descritas en la tabla anterior:

***r* y *s* coincidentes**	***r* y *s* paralelas**	***r* y *s* secantes**	***r* y *s* se cruzan**
***r* y π coincidentes**	***r* y π paralelos**	***r* y π secantes**	***r* y π perpendiculares**
π y π' coincidentes	**π y π' paralelos**	**π y π' secantes**	**π y π' perpendiculares**

Solución: Actividad manipulativa.

2. PROYECCIONES ORTOGONALES

2. Halla la proyección ortogonal del punto $P(0,3,1)$ sobre la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$.

Solución: P' = (132/29, 2/29, 1/29).

3. Halla la proyección ortogonal del punto $P\ (4,\ 0,\ 3)$ sobre el plano $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$.

Solución: P' = (17/14, 26/14, 39/14).

4. Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π, siendo: $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-11}{2}$ y $\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$

Solución: $\begin{cases} x = \frac{17}{4} - 5\alpha \\ y = 1 - 4\alpha \\ z = \frac{25}{2} - 11\alpha \end{cases}$

4. DISTANCIAS EN EL ESPACIO

5. Calcula la distancia del punto $A\ (0,\ 3,\ -4)$ al punto $B\ (-2,\ 0,\ 5)$.

Solución: d = $\sqrt{94}$ ***= 9,69.***

6. Determina las coordenadas de los puntos que distan 4 del punto $C\ (2,\ -1,\ 1)$.

Solución: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16$.

7. Determina las coordenadas de los puntos que distan R del punto $C\ (0,\ 0,\ 0)$.

Solución: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

8. Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos $A\ (0,\ 0,\ 0)$ y $B\ (0,\ 0,\ 2)$.

Solución: El plano z = 1.

9. Calcula la distancia del punto $P\ (0,\ -1,\ 0)$ a la recta $r: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Solución: $d(P, r) = \frac{\sqrt{212}}{\sqrt{29}} = 2.7$.

10. Calcula la distancia del punto $P\ (0,\ -3,\ -2)$ al plano $\pi: 3x - 2y - 4z + 1 = 0$.

Solución: $d(P, \pi) = \frac{15}{\sqrt{29}} \cong 2{,}8\ u$.

11. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': -x + 2y - z = 1$.

Solución: Los planos son secantes, luego $d(\pi, \pi') = 0$.

12. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': x - y - 3z = 5$

Solución: Los planos son paralelos. $d(\pi, \pi') = \frac{3}{\sqrt{11}} \cong 0{,}9\ u$.

13. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': 2x - 2y - 6z = 4$

Solución: d = 0. Los planos son coincidentes.

14. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: -2x + 4y - 2z = 7$ y $\pi': -x + 2y - z = 1$

Solución: d(π, π') = $\frac{9}{\sqrt{24}} \cong 1{,}8\ u.$

15. Calcula la distancia entre la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi: 2x + y + 5 = 0$.

Solución: d(r, π) = $\frac{9}{\sqrt{5}} \cong 4\ u.$

16. Halla la distancia entre las rectas $r: \left.\begin{matrix} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{matrix}\right\}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

Solución: d(r, s) = $\frac{128}{13\sqrt{6}} \cong 4\ u.$

17. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$.

Solución: d(r, s) = $\frac{14\sqrt{3}}{5}$ ***= 4,85 u.***

18. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$.

Solución: d(r, s) = $\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}} \cong 4{,}5\ u.$

19. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Solución: Las rectas son coincidentes, luego d(r, s) = 0.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Estudia la posición relativa de las rectas $r: \frac{x}{2} = y+2 = \frac{z+2}{1}$ y $s: x = -y+1 = -2z$ y calcula: a) El punto de intersección. b) La ecuación del plano que las contiene. c) El ángulo que forman las rectas.

Solución: El producto vectorial de los vectores de dirección es cero y el producto mixto es cero, luego las rectas son secantes; a) Punto de intersección: A = (2, –1, –1); b) x + 4y – 6z = 4; c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{18}$.

2. - Dados los planos $\pi_1: 3x+2y-z=6$ y $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, se pide: a) Estudiar su posición relativa. b) Hallar el ángulo que forman esos dos planos. c) Hallar la ecuación de una recta s que pasando por el punto $N(-2,1,3)$ es perpendicular a π_2.

Solución: a) Los planos son secantes; b) Forman un ángulo de 60º, es decir, π/3 radianes; c) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}$.

3. - Halla la proyección vertical del punto $A(5,-2,-3)$ sobre el plano $\pi: 2x+y-2z+4=0$.

Solución: A' = (1, –4, 1).

4. - Halla la proyección de la recta $r \equiv -x+2 = \frac{y-3}{2} = 3z+1$ sobre el plano $\pi: x+y+2z-2=0$, así como el ángulo que forman la recta y el plano.

Solución: r': $\begin{cases} x = 1-3\alpha \\ y = 5+6\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; ***α = arcsen*** $\frac{5\sqrt{69}}{138} \cong 17^{\circ}\,30'\,56''$

5. - Obtener las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-2,2)$ respecto de la recta $r: 1-x = y+1 = z$

Solución: A' = (2/3, 4/3, –2/3).

6. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A(3,1,2)$ respecto del plano $\pi: x+y-z+4=0$.

Solución: A' = (5/3, –1/3, 2/3).

7. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A(0,2,-1)$ respecto de: a) La recta $r: 1+x = y+2 = 1-z$; b) El plano $\pi: x-y+z+1=0$

Solución: a) A' = (3, –1, –2); b) A'' = (4/3, 2/3, 1/3).

8. - a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,-3,3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $B(3,0,-1)$ y $C(1,-1,0)$. b) Obtén las coordenadas del punto simétrico de C respecto del plano.

Solución: a) π: –2x –y + z = 4; b) C' = (–7/3, –8/3, 5/3).

9. - Dado el punto $A(-1,2,0)$ y la recta $r: x+1 = -\frac{y}{2} = 2-z$, se pide hallar: a) La ecuación de la recta *s* que pasa por el punto A y corta perpendicularmente a la recta r. b) El punto de intersección de ambas rectas r y s. c) Las coordenadas del punto simétrico de A respecto de la recta r.

Solución: a) s: (x, y, z) = (–1, 2, 0) + t(2, 7, –12); b) P = (–15/11, 8/11, 24/11); c) A' = (–41/11, 38/11, 48/11).

10. - Calcula la distancia del punto $M(-1,1,3)$: a) Al punto $N(1,-1,2)$ b) Al plano $\pi: 2x-y-z-3=0$ c) A la recta $r: x-1 = 2y+1 = 2-z$

Solución: a) d(M, N) = 3; b) d(M, π) = $\frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \cong 3{,}7\,u$ ***; c) d(M, r) =*** $\frac{5\sqrt{2}}{3} \cong 2{,}4\,u$.

11. - Dados los planos $\pi_1: 3x-2y+z=4$ y $\pi_2: \{x = 2-\lambda+3\mu,\ y = -\lambda+4\mu,\ z = -1+\lambda-\mu\}$, estudia su posición relativa y calcular la distancia entre ellos.

Solución: Los planos son paralelos; d(π₁, π₂) = $\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cong 0{,}95\,u$

12. - Hallar la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: -2x = y-3 = 2z+2 \\ s: \begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ -x+y-3z=4 \end{cases} \end{cases}$ y calcular la distancia entre ellas.

Solución: Las rectas son paralelas; d(r, s) = $\frac{\sqrt{203}}{\sqrt{6}} = \mathbf{5.8166}\ \boldsymbol{u}$.

13. - Dadas los pares de rectas, a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ s: \dfrac{x}{3} = y + 1 = \dfrac{-z+1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z + 1 \\ s: \dfrac{x-3}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{2} \end{cases}$. a) Estudia la posición relativa.

b) Calcula la distancia entre ellas.

Solución: a) Las rectas se cruzan, d(r_a, s_a) = $\dfrac{7}{\sqrt{269}}$ = 0.43; b) Son paralelas; d(r_b, s_b) = $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ = 2.36.

14.- Halla la proyección de la recta $r \equiv -x + 2 = \dfrac{y-3}{2} = 3z + 1$ sobre el plano $\pi: -x + 3y + 3z - 3 = 0$, así como la distancia que hay entre la recta y el plano.

Solución: La recta y el plano son secantes luego su distancia es 0; Proyección de r sobre π = $\begin{cases} -x + 3y + 3z = 3 \\ 15x + 8y - 3z = 55 \end{cases}$

15. - Dada la recta $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 1 - 3x \end{cases}$, se pide: a) Halla la ecuación de la recta *s* que pasando por el punto $A\,(-1{,}0{,}1)$ es paralela a la recta r. b) Calcula la distancia que hay entre ellas. c) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M\,(-2{,}0{,}1)$ y contiene a la recta r.

Solución: a) s: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$; b) d(r, s) = $\dfrac{\sqrt{46}}{\sqrt{11}} = 2.04\ u$;

d) π: $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 2\beta \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases}$

e)

16. - Halla la ecuación de un plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x - 4y + z + 3 = 0 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ y dista 2 unidades del origen de coordenadas.

Solución: Hay dos planos que son solución: π_1: –x –2y +2z = 6, y π_2: 19x – 34 y – 2 z + 78 = 0.

17. - Dados el plano y la recta: $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad r: \left.\begin{matrix} x - y + 2 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix}\right\}$. a) El punto de intersección de la recta r con el plano π. b) El ángulo que forman la recta r y el plano π. c) La ecuación de un plano π' perpendicular al plano π y que contenga a la recta r.

Solución: a) P = (0, 2, –4); b) α = 90º – arccos β = 90º – $\dfrac{2}{3\sqrt{6}}$ = 16º; c) x – y + 2 = 0.

18. - Dados los planos $\pi_1: x - y = 2$ y $\pi_2: x + y - 2z - 4 = 0$, se pide: a) Ecuación de una recta que pase por el punto $A\,(0{,}1{,}1)$ y sea paralela a los planos π_1 y π_2. b) Valor de m y n sabiendo que el punto $C(m{,}0{,}n) \in \pi_2$ y dista $\sqrt{2}$ unidades del plano π_1.

Solución: a) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$; b) n = (m – 4)/2; Si m = 4, n = 0, C1 = (4, 0, 0); Si m = 0, n = –2; C2 = (0, 0, –2).

19. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\,(-1{,}0{,}1)$, $B\,(0{,}1{,}1)$ y el tercer vértice es el punto de corte del plano OYZ con la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y - 2 = \dfrac{z+2}{-1}$.

Solución: C = (0, 3, –3); Área = 3 u^2.

20. - Halla la proyección de la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y - 2 = \dfrac{z+2}{-1}$ sobre el plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos $A\,(-1{,}0{,}1)$ y $B\,(0{,}1{,}1)$.

Solución: π: –x + y – z = 0; r': $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

AUTOEVALUACIÓN

1) El ángulo formado por las rectas $r: \left.\begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = -3 + t \\ z = 2 \end{array}\right\}$ y $s: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+3}{-1}$ es:

a) $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{50}}$; b) $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$; c) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{28}}$; d) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}$

Solución: c)

2) El ángulo formado por los planos $\pi: 3x - y + 2z - 1 = 0$ y $\pi': x + 2y - z - 5 = 0$ es:

a) $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}$; b) $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}}$; c) $\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$; d) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{11}}$

Solución: a)

3) La proyección ortogonal del punto $P\ (0, 0, -1)$ sobre la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es:

a) $(\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7})$; b) $(\frac{-2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7})$; c) $(\frac{11}{14}, \frac{9}{14}, \frac{13}{14})$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: b)

4) La proyección ortogonal del punto $P\ (0, 0, -1)$ sobre el plano $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ es:

a) $(\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-4}{7})$; b) $(\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-1}{7})$; c) $(\frac{4}{14}, \frac{-8}{14}, \frac{20}{14})$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: b)

5) El simétrico del punto $P\ (1, -1, 1)$ respecto del punto $Q\ (0, -1, 2)$ es:

a) $(1, -3, 5)$; b) $(-1, -1, 3)$; c) $(-3, -3, 4)$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: b)

6) El simétrico del punto $P\ (1, -1, 1)$ respecto de la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es:

a) $(\frac{29}{7}, \frac{19}{7}, \frac{17}{7})$; b) $(\frac{15}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7})$; c) $(\frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7})$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: d)

7) La distancia del punto $A\ (0, 1, 0)$ al punto $B\ (-1, 0, 2)$ es:

a) 6; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2}$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: b)

8) La distancia del punto $A\ (0, 1, 0)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es:

a) $\frac{\sqrt{98}}{14}$; b) $\frac{\sqrt{89}}{14}$; c) $\sqrt{\frac{2}{11}}$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: c)

9) La distancia del punto $A\ (0, 1, 0)$ al plano $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ es:

a) $\frac{1}{14}$; b) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: c)

10) La distancia entre los planos $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$ y $\pi': 5x - y + 2z - 3 = 0$ es:

a) 0; b) $\frac{2}{\sqrt{30}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

Solución: a) Los planos son secantes

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Considera las rectas $r_1: \left.\begin{matrix} x-z=2 \\ 2x-y=1 \end{matrix}\right\}$ y $r_2: \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2y-z=-1 \end{matrix}\right\}$. a) Estudia la posición relativa de r_1 y r_2. b) Encuentra, si es posible, un plano paralelo a r_1 que contenga a r_2. c) Encuentra la distancia entre r_1 y r_2.

Solución:

(2) Considera el punto $P\,(-1,0,1)$ y el plano $\pi: x-y+z+2=0$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia *d* del punto P al plano π.

Solución:

(3) Considera los puntos $A\,(1,2,-3)$ y $O\,(0,0,0)$. a) Da la ecuación de un plano π_1 que pase por A y O, y sea perpendicular a $\pi_2: 3x-5y+2z=11$. b) Encuentra la distancia del punto medio de A y O a π_2.

Solución:

(4) Considere el plano $\pi: x-y+z=-1$ y el punto $P\,(1,0,1)$.

a) Obtén el punto P‘ simétrico de P respecto de π.

b) Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por P y P'.

Solución:

(5) Sea *s* la recta que pasa por los puntos $A\,(1,1,0)$ y $B\,(0,1,0)$. Considera la recta $r: \left.\begin{matrix} y=0 \\ z=2 \end{matrix}\right\}$.

a) Escribe unas ecuaciones cartesianas de la recta *s*.

b) Da la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

c) Obtén la distancia entre *r* y *s*.

Solución:

(6) Considera un movimiento en el espacio tal que a cada punto de coordenadas (a,b,c) lo mueve al punto de coordenadas $(a+b, a+b+c, a+b)$.

a) Busca el conjunto de puntos que se mueven al origen de coordenadas.

b) Da una ecuación del plano π que determinan los puntos del apartado (a) y el punto $(1,1,1)$.

c) Busca la distancia del origen de coordenadas al plano π.

Solución:

(7) Sean el punto $P\,(-1,2,0)$ y el plano $\pi: 2x-3y+z=8$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia d del punto P al plano π.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d.

Solución:

(8) Se consideran los puntos en el espacio $A\,(1,-1,1)$ y $B\,(2,2,2)$.

a) Halla el punto medio de A y B.

b) Da la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos.

Solución:

(9) Considere el plano $\pi : x + y - z = 0$ y la recta $r : \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\}$.

a) Halla la posición relativa de la recta y el plano.
b) Encuentra una recta perpendicular a ambos.
c) Busca la mínima distancia entre la recta y el plano dados.

Solución:

(10) a) Determina el valor de k para que los puntos $A\,(0,2,1)$, $B\,(1,-2,0)$, $C\,(2,0,3)$ y $D\,(1,1,k)$ se encuentren en el mismo plano.
b) Halla la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución:

(11) Dado el punto $O\,(0,0,0)$, busca un punto O' del espacio tal que la recta que pasa por O y O' sea perpendicular al plano π de ecuación $x + y + z = 3$ y las distancias de O a π y de O' a π coincidan.

Solución:

(12) Se consideran la recta y plano siguientes:

$$r : \left.\begin{matrix} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \\ z = -3 + 2t \end{matrix}\right\} \qquad \pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad\qquad \pi_2 : x + 2y + 4z - 2 = 0$$

a) Determina la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.
b) Determina la posición relativa de los dos planos.
c) Calcula la distancia de r al plano π_2.

Solución:

(13) a) Obtén la posición relativa de los planos π_1, que pasa por los puntos $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$ y $C\,(0,0,-1)$, y π_2, que pasa por $A'\,(3,0,0)$, $B'\,(0,6,0)$ y $C'\,(0,0,-3)$.

b) Busca la mínima distancia entre los planos anteriores.

Solución:

(14) Sean el punto $P\,(-1,2,0)$ y el plano $\pi : x + y - z + 2 = 0$. Calcula:

a) La ecuación de una recta que pase por el punto P y corte al plano π.
b) La distancia del punto P al plano π.

Solución:

(15) Se consideran el plano π_1 que pasa por los puntos $A\,(1,0,0)$, $B\,(0,2,0)$ y $C\,(0,0,-1)$, y el plano π_2 que pasa por los puntos $P\,(3,0,0)$, $Q\,(0,6,0)$ y $R\,(0,0,-3)$. Calcula: a) Las ecuaciones generales o implícitas de π_1 y π_2. b) La posición relativa de π_1 y π_2. c) La distancia entre π_1 y π_2.

Solución:

(16) Considere los puntos $A\,(1,0,1)$, $B\,(0,1,1)$ y $C\,(0,0,-1)$. a) Da las ecuaciones de la recta r que pasa por B y C. b) Calcula el plano π que pasa por A y es perpendicular a r. c) Halla el punto de corte entre r y π. c) Obtén el punto simétrico de A respecto de r.

Solución:

(17) Sean el punto $P\,(-1,2,0)$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z$. Calcula: a) La ecuación del plano π perpendicular a r pasando por P. b) El punto de intersección entre r y π. c) La distancia del punto P a la recta r.

Solución:

(18) Dado el punto $A\,(0,1,2)$ y el plano $\pi : x - y + z - 4 = 0$. a) Calcule la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto A. b) Halle el punto de intersección entre r y π. c) Halle el punto simétrico de A respecto de π.

Solución:

(19) Se consideran los puntos $A\,(2,-1,1)$ y $B\,(-2,3,1)$. a) Halla los puntos C y D que dividen al segmento $\overline{AB}$ en tres partes de igual longitud. b) Halla el plano respecto al cual los puntos A y B son simétricos.

Solución:

(20) Se denota por r la recta $x-6=y-7=\dfrac{z-4}{-2}$ y por P el punto de coordenadas $(1,0,1)$. a) Halle la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r. b) Halle el punto de r más próximo a P y halla la distancia de P a r.

Solución:

(21) Se denota por rs la recta $x-1=1-y=z-\dfrac{1}{2}$ y sea s la recta que pasa por $A\ (1,0,1)$ y $B\ (1,2,0)$.

a) Estudia si las rectas r y s se cortan y, si se cortan, halle el punto de intersección.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.
c) Halla el punto de r r que equidista de A y B.

Solución:

(22) Sean las rectas $r:\left.\begin{matrix}3x+y=1\\x-kz=2\end{matrix}\right\}$ y $s:\left.\begin{matrix}x=1-t\\y=2+3t\\z=t\end{matrix}\right\}$.. a) Estudia si para algún valor de k las rectas son paralelas. b) Estudia si para algún valor de k las rectas son perpendiculares. c) Halla la distancia del punto $A\ (1,1,1)$ a la recta s.

Solución:

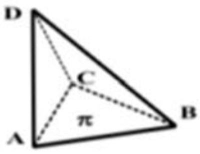
(23) Dados los puntos $A\ (2,2,0)$, $B\ (0,0,2)$ y $C\ (0,1,2)$.

a) Halla el plano π que contiene a los tres puntos.
b) Calcula un punto P que esté a distancia de $2\sqrt{2}$ unidades del plano π y del punto medio del segmento $\overline{AB}$.
c) Considerando $D\ (2,1,1)$ calcula el volumen del tetraedro limitado por los puntos A, B, C y D.

Solución:

(24) Sea el tetraedro de la figura formado por $A\ (3,0,0)$, $B\ (0,2,0)$, $C\ (0,0,6)$ y $D\ (\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C.
b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.
c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π.
d) Para $\alpha=5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π.



Solución:

(25) Sea el punto $A\ (1,0,0)$ y el plano $\pi: 2x+y-z=1$. Halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.
b) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta a π.
c) La distancia entre los dos planos.

Solución:

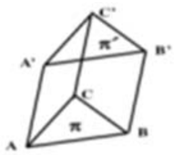
(26) Sean los puntos $A\ (-1,1,0)$ y $B\ (0,1,1)$. Determina:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que une los puntos.
b) La ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta r.
c) La distancia del punto B al plano π.

Solución:

(27) Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A\ (1,-1,0)$, $B\ (1,0,-1)$, $C\ (0,1,-1)$ y $A'\ (1,-1,\alpha)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.
b) El valor de α para que el plano π', que contiene los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.
c) Para $\alpha=1$, el plano π' y el volumen del prisma.



Solución:

(28) Los puntos $A\ (1,1,0)$, $B\ (1,1,1)$, $C\ (2,3,0)$ y D forman un paralelogramo. Calcule:

a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B.
b) El área del paralelogramo.
c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

Solución:

(29) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\ (-1,1,0)$, $B\ (0,1,1)$, $C\ (3,0,0)$ y $D\ (2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\ (-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula: a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior. b) Los vértices de la cara superior. c) El volumen del paralelepípedo.

Solución:

(30) Dada la recta r de ecuación $x+1=y-2=\dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P\ (1,2,1)$. Calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a r y se apoya en r.
b) Las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto a r.

Solución:

(31) Sea el punto $A\ (1,2,0)$ perteneciente a un plano π. Calcula: a) La ecuación del plano π sabiendo que $P\ (0,0,-2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. b) La ecuación de un plano cuya distancia a π sea de 3 unidades. c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi'\colon 2x-y=0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A.

Solución:

(32) Sea la recta $r:\left.\begin{matrix} x-y+z=-1 \\ 6x-3y+10z=6 \end{matrix}\right\}$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos P y Q que pertenecen a la recta y distan 5 unidades del origen de coordenadas.
b) Sea M el punto medio del segmento de extremos P y Q. Calcula sus coordenadas.
c) Justifica por qué de todos los puntos de la recta r, M es el más próximo al origen de coordenadas.

Solución:

(33) Los puntos $P\ (1,1,0)$ y $Q\ (0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r:\{y=0\,,\,z=1\}$.

a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.
b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

Solución:

(34) Dado el tetraedro con un vértice O sobre el origen de coordenadas y los otros tres A, B y C sobre los semiejes positivos OX, OY y OZ respectivamente, se pide hallar:

a) Las coordenadas de A, B y C sabiendo que el volumen del tetraedro es $\frac{8}{3}$ u^3, que las aristas OA y OB tienen igual longitud y que la arista OC tiene doble longitud que OA.
b) La ecuación de la altura del tetraedro correspondiente a la cara ABC.
c) La distancia entre las rectas AC y OB.
d) El ángulo que forman las aristas AC y AB.

Solución:

(35) Dados los puntos $A\ (-3,1,2)$, $B\ (1,-1,0)$ y $C\ (-1,0,0)$, se pide:

a) Comprobar si están alineados, y, en caso contrario, calcular el perímetro y el área del triángulo.
b) Hallar el valor de la altura correspondiente al vértice A.
c) Calcular el valor del ángulo correspondiente al vértice B.
d) Hallar la ecuación de una de las tres medianas.

Solución:

(36) Dado un triángulo de vértices $A\ (2,1,1)$, $B\ (0,5,3)$ y $C\ (4,3,1)$, halla: a) El perímetro. b) El área. c) El valor de la altura correspondiente al vértice A. d) La ecuación de una mediana. e) La ecuación de una mediatriz. f) La ecuación de una altura.

Solución:

(37) Sabiendo que la ecuación de un plano es $\pi : x + 2y - 2z + 4 = 0$:

a) Halla la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que diste una unidad del punto $Q\ (1,0,-1)$.

b) Halla la distancia entre ambos planos π y π'.

c) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π corta a los ejes de coordenadas.

Solución:

(38) Dado el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda \cdot (0,1,1)$, y el punto $P\ (1,1,0)$:

a) Halla la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) Halla el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) Halla el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:

(39) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A\ (1,0,0)$, $B\ (1,1,1)$, $C\ (-2,1,0)$ y $D\ (0,1,3)$.

a) Halla el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.

b) Calcula la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) Halla la distancia entre las rectas AC y BD.

Solución:

(40) Sean los puntos $A\ (1,0,2)$ y $B\ (1,1,-4)$. a) Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales. b) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determina la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) Determina la posición relativa del plano π y la recta $r : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$

Solución:

(41) Halla los puntos de la recta: $r : \begin{cases} 2x \quad + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$ u.

Solución:

(42) Dados los puntos $P\ (1,1,3)$ y Q(0, 1, 0), se pide: a) Halla todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describe dicho conjunto de puntos. b) Halla todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican: $\text{dist}(P, S) = 2 \cdot \text{dist}(Q, S)$ donde "dist" significa distancia.

Solución:

(43) Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P\ (1,2,3)$, se pide: a) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P. b) Hallar el punto Q intersección de π con r. c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY. d) Hallar el área del triángulo PQR.

Solución:

CAPÍTULO 7: LÍMITES Y CONTINUIDAD

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-5}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-7)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}}$ j) $\lim\limits_{x\to -1} x^6$ k) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

Solución: a) 2; b) 0; c) 1/9; d) –∞; e) –7; f) +∞ g) 0; h) –∞; i) 0; j) 1; k) 0; l) +∞.

2. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^7 = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^7$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^x$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^x$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5$ ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4}$ q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4}$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^x$ s) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5^x$ t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ u) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ v) $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{x^2}$ w) $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^{x^2}$

Solución: a) +∞; b) –∞; c) +∞; d) –∞; e) 0⁺; f) 0⁻; g) +∞; h) 0⁺; i) +∞; j) 0⁺; k) 1; l) 1;
m) +∞; n) –∞; ñ) +∞; o) +∞; p) 0⁺; q) 0⁺; r) +∞; s) 0⁺; t) 0; u) +∞; v) +∞; w) +∞.

3. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{16}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{16}{x-2}$

Solución: a) +∞; b) –∞; c) 1/3; d) 1/3; e) –∞; f) –∞; g) 1; h) 0; i) 0; j) 0; k) 1; l) 0.

4. – Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+1) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-5x+6\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3-x+x^2-x^3\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{x-1} = +\infty$ g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+3)(2x-3)$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x-2}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2x^3+1}$ l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x^3+8x^2-x+8\right)$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-3x-2} = +\infty$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x-2}{3x^3-7x+1}$ ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-8x+16}{35}$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4}$

Solución: a) +∞; b) 0; c) +∞; d) +∞; e) –∞; f) +∞; g) 0; h) 1;
i) +∞; j) +∞; k) –∞; l) –∞; m) +∞; n) 0; ñ) +∞; o) –∞.

5. – Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$

Solución: a) 1/2; b) +∞; c) –∞; d) +∞; e) 1; f) 7/2; g) 1; h) 1/2.

6. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^4$ c) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{3}{x^3}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x^{-2}}{5}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{x^5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x^5}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x}$ j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}\right]^x$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right]$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-4}=\infty^{-4}=0$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^{-4}=4(-\infty)^4=4\times\infty=\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{x^3}=\frac{3}{(+0)^3}=\frac{3}{+0}=\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{-2}}{5}=\frac{(0)^{-2}}{5}=\frac{1}{+0}=\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^5}{3}=\frac{0^5}{3}=\frac{0}{3}=0$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$; **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}=\frac{2}{(-\infty)^5}=-\frac{2}{\infty}=0$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{-x}=3^{-\infty}=\frac{1}{\infty}=0$; **i)** $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{-x}=3^{-(-\infty)}=3^{\infty}=\infty$; **j)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$; **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right)=\frac{2}{\infty^2+1}+\frac{3}{\infty+2}=0+0=0$

7. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-1}{5x}\cdot\frac{6x}{x^3+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{1-2x}:\frac{5x^3}{x^2+12}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+3}{5x}+\frac{6x-x^2}{3x}\right)$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{5x}\frac{6x}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{24x^3-6x}{5x^4+5x}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1-2x}:\frac{5x^3}{x^2+12}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+5)(x^2+12)}{5x^3(1-2x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{-10x^4}=-\frac{1}{10}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{5x}+\frac{6x-x^2}{3x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+9x+30x-5x^2}{15x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+39x}{15x}=\infty$

8. – Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-12x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)^x$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+5x^2-3)$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)^2+4x\right]$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-12x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3=\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\sqrt{\infty}=\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)=(-\infty)^3-\frac{3}{(-\infty)^2}=-\infty-0=-\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2)=\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2)=-\infty^2=-\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)^x=(2\infty-3)^{\infty}=\infty^{\infty}=\infty$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+5x^2-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=(-\infty)^3=-\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x^2+1)^2+4x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=(-\infty)^4=\infty$

9. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3-7x+2\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[4x^4-7x+5\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x^5+2x-4\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+3x-2\right]$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1-x^3}$

Solución: a) +∞; b) 0; c) + ∞; d) +∞; e) –∞; f) –1; g) 1/2; h) +∞; i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; j) –∞; k) 0; l) 0.

10. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-2x+1-2x^3-x}{2x^2-x}=-\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=-1$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)\left(2x+\sqrt{1+4x}\right)}{2x+\sqrt{1+4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-1-4x}{2x+\sqrt{1+4x}}=\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+3x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\dfrac{1}{2}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=-\infty-\infty=-\infty$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)}{x-\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2-4x\right)}{2x}=2$;

11. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}$

Solución:

a) $$\log\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}(2x-1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2\Rightarrow;$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1}=e^2$$

b) $$\log\left(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}(6x+2)\log\left(1-\frac{3}{x}\right)=-3\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{x}=-18\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2}=e^{-18}$$

c) $$\log\left(\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}(3x+2)\log\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}=e^{\frac{3}{4}}$$

d) $$\log\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\log\left(\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(3x+1)\log\left(\frac{x}{x+3}\right)=-3\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x+3}=-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}=e^{-9}$$

e) $$\log\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}(x-1)\log\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}=e^0=1$$

f) $$\log\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}\right)=\lim_{x\to\infty}(x+6)\log\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+6)}{x^2+1}=$$
$$=-1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

g) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}=1^0=1$$

h) $$\log\left(\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\log\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)\log\left(1-\frac{2}{x}\right)=2\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}=e^2$$

12. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{3}{x+2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1$;

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-3x+9}{x-3}=\dfrac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3-3}=-\dfrac{9}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{3}{x+2}\right)=\dfrac{2}{\infty^2+1}-\dfrac{3}{\infty+2}=0-0=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$

13. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4^x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$

Solución: a) $-\infty$; **b)** 0; **c)** e^{-2}; **d)** 0; **e)** $+\infty$; **f)** 1; **g)** 3.

14. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+1}\sqrt{x^2+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x+1}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x-3-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}=\dfrac{1}{3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x}\sqrt{x+3}-x\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+3}-x\right)\left(\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x}=\dfrac{3}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-\left(x^3+x^2+x+1\right)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}=-1$;

e) $\log\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2}\log\left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2}\,\dfrac{-5x+5}{2x^2-x-5}=-\infty\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{2}}=e^{-\infty}=0$

f) $\log\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\log\left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x}{5-3x}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3}=e^{\frac{1}{3}}$

15. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{3x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

Solución: a) 1/3; b) –2/3; c) –∞; d) 0.

16. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$ d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{3}{5}$;

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{0}{3}=0$;

c) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{-2}{-0}=\infty\neq$

$\neq\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{-2}{0}=-\infty$

Por tanto no existe el límite.

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)}=\dfrac{0}{-6}=0$

17. – Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

Solución: a) –1; b) –1; c) –∞; d) +∞; e) –∞; f) –∞; g) +∞; h) –∞.

18. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\dfrac{3^2-3}{3+2}=\dfrac{6}{5}$;

b) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\dfrac{(-2)^2-3}{-2+2}=\dfrac{1}{-0}=-\infty\neq\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-3}{x+2}=\dfrac{(-2)^2-3}{-2+2}=\dfrac{1}{+0}=\infty$

Por tanto no existe el límite.

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{senx}=\dfrac{1}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}=1$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{senx}=\dfrac{1}{+sen\,0}=\infty\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{senx}=\dfrac{1}{-sen\,0}=-\infty$

19. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^2}{x^2+x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ j) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$ l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x(x+3)}=\dfrac{3}{4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)x}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=1$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{10x-13}=\dfrac{6}{30-13}=\dfrac{6}{17}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^3}{3x^2}=\dfrac{4(-1)^3}{3(-1)^2}=-\dfrac{4}{3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^3-3x)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x}{x+1}=0$;

f) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{x-2}=\infty\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{x-2}=-\infty$;

Por tanto no existe el límite

g) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x}=\dfrac{\sqrt{1-0}}{-0}=\dfrac{1}{-0}=-\infty\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x}=\dfrac{\sqrt{1-0}}{+0}=\dfrac{1}{+0}=\infty$. ***Por tanto no existe el límite;***

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(x+1)=4$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x+3)}=\dfrac{1}{12\sqrt{3}}$;

j) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{5+x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{8-x}}}=-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{5+x}}=-\dfrac{2}{3}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{2}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+16}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}}{\sqrt{x+9}}=\dfrac{4}{3}$;

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}=-1$;

o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x\sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2+5}}=4$;

20. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2}{2x}=\dfrac{3(-3)^2}{2(-3)}=-\dfrac{9}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=2\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+1}\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x^2+1)x(x-2)}=\dfrac{16}{5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x+1)}{x-1}=\dfrac{4}{+0}=+\infty$;

21. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{|x-3|}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}\right]$ g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+2x}{3}\right]$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+2}\right)\right]$

Solución: a) No existe: El límite a la izquierda es –∞ y el límite a la derecha es +∞; b) +∞; c) +∞; d) e^3;
e) $e^{1/5}$; f) No existe: El límite a la izquierda es –∞ y el límite a la derecha es +∞; g) +∞; h) 8;
i) +∞; j) e^{-3}; k) No existe: El límite a la izquierda es –∞ y el límite a la derecha es +∞.

22. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}=\left(\dfrac{2+\ln 1}{3+\ln 1}\right)^{\frac{-3}{+0}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\infty}=\infty$;

23. – Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{si} \quad x<3\\ 2x & \text{si} \quad 3\le x\end{cases}$ en $x=3$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-1 & \text{si} \quad x<1\\ x+2 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$ en $x=1$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-2)=4\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}2x=6$. ***Por tanto no existe el límite;***

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-1)=3=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$.

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^{3/x}-2}{2^{1/x}+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{1/x}-4x}{4^{1/x}+3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4^{2/x}+3x^2+1}{5^{3/x}-3+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{4/x}-2x^2+3}{3^{1/x}-3-2x}$

Solución: a) –3/4; b) –1/3; c) –1/3; d) + ∞.

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{3-x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{-1}=-\dfrac{3}{4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^x+4}$ ***= 1/3.***

26. – Dada la función $f(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ 2x+5 & si \quad x>0\end{cases}$ calcula: a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. ¿Tiene alguna discontinuidad?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$; ***b)*** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}(3x-1)=-10$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x-1)=-1$; ***d)*** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+5)=5\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Por tanto no existe el límite y f no es continua en 0 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios)

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

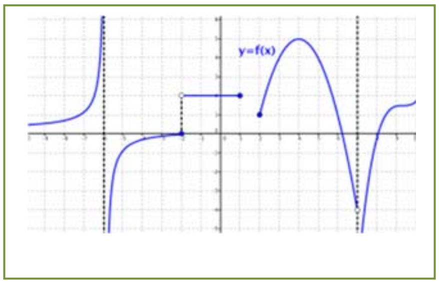
a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\leq 2\\ x+2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<2\\ 2x-1 & \text{si} \quad 2\leq x<4\\ 5 & \text{si} \quad x\geq 4\end{cases}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=3\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$ ***. Por tanto no existe el límite y f no es continua en 2 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios)***

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=5\neq\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3$ ***. Por tanto no existe el límite y f no es continua en 2.***

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-1)=7\neq\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5$ ***. Por tanto no existe el límite y f no es continua en 4 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios).***

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



Solución: En –6 tiene una discontinuidad de salto infinito.

En –2 tiene una discontinuidad de salto finito.

En (1, 2) no está definida por lo que no es continua.

En 7 tiene una discontinuidad de salto infinito.

29. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si} \quad x<2\\ x-2 & \text{si} \quad 2\leq x\leq 4\\ 5 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\leq 0\\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0<x\leq 3\\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

Solución: a) Continua en $\mathbb{R}\backslash\{4\}$. En 4 tiene una discontinuidad de salto finito. En x = 2 es continua.

b) Continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. En 0 tiene una discontinuidad de salto finito. En x = 3 es continua.

30. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ c) $f(x)=|x-3|$

d) $f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}} & si \quad x\in\mathbb{R}^*\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\leq 2\\ x+1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

Solución: ***a)*** $x^2+x=x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0, x=-1$***. Entonces f es continua en*** $\mathfrak{R}-\{-1,0\}$ ***(en –1 tendrá una discontinuidad evitable);***

b) Si $x_0\in \mathbf{Z}$ ***,*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} 0=0\neq f(x_0)=1$ ***, luego f no es continua (discontinuidad evitable).***

Si $x_0\notin \mathbf{Z}$ ***f es continua ya que cerca del punto es constante.***

c) f es continua en todo punto al ser composición de funciones continuas (valor absoluto y polinomio).

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}=3^{-\infty}=0\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}=3^{\infty}=\infty$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en 0, con una discontinuidad de primera especie de salto infinito. En los demás puntos f es continua al no anularse el denominador.***

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-1\right)=4-1=3=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=2+1=3$ ***, luego existe el límite y coincide con f(2), por lo que f es continua en 2. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.***

31. – Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $(2,5)$.

Solución: f es cociente de funciones continuas, no se anula el denominador (sólo se anula en el 0 que no pertenece al intervalo), luego f es continua en $(2,5)$

32. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2+4x-1 & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ x+11 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-4} & \text{si} \quad x<0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<-2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad x\ne 3 \\ 6 & \text{si} \quad x=3 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} -5-\dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x\ne 0 \\ 5 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

g) $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$

h) $f(x)=\begin{cases} |3-x| & si \quad x\le 5 \\ \ln e^2 & si \quad x>5 \end{cases}$

Solución: a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=-1+1=0\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-3)=1-3=-2$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en –1. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.***

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x-2)=-3-2=-5\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+4x-1)=1-4-1=-4$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en –1.***

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4x-1)=4+8-1=11\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+11)=2+11=13$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en 2. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.***

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x-4}=\dfrac{4}{0-4}=-1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=0-1=-1$***, luego existe el límite y f tiene una discontinuidad evitable en 0 al no estar definida.***

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-1)=3-1=2\ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{+0}=\infty$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en 3. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es cociente de polinomios y no se anula el denominador.***

d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}-2=-2\ne \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x^2+4)=-(-2)^2+4=0$ ***, luego no existe el límite y f tiene una discontinuidad en -2.***

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+4)=-2^2+4=0\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}2=2$ ***, luego no existe el límite y f no es continua en 2. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es un polinomio.***

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=3+3=6=f(3)$ ***, luego f es continua en 3. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es un cociente de polinomios y no se anula el denominador.***

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-5-\dfrac{|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-5+\dfrac{x}{x}\right)=-4\ne \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-5-\dfrac{|x|}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-5-\dfrac{x}{x}\right)=-6$ ***, luego no existe el límite y f tiene una discontinuidad en 0. En los demás puntos f es continua ya que no se anula el denominador.***

g) f es continua en todo punto al ser composición de funciones continuas (valor absoluto y polinomio).

h) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}|3-x|=|3-5|=2=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\ln(e^2)=\ln(e^2)=2$ ***, luego existe el límite y coincide con f(5), por lo que f es continua en 5. En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es composición de funciones continuas ó constante.***

33. – Determina el valor de a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x^2+a & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

Solución: a = –7/4.

34. – Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x\le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

Solución: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3)=6-3=3=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+b)=3+b \Leftrightarrow b=0$.

35. – Halla el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x\ne -2 \\ k & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$ sea continua en $x=-2$.

Solución: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4=f(-2)=k \Leftrightarrow k=-4$.

36. – Calcula m, n y p para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x<-8 \\ -2m+3 & \text{si} \quad -8\le x<-4 \\ x-\dfrac{1}{n} & \text{si} \quad -4\le x<2 \\ px & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$$

Solución: $\lim\limits_{x\to -8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -8^-}\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{8}=\lim\limits_{x\to -8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -8^+}(-2m+3)=-2m+3 \Leftrightarrow m=\dfrac{27}{16}$,

$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}(-2m+3)=-\dfrac{3}{8}=\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=-4-\dfrac{1}{n} \Leftrightarrow n=-\dfrac{8}{29}$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=2-\dfrac{1}{n}=\dfrac{45}{8}=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} p\,x=2p \Leftrightarrow p=\dfrac{45}{16}$

37. – Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si} \quad x<4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1+|x| & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Solución: a) k = 7/2;   b) k = 1.

38. – El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t)=\begin{cases} 3t^2 & \text{si} \quad 0\le t<2 \\ 3t+a & \text{si} \quad 2\le t\le 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si} \quad 5<t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en $t=2$ y $t=5$.

Solución: $\lim\limits_{x\to 2^-} e(t)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3t^2=12=\lim\limits_{x\to 2^+} e(t)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3t+a)=6+a \Leftrightarrow a=6$,

$\lim\limits_{x\to 5^-} e(t)=\lim\limits_{x\to 5^-}(3t+a)=21=\lim\limits_{x\to 5^+} e(t)=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(-t^2+13t+b\right)=40+b \Leftrightarrow b=-19$

39. – Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6 € por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x)=\begin{cases} 6x & \text{si} \quad 0<x\le 10 \\ \sqrt{600+ax^2} & \text{si} \quad x>10 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} 6x = 60 = \lim\limits_{x\to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^+} \sqrt{600+ax^2} = \sqrt{600+100a} \Leftrightarrow a = 30$ ***;***

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{600+ax^2}}{x} = \sqrt{a} = \sqrt{30}$

40. – Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 3a+3^{\frac{2}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{4}{2+2^x} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{b-2^{-x}} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Halla a y b para que la función sea continua. b) Calcula: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0,5} f(x)$. c) Si $a=0$ y $b=1/8$, estudia las discontinuidades.

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right) = 3a = \lim\limits_{x\to 0^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4}{2+2^x} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{9}$ ***,***

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{2+2^x} = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{b-2^{-x}} = \dfrac{3}{b-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b = \dfrac{7}{2}$ ***;***

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right) = 3a+1 = \dfrac{7}{3}$ ***,*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{b-2^{-x}} = \dfrac{3}{b} = \dfrac{6}{7}$ ***,***

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4}{2+2^x} = \dfrac{4}{2+2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$ ***;***

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4}{2+2^x} = \dfrac{4}{3}$ ***. Por tanto f tiene una discontinuidad de salto en 0.***

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{2+2^x} = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{b-2^{-x}} = \dfrac{3}{b-\frac{1}{2}} = -8$ ***. Tiene una discontinuidad de salto en 1.***

41. – La función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[-1,2]$ y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

Solución: No, porque la función es discontinua en un punto (concretamente en x = 0).

42. – Comprueba que la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$.

Solución: f es continua en [1, 2] (polinomio), $f(1) = -1^3 + 1^2 + 2 = 2 > 0$ ***,*** $f(2) = -2^3 + 2^2 + 2 = -2 < 0$ ***, por lo que f tiene al menos una raíz en el intervalo [1, 2] (Teorema de Bolzano).***

43. – Demuestra que la función $f(x) = -2x^3 + 3x - 8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1}$?

Solución: f es continua en [–2, 2] (polinomio), $f(-2) = -2(-2)^3 - 6 - 8 = 2 > 0$ ***,***
$f(2) = -2^4 + 6 - 8 = -18 < 0$ ***, por lo que f tiene al menos una raíz en el intervalo*** $[-2,2]$ ***(Teorema de Bolzano).***
g es continua en (–1, 2] (cociente de polinomios, no se anula el denominador), $g(2) = \dfrac{2^3 - 8 - 4}{3} < 0$ ***,***
$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1} = \dfrac{(-1)^3 - 2 - 4}{+0} < 0$ ***, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo:*** $[-2,2]$ ***(Teorema de Bolzano).***

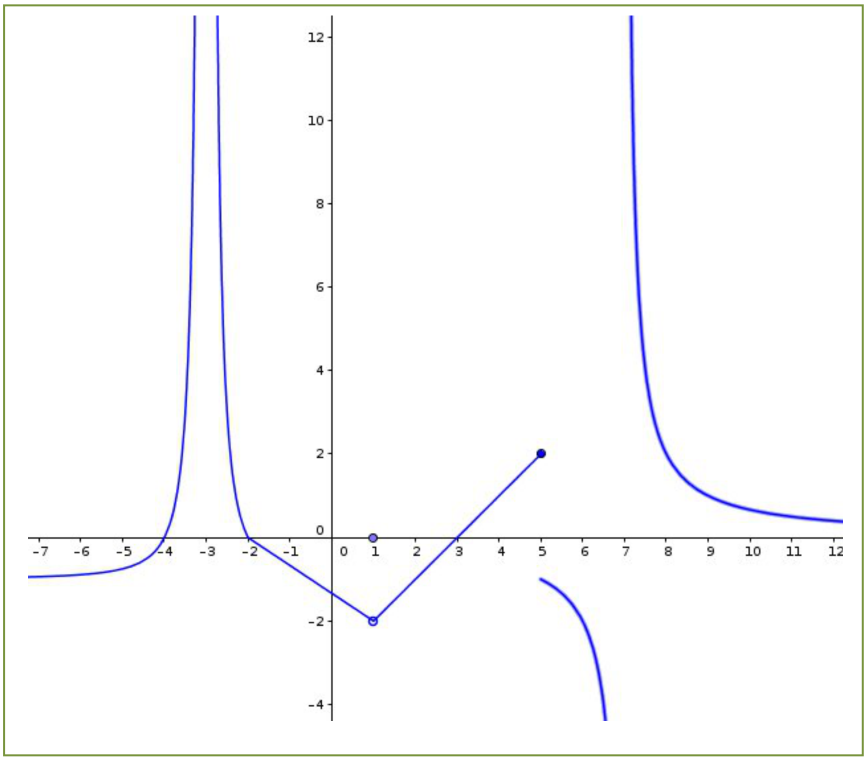
44. – Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3,2]$, donde $f(-3) < 0$ y $f(2) = 5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3,2]$?

Solución: g es continua en [–3, 2] (diferencia de continuas), $g(-3) = f(-3) - 2 < 0$ ***,*** $g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$ ***, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo*** $[-3,2]$ ***(Teorema de Bolzano).***

45. – Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

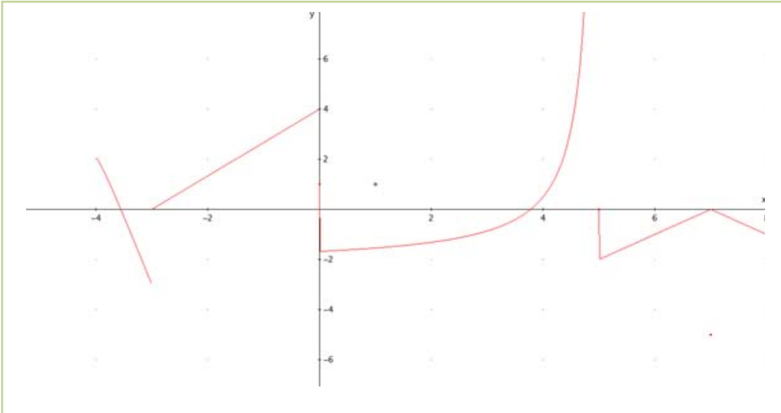
- Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$
- $\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$,
  $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$, $f(1) = 0$
- Discontinuidad de salto finito en $x = 5$ y de salto infinito en $x = 7$
- $f(-2) = 0$

Solución abierta: Hay muchísimas posibilidades. La siguiente es nada más una de ellas.



46. – Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- Dom $f(x)=\{x \in R \,/\, x \geq -4\}$
- $f(-4)=2$, $f(0)=1$, $f(5)=0$, $f(7)=-5$



- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -3 & \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 0 & \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4 & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty & \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -2 & \lim\limits_{x\to 7} f(x) = 0 & \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Solución: g es continua en [–3, 2] (diferencia de continuas), $g(-3) = f(-3) - 2 < 0$ ***,*** $g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$ ***, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo*** $[-3, 2]$ ***(Teorema de Bolzano).***

AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x<0 \\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0 \end{cases}$ a la izquierda de 0 y a la derecha de 0 valen:

   a) 0, 0 b) 3, 7 c) 2, 3 d) No existen pues $f(x)$ no está definida en 0

Solución: c).

2. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:

   a) 0 b) 1 c) +∞ d) 1/3.

Solución: d).

3. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:

   a) –3 b) 3 c) ∞ d) –5/2

Solución: a).

4. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)$ vale:

   a) 0 b) 3 c) ∞ d) 7

Solución: a)

5. El límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

   a) 0 b) 4 c) ∞ d) –1/4

Solución: d)

6. Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+a & \text{si} & x<3 \\ 2x^2-1 & \text{si} & x\geq 3 \end{cases}$ sea continua a debe valer:

   a) 3 b) –1 c) 17 d) 1/2

Solución: c)

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

   a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=sen(\cos(x-2))$

Solución: a)

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal y = 2.

   a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\frac{2x^2-4}{x^2-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=tag(\cos(x-2))$

Solución: b)

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{e^x-5}$

Solución: d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=\left|x^2-9\right|$ son:

   a) 0 y 3 b) 3 y –3 c) Ninguno d) 0, 3 y 9

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

1.- Calcula:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$$

Solución: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-8}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-8}{2\,2^n}=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^4+1}-1\right)\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}{x^4\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{-x+9}}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{-x+9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{-x+9}\right)}{9x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{-x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{9x\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{-x+9}\right)}=\frac{1}{27}$$

2.- Dado $a\in\mathbb{R}$, se considera la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3\\ x^2-1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ Determina los valores de a para los que la función es continua.

Solución: $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3}=\frac{12-9a}{-0}$. ***Para que el límite sea finito ha de ser*** $12-9a=0\Leftrightarrow a=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$.

En ese caso:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{4x-3a}{1}=12-3a=8=\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-1\right)=8=f(3)$$

Entonces f es continua en 3 y por tanto en R (en los demás puntos no hay problema)

3.- Dada la función $F(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 1\\ 3-ax^2 & \text{si } x>1\end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x=1$?

b) Si $F(x)$ es continua cuando $x\to x_0$ entonces no existe $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$, ¿es cierto?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3-ax^2\right)=3-a\Leftrightarrow a=1$

b) No, ha de existir el $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$

4.- Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que: $T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & \text{si } \ 0\le x\le 30\\ \dfrac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2 & \text{si } \ x>30\end{cases}$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.
b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 30^-} T(x)=\lim\limits_{x\to 30^-}\dfrac{300}{x+30}=5=\lim\limits_{x\to 30^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 30^+}\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2=5=T(30)$

Entonces T es continua en 30 y por tanto en su dominio (en los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador)

c) Como T es decreciente al estar las x en el denominador y $\lim\limits_{x\to\infty} T(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1125}{(x-5)(x-15)}+2\right)=0+2=2$ ***, nunca podrá hacer la prueba en menos de 2 minutos ni de 1 minuto.***

5.- El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante x, medido en horas): $f(x)=\begin{cases}300x(1-x) & \text{si } \ 0\le x\le 0{,}6\\ 180(1-x) & \text{si } \ 0{,}6<x\le 1\end{cases}$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento? ¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^-} 300\,x\,(1-x)=300\,\dfrac{3}{5}\,\dfrac{2}{5}=72=\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}^+} 180\,(1-x)=180\,\dfrac{2}{5}=72=f\left(\dfrac{3}{5}\right)$

Entonces f es continua en $\dfrac{3}{5}$ ***y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica)***

b) Si $x<\dfrac{3}{5}$ ***,*** $f'(x)=300\,(1-x)-300\,x=300\,(1-2x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ***, con*** $f'(x)=300\,(1-2x)<0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$ ***.***

Si $x>\dfrac{3}{5}$ ***,*** $f'(x)=-180\,x<0$ ***, por lo que f es estrictamente creciente si*** $x<\dfrac{1}{2}$ ***(rendimiento aumenta), f es estrictamente decreciente si*** $x>\dfrac{1}{2}$ ***(rendimiento disminuye) y tiene el máximo absoluto en*** $\dfrac{1}{2}$ ***(momento de mayor rendimiento), que vale:*** $300\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2}=75$ ***(rendimiento máximo).***

6.- La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece ($f(x)$ es la energía producida a las x horas de haber amanecido): $f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & \text{si } \ 0\le x\le 8\\ \dfrac{1024}{x^2} & \text{si } \ 8<x\le 12\end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\left(10x-x^2\right)=80-64=16=\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{1024}{x^2}=\dfrac{1024}{64}=16=f(8)$

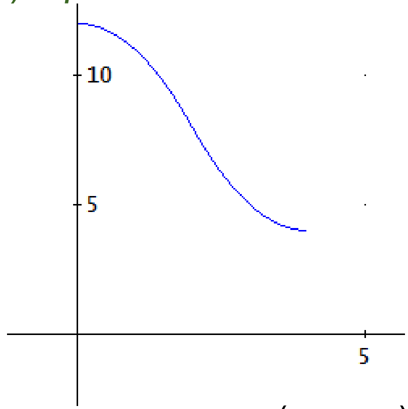
Entonces f es continua en 8 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador)

b) Si $x<8$ ***,*** $f'(x)=10-2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{10}{2}=5$ ***, con*** $f'(x)=10-2x<0\Leftrightarrow x>5$ ***.***

Si $x>8$ ***,*** $f'(x)=-1024\,\dfrac{2}{x^3}<0$ ***, por lo que f es estrictamente creciente si*** $x<5$ ***, f es estrictamente decreciente si*** $x>5$ ***y tiene el máximo absoluto en 5 (momento de mayor producción), que vale:*** $50-5^2=25$ ***(producción máxima).***

7.- El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses): $f(x)=\begin{cases} 12-x^2 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ (x-4)^2+4 & \text{si} \quad 2<x\le 4 \end{cases}$. a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia? b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

Solución: a) Si $x<2$***, f es una parábola con las ramas hacia abajo y vértice (0, 12), si*** $x>2$***, f es una parábola con las ramas hacia arriba y vértice (4, 4). Representación:***



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(12-x^2\right) = 12-4=8 = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left((x-4)^2+4\right) = (-2)^2+4=8=f(2)$$

Entonces f es continua en 2 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica)

b) Si $0<x<2$, $f'(x)=-2x<0$***. Si*** $2<x<4$, $f'(x)=2(x-4)<0$***, por lo que f es estrictamente decreciente (como se ve en el dibujo) y tiene el mínimo absoluto en 4 (momento en que tarda menos tiempo), que vale:*** $(4-4)^2+4=4$ ***(tiempo mínimo). Como el tiempo mínimo es 4, nunca puede realizar la tarea en menos de 3 horas.***

8.- Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es $f(x)$ (en euros), de un pedido de x litros de aceite): $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0<x<30 \\ 2x+30 & \text{si} \quad 30\le x \end{cases}$. a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido? b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

Solución: a) $\lim_{x\to 30^-} f(x) = \lim_{x\to 30^-} 3x = 3\times 30 = 90 = \lim_{x\to 30^+} f(x) = \lim_{x\to 30^+}(2x+30) = 60+30 = 90 = f(30)$

Entonces f es continua en 30 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica).

b) Si $x<30$, $f'(x)=3>0$***, si*** $x>30$, $f'(x)=2>0$***, por lo que f es estrictamente creciente en su dominio al ser continua en 30.***

Si $x<30$***, f es recta de pendiente 3 que pasa por el origen, si*** $x>30$***, f es una recta de pendiente 3 que pasa por el: (30, 90). Representación:***

9.- La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión: $f(x)=\begin{cases} 110+12x+6x^2 & \text{si} \quad 1\le x\le 3 \\ 350-\dfrac{450}{x} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ donde x representa el tiempo, en segundos, y $f(x)$ representa la velocidad del coche, en km/h. a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo? b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante?, ¿se podrían alcanzar los 350 km/h de velocidad con este coche?

Solución: a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(110+12x+6x^2\right) = 110+36+54 = 200 = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 350-\dfrac{450}{x} = 350-150 = 200 = f(3)$

Entonces f es continua en 3 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador); b) Si $x<3$, $f'(x)=12+12x>0$***, si*** $x>3$, $f'(x)=\dfrac{450}{x^2}>0$***, por lo que f es estrictamente creciente en su dominio al ser continua en 3 y nunca disminuye la velocidad. La velocidad máxima es*** $f(3)=350-\dfrac{450}{3}<350$***, por lo que no se alcanzan los 350 km/h.***

CAPÍTULO 8: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x) = sen\,\frac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a $f'(x) = \left(\frac{-1}{a^2}\right)\cos\frac{1}{a}$ si a es distinto de 0.

Solución:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{sen(\frac{1}{x})-sen(\frac{1}{a})}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2sen(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{2})\cos(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{a}}{2})}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2sen(\frac{a-x}{2xa})\cos(\frac{a+x}{2xa})}{x-a}$$

Usamos la equivalencia del seno

$$\lim_{x\to a}\frac{2sen(\frac{a-x}{2xa})\cos(\frac{a+x}{2xa})}{x-a} = \lim_{x\to a}2(\frac{a-x}{2xa})\cos(\frac{a+x}{2xa}) = \lim_{x\to a}\frac{-2}{2xa}\cos(\frac{a+x}{2xa}) = \frac{-2}{2a^2}\cos(\frac{2a}{2a^2}) = \frac{-1}{a^2}\cos\left(\frac{1}{a}\right)$$

2. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

$f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$. $g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.

$h(x) = x^2 cosx$ en $x = 0 \Rightarrow h'(0) = 0$. $r(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$ en $x = 1 \Rightarrow r'(1) = -11$.

Solución: $f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$.

$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x+2-(a+2)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a} = 1$.

3. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$ (Selectividad)

Solución: $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x^3|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{|x^3|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-x^3}{x} = 0$. ***La función es derivable en x = 0.***

4. Dada la función $f(x) = \ln\frac{x^2}{x-1}$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano, definida para $x > 1$ halla un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX. (Selectividad)

Solución: $f'(a) = \frac{a-2}{a-1}$***; a = 2. La tangente es paralela al eje OX en el punto (2, ln4).***

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$. (Selectividad)

Solución: Para x = 5 y para x = –1, la derivada vale –15. f(5) = 35; f(–1) = 7; luego en (5, 35) y en (–1, 7) la recta tangente es paralela a y = –15x.

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante. a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas. b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: a) m = a²; b) a =1/2, m = 1/4.

7. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0.4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

Solución: v = 22 + 0.8t km/h; a = 0.8 km/h²; La aceleración es constante; Dentro de 122 horas y media.

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los x = 0, x = 1, x = 3 y x = 4 segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

***Solución:** v(0) = 30 m/s; v(1) = 22 m/s; v(3) = 6 m/s; v(4) = –2 m/s; Altura(0) = 0 m; Altura(1) = 26 m; Altura(3) = 54 m; Altura(4) = 56 m; Alcanza la altura máxima a los 3.75 s, que es de 56.25 m.*

9. Un coche recorre una distancia y, en km, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación: $y = 0.1x^2 + 100x - 50$. Determina la velocidad que lleva el coche para x = 1.5 horas.

***Solución:** Velocidad = 100.3 km/h.*

10. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x)=\frac{1}{x+a} \Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x)=\frac{3x+2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2} \Rightarrow f^{n)}(x)=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}}+\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)$
$f(x)=\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$	$f(x)=\cos ax \Rightarrow f^{n)}(x)=a^n\cos(ax+n\frac{\pi}{2})$
$f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$	$f(x)=\cos^2 x \Rightarrow f^{n)}(x)=2^{n-1}\cos(2x+n\frac{\pi}{2})$

***Solución:** Comprobado*

11. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

***Solución:** a) (f o g)'(2) = f'(g(2)) · g'(2) = f'(6) · 3 = 12;*
b) (g o f)'(1) = g'(f(1)) · f'(1) = g'(2) · 3 = 9;
c) (g o f)'(2) = g'(f(2)) · f'(2) = g'(5) · 6 = 6;
d) (f o f)'(1) = f'(f(1)) · f'(1) = f'(2) · 3 = 18.

12. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto $u(x)\cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: $D[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. (Selectividad)

Solución: $D[u(x)\cdot v(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h)+u(x)(v(x+h)-v(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))}{h}\lim_{h\to 0} v(x+h)+\lim_{h\to 0} u(x)\lim_{h\to 0}\frac{(v(x+h)-v(x))}{h} = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt[6]{5x^{11}}$; b) $y=\dfrac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}$; c) $y=\dfrac{(3x^4-4)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$; d) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}$.

Solución: *a)* $y'=\dfrac{11\sqrt[6]{5x^5}}{6}$;

b) $y'=\dfrac{\sqrt[4]{3}(-6x^3+7)}{(3x^3+7)^2}$;

c) $y'=\dfrac{(27x^4-4)\sqrt[3]{7x^5}-(10/3)\sqrt[3]{7x}\sqrt[3]{x^2}(3x^4-4)}{2\sqrt{x}\sqrt[3]{49x^{10}}}$;

d) $y'=\dfrac{(7/3)\sqrt[3]{x^4}(2x+5)-2\sqrt[3]{x^7}}{(2x+5)^2}$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}$ c) $y=\sqrt{\left(\dfrac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}$ d) $y=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\dfrac{5}{x^5}}}$

Solución: *a)* $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}\left[\dfrac{6-63x^6}{2x-7x^7}+\dfrac{63x^2-75}{3x^3-5x}-\dfrac{20x^4}{4x^5+6}\right]$

b) $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2x^3-5}{4x^5-14x^3-30x}}\left[\dfrac{16x^7-100x^4+120x^3-210x^2+150}{(2x^3-5)^2}\right]$

c) $y'=\dfrac{-27x^6-180x^4-36x^3-225x^2-60x}{(4-6x^3)^3}$

d) $y'=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\dfrac{5}{x^5}}}}\right)^2\sqrt{\dfrac{x^5}{5x^6-5}}\left[\dfrac{5x^6+25}{x^6}\right]$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=tg\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ b) $f(x)=(2-3x)sh(2-3x)$ c) $f(x)=tg\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{senx-x\cos x}{\cos x+xsenx}$

Solución: *a)* $y'=\left(1+tg^2(\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}})\right)\dfrac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}$;

b) $y' = -3sh(2-3x) -3(2-3x)ch(2-3x)$;

c) $y'=\left(1+tg^2(\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2cosx})\right)\dfrac{-36sen^2x-18cos^2x+16senx-27cosx}{2(3+2cosx)^2\sqrt{4-9senx}}$;

d) $y'=\dfrac{x^2}{(cosx+xsenx)^2}$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$, $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, y de $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

$f(x) = tg(x) \Rightarrow \mathbf{f'(x) = 1 + tg^2(x)}$	$y = tg(f(x)) \Rightarrow \mathbf{y' = (1+tg^2(f(x)))\cdot f'(x)}$	$y = tg(x^3) \Rightarrow \mathbf{y' = (1+tg^2(x^3))\cdot(3x^2)}$
$f(x) = sh(x) \Rightarrow \mathbf{f'(x) = ch(x)}$	$y = sh(f(x)) \Rightarrow \mathbf{y' = f'(x)\cdot ch(f(x))}$	$y = sh(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \dfrac{ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ch(x) \Rightarrow \mathbf{f'(x) = sh(x)}$	$y = ch(f(x)) \Rightarrow \mathbf{y' = f'(x)\cdot sh(f(x))}$	$y = ch(ln(x)) \Rightarrow y' = \dfrac{sh(\ln(x))}{x}$
$f(x) = th(x) \Rightarrow \mathbf{f'(x) = 1 - th^2(x)}$	$y = th(f(x)) \Rightarrow \mathbf{y' = f'(x)\cdot(1-th^2(f(x)))}$	$y = th(x^4) \Rightarrow \mathbf{y' = (4x^3)\cdot(1-th^2(x^4))}$

Solución: Comprobado

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (3x)^{x^5 - 9x^3}$ b) $y = ((2x+7)^{5x^3 - 6x^2})$ c) $y = (x + e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $f(x) = (x^x)^x$

Solución: a) $y' = (3x)^{x^5-9x^3}((5x^4 - 27x^2)\ln(3x) + x^4 - 9x^2)$;

b) $y' = (2x+7)^{5x^3-6x^2}\left((15x^2 - 12x)\ln(2x+7) + \dfrac{2(5x^3-6x^2)}{2x+7}\right)$;

c) $y' = (x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}\left(5(4x^5-8x^3)^4(20x^4 - 24x^2)\ln(x+e) + \dfrac{(4x^5-8x^3)^5}{x+e}\right)$

d) $y' = (x^x)^x\left(\ln x^x + x(\ln x + 1)\right)$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\sqrt{\dfrac{4 + senx}{4 - senx}}$ b) $y = e^{\arccos\sqrt{6x+8}}$ c) $y = sen\left(arctg\dfrac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)$ d) $y = \arccos\dfrac{5x}{\sqrt{16 - x^2}}$

Solución: a) $y' = \dfrac{4\cos x}{\sqrt{-8senx - 2sen^2x}\cdot(4 - senx)}$

b) $y' = \dfrac{-3e^{\arccos\sqrt{6x+8}}}{\sqrt{(-6x-7)(6x+8)}}$;

c) $y' = \cos\left(arctg\dfrac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\dfrac{7}{(47x^2+1)\sqrt{1-2x^2}}$;

d) $y' = \dfrac{-80}{(16-x^2)\sqrt{16-26x^2}}$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\arg sh\sqrt{\dfrac{5+shx}{5-shx}}$ b) $y=\sqrt{2e^{\arg ch\sqrt{7x+3}}}$ c) $y=sh(\arg th\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}})$ d) $y=\arg ch\dfrac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}})$

Solución: a) $$y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{5+senhx}{5-senhx}+1}}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{5+senhx}{5-senhx}}}\frac{coshx(5-senhx)+(5+senhx)coshx}{(5-senhx)^2}=\frac{5coshx}{\sqrt{10}\sqrt{5+senhx}(5-senhx)}$$

b) Como $argch(x)=log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$,

$$y=\sqrt{2e^{argch\left(\sqrt{7x+3}\right)}}=\sqrt{2e^{log\left(\sqrt{7x+3}+\sqrt{7x+2}\right)}}=\sqrt{2\left(\sqrt{7x+3}+\sqrt{7x+2}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{7x+3}+\sqrt{7x+2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\sqrt{2}\frac{\dfrac{7}{2\sqrt{7x+3}}+\dfrac{7}{2\sqrt{7x+2}}}{2\sqrt{\sqrt{7x+3}+\sqrt{7x+2}}}=\frac{7}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{7x+2}+\sqrt{7x+3}}{\sqrt{7x+3}\sqrt{7x+2}\sqrt{\sqrt{7x+3}+\sqrt{7x+2}}}$$

c) Como $argtgh(x)=log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $senh(argtgh(x))=\dfrac{e^{log\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}-e^{log\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)}}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$,

$$y=sh\left(argth\left(\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1+\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}}{1-\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}}{1+\dfrac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\left(\dfrac{-16x}{\sqrt{25-16x^2}}+2\right)\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)-\left(\dfrac{-16x}{\sqrt{25-16x^2}}-2\right)\left(\sqrt{25-16x^2}+2x+6\right)}{\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)^2}-\\ -\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\left(\dfrac{-16x}{\sqrt{25-16x^2}}-2\right)\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)-\left(\dfrac{-16x}{\sqrt{25-16x^2}}+2\right)\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)}{\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)^2}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\left(-16x+2\sqrt{25-16x^2}\right)\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)-\left(-16x-2\sqrt{25-16x^2}\right)\left(\sqrt{25-16x^2}+2x+6\right)}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)^2}-\\ -\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\left(-16x-2\sqrt{25-16x^2}\right)\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)-\left(-16x+2\sqrt{25-16x^2}\right)\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)^2}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\left(-(20x+12)\sqrt{25-16x^2}+96x+50\right)-\left(-(20x+12)\sqrt{25-16x^2}-96x-50\right)}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)^2}-\\ -\left(\dfrac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\left(-(20x+12)\sqrt{25-16x^2}-96x-50\right)-\left(-(20x+12)\sqrt{25-16x^2}+96x+50\right)}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)^2}\end{array}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{48x+25}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)^2}-\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{48x+25}{\sqrt{25-16x^2}\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)^2}=$$

$$=\frac{48x+25}{\sqrt{25-16x^2}^{\,2}}\left(\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\right)^2}-\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}+2x+6}{\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{25-16x^2}+(2x+6)\right)^2}\right)$$

d) Como $argch(x)=log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $(argchx)'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{sen^2x}{5-3sen^2(x^2)}}}\;\frac{cosx\sqrt{5-3sen^2(x^2)}-senx\dfrac{-6sen(x^2)cos(x^2)x}{\sqrt{5-3sen^2(x^2)}}}{5-3sen^2(x^2)}=\frac{cosx\left(5-3sen^2(x^2)\right)+6x\,senxsen(x^2)cos(x^2)}{senx\left(5-3sen^2(x^2)\right)}$$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

20. Se considera la función: $f(x) = \dfrac{1}{2 + senx - \cos x}$. Se pide: Comprueba la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: Utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión. (Selectividad)

Solución: La función f(x) es continua y derivable en todo R. No lo sería en los puntos donde se anula el denominador, es decir, si 2 + senx – cosx = 0, pero eso no se verifica nunca. Su derivada, f'(x) = $\dfrac{-(\cos x + senx)}{(2 + senx - \cos x)^2}$ ***es también continua y derivable en todo R.***

f'(–π) = f'(π) = 1/9; f' continua en [–π, π]; f' derivable en [–π, π] luego por el Teorema de Rolle sabemos que existe un punto c $\in$ ***(–π, π) donde f''(c) = 0. La función es creciente en [0, π] luego c debe ser un punto de inflexión.***

21. Sea: $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en $x = 0$. B) Estudia cuándo se verifica $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1]? (Selectividad)

Solución: a) Es continua en x = 0 pero no es derivable pues las derivadas laterales valen 1 y – 1; B) La derivada se anula en x = 1 y en x = –1; No existe contradicción, ya que, en un punto interior del intervalo, en x = 0, la función no es derivable.

22. Calcula $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} = \dfrac{senx(1 - senx)}{\cos^2 x}$ (Selectividad)

Solución: –1/2.

23. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ (Selectividad)

Solución: 1/2.

24. Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. (Selectividad)

Solución: 8.

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

Solución: La función es decreciente en (–1, 1) y creciente en (–∞, –1) $\cup$ ***(1, +∞); En x = 0 es decreciente, y creciente en x = 2 y x = –2.***

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$; b) $y = 3x^3 + 9$; c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

Solución: a) y' = 4x³; y' = 0 si x = 0; y'' = 12x²; y''' = 24x; yⁱᵛ = 24 > 0. Tiene un mínimo relativo y absoluto en (0, –1);

b) y' = 9x²; y' = 0 si x = 0; y'' = 18x; y''' = 18; Tiene en (0, 9) un punto de inflexión de tangente vertical creciente. No tiene ni máximos ni mínimos relativos;

c) y' = 16x³ – 4x = 0 si x = 0, x = 1/2, x = –1/2; (0, 5) es un máximo relativo; No tiene máximos absolutos; (1/2, 19/4) y (–1/2, 19/4) son mínmos relativos y absolutos.

d) y' = 27x² – 6x = 0 si x = 0, x = 2/9; (0, 0) es un máximo relativo; (2/9, –4/81) es un mínimo relativo. No hay máximos o mínimos absolutos.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dadas por la fórmula $v = \sqrt{\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x}}$ en la que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidades $x = a$.

Solución: v' = 0 para x = 0, x = a y para x = –a; En (0, a), v'(x) < 0; en (a, +∞), v'(x) > 0, luego para velocidades x = a se tiene un mínimo.

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Solución: xy = k; y = k/x; s = x + k/x; s' = 0 si x = $\pm\sqrt{k}$ ***; s'' = 2k/x³; s''(*** $\pm\sqrt{k}$ ***) = 2/k² > 0; Para x =*** $\sqrt{k}$***, y =*** $\sqrt{k}$ ***la suma es mínima.***

29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–5, 5] y en el intervalo [1, 4].

***Solución:** La función es siempre creciente; En [–5, 5] el mínimo absoluto se alcanza para x = –5, y(–5) = –685 y el máximo absoluto en x = 5, con y(5) = 535;*
En [1, 4] el mínimo se alcanza en (1, 71) y el máximo en (4, 368).

30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes: a) $y = |x - 9|$; b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

***Solución:** a) La función continua y derivable en R – {9}; es decreciente en (–∞, 9) y creciente en (0, + ∞), luego tiene un mínimo relativo en (9, 0) que es también un mínimo absoluto;*
b) La función continua y derivable en R – {–2, 3}; La función es decreciente en (–∞, –2), constante en (–2, 3), y creciente en (3, +∞). La función no tiene máximos ni relativos ni absolutos. Alcanza mínimo absoluto y relativo para x ∈ [–2, 3] con y = 5.

31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–4, 4].

***Solución:** Mínimo absoluto y relativo: (–2, 0). Máximo absoluto: (4, 6); Máximo relativo: (–4, 2).*

32. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto $x = 0$? b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$? c) ¿Alcanza algún extremo? (Selectividad)

***Solución:** a) Es continua en x = 0, pues por ambas ramas se acerca a 0;*
b) f'(x) = $-e^{-x}$ < 0, para x < 0, luego es decreciente; f'(x) = 2x + 1 > 0 para x > 0, luego es creciente. No es derivable, pues la derivada se acerca a 1 por la derecha y a –1 por la izquierda;
c) En (0, 0) tiene un mínimo relativo y absoluto.

33. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos. (Selectividad)

***Solución:** Mínimo relativo y absoluto: (–1, –1/2); Máximo relativo y absoluto: (1, 1/2).*

34. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,
a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. b) Halla los máximos y mínimos relativos de f. c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta. (Selectividad)

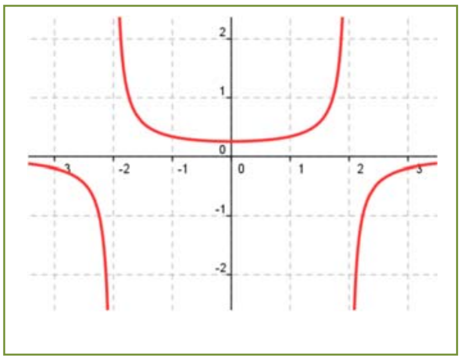
***Solución:** Se anula la derivada en x = 4, x = 6 y x = 2; a) (–∞, 2) la función es creciente, en el intervalo (2, 4) es decreciente, en el intervalo (4, 6) es decreciente y en (6, +∞) es creciente;*
b) En x = 2 tiene un máximo relativo, en x = 6 tiene un mínimo relativo;
c) En x = 4 hay un punto de inflexión de tangente horizontal, pues la función es creciente a ambos lados del punto, y si se calcula la derivada tercera, f'''(x) = $12x^2 - 96x + 174$ y f'''(4) = –18 ≠ 0.

35. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:
a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

***Solución:** a) La derivada primera no se anula en ningún punto, luego no tiene máximos ni mínimos relativos: El punto (1, 15) es un punto de inflexión;*
b) Máximo relativo: $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},\ 8 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; Mínimo relativo: $\left(\sqrt{\frac{7}{3}},\ 8 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; Punto de inflexión: (0, 8);
c) No tiene máximos ni mínimos relativos; Punto de inflexión: (0, 2);
d) Mínimo relativo: (0, –3); No tiene puntos de inflexión.

36. Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$. a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas. b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad. c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$. (Selectividad)

Solución: a) Dom f = R – {2, –2}; Asíntotas verticales: x = 2, x = –2;
Asíntota horizontal: y = 0;
b) Mínimo relativo: (0, 1/4); Cóncava: (–∞,–2) ∪ (–2, 2); Cóncava: (2, +∞); Ni tiene puntos de inflexión;
c) Mínimo absoluto: (0, 1/4) que en ese intervalo coincide con el mínimo relativo; Máximos absolutos: (–1, 1/3), (1, 1/3), se alcanzan en los extremos del intervalo.

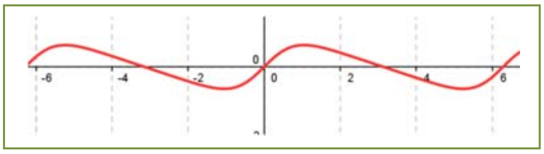


37. Sea la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$ definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide: a) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos. b) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado. Selectividad. Septiembre 03. Opción A

Solución: a) Máximos absolutos: $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\dfrac{5\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

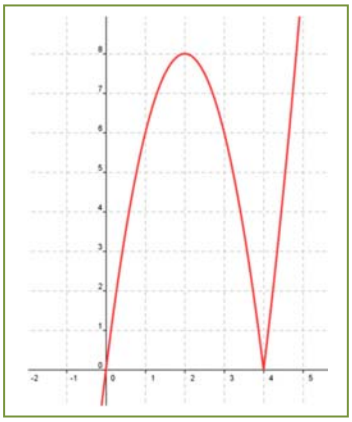
Mínimos absolutos: $\left(-\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) Gráfica:

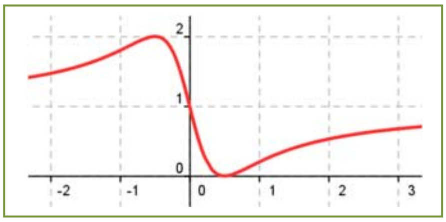


38. Sea la función $f(x) = 2x\,|4-x|$. Estudia su continuidad y derivabilidad. Dibuja su gráfica. (Selectividad)

Solución: La función es continua en todo R incluso en x = 4, y derivable en R – {4}. No es derivable en x = 4, pues la derivada a la izquierda vale –8 y la derivada a la dercha, +8, son distintas.
Tiene un máximo relativo en (2, 8) y un mínimo relativo en (4, 0).



39. Se considera la función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$. (Selectividad)



Solución: La función no tiene asíntotas verticales, su dominio es todo R. Tiene de asíntota horizontal: y = 0; La derivada se anula si 16x² – 4 = 0; es decir, si x = 1/2 o x = –1/2. El punto (–1/2, 2) es un máximo relativo y absoluto, el punto (1/2, 0) es un mínimo relativo y absoluto.

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

Solución: Es el cubo de lado $\sqrt[3]{2}$ ***dm³.***

41. Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

Solución: Buscamos los extremos de la función V = (π/3)(25 – x²) (5 + x), cuya derivada se hace nula para x = –5, x = 5/3; La solución negativa no nos sirve;

Para x = 5/3, se tiene un máximo, con radio = $\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ ***u; altura = 20/3 u.***

42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima. (Junio 04. Opción A Selectividad)

Solución: Es el triángulo equilátero de lado 8/3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Solución: La función valor absoluto: $|x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

Solución: $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$***, si a ≠ 0.***

La derivada en x = 0 no está definida, se anula el denominador.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta. a) f es derivable en x = 1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto. b) f ni es continua en x = 1 ni derivable en dicho punto (Selectividad)

Solución: La función no es continua en x = 1, para x < 1, tiende a 0, y para x > 1, tiende a 2. Por lo tanto la función ni es continua en x = 1, ni derivable en dicho punto.

4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta. (Selectividad)

Solución: La función es continua y derivable en R – {–4, –2} al estar formada por funciones polinómicas. Continuidad: Es continua en todo R; En ambas ramas tiende a 0; Derivabilidad: La derivada a la derecha de –4, es 2 y a la izquierda es –2, luego no es derivable en x = –4; La derivada a la derecha de –2, es –2 y a la izquierda es 2, luego no es derivable en x = –2.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto x = 5.

Solución: y = 138 + 53 (x – 5)

6. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.03x - 0.002x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.

Solución: Para x = 0, y = 0.03x; Para x = 1, y = 0.028 + 0.026(x – 1); Para x = 2, y = 0.052 + 0.022(x – 2); Para x = 3, y = 0.072 + 0.018(x – 3).

7. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = (1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8): a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella? b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20 metros?

Solución: a) v = 80 m/s; b) v = 20 m/s.

8. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0.5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

Solución: y = 26x + 8.

9. Un determinado gas ocupa un volumen de 3 m³ a una presión de 3 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por m². ¿Y cuándo es de 18 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

Solución: V'(9) = –10/81; V'(18) = –10/324.

10. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
    A) $y = x^3 + 5$ en x = 2. B) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en x = 1. C) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en x = 0.

Solución: A) y = 13 + 12(x – 2); B) y = 8 + 13(x – 1); C) y = 4, recta tangente es horizontal.

11. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y = 0; b) a la recta $y = 2x$.

Solución: a) (–1, 4), (1, 0); b) $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+2\right)$

12. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en x = 0.

Solución: La función no es derivable en x = 0, pero existe la recta tangente que es la recta vertical x = 0..

13. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Solución: a) $y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2})$ ***y*** $y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2})$ ***; b) La mínima pendiente se obtiene para x = 0, y es –12.***

14. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Solución: a = 1, b = 1, c = 0.

15. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

Solución: a = 3, b = –4, c = 1.

16. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Solución: a = 3/4.

Cálculo de derivadas

Si ya sabes derivar, puedes no hacer estos ejercicios.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

Solución: a) y' = 6x + 5; b) y' = 15 x² – 8x + 3; c) y' = 12x – 4; d) y' = 63x⁶ – 24x⁵ – 6x².

18. Calcula: a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$ c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

Solución: a) $y' = 6x + 24x^3 - 9$; ***b)*** $y' = 35x^4 - 10x + 6x^2$; ***c)*** $25x^4 - 16x^3 + 9x^2$; ***d)*** $y' = 21x^2 - 48x^5 - 72x^7$.

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$ c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)\cdot(x^2-3x+1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+3)}{(x^2-3)}$

Solución: a) $y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$; ***b)*** $y' = 14x^2 - 10x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

c)
$$y' = \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}(x+2)(x^2-3x+1) - 6\sqrt{x}\left(x^2-3x+1+(x+2)(2x-3)\right)}{(x+2)^2(x^2-3x+1)^2} =$$
$$= \frac{3(x^3-x^2-5x+2) - 6x(3x^2-2x-5)}{\sqrt{x}(x+2)^2(x^2-3x+1)^2} = \frac{-15x^3+9x^2+15x+6}{\sqrt{x}(x+2)^2(x^2-3x+1)^2}$$

d)
$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+3)+\sqrt{x}\right)(x^2-3) - \sqrt{x}(x+3)2x}{(x^2-3)^2} = \frac{(3x+3)(x^2-3) - 4x^2(x+3)}{2\sqrt{x}(x^2-3)^2} = -\frac{x^3+9x^2+9x+9}{2\sqrt{x}(x^2-3)^2}$$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}$ b) $y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}$ c) $y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}$

Solución: a) $y' = \frac{2(x^2+10x-31)}{(x+5)^2}$; ***b)*** $y' = \frac{140x^3-366x^2+96x-205}{(5x-8)^2}$

c) $y' = \frac{2(216x^7+174x^6-168x^3-45x^2-105x+35)}{(6x+7)^2}$ ***d)*** $y' = \frac{5(20x^2+44x+71)}{3(x+5)^2(2x+1)^2}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)$;

Solución: a) $y' = 3x^2(8x^6-7) + (x^3+5)48x^5 = 72x^8 + 240x^5 - 21x^2$;

b) $y' = 27x^2(7x^4+6) + (9x^3-3)28x^3 = 441x^6 - 84x^3 + 162x^2$;

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{x-2}{x+2}$; b) $y=\sqrt{x-2}\cdot(6x^3-3x)$; c) $y=\frac{4x^3-7x^2}{8x^4-4x^3}$; d) $y=\frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

Solución: a) $y'=\frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$

b) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\left(6x^3-3x\right)+\sqrt{x-2}\left(18x^2-3\right)=\frac{6x^3-3x+2(x-2)\left(18x^2-3\right)}{2\sqrt{x-2}}=$

$=\frac{42x^3-72x^2-9x+12}{2\sqrt{x-2}}$

c) $y'=\frac{\left(12x^2-14x\right)\left(8x^4-4x^3\right)-\left(4x^3-7x^2\right)\left(32x^3-12x^2\right)}{\left(8x^4-4x^3\right)^2}=$

$=\frac{96x^6-160x^5+56x^4-\left(128x^6-272x^5+84x^4\right)}{\left(8x^4-4x^3\right)^2}=\frac{-32x^6+112x^5-28x^4}{\left(8x^4-4x^3\right)^2}$

d) $y'=\frac{\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}(3x+4)-6\sqrt{x^3}}{(3x+4)^2}=\frac{3x^2(3x+4)-6x^3}{x\sqrt{x}(3x+4)^2}=\frac{3x^2+12x}{\sqrt{x}(3x+4)^2}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$ c) $y=\sqrt{\left(2x^7-6x^5\right)^3}$ d) $y=\sqrt[5]{\left(3x^4+6x^9\right)^7}$

Solución: a) $y'=9\left(x^6-5x^2\right)^8\left(6x^5-10x\right)$; ***b)*** $y'=5\left(2x^4-7x^6\right)^4\left(8x^3-42x^5\right)$

c) $y'=\frac{3\left(2x^7-6x^5\right)^2\left(14x^6-30x^4\right)}{2\sqrt{\left(2x^7-6x^5\right)^3}}=\frac{3x^{14}\left(2x^2-6\right)^2\left(7x^2-15\right)}{\sqrt{\left(2x^7-6x^5\right)^3}}$

d) $y'=\frac{7\left(3x^4+6x^9\right)^6\left(12x^3+54x^8\right)}{5\left(\sqrt[5]{\left(3x^4+6x^9\right)^7}\right)^4}=\frac{2\,3^{\frac{7}{5}}x^{27}\left(1+2x^5\right)^6\left(2+9x^5\right)}{5\left(\sqrt[5]{\left(x^4+2x^9\right)^7}\right)^4}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3+3}\cdot(4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y=\frac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4}$ c) $y = (7x^3 + 3)^5\cdot 3(4x^5 - 8x^8)$ d) $y=\frac{\left(5x^3-7x^2\right)^9}{\left(9x^4-3x^3\right)^2}$

Solución: a) ; $y'=\frac{3x^2(4x^7+6x^2)^6}{\sqrt{2x^3+3}}+6\sqrt{2x^3+3}\left(28x^6+12x\right)\left(4x^7+6x^2\right)$

b) ; $y'=\frac{15x^2+14x}{3(3x+4)\sqrt[3]{(5x^3+7x^2-2)^2}}-\frac{3\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{(3x+4)^2}$

c) ; $y'=5\left(7x^3+3\right)^4(21x^2)\left(4x^5-8x^8\right)+\left(7x^3+3\right)^5\left(20x^4-64x^7\right)$

d) . $y'=\frac{9\left(15x^2-14x\right)\left(5x^3-7x^2\right)^8\left(9x^4-3x^3\right)^4-4\left(5x^3-7x^2\right)^9\left(9x^4-3x^3\right)^3\left(36x^3-9x^2\right)}{(9x^4-3x^3)^4}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5 - 3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3 + 2x^2)}$ c) $y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(3x^4-4x^5)^3}}$

Solución: a)
$$\log y = (x^5 - 3x^3)\log(5x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (5x^4 - 9x^2)\log(5x) + \frac{x^5 - 3x^3}{x} = (5x^4 - 9x^2)\log(5x) + x^4 - 3x^2$$
$$\Rightarrow y' = \left((5x^4 - 9x^2)\log(5x) + x^4 - 3x^2\right)(5x)^{x^5 - 3x^3}$$

b)
$$\log y = (4x^3 + 2x^2)\log(3x+6) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (12x^2 + 4x)\log(3x+6) + \frac{4x^3 + 2x^2}{x+2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \left((12x^2 + 4x)\log(3x+6) + \frac{4x^3 + 2x^2}{x+2}\right)(3x+6)^{4x^3 + 2x^2}$$

c) $\log y = (3x^5 - 6x^3)^5 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 5(3x^5 - 6x^3)^4 (15x^4 - 18x^2) \Rightarrow y' = 15x^{14}(3x^2 - 6)^4 (5x^2 - 6)e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$

d)
$$\log y = \frac{(3x^4 - 4x^5)^3}{3}\log(5x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (3x^4 - 4x^5)^2(12x^3 - 20x^4)\log(5x+1) + \frac{5(3x^4 - 4x^5)^3}{3(5x+1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \left((3x^4 - 4x^5)^2(12x^3 - 20x^4)\log(5x+1) + \frac{5(3x^4 - 4x^5)^3}{3(5x+1)}\right)(5x+1)^{\frac{(3x^4 - 4x^5)^3}{3}}$$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 + 7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$ c) $y = e^{(4x^5 + 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5 - 3x^8)^2}}$

Solución: a) $y' = e^{x^5 + 7x^3}(5x^4 + 21x^2)$; **b)** $y' = e^{(3x^3 - 5x^3)^7}\, 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$;

c) $y' = e^{(4x^5 + 8x^3)^5}\, 5(4x^5 + 8x^3)^4(20x^4 + 24x^2)$;

d) $y' = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{e^{(5x^5 - 3x^8)^2}}\right)^2} e^{(5x^5 - 3x^8)^2}\, 2(5x^5 - 3x^8)(25x^4 - 24x^7) = \dfrac{2}{3} e^{\frac{(5x^5 - 3x^8)^2}{3}} x^9 (5 - 3x^3)(25 - 24x^3)$;

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln((5x^5 - 3x^3)^{12}(3x + 1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3 + 5x^2)^3}$ c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{7x^5 - 5x}{2x - 3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4 - 5x^5)^2}$

Solución: a) $y' = \dfrac{12(5x^5 - 3x^3)^{11}(25x^4 - 9x^2)(3x+1) + 3(5x^5 - 3x^3)^{12}}{(5x^5 - 3x^3)^{12}(3x+1)} = \dfrac{12(25x^4 - 9x^2)(3x+1) + 3(5x^5 - 3x^3)}{(5x^5 - 3x^3)(3x+1)}$

b) $y = \dfrac{3}{2}\ln(2x^3 + 5x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{3}{2}\dfrac{6x^2 + 10x}{2x^3 + 5x^2} = \dfrac{9x + 15}{2x^2 + 5x}$

c) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{7x^5 - 5x}{2x - 3}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{(35x^4 - 5)(2x-3) - (7x^5 - 5x)2}{(2x-3)^2}}{\dfrac{7x^5 - 5x}{2x - 3}} = \dfrac{70x^6 - 14x^5 - 105x^4 + 15}{2(2x-3)(7x^5 - 5x)}$

d) $y = \dfrac{2}{3}\ln(3x^4 - 5x^5) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{12x^3 - 25x^4}{3x^4 - 5x^5} = \dfrac{24 - 50x}{9x - 15x^2}$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x)=\dfrac{5\cos(x)}{1+3sen(x^2)}$ $\quad f(x) = sen(5sh^3 3x)$ $\quad f(x) = ch(3sh(2x))$ $\quad f(x) = th(5x+7x^2)$

Solución: a) $y'=\dfrac{-5\,senx\left(1+3sen\left(x^2\right)\right)-5\cos x\,6x\cos\left(x^2\right)}{\left(1+3sen\left(x^2\right)\right)^2}=\dfrac{-5\,senx-15\,senx\,sen\left(x^2\right)-30x\cos x\cos\left(x^2\right)}{\left(1+3sen\left(x^2\right)\right)^2}$

b) $y'=\cos\left(5sh^3(3x)\right)15sh^2(3x)ch(3x)3=45\cos\left(5sh^3(3x)\right)sh^2(3x)ch(3x)$

c) $y'=sh\left(3sh\left(2x\right)\right)3ch\left(2x\right)2=6sh\left(3sh\left(2x\right)\right)ch\left(2x\right)$;

d) $y'=\dfrac{1}{ch^2\left(5x+7x^2\right)}\left(5+14x\right)=\dfrac{5+14x}{ch^2\left(5x+7x^2\right)}$

29. Recuerda la definición de cosecante: $cosec(x)=\dfrac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: $(cosec(x))'=-\dfrac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

Solución: Utilizamos la derivada de un cociente y se obtiene: (cosec(x))' = $-\dfrac{\cos(x)}{sen^2(x)}$

30. Recuerda la definición de secante: $\sec(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))'=\dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

Solución: Utilizamos la derivada de un cociente y se obtiene: $(\sec(x))'=\dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)}$

31. Recuerda la definición de cotangente: $cotg(x)=\dfrac{1}{tg(x)}$. Demuestra que: $(cotg(x))'=-\dfrac{1}{sen^2(x)}$

Solución: Utilizamos la derivada de un cociente, simplificamos y se obtiene: (cotg(x))' = $-\dfrac{1}{sen^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7sen(x^7 - 7x^3)$ $\quad$ b) $y = 5sen^5(4x^4 - 5x^5)$ $\quad$ c) $y = sen^6(x)\cdot cos^4(x)$ $\quad$ d) $y=\sqrt[3]{sen^5\left(3x^4+5x^7\right)}$

Solución: a) $y'=7\cos\left(x^7-7x^3\right)\left(7x^6-21x^2\right)=49x^2\cos\left(x^7-7x^3\right)\left(x^4-3\right)$

b) $y'=25\,sen^4\left(4x^4-5x^5\right)\cos\left(4x^4-5x^5\right)\left(16x^3-25x^4\right)=25x^3sen^4\left(4x^4-5x^5\right)\cos\left(4x^4-5x^5\right)\left(16-25x\right)$

c) $y'=6\,sen^5(x)\cos(x)\cos^5(x)+sen^6(x)4\cos^3(x)(-sen(x))=6\,sen^5(x)\cos^6(x)-4\,sen^7(x)\cos^3(x)$

d) $y'=\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{sen^5\left(3x^4+5x^7\right)}\right)^2}5\,sen^4\left(3x^4+5x^7\right)\cos\left(3x^4+5x^7\right)\left(12x^3+35x^6\right)=$

$=\dfrac{5}{3}x^3sen^{\frac{2}{3}}\left(3x^4+5x^7\right)\cos\left(3x^4+5x^7\right)\left(12+35x^3\right)$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = sen\,\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x-3x^2)ch(5x-7x^2)$ c) $f(x) = tg\,\frac{\sqrt{16-9senx}}{4+3\cos x}$ d) $f(x) = \frac{shx - 3xchx}{chx + 3xshx}$

Solución: a) $y' = \cos\left(\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}\right)\frac{9e^{3x}\left(5-3e^{3x}\right)-\left(5+3e^{3x}\right)\left(-9e^{3x}\right)}{\left(5-3e^{3x}\right)^2} = \cos\left(\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}\right)\frac{90e^{3x}}{\left(5-3e^{3x}\right)^2}$

b) $y' = (2-6x)ch\left(5x-7x^2\right)+\left(2x-3x^2\right)sh\left(5x-7x^2\right)(5-14x) =$
$= (2-6x)ch\left(5x-7x^2\right)+\left(10x-43x^2+42x^3\right)sh\left(5x-7x^2\right)$

c) $y' = sec^2\left(\frac{\sqrt{16-9\,senx}}{4+3\cos x}\right)\frac{\frac{-9\cos x}{2\sqrt{16-9\,senx}}(4+3\cos x)-\sqrt{16-9\,senx}\,(-3\,senx)}{(4+3\cos x)^2} =$

$= sec^2\left(\frac{\sqrt{16-9\,senx}}{4+3\cos x}\right)\frac{-9\cos x\,(4+3\cos x)+6\,senx\,(16-9\,senx)}{2\sqrt{16-9\,senx}\,(4+3\cos x)^2} =$

$= sec^2\left(\frac{\sqrt{16-9\,senx}}{4+3\cos x}\right)\frac{-36\cos x-27\cos^2 x+96\,senx-54\,sen^2 x}{2\sqrt{16-9\,senx}\,(4+3\cos x)^2}$

d) $y' = \frac{(-2chx-3x\,shx)(chx+3x\,shx)-(shx-3x\,chx)(4\,shx+3x\,chx)}{(chx+3x\,shx)^2} =$

$= \frac{-2ch^2x-9x\,shx\,chx-9x^2\,sh^2x-\left(4\,sh^2x-9x\,shx\,chx-9x^2\,ch^2x\right)}{(chx+3x\,shx)^2} =$

$= \frac{-2ch^2x-9x^2\,sh^2x-4\,sh^2x+9x^2\,ch^2x}{(chx+3x\,shx)^2}$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $f(x) = arcsen\,\frac{2-7x^2}{2+7x^2}$ c) $f(x) = 5\arccos\,\frac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $f(x) = arcsen\,\frac{5\cos x}{3senx+2\cos x}$

Solución: a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\arccos(5x))}}\,\frac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}}{\arccos(5x)} = -\frac{5}{2\sqrt{\ln(\arccos(5x))}\left(1-25x^2\right)\arccos(5x)}$

b) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(2-7x^2\right)^2}{\left(2+7x^2\right)^2}}}\,\frac{-14x\left(2+7x^2\right)-\left(2-7x^2\right)14x}{\left(2+7x^2\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{56x^2}}\,\frac{-56x}{2+7x^2} = -\frac{\sqrt{56}}{2+7x^2}$

(hemos supuesto que x>0)

c) $y' = -\frac{5}{\sqrt{1-\frac{(3\,senx+5)^2}{(5-3\,senx)^2}}}\,\frac{3\cos x\,(5-3\,senx)-(3\,senx+5)(-3\cos x)}{(5-3\,senx)^2} = -\frac{5}{\sqrt{-60\,senx}}\,\frac{30\cos x}{5-3\,senx} =$

$= -\frac{75\cos x}{\sqrt{-15\,senx}\,(5-3\,senx)}$

(sólo está definida si x<0)

d) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(5\cos x)^2}{(3\,senx+2\cos x)^2}}}\,\frac{-5\,senx\,(3\,senx+2\cos x)-5\cos x\,(3\cos x-2\,senx)}{(3\,senx+2\cos x)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{9\,sen^2x-21\cos^2x+12\,senx\cos x}}\,\frac{-15}{3\,senx+2\cos x} = -\frac{15}{\sqrt{9\,sen^2x-21\cos^2x+12\,senx\cos x}\,(3\,senx+2\cos x)}$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arcsen\ (7e^{2x-3})$ b) $y = \ln(\sqrt{5arcsen(3x+2)})$ c) $y = arctg\ (\ln \sqrt[3]{4x-5})$ d) $y = arcsen(3tg(5sen(4x-2)))$

Solución: a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(7e^{2x-3}\right)^2}} 7e^{2x-3}\, 2 = \dfrac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-49e^{4x-6}}}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{5arcsen(3x+2)}} 5 \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}}{\sqrt{5arcsen(3x+2)}} = \dfrac{3}{2\,arcsen(3x+2)\sqrt{1-(3x+2)^2}}$

c) $y = arctg\left(\dfrac{1}{3}ln(4x-5)\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{9}ln^2(4x-5)} \dfrac{1}{3} \dfrac{4}{4x-5} = \dfrac{4}{\left(3+\dfrac{1}{3}ln^2(4x-5)\right)(4x-5)}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-9\,tg^2(5sen(4x-2))}} sec^2(5sen(4x-2))5\,cos(4x-2)4 =$$

d) $$= \frac{1}{\sqrt{cos^2(5sen(4x-2))-9\,sen^2(5sen(4x-2))}} \frac{1}{cos(5sen(4x-2))} 20\,cos(4x-2) =$$

$$= \frac{20\,cos(4x-2)}{cos(5sen(4x-2))\sqrt{cos^2(5sen(4x-2))-9\,sen^2(5sen(4x-2))}}$$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = arctg\sqrt{\dfrac{7+2senx}{7-2senx}}$ b) $y = e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$ c) $y = \cos(3arcsen\dfrac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}})$ d) $y = arcsen\dfrac{7x}{\sqrt{9-2x^2}})$

Solución: a) $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{7+2\,senx}{7-2\,senx}} \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{7+2\,senx}{7-2\,senx}}} \dfrac{2\,cosx\,(7-2\,senx)+2\,cosx\,(7+2\,senx)}{(7-2\,senx)^2} = \dfrac{cosx}{\sqrt{49-4\,sen^2x}}$

b) $y' = e^{arcsen\left(\sqrt{2x-5}\right)} \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-5)}} \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}} = e^{arcsen\left(\sqrt{2x-5}\right)} \dfrac{1}{\sqrt{(6-2x)(2x-5)}}$

$$y' = -sen\left(3\,arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right) \frac{3}{\sqrt{1-\dfrac{(6x-1)^2}{7-2x^2}}} \frac{6\sqrt{7-2x^2}-(6x-1)\dfrac{-2x}{\sqrt{7-2x^2}}}{7-2x^2} =$$

c) $$= -sen\left(3\,arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right) \frac{3}{\sqrt{7-2x^2-(6x-1)^2}} \frac{6\left(7-2x^2\right)+2x\,(6x-1)}{7-2x^2} =$$

$$= -sen\left(3\,arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right) \frac{3}{\sqrt{6+12x-38x^2}} \frac{42-2x}{7-2x^2}$$

d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{49x^2}{9-2x^2}}} \dfrac{7\sqrt{9-2x^2}-7x\dfrac{-2x}{\sqrt{9-2x^2}}}{9-2x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{9-51x^2}} \dfrac{7\left(9-2x^2\right)+14x^2}{9-2x^2} = \dfrac{63}{\sqrt{9-51x^2}\left(9-2x^2\right)}$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^3 - 5x^5)^8$ b) $y = log_2(8x^2 - 3x^3)^2$ c) $y = \ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}$ d) $y = \ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}$

Solución: a) $y = 8\,log(x^3-5x^5) \Rightarrow y' = 8\frac{3x^2-25x^4}{x^3-5x^5} = \frac{24-200x^2}{x-5x^3}$ *(entiendo log como logaritmo neperiano)*

b) $y = 2\,log_2(8x^2-3x^3) \Rightarrow y' = 2\frac{16x-9x^2}{8x^2-3x^3}log_2 e = \frac{32-18x}{8x-3x^2}log_2 e$

c) $y = \frac{1}{2}ln\left(\frac{3x^6-7x^2}{2x-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{\frac{(18x^5-14x)(2x-1)-(3x^6-7x^2)2}{(2x-1)^2}}{\frac{3x^6-7x^2}{2x-1}} = \frac{15x^6-9x^5-7x^2+7x}{(2x-1)(3x^6-7x^2)}$

d) $y = \frac{7}{4}ln(3x^3+5x^9) \Rightarrow y' = \frac{7}{4}\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9} = \frac{63+315x^6}{12x+20x^7}$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = cos(e^{x^5} + \ln(4x^3))$ b) $y = 7cotg^5(5x^3 - 3x^2)$ c) $y = sen(cos^2(tg(7x^5 - 3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(3x+2))^4}$

Solución: a) $y' = -sen\left(e^{x^5}+ln(4x^3)\right)\left(e^{x^5}5x^4+\frac{12x^2}{4x^3}\right) = -sen\left(e^{x^5}+ln(4x^3)\right)\left(5x^4e^{x^5}+\frac{3}{x}\right)$

b) $y' = 35\,cotg^4(5x^3-3x^2)(-cosec^2(5x^3-3x^2))(15x^2-6x) = -35\frac{cos^4(5x^3-3x^2)}{sen^6(5x^3-3x^2)}(15x^2-6x)$

c)
$$y' = cos\left(cos^2\left(tg\left((7x^5-3x^3)^2\right)\right)\right)2\,cos\left(tg\left((7x^5-3x^3)^2\right)\right)$$
$$\left(-sen\left(tg\left((7x^5-3x^3)^2\right)\right)\right)sec^2\left((7x^5-3x^3)^2\right)2(7x^5-3x^3)(35x^4-9x^2)$$

d)
$$y = (ch(sh(3x+2)))^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}(ch(sh(3x+2)))^{\frac{1}{3}}\,sh(sh(3x+2))\,ch(3x+2)3 =$$
$$= 4(ch(sh(3x+2)))^{\frac{1}{3}}\,sh(sh(3x+2))\,ch(3x+2)$$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg sh\sqrt{5x^2+2}$ b) $y = \ln(\arg th(5x-3))$ c) $y = \arg ch(e^{3x-6})$ d) $y = \arg sh(\arg th(2x+1))$

Solución: a) $y' = \frac{1}{\sqrt{(5x^2+2)+1}}\frac{10x}{2\sqrt{5x^2+2}} = \frac{5x}{\sqrt{(5x^2+3)(5x^2+2)}}$

b)
$$y' = \frac{1}{argth(5x-3)}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{1+(5x-3)}-\frac{-5}{1-(5x-3)}\right) = \frac{1}{argth(5x-3)}\frac{5}{2}\left(\frac{1}{5x-2}+\frac{1}{4-5x}\right) =$$
$$= \frac{5}{argth(5x-3)}\frac{1}{(5x-2)(4-5x)}$$

c) $y' = \frac{1}{\sqrt{e^{6x-12}-1}}3e^{3x-6} = \frac{3e^{3x-6}}{\sqrt{e^{6x-12}-1}}$

d)
$$y' = \frac{1}{\sqrt{argth^2(2x+1)+1}}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+(2x+1)}+\frac{2}{1-(2x+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{argth^2(2x+1)+1}}\left(\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{2x}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{argth^2(2x+1)+1}}\frac{1}{x(x+1)}$$

40. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ (Selectividad)

Solución: Utilizando la regla de l'Hôpital. 9/4.

41. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}\ -\ \sqrt{4-x}}{4x}$ (Selectividad)

Solución: 1/8; Multiplica por el conjugado.

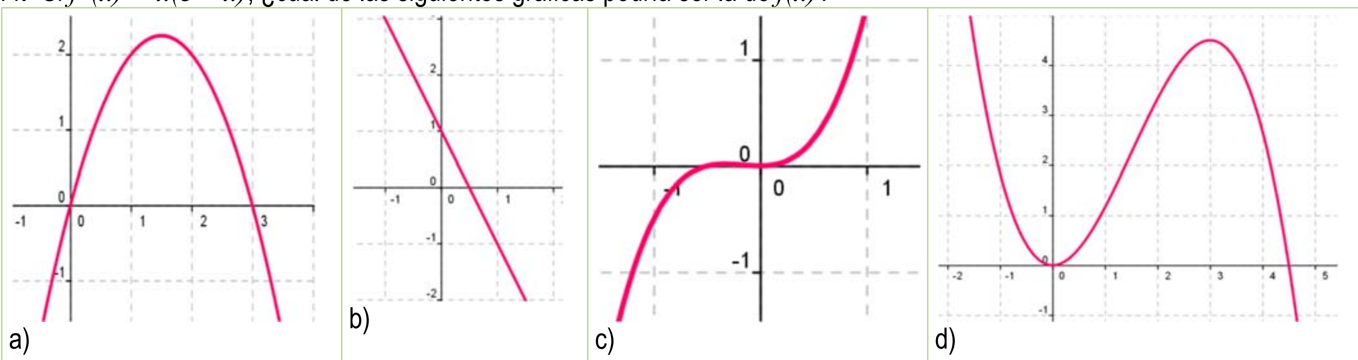
42. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctan\,x - x}{x^3}$ (Selectividad)

Solución: –1/3; Utiliza la regla de l'Hôpital.

43. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$ (Selectividad)

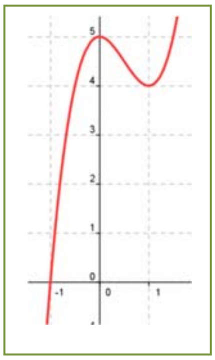
Solución: –1/2; Utiliza la regla de l'Hôpital.

44. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



a) b) c) d)

Solución: d)



45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

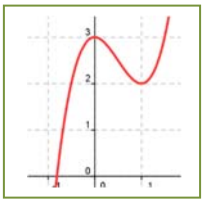
Solución: Dom f = R – {2}; (–∞, 2) creciente; (2, +∞) decreciente.

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

Solución: Es siempre decreciente en todo su dominio, que es toda la recta real salvo para x = 4.

47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Solución: La primer derivada se anula para x = 0 y x = 1;
(–∞, 0) creciente; (0, 1) decreciente, (1, +∞) creciente;
Máximo relativo: (0, 5); Mínimo relativo: (1, 4).

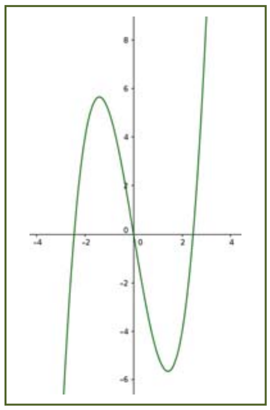


48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución: Coinciden los intervalos con el problema anterior:
(–∞, 0) creciente; (0, 1) decreciente, (1, +∞) creciente;
Máximo relativo: (0, 3); Mínimo relativo: (1, 2). La gráfica es igual a la anterior trasladada 2 unidades:

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución: Crece de (–∞, $-\sqrt{2}$) y en ($\sqrt{2}$, +∞). Decrece en ($-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$).
En x = $-\sqrt{2}$ tiene un máximo relativo: ($-\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$) y en x = $\sqrt{2}$ tiene un mínimo relativo: ($\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$). No hay máximos ni mínimos absolutos. Su gráfica es



50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–5, 3] y en el intervalo [1, 5].

Solución: La función es creciente en todo R; No tiene ni máximos ni mínimos relativos.
El mínimo absoluto en [–5, 3] es (–5, f(–5)) = (–5, –1010);
El máximo absoluto en [–5, 3] es (3, f(3)) = (–5, 270)
El mínimo absoluto en [1, 5] es (1, f(1)) = (1, 70); El mínimo absoluto en [1, 5] es (5, f(5)) = (5, 710).

51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo [–4, 4].

Solución: La función no es derivable en x = -4;

El mínimo absoluto en [–4, 4]. es (–4, f(–4)) = (–4, 0); El máximo absoluto en [–4, 4]. es (4, f(4)) = (4, 8)

Problemas

52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0.3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

Solución: v(0) = 8 m/s; v(3) = 9.8 m/s; t = 43 segundos.

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los t = 1 segundos, y a los t = 6 segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

Solución: a(1) = 0.6 m/s²; es constante.

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

Solución: $57 = 5t^2 \to t = \sqrt{\frac{57}{5}} = 3.376 \to v = 10t = 33.76\frac{m}{s}$; ***Análogamente: Para 115 m, v = 47.96 m/s; y para 274 m, es v = 74.03 m/s.***

55. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

Solución: A) a = –1.6 m/s²; B) 180 m; C) 15 s; D) aproximadamente 15 s; E) 320 m.

56. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0.83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

Solución: v(1) = 1.66 m/s; v(4) = 6.68 m/s; v(8) = 13.28 m/s; v(30) = 49.8 m/s;

La altura de la antena debe ser menor que 120.32 m.

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1.86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Solución: v(1) = 3.72 m/s; v(4) = 14.88 m/s; v(8) = 29.76 m/s; v(30) = 11.6 m/s; Aceleración gravedad Marte = 3.72 m/s².

58. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11.44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

Solución: v(1) = 22.88 m/s; v(4) = 91.52 m/s; v(8) = 183.04 m/s; v(30) = 686.4 m/s;

Aceleración gravedad Júpiter = 22.88 m/s².

59. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

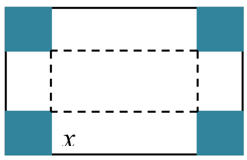
a) $e = t^2 - 4t + 3$ b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $e = -t^2 + 4t + 3$ d) $e = (3t - 4)^2$

Solución: a) v = 2t – 4; a = 2; b) v = 6t² – 10t + 4; a = 12t – 10; c) v = -2t + 4; a = -2; d) v = 6(3t – 4); a = 18.

60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Solución: v(2) = 0.012 m/min; v(5) = 0.012 m/min.

61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



Solución: $x \approx 3.7$ ***cm.***

62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Solución: $r = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$; $h = \frac{20}{\sqrt[3]{10\pi}}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) $b = -6$, $d = 3$ b) $b = 3$, $d = -1$ c) $b = 6$, $d = -3$ d) $b = -3$, $d = 2$

Solución: a)

2. Con los valores de *b* y *d* del apartado anterior verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1], por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa:

a) $x = -1$, b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

Solución: b)

3. Verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3] en el punto de abscisa:

a) $x = -3/8$, b) $x = 7/6$ c) $x = 10/3$ d) $x = 5/3$

Solución: d)

4. En cuál de los límites siguientes **no** se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 7x}{5x^2 + 2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$

Solución: d)

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = tanx^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = x$ b) $y = x + 8$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + x$

Solución: c)

6. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

Solución: a)

7. La función $y = 3senx - 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

Solución: b)

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente

d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

Solución: b)

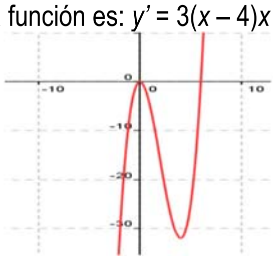
9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

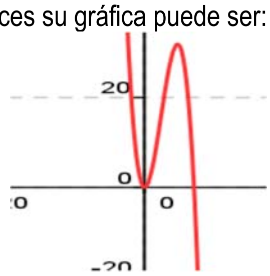
Solución: a)

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:

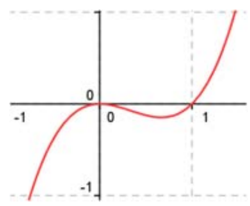
a)



b)



c)



d)

Solución: b)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

http://pedroreina.net/pau/

http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

http://www.segundoperez.es/

https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

***Solución:** Es imprescindible que la función sea continua, porque si no hay una caída (al suelo si la discontinuidad va hacia arriba y al tobogán si va hacia abajo). Y es muy recomendable que sea derivable, pues en caso contrario hay un punto anguloso (un "pico") y allí los niños pueden hacerse daño.*

En este caso concreto es a = 1/4, b = –1, y c = 1.

2. Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta. (Selectividad)

***Solución:** La solución no es única.* $y(0)=c=1$, *Recta:* $y = -x + 1$; *Parábola:* $y = ax^2 + bx + c$; $c = 1$;

$b^2-4ac=b^2-4a=0\Rightarrow a=\frac{b^2}{4}$. $y=\frac{b^2}{4}x^2+bx+1$

3. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a)\cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto) (Selectividad)

Solución: $F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)-f^2(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(f(x)+f(a))=2f(a)f'(a)$. *(Ya que f es continua en a al ser derivable)*

4. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme). (Selectividad)

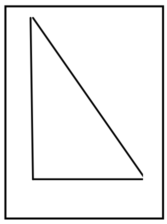
***Solución:** No necesariamente:* $f(x)=e^x$ *es creciente,* $g(x)=e^x+x$ *es creciente (suma de crecientes), pero* $f(x)-g(x)=e^x-(e^x+x)=-x$ *es estrictamente decreciente*

5. Defina derivada de una función f en un punto a. Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f' también es periódica de periodo T. (Selectividad)

Solución: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Se cumple que: $f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ *(en la penúltima igualdad hemos aplicado que f es periódica, de periodo T). Entonces f' también es periódica de periodo T*

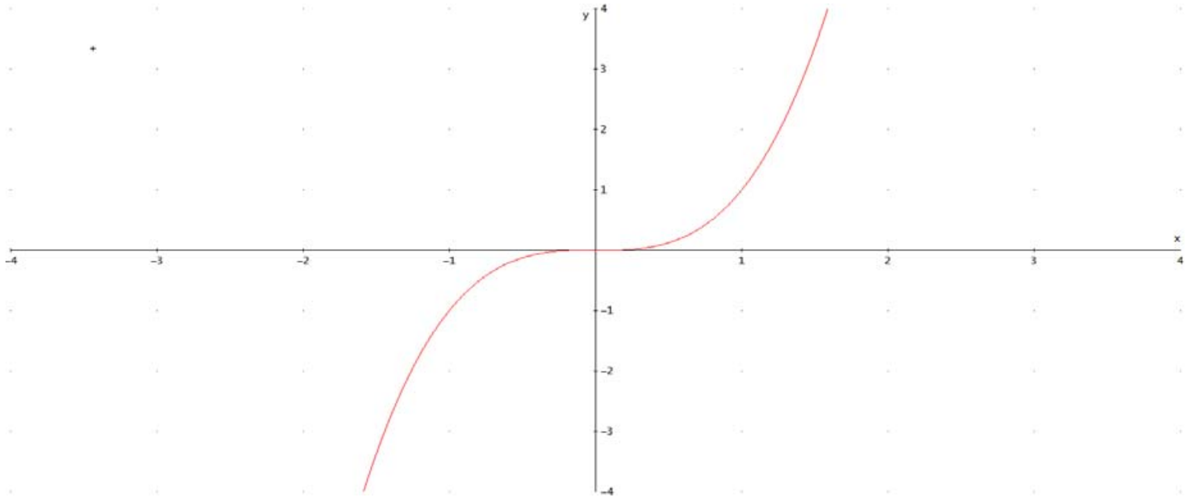
6. En la figura se representa una escalera AB, cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c. Se pide: a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$. b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA) c) La velocidad con la que B llega al punto O. (Selectividad)



Solución: a) a = –c; b) $\frac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $-\infty$.

7. Dibújese la gráfica de una función de $\Re$ en $\Re$, que cumpla las siguientes condiciones:
$f'(0) = 0$. $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ $f'(x) > 0$ para $0 < x < ½$
Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje. (Selectividad)

Solución abierta: Puede ser $f(x)=x^3$, aunque hay otras soluciones. Representación gráfica:



Es cóncava hacia abajo si x<0, cóncava hacia arriba si x>0 y tiene un punto de inflexión en 0.

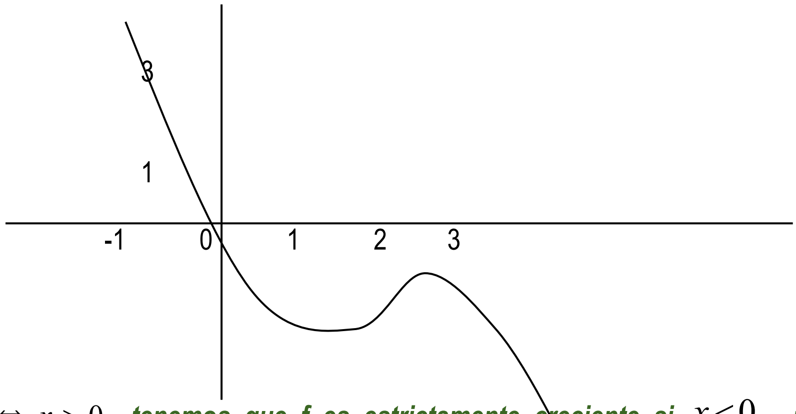
8. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte. a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido. b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia. (Selectividad)

Solución: a) Suponemos que el punto de corte es el origen, que la primera línea es el eje Y y la segunda el eje X. Entonces el espacio recorrido por cada una en un tiempo t es $s_1=v_1t=60t$, $s_2=v_2t=120t$ y en un tiempo t están en los puntos $(0,40-60t)$, $(30-120t,0)$ y su distancia es: $d(t)=\sqrt{(30-120t)^2+(40-60t)^2}$;

b) Minimizamos $f(t)=d^2(t)=(30-120t)^2+(40-60t)^2$; se cumple que:

$f'(t)=-2(30-120t)120-2(40-60t)60=-120(100-300t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$, con: $f'(t)=-120(100-300t)<0 \Leftrightarrow t<\frac{1}{3}$. Por tanto f es estrictamente decreciente si $t<\frac{1}{3}$, f es estrictamente creciente si $t>\frac{1}{3}$ y en $t=\frac{1}{3}$ tiene el mínimo absoluto, por lo que la distancia mínima es $d\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\left(30-\frac{120}{3}\right)^2+\left(40-\frac{60}{3}\right)^2}=\sqrt{500}$

9. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.
(Selectividad)



Solución: Como $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>0$, tenemos que f es estrictamente creciente si $x<0$, f es estrictamente decreciente si $x>0$ y f tiene un máximo relativo en $x=0$

10. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$. (Selectividad)

Solución: $f'(x)=e^{x^2}\,2x=0\Leftrightarrow x=0$, ***con*** $f'(x)=e^{x^2}\,2x<0\Leftrightarrow x<0$***; entonces f es estrictamente decreciente si*** $x<0$ ***, f es estrictamente creciente si*** $x>0$ ***y f tiene un mínimo relativo en*** $x=0$

11. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t) $a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$. a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil? b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [4, 8] y el espacio recorrido en ese intervalo. c) Hallar la función de posición de este móvil. (Selectividad)

Solución: a) t = 32; b) aproximadamente 86.67; c) $2t^2-\frac{t^3}{48}$.

12. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$. a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$. b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3\,sen(x)-cos\,x)=3\,sen(0)-cos\,0=-1=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(m\,x+n)=n$.

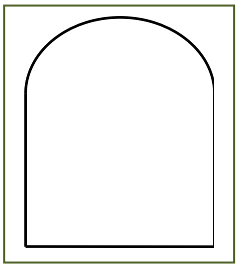
b) Para $n=-1$***, tenemos que si*** $x<0$ ***:*** $f(x)=3sen(x)-cosx\Rightarrow f'(x)=3cos(x)+senx\Rightarrow f'_-(0)=3cos(0)+sen0=3$,

si $x>0$ ***:*** $f(x)=mx+n\Rightarrow f'(x)=m\Rightarrow f'_+(0)=m$***, luego f es derivable en 0 si*** $f'_+(0)=m=f'_-(0)=3$

13. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible. (Selectividad)

Solución: Hay que hallar el máximo de x^2y ***sujeto a*** $x^2+4xy=12\Rightarrow y=\frac{12-x^2}{4x}$***, luego hay que hallar el máximo de*** $f(x)=x^2\frac{12-x^2}{4x}=3x-\frac{x^3}{4}$. ***Se cumple que*** $f'(x)=3-\frac{3x^2}{4}=0\Leftrightarrow x=2$ ***(ya que*** $x>0$***), con*** $f'(x)=3-\frac{3x^2}{4}<0\Leftrightarrow x>2$***, por lo que f es estrictamente creciente si*** $x<2$ ***, f es estrictamente decreciente si*** $x>2$ ***y f tiene el maximo absoluto en*** $x=2$***. Dimensiones:*** $x=2, y=\frac{12-2^2}{8}=1$

14. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima.
(Expresar los resultados en función de π)
(Selectividad)



Solución: Hay que hallar el máximo de $x\,y+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\,y+\frac{1}{8}\pi\,x^2$ ***sujeto a:***

$x+2y+\frac{1}{2}\pi x=6\Rightarrow y=\frac{6-\frac{\pi+2}{2}x}{2}=\frac{12-(\pi+2)x}{4}$***, luego hay que hallar el máximo de:***

$$f(x)=x\frac{12-(\pi+2)x}{4}+\frac{1}{8}\pi x^2=-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right)x^2+3x .$$

Se cumple que: $f'(x)=-\left(\frac{\pi}{4}+1\right)x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{\frac{\pi}{4}+1}=\frac{12}{\pi+4}$ ***, con*** $f'(x)=-\left(\frac{\pi}{4}+1\right)x+3<0\Leftrightarrow x>\frac{12}{\pi+4}$***, por lo que: f es estrictamente creciente si*** $x<\frac{12}{\pi+4}$ ***, f es estrictamente decreciente si*** $x>\frac{12}{\pi+4}$ ***y f tiene el maximo absoluto en*** $x=\frac{12}{\pi+4}$***. Dimensiones:*** $x=\frac{12}{\pi+4}, y=\frac{12-\frac{12(\pi+2)}{\pi+4}}{4}=\frac{6}{\pi+4}$

15. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. (Selectividad)

Solución: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 3, 2$, con $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Entonces:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \text{ si } x < 2 \\ -x^2 + 5x - 6 \text{ si } 2 \le x \le 3 \\ x^2 - 5x + 6 \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

. Si $x \neq 2, 3$ f es derivable (polinomio).

Si $x < 2$, $f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'_-(2) = 4 - 5 = -1$.

Si $2 < x < 3$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'_+(2) = -4 + 5 = 1$, por lo que f no es derivable en 2 (derivadas laterales distintas).

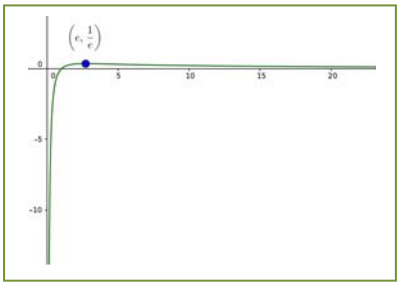
Si $2 < x < 3$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'_-(3) = -6 + 5 = -1$, si $x > 3$:

$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'_+(3) = 6 - 5 = 1$ por lo que f no es derivable en 3 (derivadas laterales distintas. Podemos hallar las derivadas laterales así al ser f continua: composición de valor absoluto y polinomio).

16. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función. (Selectividad)

Solución: Dominio $(0, +\infty)$. Asíntota vertical en x = 0, asíntota horizontal en y = 0 para x tendiendo a mas infinito.

Tiene un máximo relativo (y absoluto) en y = e, y no tiene mínimos relativos ni absolutos:

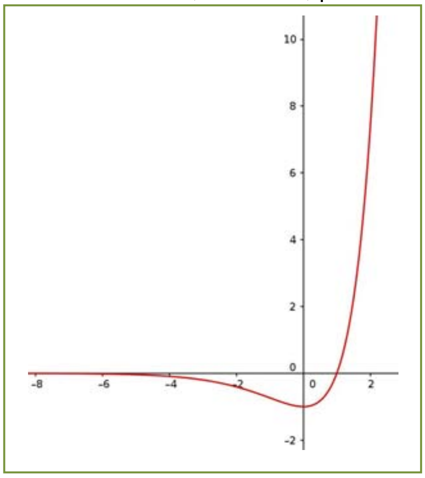


17. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asintóticas. (Selectividad)

Solución: Es decreciente hasta x = 1, donde tiene un mínimo absoluto, creciente a partir de allí. No hay máximos relativos ni absolutos.

Cóncava hasta x = –1, donde tiene un punto de inflexión (–1, –2/e) y convexa a partir de allí.

Tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$ y ninguna para x tendiendo a $+\infty$. No hay asíntotas verticales ni oblicuas.



18. Sea $f: \Re \to \Re$ una función derivable en $\Re$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$

2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$

3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: 1.- Puede ocurrir, por ejemplo $f(x) = x^2(x-1)^2 + 1$ entre 0 y $\frac{1}{2}$

2- Puede ocurrir, por ejemplo $f(x) = x^2(x-1)^2 - \frac{1}{100}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$;

3.- No puede ocurrir, ya que existiría una raíz de $f'(x)$ entre a y b por Rolle.

19. Sea la función $f(x) = x\,|x-1|$ Se pide:

a) Hacer un dibujo aproximado de la función.

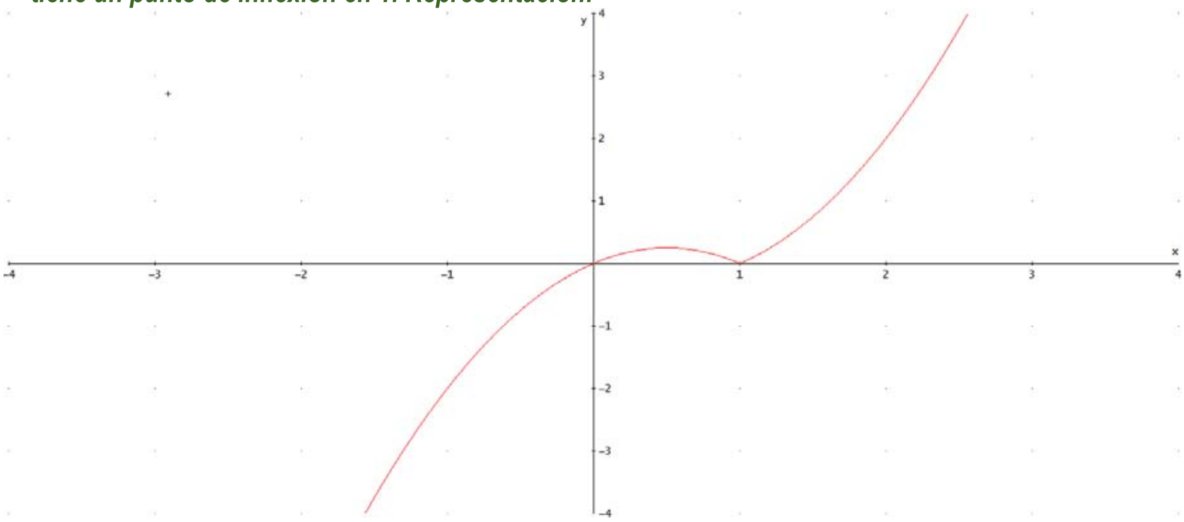
b) Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$. (Selectividad)

Solución: a) $f(x)=\begin{cases} x(1-x)\ si\ x<1 \\ x(x-1)\ si\ x\geq 1\end{cases}=\begin{cases} x-x^2\ si\ x<1 \\ x^2-x\ si\ x\geq 1\end{cases}$; $D(f)=\Re$. *Corte con el eje Y:* $f(0)=0-0^2=0$: $(0,0)$.

Otro corte con el eje X: $f(x)=x|x-1|=0\Rightarrow x=1$: $(1,0)$.

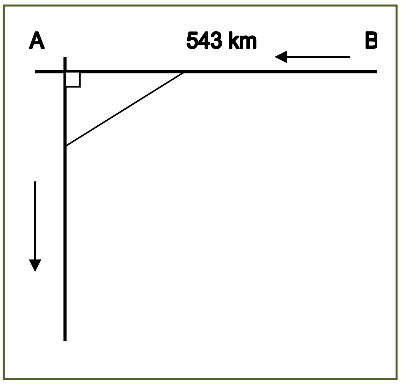
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-x^2)=\lim_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty$ *luego no hay asíntota horizontal.* $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to\infty}(x-1)=\infty$ *luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.*

Si $x<1$, $f'(x)=1-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $f'(x)=1-2x<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. *Si $x>1$,* $f'(x)=2x-1>2-1=1>0$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x<\frac{1}{2}$, *estrictamente decreciente si* $\frac{1}{2}<x<1$ *y estrictamente creciente si x>1, tiene un máximo relativo en* $\frac{1}{2}$ *y un mínimo relativo en 1 (ya que es continua en 1 al ser composición de polinomio y valor absoluto). Si x<1,* $f''(x)=-2<0$ *, si x>1,* $f''(x)=2>0$ *; Entonces f es cóncava si x<1, convexa si x>1 y tiene un punto de inflexión en 1. Representación:*



c) Si x<1, $f'(x)=1-2x\Rightarrow f'_-(1)=1-2=-1$, *si x>1,* $f'(x)=2x-1\Rightarrow f'_+(1)=2-1=1$. *Por tanto f no es derivable en 1 (derivadas laterales distintas. Por eso f puede tener a la vez un mínimo y un punto de inflexión en 1).*

20. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro. (Selectividad)



Solución: *Centramos la circunferencia en el origen, un vértice del triángulo en* $(0,6)$ *y llamamos al inferior izquierda:* (x,y), *que cumplirá* $x^2+y^2=36\Rightarrow x=\sqrt{36-y^2}$.

Entonces $A=\frac{Bh}{2}=\frac{2\sqrt{36-y^2}(6-y)}{2}=\sqrt{36-y^2}(6-y)=f(y)$, *con* $y\in[-6,6]$.

Se cumple que:

$$f'(y)=\frac{-y}{\sqrt{36-y^2}}(6-y)-\sqrt{36-y^2}=-\frac{6y-y^2+36-y^2}{\sqrt{36-y^2}}=0\Leftrightarrow 2y^2-6y-36=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{9\times 36}}{4}=6,-3$$

En los extremos del intervalo el área es 0, luego en -3 *está el máximo. Dimensiones:* $B=2\sqrt{27}$, $h=9$

21. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.

a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.

b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia? (Selectividad)

Solución: a) $f_A(t)=(0,0-v_A(t)t)=(0,-270t)$, $f_B(t)=(543-v_B(t)t,0)=(543-300t,0)$, $d(t)=\sqrt{(543-300t)^2+(270t)^2}$

b) $d'(t)=\dfrac{-300(543-300t)+270^2t}{\sqrt{(543-300t)^2+(270t)^2}}=0\Leftrightarrow\dfrac{181t-181}{\sqrt{(543-300t)^2+(270t)^2}}=0\Leftrightarrow 181t-181=0\Leftrightarrow t=1$, ***con:***

$d'(t)=\dfrac{-300(543-300t)+270^2t}{\sqrt{(543-300t)^2+(270t)^2}}<0\Leftrightarrow 181t-181<0\Leftrightarrow t<1$, ***por lo que f es estrictamente decreciente si:*** $t<1$, ***f es estrictamente creciente si*** $t>1$ ***y f tiene el mínimo absoluto en 1. Hora: 9+1=10***

22. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.

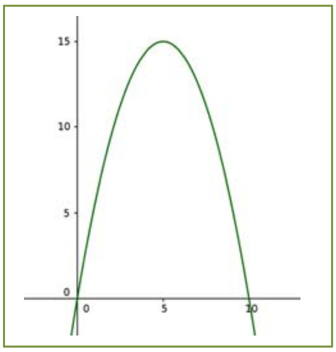
b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.

c) Hallar el valor máximo de dicha función. (Selectividad)

Solución: a) $A(x)=x\left(6-\dfrac{3}{5}x\right)$

b) Realmente el dominio de la función es todos los reales pero obviamente no tienen sentido considerar áreas negativas. Por tanto hay que restringirse al intervalo [0, 10]. La gráfica (mostrando un poco más que el intervalo) es la del margen:

c) El máximo se alcanza en x = 5 que da un área de 15 cm².



23. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima. (Selectividad)

Solución: Hay que hallar el mínimo de $2x^2+4xy$ ***sujeto a*** $x^2y=8\Rightarrow y=\dfrac{8}{x^2}$, ***luego hay que hallar el mínimo de*** $f(x)=2x^2+4x\dfrac{8}{x^2}=2x^2+\dfrac{32}{x}$. ***Se cumple que*** $f'(x)=4x-\dfrac{32}{x^2}=0\Leftrightarrow x=2$, ***con*** $f'(x)=4x-\dfrac{32}{x^2}<0\Leftrightarrow x<2$, ***por lo que f es estrictamente decreciente si*** $x<2$ ***, f es estrictamente creciente si*** $x>2$ ***y f tiene el mínimo absoluto en*** $x=2$. ***Dimensiones:*** $x=2, y=\dfrac{8}{4}=2$ ***(caja cúbica)***

24. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x}+2 & \text{si } x\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$. a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en x = 0? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en x = 0? c) Determinar sus asíntotas. Prueba previa de selectividad 2000

Solución: a) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{senx}{x}+2\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}+2=3=f(0)=k$

b) Para $k=3$ ***(único valor para el que puede ser derivable):***

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{senx}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{senx-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^3}{6}}{x^2}=0$, ***luego f es derivable.***

c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{senx}{x}+2\right)=0+2=2$, ***por lo que y=2 es asíntota horizontal en*** $\pm\infty$ ***y no hay asíntota oblicua.***

Tampoco hay asíntotas verticales porque la única posible es x=0 y no lo es como vimos en a).

25. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función
$D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$ (Selectividad)

Solución: Se cumple que $D'(x)=-2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$***, con:***

$D'(x)=-2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$***, por lo que f es estrictamente decreciente si:***

$x<\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ ***, f es estrictamente creciente si*** $x>\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ ***y f tiene el mínimo absoluto en*** $x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$***.***

26. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.
a) Determinar a, b, c y d. b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos? (Selectividad)

Solución: a) a = 1/3, b = –3/2, c = 2 d = –5/2; b) x = 1 es máximo, x = 2 es mínimo.

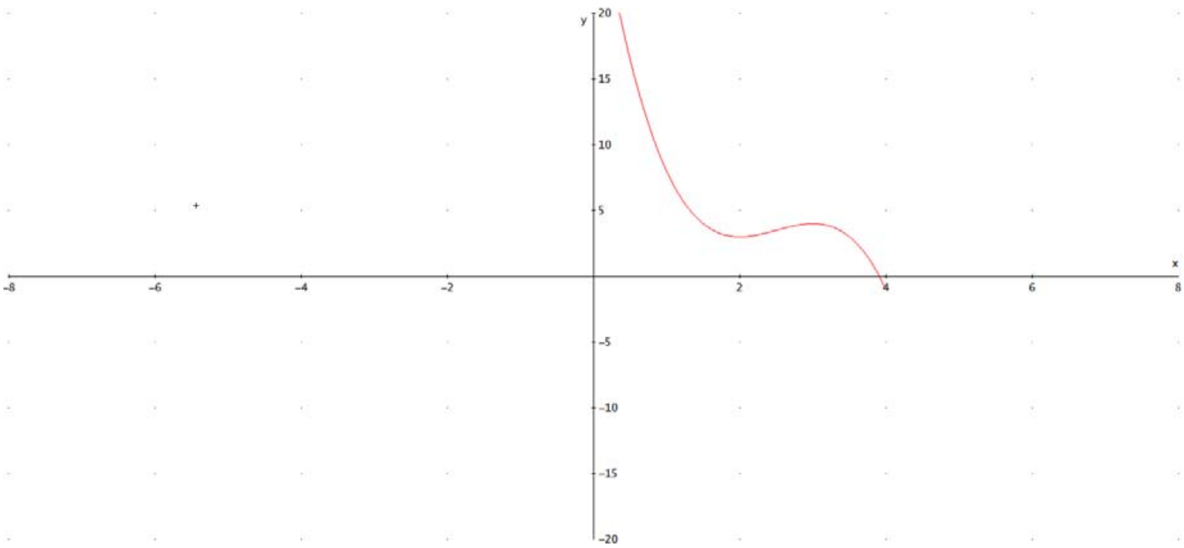
27. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4)
b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado? (Selectividad)

Solución: a) $f'(x)=a(2-x)(x-3)=-ax^2+5ax-6a \Rightarrow f(x)=\int -ax^2+5ax-6a=-a\frac{x^3}{3}+5a\frac{x^2}{2}-6ax+C$

$f'(x)=a(2-x)(x-3)=-ax^2+5ax-6a \Rightarrow f(x)=\int -ax^2+5ax-6a=-a\frac{x^3}{3}+5a\frac{x^2}{2}-6ax+c$ ***(2^a-1^a)***

$a\frac{1}{6}=1 \Rightarrow a=6 \Rightarrow C=3+6\frac{14}{3}=31$

Entonces $f(x)=-6\frac{x^3}{3}+30\frac{x^2}{2}-36x+31=-2x^3+15x^2-36x+31$***. Representación:***



b) 3, ya que si fuera de grado 1 sería una recta oblicua, que no tiene extremos, y si fuera de grado 2 sería una parábola, que tiene un solo extremo (no puede ser de grado 0 ya que sería una constante, luego no podría tener las imágenes 3 y 4).

28. Sea la función $f(x) = 2x + senx$
a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(2x+senx)=2\infty=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+senx)=2(-\infty)=-\infty$***, por lo que no hay asíntota horizontal;*** $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+senx}{x}=2+\lim_{x\to\infty}\frac{senx}{x}=2$ ***;***

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\infty}(2x+senx-2x)=\lim_{x\to\infty} senx$ ***no existe, por lo que no hay asíntota oblicua.***

Tampoco hay verticales porque f es continua en R

b) Se cumple que $f'(x)=2+cosx\geq 2-1=1>0$ ***, por lo que f es estrictamente creciente y no tiene extremos relativos.***

29. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Esbozar la gráfica de la función (Selectividad)

Solución: a) y b) $D(f)=\Re$ ***. Corte con el eje Y:*** $f(0)=0-0^3+0^2+0=0$: $(0,0)$.

Otros cortes con el eje X: $f(x)=x(x+1)(x^2-5x+6)=0 \Rightarrow x=0, x=-1, x=2, x=3$: $(-1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4-4x^3+x^2+6x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \infty$ ***, luego no hay asíntota horizontal.***

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-4x^3+x^2+6x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, ***luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.***

$f'(x)=4x^3-12x^2+2x+6=2(x-1)(2x^2-4x-3)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$;

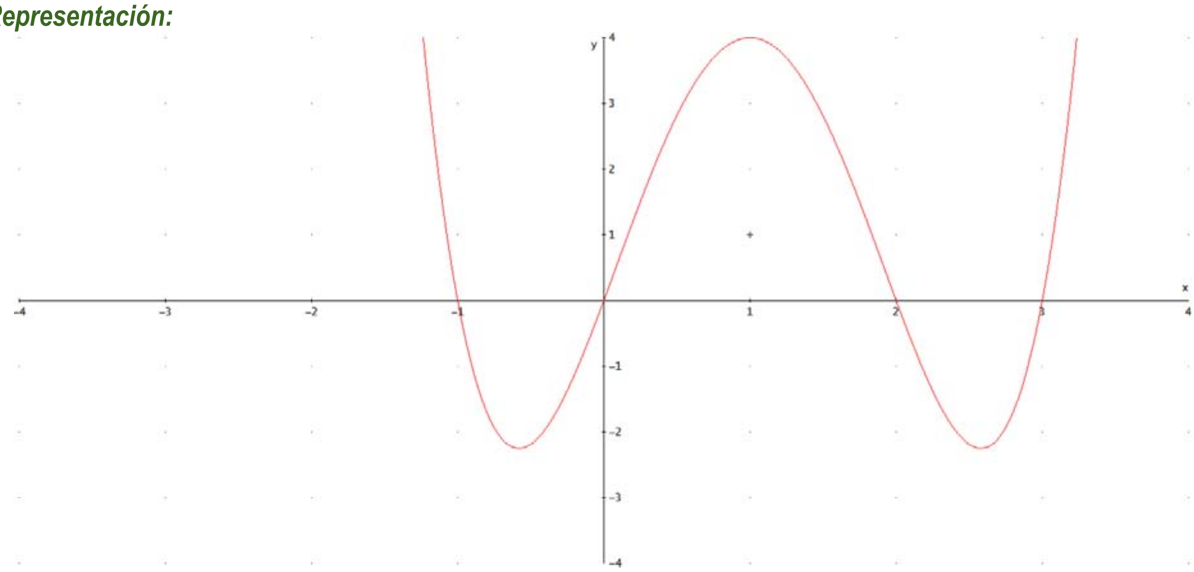
$f'(x)=2(x-1)(2x^2-4x-3)<0 \Leftrightarrow 1<x<\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ ó $x<\frac{2-\sqrt{10}}{2}$.

Entonces f es estrictamente decreciente si $x<\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ ***, estrictamente creciente si*** $\frac{2-\sqrt{10}}{2}<x<1$***, estrictamente decreciente si*** $1<x<\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ ***y estrictamente creciente si*** $x>\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ ***, tiene un mínimo relativo en:*** $\frac{2-\sqrt{10}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ ***y un máximo relativo en 1;***

$f''(x)=12x^2-24x+2=2(6x^2-12x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-24}}{12}=\frac{6\pm\sqrt{30}}{6}$,

$f''(x)=2(6x^2-12x+1)<0 \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{6}<x<\frac{6+\sqrt{30}}{6}$; ***Entonces f es convexa si*** $x<\frac{6-\sqrt{30}}{6}$ ***, cóncava si:*** $\frac{6-\sqrt{30}}{6}<x<\frac{6+\sqrt{30}}{6}$ ***, convexa si*** $x>\frac{6+\sqrt{30}}{6}$ ***, y tiene puntos de inflexión en*** $\frac{6-\sqrt{30}}{6}$, $\frac{6+\sqrt{30}}{6}$.

Representación:



30. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases}(2-x)^3 & si \quad x\le 1\\ x^2 & si \quad x>1\end{cases}$$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.

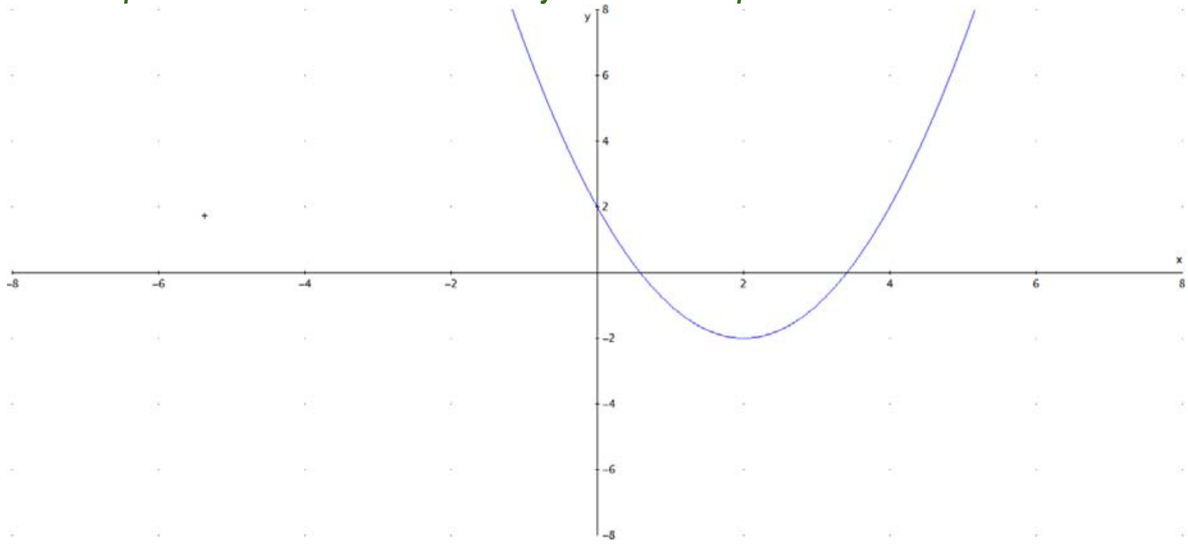
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real. (Selectividad)

Solución: a) Sí. Es continua en toda la recta real; b) No. Falla la derivabilidad en x = 1.

31. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica. b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,- 5)$. (Selectividad)

***Solución:** a)* $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$; $f'(x) = 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < 2$*, estrictamente creciente si* $x > 2$ *y tiene un mínimo relativo en 2. Es una parábola con las ramas hacia arriba y vértice en 2. Representación:*



b) Recta tangente a f en a: $y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 - 4a + 2 + (2a - 4)(x - a)$ *; para que pase por* $(3, -5)$*:*

$-5 = a^2 - 4a + 2 + (2a - 4)(3 - a) = a^2 - 4a + 2 - 2a^2 + 10a - 12 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5, 1$.

Rectas pedidas: $y = 7 + 6(x - 5) = 6x - 23$, $y = -1 - 2(x - 1) = -2x + 1$

32. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:
   i) $P(x)$ es una función par.
   ii) Dos de sus raíces son x = 1, x = $\sqrt{5}$
   iii) $P(0)$ = 5

Se pide: Hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica. (Selectividad)

Solución: Como es par y pasa por (0, 5), será $P(x)=ax^4+bx^2+5$*, con:*

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=a+b+5=0 \\ P(\sqrt{5})=a25+b5+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=-5 \\ 25a+5b=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=-5 \\ 5a+b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1, b=-5-1=-6$$

Entonces $P(x)=x^4-6x^2+5$; $D(f)=\Re$ *. Corte con el eje Y:* $f(0)=0^4-0^2+5=5$ *: (0, 5).*

Cortes con el eje X: $f(x)=x^4-6x^2+5=0 \Rightarrow x^2=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=5,1 \Rightarrow x=\pm1, x=\pm\sqrt{5}$ *:* $(-1,0)$, $(1,0)$ $(-\sqrt{5},0)$, $(\sqrt{5},0)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^4-6x^2+5)=\lim_{x\to\pm\infty} x^4=\infty$ *, luego no hay asíntota horizontal.*

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-6x^2+5}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, *luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.*

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$;

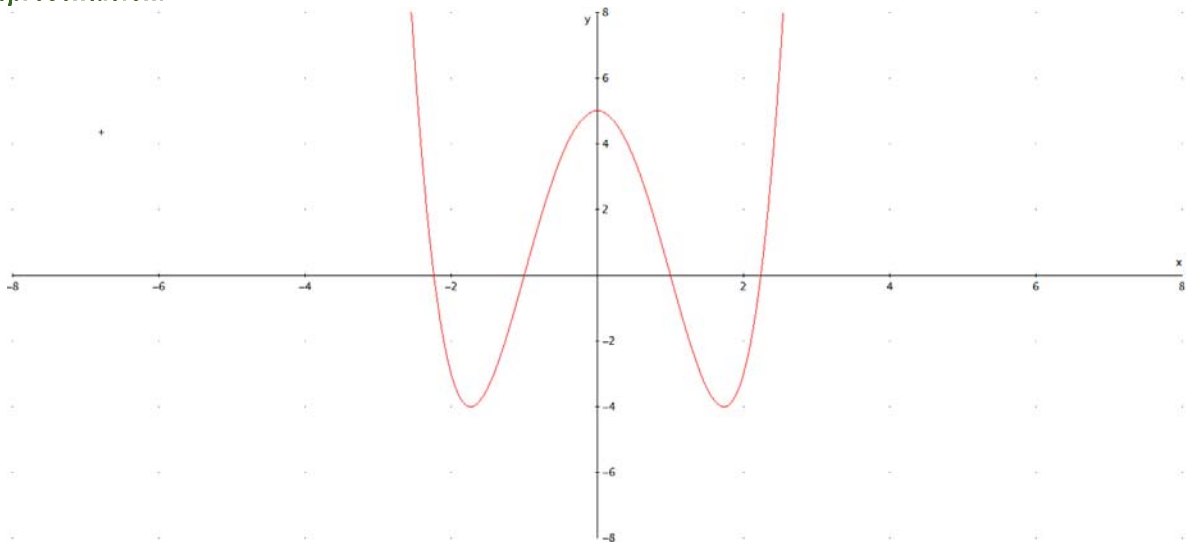
$f'(x)=4x(x^2-3)<0 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{3}\text{ ó } x<-\sqrt{3}$.

Entonces f es estrictamente decreciente si $x<-\sqrt{3}$ *, estrictamente creciente si* $-\sqrt{3}<x<0$*, estrictamente decreciente si* $0<x<\sqrt{3}$ *y estrictamente creciente si* $x>\sqrt{3}$*, tiene un mínimo relativo en:* $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ *y un máximo relativo en 0;*

$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$,

$f''(x)=12(x^2-1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$; *Entonces f es convexa si* $x<-1$*, cóncava si:* $-1<x<1$*, convexa si* $x>1$*, y tiene puntos de inflexión en* -1*, 1.*

Representación:



33. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f. (Selectividad)

Solución: $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$;

$$f''(x)=-2\frac{\left(x^2+3\right)^2-4x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^4}=-2\frac{x^2+3-4x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=0\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

$f''(x)=2\dfrac{3x^2-3}{\left(x^2+3\right)^3}<0\Leftrightarrow -1<x<1$; *Entonces f es convexa si* $x<-1$, *cóncava si:* $-1<x<1$, *convexa si* $x>1$, *y tiene puntos de inflexión en* -1, *1.*

Recta pedida: $y=f(1)+f'(1)(x-1)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{4^2}(x-1)=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}$

34. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2} & si \quad x\geq 2\\ x(x-2) & si \quad x<2\end{cases}$. A) Estudiar su continuidad y su derivabilidad. B) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1). (Selectividad)

Solución: a) Continua en toda la recta real, derivable excepto en x = 2; b) y = (1/3)x.

35. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide: a) Calcular g'(0), siendo $g(x) = f(x+f(0))$. b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$.

(Selectividad)

Solución: a) $g(x)=f(x+1)\Rightarrow g'(x)=f'(x+1)\Rightarrow g'(0)=f'(1)=4$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=4f(0)f'(0)-f'(1)=8$

36. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x)$ = A sen$x$ + B x^2 + C x + D tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es $f''(x)$ = 3 sen$x$ -10. (Selectividad)

Solución: $f(0)=D=4$, $f'(x)=A\cos x+2Bx+C\Rightarrow f'(0)=A\cos 0+C=A+C=0$,

$f''(x)=-A\,\mathrm{sen}x+2B=3\,\mathrm{sen}x-10\Rightarrow A=-3, B=-5, C=-A=3$

37. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
b) Hallar los puntos donde la gráfica de *f* tiene tangente horizontal
c) Representar gráficamente la función

(Selectividad)

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

Solución: a), b) y c) $D(f) = \Re$. ***Corte con el eje Y:*** $f(0) = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0} = 1$***: (0, 1).***

Cortes con el eje X: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x+1 = x$ ***: No hay***

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+1-x}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = 0$ ***, luego*** $y = 0$ ***asíntota horizontal en:*** $\pm\infty$ ***y no existe asíntota oblicua. Tampoco hay asíntotas verticales.***

$f'(x) = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ***: único punto de tangente horizontal***

Si $x < -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \left|\sqrt[3]{x}\right| = -\sqrt[3]{x} < \left|\sqrt[3]{x+1}\right| = -\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{x+1}$ ***: no se cumple.***

Si $-1 < x < 0$***:*** $f'(x) = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \left|\sqrt[3]{x}\right| = -\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} < \left|\sqrt[3]{x+1}\right| = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow -x < x+1 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.

Si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} - \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} < 0 \Leftrightarrow \left|\sqrt[3]{x}\right| = \sqrt[3]{x} < \left|\sqrt[3]{x+1}\right| = \sqrt[3]{x+1}$ ***: se cumple.***

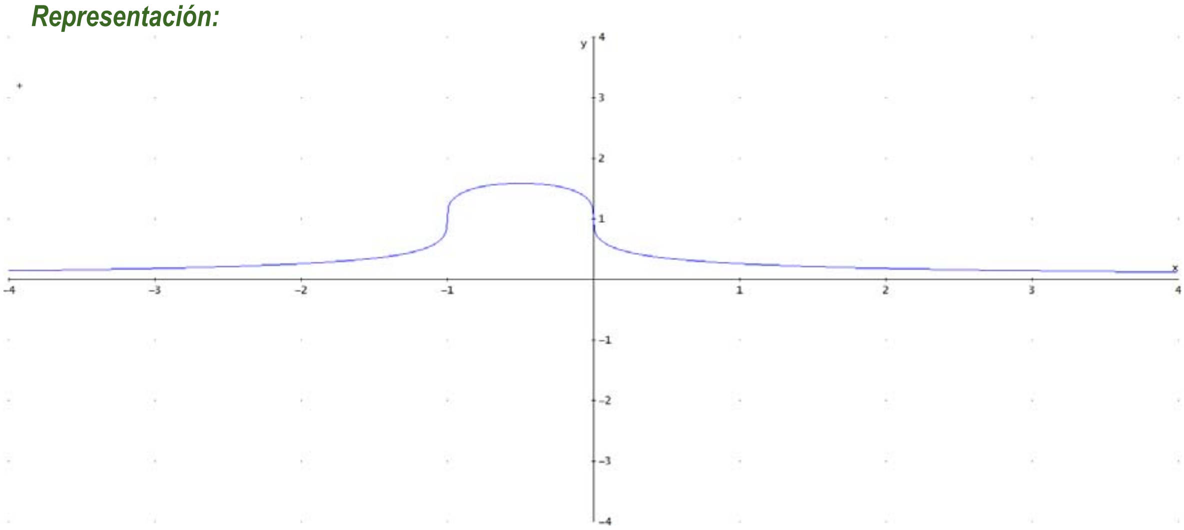
Entonces f es estrictamente creciente si $x < -\dfrac{1}{2}$***, estrictamente decreciente si*** $x > -\dfrac{1}{2}$ ***y f tiene un máximo relativo en*** $-\dfrac{1}{2}$.

$f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^{-\frac{5}{3}} = x^{-\frac{5}{3}}$ ***, imposible.***

Si $x < -1$, $f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{5}{3}} < x^{\frac{5}{3}}$***, no se cumple. Si*** $-1 < x < 0$ ***:***

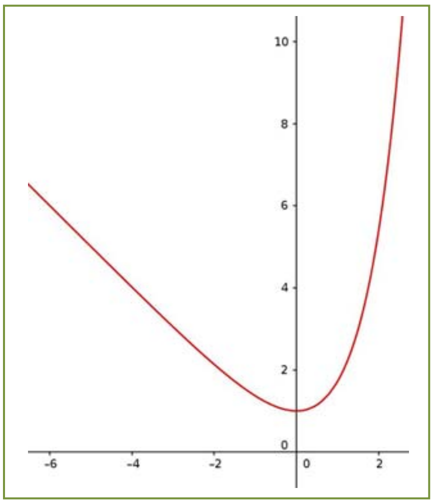
$f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$***, si*** $x > 0$, $f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{5}{3}} < x^{\frac{5}{3}}$ ***: no se cumple.***

Entonces f es convexa si $x < 0$***, cóncava si*** $0 < x < 1$ ***, convexa si*** $x > 1$ ***y no tiene puntos de inflexión.***
Representación:



38. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$. b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición. (Selectividad)

Solución: a) La gráfica del margen:



b) Su dominio son todos los números reales. Sus límites en mas y menos infinito son ambos cero por lo que tiene a como asíntota horizontal en mas y menos infinito.

c) Tiene un mínimo absoluto en x = 0. No hay máximos relativos ni absolutos.

39. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(a, f(a)), donde 0<a<1.

b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$ (Selectividad)

d) 4. Opción B

Solución: a) $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$;

Recta pedida: $y = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 - a^2 - 2a(x-a) = 1 + a^2 - 2ax$

b) Corte con el eje Y: $y = 1 + a^2 - 0 = 1 + a^2$: $(0, 1+a^2)$. ***Corte con el eje X:***

$y = 1 + a^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+a^2}{2a}$: $(\dfrac{1+a^2}{2a}, 0)$;

c)

$$d\left((a, 1-a^2), (0, 1+a^2)\right) = \sqrt{a^2 + (2a^2)^2} = a\sqrt{1+4a^2} = 2d\left((a, 1-a^2), (\frac{1+a^2}{2a}, 0)\right) = 2\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a} - a\right)^2 + (1-a^2)^2} =$$

$$= \frac{1-a^2}{a}\sqrt{1+4a^2} \Leftrightarrow a = \frac{1-a^2}{a} \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

40. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. A) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. B) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1}{2}$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

(Selectividad)

Solución: A) y B) $D(f)=\Re$ *. Corte con el eje Y:* $f(0)=\dfrac{1}{1^2}=1$*: (0, 1).*

Cortes con el eje X: $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0\Rightarrow 2x+1=\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ *:* $(-\dfrac{1}{2},0)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^4}=0$ *, luego* $y=0$ *asíntota horizontal en* $\pm\infty$ *y no existe asíntota oblicua.*

Tampoco hay verticales.

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2+x+1\right)^2-(2x+1)^2\,2\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=\frac{2\left(\left(x^2+x+1\right)-\left(4x^2+4x+1\right)\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow$$ *: x = –1, x = 0.*

Con $f'(x)=\dfrac{-6\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}<0\Leftrightarrow x^2+x>0\Leftrightarrow x<-1\text{ ó } x>0$ *:*

Entonces f es estrictamente decreciente si $x<-1$*, estrictamente creciente si* $-1<x<0$*, estrictamente decreciente si* $x>0$*, f tiene un mínimo relativo en* -1 *y f tiene un máximo relativo en 0.*

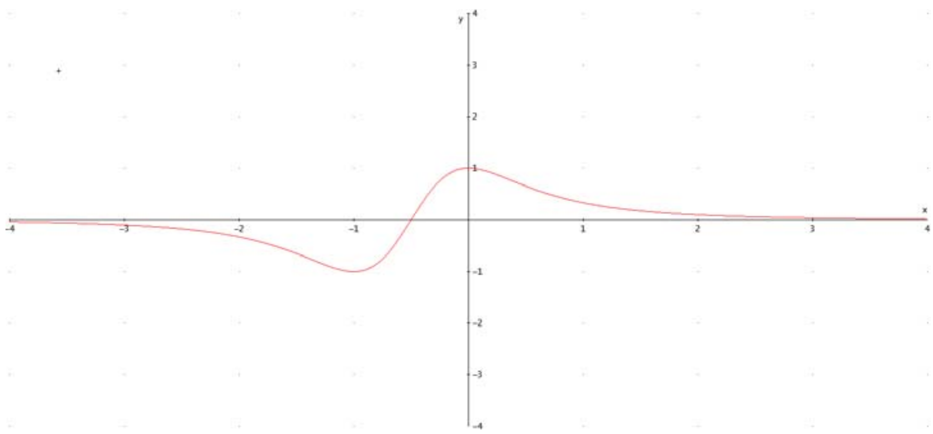
$$f''(x)=-6\frac{(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^3-\left(x^2+x\right)3(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}{\left(x^2+x+1\right)^6}=-6\frac{(2x+1)\left(\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2+x\right)3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=$$

$$=-6\frac{(2x+1)\left(-2x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

(Según enunciado).

Con $$f''(x)=-6\frac{(2x+1)\left(-2x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4}<0\Leftrightarrow(2x+1)\left(-2x^2-2x+1\right)>0\Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow x<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\text{ ó }\frac{-1}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$ *. Entonces f es cóncava si* $x<\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$*, convexa si* $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<x<-\dfrac{1}{2}$*, cóncava si* $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$*, convexa si* $x>\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$*, y tiene los puntos de inflexión indicados en el enunciado.*

Representación:



41. Se considera la función f(x) = ln (1 + x²), donde ln significa Logaritmo Neperiano. A) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad. B) Dibuja la gráfica de f. C) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión. (Selectividad)

Solución: A) y B) $D(f)=\Re$ *. Corte con el eje Y:* $f(0)=ln 1=0$ *(0, 0). Cortes con el eje X:*

$f(x)=ln(1+x^2)=0 \Rightarrow 1+x^2=1 \Rightarrow x=0$ *: (0, 0)*

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ln(x^2+1) = ln(\infty)=\infty$ *, luego no hay asíntota horizontal.*

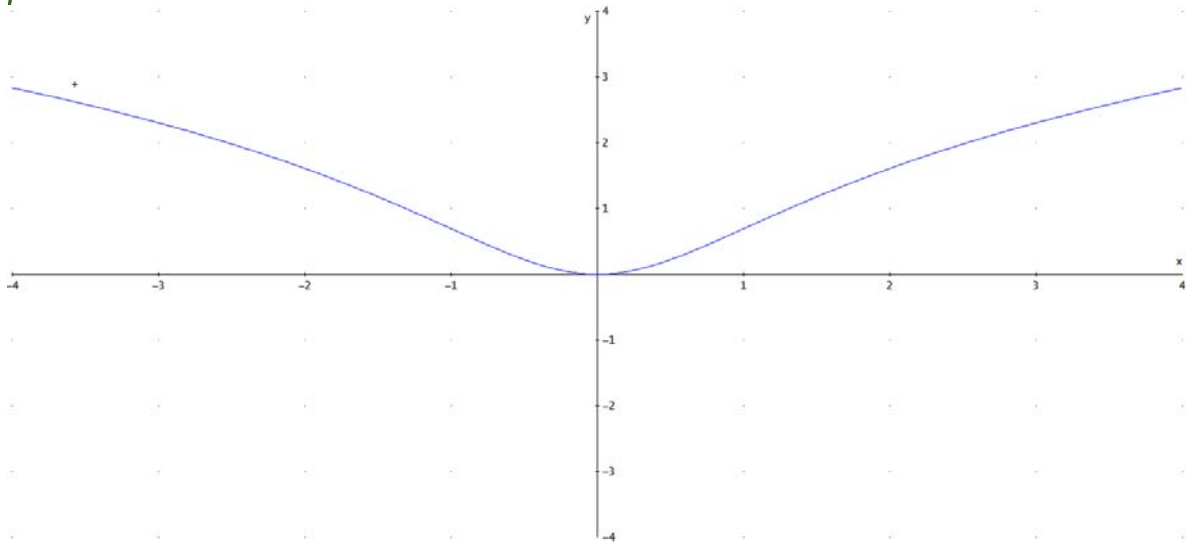
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$ *y no existe asíntota oblicua.Tampoco hay verticales.*

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=0$*, con* $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}<0 \Leftrightarrow x<0$*. Entonces f es estrictamente decreciente si:*

$x<0$*, estrictamente creciente si* $x>0$ *y f tiene un mínimo relativo en 0.*

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$*, con* $f''(x)=2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<0 \Leftrightarrow x<-1 ó x>1$

Entonces f es cóncava si $x<-1$*, convexa si* $-1<x<1$*, cóncava si* $x>1$ *y tiene puntos de inflexión en* ± 1*.*
Representación:



C) Recta tangente en 1: $y=f(1)+f'(1)(x-1)=ln2+\frac{2}{1^2+1}(x-1)=x+ln2-1$*. Recta tangente en* -1 *:*

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1)=ln2-\frac{2}{1^2+1}(x-1)=-x+ln2+1$

42. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x}$ se pide: a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$. B) Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas. C) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima. Selectividad: Septiembre 05. Opción A

Solución: A) Recta tangente: y = (2/a) – x/a2; b)
B) Puntos de corte con los ejes: (2a, 0) con OX y (0, 2/a) con OY.
C) a = 1.

43. Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: $f'(x)=\dfrac{e^x\left(1+e^x\right)^2-e^x2\left(1+e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^4}=e^x\dfrac{1+e^x-2e^x}{\left(1+e^x\right)^3}=0\Leftrightarrow x=0$ ***, con:***

$f'(x)=e^x\dfrac{1-e^x}{\left(1+e^x\right)^3}<0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$. ***Entonces f es estrictamente creciente si:*** $x<0$, ***estrictamente decreciente si*** $x>0$ ***y f tiene un máximo relativo en 0, que será absoluto.***

44. Dada la función: $f(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales. Selectividad:

Solución: $f'(x)=-4\dfrac{\left(1+x^2\right)^2-x\,2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=-4\dfrac{1+x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ***, con:***

$f'(x)=-4\dfrac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}<0\Leftrightarrow x^2<\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ***Entonces f es estrictamente creciente si:*** $x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ***estrictamente decreciente si*** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ***, estrictamente creciente si:*** $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ***f tiene un máximo relativo en*** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ***y un mínimo relativo en*** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ***, que serán absolutos ya que:*** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}=0$.

45. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones: $f(x) = \dfrac{2}{x}$ $g(x) = +\sqrt{x^2-3}$. b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares. (Selectividad)

Solución: a) $f(x)=\dfrac{2}{x}=g(x)=\sqrt{x^2-3}\Rightarrow\dfrac{4}{x^2}=x^2-3\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2}=4,-1\Rightarrow x=2$

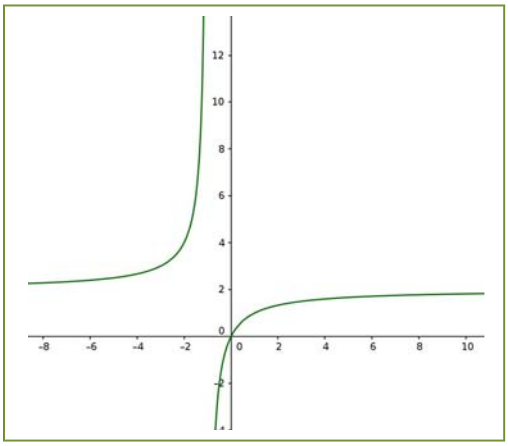
(Nos quedamos con la solución positiva ya que x es no negativo al serlo g): $P=(2,1)$

b) Recta tangente a f: $y=f(2)+f'(2)(x-2)$, ***con*** $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow f'(2)=-\dfrac{2}{2^2}=-\dfrac{1}{2}$ ***, por lo que es:***

$y=1-\dfrac{1}{2}(x-2)=2-\dfrac{1}{2}x$ ***. Recta tangente a g:*** $y=g(2)+g'(2)(x-2)$, ***con:***

$g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}\Rightarrow g'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{2^2-3}}=2$, ***por lo que es*** $y=1+2(x-2)=2x-3$. ***Son perpendiculares porque la pendiente de la primera es menos el recíproco de la pendiente de la segunda.***

46. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. (Selectividad)



Solución: Dominio $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ ***;***

Creciente (estrictamente) en todo su dominio.

Asíntota vertical x = –1, asíntota horizontal y = 2 (tanto hacia infinito como hacia menos infinito).

47. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

(Selectividad)

Solución: $D(f)=\Re-\{2\}$. ***Corte con el eje Y:*** $f(0)=\dfrac{1}{(0-2)^2}=\dfrac{1}{4}$: $(0,\frac{1}{4})$. ***Cortes con el eje X:*** $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}\neq 0$. ***No hay***

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{\infty}=0$ ***, luego*** $y=0$ ***asíntota horizontal en*** $\pm\infty$ ***y no existe asíntota oblicua.***

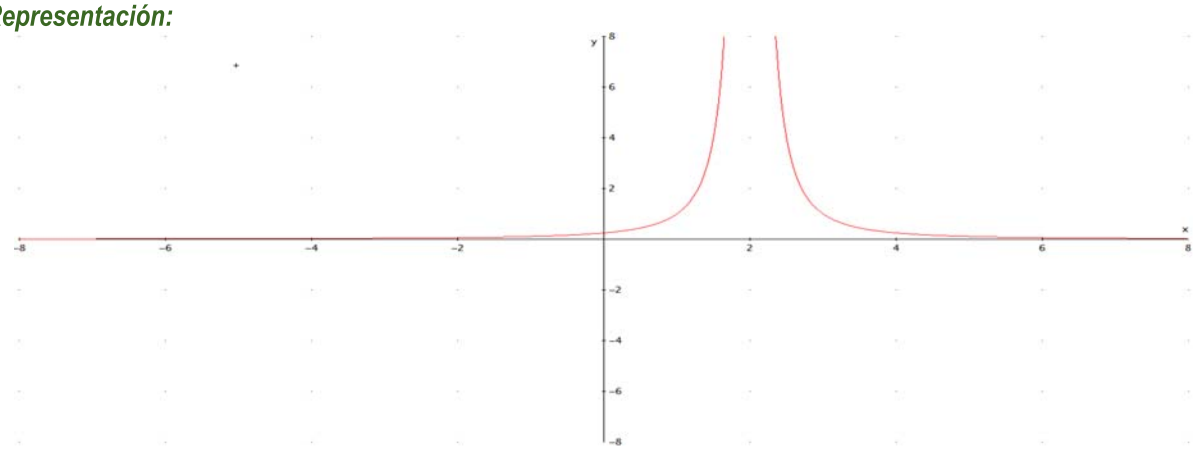
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{+0}=\infty$ ***, luego*** $x=2$ ***asíntota vertical.***

$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^3}<0\Leftrightarrow x>2$. ***Entonces f es estrictamente creciente si:*** $x<2$ ***, estrictamente decreciente si*** $x>2$ ***y f no tiene extremos relativos (cambia de crecimiento en la asíntota vertical).***

$f''(x)=\dfrac{6}{(x-2)^4}>0$

Entonces f es convexa si $x<2$ ***y si*** $x>2$ ***y no tiene puntos de inflexión.***

Representación:



48. a) Calcular los valores de a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cos x & si\ 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si\ x\ge\pi \end{cases}$ sea continua para todo valor de x.

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior. (Selectividad)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=3(0)+2=2=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2a\cos x\right)=2a\Rightarrow a=1$.

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\left(x^2+2a\cos x\right)=\left(\pi^2+2a\cos\pi\right)=\pi^2-2=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+}\left(x^2+b\right)=\pi^2+b\Rightarrow b=-2$

b) Si x < 0, $f(x)=3x+2\Rightarrow f'(x)=3\Rightarrow f'_-(0)=3$***, si x > 0, x cerca de 0:*** $f'(x)=2x-2a\,\mathrm{sen}x\Rightarrow f'_+(0)=0-0=0$. ***Por tanto f no es derivable en 0 (derivadas laterales distintas).***

Si $x<\pi$ ***, x cerca de*** π ***,*** $f(x)=x^2+2a\cos x\Rightarrow f'(x)=2x-2a\,\mathrm{sen}x\Rightarrow f'_-(\pi)=2\pi$ ***, si*** $x>\pi$ ***:***

$f'(x)=2ax\Rightarrow f'_+(\pi)=2a\pi=2\pi$. ***Por tanto f es derivable en*** π ***(derivadas laterales iguales).***

49. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (Selectividad)

Solución: $D(f) = \Re$. Corte con el eje Y: $f(0) = 0e^0 = 0$: (0, 0).

Cortes con el eje X: $f(x) = xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$: (0, 0)

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\,e^{2x} = \infty\,\infty = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = 0$ luego y = 0 es asíntota horizontal en $-\infty$; $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{2x} = e^{\infty} = \infty$ y no existe asíntota oblicua. Tampoco existe asíntota vertical.

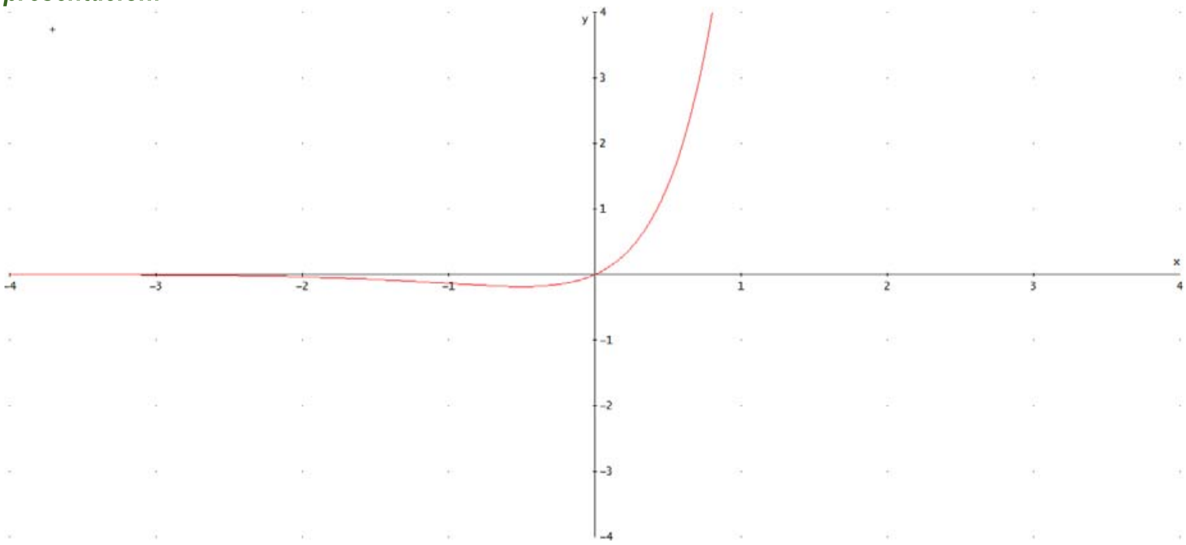
$f'(x) = e^{2x} + 2x\,e^{2x} = e^{2x}(1+2x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, con $f'(x) = e^{2x}(1+2x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < -\frac{1}{2}$, estrictamente creciente si $x > -\frac{1}{2}$ y f tiene mínimo relativo en: $-\frac{1}{2}$

$f''(x) = 2e^{2x}(1+2x) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, con $f''(x) = 4e^{2x}(1+x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Entonces f es cóncava si $x < -1$, convexa si $x > -1$ y tiene punto de inflexión en $x = -1$.

Representación:



50. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. (Selectividad)

Solución: Dominio $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

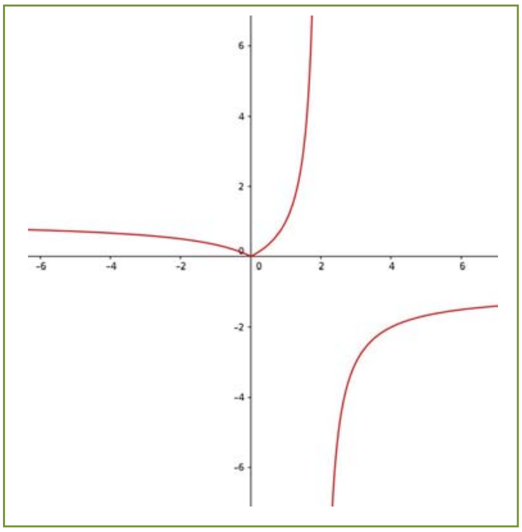
Decreciente (estrictamente) en $(-\infty, 0)$;

Creciente (estrictamente) en $(0,2) \cup (2, \infty)$

Asíntota vertical x = 2;

Para $-\infty$, asíntota horizontal y = 1.

Para $+\infty$, asíntota horizontal y = –1.



51. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

(Selectividad)

Solución: Máximo: (1, 7/2); Mínimo: (–1, 5/2); Punto de inflexión: (0, 3).

52. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = 3$. $y = 3$ asíntota horizontal en ∞ y g no tiene asíntota oblicua en ∞. Como g es continua en R, g no tiene asíntotas verticales. No podemos decir si g tiene asíntota oblicua en $-\infty$

b) $D(g) = \Re$. Corte con el eje Y: $g(0)=2$: (0, 2).

Cortes con el eje X: $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$: $(-1, 0)$ (por el estudio del crecimiento veremos que no puede haber más raíces)

$g'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<2$. Entonces g es estrictamente creciente si $x<0$, estrictamente decreciente si $0<x<2$, estrictamente creciente si $x > 2$, g tiene máximo relativo en 0 y mínimo relativo en 2, donde es positiva.

$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ó $x > 3$. Entonces g es cóncava si $x < 1$, convexa si $1 < x < 3$, cóncava si $x > 3$ y tiene puntos de inflexión en x=1 y en x = 3.

Representación abierta.

53. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, * $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{-\infty}{0}$. $y = 3$ asíntota horizontal en ∞ y g no tiene asíntota oblicua en ∞. Como g es continua en R, g no tiene asíntotas verticales. No podemos decir si g tiene asíntota oblicua en $-\infty$

54. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & si \quad |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide: Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

Sel

Solución: a = –1/16, b = 1/2

55. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x\,(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

(Selectividad)

Solución: Máximo relativo: (1/e², 4/e²); Mínimo relativo y absoluto: (1, 0); No tiene puntos de inflexión.

56. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide: Dibuja la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas. (Selectividad)

Solución: $D(f) = \Re$ ***. Corte con el eje Y:*** $f(0) = 1e^0 = 1$ ***:*** $(0,1)$ ***.***

Cortes con el eje X: $f(x) = e^{-x}\left(x^2 + 1\right) > 0$ ***: No hay***

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$ ***, luego*** $y = 0$ ***es asíntota horizontal en*** $\pm\infty$ ***y no existe asíntota oblicua.***

Tampoco existe asíntota vertical.

$f'(x) = -e^{-x}\left(x^2 + 1\right) + 2xe^{-x} = -e^{-x}\left(x^2 - 2x + 1\right) = -e^{-x}(x-1)^2 \le 0$.

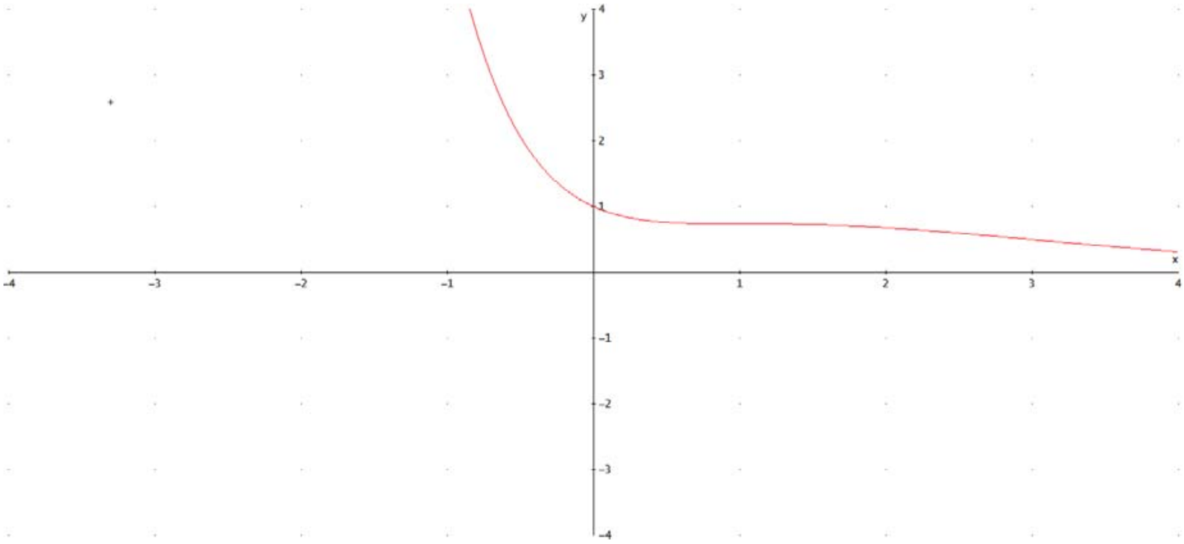
Entonces f es estrictamente decreciente y f no tiene extremos relativos

$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 2x + 1\right) - 2e^{-x}(x-1) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$ ***, con:***

$f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 3\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Entonces f es convexa si $x < 1$ ***, cóncava si*** $1 < x < 3$ ***, convexa si*** $x > 3$ ***, y tiene puntos de inflexión en 1 y 3.***

Representación:



57. Sea: $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{4} & si\ x<\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{7}{12}(1-(x-2)^2) & si\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{cases}$. A) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. B) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$. C) Dibuja la gráfica de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: A) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x)=\dfrac{7}{12}\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\left(1-(x-2)^2\right)=\dfrac{7}{12}\left(1-\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2\right)=\dfrac{7}{16}$.

Por tanto $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=\dfrac{7}{16}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$*, por lo que* f *es continua en* $\dfrac{3}{2}$ *y entonces* f *es continua en R (en los demás puntos es polinómica). Si* $x<\dfrac{3}{2}$, $f(x)=1-\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2x}{4}\Rightarrow f'_-\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{2\frac{3}{2}}{4}=-\dfrac{3}{4}$*, si* $x>\dfrac{3}{2}$*:*
$f(x)=\dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{7}{12}(-2(x-2))\Rightarrow f'_+\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{7}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{12}$*, por lo que f no es derivable en* $\dfrac{3}{2}$ *(derivadas laterales distintas). En los demás puntos f es derivable al ser polinómica.*

B) Si $x<\dfrac{3}{2}$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{4}=0\Leftrightarrow x=0$, *con:* $f'(x)=-\dfrac{2x}{4}<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{3}{2}$, *si* $x>\dfrac{3}{2}$, $f'(x)=\dfrac{7}{12}(-2(x-2))=0\Leftrightarrow x=2$, *con:* $f'(x)=\dfrac{7}{12}(-2(x-2))<0\Leftrightarrow x>2$.

Entonces f es estrictamente creciente si $x<0$*, estrictamente decreciente si* $0<x<\dfrac{3}{2}$*, estrictamente creciente si:* $\dfrac{3}{2}<x<2$*, estrictamente decreciente si* $x>2$*, tiene un máximo relativo en 0, un mínimo relativo en* $\dfrac{3}{2}$ *(ya que f es continua en R) y un máximo relativo en 2*

C) $D(f)=\Re$. *Corte con el eje Y:* $f(0)=1-\dfrac{0^2}{4}=1$*:* $(0,1)$. *Cortes con el eje X: Si* $x<\dfrac{3}{2}$, $f(x)=1-\dfrac{x^2}{4}=0\Leftrightarrow x=-2$*, si* $x>\dfrac{3}{2}$, $f(x)=\dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right)=0\Leftrightarrow x=3$*:* $(-2,0)$, $(3,0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right)=-\infty$ *luego no hay asíntotas horizontales;*

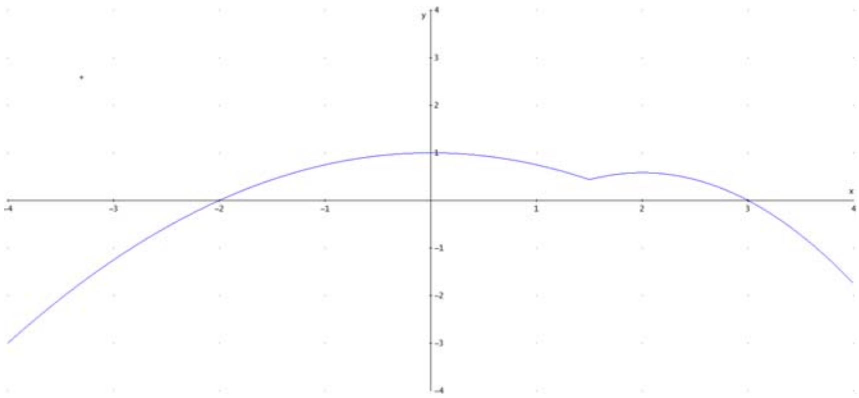
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{x^2}{4}}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{7}{12}\left(1-(x-2)^2\right)}{x}=-\infty$ *y no hay asíntotas oblicuas.*

Tampoco hay asíntotas verticales.

Si $x<\dfrac{3}{2}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{2}<0$, *si* $x>\dfrac{3}{2}$, $f''(x)=-\dfrac{7}{6}<0$

Entonces f es cónvexa si $x<\dfrac{3}{2}$ *y si* $x>\dfrac{3}{2}$ *y no tiene puntos de inflexión.*

Representación:



58. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtén:
   a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
   c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$. (Selectividad)

Solución: a) Creciente en $(-\infty,1)\cup(5,\infty)$ ***, decreciente en (1, 5).***

b) Máximo relativo en x = 1, mínimo relativo en x = 5, punto de inflexión en x = 4.

c) $f(x)=\dfrac{x^5-10x^4+30x^3-40x^2+25x}{5}$

59. Dada la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & si \quad 1+ax>0 \quad y \quad x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$ se pide: a) Halla los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en $x = 0$. b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada. (Selectividad)

Solución: a) Si $a<0$ ***, 0 es un punto aislado del dominio de f, por lo que f es continua en 0 para todo valor de b.***

Si $a\geq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{1+ax}-b}{2x}=\dfrac{a-b}{0}$ ***. Para que el límite sea real ha de ser:***

$a-b=0\Rightarrow a=b$ ***. En ese caso:***

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{1+ax}-a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a^2}{(1+ax)^2}}{2}=-\frac{a^2}{2}=f(0)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=1$$

b) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1+x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{(1+x)^2}+1}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6}=\dfrac{1}{3}$

Por tanto f es derivable en 0.

60. a) Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$. c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$. (Selectividad)

Solución: a) $f'(x)=\dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}=1\Leftrightarrow x^2+1=(1-x^2)^2=1-2x^2+x^4\Leftrightarrow x^4-3x^2=x^2(x^2-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

b) $y=f(0)+f'(0)x=\dfrac{0}{1-0^2}+x=x$ ***;***

c) Como $h(x)=g(x)-x$ ***tiene raíces en 0 y 2, existe al menos un c en el intervalo (0, 2) tal que*** $h'(c)=g'(c)-1=0\Leftrightarrow g'(c)=1$ ***(Rolle)***

61. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$. *a)* Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (-1, f(-1)). b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f (Selectividad)

Solución: a) $f(-1)=(-1)^3+1=0$, $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(-1)=3(-1)^2-1=2$

Recta tangente: $y=f(-1)+f'(-1)(x+1)=2(x+1)=2x+2$ ***;***

b) $x^3-x=2x+2\Leftrightarrow x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow x=-1,\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow x=-1,\ x=2$ ***;***

62. Dada la función $f(x) = e^x + a\,e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a: a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal. (Selectividad)

Solución: a) Hay dos casos. Si a ≤ 0 es siempre creciente y no tiene extremos relativos. Si a >0 es decreciente en (–∞, ln(a)/2) y creciente en (ln(a)/2, +∞) siendo x = ln(a)/2 un mínimo relativo.

b) Sólo tiene una asíntota horizontal cuando a = 0. Es asíntota en –∞ y corresponde a la recta y = 0.

63. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide: a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$. c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$, *con:* $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0 \Leftrightarrow x>0$

Entonces f es estrictamente creciente si $x<0$, *estrictamente decreciente si* $x>0$ *y tiene un máximo relativo en 0.*

b) $f''(x)=-\dfrac{2(x^2+1)^2-4x(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=-\dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *con:*

$f''(x)=-\dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}<0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

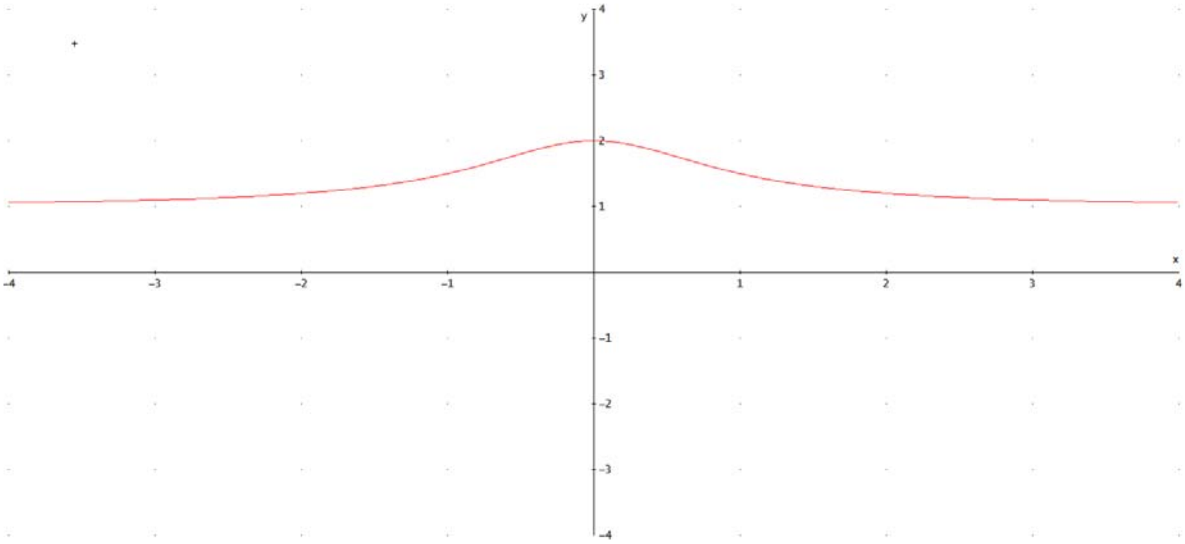
Entonces f es convexa si $x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *f es cóncava si* $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *f es convexa si* $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *y f tiene puntos de inflexión en* $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *c)* $D(f)=\Re$. *Corte con el eje Y:* $f(0)=\dfrac{0^2+2}{1}=2$: $(0,2)$.

Cortes con el eje X: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-2}$ *: No hay*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=1$, *luego* $y=1$ *asíntota horizontal en* $\pm\infty$ *y no hay asíntotas oblicuas.*

Tampoco hay asíntotas verticales.

Representación:



64. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si\quad x>0\\ x+k & si\quad x\le 0\end{cases}$ ($\ln$ significa logaritmo neperiano de x), se pide: a) Determina el valor de k para que la función sea continua en R. b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas. c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 1. (Selectividad)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+k)=0+k=k=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=\dfrac{0}{1}=0$

(Ya que $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}=0$ *).*

b) Corte con el eje Y: $f(0)=k=0$*:* $(0,0)$ *.*

Otros cortes con el eje X: Si $x<0$, $f(x)=x=0\Leftrightarrow x=0$ ***: no hay, si*** $x>0$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x}=0\Leftrightarrow x=1$*:* $(1,0)$

c) $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\frac{1}{x}\right)2^x-\sqrt{x}\ln x\,2^x\ln 2}{2^{2x}}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\ln 1+\sqrt{1}\frac{1}{1}\right)2^1-\sqrt{1}\ln 1\,2^1\ln 2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$

Recta tangente: $y=f(1)+f'(1)x=\dfrac{1}{2}(x-1)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$;

65. Dada la función: $f(x)=\ln(x^2+4x-3)$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:
a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $D(f)=\{x\in\Re\,/\,x^2+4x-3>0\}$; $x^2+4x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+12}}{2}=-2\pm\sqrt{7}$ ***. Entonces:***

$D(f)=\{x\in\Re\,/\,x^2+4x-3>0\}=\left(-\infty,-2-\sqrt{7}\right)\cup\left(-2+\sqrt{7},\infty\right)$;

$\lim\limits_{x\to -2-\sqrt{7}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-\sqrt{7}^-}\ln\left(x^2+4x-3\right)=\ln 0=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+\sqrt{7}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+\sqrt{7}^+}\ln\left(x^2+4x-3\right)=\ln 0=-\infty$

Por tanto $x=-2-\sqrt{7}$, $x=-2+\sqrt{7}$ ***son asíntotas verticales.***

b) $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-3}=0\Leftrightarrow x=-2\notin D(f)$ ***, con:*** $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-3}<0\Leftrightarrow x<-2$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x<-2-\sqrt{7}$ ***, estrictamente creciente si*** $x>-2+\sqrt{7}$

66. Los puntos P (1, 2, 1), Q (2, 1, 1) y A (a, 0, 0) con a > 3, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo. (Selectividad)

Solución: a = 9/2

67. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}$, se pide a) Estudia y obtén las asíntotas. b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad. c) Representa gráficamente la función. (Selectividad)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}=-\infty$ *luego no hay asíntota horizontal;*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+5x-20}{x^2+5x}=3,\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-10x-20}{x+5}=-10$$

Por tanto $y=3x-10$ *es asíntota oblicua;* $\lim\limits_{x\to-5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-5^+}\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}=\dfrac{75-25-20}{+0}=\infty$ *Entonces* $x=-5$ *es asíntota vertical.*

b) $f'(x)=\dfrac{(6x+5)(x+5)-(3x^2+5x-20)}{(x+5)^2}=\dfrac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-60}}{2}=-5\pm\sqrt{10}$, *con*

$$f'(x)=\frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2}<0\Leftrightarrow -5-\sqrt{10}<x<-5+\sqrt{10}$$

Entonces f es estrictamente creciente si $x<-5-\sqrt{10}$, *estrictamente decreciente si* $-5-\sqrt{10}<x<-5+\sqrt{10}$, *estrictamente creciente si* $x>-5+\sqrt{10}$, *tiene un máximo relativo en* $-5-\sqrt{10}$ *y un mínimo relativo en* $-5+\sqrt{10}$.

$f''(x)=3\dfrac{(2x+10)(x+5)^2-(x^2+10x+15)2(x+5)}{(x+5)^4}=3\dfrac{(2x+10)(x+5)-(x^2+10x+15)2}{(x+5)^3}=\dfrac{60}{(x+5)^3}$ *Con*

$$f''(x)=\frac{60}{(x+5)^3}<0\Leftrightarrow x<-5$$

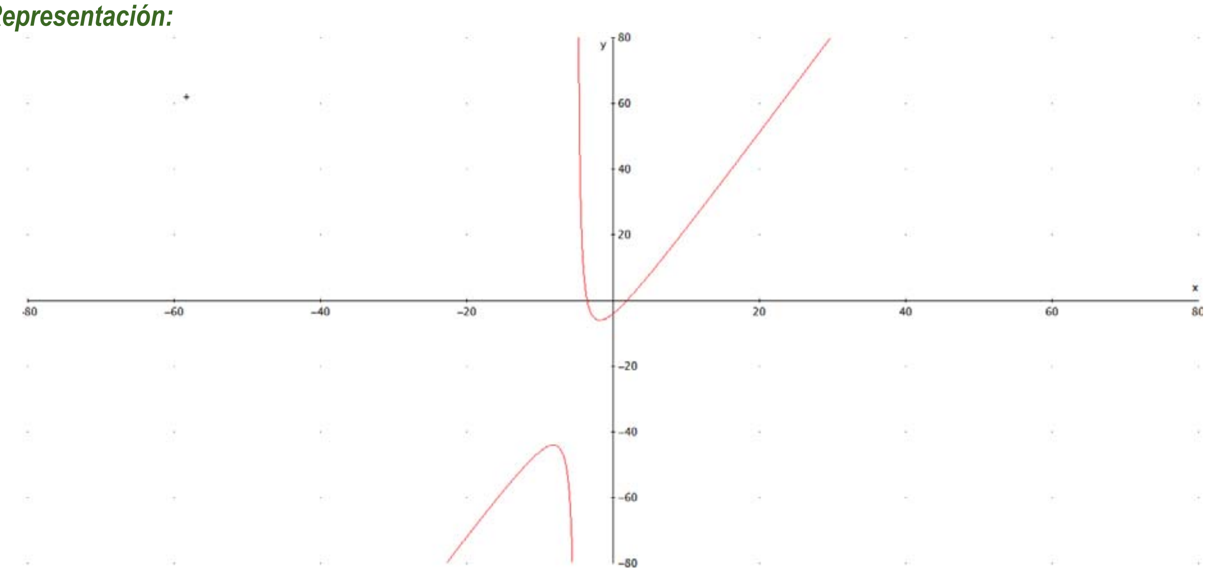
Entonces f es cóncava si $x<-5$, *f es convexa si* $x>-5$ *y f no tiene puntos de inflexión*

c) $D(f)=\Re-\{-5\}$. *Corte con el eje Y:* $f(0)=\dfrac{-20}{5}=-4$ *:* $(0,-4)$.

Cortes con el eje X: $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-20}{x+5}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+240}}{6}=\dfrac{-5\pm\sqrt{265}}{6}$ *:*

$\left(\dfrac{-5+\sqrt{265}}{6},0\right)$, $\left(\dfrac{-5-\sqrt{265}}{6},0\right)$

Representación:



68. Dada la función $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide: Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f.

(Selectividad)

Solución: $f'(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{3-x}{(x+1)^3}=0 \Leftrightarrow x=3$ ***, con:***

$f'(x)=\dfrac{3-x}{(x+1)^3}<0 \Leftrightarrow 3-x<0, x+1>0 \text{ ó } 3-x>0, x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ ó } x>3$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x<-1$, estrictamente creciente si $-1<x<3$, estrictamente decreciente si $x>3$ y tiene un máximo relativo en 3

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{(x+1)^2}=0$ ***, luego $y=0$ es asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no hay asíntota oblicua;***

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{+0}=-\infty$ ***Entonces $x=-1$ es asíntota vertical.***

69. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$

(Selectividad)

Solución: $D(f)=\{x\in\Re \,/\, 12-3x^2\geq 0\}=[-2,2]$; $f'(x)=\dfrac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}=\dfrac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}}=0\Leftrightarrow x=0$

$f(\pm 2)=\sqrt{12-12}=\sqrt{0}=0$, $f(0)=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. ***Entonces el máximo absoluto es $2\sqrt{3}$ (se alcanza en 0), el mínimo absoluto es 0 (se alcanza en ± 2)***

70. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justifica la respuestas indicando qué teoremas usas. (Selectividad)

Solución: La derivada de la función es y' = 20x⁴ + 3, por lo que la función es estrictamente creciente. Eso significa que de existir una solución, debe ser única.

Por otro lado, la función tiende a infinito cuando x tiende a infinito y a menos infinito cuando x tiende a menos infinito, cualquiera que sea m.

Eso significa que, para cualquier m, hay al menos un valor positivo y un valor negativo. Por el teorema de Bolzano, existe una raíz. Y ya hemos visto que es única.

71. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^4+1}{x^3}$, se pide: a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo. b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$. c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$. (Selectividad)

Solución: *a)* $f'(x)=\dfrac{4ax^3x^3-(ax^4+1)3x^2}{x^6}=\dfrac{ax^4-3}{x^4}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{a-3}{x^4}=0\Leftrightarrow a=3$ *, con:* $f'(x)=\dfrac{3(x^4-1)}{x^4}<0\Leftrightarrow -1<x<1$*, por lo que f es estrictamente creciente si* $x<-1$*, f es estrictamente decreciente si* $-1<x<1$*, f es estrictamente creciente si* $x>1$ *, f tiene un máximo relativo en* -1 *y un mínimo relativo en 1;*

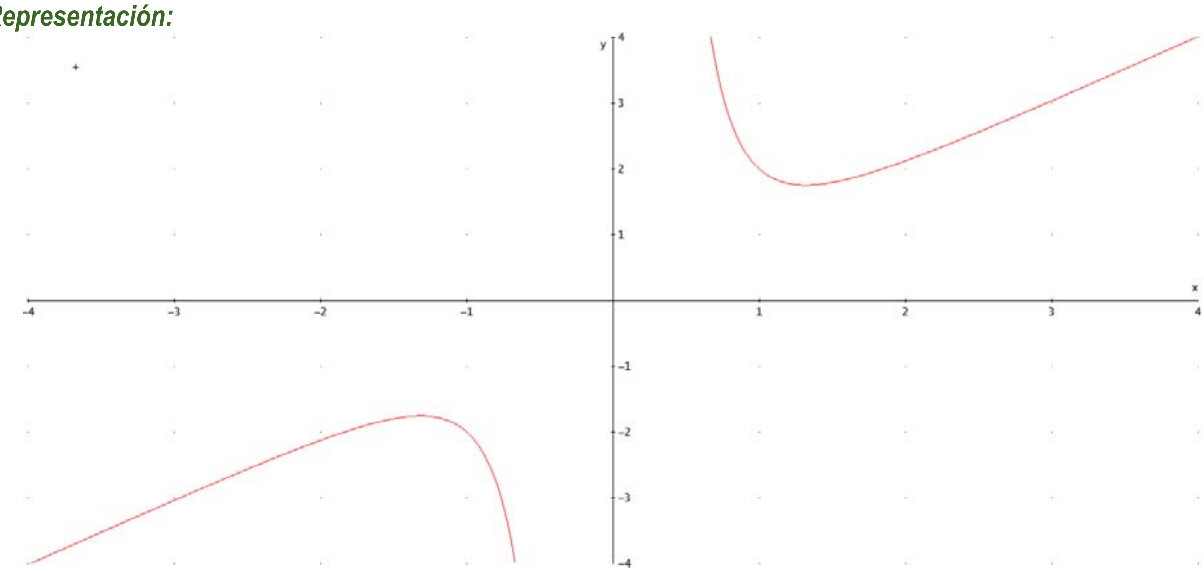
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3}=-\infty$ *,* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3}=\infty$ *luego no tiene asíntotas horizontales;* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+1}{x^4}=1$*,* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^4+1}{x^3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ *e* $y = x$ *es asíntota oblicua;*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+1}{x^3}=\dfrac{1}{+0}=\infty$ *Entonces* $x=0$ *es asíntota vertical;*

c) $D(f)=\Re-\{0\}$*. Corte con el eje Y: No hay (no está definida en 0). Cortes con el eje X:* $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3}=0\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{-1}\notin\Re$*: No hay.* $f'(x)=\dfrac{4x^3x^3-(x^4+1)3x^2}{x^6}=\dfrac{x^4-3}{x^4}=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{3}$ *, con:*

$f'(x)=\dfrac{x^4-3}{x^4}<0\Leftrightarrow -\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}$ *, por lo que f es estrictamente creciente si* $x<-\sqrt[4]{3}$ *, f es estrictamente decreciente si* $-\sqrt[4]{3}<x<\sqrt[4]{3}$ *, f es estrictamente creciente si* $x>\sqrt[4]{3}$ *, f tiene un máximo relativo en* $-\sqrt[4]{3}$ *y un mínimo relativo en* $\sqrt[4]{3}$ *.* $f''(x)=\dfrac{4x^3x^4-(x^4-3)4x^3}{x^8}=\dfrac{12}{x^5}$ *, con:* $f''(x)=\dfrac{12}{x^5}<0\Leftrightarrow x<0$ *, por lo que f es cóncava si* $x<0$ *, f es convexa si* $x>0$ *y no tiene puntos de inflexión (cambia de concavidad en la asíntota vertical).*

Representación:



72. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}$, se pide: a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$. b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales. c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (Selectividad)

***Solución:* a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}=\infty$ *luego no tiene asíntotas horizontales;*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+x-7}{x^2+3x}=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-5x-7}{x+3}=-5$ *y:*

$y=2x-5$ *es asíntota oblicua;* $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}=\dfrac{8}{+0}=\infty$. *Entonces* $x=-3$ *es asíntota vertical;*

b) $f'(x)=\dfrac{(4x+1)(x+3)-\left(2x^2+x-7\right)}{(x+3)^2}=\dfrac{2\left(x^2+6x+5\right)}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2}=-1,-5$, *con:*

$f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+6x+5\right)}{(x+3)^2}<0\Leftrightarrow -5<x<-1$, *por lo que f es estrictamente creciente si* $x<-5$, *f es estrictamente decreciente si* $-5<x<-1$, *f es estrictamente creciente si* $x>-1$, *f tiene un máximo relativo en* -5 *y un mínimo relativo en* -1 *;*

c) $D(f)=\Re-\{-3\}$. *Corte con el eje Y:* $f(0)=\dfrac{2\,0^2+0-7}{0+3}=-\dfrac{7}{3}$ *:*

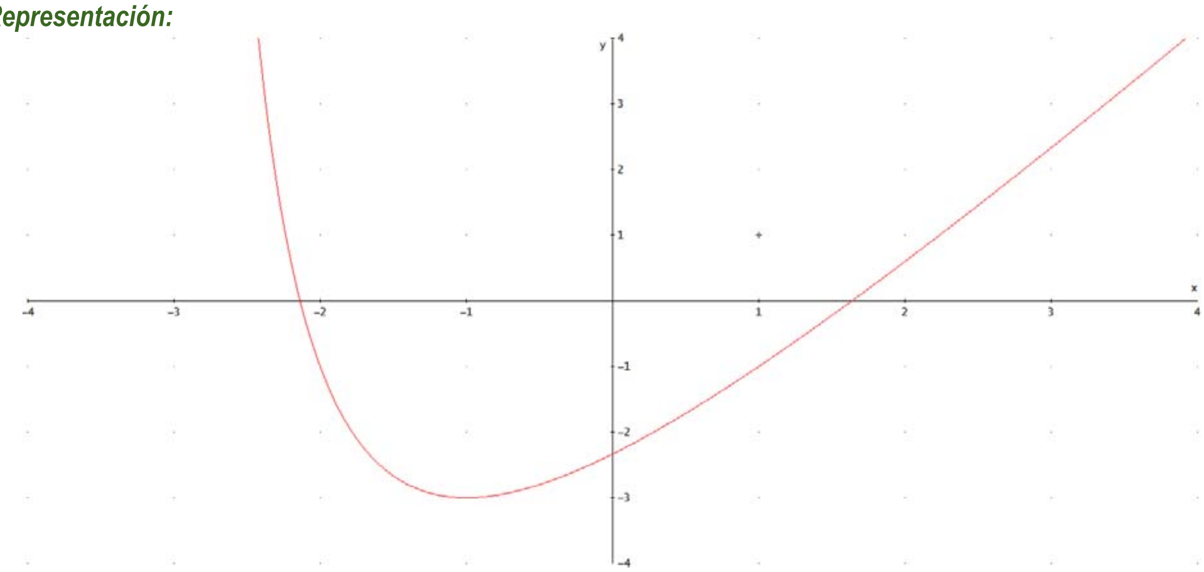
$\left(0,-\dfrac{7}{3}\right)$. *Cortes con el eje X:* $f(x)=\dfrac{2x^2+x-7}{x+3}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+56}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{57}}{2}$ *:*

$\left(\dfrac{-1-\sqrt{57}}{2},0\right)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2},0\right)$.

$f''(x)=2\dfrac{(2x+6)(x+3)^2-\left(x^2+6x+5\right)2(x+3)}{(x+3)^4}=2\dfrac{(2x+6)(x+3)-\left(x^2+6x+5\right)2}{(x+3)^3}=\dfrac{16}{(x+3)^3}$, *con:*

$f''(x)=\dfrac{16}{(x+3)^3}<0\Leftrightarrow x<-3$, *por lo que f es cóncava si* $x<-3$, *f es convexa si* $x>-3$ *y no tiene puntos de inflexión (cambia de concavidad en la asíntota vertical).*

Representación:



73. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2-9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada (Selectividad)

Solución: $D(f)=\{x\in\Re / x^2-9x+14\geq 0\}$; $x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2}=2,7$. ***Entonces:***

$D(f)=\{x\in\Re / x^2-9x+14\geq 0\}=(-\infty,2]\cup[7,\infty)$; ***f es derivable en:***

$\{x\in\Re / x^2-9x+14>0\}=(-\infty,2)\cup(7,\infty)$

74. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes: El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$. La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$. (Selectividad)

Solución: a = 2, b = 1, c = 3

75. Hallar a; b; c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión. (Selectividad)

Solución: $f(1)=1^3+a+b+c=2 \Rightarrow a+b+c=1$ $f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(1)=3+2a+b=0$,

$f''(x)=6x+2a \Rightarrow f''(3)=18+2a=0 \Rightarrow a=-9$, $b=-3-2a=15$, $c=1-a-b=-5$.

Es un máximo relativo porque $f''(1)=6+2a=-12<0$ ***y es un punto de inflexión porque*** $f'''(x)=6\neq 0$

76. Dadas las funciones $f(x)=\frac{3x+ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x)=(ln\,x)^x$, $h(x)=sen(\pi-x)$ se pide: a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. b) Calcular $g'(e)$. c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $D(f)=\{x\in\Re / x+1>0, x^2-3>0\}=(\sqrt{3},\infty)$;

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x+1}}{1}=3;$$

b) $ln(g(x))=x\,ln(ln(x)) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=ln(ln(x))+x\frac{\frac{1}{x}}{ln(x)} \Rightarrow g'(x)=\left(ln(ln(x))+\frac{1}{ln(x)}\right)ln(x)^x$;

c) $h(x)=sen(\pi-x)=0 \Leftrightarrow \pi-x=0 \Leftrightarrow x=\pi$: $(\pi,0)$;

$h'(x)=-cos(\pi-x)=0 \Leftrightarrow \pi-x=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$: $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$:

Son extremos relativos porque son el valor máximo y mínimo que puede alcanzar un seno.

77. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si\ x\leq 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ x>3 \end{cases}$, se pide a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A? b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$. c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [4, 8]. (Selectividad)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(3x+A)=9+A=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-4+10x-x^2)=-4+30-9=17 \Rightarrow A=8$.

Si $x<3$, $f(x)=3x+A \Rightarrow f'(x)=3 \Rightarrow f'_-(3)=3$.

Si $x>3$, $f(x)=-4+10x-x^2 \Rightarrow f'(x)=10-2x \Rightarrow f'_+(3)=4$, ***luego f no es derivable en 3 (derivadas laterales distintas);***

b) Si $x<3$, $f'(x)=3\neq 0$. ***Si*** $x>3$, $f'(x)=10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$;

c) $f(4)=-4+40-4^2=20$, $f(5)=-4+50-25=21$, $f(8)=-4+80-64=12$, ***luego el máximo absoluto es 21 (se alcanza en 5), el mínimo absoluto es 12 (se alcanza en 8)***

78. Dada la función $f(x)=x^2 sen\,x$, se pide:

a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Selectividad:

Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución: a) No tiene ninguna solución. Quiere decir $x^2sen(x) = 0$, y eso sólo se cumple si x = 0 o sen(x) = 0, y ninguna de las dos funciones se anula en dicho intervalo; b) $y = x/\pi^2 - 1/\pi$.

79. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x<0\\ a & si \quad x=0\\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0\end{cases}$; se pide: a) Determinar el valor de *a* para que *f* sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de *a*, estudiar la derivabilidad de *f* en $x = 0$. c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$. Selectividad

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2+3x}{x-1}=0=f(0)=a$ ***. Para ese valor es continua ya que:*** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$ ***;***

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+3}{x-1}=-3\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$ ***, luego f no es derivable en 0;***

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x-1}=-\infty$ ***,*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$ ***luego*** $y=1$ ***asíntota horizontal;***

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^2-x}=2$ ***,*** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x-1}=5$ ***y:***

$y=2x+5$ ***es asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;***

80. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. (Selectividad)

Solución: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}=-\infty$ ***,*** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}=\infty$ ***luego no hay asíntotas horizontales;***

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-2)^2}=1$ ***,*** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+4x}{(x-2)^2}=2$ ***y:***

$y=x+2$ ***es asíntota oblicua.*** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}=\infty$ ***, luego*** $x=2$ ***es asíntota vertical;***

b) No se puede hallar la tangente a f en 2 porque la función no está definida en ese punto

81. Dada la función $f(x) = 2\cos^2 x$ se pide: a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (Selectividad)

Solución: a) $f'(x)=4\cos x\,(-senx)=0\Leftrightarrow x=0$ ***;*** $f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ ***,*** $f(0)=2\cos^2 0=2$ ***, luego el máximo absoluto es 2 (se alcanza en 0), el mínimo absoluto es 0 (se alcanza en*** $\pm\dfrac{\pi}{2}$ ***)***

b) $f'(x)=-2\,sen(2x)\Rightarrow f''(x)=-4\cos(2x)=0\Leftrightarrow 2x=\pm\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}$ ***, con:***

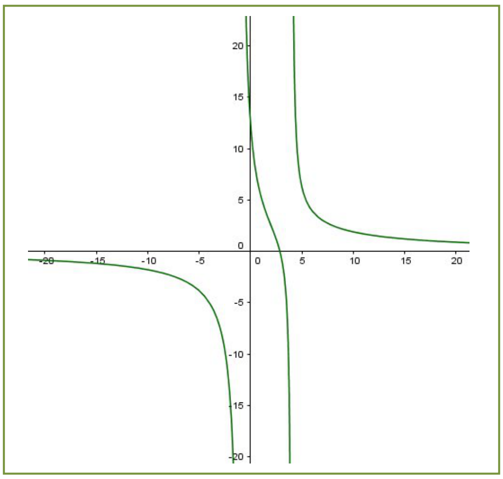
$f'''(x)=8\,sen(2x)\Rightarrow f'''\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)=8\,sen\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm 8\neq 0$ ***, luego f tiene punto de inflexión en*** $\pm\dfrac{\pi}{4}$ ***;***

82. Dada la función $f(x)=\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{27}{2x+2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión. c) Esboza la gráfica de la función.

(Selectividad)

Solución: a) Asíntotas verticales: x = 4 y x = –1; Asíntota horizontal: y = 0 en +∞ y –∞; b) La función es decreciente en todo su dominio, es decir, en (–∞, –1) ∪ (–1, 4) ∪ (4 ,+∞); Tiene un punto de inflexión en x = 2

c) Gráfica al margen.



83. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, se pide: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 0.Selectividad:

Solución: $f'(x)=\dfrac{x^2+1-x\,2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1$. *Recta tangente:* $y=f(0)+f'(0)x=x$;

84. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, se pide: a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Sel

Solución: a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, *luego no existe el:* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

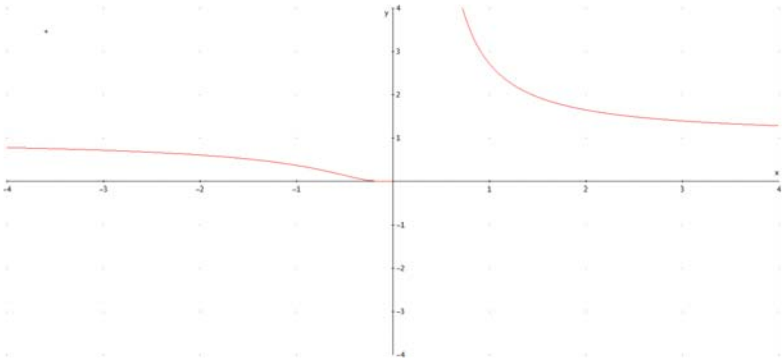
b) $D(f)=\Re-\{0\}$. *Cortes con el eje X:* $f(x)=e^{\frac{1}{x}}>0$*: No hay .*

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, $y=1$ *asíntota horizontal en* $\pm\infty$ *y no hay asíntota oblicua;*

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$, $x=0$ *es asíntota vertical;*

$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)<0$, *por lo que f es estrictamente decreciente si* $x<0$ *y si* $x>0$ *y no tiene extremos relativos;* $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x^3}\right)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x+1}{x^4}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$, *con:* $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x+1}{x^4}<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}$, *por lo que f es cóncava si* $x<-\dfrac{1}{2}$, *f es convexa si* $x>-\dfrac{1}{2}$ *y tiene punto de inflexión en* $x=-\dfrac{1}{2}$.

Representación:



85. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6}{x-1} & si\ x<0\\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$, se pide: a) Estudiar su continuidad. b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas. c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica. Selectividad:

Solución: a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+6}{x-1}=-6\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+1}=-1$ ***. Por tanto f no es continua en 0. En los demás puntos es continua al ser el cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.***

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=-\infty$ ***,*** $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{x+1}=\infty$ ***luego no hay asíntotas horizontales;***

$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=2$ ***,*** $\lim_{x\to -\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+6}{x-1}=2$ ***y:***

$y=2x+2$ ***es asíntota oblicua en*** $-\infty$ ***;***

$\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{x^2+x}=1$ ***,*** $\lim_{x\to \infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to \infty}\frac{-x-1}{x+1}=-1$ ***y:***

$y=x-1$ ***es asíntota oblicua en*** ∞ ***(se ve también porque, si*** $x>0$ ***,*** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$ ***)***

No hay asíntotas verticales; c) $D(f)=\Re$ ***. Cortes con el eje Y:*** $f(0)=-\frac{1}{1}=-1$ ***:*** $(0,-1)$***. Cortes con el eje X:***

Si $x<0$ ***,*** $f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}\neq 0$ ***, si*** $x>0$ ***,*** $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=1$ ***:*** $(1,0)$***.***

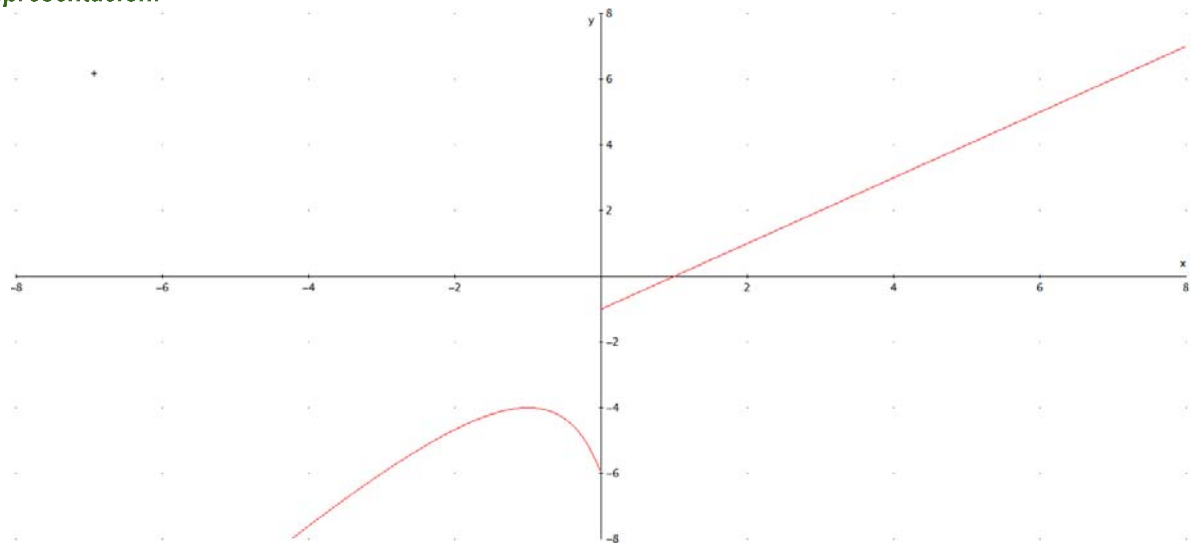
Si $x<0$ ***,*** $f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+6)}{(x-1)^2}=2\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm 4}{2}=3,-1$***, con:***

$f'(x)=2\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}<0\Leftrightarrow -1<x<0$ ***. Si*** $x>0$ ***,*** $f(x)=x-1\Rightarrow f'(x)=1>0$ ***.***

Por tanto f es estrictamente creciente si $x<-1$***, f es estrictamente decreciente si*** $-1<x<0$ ***, f es estrictamente creciente si*** $x>0$ ***, f tiene un máximo relativo en*** -1 ***y un mínimo relativo en 0; Si*** $x<0$ ***:***

$f''(x)=2\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4}=2\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-3)2}{(x-1)^3}=\frac{16}{(x-1)^3}<0\Leftrightarrow x<1$ ***, Por tanto f es cóncava si*** $x<0$ ***, y si*** $x>0$ ***(en este caso es una recta) y no tiene puntos de inflexión.***

Representación:



86. a) Sea f: R → R una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$: (Selectividad)

Solución: ***f(–2) = –16, f '(–2) = 16, f "(–2) = 0***

87. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}$, se pide: a) Determina el dominio de f y sus asíntotas. b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: ***a)*** $D(f) = \Re - \{-4, -1\}$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}\right) = 1$, ***luego*** $y = 1$ ***es asíntota horizontal en*** $\pm\infty$ ***y no hay asíntotas oblicuas;***

$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}\right) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x+4}\right) = \infty$, ***luego*** $x = -4$, $x = -1$ ***son asíntotas verticales;***

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{4}{(x+4)^2} = \dfrac{4(x+1)^2 - (x+4)^2}{(x+1)^2(x+4)^2} = \dfrac{(2(x+1)-(x+4))(2(x+1)+x+4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, ***con:***

$f'(x) = 3\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x+4)^2} < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Por tanto f es estrictamente creciente si $x < -2$, ***f es estrictamente decreciente si*** $-2 < x < 2$, ***f es estrictamente creciente si*** $x > 2$, ***f tiene un máximo relativo en*** -2 ***y un mínimo relativo en 2;***

88. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5senx}{2x} + \dfrac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$, se pide: a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua. b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a. (Selectividad)

Solución: ***a)*** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{5\,senx}{2\,x} + \dfrac{1}{2} = 3 = f(0) = a$. ***Para ese valor es continua ya que:***

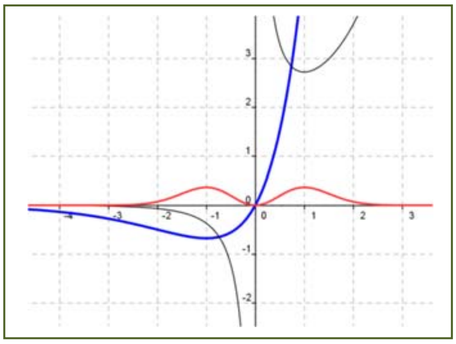
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\,e^x + 3) = 3$;

CAPÍTULO 9: REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Estudia las diferencias del comportamiento en el infinito de las funciones: $f(x)=x^2e^{-x^2}$, $g(x)=5x\cdot e^{x-1}$ y $h(x)=\frac{e^x}{x}$

Solución:



La función $f(x)=x^2e^{-x^2}$ tiende a 0 tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$$

La función $g(x)=5x\cdot e^{x-1}$ tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$ y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 5xe^{x-1}=+\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 5xe^{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{e^{-x+1}}=0$$

La función $h(x)=\frac{e^x}{x}$ tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$ y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0.$$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verificando que $f'(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=f(e^x)$. ¿Tiene algún extremo relativo la función $h(x)=e^{-f(x)}$? Justifica las respuestas.

Solución: Las funciones $g(x)=f(e^x)$ y $h(x)=e^{-f(x)}$ no tienen ningún extremo relativo pues g es siempre estrictamente creciente ya que: $g'(x)=f'(e^x)e^x>0$, y h es estrictamente decreciente al ser: $h'(x)=-e^{-f(x)}f'(x)<0$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = x^4 + 2x^3$ c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ d) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ g) $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2-4}$ h) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ i) $f(x) = x^2 e^x$ j) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

k) $f(x) = x^2 e^{-x}$ l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ n) $f(x) = \ln(x^2+1)$ ñ) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Solución:

a) $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

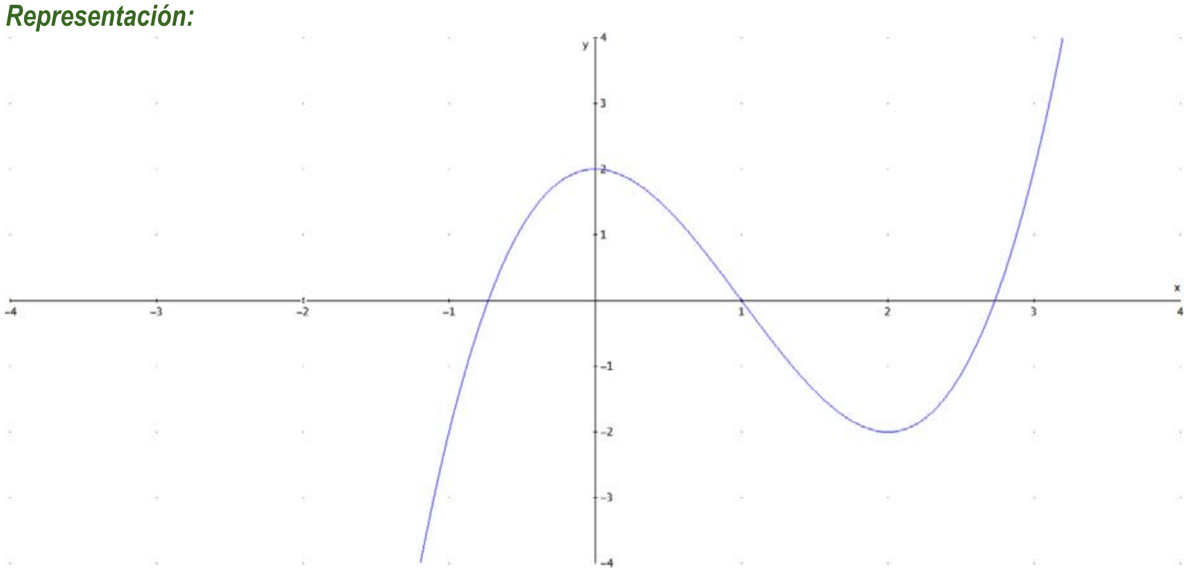
$D(f) = \Re$.

Corte con el eje Y: $f(0) = 0^3 - 0 + 2 = 2$*:* $(0,2)$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3 - 3x^2 + 2) = \pm\infty$ *, luego no hay asíntota horizontal.* $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+2}{x} = \infty$*, luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales;*

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$*;* $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$*. Entonces f es estrictamente creciente si x<-1, estrictamente decreciente si -1<x<1 y estrictamente creciente si x>1, tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 1;* $f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

$f''(x) = 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$*. Entonces f es cóncava si x<0, convexa si x>0 y tiene un punto de inflexión en 0.*

Representación:



b) $f(x) = x^4 + 2x^3$

$D(f) = \Re$.

Corte con el eje Y: $f(0) = 0^4 + 0 = 0$*:* $(0,0)$. *Cortes con el eje X:*

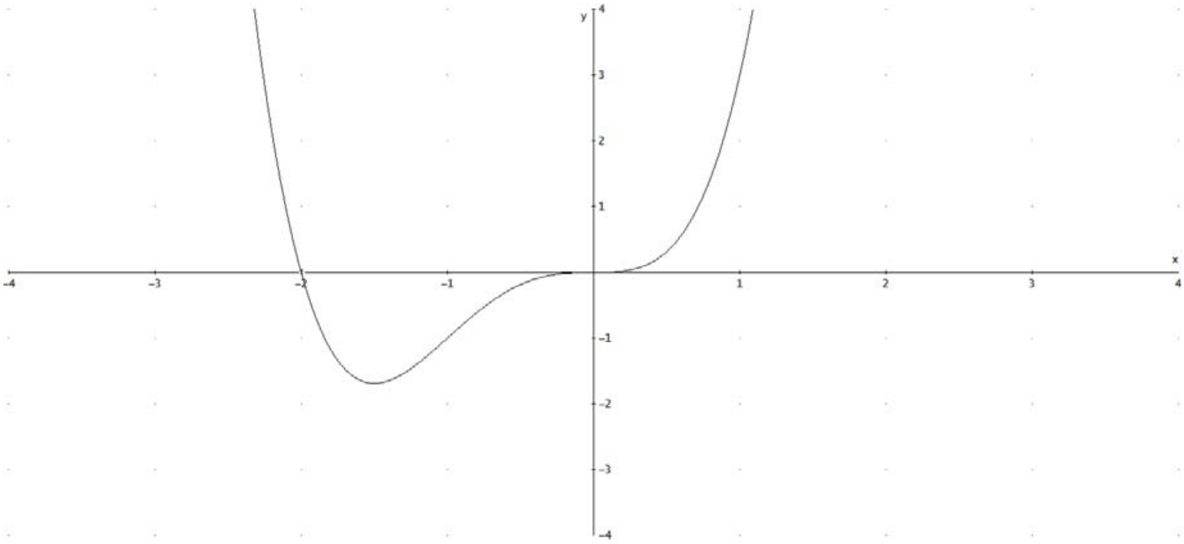
$f(x) = x^4 + 2x^3 = x^3(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$*:* $(0,0)$ *y* $(-2,0)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^4 + 2x^3) = \infty$ *, luego no hay asíntota horizontal.* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 + 2x^3}{x} = \pm\infty$*, luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales;*

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\frac{3}{2}$*;* $f'(x) = 2x^2(2x+3) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$*. Entonces f es estrictamente decreciente si* $x < -\frac{3}{2}$*, estrictamente creciente si* $x > -\frac{3}{2}$ *y tiene un mínimo relativo en* $-\frac{3}{2}$*;*

$f''(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$*;* $f''(x) = 12x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$*. Entonces f es convexa si* $x < -1$*, cóncava si* $-1 < x < 0$*, convexa si* $x > 0$ *y tiene puntos de inflexión en* -1 *, 0.*

Representación:



c) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$

$D(f) = \Re$.

Corte con el eje Y: $f(0) = -0^4 + 0 + 3 = 3$: $(0, 3)$. Cortes con el eje X:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = 1 \mp 2 = -1, 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$: $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$.

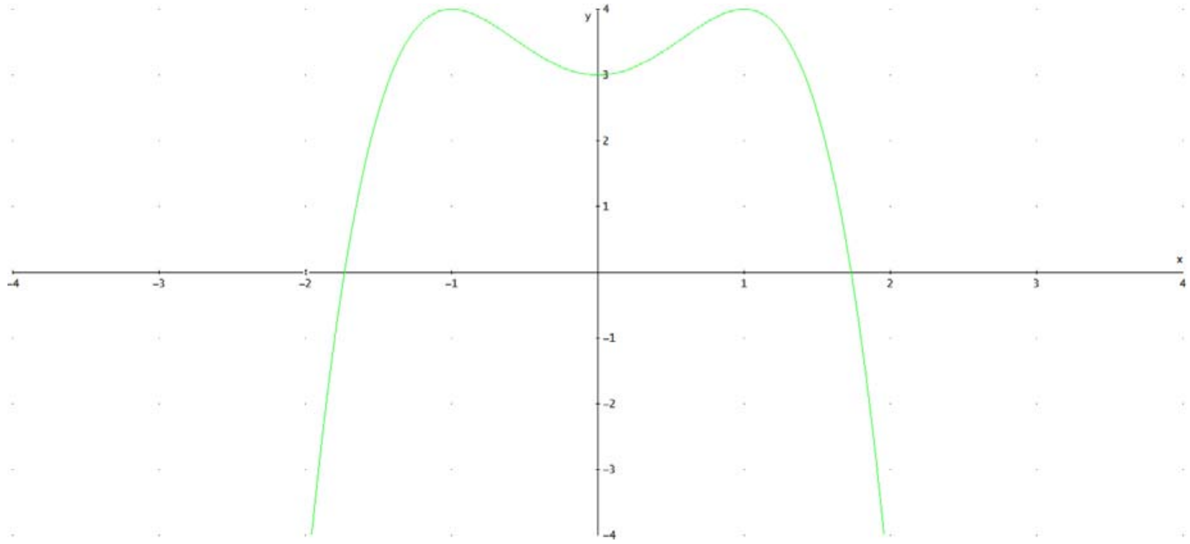
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-x^4 + 2x^2 + 3\right) = -\infty$, *luego no hay asíntota horizontal.*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^4 + 2x^2 + 3}{x} = \mp\infty$$, *luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales;*

$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ ó $x > 1$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x < -1$, *estrictamente decreciente si* $-1 < x < 0$, *estrictamente creciente si* $0 < x < 1$, *estrictamente decreciente si* $x > 1$, *tiene un máximo relativo en* -1, *un mínimo relativo en 0 y un máximo relativo en 1;*

$f''(x) = -12x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $f''(x) = -12x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Entonces f es cóncava si* $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, *convexa si* $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, *cóncava si* $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ *y tiene puntos de inflexión en* $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Representación:



d) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

$D(f)=\Re-\{0\}$.

Cortes con el eje X:

$f(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$: $(1,0)$ *y* $(-1,0)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\pm\infty$, *luego no hay asíntota horizontal.*

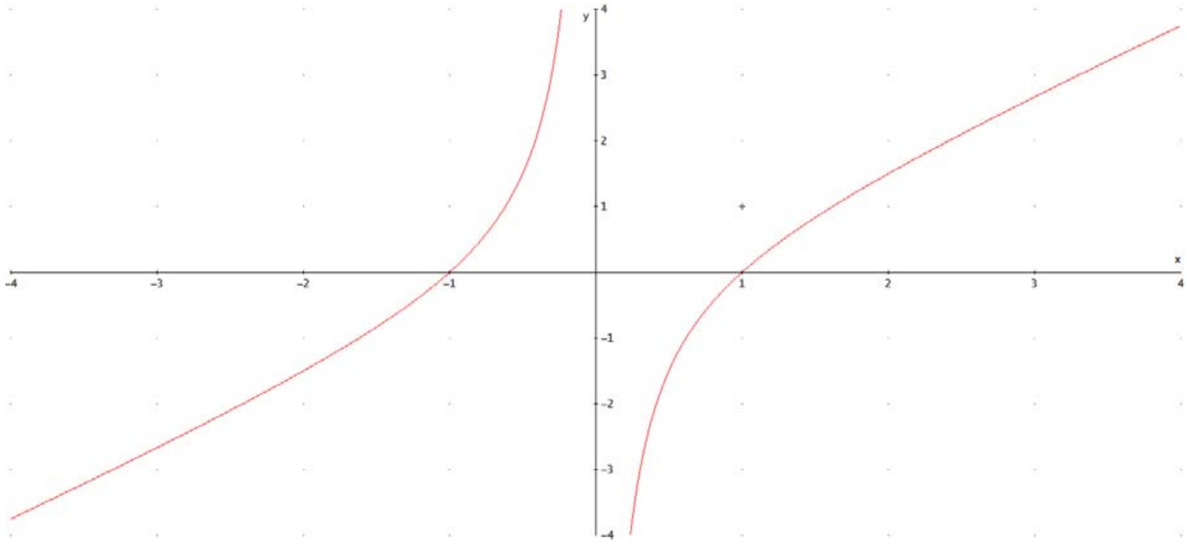
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}-x\right)=0$ *luego* $y=x$ *asíntota oblicua;*

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ *luego* $x=0$ *asíntota vertical;*

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x<0$ *y si* $x>0$, *luego no hay extremos relativos;*

$f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}>0$ *si* $x<0$, $f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}<0$ *si* $x>0$ *; Entonces f es convexa si* $x<0$ *, cóncava si* $x>0$ *y no tiene puntos de inflexión.*

Representación:



e) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

$D(f)=\Re-\{1\}$.

Cortes con el eje Y: $f(0)=\dfrac{1+0}{1-0}=1$: $(0,1)$ Cortes con el eje X:

$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$: $(1,0)$ y $(-1,0)$.

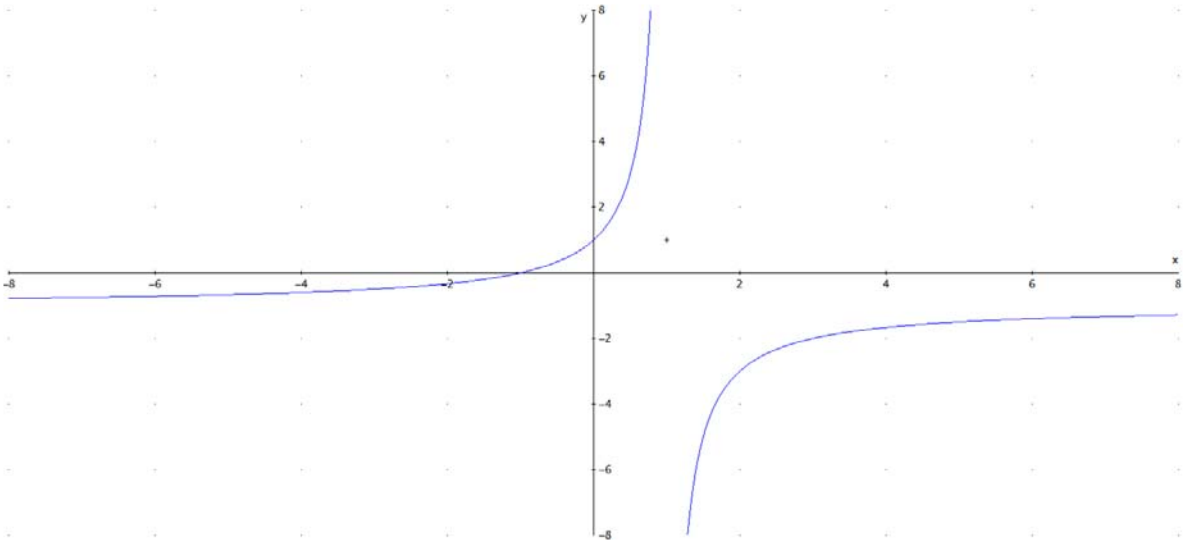
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$, luego $y=-1$ asíntota horizontal y no hay asíntota oblicua;

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1+x}{1-x}=\infty$ luego $x=1$ asíntota vertical;

$f'(x)=\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\dfrac{2}{(1-x)^2}>0$. Entonces f es estrictamente creciente si $x<1$ y si $x>1$, luego no hay extremos relativos; $f''(x)=\dfrac{4}{(1-x)^3}>0$ si $x<1$

, $f''(x)=\dfrac{4}{(1-x)^3}<0$ si $x>1$; Entonces f es convexa si $x<1$, cóncava si $x>1$ y no tiene puntos de inflexión.

Representación:



f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

$D(f)=\Re-\{\pm 1\}$.

Cortes con el eje Y: $f(0)=\dfrac{0}{0^2-1}=0$ *:* $(0,0)$ *Cortes con el eje X:*

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x=0$ *:* $(0,0)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$, *luego* $y=0$ *asíntota horizontal y no hay asíntota oblicua;*

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty$ *luego* $x=\pm 1$ *asíntota vertical;*

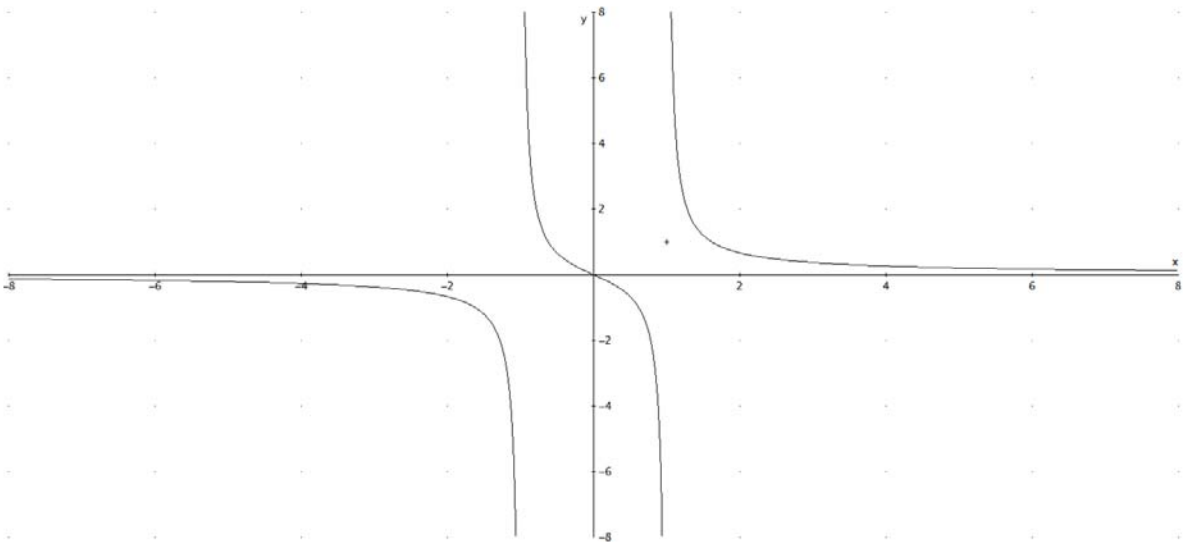
$f'(x)=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}<0$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x<-1$, *si* $-1<x<1$ *y si* $x>1$, *luego no hay extremos relativos;*

$f''(x)=\dfrac{-2x(x^2-1)^2+(x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-2x(x^2-1)+(x^2+1)4x}{(x^2-1)^3}=\dfrac{-2x(2(x^2+1)-(x^2-1))}{(x^2-1)^3}=$

$=\dfrac{-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow x=0$

Si $x<-1$, $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=\dfrac{++}{+}>0$, *si* $-1<x<0$, $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=\dfrac{++}{-}<0$, *si* $0<x<1$, $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=\dfrac{-+}{-}>0$, *si* $x>1$, $f''(x)=\dfrac{-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=\dfrac{-+}{+}<0$ *; Entonces f es convexa si* $x<-1$ *, cóncava si* $-1<x<0$, *convexa si* $0<x<1$, *cóncava si* $x>1$ *y* $x=0$ *es punto de inflexión.*

Representación:



g) $f(x)=\dfrac{0{,}5x^3}{x^2-4}$

$D(f)=\Re-\{\pm 2\}$.

Cortes con el eje Y: $f(0)=\dfrac{\frac{1}{2}0^3}{0^2-4}=0:\ (0,0)$ *Cortes con el eje X:* $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow x=0:\ (0,0)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2-4}=\pm\infty$, *luego no hay asíntota horizontal;*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3-4x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2-4}-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x(x^2-4)}{2(x^2-4)}=0$ *y* $\dfrac{1}{2}x$ *es asíntota oblicua;* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2-4}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^2-4}=-\infty$ *luego* $x=\pm 2$ *asíntota vertical;*

$f'(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^2(x^2-4)-x^4}{(x^2-4)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}x^4-6x^2}{(x^2-4)^2}=\dfrac{x^2\left(\frac{1}{2}x^2-6\right)}{(x^2-4)^2}=0 \Leftrightarrow x=0, x=\pm 2\sqrt{3}$, *con:*

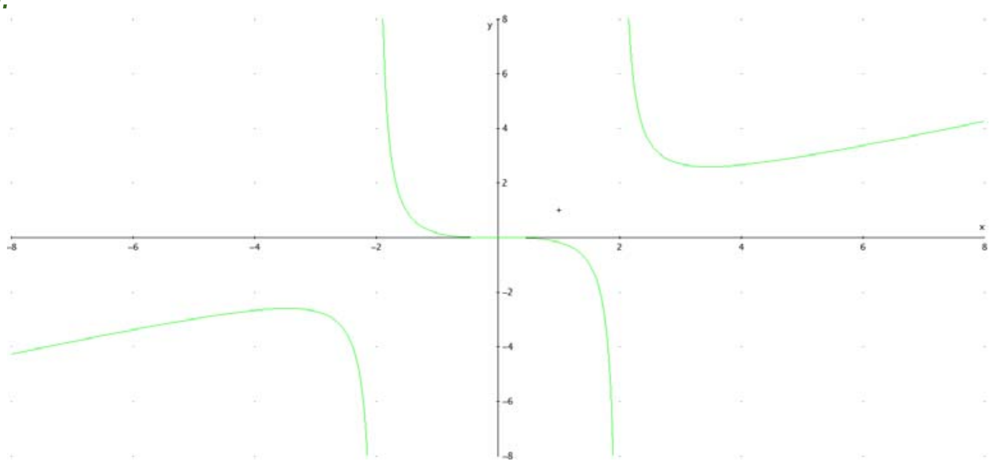
$f'(x)=\dfrac{x^2\left(\frac{1}{2}x^2-6\right)}{(x^2-4)^2}<0 \Leftrightarrow x^2<12 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x<-2\sqrt{3}$, *f es estrictamente decreciente si* $-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$ *y f es estrictamente creciente si* $x>2\sqrt{3}$, *luego f tiene un máximo relativo en* $-2\sqrt{3}$ *y f tiene un mínimo relativo en* $2\sqrt{3}$;

$$f''(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\left(2x(x^2-12)+2x^3\right)(x^2-4)^2-2x^3(x^2-12)2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}=\frac{1}{2}\,\frac{\left(2x(x^2-12)+2x^3\right)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=$$

$$=\frac{(2x^3-12x)(x^2-4)-2x^5+24x^3}{(x^2-4)^3}=\frac{4x^3+48x}{(x^2-4)^3}=\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0 \Leftrightarrow x=0$$

Si $x<-2$, $f''(x)=\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=\dfrac{-+}{+}<0$, *si* $-2<x<0$, $f''(x)=\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=\dfrac{-+}{-}>0$, *si* $0<x<2$, $f''(x)=\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=\dfrac{++}{-}<0$, *si* $x>2$, $f''(x)=\dfrac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=\dfrac{++}{+}>0$; *Entonces f es cóncava si* $x<-2$, *convexa si* $-2<x<0$, *cóncava si* $0<x<2$, *convexa si* $x>2$ *y* $x=0$ *es punto de inflexión.*

Representación:



h) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

$D(f)=\Re-\{\pm 2\}$.

Cortes con el eje Y: $f(0)=\dfrac{0^2-1}{0^2-4}=\dfrac{1}{4}$ *:* $(0,\frac{1}{4})$ ***Cortes con el eje X:***

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1: (1,0),\ (-1,0).$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-4}=1$, ***luego*** $y=1$ ***es asíntota horizontal y no hay asíntotas oblicuas;***

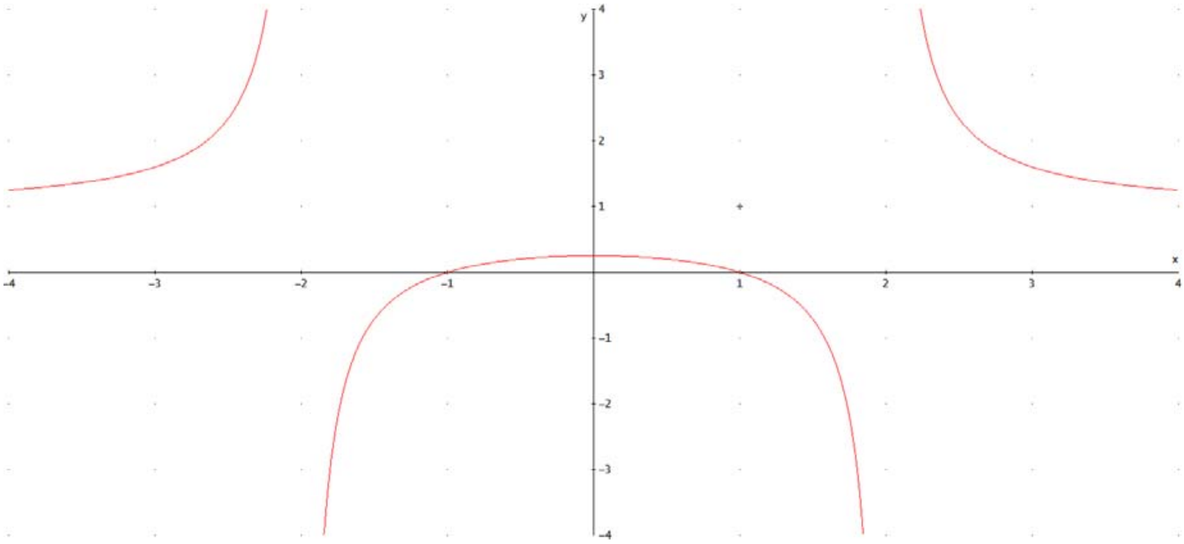
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-4}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-4}=-\infty$ ***luego*** $x=\pm 2$ ***asíntota vertical;***

$f'(x)=\dfrac{2x(x^2-4)-(x^2-1)2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-6x}{(x^2-4)^2}=0\Leftrightarrow x=0$, ***con*** $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2-4)^2}<0\Leftrightarrow x>0$. ***Entonces f es estrictamente creciente si*** $x<-2$ ***y si*** $-2<x<0$, ***f es estrictamente decreciente si*** $0<x<2$ ***y si*** $x>2$ ***y f tiene un máximo relativo en 0;***

$$f''(x)=\frac{-6(x^2-4)^2+24x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}=\frac{-6(x^2-4)+24x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3}<0\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$$

Entonces f es convexa si $x<-2$ ***, f es cóncava si*** $-2<x<2$ ***y f es convexa si*** $x>2$ ***y no tiene puntos de inflexión.***

Representación:



i) $f(x) = x^2 e^x$

$D(f) = \Re$.

Cortes con el eje Y: $f(0) = 0^2\, e^0 = 0$ **:** $(0, 0)$ **Cortes con el eje X:** $f(x) = x^2\, e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ **:** $(0, 0)$ **.**

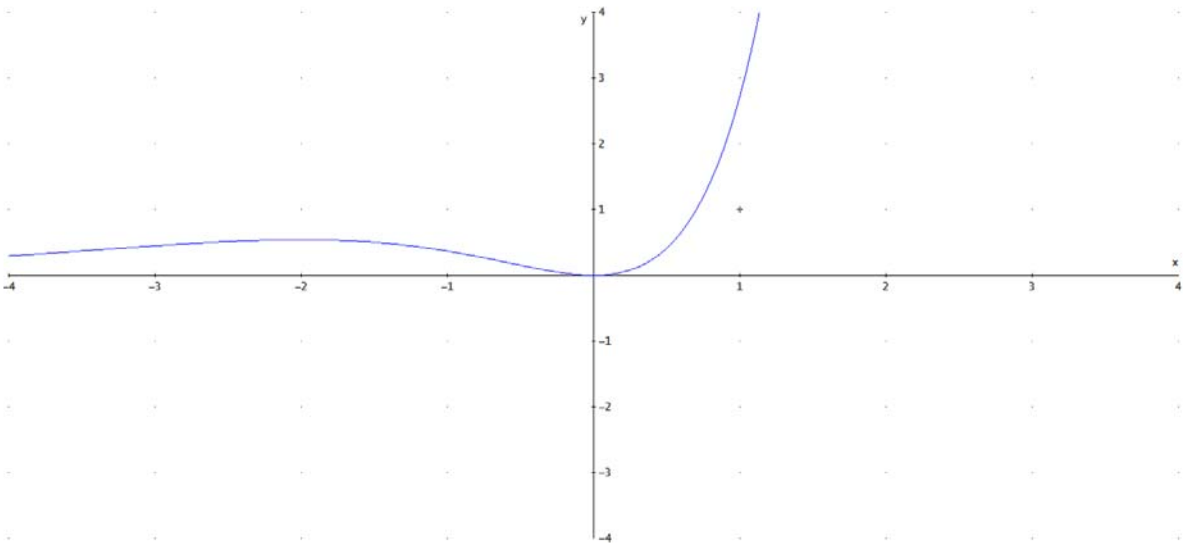
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\, e^x = \infty$ **,** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = 0$ ***luego*** $y = 0$ ***es asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito, aunque cuando x tiende a más infinito es una rama parabólica;*** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x\, e^x = \infty$ ***y no hay asíntotas oblicuas; tampoco hay asíntotas verticales;***

$f'(x) = 2\, x\, e^x + x^2\, e^x = x\, e^x\,(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$ ***, con*** $f'(x) = x\,(x+2)e^x < 0 \Leftrightarrow x > 0$ ***. Entonces f es estrictamente creciente si*** $x < -2$ ***y para x > 0; y si*** $-2 < x < 0$ ***entonces f es estrictamente decreciente. Por tanto, tiene un máximo relativo para x = -2:***$(-2, \frac{4}{e^2})$***; y f tiene un mínimo relativo en x = 0: (0, 0);***

$$f''(x) = \frac{-6\,(x^2-4)^2 + 24\,x^2\,(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{-6\,(x^2-4) + 24\,x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{18\,x^2 + 24}{(x^2-4)^3} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Entonces f es convexa si $x < -2$ ***, f es cóncava si*** $-2 < x < 2$ ***, f es convexa si*** $x > 2$ ***y no tiene puntos de inflexión.***

Representación:



j) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

$D(f)=\Re-\{0\}$.

Cortes con el eje X: $f(x)=\dfrac{e^x}{x}=0 \Leftrightarrow e^x=0$ *: No hay.*

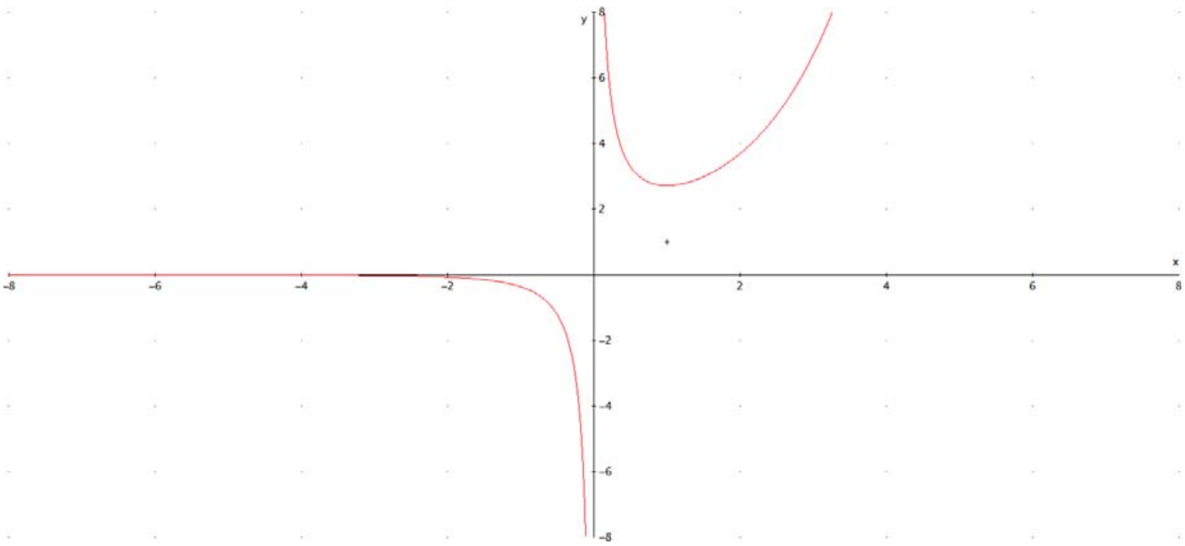
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=0$ *luego* $y=0$ *es asíntota horizontal;* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\infty$ *y no hay asíntotas oblicuas;* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{x}=\infty$ *, luego* $x=0$ *es asíntota vertical;*

$f'(x)=\dfrac{x\,e^x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x\,(x-1)}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$, *con* $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}<0 \Leftrightarrow x<1$. *Entonces f es estrictamente decreciente si* $x<0$ *y si* $0<x<1$, *f es estrictamente creciente si* $x>1$ *y f tiene un mínimo relativo en 1;*

$f''(x)=\dfrac{x^3\,e^x-2\,x\,(x-1)e^x}{x^4}=\dfrac{(x^2-2\,x+2)e^x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^2-2\,x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}\notin\Re$,

$f''(x)=\dfrac{(x^2-2\,x+2)e^x}{x^3}<0 \Leftrightarrow x<0$. *Entonces f es cóncava si* $x<0$ *, f es convexa si* $x>0$ *y no tiene puntos de inflexión.*

Representación:



k) $f(x) = x^2 e^{-x}$

$D(f) = \Re$.

Corte con el eje Y: $f(0) = 0^2\ e^{-0} = 0$ *:* $(0, 0)$ *. Cortes con el eje X:* $f(x) = x^2\ e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *:* $(0, 0)$ *.*

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\ e^{-x} = \infty\,\infty = \infty$, *luego* $y = 0$ *es asíntota horizontal;*

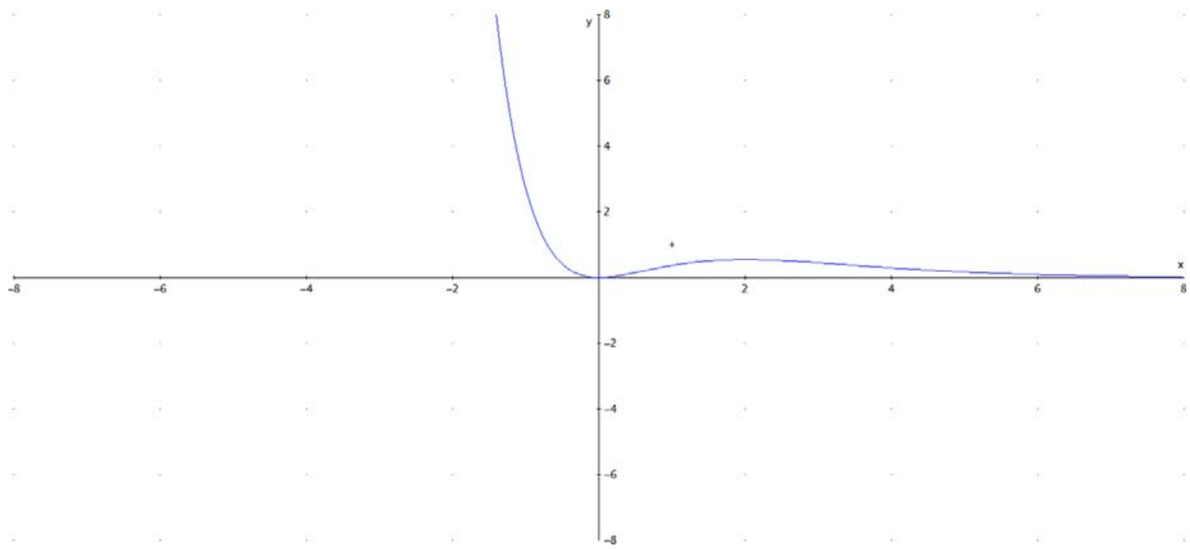
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{-x} = -\infty$ *y no hay asíntotas oblicuas; tampoco hay asíntotas verticales;*

$f'(x) = 2\,x\,e^{-x} - x^2\ e^{-x} = x\,e^{-x}\,(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$ *, con* $f'(x) = x\,(2 - x)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ *. Entonces f es estrictamente decreciente si* $x < 0$ *, f es estrictamente creciente si* $0 < x < 2$ *, f es estrictamente decreciente si* $x > 2$ *, f tiene un mínimo relativo en 0 y un máximo relativo en 2;*

$f''(x) = (2 - 2\,x)e^{-x} - (2\,x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4\,x + 2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\,x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$ *,*

$f''(x) = (x^2 - 4\,x + 2)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ *. Entonces f es convexa si* $x < 2 - \sqrt{2}$ *, f es cóncava si* $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$ *, f es convexa si* $x > 2 + \sqrt{2}$ *y f tiene puntos de inflexión en* $x = 2 - \sqrt{2}$ *,* $x = 2 - \sqrt{2}$ *.*

Representación:



l) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$D(f): x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1 \text{ ó } x\geq 1$.

Cortes con el eje X: $f(x)=\sqrt{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$: $(1,0)$ ***y*** $(-1,0)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty$ ***, luego no hay asíntota horizontal;***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0,$$

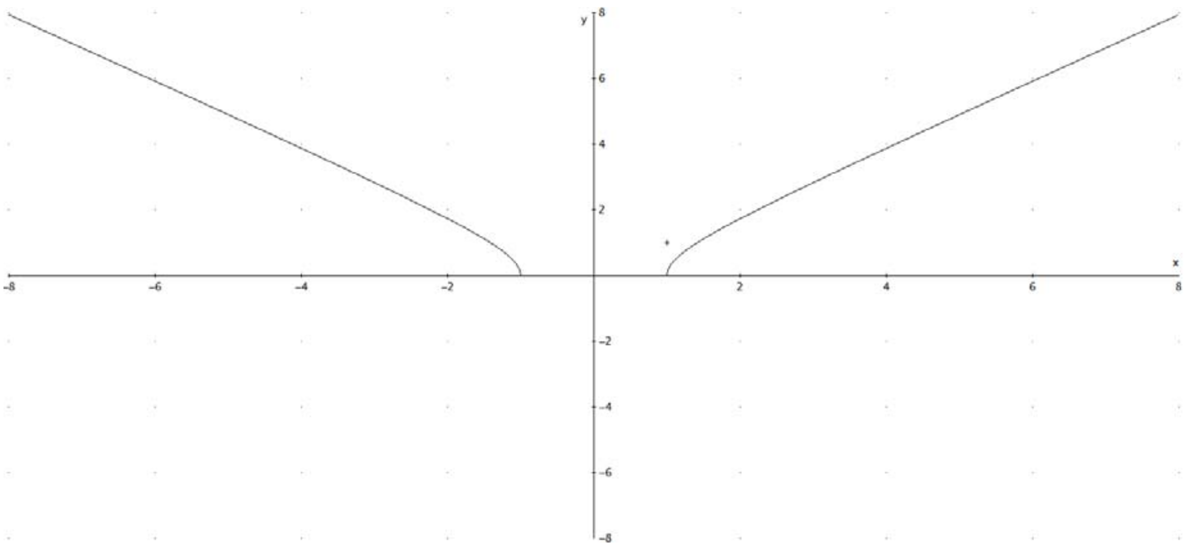
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=-1,\qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0\quad ,$$

$y=\pm x$ ***es asíntota oblicua; no hay asíntotas verticales;***

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow x=0\notin D(f)$, ***con*** $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0\Leftrightarrow x<-1$. ***Entonces f es estrictamente decreciente si*** $x<-1$***, f es estrictamente creciente si*** $x>1$***, y f no tiene extremos relativos;***

$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=-\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}<0$. ***Entonces f es cóncava si*** $x<-1$ ***y*** $x>1$***, y f no tiene puntos de inflexión.***

Representación:



m) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$D(f): 4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Corte con el eje Y: $f(0)=\dfrac{0}{\sqrt{4-0^2}}=0:(0,0)$ *Cortes con el eje X:* $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=0:(0,0)$.

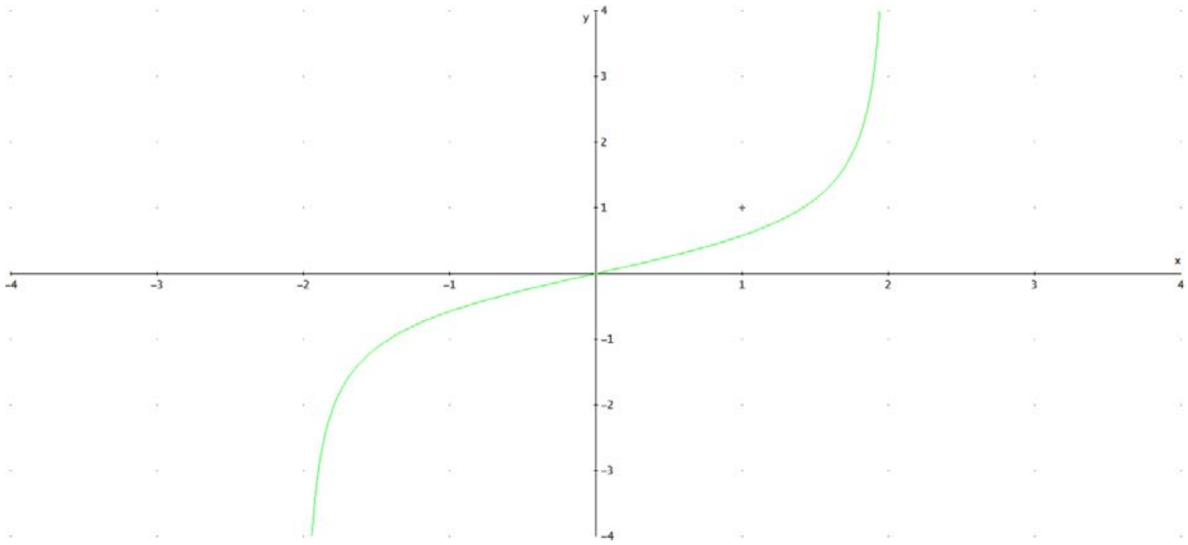
No hay asíntotas horizontales ni oblicuas por el dominio;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ *y* $x=\pm 2$ *es asíntota vertical;*

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=\dfrac{4}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}>0$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $-2<x<2$ *y f no tiene extremos relativos;*

$f''(x)=6\left(4-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}2x=0 \Leftrightarrow x=0$, *con* $f''(x)=6\left(4-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}2x<0 \Leftrightarrow x<0$. *Entonces f es cóncava si* $x<0$ *y f es convexa si* $x>0$, *y f tiene punto de inflexión en* $x=0$.

Representación:



n) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

$D(f)=\Re$.

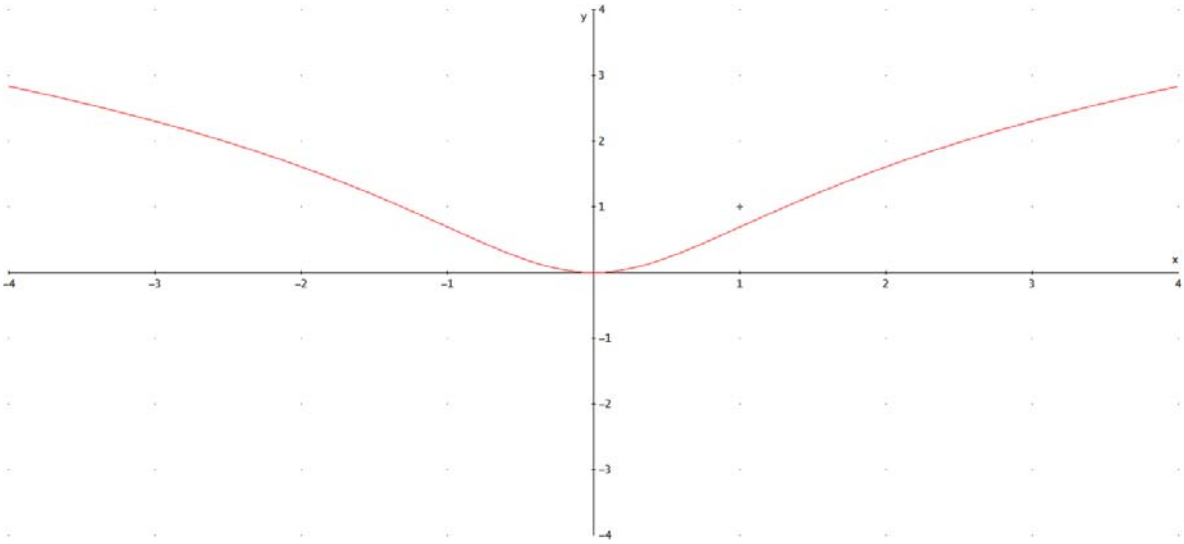
Corte con el eje Y: $f(0)=\ln\left(0^2+1\right)=0:(0,0)$ *Cortes con el eje X:* $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0:(0,0)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty$, *luego no hay asíntotas horizontales;* $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0$, *luego no hay asíntotas oblicuas; tampoco hay asíntotas verticales;*

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x=0$, *con* $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}>0 \Leftrightarrow x>0$. *Entonces f es estrictamente decreciente si* $x<0$, *f es estrictamente creciente si* $x>0$ *y f tiene un mínimo relativo en 0;*

$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$, *con* $f''(x)=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Leftrightarrow -1<x<1$. *Entonces f es cóncava si* $x<-1$, *f es convexa si* $-1<x<1$, *f es cóncava si* $x>1$ *y f tiene puntos de inflexión en* $x=\pm 1$.

Representación:



ñ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$D(f)=(0,\infty)$.

Cortes con el eje X: $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$ *:* $(1,0)$ *.*

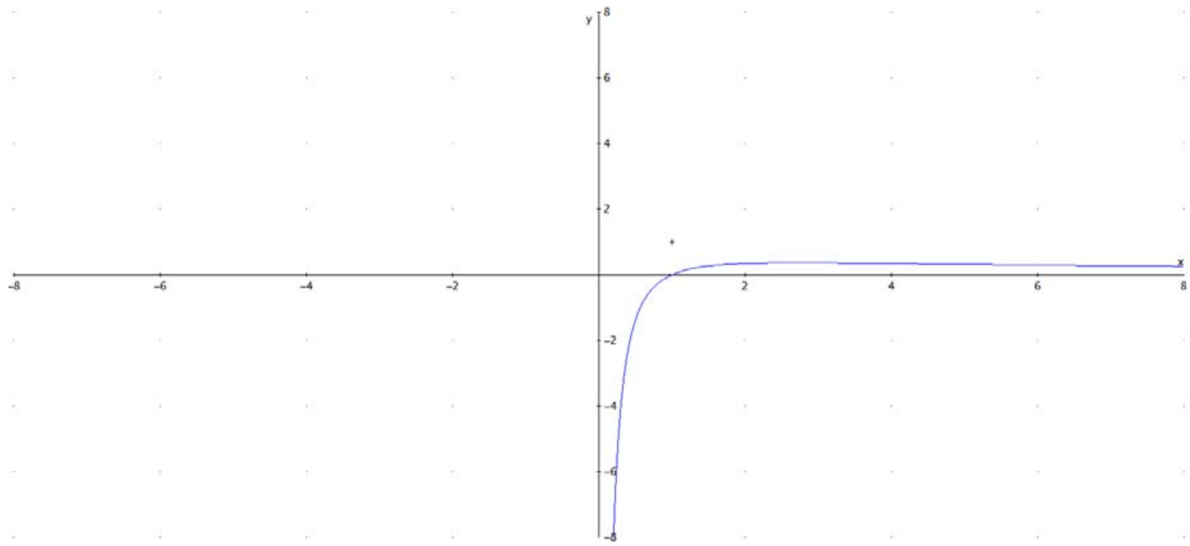
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, *luego* $y=0$ *es asíntota horizontal y no hay asíntotas oblicuas;*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$ *por lo que* $x=0$ *es asíntota vertical;*

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=e$*, con* $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow x<e$ *. Entonces f es estrictamente creciente si* $x<e$*, f es estrictamente decreciente si* $x>e$ *y f tiene un máximo relativo en* e*;*

$f''(x)=\dfrac{-x-(1-\ln x)2x}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$*, con* $f''(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}>0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$*. Entonces f es cóncava si* $x<e^{\frac{3}{2}}$*, f es convexa si* $x>e^{\frac{3}{2}}$ *y f tiene punto de inflexión en* $x=e^{\frac{3}{2}}$*.*

Representación:



2.- Considera la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$. a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos. b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

Solución: a) Se cumple que $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -1, -2$***, con*** $f'(x) = 6x^2 + 18x + 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ ***. Entonces f es estrictamente creciente si*** $x < -2$***, f es estrictamente decreciente si*** $-2 < x < -1$***, f es estrictamente creciente si*** $x > -1$***, f tiene un máximo relativo en*** -2 ***y un mínimo relativo en*** -1***;***

a) Se cumple que $f''(x) = 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{18}{12} = -\dfrac{3}{2}$***, con*** $f''(x) = 12x + 18 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{2}$***. Entonces f es cóncava si*** $x < -\dfrac{3}{2}$***, f es convexa si*** $x > -\dfrac{3}{2}$ ***y f tiene un punto de inflexión en*** $-\dfrac{3}{2}$

b)

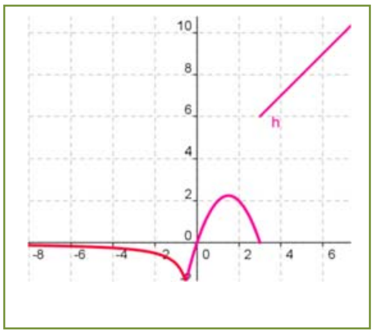
3.- Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (x-2)^2(x+1)$. Indica dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

Solución: Como $f'(x) = 2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$***, con*** $f'(x) = 3x(x-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ ***. Entonces f es estrictamente creciente si*** $x < 0$***, f es estrictamente decreciente si*** $0 < x < 2$***, f es estrictamente creciente si*** $x > 2$***, f tiene un máximo relativo en (0, 4) y un mínimo relativo en (2, 0); Se cumple que*** $f''(x) = 3(x-2) + 3x = 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$***, con*** $f''(x) = 6(x-1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ***. Entonces f es cóncava si*** $x < 1$***, f es convexa si*** $x > 1$ ***y f tiene un punto de inflexión en (1, 2).***

4.- Representa gráficamente y estudia la continuidad de la función:

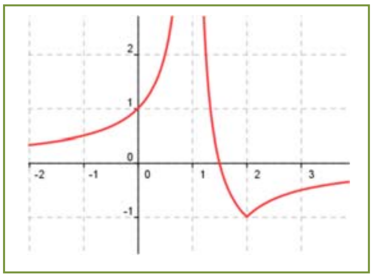
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -\dfrac{1}{2} \\ -x^2 + 3x & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 3 \\ |x+3| & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solución: La función no es continua para x = -1/2, pues a la izquierda se acerca al valor -2, y a la derecha toma el valor -7/4. Tampoco es continua en x = 3, pues a la derecha toma el valor 0 y a la izquierda se acerca a 6. La función es continua en {x $\in \Re$***; x*** $\neq$ ***–1/2 y x*** $\neq$ ***3}***



5.- Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{|x-2|}{|x-1|} - 1$, estudiando su continuidad.

Solución: La función no es continua en x = 1 pues se anula el denominador. La función es continua en {x $\in \Re$***; x*** $\neq$ ***1}***



6.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución: $B(x) = I - C = (200 - 2x)(50 + x) - 40(200 - 2x) = (200 - 2x)(10 + x)$***. Entonces:***

$P(24+x) = (600-15x)(24+x) \Rightarrow P(x) = (600-15(x-24))x = (960-15x)x = 960x - 15x^2$ ***Precio: 50+45=95 c.***

$B(45) = (200 - 90)(10 + 45) = 110 \times 55 = 6050$ c. = 60 € y 50 c.

7.- La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x)=(x+1)^2(32-x)$. a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero. b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

Solución:

a) $Q'(x)=2(x+1)(32-x)-(x+1)^2=(x+1)(64-2x-x-1)=(x+1)(63-3x)=0 \Leftrightarrow x=-1,\ x=\frac{63}{3}=21$

$Q'(x)=(x+1)(63-3x)>0 \Leftrightarrow -1<x<21$***, luego en*** $x=21^{\circ}C$ ***está el máximo absoluto, con:***

$Q(21)=22^2\times 11=4\times 11^3=5324\text{kg}$

8.- Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Solución: $P(24+x)=(600-15x)(24+x)\Rightarrow P(x)=(600-15(x-24))x=(960-15x)x=960x-15x^2$

$P'(x)=960-30x=0 \Leftrightarrow x=\frac{96}{3}=32$ ***árboles;***

$P(32)=960\times 32-1532^2=32(960-15\times 32)=32\times 480=15360$ ***frutos***

9.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución: Lado de la base = 20 dm; Altura = 10 dm.

10.- Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.

Solución: Si llamamos x al ancho, y al largo, z a la altura, hay que maximizar xyz ***con las condiciones*** $y=2x,\ x+y+z=1\Rightarrow z=1-x-y=1-3x$. ***Entonces hay que hallar el máximo de*** $f(x)=2x^2(1-3x),\ x\geq 0$; $f'(x)=4x(1-3x)-6x^2=x(2-9x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{9}$ ***(la solución x=0 da un mínimo). Tenemos que*** $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{9}$***, luego en*** $\frac{2}{9}$ ***está el máximo absoluto; dimensiones:***

$x=\frac{2}{9}m.,\ y=\frac{4}{9}m.,\ z=1-\frac{6}{9}=\frac{1}{3}m.,\ f\left(\frac{2}{9}\right)=2\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(1-3\frac{2}{9}\right)=\frac{8}{243}m^3$

11.- Se desea construir el marco de una ventana rectangular de 6 m2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 euros y el del tramo vertical 3 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?

Solución: a) Si llamamos x al número de metros horizontales, y al número de metros verticales, hay que minimizar $2.5x+3y$ ***con la condición*** $xy=6\Rightarrow y=\frac{6}{x}$***. Entonces hay que hallar el mínimo de*** $f(x)=2.5x+\frac{18}{x}$, $x\geq 0$; $f'(x)=2.5-\frac{18}{x^2}=\frac{2.5x^2-18}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{18}{2.5}=\frac{36}{5}\Rightarrow x=\frac{6}{\sqrt{5}}$. ***Tenemos que*** $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{6}{\sqrt{5}}$***, luego en*** $\frac{6}{\sqrt{5}}$ ***está el mínimo absoluto; dimensiones:*** $x=\frac{6}{\sqrt{5}}m.$, $y=\frac{6}{x}=\sqrt{5}\,m.$

b) $f\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)=2.5\frac{6}{\sqrt{5}}+\frac{18}{\frac{6}{\sqrt{5}}}=3\sqrt{5}+3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ € ***= 13,42 €.***

12.- Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

Solución: Hay que maximizar $\pi r^2 h$ ***con la condición*** $r^2+h^2=100 \Rightarrow r^2=100-h^2$. ***Entonces hay que hallar el mínimo de*** $f(h)=\pi\left(100-h^2\right)h=\pi\left(100h-h^3\right),\ h\geq 0$;

$$f'(h)=\pi\left(100-3h^2\right)=0 \Leftrightarrow h^2=\frac{100}{3} \Rightarrow h=\frac{10}{\sqrt{3}}.$$ ***Tenemos que*** $f'(h)<0 \Leftrightarrow h>\frac{10}{\sqrt{3}}$, ***luego en*** $h=\frac{10}{\sqrt{3}}$ ***está el máximo absoluto; radio:***

$$r=\sqrt{100-h^2}=\sqrt{100-\frac{100}{3}}=10\sqrt{\frac{2}{3}}\text{ cm}$$

13.- Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

Solución: Si fijamos el origen en la base del poste de 12 m, tenemos que los extremos son $(0,12)$, $(30,18)$ ***y el punto del suelo*** $(x,0)$. ***Entonces hay que hallar el mínimo de*** $f(x)=\sqrt{x^2+12^2}+\sqrt{(30-x)^2+18^2}$, $0\leq x\leq 30$;

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}-\frac{30-x}{\sqrt{(30-x)^2+18^2}}=\frac{x\sqrt{(30-x)^2+18^2}-(30-x)\sqrt{x^2+144}}{\sqrt{x^2+144}\sqrt{(30-x)^2+18^2}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(30-x)^2+18^2}-(30-x)\sqrt{x^2+144}=0 \Leftrightarrow x\sqrt{(30-x)^2+18^2}=(x-30)\sqrt{x^2+144} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left((30-x)^2+18^2\right)=(x-30)^2\left(x^2+144\right) \Leftrightarrow x^2\left(x^2-60x+900+324\right)=\left(x^2-60x+900\right)\left(x^2+144\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-60x^3+1224x^2=x^4-60x^3+1044x^2-8640x+129600 \Leftrightarrow 180x^2+8640x-129600=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+48x-720=0 \Leftrightarrow x=\frac{-48\pm\sqrt{48^2+4\times 720}}{2}=\frac{-48\pm\sqrt{5184}}{2}=\frac{-48\pm 72}{2}=12$$

(La otra solución es negativa)

Se cumple que $f'(0)=\frac{-30\times 12}{+}<0$, $f'(30)=\frac{30\times 18}{+}>0$, ***luego en 12 está el mínimo absoluto***

Punto del suelo: $(12,0)$

14.- Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm² de área total para que su volumen sea máximo.

Solución: Hay que maximizar $\pi r^2 h$ ***con la condición*** $2\pi r h+2\pi r^2=54 \Rightarrow h=\frac{27-\pi r^2}{\pi r}$. ***Entonces hay que hallar el máximo de*** $f(r)=\pi r^2\frac{27-\pi r^2}{\pi r}=27r-\pi r^3$, $r\geq 0$; ***Tenemos que:***

$$f'(r)=27-3\pi r^2=0 \Leftrightarrow r^2=\frac{9}{\pi} \Rightarrow r=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$ $f'(r)<0 \Leftrightarrow r>\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, ***luego en*** $r=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ ***está el máximo absoluto; dimensiones:*** $r=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$, $h=\dfrac{27-\pi\frac{9}{\pi}}{\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}$

15.- En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

– Cartas hasta 20 gramos de peso: 17 céntimos de euro.

– Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 5 céntimos más.

a) Escribe la fórmula de la función $y = f(x)$ (donde x representa el peso de cada carta en gramos e y el precio que se tiene que pagar para enviarla), hasta 50 g.

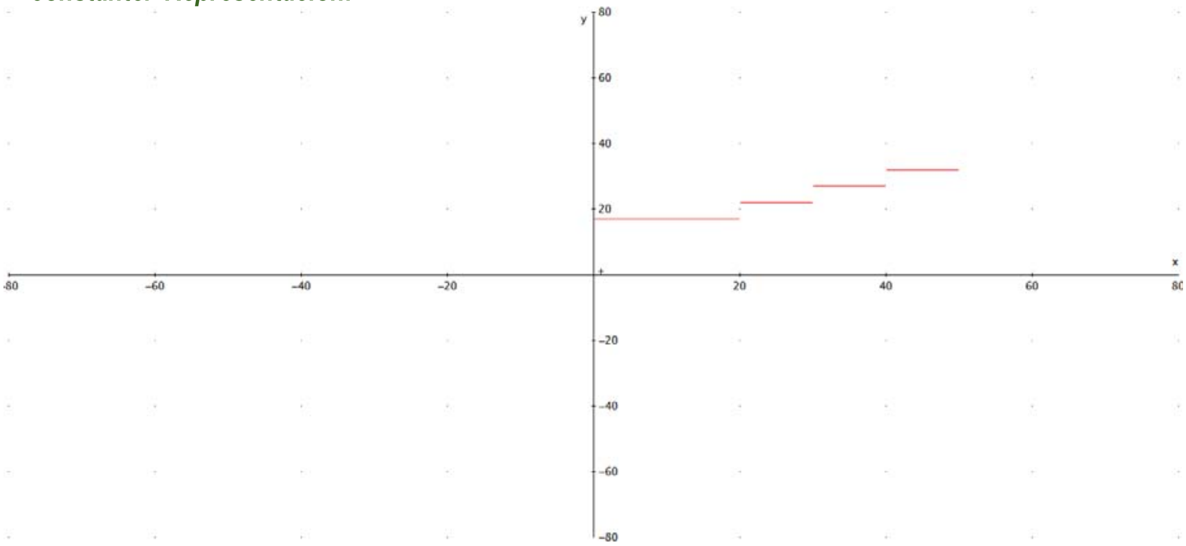
b) Representa gráficamente la función e indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

Solución: a) Si $x \le 20$ *,* $f(x) = 17$ *.*

Si $20 < x = 20 + 10t \le 50$*,* $f(20+10t) = 17 + 5\lceil t \rceil \Rightarrow f(x) = 17 + 5\left\lceil \dfrac{x-20}{10} \right\rceil$*, donde* $\lceil t \rceil$ *es el menor entero mayor ó igual que* t*. Entonces* $f(x) = \begin{cases} 17 \text{ si } 0 < x \le 20 \\ 22 \text{ si } 20 < x \le 30 \\ 27 \text{ si } 30 < x \le 40 \\ 32 \text{ si } 40 < x \le 50 \end{cases}$

b) $D(f) = (0, 50]$*. Cortes con el eje X: No hay, ya que* $f(x) > 0$

No hay asíntotas; $\lim\limits_{x \to 20^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 20^-} 17 = 17 \ne \lim\limits_{x \to 20^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 20^+} 22 = 22$ *, luego no existe* $\lim\limits_{x \to 20} f(x)$ *y* f *no es continua en 20;* $\lim\limits_{x \to 30^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 30^-} 22 = 22 \ne \lim\limits_{x \to 30^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 30^+} 27 = 27$ *, luego no existe* $\lim\limits_{x \to 30} f(x)$ *y* f *no es continua en 30;* $\lim\limits_{x \to 40^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 40^-} 27 = 27 \ne \lim\limits_{x \to 40^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 40^+} 32 = 32$ *, luego no existe* $\lim\limits_{x \to 40} f(x)$ *y* f *no es continua en 40; En* $(0, 20)$*,* $(20, 30)$*,* $(30, 40)$ *y* $(40, 50)$ *f es continua al ser constante. Representación:*



16.- El coste total de producción de x unidades de un producto es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función coste medio por unidad como: $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. ¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

Solución: Se cumple que $C_m(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^2 + 6x + 192}{x} = \dfrac{1}{3}x + 6 + \dfrac{192}{x}$ *,* $x \ge 0$

$$C'_m(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 576 \Rightarrow x = 24$$

17.- Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión: $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$.

Determinar razonadamente: a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios. b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución: a) Se cumple que $B'(n)=-24n^2+120n-96=-24(n^2-5n+4)=0 \Leftrightarrow n=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=4,1$ ***, con***

$B'(n)=-24(n^2-5n+4)>0 \Leftrightarrow 1<n<4$ ***. Entonces B tiene el máximo absoluto en*** $n=4$

b) $B(4)=-8\,4^3+608^2-96\times 8=-512+3840-768=2560$ ***miles de euros***

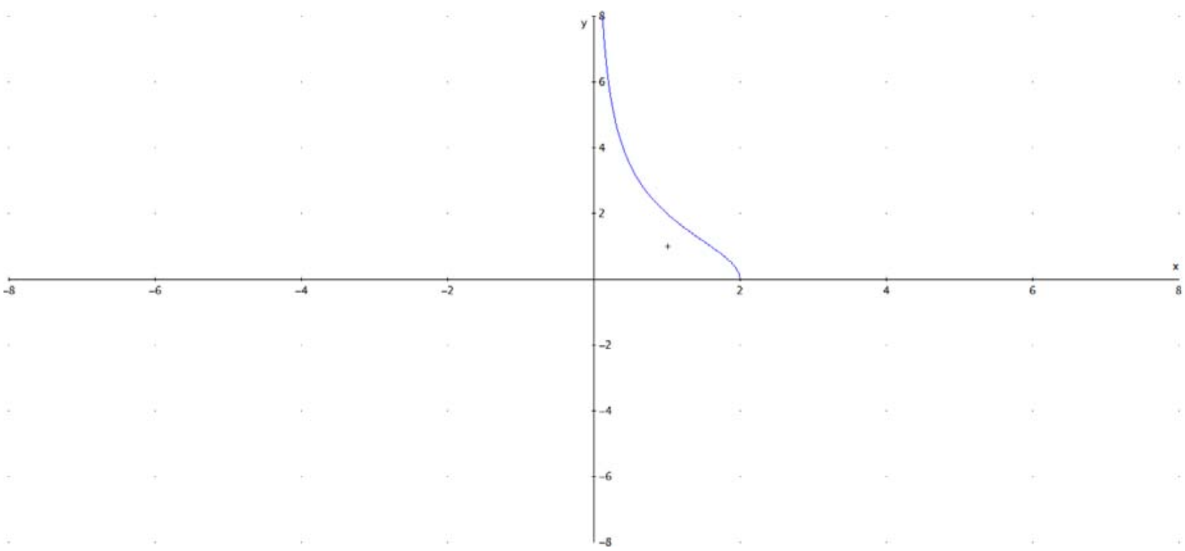
18.- Sea la función $y=2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$. Indica dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas. Realiza la representación gráfica de la misma.

Solución: $D(f): \dfrac{2}{x}-1\geq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 2$; $(0,2]$***. Cortes con el eje X: No hay, ya que*** $f(x)>0$

No hay asíntotas horizontales ni oblicuas por el dominio; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{\dfrac{2}{x}-1}=\infty$***, luego*** $x=0$ ***es asíntota vertical;*** $f'(x)=\dfrac{-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}=\dfrac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}<0$ ***, luego*** f ***es estrictamente decreciente y no tiene extremos relativos;***

$$f''(x)=\frac{2\left(2x\sqrt{\frac{2}{x}-1}+x^2\frac{\frac{-2}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\right)}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\frac{4\left(x\left(\frac{2}{x}-1\right)-1\right)}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4(1-x)}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{3}{2}}}=0\Leftrightarrow x=1$$ ***,con***

$f''(x)=\dfrac{4(1-x)}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{3}{2}}}>0\Leftrightarrow x<1$ ***luego*** f ***es convexa en*** $(0,1)$, f ***es cóncava en*** $(1,2)$ ***y f tiene un punto de inflexión en 1. Representación:***



19.- Sea la función $f(x)=\begin{cases}-(x+4)^2+4 & si \quad x<-2\\ x^2-4 & si \quad x\geq -2\end{cases}$. Dibuja su gráfica aproximada y analiza su continuidad y derivabilidad. Calcula los máximos y mínimos absolutos y relativos de la función en el intervalo $[-8,8]$.

Solución: $D(f)=\Re$ ***. Corte con el eje Y:*** $f(0)=0^2-4=-4$ ***:*** $(0,-4)$***. Cortes con el eje X:***

Si $x<-2$, $f(x)=-(x+4)^2+4=0 \Leftrightarrow (x+4)^2=4 \Leftrightarrow x+4=\pm 2 \Leftrightarrow x=-6$ ***:*** $(-6,0)$***.***

Si $x\geq -2$, $f(x)=x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ ***:*** $(-2,0)$, $(2,0)$

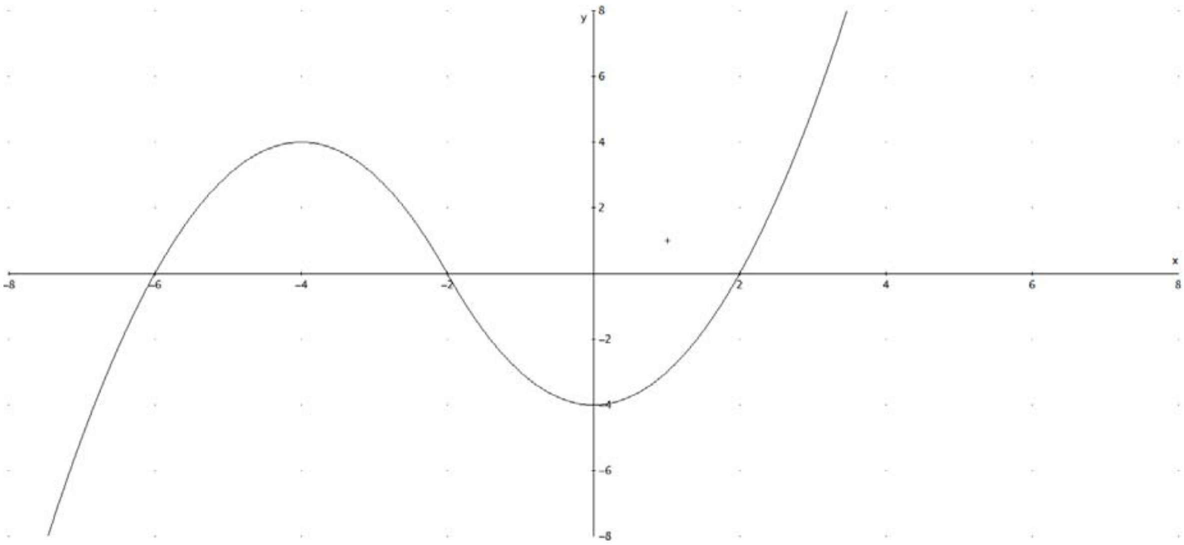
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-(x+4)^2+4\right)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-4\right)=\infty$ ***, luego no hay asíntotas horizontales;*** $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(x+4)^2+4}{x}=\infty$ ***,*** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x}=\infty$ ***luego no hay asíntotas oblicuas. Tampoco hay asíntotas verticales;***

$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\left(-(x+4)^2+4\right)=0=\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\left(x^2-4\right)=f(-2)$***, luego*** f ***es continua en*** -2 ***y por tanto es continua en*** $\Re$ ***(en los demás puntos es polinómica);***

Si $x<-2$, $f'(x)=-2(x+4)\Rightarrow f'_-(-2)=-2(-2+4)=-4$. ***Si*** $x>-2$, $f'(x)=2x\Rightarrow f'_+(-2)=-4$ ***, luego*** f ***es derivable en*** -2 ***. En los demás puntos también es derivable al ser polinómica.***

Si $x<-2$, $f'(x)=-2(x+4)=0 \Leftrightarrow x=-4$, con $f'(x)=-2(x+4)<0 \Leftrightarrow x>-4$ ***.***

Si $x>-2$, $f'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ***, con*** $f'(x)=2x<0 \Leftrightarrow x<0$ ***luego f es estrictamente creciente si*** $x<-4$ ***, f es estrictamente decreciente si*** $-4<x<0$ ***y f es estrictamente creciente si*** $x>0$***, teniendo un máximo relativo en*** -4 ***y un mínimo relativo en 0, con*** $f(-4)=-(-4+4)^2+4=4$, $f(0)=0^2-4=-4$, $f(-8)=-(-8+4)^2+4=-12$, $f(8)=8^2-4=60$***, por lo que el mínimo absoluto es*** -12 ***(se alcanza en*** -8 ***), el máximo absoluto es 60 (se alcanza en 8). Si*** $x<-2$, $f''(x)=-2<0$***. Si*** $x>-2$, $f''(x)=2>0$ ***, luego f es cóncava si*** $x<-2$ ***, f es convexa si*** $x>-2$ ***y f tiene un punto de inflexión en*** -2 ***. Representación:***



20.- Obtén y representa una función polinómica de tercer grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto $(1,1)$ y un punto de inflexión en el punto $(0,3)$.

Solución: y = x³ – 3x + 3;

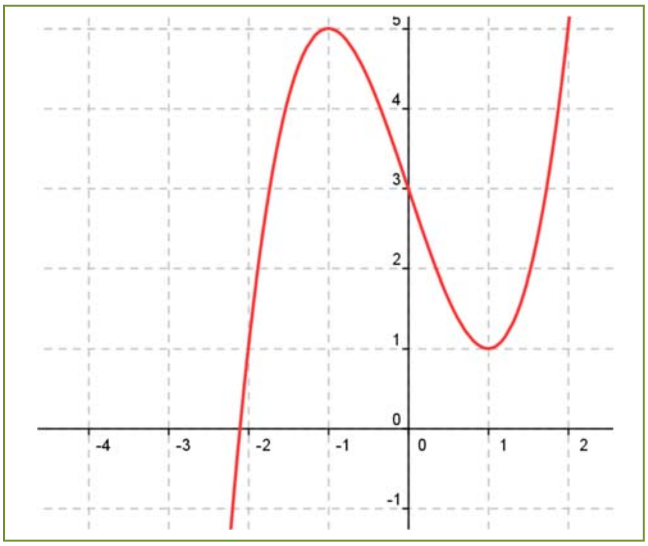
Ya que a de ser $f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(1)=3a+2b+c=0$, $f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(0)=2b=0 \Rightarrow b=0$, *por lo que* $3a+c=0 \Rightarrow c=-3a$

Además $f(1)=a+b+c+d=-2a+d=1$, *por lo que* $a=\dfrac{d-1}{2}$, $f(0)=d=3$ *y entonces* $a=\dfrac{3-1}{2}=1$, $c=-3a=-3$ *y* $f(x)=x^3-3x+3$

$D(f)=\Re$ *. Corte con el eje Y:* $f(0)=3$ *:* $(0,3)$*.*

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+3)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^3-3x+3)=\infty$, *luego no hay asíntotas horizontales;* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+3}{x}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+3}{x}=\infty$, *luego no hay asíntotas oblicuas. Tampoco hay asíntotas verticales;*

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=\pm1$, *con* $f'(x)=3(x^2-1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1$ *luego f es creciente si* $x<-1$, *f es decreciente si* $-1<x<1$, *f es creciente si* $x>1$, *f tiene un máximo relativo en* -1 *y un mínimo relativo en 1;* $f''(x)=6x=0 \Leftrightarrow x=0$, *con* $f''(x)=6x<0 \Leftrightarrow x<0$, *luego f es convexa si* $x<0$, *f es cóncava si* $x>0$ *y f tiene un punto de inflexión en 0. Representación:*

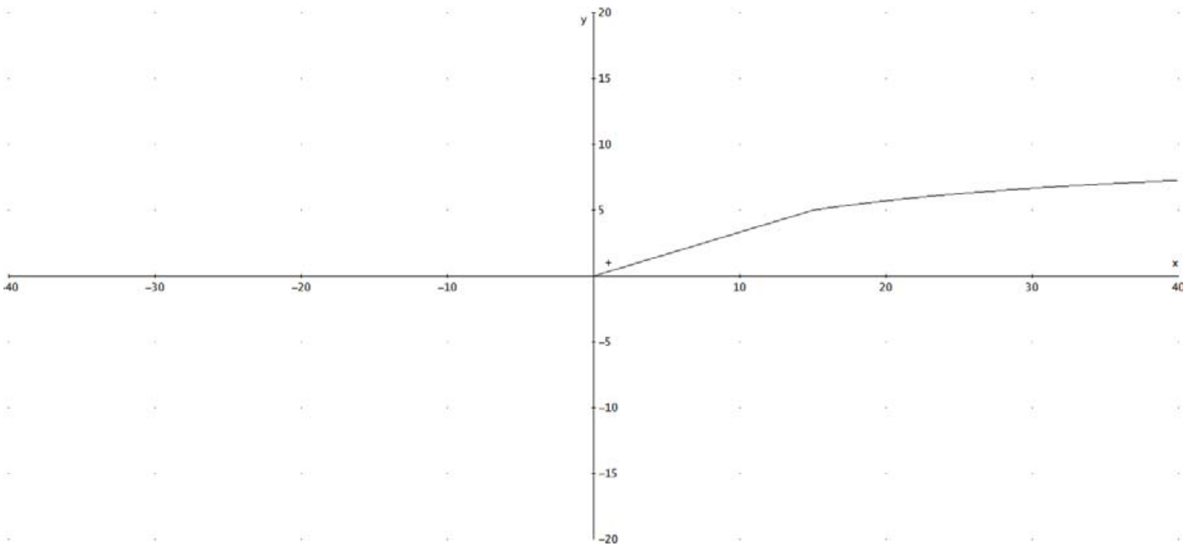


21.- La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos: $G(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0\le x\le 15\\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si} \quad x>15\end{cases}$. a) Estudia y representa la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos. b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

Solución: a) $D(G)=[0,\infty)$ ***. Corte con el eje Y:*** $G(0)=0$ ***:*** $(0,0)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} G(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{0{,}2x+3}=10$, ***luego*** $y=10$ ***asíntota horizontal; y no hay asíntotas oblicuas. Tampoco hay asíntotas verticales;*** $\lim\limits_{x\to 15^-} G(x)=\lim\limits_{x\to 15^-}\dfrac{x}{3}=5=\lim\limits_{x\to 15^+} G(x)=\lim\limits_{x\to 15^+}\dfrac{2x}{0{,}2x+3}$, ***luego G es continua en 15***

Si $x<15$, $G'(x)=\dfrac{1}{3}>0$, ***luego G es estrictamente creciente, si*** $x>15$, $G'(x)=\dfrac{2(0{,}2x+3)-2x\,0{,}2}{(0{,}2x+3)^2}=\dfrac{6}{(0{,}2x+3)^2}>0$, ***luego G es estrictamente creciente y G no tiene extremos relativos. Si*** $x<15$ ***G es una recta, si*** $x>15$, $G''(x)=-\dfrac{6}{(0{,}2x+3)^3}<0$ ***, luego G es cóncava y G no tiene puntos de inflexión. Representación:***



Si $x<15$, $G(x)=\dfrac{x}{3}<5$ ***, luego el estudiante no aprobará.***

b) Como G es estrictamente creciente y $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)=10$ ***, se cumple que*** $G(x)<10$ ***y la puntuación nunca llega a 10.***

AUTOEVALUACIÓN

1. El dominio de definición de la función $f(x) = 2^{\frac{sen(x+3)}{x^2-4}}$ es:

   a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$ c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$ d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pi/2\}$

Solución: a)

2. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$ son:

   a) (–1, 0), (4, 0), (0, –4/3) b) (3, 0), (0, 4) c) (1, 0), (–4, 0), (0, 4/3) d) (1, 0), (4, 0), (0, –4/3)

Solución: c)

3. Indica cuál de las siguientes funciones no tiene ningún tipo de simetría:

   a) $y = x^2$ b) $y = x^3$, c) $y = e^x$ d) $y = sen(x)$

Solución: c)

4. Las asíntotas de la función $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}$ son:

   a) $x = 3$, $x = 4$, $y = 1$ b) $x = 2$, $x = 1$, $y = 1$ c) $x = -3$, $x = -4$, $y = 1/6$ d) $x = 3$, $x = 4$, $y = x-2$

Solución: a)

5. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 12x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene máximos y mínimos en los puntos de abscisa siguientes:

   a) $x = 0$, $x = 2$ b) $x = 2$ c) $x = 3$, $x = 2$ d) $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

Solución: a)

6. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa:

   a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

Solución: a)

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El dominio de las funciones polinómicas es siempre toda la recta real
b) Las funciones definidas a trozos nunca son continuas
c) Las funciones exponenciales están definidas en la misma región que su exponente
d) Las funciones: $y = e^x$; $y = sen(x)$; $y = cos(x)$ están definidas en toda la recta real

Solución: Todas son ciertas

8. La función $f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no está definida en los intervalos indicados:

   a) (1, 2), (3, 4) b) [1, 2], [3, 4] c) [1, 2], (3, 4) d) (1, 2), [3, 4]

Solución: d)

9. La función $f(x) = \ln(\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)})$ tiene como asíntota horizontal:

   a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) No tiene d) $y = 1/6$

Solución: a)

10. La función $f(x) = 2 \cdot \cos 3x$ tiene como amplitud y periodo:

    a) $A = 2$, $T = 2\pi/3$ b) $A = 3$, $T = \pi$ c) $A = 4$, $T = 2\pi/3$ d) $A = 2$, $T = 2\pi$

Solución: a)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Considera la función: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2}$. a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

b) Determina sus asíntotas. c) Dibuja la gráfica de $y=f(x)$.

Solución: a) Se cumple que:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x)x^2-(x^3+3x^2-4)2x}{x^4}=\frac{(3x^2+6x)x-(2x^3+6x^2-8)}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x=-2$$ ***, con:***

$$f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}<0\Leftrightarrow x^3+8<0, x^3>0 \text{ ó } x^3+8>0, x^3<0\Leftrightarrow -2<x<0$$ ***luego f es estrictamente creciente si*** $x<-2$***, f es estrictamente decreciente si*** $-2<x<0$***, estrictamente creciente si*** $x>0$ ***y f tiene un máximo relativo en*** -2

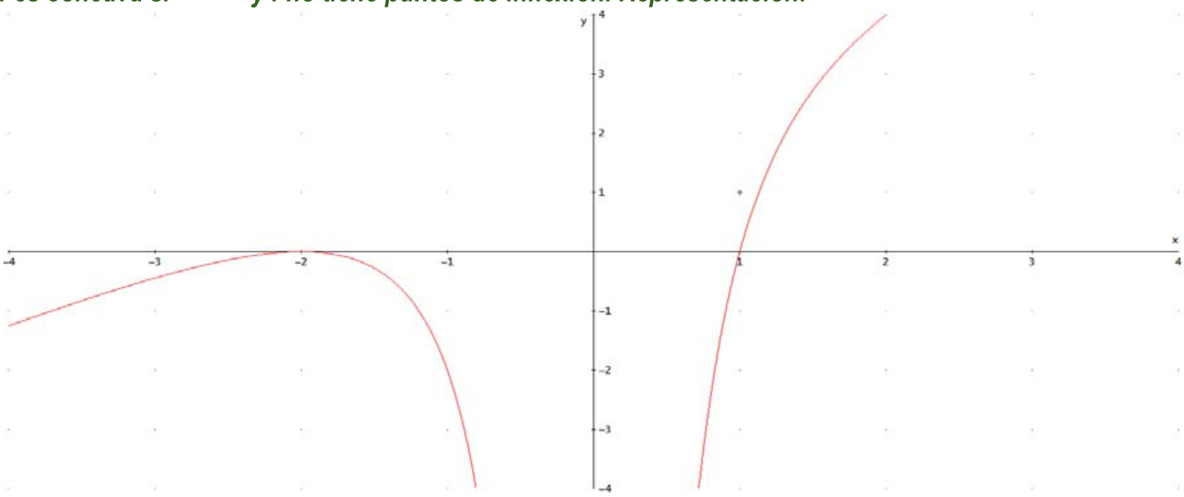
b) Se cumple que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2}=\pm\infty$$ ***, luego f no tiene asíntota horizontal.*** $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3}=1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+3x^2-4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-4}{x^2}=3$$ ***, luego*** $y=x+3$ ***es una asíntota oblicua;***

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2}=\frac{-4}{0}=-\infty$$ ***, luego*** $x=0$ ***es una asíntota vertical.***

c) $D(f)=\Re-\{0\}$***;*** $$f''(x)=\frac{3x^2x^3-(x^3+8)3x^2}{x^3}=-\frac{24}{x}$$ ***, con*** $f''(x)=-\frac{24}{x}<0\Leftrightarrow x>0$ ***luego f es convexa si*** $x<0$***, f es cóncava si*** $x>0$ ***y f no tiene puntos de inflexión. Representación:***



(2) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. b) Halla, si existen, los máximos y mínimos de la función. c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

Solución: a) Se cumple que:

$f'(x)=2\,x\,e^{-x^2}-2\,x^3\,e^{-x^2}=2\,x\,e^{-x^2}\,(1-x^2)=0\Leftrightarrow x=0,\,x=\pm 1$, ***con:***

$f'(x)=2\,x\,e^{-x^2}\,(1-x^2)<0\Leftrightarrow x<0,1-x^2>0\text{ ó }x>0,1-x^2<0\Leftrightarrow -1<x<0\text{ ó }x>1$ ***luego f es estrictamente creciente si*** $x<-1$***, f es estrictamente decreciente si*** $-1<x<0$***, estrictamente creciente si*** $0<x<1$ ***y f es estrictamente decreciente si*** $x>1$

b) f tiene un máximo relativo en -1***, un mínimo relativo en 0 y un máximo relativo en 1***

c) $D(f)=\Re$ ***; Corte con el eje Y:*** $f(0)=0$ ***:*** $(0,0)$***. Cortes con el eje X:*** $f(x)=x^2\,e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x=0$ ***:*** $(0,0)$***.***

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0$***, luego*** $y=0$ ***asíntota horizontal en*** $\pm\infty$ ***y no hay asíntotas oblicuas. Tampoco hay asíntotas verticales;***

$f'(x)=2\,(x-x^3)e^{-x^2}\Rightarrow f''(x)=2\,(1-3\,x^2)e^{-x^2}-4\,x\,(x-x^3)e^{-x^2}=2\,(2\,x^4-5\,x^2+1)e^{-x^2}=0\Leftrightarrow 2\,x^4-5\,x^2+1=0$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}}$

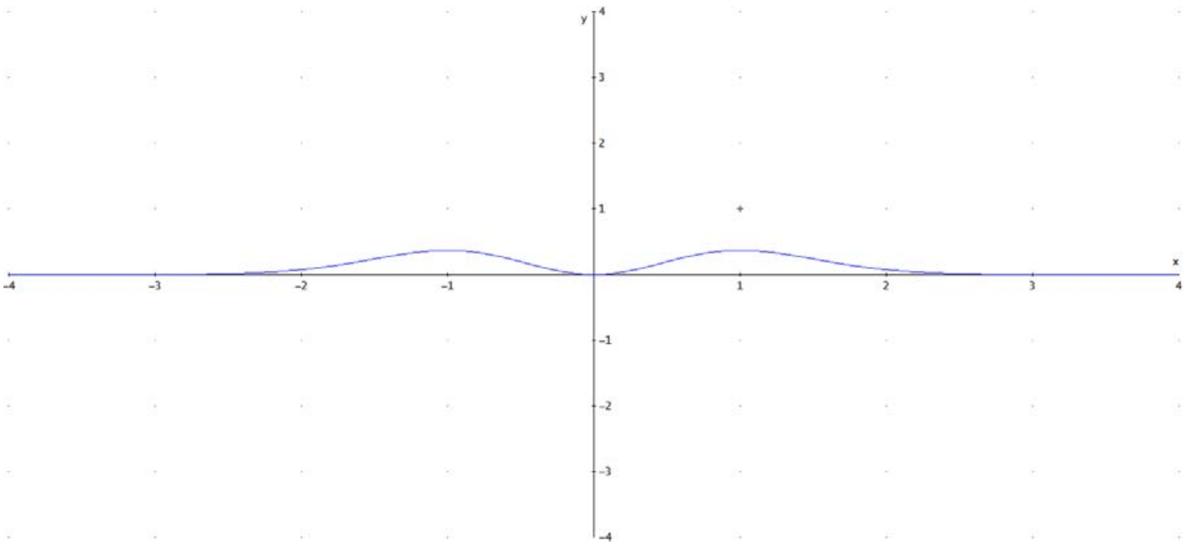
Con

$f''(x)=2\,(2\,x^4-5\,x^2+1)e^{-x^2}<0\Leftrightarrow 2\,x^4-5\,x^2+1<0\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{17}}{4}<x^2<\frac{5+\sqrt{17}}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x<-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\text{ ó }x>\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\right)\text{y}-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}<x<\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}<x<-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}\text{ ó }\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}<x<\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$

Luego f es convexa si $x<-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$***, f es cóncava si*** $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}<x<-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$***, f es convexa si*** $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}<x<\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$***, f es cóncava si*** $\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}<x<\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$***, f es convexa si*** $x>\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$ ***y f tiene puntos de inflexión en*** $x=\pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}}$***. Representación:***



(3) Se considera la función real $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Encuentra los valores de a, b y c para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ sean paralelas al eje OX, sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

Solución: Ha de ser:

$$f'(x)=3\,x^2+2\,a\,x+b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(2)=3\,2^2+2\,a\,2+b=4\,a+b+12=0 \\ f'(4)=3\,4^2+2\,a\,4+b=8\,a+b+48=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a+36=0 \Rightarrow a=-9, b=12-4\,a=12+36=48$$

Además $f''(x)=6\,x+2\,a=6\,x-18=0 \Leftrightarrow x=3$ ***. Para que el punto de inflexión esté en el eje OX:***

$$f(3)=3^3-9\,3^2+48\times 3+c=c+90=0 \Rightarrow c=-90$$

(4) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$. a) Calcula los valores de a y b para que la función sea derivable en todos los números reales. b) Para esos valores de a y b halle los extremos de la función y dibuje su gráfica.

Solución: a) Para que sea continua en 1:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3-x^2)=1^3-1^2=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a\,x+b)=a+b\Rightarrow b=-a$

Si $x<1$, $f(x)=x^3-x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x\Rightarrow f'_-(1)=31^2-2=1$

Si $x>1$, $f(x)=a\,x-a\Rightarrow f'(x)=a\Rightarrow f'_+(1)=a$.

Para que sea derivable en 1 (en los demás puntos no hay problema): $f'_+(1)=a=f'_-(1)=1, b=-a=-1$

b) Si $x<1$, $f'(x)=3\,x^2-2\,x=x\,(3\,x-2)=0\Leftrightarrow x=0, x=\frac{2}{3}$, *con* $f'(x)=3\,x^2-2\,x<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{2}{3}$.

Si $x>1$, $f'(x)=a=1>0$. *Entonces f es estrictamente creciente si* $x<0$, *f es estrictamente decreciente si* $0<x<\frac{2}{3}$ *y f es estrictamente creciente si* $x>\frac{2}{3}$, *por lo que f tiene un máximo relativo en 0 y un mínimo relativo en* $\frac{2}{3}$

$D(f)=\Re$; *Corte con el eje Y:* $f(0)=0$: $(0,0)$. *Cortes con el eje X: Si* $x<1$, $f(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$, *si* $x\ge 1$, $f(x)=x-1=0\Leftrightarrow x=1$: $(0,0)$, $(1,0)$.

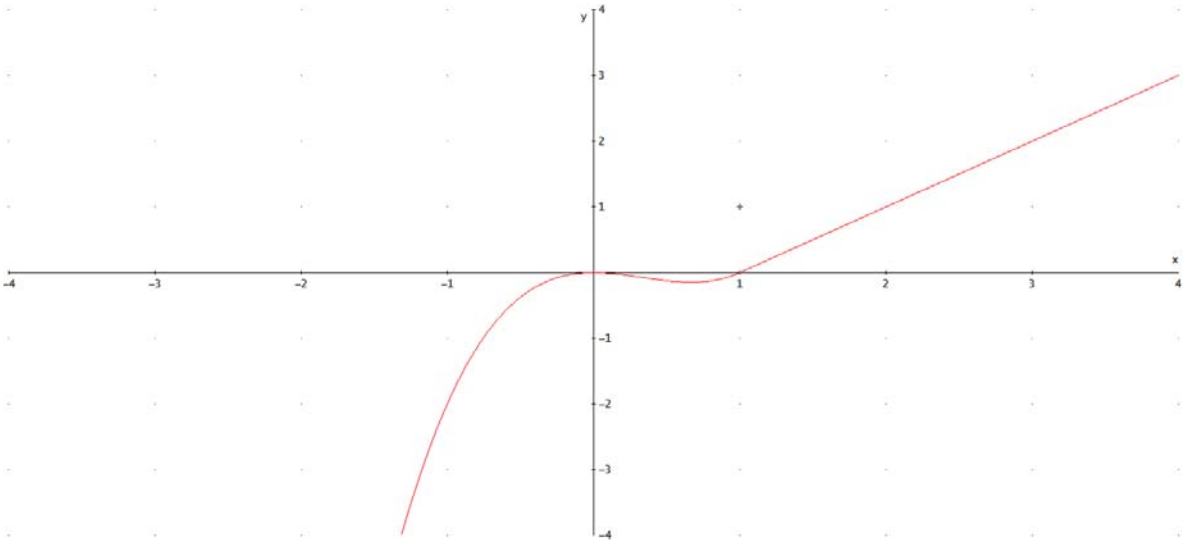
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2(x-1)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)=\infty$ *luego no hay asíntotas horizontales;*

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} x(x-1)=\infty$ *y no hay asíntota oblicua en* $-\infty$; $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}(x-1-x)=-1$, *luego* $y=x-1$ *es asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;*

Si $x<1$, $f''(x)=6\,x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, *con* $f''(x)=6\,x-2<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$.

Si $x>1$, *f es una recta.*

Luego f es cóncava si $x<\frac{1}{3}$, *f es convexa si* $\frac{1}{3}<x<1$ *y f tiene punto de inflexión en* $x=\frac{1}{3}$. *Representación:*



(5) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & si \quad x\le -2 \\ 2x+4 & si \quad -2<x\le 0 \\ a\cos x & si \quad x>0 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a. b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a. c) Para $a=4$, haz un dibujo aproximado de su gráfica.

Solución:

a)

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x^2+6x+8)=(-2)^2+6(-2)+8=0=\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(2x+4)=-4+4=0$, ***por lo que***

$\lim_{x\to -2} f(x)=0=f(-2)$ ***y f es continua en*** -2 ***;***

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+4)=0+4=4=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} a\cos x=a\cos 0=a$ ***, por lo que si*** $a=4$***:***

$\lim_{x\to 0} f(x)=4=f(0)$ ***y f es continua en 0 y por tanto en la recta real (en los demás puntos no hay problema).***

Si $a\neq 4$***, no existe*** $\lim_{x\to 0} f(x)$ ***y f no es continua en 0 y por tanto es continua en*** $\Re-\{0\}$

b) Si $x<-2$, $f(x)=x^2+6x+8\Rightarrow f'(x)=2x+6\Rightarrow f'_-(-2)=2(-2)+6=2$

Si $-2<x<0$, $f(x)=2x+4\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f'_+(-2)=2$ ***y f es derivable en*** -2 ***; si*** $a\neq 4$***, f no es continua en 0 y por tanto no es derivable en 0 por lo que f será derivable en*** $\Re-\{0\}$ ***(en los demás puntos no hay problema).***

Si $a=4$ ***y*** $x<0$, $f(x)=2x+4\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f'_-(0)=2$***, si*** $x>0$***:***

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=-4\,senx\Rightarrow f'_+(0)=0$ ***, por tanto f no es derivable en 0 (derivadas laterales distintas), por lo que f será derivable en*** $\Re-\{0\}$ ***en todo caso.***

c) $D(f)=\Re$ ***; Corte con el eje Y:*** $f(0)=4$ ***:*** $(0,4)$***. Cortes con el eje X:***

Si $x\le -2$, $f(x)=x^2+6x+8=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=-2,-4$ ***, si*** $-2<x\le 0$:

$f(x)=2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$ ***, si*** $x>0$, $f(x)=4\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in N$ ***:***

$(-4,0)$, $(-2,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0\right), k\in N$.

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(x^2+6x+8)=\infty$ ***,*** $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty} 4\cos x$ ***, no existe, luego no hay asíntotas horizontales;***

$\lim_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+6x+8}{x}=-\infty$***,*** $\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\dfrac{4\cos x}{x}=0$ ***luego no hay asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;***

Si $x<-2$, $f(x)=x^2+6x+8\Rightarrow f'(x)=2x+6=0\Rightarrow x=-3$***, con*** $f'(x)=2x+6<0\Rightarrow x<-3$

Si $-2<x<0$, $f(x)=2x+4\Rightarrow f'(x)=2>0$***, si*** $x>0$***:***

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=-4\,senx=0\Leftrightarrow x=k\pi, k\in N$ ***, con:***

$f'(x)=-4\,senx<0\Leftrightarrow (2k-2)\pi<x<(2k-1)\pi, k\in N$ ***. Entonces f es decreciente si*** $x<-3$ ***, f es creciente si*** $-3<x<0$***, f es decreciente si*** $(2k-2)\pi<x<(2k-1)\pi, k\in N$ ***y f es creciente si:***

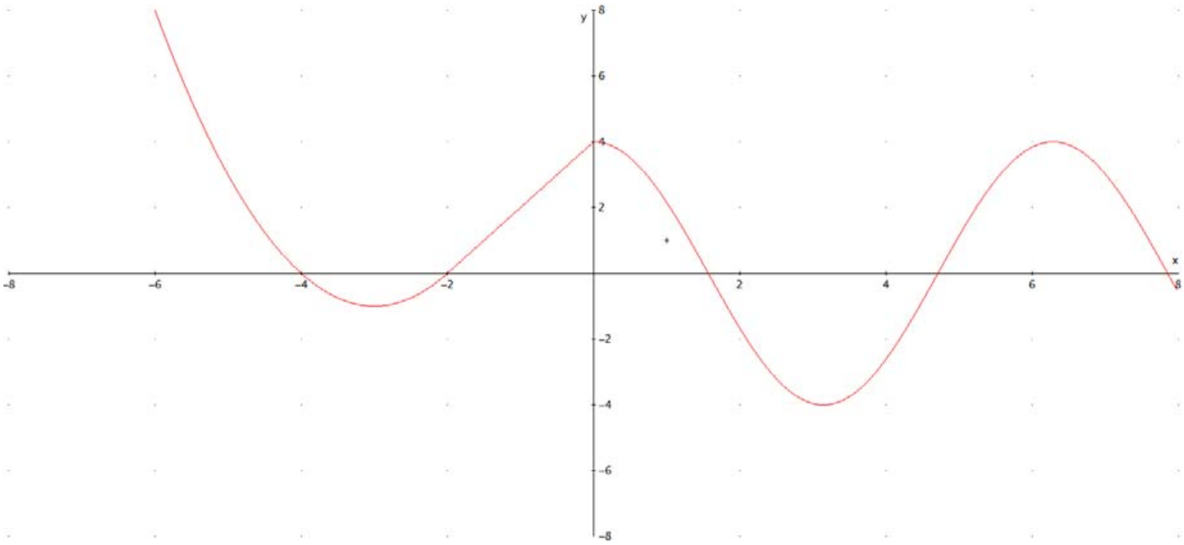
$(2k-1)\pi<x<2k\pi, k\in N$ ***, por lo que f tiene un mínimo relativo en*** -3***, un máximo relativo en*** $(2k-2)\pi, k\in N$ ***y un mínimo relativo en*** $(2k-1)\pi, k\in N$

Si $x<-2$***,*** $f''(x)=2>0$ ***, si*** $-2<x<0$***,*** $f''(x)=0$ ***, si*** $x>0$***:***

$f''(x) = -4\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in N \cup \{0\}$, *con:*

$f''(x) = -4\cos x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ó $\dfrac{\pi}{2} + (2k-1)\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in N$.

Luego f es convexa si $x < -2$***, f es una recta si*** $-2 < x < 0$***, f es cóncava si*** $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$***, f es convexa si*** $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$***, f es cóncava si*** $\dfrac{\pi}{2} + (2k-1)\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in N$ ***, f es convexa si:*** $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in N$ ***y f tiene punto de inflexión en*** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in N \cup \{0\}$***. Representación:***



(6) Se considera la función $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$. a) Estudia el dominio de definición y calcule las asíntotas. b) Estudia los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. c) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. d) Esboza la gráfica de la función.

Solución: *a)* $D(f)=\Re-\{0\}$*;*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2}=0$ *,* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 4\cos x$ *, luego* $y=0$ *asíntota horizontal y no hay asíntota oblicua;*

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$ *, luego* $x=0$ *asíntota vertical;*

b) $f'(x)=\frac{x^2-(x-1)2x}{x^4}=\frac{2-x}{x^3}=0\Rightarrow x=2$*, con:*

$f'(x)=\frac{2-x}{x^3}<0\Rightarrow 2-x>0, x<0 \text{ ó } 2-x<0, x>0 \Leftrightarrow x<0 \text{ ó } x>2$

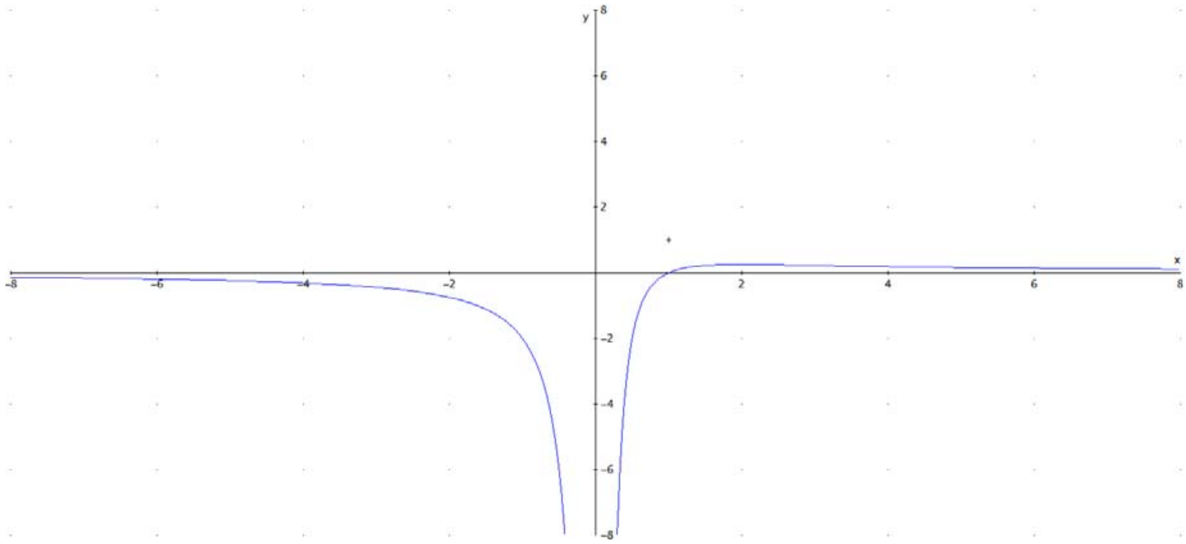
Entonces f es decreciente si $x<0$*, f es creciente si* $0<x<2$ *y f es decreciente si* $x>2$

$f''(x)=\frac{-x^3-(2-x)3x^2}{x^6}=\frac{2x-6}{x^4}=0\Leftrightarrow x=3$*, con:* $f''(x)=\frac{2x-6}{x^4}<0\Leftrightarrow x<3$

Luego f es cóncava si $x<0$ *y si* $0<x<3$*, f es convexa si* $x>3$

c) f tiene un máximo relativo en 2 y un punto de inflexión en 3

d) Representación:



(7) Sabiendo que $f(x)=\begin{cases}4 & si \quad x\le 0\\ 4-x^2 & si \quad x>0\end{cases}$. a) Estudia su continuidad en el punto $x=0$. b) Usando la definición de derivada calcula, si existe, la derivada de la función f en $x=0$. c) Dibuja la gráfica de la función.

Solución: a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 4=4=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(4-x^2)=4-0^2=4$*, por lo que* $\lim_{x\to 0} f(x)=4=f(0)$ *y f es continua en 0*

b) $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-4}{x}=0=f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4-x^2-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

Por tanto $f'(0)=0$

c) $D(f)=\Re$ *; Corte con el eje Y:* $f(0)=4$ *:* $(0,4)$*. Cortes con el eje X:*

Si $x>0$*,* $f(x)=4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$*:* $(-2,0)$*,* $(2,0)$*.*

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} 4=4$ *,* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(4-x^2)=-\infty$*, luego* $y=4$ *asíntota horizontal en* $-\infty$ *y no hay asíntota oblicua en* $-\infty$*;*

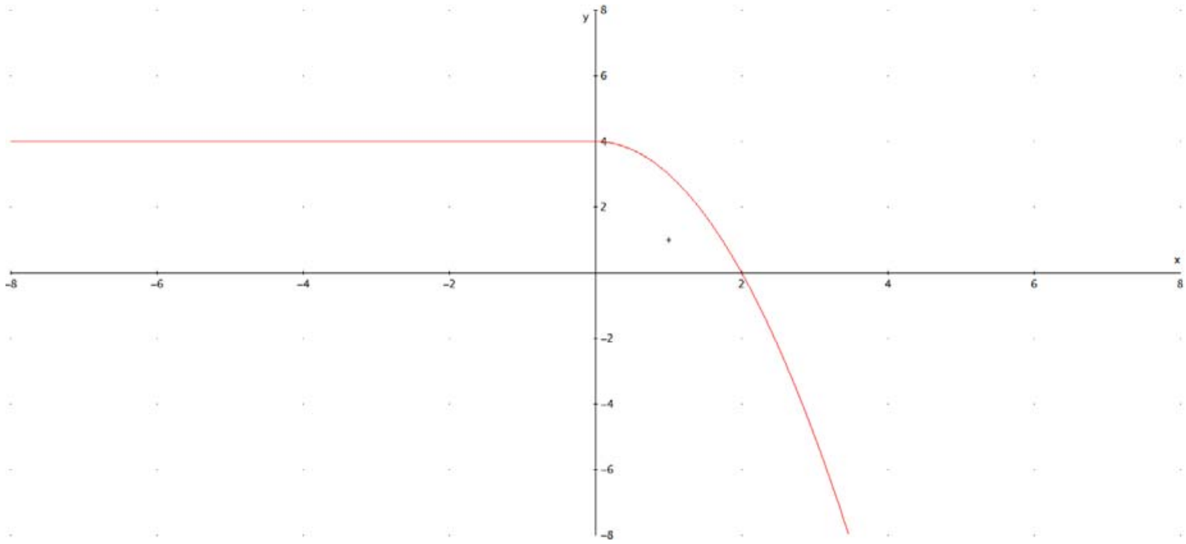
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-x^2}{x}=-\infty$*, luego no hay asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;*

Si $x<0$*,* $f(x)=4\Rightarrow f'(x)=0$ *, función constante.*

Si $x>0$*,* $f(x)=4-x^2\Rightarrow f'(x)=-2x<0$ *, luego f es decreciente si* $x>0$*, por lo que f tiene un máximo relativo en 0.*

Si $x<0$*,* $f''(x)=0$ *, si* $x>0$*,* $f''(x)=-2<0$ *, luego f es una recta si* $x<0$*, f es cóncava si* $x>0$

Representación:



(8) Dada la función $y = 5x \cdot e^{x-1}$. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

Solución: a) $f'(x) = 5e^{x-1} + 5xe^{x-1} = 5e^{x-1}(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1$*, con:*

$f'(x) = 5e^{x-1}(1+x) < 0 \Rightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Entonces f es decreciente si $x < -1$*, f es creciente si* $x > -1$

b) f tiene un mínimo relativo en -1*;* $f''(x) = 5e^{x-1}(1+x) + 5e^{x-1} = 5e^{x-1}(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$*, con* $f''(x) = 5e^{x-1}(2+x) < 0 \Rightarrow x < -2$*, luego f es cóncava si* $x < -2$*, f es convexa si* $x > -2$ *y tiene un punto de inflexión en* -2

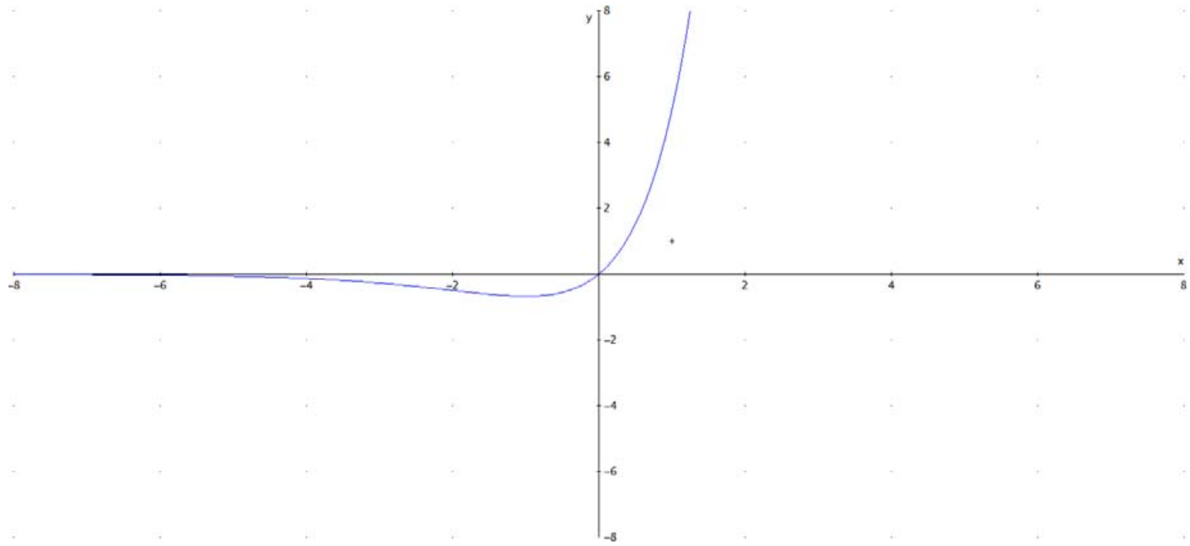
c) $D(f) = \Re$ *; Corte con el eje Y:* $f(0) = 0$ *:* $(0,0)$*. Cortes con el eje X:*

$f(x) = 5xe^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$: $(0,0)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5xe^{x-1} = 5\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{1-x}} = 0$*,* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 5xe^{x-1} = \infty$*, luego* $y = 0$ *asíntota horizontal en* $-\infty$ *y no hay asíntota oblicua en* $-\infty$ *;*

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5xe^{x-1}}{x} = \infty$*, luego no hay asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;*

Representación:



(9) Sea $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$. a) Determina el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión. b) Halla las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función.

Solución: a) $D(f)=\Re-\{3\}$ *(se anula el denominador pero no el numerador),*

$$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=0\Rightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=4,2$$ *, con:*

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}<0\Rightarrow x^2-6x+8<0\Leftrightarrow 2<x<4$$

Entonces f es creciente si $x<2$*, f es decreciente si* $2<x<4$*, f es creciente si* $x>4$*, f tiene un máximo relativo en 2 y f tiene un mínimo relativo en 4;*

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+8)2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+8)2}{(x-3)^3}=\frac{2}{(x-3)^3}<0\Rightarrow x<-3,$$

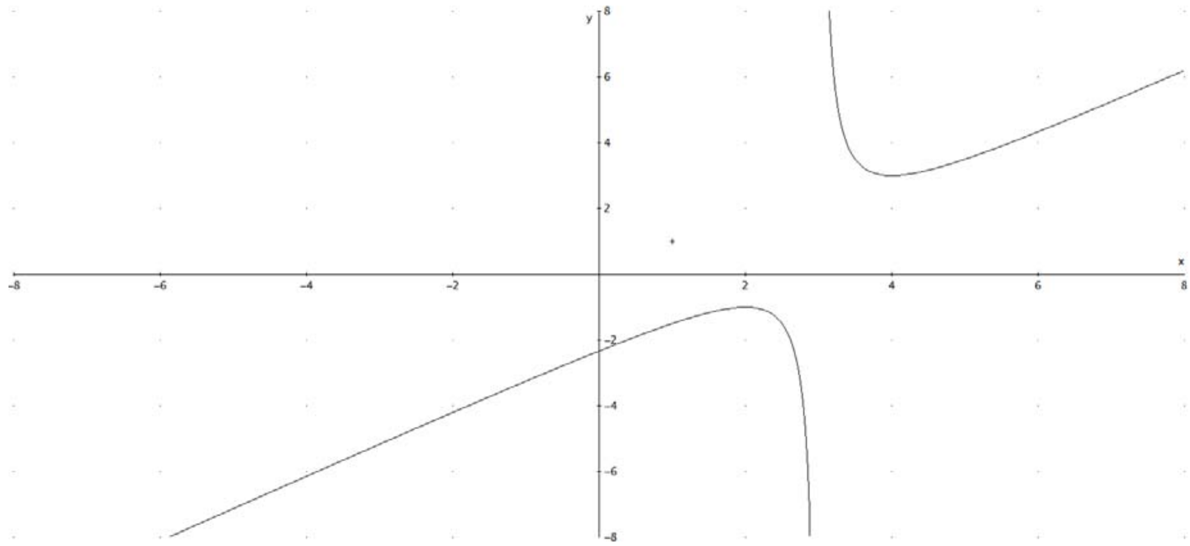
luego f es cóncava si $x<-3$ *, f es convexa si* $x>-3$ *y no tiene puntos de inflexión.*

b) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-3}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-3}=\infty$*, luego f no tiene asíntotas horizontales*

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x+7}{x^2-3x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x+7}{x-3}=-2$*, luego:*

$y=x-2$ *asíntota oblicua;* $\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-5x+7}{x-3}=\infty$, *luego* $x=3$ *asíntota vertical.*

Representación:



(10) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1} & si \quad x<1 \quad x\neq -1\\ -x^2+3x-2 & si \quad x\geq 1\end{cases}$. a) Halla un valor de la función en $x=-1$ que la haga continua en ese punto. b) Analiza su continuidad y derivabilidad en toda la recta real. c) Traza su gráfica aproximada.

Solución: a) $f(-1):=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$

b) f no es continua ni derivable en -1 *al no estar definida (salvo si se prolonga como en el apartado a);*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-x^2+3x-2\right)=-1+3-2=0,$$

luego:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ *y f es continua en 1;* $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$*; si* $x>1$,

$f(x)=-x^2+3x-2\Rightarrow f'(x)=-2x+3\Rightarrow f'_+(1)=-2+3=1$. *Entonces* $f'(1)=1$ *por lo que f es derivable en 1. Como en los demás puntos no hay problema, f es continua y derivable en* $\Re-\{-1\}$

c) $D(f)=\Re-\{-1\}$*;*

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2+3x-2\right)=-\infty$, *luego no hay asíntotas horizontales*

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x(x^2-1)}=1$, $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x-1-x)=-1$, *luego*

$y=x-1$ *asíntota oblicua en* $-\infty$*;* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x-2}{x}=-\infty$, *luego no hay asíntota oblicua en* ∞*; tampoco hay asíntota vertical.*

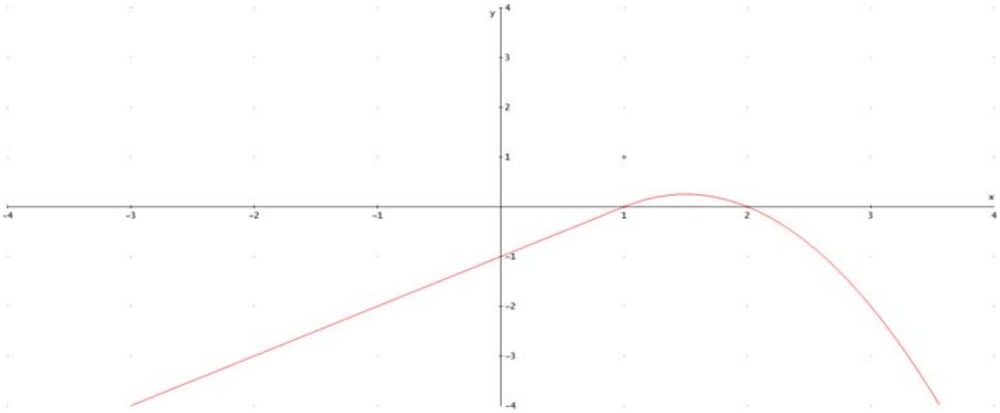
Si $x<1$, $f(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-1}=x-1\Rightarrow f'(x)=1>0$*, si* $x>1$ $f'(x)=-2x+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$*, con*

$f'(x)=-2x+3<0\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$

Entonces f es creciente si $x<1$*, f es creciente si* $1<x<\dfrac{3}{2}$*, f es decreciente si* $x>\dfrac{3}{2}$ *y f tiene un máximo relativo en* $\dfrac{3}{2}$

Si $x<1$, $f''(x)=0$*, si* $x>1$ $f''(x)=-2<0$*, luego f es una recta si* $x<1$*, f es cóncava si* $x>1$

Representación:



(11) Representa la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$ analizando el dominio de existencia, el crecimiento y el decrecimiento, los máximos y los mínimos, la concavidad y la convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas.

Solución: $D(f)=\Re-\{3\}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\infty$ ***, luego no hay asíntotas horizontales***

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x}=1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x-3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-2}{x-3}=2$, ***luego*** $y=x+2$ ***asíntota oblicua en*** $\pm\infty$ ***;*** $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\infty$ ***, luego*** $x=3$ ***asíntota vertical.***

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x-2)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=5,1\text{, con:}$$

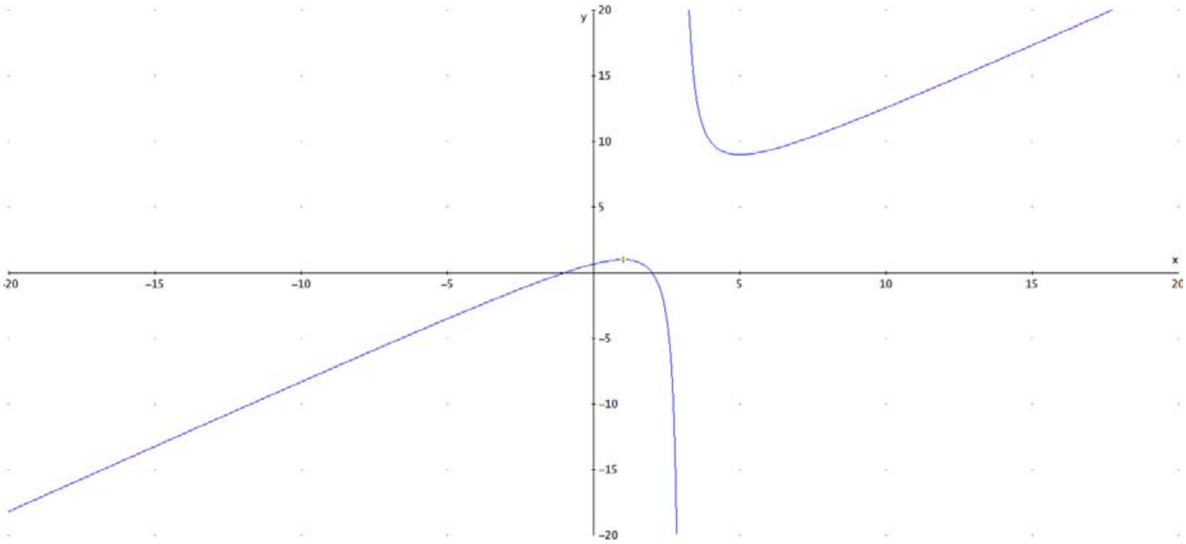
$$f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}<0\Leftrightarrow x^2-6x+5<0\Leftrightarrow 1<x<5$$

Entonces f es creciente si $x<1$***, f es decreciente si*** $1<x<5$***, f es creciente si*** $x>5$***, f tiene un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 5***

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+5)2}{(x-3)^3}=\frac{8}{(x-3)^3}\text{,} \quad \text{con}$$

$f''(x)=\dfrac{8}{(x-3)^3}<0\Leftrightarrow x<3$ ***, luego f es cóncava si*** $x<3$***, f es convexa si*** $x>3$

Representación:



(12) a) Representa gráficamente las funciones $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=|x|$.

b) Utiliza las gráficas anteriores para obtener las de las funciones $y=f(g(x))$ e $y=g(f(x))$.

Solución: a) $D(f)=\Re$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-4x+3)=\infty$, *luego no hay asíntotas horizontales*

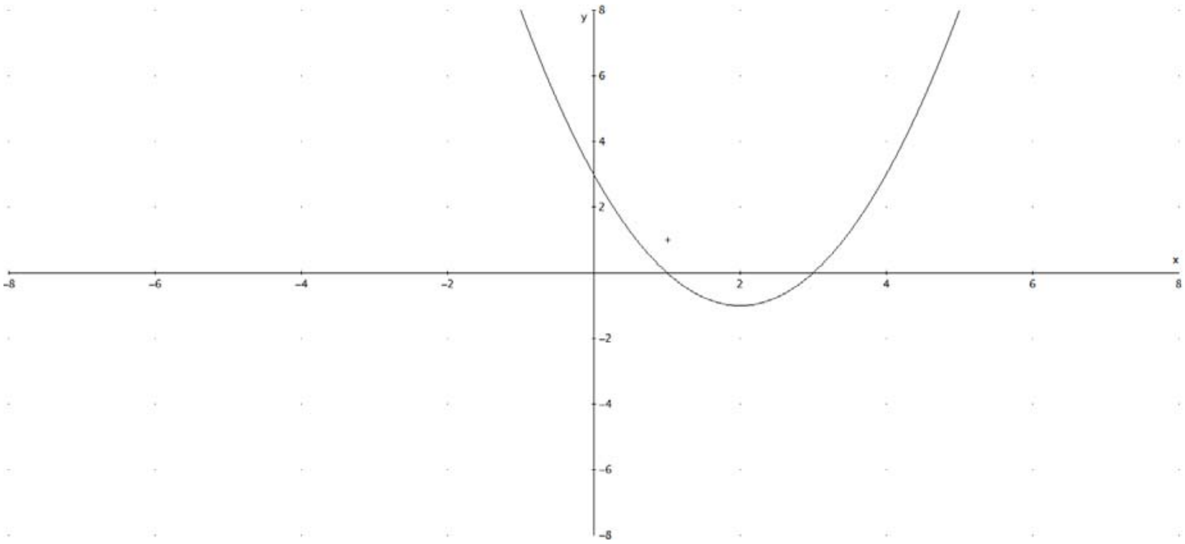
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x}=\pm\infty$, *luego no hay asíntota oblicua; tampoco hay asíntotas verticales.*

$f'(x)=2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$, *con* $f'(x)=2x-4<0 \Leftrightarrow x<2$

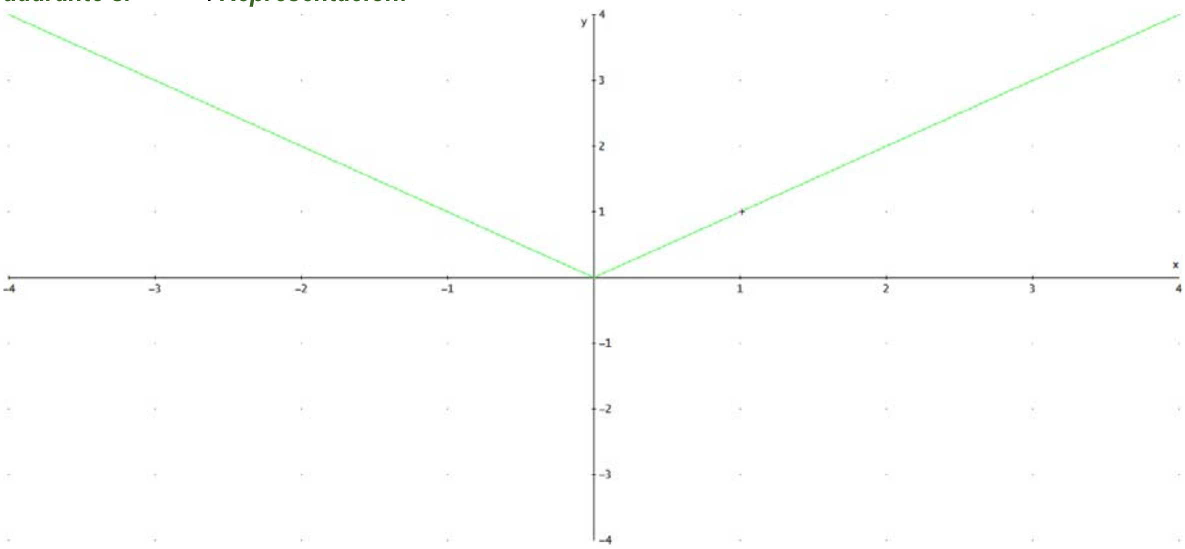
Entonces f es decreciente si $x<2$, *f es creciente si* $x>2$ *y f tiene un mínimo relativo en 2*

$f''(x)=2>0$, *luego f es convexa*

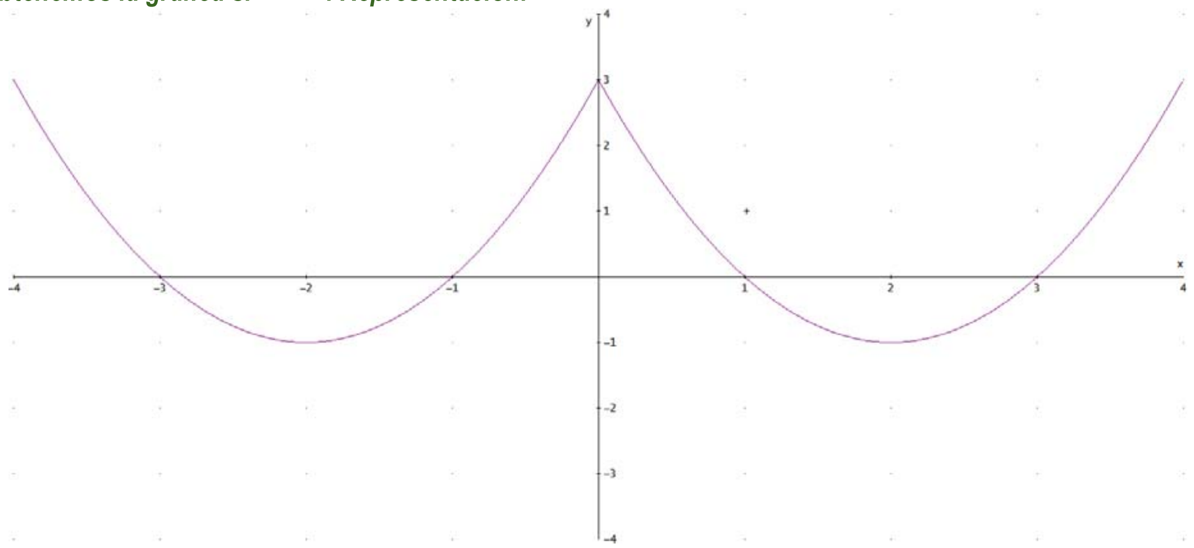
Representación:



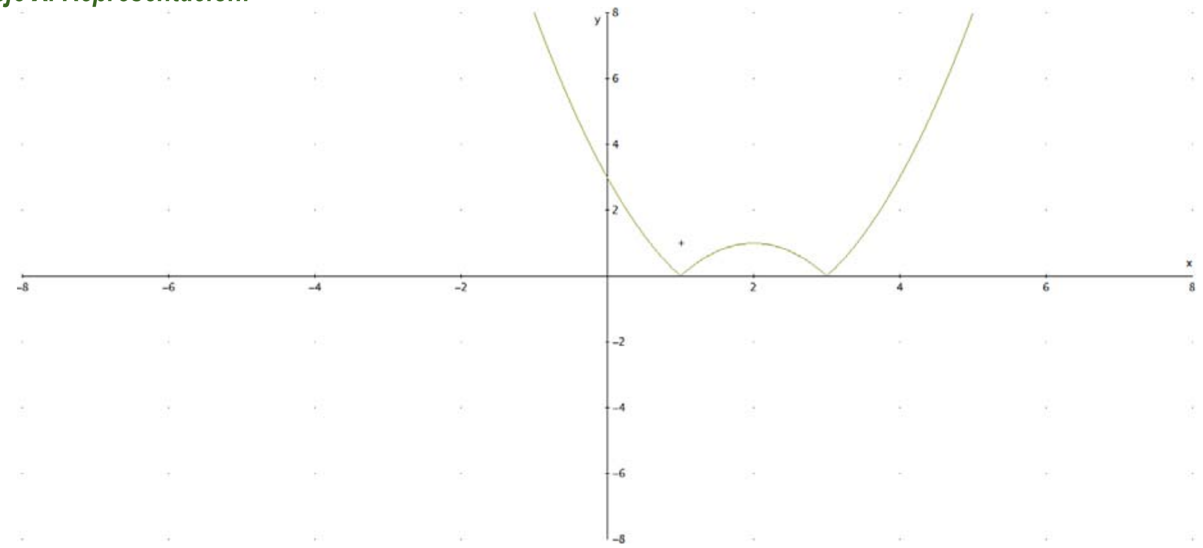
Se cumple que $|x|=\begin{cases}-x \text{ si } x<0\\ x \text{ si } x\geq 0\end{cases}$, *luego g es la bisectriz del segundo cuadrante si* $x<0$ *y la bisectriz del primer cuadrante si* $x\geq 0$. *Representación:*



b) Se cumple que $h(x)=f(g(x))=x^2-4|x|+3=\begin{cases} x^2+4x+3 \text{ si } x\le 0 \\ x^2-4x+3 \text{ si } x>0 \end{cases}$ ***, por lo que la gráfica es igual que la de f si*** $x>0$***; como*** $f(g(-x))=x^2-4|-x|+3=x^2-4|x|+3=f(g(x))$***, la función es par luego reflejando sobre el eje Y obtenemos la gráfica si*** $x\le 0$***. Representación:***



Se cumple que $g(f(x))=|x^2-4x+3|$ ***, por lo que la gráfica es igual que la de f reflejando la parte con y negativa en el eje X. Representación:***



(13) Un modelo simplificado de la altura a la que se encuentra un proyectil conduce a la siguiente expresión ($f(x)$ representa la altura, en metros, a la que se encuentra el proyectil a los *x* segundos de ser lanzado):

$$f(x) = 250 - \frac{250}{x+1} - 10x, \quad 0 \le x \le 24$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿En qué instante el proyectil empieza a caer?

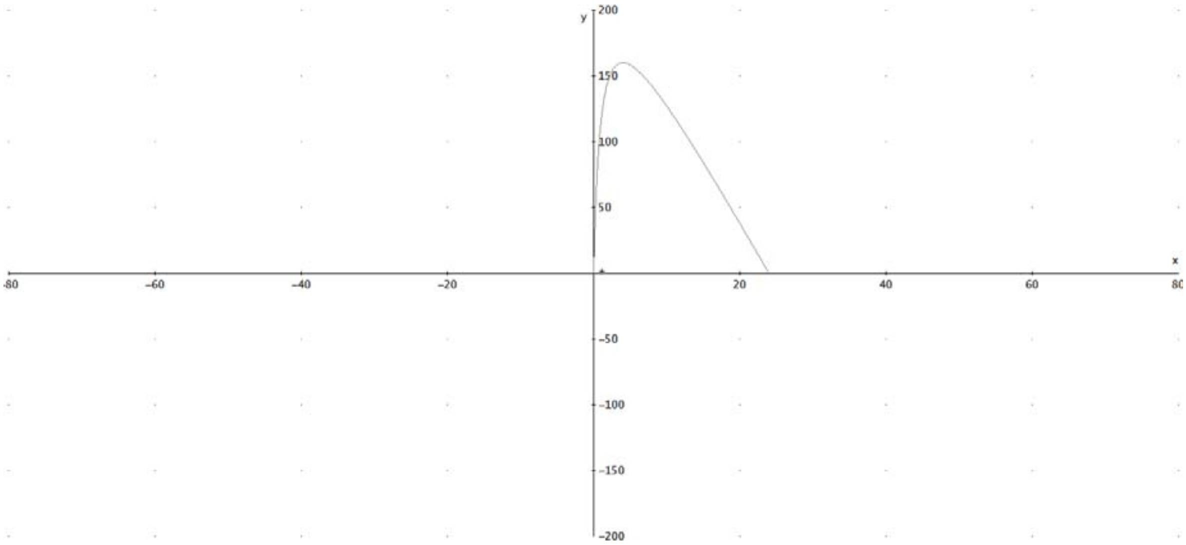
b) ¿Podríamos derribar con él un objeto que vuela a 250 metros de altura?

Solución: a) $D(f) = [0, 24]$***;***

$f'(x) = \frac{250}{(x+1)^2} - 10 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$***, con*** $f'(x) = \frac{250}{(x+1)^2} - 10 < 0 \Leftrightarrow x+1 > 5 \Leftrightarrow x > 4$ ***.***

Entonces f es creciente si $x<4$***, f es decreciente si*** $x>4$ ***y f tiene un máximo relativo en 4***

$f''(x) = -\frac{500}{(x+1)^3} < 0$ ***, luego f es cóncava. Representación:***



Empieza a caer cuando alcanza su máximo absoluto, que es en x=4 sg.

b) No, ya que $f(x) = 250 - \frac{250}{x+1} - 10\,x < 250$ ***al ser*** $x \ge 0$

(14) a) Calcula para qué valor de α la función $f(x) = (x-\alpha)^2 + \cos(x)$ tiene un extremo en el punto de abscisa $x = 0$. ¿De qué tipo de extremo se trata? b) Para el valor de α calculado, determina los cortes de la curva con los ejes y los dominios de monotonía.

Solución: a) $f'(x) = 2\,(x-\alpha) - sen x \Rightarrow f'(0) = 2\,(0-\alpha) - sen\,0 = -2\,\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ***, con:***

$f''(x) = 2 - \cos x \Rightarrow f''(0) = 2 - \cos 0 = 1 > 0$ ***, luego es un mínimo relativo.***

b) Corte con el eje Y: $f(0) = (0-0)^2 + \cos 0 = 1$ ***:*** $(0, 1)$***. Como*** $f''(x) = 2 - \cos x > 0$ ***, la función es convexa y en 0 tiene su mínimo absoluto y será f estrictamente decreciente si*** $x<0$***, f estrictamente creciente si*** $x>0$***. Por tanto nunca corta al eje X al ser*** $f(0) = 1$

(15) El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses): $f(x)=\begin{cases} 12-x^2 & si \quad 0<x\le 2 \\ (x-4)^2+4 & si \quad 2<x\le 4 \end{cases}$. a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia? b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

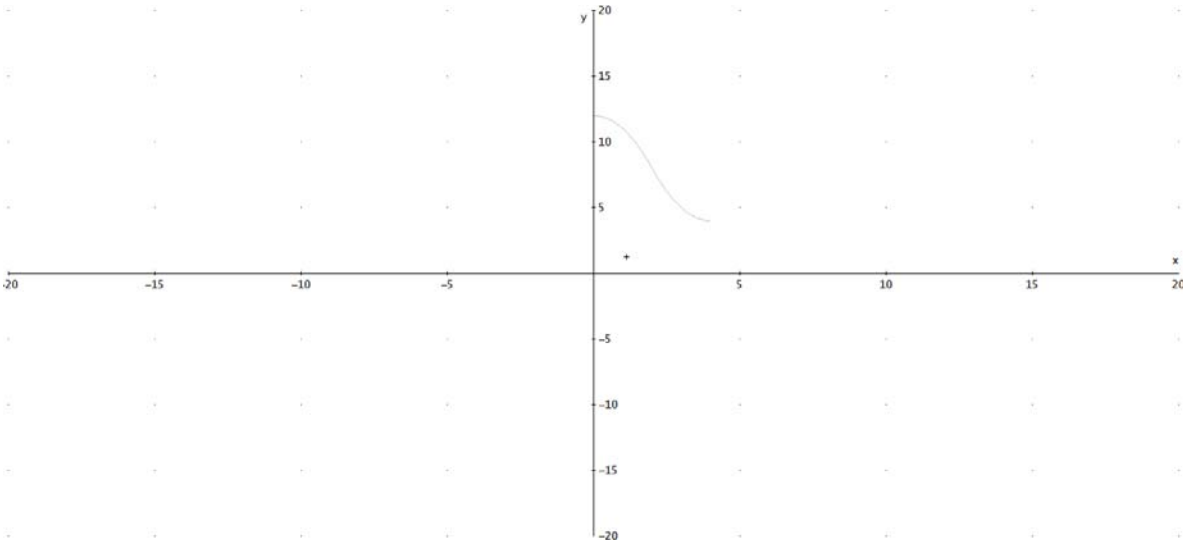
Solución: a) $D(f)=(0,4]$***;***

Si $x<2$ $f'(x)=-2x=0 \Leftrightarrow x=0$***, con*** $f'(x)=-2x<0 \Leftrightarrow 0<x<2$***. Si*** $2<x<4$ $f'(x)=2(x-4)<0$

Entonces f es decreciente si $0<x<2$***, f es decreciente si*** $x>2$

Si $x<2$***,*** $f''(x)=-2<0$***. Si*** $2<x<4$ $f'(x)=2>0$***, luego f es cóncava si*** $x<2$ ***y convexa si*** $x>2$

Representación:



$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(12-x^2)=8=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}((x-4)^2+4)$***, por lo que*** $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ ***y f es continua en 2, por lo que f es continua (en los demás puntos no hay problema) y la respuesta es afirmativa.***

b) Como f es decreciente, el mínimo se alcanza en 4 y ese tiempo mínimo es $f(4)=(4-4)^2+4=4$ ***h, por lo que nunca acaba el trabajo en menos de 3 horas.***

(16) Para un determinado modelo de coche la relación existente entre la velocidad a la que circula y el consumo viene dada a través de la siguiente expresión ($f(x)$ representa el consumo en litros cada 100 km a una velocidad de x km/h):

$$f(x)=2+\frac{x}{90}+\frac{90}{x}, x>10$$

a) Dibuja la gráfica de la función. ¿Cuál es la velocidad óptima a la que se debe circular para consumir la menor cantidad de combustible posible? b) ¿En algún instante el consumo aumenta al aumentar la velocidad? ¿Es posible conducir con un consumo de 3 litros cada 100 km?

Solución: a) $D(f)=(10,\infty)$***;***

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{x}{90}+\frac{90}{x}\right)=\infty$ ***, luego no hay asíntota horizontal***

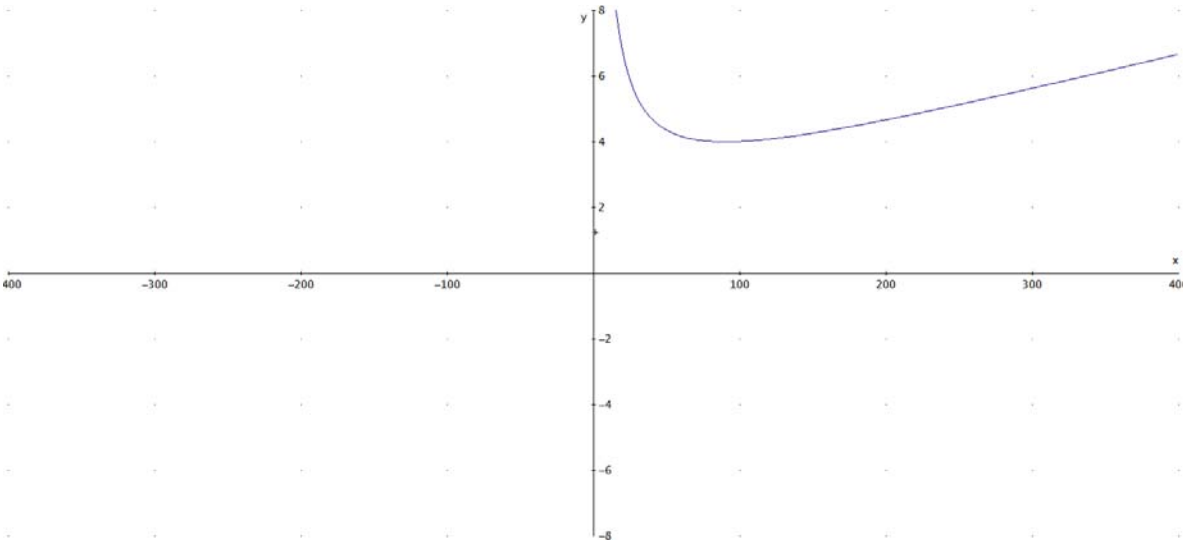
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{90}+\frac{90}{x}}{x}=\frac{1}{90}$, $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{1}{90}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{90}{x}\right)=2$ ***luego*** $y=\frac{1}{90}x+2$ ***asíntota oblicua; no hay asíntotas verticales.***

$f'(x)=\frac{1}{90}-\frac{90}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=90$***, con*** $f'(x)=\frac{1}{90}-\frac{90}{x^2}<0 \Leftrightarrow x<90$

Entonces f es decreciente si $x<90$***, f es creciente si*** $x>90$ ***y f tiene un mínimo relativo en 90***

$f''(x)=\frac{180}{x^3}>0$ ***, luego f es convexa***

Representación:



Como el mínimo absoluto se alcanza en 90, la velocidad óptima es 90 km/h

b) A partir de 90 km/h el consumo aumenta al aumentar la velocidad. El consumo mínimo es:

$f(90)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{90}{90}+\frac{90}{90}\right)=4$ ***l., luego no puede conseguir un consumo de 3 l.***

(17) El porcentaje de ocupación de una cafetería entre las 13 y las 21 horas se explica bastante bien por la siguiente función ($P(x)$ representa el porcentaje de ocupación a las x horas). $P(x)=(x^2-55x)\cdot(x+1)+1015x-5542,\quad 13\le x\le 21$

a) Indica los intervalos de tiempo en que la ocupación crece y aquellos en que decrece. b) Dibuja la función. ¿Cuándo se alcanza el porcentaje de ocupación más alto? ¿y el más bajo? ¿Cuánto valen? c) ¿La función tiene algún máximo o mínimo relativo que no sea absoluto?

Solución: a)

$$P(x)=x^3-54x^2+960x-5542 \Rightarrow P'(x)=3x^2-108x+960=0 \Leftrightarrow x^2-36x+320=0 \Leftrightarrow x=\frac{36\pm 4}{2}=20,16$$

Con $P'(x)=3x^2-108x+960<0 \Leftrightarrow 16<x<20$

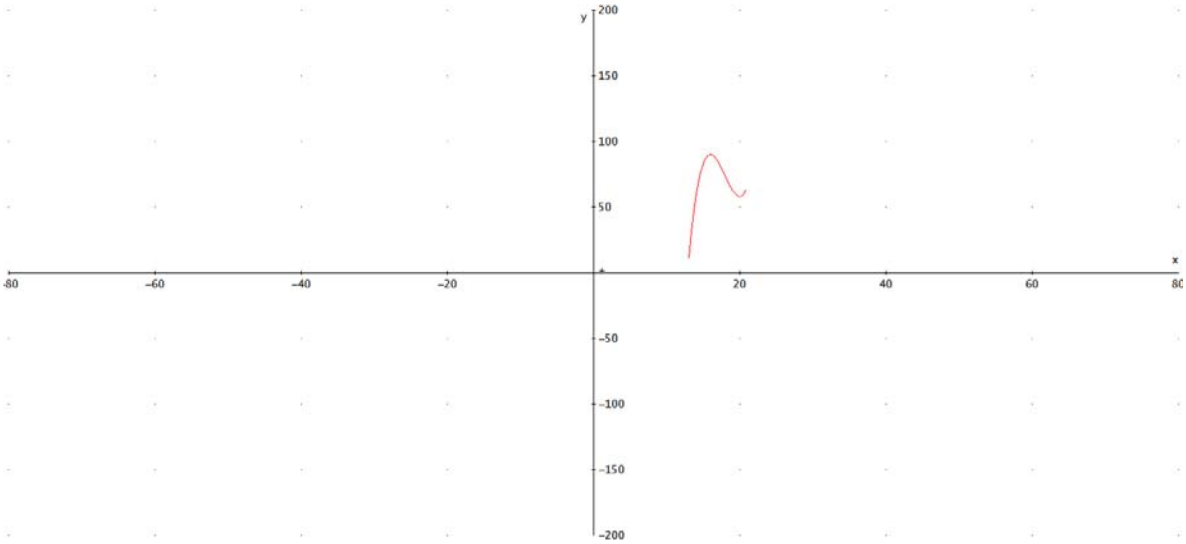
Entonces P es creciente si $13<x<16$*, P es decreciente si* $16<x<20$ *y P es creciente si* $20<x<21$

b) $D(P)=[13,21]$*;*

P tiene un máximo relativo en 16 y un mínimo relativo en 20

$P''(x)=6x-108=0 \Leftrightarrow x=\frac{108}{6}=18$*, con* $P''(x)=6x-108<0 \Leftrightarrow x<18$ *luego P es cóncava si* $13<x<18$*, P es convexa si* $18<x<21$ *y P tiene un punto de inflexión en 18.*

Representación:



El porcentaje de ocupación más alto se produce a las 16 h. y vale $P(16)=16^3-54\times 16^2+960\times 16-5542=90$*, el más bajo se produce a las 13 h. y vale* $P(13)=13^3-54\times 13^2+960\times 13-5542=9$

b) Tiene un mínimo relativo en 20 que no es absoluto

(18) Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & si \quad x<3 \\ x^2-1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$. a) Determina los valores de a para los que la función es continua. b) Representa gráficamente la función para los valores hallados en el apartado a).

Solución: a) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \dfrac{12-9a}{0}$ ***. Para que el límite sea real, ha de ser:***

$12-9a=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$ ***. Para ese valor de a, tenemos que:***

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2-4x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} 2(x+1) = 8 = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2-1)$ ***, por lo que:***

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ ***y f es continua en 3, por lo que f es continua (en los demás puntos no hay problema)***

b) $D(f)=(-\infty,\infty)$***;***

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (2x+2) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^2-1) = \infty$***, luego no hay asíntota horizontal***

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+2}{x} = 2$***,*** $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$ ***luego*** $y=2x+2$ ***asíntota oblicua en*** $-\infty$***;***

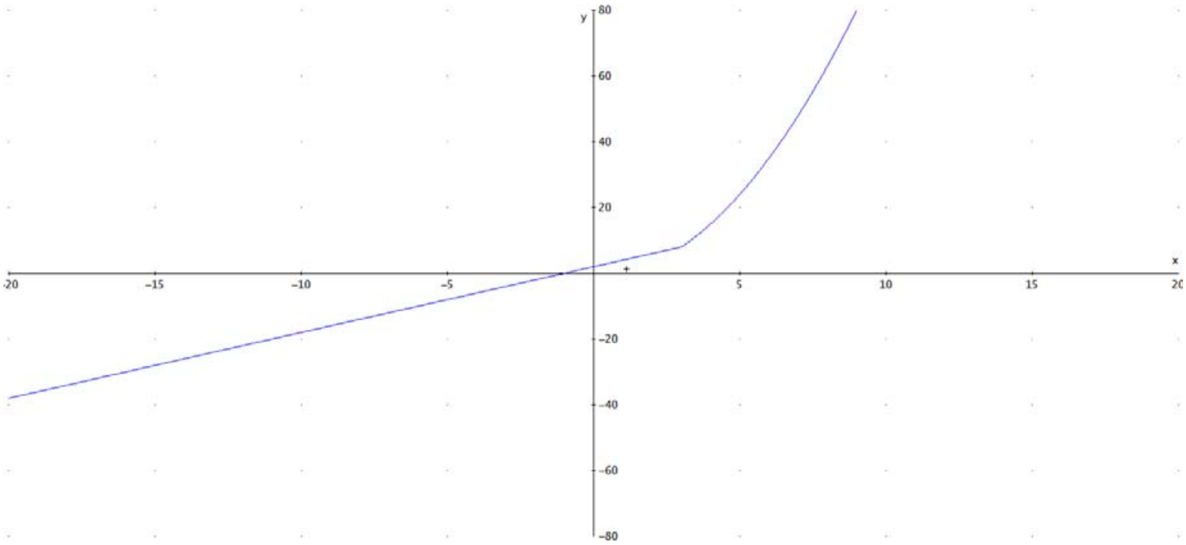
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = \infty$***, luego no hay asíntota oblicua en ∞; tampoco hay asíntotas verticales.***

Si $x<3$, $f'(x)=2>0$***, si*** $x>3$, $f'(x)=2x>0$

Entonces f es creciente en $(-\infty,\infty)$

Si $x>3$, $f''(x)=2>0$ ***, luego f es una recta si*** $x<3$ ***y f es convexa si*** $x>3$

Representación:



CAPÍTULO 10: INTEGRALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Calcula las siguientes primitivas: a) $\int 4x^3 dx$, b) $\int 3x^2 dx$, c) $\int 5x^4 dx$, d) $\int \left(5x^4 - 4x^3 + 3x^2\right) dx$

Solución: a) x^4 + C; b) x^3 + C; c) x^5 + C; d) x^5 – x^4 + x^3 + C.

2. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva de $f(x)$ que verifica $F(0) = 4$.

Solución: F(x) = x^4/4 – x3 +x2 + x.

3. Comprueba si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ es una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En caso negativo, explica por qué.

Solución: F'(x) = $12x^2$ + 4x – 1. No lo es pues la derivada de – x es – 1, no 3.

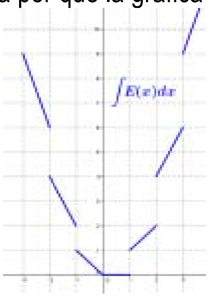
4. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

Solución: F'(x) = $3ax^2$ + 2bx + c = f(x) luego 3a = 4, a = 4/3; 2b = –5 luego b = –5/2, c = 3.

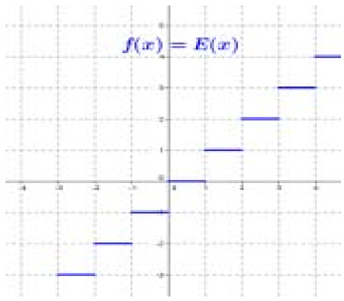
5. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio. Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

Solución: La función primitiva de una función no es única. Las distintas primitivas difieren en una constante

6. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):



Solución: La gráfica está formada por tramos de rectas, cuya derivada es constante.

3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Integración por cambio de variable

7. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x = t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1 + 2x = t^2$

d) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ haciendo $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$

e) $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ haciendo $\operatorname{sen} x = t$

f) $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ haciendo $\cos x = t$

Solución: a) (4/5)$x^{(5/4)}$ – (12/13)$x^{(13/12)}$ + C; b) arctg(e^x) + C; c) ((1 + 2x)$^{(1/2)}$(35x^4 – 20x^3 +12x^2 – 8x + 8)/65 + C;

d) $\frac{\ln(\sqrt{x^2}+1+1)+x\sqrt{x^2}-1+x^2}{2}+C$; e) sen2(x)/2 + C; f) –cos²(x)/2 + C

8. Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 + 1}{\left(x^4 + 2x\right)^3} dx$ b) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$

d) $\int 2x^3 \sqrt{x^4 - 49} \cdot dx$ e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1} + 2} dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

Solución: a) t = x^4 + 2x; I = –1/(4(x^4 + 2x)) + C; b) t = tg(x); I = $e^{tg(x)}$ + C; c) t = ln(x); I = ln²(ln(x))/2 + C;
d) t = x^4 – 49; I = (x^4 – 49)$^{(3/2)}$/3 + C; f) t = 1 – 4x²; I = (–1/2) (1 – 4x²)$^{(1/2)}$.
e) t = x + 1; I = (3/5)(x + 1)$^{(5/3)}$ – (3/2)(x + 1)$^{(4/3)}$ + 4(x + 1) – 12(x + 1)$^{(2/3)}$ + (16/3) (x + 1)$^{(1/3)}$ – ln((x + 1)$^{(1/3)}$ + 2);

9. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ c) $\int \text{sen } x \cos x\, dx$

d) $\int\frac{e^{\text{arcsen } x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\frac{\text{arctg} x}{1+x^2}dx$ f) $\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ g) $\int \text{tg } x \cos x\, dx$

h) $\int\frac{(x^2-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ i) $\int e^{x^2}dx$ j) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ k) $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$

Solución: a) Si, $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ ***= x⁴ + 3x⁴/4 +1/x +*** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ***+ C; b) Si,*** $\int\frac{\ln x}{x}dx$ ***= (ln x)²/2 + C;***

c) Si, $\int \text{sen } x \cos x\, dx$ ***= (sen x)²/2 + C; d) Si,*** $\int\frac{e^{\text{arcsen } x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ***=*** $e^{arcsenx}$ ***+ C; e) Si,*** $\int\frac{\text{arctg} x}{1+x^2}dx$ ***= artg x + C;***

f) No; g) Si, $\int \text{tg } x \cos x\, dx$ ***= –cos x + C; h) No; i) No; j) No; k) Si,*** $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$ ***= x³/3 – x + C.***

10. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x dx$ b) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x}$ c) $\int \ln(\cos x)\text{tg } x\, dx$

d) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ i) $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ j) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$

Solución: a) e⁴ˣ/4 + e³ˣ/3 + e²ˣ/2 + C; b) ln²(x) + 2ln(x) + C c) –(1/2)ln²(cosx) + C;

d) (1/2)arctg(x²) + C; i) arctg(eˣ) + C; j) (1/2)sen(e^{x^2} ***) + C;***

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx$ b) $\int \ln x\, dx$ c) $\int x\cos x dx$

d) $\int \text{arc sen } x\, dx$ e) $\int \text{sen } ax\cdot e^{bx}dx$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: a) (x² – x + 2)eˣ + C; b) xln(x) – x + C; c) xsen(x) + cos(x) + C;
d) x·arcsen(x) + (1 – x²)^(1/2) + C; e) (1/(a² + b²))(bsen(ax) – acos(ax))e^(bx).

Integración de funciones racionales

12. Resuelve las siguientes primitivas:

a) $\int\frac{dx}{x^2-4}$ b) $\int\frac{dx}{(x+1)^2}$ c) $\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ d) $\int\frac{x^3dx}{(x+1)^2}$

e) $\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$ f) $\int\frac{3x^2+1}{(2x-1)\cdot(3x^2+2)}dx$ g) $\int\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx$

h) $\int\frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx$ i) $\int\frac{(x+1)\cdot dx}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$ j) $\int\frac{dx}{x^4-1}$

Solución: a) $\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}\Rightarrow 1=A(x+2)+B(x-2)$ ***; tomando*** $x=\pm 2$ ***:***

$1=A(-2+2)+B(-2-2)=-4B\Rightarrow B=-\frac{1}{4}$, $1=A(2+2)+B(2-2)=4A\Rightarrow A=\frac{1}{4}$. ***Entonces***

$$\int\frac{1}{x^2-4}dx=\int\frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{1}{4}}{x+2}dx=\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{4}\ln(x+2)+C;$$

b) $\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x+1}+C$

c) $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2\right)+\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

d) $\int\frac{x^3}{(x+1)^2}dx=\int\left(x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\frac{x^2}{2}-2x+3\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

e) $\frac{x^2+x+1}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}{x(x-2)^2}\Rightarrow$ *Tomando* $x=0,1,2$*:*

$\Rightarrow x^2+x+1=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$

$1=A4=4A\Rightarrow A=\frac{1}{4},\ \left.\begin{matrix}3=\frac{1}{4}-B+C\\ 7=2C\end{matrix}\right\}\Rightarrow C=\frac{7}{2}, B=\frac{3}{4}$. *Entonces:*

$$\int\frac{x^2+x+1}{x(x-2)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{4}}{x}dx+\int\frac{\frac{3}{4}}{x+2}dx+\int\frac{\frac{7}{2}}{(x+2)^2}dx=\frac{1}{4}\ln(x)+\frac{3}{4}\ln(x+2)-\frac{\frac{7}{2}}{x+2}+C;$$

f) $\frac{3x^2+1}{(2x-1)(3x^2+2)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{3x^2+2}=\frac{A(3x^2+2)+(Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)(3x^2+2)}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2+1=A(3x^2+2)+(Bx+C)(2x-1)$

Tomando $x=0,1,\frac{1}{2}$*:* $\left.\begin{matrix}1=2A-C\\ 4=3A+B+C\\ \frac{7}{4}=A\frac{11}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{7}{11}, C=\frac{14}{11}-1=\frac{3}{11}, B=4-\frac{21}{11}-\frac{3}{11}=\frac{20}{11}$. *Entonces:*

$$\int\frac{3x^2+1}{(2x-1)(3x^2+2)}dx=\int\frac{\frac{7}{11}}{2x-1}dx+\int\frac{\frac{20}{11}x+\frac{3}{11}}{3x^2+2}dx=\frac{7}{22}\ln(2x-1)+\frac{10}{33}\int\frac{6x}{3x^2+2}dx+\frac{3}{22}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{7}{22}\ln(2x-1)+\frac{10}{33}\ln(3x^2+2)+\frac{3}{22}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)+C$$

g) $\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=\frac{Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)x^3}{x^3(x^2+1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2=Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)x^3=$

$=(A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C\Rightarrow \left.\begin{matrix}A+D=0\\ B+E=0\\ A+C=1\\ B=0\\ C=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=1+2=3, E=0, D=-A=-3$

Entonces $\int\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx=\int\frac{3}{x}dx-\int\frac{2}{x^3}dx-\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=3\ln(x)+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+C$

h)
$$\int\frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx=\int\left(x+2+\frac{4x+1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+2\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+2\ln\left(x^2+1\right)+arctgx+C$$

i) $$\int\frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=\frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1=A(x+1)\left(x^2+1\right)+B(x-1)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2-1\right)=$$
$$=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A+B-D\Rightarrow\left.\begin{matrix}A+B+C=0\\A-B+D=0\\A+B-C=0\\A+B-D=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C=0,A=\frac{1}{2},B=-A-C=-\frac{1}{2},D=B-A=-1$$

Entonces $$\int\frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx-\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)-arctgx+C$$

j) Es la integral de i)

Integración de funciones trigonométricas.

13. Resuelve las siguientes primitivas:

a) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx$ b) $\int\frac{\operatorname{sen}3x\,dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$ c) $\int\frac{\operatorname{cotg}x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $\int\frac{\operatorname{sen}2x\,dx}{(\cos 2x+1)^2}$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ f) $\int\left(\operatorname{tg}^2 x+x+1\right)dx$ g) $\int\frac{\operatorname{cotg}x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$ h) $\int\frac{dx}{1-\operatorname{sen}x}$

i) $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x}$ j) $\int\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$ k) $\int\operatorname{sen}^2 x\,dx$ l) $\int\operatorname{sen}^4 x\,dx$

m) $\int\cos^4 x\,dx$ n) $\int\cos(\ln x)dx$ truco: multiplica y divide por x: $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}x\,dx$

ñ) $\int\frac{\left(1+\operatorname{sen}^2 x\right)dx}{\operatorname{sen}x\cos x}$ o) $\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ p) $\int\operatorname{sen}5x\cos 4x\,dx$ q) $\int\frac{dx}{13+12\cos x}$

Solución: a) $$\int sen\left(\frac{3}{2}(x+1)\right)dx=-\frac{2}{3}\int-\frac{3}{2}sen\left(\frac{3}{2}(x+1)\right)dx=-\frac{2}{3}cos\left(\frac{3}{2}(x+1)\right)+C$$

b) $$\int\frac{sen(3x)}{\sqrt[3]{cos(3x)}}dx=-\frac{1}{3}\int-3sen(3x)(cos(3x))^{-\frac{1}{3}}dx=-\frac{1}{3}\frac{(cos(3x))^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}(cos(3x))^{\frac{2}{3}}+C$$

c) $$\int\frac{cotg(x)}{sen^2(x)}dx=\int\frac{cos(x)}{sen^3(x)}dx=\frac{sen^{-2}(x)}{-2}=-\frac{1}{2sen^2(x)}+C$$

d) $$\int\frac{sen(2x)}{(cos(2x)+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2sen(2x)}{(cos(2x)+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{(cos(2x)+1)^{-1}}{-1}=\frac{1}{2(cos(2x)+1)}+C$$

e) $\int tg^2(x)dx=\int \frac{1-cos^2(x)}{cos^2(x)}dx=\int \left(sec^2(x)-1\right)dx=tgx-x+C$

f) $\int \left(tg^2(x)+x+1\right)dx=\int tg^2(x)dx+\int (x+1)dx=tgx-x+\frac{x^2}{2}+x=tgx+\frac{x^2}{2}+C$

h) Si hacemos el cambio $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow senx=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, tenemos:

$$\int \frac{1}{1-sen(x)}dx=\int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int \frac{1}{(t-1)^2}dt=-\frac{2}{t-1}=-\frac{2}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-1}+C$$

i) $\int \frac{1}{sen(x)}dx=\int cosec(x)dx=-log(cosec(x)+cotg(x))+C$; j) $\int sen^2(x)\cos x\,dx=\frac{sen^3(x)}{3}+C$

k) $\int sen^2(x)dx=\int \frac{1-cos(2x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{sen(2x)}{4}+C$;

l)
$$\int sen^4(x)dx=\int \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)^2dx=\int \left(\frac{1-2cos(2x)+cos^2(2x)}{4}\right)^2dx=$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{sen(2x)}{4}+\frac{1}{4}\int \frac{1+cos(4x)}{2}dx=\frac{x}{4}-\frac{sen(2x)}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+\frac{sen(4x)}{8}\right)=\frac{3x}{8}-\frac{sen(2x)}{4}+\frac{sen(4x)}{32}+C$$

m)
$$\int cos^4(x)dx=\int \left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)^2dx=\int \left(\frac{1+2cos(2x)+cos^2(2x)}{4}\right)^2dx=$$
$$=\frac{x}{4}+\frac{sen(2x)}{4}+\frac{1}{4}\int \frac{1+cos(4x)}{2}dx=\frac{x}{4}+\frac{sen(2x)}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}+\frac{sen(4x)}{8}\right)=\frac{3x}{8}+\frac{sen(2x)}{4}+\frac{sen(4x)}{32}+C$$

n) Si hacemos el cambio $x=e^t \Rightarrow dx=e^t\,dt$, tenemos:

$\int cos(lnx)dx=\int cos(t)e^t\,dt$. Si llamamos $u=cost \Rightarrow du=-sentdt$, $dv=e^t\,dt \Rightarrow v=\int e^t\,dt=e^t$, tenemos que

$\int cos(t)e^t\,dt=cos(t)e^t+\int sen(t)e^t\,dt$.

Si llamamos ahora $u=sent \Rightarrow du=cost\,dt$, $dv=e^t\,dt \Rightarrow v=\int e^t\,dt=e^t$, tenemos que:

$$\int cos(t)e^t\,dt=cos(t)e^t+\int sen(t)e^t\,dt=cos(t)e^t+sen(t)e^t-\int cos(t)e^t\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int cos(t)e^t\,dt=\frac{1}{2}\left(cos(t)e^t+sen(t)e^t\right)$$

Entonces $\int cos(lnx)dx=\int cos(t)e^t\,dt=\frac{e^t}{2}(cost+sent)=\frac{x}{2}(cos(lnx)+sen(lnx))+C$

ñ)
$$\int \frac{1+sen^2(x)}{sen(x)cos(x)}dx=\int \frac{1}{sen(x)cos(x)}dx+\int \frac{sen(x)}{cos(x)}dx=\int \frac{2}{sen(2x)}dx-\int \frac{-sen(x)}{cos(x)}dx=$$
$$=-ln(cosec(2x)+cotg(2x))-ln(cos(x))+C$$

o) $\int \frac{1}{1+sen^2(x)}dx=\int \frac{1}{1+\frac{1-cos(2x)}{2}}dx=\int \frac{2}{3-cos(2x)}dx$

Si hacemos el cambio $2x=t \Rightarrow 2dx=dt$, tenemos $\int \frac{2}{3-cos(2x)}dx=\int \frac{1}{3-cos(t)}dt$.

Si hacemos ahora el cambio $tg\left(\frac{t}{2}\right)=u \Rightarrow \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2}, dt=\frac{2du}{1+u^2}$ *, tenemos:*

$$\int \frac{1}{3-\cos(t)}dt=\int \frac{1}{3-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}=\int \frac{1}{1+2u^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}u\right)^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}u\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\,tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Entonces $\int \frac{2}{3-\cos(2x)}dx=\int \frac{1}{3-\cos(t)}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\,tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\,tg(x)\right)$ *y:*

$$\int \frac{1}{1+sen^2(x)}dx=\int \frac{2}{3-\cos(2x)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\,tgx\right)+C$$

p) $\int sen(5x)\cos(4x)dx=\int \frac{1}{2}\left(sen(9x)+sen(x)\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(9x)}{9}-\cos(x)\right)+C$

q) Si hacemos el cambio $tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \Rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ *, tenemos:*

$$\int \frac{1}{13+12\cos(x)}dx=\int \frac{1}{13+12\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int \frac{1}{25+t^2}dt=\frac{2}{5}\int \frac{\frac{1}{5}}{1+\left(\frac{t}{5}\right)^2}dt=\frac{2}{5}arctg\left(\frac{t}{5}\right)=\frac{2}{5}arctg\left(\frac{1}{5}tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

4. EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA

14. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 \left(x^2+x+1\right)dx$ b) $\int_{-1}^{1}\left(x^2+x+1\right)dx$ c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

d) $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ e) $\int_0^{\pi}\text{sen}\,x\,dx$ f) $\int_1^{e}\ln x\,dx$

***Solución:** a) 60: b) 8/3; c) 7/3; d) ln(2)/2; e) 2; f) 1.*

15. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

***Solución:** c = 5/2; Se interpreta geométricamente mediante el teorema del valor medio.*

16. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x)=\int_2^{e^x}\frac{dt}{\ln x}$

***Solución:** f'(x) = e^x.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Sabiendo que $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ y $\int f^n(x)f'(x)dx=\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C$, calcula:

Solución:

1) $\int x^5dx$ = $x^6/6 + C$; *2)* $\int \frac{4}{x^5}dx$ = $-1/x^4 + C$; *3)* $\int \frac{dx}{x^2}$ = $-1/x + C$; *4)* $\int 37\,dx$ = $37x + C$; *5)* $\int 6x^7dx$ = $6x^8/8 + C$

6) $\int 5x^{1/4}dx$ = $4\sqrt[4]{x^5}$ + C; *7)* $\int 5\sqrt{x^3}dx$ = $2\sqrt{x^5}$ + C; *8)* $\int \left(3-2x-x^4\right)dx$ = $3x - x^2 - x^5/5 + C$;

9) $\int \left(2x^5-5x+3\right)dx$ = $x^6/3 - 5x^2/2 + 3x + C$; *10)* $\int \left(2+3x^3\right)^2dx$ = $4x + 3x^4 + 9x^7/7 + C$;

11) $\int 2\left(x^2+2\right)^3dx$ = $2x^7/7 + 12x^5/5 + 8x^3 + 8x + C$; *12)* $\int \left(1-x^3\right)^2dx$ = $x - x^4/2 + x^7/7 + C$;

13) $\int \frac{x^3-x+2}{x^3}dx$ = $x + 1/x - 1/x^2 + C$; *14)* $\int \left(-4x^{\frac{2}{3}}+2x\right)dx$ = $-12x^{5/3}/5 + x^2 + C$;

15) $\int \left(3a-\frac{1}{3e^2}+2x^a\right)dx$ = $(3a - 1/3e^2)x + 2x^{a+1}/(a + 1) + C$; *16)* $\int \left(-\frac{3}{x^3}+2-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ = $3/(2x2) + 2x - 6\sqrt{x}$ + C;

17) $\int\left(3x^5-\frac{4}{3x^2}+2\sqrt[5]{x^2}\right)dx$ **= $x^6/2 + 4/(3x) + 10x^{7/5}/7 + C$;**

18) $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx$ **= $2x^{3/2}/3 - 2x^{5/2}/5 + C$;**

19) $\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$ **= $x^2/2 + 5x + 4/x + C$;**

20) $\int\left(5e^x+\frac{2x^3-3x^2+5}{4x^2}\right)dx$ **= $5e^x + x^2/4 - 3x/4 - 5/(4x) + C$;**

21) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$ **=** $2\sqrt{x}+\frac{4\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$;

22) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ **=** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-x^2/4+4\sqrt{x}+C$;

23) $\int\sqrt{x}\left(x^3+1\right)dx$ **=** $\frac{2\sqrt{x^9}}{9}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+C$;

24) $\int\left(\sqrt{x^5}-\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx$ **= $x^{7/2} - 4\sqrt{x}\ /3 + C$;**

25) $\int\sqrt{x}(3-5x)dx$ **=** $2\sqrt{x^3}-2\sqrt{x^5}+C$;

26) $\int\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}dx$ **=** $-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}-4\sqrt{x}+C$;

27) $\int(3x+4)^2dx$ **= $x^3/3 + 12x^2 + 16x + C$;**

28) $\int(3x-7)^4dx$ **= $81x^5/5 - 567x^4/4 + 264x^3/3 - 3087x^2/2 + 2401\,x + C$;**

29) $\int x\left(x^2-4\right)^3dx$ **= $x^8/8 - 2x^6 + 12x^4 - 32x^2 + C$;**

30) $\int 3x\left(x^2+2\right)^3dx$ **= $3x^8/8 + 3x^6 + 12x^3 + 12x^2 + C$;**

31) $\int\left(x^3+2\right)^2x^2dx$ **= $(x^3 + 2)^3/9 + C$;**

32) $\int\left(x^3+3\right)x^2dx$ **= $(x^3 + 3)^2/6 + C$;**

33) $\int(x-2)^{3/2}dx$ **= $(2/5)(x - 2)^{5/2} + C$;**

34) $\int(a+x)^3dx$ **= $(a + x)^4/4 + C$;**

35) $\int\left[(x+2)^3-(x+2)^2\right]dx$ **= $(x + 2)^4/4 - (x + 2)^3/3 + C$;**

36) $\int\sqrt{3x+12}\,dx$ **=** $\frac{2\sqrt{3}\sqrt{(x+4)^3}}{3}+C$;

37) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ **= $2\sqrt{x+3}$ + C;**

38) $\int\frac{dx}{(x-1)^3}$ **= $-1/(2(x-1)^2) + C$;**

39) $\int(x^2-x)^4(2x-1)dx$ **= $(x^2 - x)^5/5 + C$;**

40) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx$ **=** $\frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3}+C$;

41) $\int\frac{x^3}{\left(x^4-1\right)^2}dx$ **= $-1/(x^4 - 1)^2 + C$;**

42) $\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)^3}$ **= $-1/(4(x^2 + 4)^2) + C$;**

43) $\int x\sqrt{x^2-7}\,dx$ **=** $\frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{3}$ **+ C;**

44) $\int(x-1)\left(x^2-2x+3\right)^4dx$ **= $(x^2 - 2x + 3)^5/10 + C$;**

45) $\int\frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}}dx$ **=** $\frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7}$ **+ C;**

46) $\int\frac{8x^2}{\left(x^3+2\right)^2}dx$ **= $-8/(3(x^3 + 2)) + C$;**

47) $\int\frac{3x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ **=** $\frac{3\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{2}$ **+ C;**

48) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ **=** $\frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{8}$ **+ C;**

49) $\int\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}}dx$ **=** $\frac{4\sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9}$ **+ C;**

50) $\int x^2\left(x^3-1\right)^{3/5}dx$ **=** $\frac{5\sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24}$ **+ C;**

51) $\int\sqrt{x^2-2x^4}\,dx$ **= $-(1 - 2x^2)^{3/2}/6 + C$;**

52) $\int\left(e^x+1\right)^3e^xdx$ **= $(e^x + 1)^4/4 + C$;**

53) $\int \mathrm{sen}^3x\cos x\,dx$ **= $\mathrm{sen}^4x/4 + C$;**

54) $\int x\cos^4x^2\,\mathrm{sen}\,x^2dx$ **= $-\cos^5x^2/10 + C$;**

55) $\int\frac{x\ln\left(x^2+3\right)}{x^2+3}dx$ **= $\ln^2(x^2 + 3)/4 + C$;**

56) $\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^3x}dx$ **= $1/(2\cos^2x) + C$;**

57) $\int\frac{e^x}{2e^x-3}dx$ **= $\ln(2e^x - 3)/2 + C$;**

58) $\int\mathrm{tg}^5x\cdot\sec^2x\,dx$ **= $\mathrm{tg}^6x/6 + C$;**

59) $\int\frac{\sec^2 3x}{\mathrm{tg}\,3x}dx$ **= $\ln(\mathrm{tg}\,3x)/3 + C$;**

60) $\int\frac{\ln x}{3x}dx$ **= $\ln^2x/6 + C$.**

2.- Sabiendo que $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ y $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

Solución:

1) $\int \frac{dx}{x+2}$ **=** ***ln***$|x + 2|$ **+ C;**

2) $\int \frac{dx}{2x-3}$ **=** ***ln***$|2x - 3|/2$ **+ C;**

3) $\int \frac{dx}{x-1}$ **=** ***ln***$|x - 1|$ **+ C;**

4) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$ **=** ***ln***$|x^2 - 1|/2$ **+ C;**

5) $\int \frac{x^2}{1-2x^3}dx$ **= –*ln***$|1 - 2x^3|/6$ **+ C;**

6) $\int \frac{x^2}{1-x^3}dx$ **= –*ln***$|1 - x^3|/3$ **+ C;**

7) $\int \frac{3x\ dx}{x^2+2}$ **= 3*ln***$|x^2 + 2|/2$ **+ C;**

8) $\int \frac{4}{3x+5}dx$ **= 4*ln***$|3x + 5|/3$ **+ C;**

9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ **=** ***ln***$|x^2 + 2x + 2|/2$ **+ C;**

10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + ln|x| + C$;

11) $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{-3}{x} + 2ln|x| + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

12) $\int \frac{dx}{x\ln x} = ln|ln|x|| + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)} = -2ln|1 - \sqrt{x}| + C$;

14) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = ln\frac{\sqrt{|2x-1|}}{\sqrt{|2x+1|}} + C$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = ln(e^x + 1) + C$;

16) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = ln\sqrt{e^{2x}+3} + C$;

17) $\int \text{tg}\, x\, dx = -ln|\cos x| + C$;

18) $\int \text{cotg}\, x\, dx = ln|\text{sen}\, x| + C$;

19) $\int \frac{5}{x\ln x}dx = 5\ ln|ln|x|| + C$;

20) $\int \frac{\text{sen}\ x + \cos\ x}{\cos\ x} = -ln|\cos x| + x + C$;

21) $\int \frac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx = ln|1 + \text{sen}^2 x| + C$;

22) $\int \frac{\text{sen}\ x - \cos\ x}{\text{sen}\ x + \cos\ x} = -ln|\text{sen}\, x + \cos x| + C$;

23) $\int x\,\text{cotg}\, x^2 dx = ln\sqrt{senx^2} + C$

3. - Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} f''(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

Solución:

1) $\int 3^x dx = 3^x/ln3 + C$;

2) $\int a^{4x} dx = a^{4x} / 4\ ln\ a + C$;

3) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$;

4) $\int 4e^{3x} dx = 4e^{3x}/3 + C$;

5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx = e^{x^3+2} + C$;

6) $\int 4e^{4-x} dx = -4e^{4-x} + C$;

7) $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$;

8) $\int \left(e^x + 1\right)^2 dx = e^{2x}/2 + 2e^x + 1 + C$;

9) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = e^{2x}/2 + 2x - e^{-2x}/2 + C$;

10) $\int \left(e^x + x^6\right)^2 dx = e^{2x}/2 + 2x^6 - 12\, x^5 e^x + 60x^4 e^x - 240x^3 e^x + 720\, x^2 e^x - 1440 x e^x + 1440\, e^x + x^{13}/13 + C$;

11) $\int e^{-x^2+2} x\, dx = \frac{-e^{-x^2+2}}{2} + C$;

12) $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = e^{ln|x|} + C$;

13) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \frac{-e^{\frac{1}{x^2}}}{2} + C$;

14) $\int x\, e^{\text{sen}\, x^2} \cos x^2 dx = \frac{e^{senx^2}}{2} + C$;

15) $\int e^{3\cos 2x} \cdot \text{sen}\, 2x\, dx = -e^{3\cos 2x}/6 + C$;

16) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$;

17) $\int e^{\cos x} \cdot \text{sen}\, x\, dx = -e^{\cos x} + C$;

18) $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3}\right)dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3} + C$;

19) $\int e^{tg 2x} \sec^2 2x\, dx = e^{tg 2x} / 2 + C$;

20) $\int \frac{2x}{3} \cdot 3^{3+5x^2} dx = \frac{3^{3+5x^2}}{10ln3} + C$;

21) $\int \frac{x}{2} \cdot 2^{3-5x^2} dx = \frac{2^{3-5x^2}}{-20ln2} + C$.

4. Sabiendo que $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$, $\int f'(x)\cdot \operatorname{sen} f(x)dx = -\cos f(x) + C$,
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ y $\int \cos f(x) f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + C$ calcula:

Solución:

1) $\int \operatorname{sen}(2x+8)dx$ **= – cos(2x + 8) / 2 + C;** 2) $\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}dx$ **= – 2cos(x/2) + C;** 3) $\int \cos 3x\,dx$ **= sen3x / 3 + C;**

4) $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$ **= – cos(x²) / 2 + C;**

5) $\int\left(\frac{3\operatorname{sen} x - 2\cos x}{4}\right)dx$ **= – 3cos(x) / 4 – sen x /2 + C;**

6) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$ **= – cos(2x) / 2 + C;**

7) $\int e^x \cos e^x dx$ **= sen(eˣ) + C;**

8) $\int x\cos(2x^2)\cdot\operatorname{sen}(2x^2)dx$ **= – cos²(2x²) / 8 + C;**

9) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}dx$ **= – cos(ln| x |) + C;**

5. – Si $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int(1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \operatorname{tg} x + C$ y $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]\cdot f'(x)dx = \operatorname{tg} f(x) + C$, calcula:

Solución:

1) $\int x(1+\operatorname{tg} x^2)dx$ **= x²/2 – ln| cosx² |/2 + C;** 2) $\int (1+\operatorname{tg} x)^2 dx$ **= – ln| cos²x |** + tgx + C; 3) $\int \operatorname{tg}^2 3x\,dx$ **= tg3x/3 – x + C.**

6. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

Solución:

1) $\int (2+5x)^4 dx$ **= (2 + 5x)⁵ / 25 + C;**

2) $\int (3+4x)^6 dx = \frac{(3+4x)^7}{28} + C$;

3) $\int 6x(3+x^2)^5 dx = \frac{3(3+x^2)^5}{5} + C$;

4) $\int\left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3}\right]dx = \frac{3\ln|5+4x|}{4} - \frac{3}{4(5+4x)} + C$;

5) $\int\left(\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}\right)dx = \frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{8} + C$

6) $\int\left(\frac{e^x - 4}{e^{2x}}\right)dx$ **= e⁻ˣ + 2e⁻²ˣ + C;**

7) $\int \operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x\cdot dx$ **= sen²x / 4 + C;**

8) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$ **= – ln| cosx | + C;**

9) $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \frac{-1}{3sen^3 x} + C$;

10) $\int x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{3} + C$;

11) $\int\left(\frac{e^x+3}{e^{2x}}\right)dx$ **= –1/eˣ – 3/(2e²)ˣ + C;**

12) $\int\left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}}\right)dx$ **= – e⁻⁴ˣ /4 – 2e⁻³ˣ / 3 + C;**

13) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2}dx$ =

14) $\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x}dx$ =

15) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ =

7. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes:

Solución:

1) $\int 3x\cos x\,dx$ **= 3xsenx + 3cosx + C;**

2) $\int x^2\cdot\operatorname{sen} x\,dx$ **= – x² cos x + 2x sen x + 2 cosx + C;**

3) $\int x^2 \ln x\,dx$ **= x³ ln x / 3 – x³ / 9 + C;**

4) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}\ln x}{3} - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + C$;

5) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x} + C$;

6) $\int 2e^x\cdot\cos x\cdot dx$ **= eˣ sen x + eˣ cos x + C;**

7) $\int 2e^x\cdot\operatorname{sen} x\,dx$ =

8) $\int e^x\cdot\cos 3x\,dx$ =

9) $\int \frac{4-2x^2}{x}\cdot\ln x\,dx$ =

8. – Halla el valor de las siguientes integrales racionales:

1) $\int \frac{2}{x^2+1}dx$ 2) $\int \frac{3}{2x^2+2}dx$ 3) $\int \frac{3}{x-3}dx$ 4) $\int \frac{2}{3x^2+3}dx$

5) $\int \frac{5x}{x^2+3}dx$ 6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1}dx$ 7) $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx$ 8) $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

9) $\int \frac{x-1}{x+1}dx$ 10) $\int \frac{3x-1}{x+3}dx$ 11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx$ 12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$ 14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx$ 15) $\int \frac{2}{x^2-4}dx$ 16) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x}dx$

17) $\int \frac{4x+3}{x^2-1}dx$ 18) $\int \frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx$ 19) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx$ 20) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}dx$

21) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}dx$ 22) $\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2}dx$ 23) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+4}dx$ 24) $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx$

Solución: 1) $\int \frac{2}{x^2+1}dx = 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = 2\,arctg(x)+C$; 2) $\int \frac{3}{2x^2+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}arctg(x)+C$

3) $\int \frac{3}{x-3}dx = 3\int \frac{1}{x-3}dx = 3\,ln(x-3)+C$; 4) $\int \frac{2}{3x^2+3}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{2}{3}arctg(x)+C$;

5) $\int \frac{5x}{x^2+3}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{5}{2}ln\left(x^2+3\right)+C$

6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}ln\left(x^2+1\right) - 2\,arctg(x)+C$

7) $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx = \int \frac{4x^2-12x+9}{3x^2}dx = \int \frac{4}{3}dx - \int \frac{4}{x}dx + \int \frac{3}{x^2}dx = \frac{4}{3}x - 4\,ln(x) - \frac{3}{x}+C$

8) $\int \frac{x+2}{x+1}dx = \int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int 1dx + \int \frac{1}{x+1}dx = x + ln(x+1)+C$

9) $\int \frac{x-1}{x+1}dx = \int\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx = \int 1dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx = x - 2\,ln(x+1)+C$

10) $\int \frac{3x-1}{x+3}dx = \int\left(3-\frac{10}{x+3}\right)dx = 3\int 1dx - 10\int \frac{1}{x+3}dx = 3x - 10\,ln(x+3)+C$

11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx = \int\left(3x+\frac{12x}{x^2-4}\right)dx = 3\int x\,dx + 6\int \frac{2x}{x^2-4}dx = 3\frac{x^2}{2} + 6\,ln\left(x^2-4\right)+C$

12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx = \int\left(3x+\frac{3x}{x^2-1}\right)dx = 3\int x\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = 3\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}ln\left(x^2-1\right)+C$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx = \int\left(x+\frac{2}{x+2}\right)dx = \int x\,dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\,ln(x+2)+C$

14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx = \int\left(x^2+6x+10+\frac{25}{x-2}\right)dx = \int x^2\,dx + 6\int x\,dx + \int 10\,dx + 25\int \frac{1}{x-2}dx =$
$= \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 10x + 25\,ln(x-2)+C$

15) $\int \frac{2}{x^2-4}dx = 2\int \frac{1}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}ln(x-2) - \frac{1}{2}ln(x+2)+C$;

16) $\frac{3x+2}{x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)}\Rightarrow 3x+2=A(x+3)+Bx$ *; tomando* $x=0,\ x=-3$ *:*

$2=A3\Rightarrow A=\frac{2}{3}$, $-7=A(-3+3)+B(-3)=-3B\Rightarrow B=\frac{7}{3}$. *Entonces*

$$\int\frac{3x+2}{x^2+3x}dx=\int\frac{\frac{2}{3}}{x}dx+\int\frac{\frac{7}{3}}{x+3}dx=\frac{2}{3}ln(x)+\frac{7}{3}ln(x+3)+C;$$

17) $\frac{4x+3}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow 4x+3=A(x+1)+B(x-1)$*; tomando* $x=\pm1$ *:*

$7=A2\Rightarrow A=\frac{7}{2}$, $-1=A(-1+1)+B(-2)=-2B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$. *Entonces*

$$\int\frac{4x+3}{x^2-1}dx=\int\frac{\frac{7}{2}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx=\frac{7}{2}ln(x-1)+\frac{1}{2}ln(x+1)+C;$$

18) $\int\frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx=\int\left(3-\frac{18x+27}{x^2+6x+9}\right)dx=3x-9\int\frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx$. *Se cumple que:*

$\frac{2x+3}{x^2+6x+9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}=\frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2}\Rightarrow 2x+3=A(x+3)+B$*; tomando* $x=-3,x=0$ *:*

$-3=B\Rightarrow B=-3$, $3=A3+B=3A-3\Rightarrow A=2$. *Entonces*

$\int\frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx=\int\frac{2}{x+3}dx-\int\frac{3}{(x+3)^2}dx=2\ln(x+3)+\frac{3}{x+3}$ *y:*

$$\int\frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx=3x-9\int\frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx=3x-18\ln(x+3)-\frac{27}{x+3}+C;$$

19) *Se cumple que:*

$\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow x+2=A(x-3)+B(x-2)$; *tomando* $x=2,x=3$ *:*

$4=-A\Rightarrow A=-4$, $5=B\Rightarrow B=5$. *Entonces*

$$\int\frac{x+2}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=-4\ln(x-2)+5\ln(x-3)+C$$

20) *Se cumple que:*

$\frac{3x-2}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\Rightarrow 3x-2=A(x-2)+B$*; tomando* $x=2,x=0$ *:*

$4=B \Rightarrow B=4$, $-2=-2A+4 \Rightarrow A=3$. *Entonces*

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}dx=\int \frac{-3}{x-2}dx+\int \frac{4}{(x-2)^2}dx=-3\ln(x-2)-4\frac{1}{x-2}+C$$

21) Se cumple que:

$$\frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x-1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-1)}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+1=A(x-1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-1)$$

Tomando $x=0, x=1$, $x=3$:

$1=3A \Rightarrow A=\frac{1}{3}$, $4=-2B \Rightarrow B=-2$, $10=6C \Rightarrow C=\frac{5}{3}$. *Entonces*

$$\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}dx=\int \frac{\frac{1}{3}}{x}dx+\int \frac{-2}{x-1}dx+\int \frac{\frac{5}{3}}{x-3}dx=\frac{1}{3}\ln x-2\ln(x-1)+\frac{5}{3}\ln(x-3)+C$$

22) Se cumple que $\frac{2x^2-1}{x^2+3x+2}=2-\frac{6x+5}{x^2+3x+2}$,

$$\frac{6x+5}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow 6x+5=A(x+2)+B(x+1)$$

Tomando $x=-2, x=-1$:

$-7=-B \Rightarrow B=7$, $-1=A \Rightarrow A=-1$. *Entonces*

$$\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2}dx=2x-\int \frac{6x+5}{x^2+3x+2}dx=2x-\int \frac{-1}{x+1}dx-\int \frac{7}{x+2}dx=2x+\ln(x+1)-7\ln(x+2)+C$$

23) Se cumple que

$$\frac{x-1}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} \Rightarrow x-1=A(x-2)+B$$

Tomando $x=2, x=0$:

$1=B \Rightarrow B=1$, $-1=-2A+B \Rightarrow A=1$. *Entonces*

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+4}dx=\int \frac{1}{x-2}dx+\int \frac{1}{(x-2)^2}dx=\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}+C$$

24) Se cumple que

$$\frac{3x-1}{x^2+6x+9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}=\frac{A(x+3)+B}{(x+3)^2} \Rightarrow 3x-1=A(x+3)+B$$

Tomando $x=-3, x=0$:

$-10=B \Rightarrow B=-10$, $-1=3A+B \Rightarrow A=3$. *Entonces*

$$\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{3}{x+3}dx+\int \frac{-10}{(x+3)^2}dx=3\ln(x+3)+\frac{10}{x+3}+C$$

9. – Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

Solución:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x}$ ***=*** *$ln\sqrt{3}$;* *2)* $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$ ***= ln8/2 – ln3/2;*** *3)* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \operatorname{sen} x\, dx$ ***= – cos(5π/3) + cos(π/4);***

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 3x\, dx$ ***= – cos(3π/4) /3;*** *5)* $\int_{-4}^{4} |\, x \,|\, dx$ ***= 16;*** *6)* $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx$ ***= 3;***

7) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-3}\right)dx$ ***= 2ln4 + 3ln4;***

8) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3a}{5}-\frac{x}{2}\right)dx$ ***= 12a/5;***

9) $\int_2^3 \frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx$ ***= – ((1/2)ln(9)) + ((1/2)ln(4) = 0.626417***

10) $\int_{-2}^{0}\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx$ ***= – 1/2 – (2e⁴)⁻¹ + e⁶*** *1)* $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} (\operatorname{sen} x-\cos x)^2 dx$ ***= π***

10. – Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}\left(2bx-3x^2\right)dx=-12$.

Solución: b = 11.

11. – Halla el área comprendida entre la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=6$.

Solución: 9 + 32/3 = 59/3 u².

12. – Halla el área limitada por la función $f(x) = 0.5 + \cos x$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

Solución: A = 0.5π + 2.

13. – Halla el área de la región limitada por la función $f(x)=x^3-x^2-6x$ y el eje de abscisas.

Solución: 253/12 u².

14. – Calcula el área de la porción de plano que limitan las curvas $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ e $y-x-1=0$.

Solución: A = 16/3.

15. – Halla el área delimitada por las gráficas: a) $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2$; b) $f(x)=x^2+x+4$ y $g(x)=-x^2+2x+5$

Solución: ***a) 64/3 u²;*** ***b) 1/3 u²;*** ***c) 13/12 u².***

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores de a, b y c para los que $F(x) = a\,x^3 + b\,e^x + c\,senx$ sea una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7\,e^x + 5\cos x$ son:

   a) 1, –7, 5; b) 3, 7, –5; c) 1, –7, –5; d) –1, –7, 5

Solución: a)

2. La integral inmediata $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

   a) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6}+C$; b) $\frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6}+C$ c) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{4}+C$; d) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^2}}{6}+C$

Solución: b)

3. La integral $\int \frac{sen2x\,dx}{sen^4 x + cos^4 x}$ vale:

   a) tg(arccosx) + C ; b) -2 arc sen(arctgx) + C ; c) arctg(arcsenx) + C; d) $-2\,arc\,tg(cos\,2x)+C$.

Solución: d)

4. Al integrar por partes $\int \frac{x\cdot e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ se obtiene:

   a) $e^{\operatorname{arcsen} x}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$; b) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen} x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C$ c) $e^{\operatorname{sen} x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arcsen} x}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)+C$

Solución: d)

5. La integral $\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx$ vale:

   a) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3}+C$; b) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+2}{3}+C$;

   c) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{5}+C$; d) $\ln\left(x^2+4x+13\right)-\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+2}{5}+C$

Solución: a)

6. La integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$ vale:

   a) $\operatorname{tg}x - senx + C$; b) $-\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x + C$ c) $\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x + C$; d) $\operatorname{tg}x - \operatorname{cotg}x + C$

Solución: d)

7. La integral definida $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$ vale:

   a) 1; b) π c) 0; d) –1

Solución: c)

8. El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 4 vale:

   a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3

Solución: b)

9. El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$ vale:

   a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3

Solución: a)

10. El volumen del sólido de revolución generado por $y = x^2$, entre 0 y 2, al girar en torno al eje de abscisas es:

   a) 32π; b) $16\pi/5$ c) 16π; d) $32\pi/5$

Solución: d)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

(1) Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x^3-3x+5}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

(2) Calcula:

a) $\int \dfrac{2x^3-3x^2-2x-1}{x^2-x-2}dx$ b) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$ c) $\int_1^2 \dfrac{dx}{x^2+3x}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(2x)+x\cdot\operatorname{sen} x)dx$ e) $\int e^x\cos 3x\,dx$ f) $\int \operatorname{arc\,tan}(3x)dx$

Solución:

(3) Calcula haciendo el cambio de variable $e^x=t$:

a) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ b) $\int \dfrac{e^x-4e^{2x}}{1+e^x}dx$

Solución:

(4) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2x}+x\cos x\right)dx$

Solución:

(5) a) Encuentra todas las funciones $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x)=xe^x$.

b) De todas ellas, determina aquella cuya gráfica pasa por los puntos $A(0,2)$ y $B(2,0)$.

Solución:

(6) Considera la función $-3\quad y=x^3-3x^2+1$

a) Determina la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo.

b) Dibuja el recinto limitado por la curva y la recta tangente anterior.

c) Halla el área del recinto del apartado (b).

Solución:

(7) Obtén el área del recinto cerrado por las curvas $y=1+\cos x$ e $y=0$ en el intervalo $[-\pi,+\pi]$.

Solución:

(8) Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\operatorname{sen} x$

a) Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

(9) a) Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas.

b) Halla el área del recinto dibujado en (a).

Solución:

(10) Halla el área de la zona del plano limitada por las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=e$, y la gráfica de la curva $y=\ln^2(x)$.

Solución:

(11) Las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x)=x^2$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área. Solución:

(12) Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ \ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, donde $ln\ x$ significa logaritmo neperiano de x.

a) Dibuja el recinto acotado comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 1$.

b) Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

(13) Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}4x+12 & \text{si} \quad x\le -1\\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$

a) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función f.

b) Calcula el área del recinto limitado por la función f, el eje de abscisas y la recta $x = 2$.

Solución:

(14) Sea la parábola $y=x^2-3x+6$

a) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Haz un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje *OY* y la recta tangente hallada anteriormente.

c) Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

(15) Dada la función $f(x)=(x-a)\cos x$, busca el valor del número real a sabiendo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-2$

Solución:

(16) Las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

Solución:

(17) Se considera la curva de ecuación $y=x^3-2x^2+x$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada.

c) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

(18) La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x)=(x+2)\cdot(x^2-9)$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.

b) Determina la función f sabiendo que $f(0)=\frac{1}{5}$.

Solución:

(19) La gráfica de la parábola $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,2)$ en dos recintos planos.

a) Dibuja la gráfica de la función y los recintos.

b) Calcula el área de cada uno de ellos.

Solución:

(20) a) Calcula la función $f(x)$ sabiendo que su derivada es $f'(x)=(x-1)e^x$ y que $f(2)=e$.

b) Demuestra que $f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas y razona si es máximo o mínimo.

Solución:

(21) Las gráficas de la curva $y=x^3$ y de la parábola $y=x^2+2x$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja ese recinto.

b) Calcula su área.

Solución:

(22) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ mx+n & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$

a) Calcula m y n para que f sea continua en todo su dominio.

b) Para esos valores hallados, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

Solución:

(23) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x\le 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Dibuja la gráfica de la función.

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

(24) La curva $y=x^3-3x$ y la recta $y = x$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

Solución:

(25) La parábola $x=y^2+1$ y la recta $x = 3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

Solución:

(26) La curva $y=x^2+3$ y la recta $y=2x+3$ limitan un recinto finito en el plano.

a) Dibuja un esquema del recinto.

b) Calcula su área.

Solución:

(27) Se considera la parábola $y=6x-x^2$

a) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje OX.

b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente.

c) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

(28) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si} \quad x<2 \\ e^{x-2}+k^2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de $k > 0$ para que la función sea continua en el intervalo $[0,4]$.

b) Suponiendo que $k=1$, halla la recta tangente en $x = 3$.

c) Suponiendo que $k=1$, halla el área que la función determina con el eje OX, para $x\in[0,\ 4]$.

Solución:

(29) a) Resuelve por partes la siguiente integral: $\int x(1-\ln x)dx$

b) De todas las primitivas de $f(x)=x(1-\ln x)$ calcula la que pasa por el punto $(1,\ 3)$.

Solución:

(30) La gráfica de la parábola $y^2=8x$ y la recta $x = 2$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.

b) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

(31) La gráfica de la curva $f(x)=\frac{4}{2-x}$ y las rectas $y=4$ y $x=0$ encierran un recinto plano.

a) Dibuja aproximadamente dicho recinto.
b) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

(32) Esboza la gráfica de la parábola $y=-x^2+x+\frac{7}{4}$ y halla el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$.

Solución:

(33) Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y=-x^2+4$ y la recta $y=1$. a) Representa gráficamente la chapa y calcule su área. b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y=1$.

Solución:

(34) Representa gráficamente las parábolas $y^2-4x=0$ y $x^2-4y=0$ y calcula el área que encierran.

Solución:

(35) Se considera la función $f(x)=2-\frac{x}{x^2+1}$. a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. b) Para $x\in[0,5]$, esboza la gráfica de la función y calcula el área comprendida entre ella y el eje X.

Solución:

(36) Se considera la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos. b) Representa gráficamente la función. c) Halla el área delimitada por la función y el eje OX, para $-1\le x\le 1$.

Solución:

(37) a) Calcula: $\int x^3\ln(x)dx$ donde $ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

b) Utiliza el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar: t = $\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$.Septiembre 08. Opción B (3 puntos)

Solución:

(38) a) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo:

$$F(x) = \int_0^x (f(t)+t^2+t^3)dt$$

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt$ = 1, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

(39) Sea la función $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$. A) Calcular $\int f(t)dt$. B) Se define g(x) = $\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$

Solución:

(40) a) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$. b) Halla el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la gráfica de $f(x) = -sen\ x$ alrededor del eje OX entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Solución:

CAPÍTULO 11: PROBABILIDAD Y COMBINATORIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROBABILIDAD

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
   a) La superficie de las provincias españolas.
   b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
   c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
   d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
   e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Solución: Son fenómenos aleatorios: b), d) ; No lo son: a), c), e).

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

Solución: {A, E, I, O, U}

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

Solución: {Cae de punta, no cae de punta}

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

Solución abierta: Por ejemplo: 1) Sacar dos caras. 2) Las dos monedas sean distintas.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

Solución abierta: 1) La cifra de las unidades sea par; 2) La cifra de las unidades sea un 7.:

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Solución abierta: Por ejemplo: sacar figura; sacar un as; casar un oro.

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Solución: $A \cup B = A$, $A \cap B = B$ y $A - B$ son las figuras que NO son as.

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

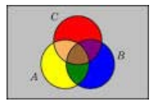
Solución: {1, 2, 3, 4}

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

Solución: Son incompatibles. Su intersección es el suceso imposible.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".

Solución abierta: Por ejemplo: 1) sacar un rey; 2) sacar una carta entre 3 y 6; 3) sacar sota.



11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

Solución: $\mathbf{A \cup B \cup C = (A\cap B\cap C) \cup (A\cap B - A\cap B\cap C) \cup (A\cap C - A\cap B\cap C) \cup (B\cap C - A\cap B\cap C) \cup (A - A\cap B - A\cap C) \cup (B - A\cap B - B\cap C) \cup (C - C\cap A - C\cap B).}$

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

Solución: A) Hay 9 personas que toman café y té; B) 6 y 18; C) a) $A\cap B$: 9; b) $(A \cup B)^C$: 2; c) $A \cup B$: 33; d) $(A - A\cap B)$: 6 21; D) A/B : 9; E) 33; 2; F) 33 + 2 = 35.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman sólo té, que 5 personas toman té y chocolate pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas tomaban al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer datos nuevos.

Solución: Los datos están mal, no puede haber 12 personas que tomen sólo té, y sólo 5 que tomen té y chocolate.

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

Solución: 1/4.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Estudiaría las frecuencias relativas.

16. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

Solución: P(no 5) = 5/6; P(no múltiplo de 3) = 4/6; P(no menor que 2) = 5/6.

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Solución: P(ninguna cara) = 1/4; P(al menos una cara) = 3/4; 1/4 + 3/4 = 1. Son sucesos contrarios.

18. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = sacar un as en la primera extracción, $\overline{A}$ = no sacar as, y B = sacar un as en la segunda extracción, $\overline{B}$ = no sacar as en la segunda extracción. A) ¿Cuál es la probabilidad de sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? B) ¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? C) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases? D) ¿Y la de sacar un solo as? E) ¿Y la de sacar al menos un as?

Solución gráfica: A) 0/39; B) 29/39; C) 9/156; D) 60/156 = 5/13; E) 23/52.

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "no salen 2 ases" y la de "no sale ningún as".

Solución: 49/52 y 29/52.

20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Solución: Con reemplazo: 1/1000; Sin reemplazo: P = (4·3·2)/40·39·38) = 1/2470.

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

Solución: 1/36.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

Solución: P(ningún 6) = 25/36. P(al menos un 6) = 1 – 25/36 = 11/36.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A) = 5/36$ (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B) = 8/36$ (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

Solución: a) P(A) = 5/36; P(B) = 8/36; b) $P(A \cap B) = 2/36$ ((3, 5) y (5, 3)); $P(A \cup B) = 11/36$; $P(A \cap \overline{B}) = 3/36$;

$P(\overline{A} \cap B) = 6/36$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 25/36$; ***c)*** $P(A/B) = 2/8$; $P(A/\overline{B}) = 3/28$; $P(\overline{A}/B) = 6/8$.

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla: La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. La probabilidad de que no ocurra B. La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B. (Selectividad)

Solución: $P(A \cup B) = 19/24$; $P(\overline{B}) = 1/4$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 9/24$; $P(A/B) = 5/6$.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B. ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto *B*? Sabiendo que un cliente ha comprado *A*, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado *C* pero no *B*? (Selectividad)

Solución: Compran sólo B 8 % clientes; P((C y noB)/A) = 2/100.

26. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que *P*(*A*) = 1/3, *P*(*B*) =1/5 y *P*(*A*U*B*) = 7/15, hallar: La probabilidad de que se verifique *A* y *B*. La probabilidad de que se verifique *A* y no *B*. La probabilidad de que no se verifique ni *A* ni *B*. La probabilidad de que no se verifique *A*, si no se ha verificado *B*. Selectividad.

Solución: $P(A \cap B) = 1/15$; $P(A \cap \overline{B}) = 4/15$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 8/15$; $P(\overline{A} / \overline{B}) = 14/15$.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{2}, P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A}/B)$, $P(\overline{B}/A)$. (Selectividad)

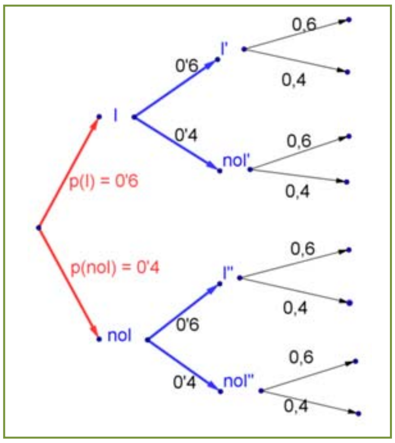
Solución: $P(A \cup B) = 19/20$; $P(A \cap B) = 3/10$; $P(\overline{A} / B) = 2/5$; $P(\overline{B} / A) = 3/5$.

28. Se considera dos sucesos *A* y *B* tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. *Nota.* $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso *S*. *P*(*S*|*T*) denota la probabilidad del suceso *S* condicionada al suceso *T*. (Selectividad)

Solución: a) P($A \cap$ B)***.= 1/12; (b)*** P(B) = 1/4; ***(c)*** $P(\overline{B}/A)$ = 3/4; ***(d)*** $P(\overline{A}/\overline{B})$ ***= 2/3.***

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0.6$.

Solución gráfica: P(al menos uno intencionado) =
1 – P(ninguno intencionado) =
1 – 0.4·0.4·0.4 = 0.936.



30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridd: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

Solución: P(fallo) = 0.04·0.02·0.01 = 0.000008; P(todo bien) = 1 – P(fallo) = 1 – 0.000008 = 0.999992.

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Solución: P(fallo) = 0.003; a) P(desechar ambas) = 0.000009; b) P(desechar sólo una) = 2(0.997*0.003) = 0.005982; c) P(ninguna) = 0.997*0.997 = 0.994; d) P(sólo la tercera) = 0.997*0.997*0.003*0.997 = 0.00297.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Solución: A) 1/4 + 1/4 = 1/2; B) 2(1/8) = 1/4; C) 2(1/16) = 1/8; D) 1/2 +1/4 + 1/8 = 7/8.

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala. b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$. c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

Solución:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0.27	***0.29***	0.56
Accidente con sólo daños materiales (*M*)	***0.31***	***0.13***	***0.44***
Totales	0.58	***0.42***	1

b) P(V $\cap$ C) ***= 0.27;*** P(V $\cap$ ***U) = 0.29;*** P(M $\cap$ C) ***= 0.31;*** P(M $\cap$ U) ***= 0.13;*** P(V) ***= 0.56;*** P(M) ***= 0.44;*** P(C) ***= 0.58 y*** P(U) ***= 0.42.***
c) P(U/V) ***= 0.29/0.56 = 0.52;*** P(C/V) ***= 0.27/0.56 = 0.48;*** P(V/U) ***= 0.29/0.42 = 0.69;*** P(V/C) ***= 0.27/0.58 = 0.47. Los sucesos V y C son dependientes pues P(V) = 0.56 $\neq$ P(V/C) = 0.47.***

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

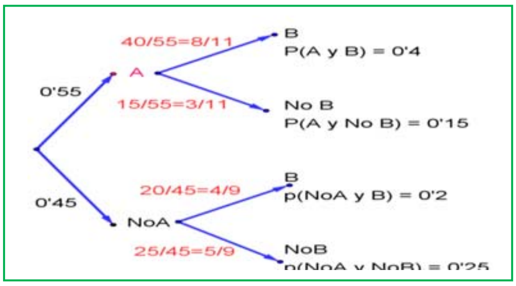
Solución abierta: Debe ser similar a la del problema anterior, pero en lugar de V y M se añaden tres filas con leves (L), graves (G) y mortales (M).

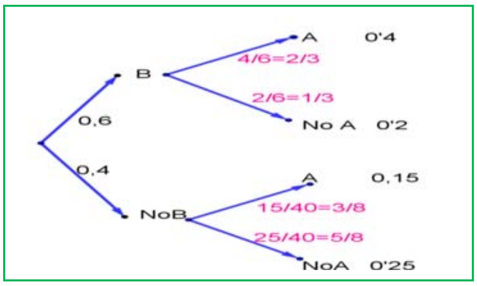
	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Leves (L)			
Graves (G)			
Mortales (M)			

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

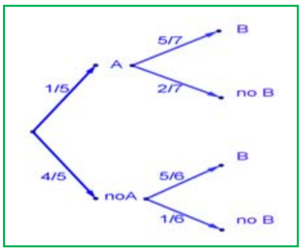
	A	No A = $\overline{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No B = $\overline{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

Solución gráfica:



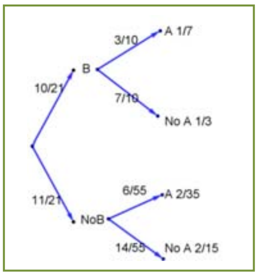


36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



Solución gráfica:

	A	noA	Totales
B	***5/35 = 1/7***	***20/30 = 1/3***	***10/21***
No B	***2/35***	***4/30 = 2/15***	***11/21***
Totales	***7/35 = 1/5***	***24/30 = 4/5***	***1***



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Solución: P(A/negra) = 1/4.

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula: La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$ La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

Solución: a) p(M/C) = 50/80 = 5/8; b) p(noM/C) = 30/80 = 3/8.

39. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.
(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.
(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo? (Selectividad)

Solución:

	H	*M*	
D	*1/12*	*1/25*	*37/300*
D^c	*5/12*	*23/50*	*263/300*
	1/2	*1/2*	*1*

a) P(D^c) = 263/300; b) P(D/M) = 2/25; c) P(D) = 37/300.

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que: a) El segundo caramelo sea de fresa. b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero. (Selectividad)

Solución: P(2º fresa) = (7/17)(12(18) + (10/17)(9/16) ≈ 0,6; b) P(igual sabor) = (7/17)(6/18) + (10/17)(9/16) ≈ 0.47.

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar. a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés. b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista? (Selectividad)

Solución: P(inglés) = 3/5; P(turista/inglés) = 4/9.

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que: a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo. b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A. (Selectividad)

Solución: P(no satisfecho) = 0.0665; P(A/ no satisfecho) = 55/133.

43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

Solución:

	Fabricado Correcto (FC)	*Fabricado Defectuoso (FD)*	
Dispositivo Correcto (DC)	*0.978*	*0.002*	*0.98*
Dispositivo Defectuoso (DD)	*0.002*	*0.018*	*0.02*
	0.98	*0.02*	*1*

A) P(FC/DD) = 0.002/0.02 = 0.1; B) P(FD/DC) = 0.002/0.98 = 0.00204.
B)

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

Solución: P(negra) = (1/3)(4/10) + (1/3)(1/6) + (1/3)(3/8) = 113/360.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar. Selectividad

Solución: P(impar) = 1/2 .

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista. (Selectividad)

Solución: P(deportista y no lector) = 0.25; P(deportista / lector) = 0.5.

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.
a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.
b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina *B*?
(Selectividad)

Solución: a) P(no D) = 67/120; P(B/D) = 3/265.

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso: (Selectividad)

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela. A) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación? B) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín? C) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento? D) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución: A) 200/480; B) 280/480; C) P(perfeccionamiento/benjamín) = 90/160; D) P(benjamín/iniciación) = 70/200.

2. COMBINATORIA

49. En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce. Haz un diagrama en árbol y comprueba que hay 60 formas distintas de repartir las medallas.

Solución gráfica: 5*4*3 = 60.

50. Haz diagramas en árbol para calcular: a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C, todas distintas. ¿Y si pueden repetirse las letras? b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

Solución gráfica: a) 6; b) Palabras de 3 letras: 5·27·22 = 2970.

51. Ana tiene 4 camisetas, 2 pantalones y 3 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

Solución gráfica: 4·2·3 = 24 modelos diferentes. No puede.

52. ¿De cuántas formas pueden repartirse cinco personas, cinco pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

Solución: P_5 = 120.

53. En una carrera de caballos participan cuatro caballos con los números 1, 2, 3 y 4. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Solución gráfica: Cada uno de los 4 puede llegar el primero. Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, y 3. Si la carrera no está amañada hay P_4 = 4 · 3 · 2 · 1 = 24 formas distintas de llegar a la meta.

54. ¿De cuántas maneras puedes meter seis objetos distintos en seis cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Solución: P_6 = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720.

55. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Solución: Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.
Se pueden ordenar de P_{28} = 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes

56. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Solución: P_6 = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720

57. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Solución: P_7 = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5040.

58. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{11!}$; f) $\frac{677!}{676!}$.

Solución: ***a) 5; b) 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 6720; c) 9 · 8 · 7 · 6/3 · 2 · 1 = 504; d) 7 · 6 = 42; e) 13 · 12 = 156; f) 677.***

59. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Solución: ***a) n+1; b) n+4; c) n +3; d) n.***

60. Expresa utilizando factoriales:
a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

Solución: ***a) 5! / 2!; b) 13! / 9!; c) 8! /5!; d) 10! / 8!.***

61. Expresa utilizando factoriales: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$.

Solución: ***a) (n+3)! / n!; b) (n+3)! / (n−1)!; c) (n+k)! / (n−1)!***

62. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

Solución: P_{30} = 30!

63. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Solución: P_9 = 9! = 362 880.

64. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 4 cifras?

Solución: 9 · $VR_{9,3}$ = 243.

65. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

Solución: Suponemos que los números pueden empezar por 0: $VR_{10,4}$· $VR_{27,3}$ = 196 830 000.

66. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Solución: $VR_{2,8}$ = 256.

67. Calcula: a) $VR_{5,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{10,2}$; d) $VR_{2,10}$.

Solución: ***a) 32; b) 256; c) 100; d) 4 096***

68. Expresa con una fórmula:
a) Las variaciones con repetición de 4 elementos tomadas de 5 en 5.
b) Las variaciones con repetición de 8 elementos tomadas de 2 en 2.
c) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 4 en 4.

Solución: a) $VR_{4,5} = 4^5$; b) $VR_{8,2} = 8^2$; c) $VR_{7,4} = 7^4$.

69. ¿Cuántas palabras de cuatro letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra S?

Solución: 22 · 27 · 27 = 16 038.

70. Cuatro personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cinco pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Solución: $V_{5,4}$ = 5 · 4 · 3 · 2 = 120.

71. Con los 10 dígitos se desean escribir números de seis cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Solución: Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras. Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero pero no la colocada en primer lugar. Para la tercera 8 y para la cuarta 7; En total 9 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 = 136 080 posibilidades.

72. Si tienes 11 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 4 en 4 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Solución: $V_{11,4}$ = 11 · 10 · 9 · 8 = 7920.

73. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Solución: $V_{3,2}$ = 3 · 2 = 6

74. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar?

Solución: $V_{5,4}$ = 5 · 4 · 3 · 2 = 120.

75. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

Solución: a) $V_{10,6}$ = 10*9*8*7*6*5 = 151 200; b) $V_{9,5}$ = 9*8*7*6*5 = 15 120; c) $V_{7,4}$ = 7*6*5*4 = 840.

76. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

Solución: *a) 6 · 5 · 4 = 120;* *b) 8 · 7 · 6 · 5 = 1680;* *c) 11 · 10 · 9 = 990.*

77. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Solución: $C_{7,5} = 21$.

78. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Solución: $C_{10,3} = 120$

79. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Solución: $C_{52,5} = 1\,497\,000\,960$

80. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

Solución:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

81. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m.

Solución: $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$; $64 = 2^6$.

82. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Solución: $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$ y $C_{5,5} = 1$.

83. Desarrolla $(a + b)^6$

Solución: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

84. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

Solución: a) $(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$; b) $(x - 3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$; c) $(x + 2)^7 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$; d) $(-x + 3)^5 = 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$.

85. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

Solución: $10\,(3x)^3(x^2/2)^2 = (270/4)\,x^7$. El coeficiente es $270/4 = 135/2$.

86. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

Solución: $(\sqrt{2})^5 - 5(\sqrt{2})^4(x/2) + 10(\sqrt{2})^3(x/2)^2 - 10(\sqrt{2})^2(x/2)^3 + 5(\sqrt{2})(x/2)^4 - (x/2)^5 =$

$4\sqrt{2} - 10x + 5\sqrt{2}\,x^2 - 5/2x^3 + (5\sqrt{2}/16)x^4 - x^5/32$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Probabilidad

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

Solución: 20 estudian francés e inglés: No estudian ni francés ni inglés 20 estudiantes.

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

Solución: a) 1/2; b) 5/6; c) 1/2; d) 1/6; e) 5/6.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

Solución: P(chico y azules) = 8/38; P(chico o azules) = 31/38.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

Solución: P(Juan o Jorge) = 3/5.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

Solución: A) 1/2; B) 1/2; C) 3/4; D) 1/4; E) 1/2.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

Solución: A) $(1/2)^3$ = 1/8; B) 7/8; C) 3/8.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

Solución: P(1) = 0; P(2) = 1/36; P(3) = 2/36; P(4) = 3/36; P(5) = 4/36; P(6) = 5/36; P(7) = 6/36; P(8) = 5/36; P(9) = 4/36; P(10) = 3/36; P(11) = 2/36; P(12) = 1/36.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

Solución: En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	*10 = 4 + 3 + 3*
9 = 4 + 3 + 2	*10 = 4 + 4 + 2*
9 = 4 + 4 + 1	*10 = 5 + 3 + 2*
9 = 5 + 2 + 2	*10 = 5 + 4 + 1*
9 = 5 + 3 + 1	*10 = 6 + 2 + 2*
9 = 6 + 2 + 2	*10 = 6 + 3 + 1*

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216; y la suma 6 + 3 + 1 puede salir en (6, 3, 1), (6, 1, 3), (3, 6, 1), /3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), luego su probabilidad es 6/216.

P(9) = (1 + 6 + 3 + 3 + 6 + 3)/216 = 22/216. P(10) = (3 + 3 + 6 + 6+ 3 + 6)/216 = 27/216.

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

Solución: P(A) = 1/4; P(B) = 1/4, si los números primos son el 2, 3 y 5; P(C) = 1/2.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

Solución: Es igualmente probable. Son ambos sucesos de probabilidad $(1/2)^{50}$.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

Solución: P(cruz) = 1/3; P(cara) = 2/3.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

Solución: 3/7.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

Solución: a) 1/2; b) 1/48; c) Una pareja $7C_{12,2}/C_{14,4}$. Dos parejas: $C_{7,2}/C_{14,4}$; d)

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

Solución: P(2) = 1/9; P(1) = 2/9; A) P(impar) = 6/9; B) P(primo) = (1 + 2 + 2)/9 = 5/9; C) P = 4/9; D) P(primo o impar) = 7/9.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

Solución: A) P = 1/22; B) P = 5/11; C) P = 6/11; D) P = 9/22.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

Solución: A) 1/6; B) 1/6; C) 1/4.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

Solución: A) 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8; B) $1/2^9 + 1/2^{10}$ + …. = 1 – 1/2 + 1/4 + 1/8 + $1/2^4$ + … $1/2^8$ = 1 – 255/256 = 1/256.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

Solución: P = 1 – (2/20)*(1/19) = 378/380 = 189/190.

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Solución: 1/3.

Combinatoria

20. Cinco nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Solución: P_5 = 5! = 120; P_8 = 8! = 40 320.

21. Santi, Pepe, Ana y Silvia quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Solución: Hay 24 maneras de hacerse la fotografía. Y hay 2 · P_2 · P_2 = 8 maneras de hacerse la fotografia alternando chicos y chicas

22. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Solución: P_9 = 9! = 363 880 maneras de introducir 9 objetos distintos en 9 cajas diferentes.

23. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Solución: P_7 = 7! = 5040 formas de llegar a la meta. La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040.

24. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Solución: Hay P_5 = 5! = 120 números distintos de 5 cifras diferentes. Si empiezan por 5 hay P_4 = 4! = 24 números. Si empiezan por 5 y terminan por 7 hay P_3 = 3! = 6 números.

25. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 6 colores? ¿Y si se dispone de 6 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

Solución: Se pueden formar P_3 = 6 banderas distintas con 3 franjas y 3 colores. Con 6 colores se pueden formar $V_{6,3}$ = 120 banderas distintas con tres franjas. Y si no es preciso que las franjas tengan colores distintos tenemos $VR_{6,3}$ = 216 banderas diferentes.

26. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4?

Solución: Hay $V_{6,3}$ = 120 números de 3 cifras distintas. Son impares 60. Para calcular los múltiplos de 4 analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64. En total tenemos 7 · 6 = 42 múltiplos de 4.

27. ¿Cuántos números de 34 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos.

***Solución:** $VR_{6,34} = 6^{34}$. La suma: En las unidades hay igual número de 1, que 2… que 6, Por tanto hay 6^{34}, Las unidades suman $6^{34}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 6^{34}\cdot 21$. Lo mismo suman las cifras de las decenas, centenas… Por tanto la suma total valdrá: $6^{34}\cdot (1034 + 1033 + \ldots + 10 + 1)\cdot 21$.*

28. A María le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

***Solución:** Maria tiene $V_{7,6}$ = 5 040 para ordenar las películas entre los 7 días de la semana. Si sólo va 3 días al cine el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.*

29. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

***Solución:** Tenemos $V_{6,4}$ = 360 números con 4 dígitos formados por las 6 cifras, como hay 60 que empiezan por 0 tenemos 300 números de cuatro cifras. Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir 120 números.*

30. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 o 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

***Solución:** Con una secuencia de 8 dígitos se pueden formar $VR_{2,8}$ = 256 bytes. Con una secuencia de 16 dígitos se pueden formar $VR_{2,16}$ = 65 536 bytes. Y con solo 4 dígitos sólo podríamos formar $VR_{2,4}$ = 16 bytes, no podemos escribir las letras del alfabeto.*

31. Tienes ocho bolas de igual tamaño, cuatro blancas y cuatro negras, si las colocas en fila, ¿de cuántas formas puede ordenarlas?

***Solución:** $C_{8,4}$ = 70.*

32. Con 4 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?

***Solución:** Se pueden hacer $C_{4,2}$ = 6 mezclas diferentes.*

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

***Solución:** Hay $C_{30,3}$ = 4 060 maneras de elegir una delegación de 3 estudiantes de un grupo de 30. Solución abierta.*

34. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

***Solución:** Hay $C_{5,3}$ = 10 productos. Sólo uno es entero. Hay $C_{3,2}$ = 3 productos cuyo resultado es un número racional y $C_{4,2}$ = 6 productos cuyo resultado es un número irracional.*

35. ¿Cuántas aleaciones de 4 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

***Solución:** $C_{7,4}$ = 35.*

36. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 9 estudiantes en dos grupos de 3 y 6 estudiantes respectivamente?

***Solución:** Hay $C_{9,3}$ = 84 formas.*

37. Una asignatura se compone de 15 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas, ¿cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 10 temas, ¿cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

***Solución:** Hay $C_{15,\,2}$ = 105 posibilidades. Hay $C_{5,2}$ = 10 posibilidades de que no te sepas ninguno de los dos temas y la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas es 10/105 = 0,09.*

38. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

***Solución:** $C_{7,4}$ = 35 opciones*

39. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

***Solución:** Hay $C_{12,4}$ = 495 sucesos en los que se obtienen 4 éxitos y de estos en $C_{11,3}$ = 165 se tiene éxito en el último tiro.*

40. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

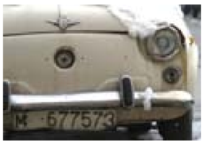
Solución: Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener 12 resultados. Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos 24 resultados. Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos 288 resultados.

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

Solución: Si hubo 91 apretones $C_{x,2} = 91$ y había 14 personas. Si hubo $C_{x,2} = 45$ apretones había 10 personas.

42. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Solución: Con 4 cifras podemos formar $VR_{10,4} = 10\,000$ contraseñas. No tienen ningún número repetido $V_{10,4} = 5\,040$, por lo tanto tienen algún número repetido 4 960 contraseñas. Tienen el número 0 repetido dos veces $C_{9,2} \cdot PR_{4,2} = 432$ contraseñas y cualquier número repetido dos veces 4 320 contraseñas.



43. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Solución: Con M 123456 había 1 000 000 matrículas diferentes, con M 1234 A había $VR_{10,4}$*28 = 280 000 distintas, y con 1234 ABC hay $VR_{10,4}$*$VR_{28,2}$ = 18 000 000.

44. Juana y Juan juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 4 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

Solución: 7.

45. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Solución: El número del teléfono está entre $V_{5,4} = 120$ números diferentes.

46. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Solución: El equipo puede estar formado de $C_{7,3} \cdot C_{4,2} = 210$ formas diferentes. Si un experto está fijo hay $C_{6,2} \cdot C_{4,2} = 90$.

47. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

Solución: a) $V_{8,2} = 56$; b) $C_{8,2} = 28$.

48. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Solución: De cada 6 días 1 no podrá ninguno de los dos padres ir a la guardería. Suponiendo que trabajan los sábados pero no los domingos habrá aproximadamente 52 días.

49. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Solución: Las luces se pueden encender de $V_{10,3} + V_{10,2} + V_{10,2} + 1 = 821$ formas diferentes. Si el primer tiro falla hay 101 formas distintas.

50. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Solución: Antonio tiene $C_{6,4} = 15$ formas de elegir pareja en cuatro bailes.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
   a) 5/6 b) 11/36 c) 35/36 d) 30/36

Solución: b)

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: c)

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: a)

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
   a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

Solución: b)

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es siempre correcta:
   a) $P(A) + P(noA) = 1$
   b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$
   c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Solución: a)

6. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, y 4 ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar?
   a) 58 b) 120 c) 96 d) 192

Solución: a)

7. Ocho corredores participan en una carrera, las formas distintas en que pueden llegar a la meta son:
   a) 40 320 b) 20 160 c) 5 040 d) 10 080

Solución: a)

8. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 2 colores podrás hacer?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

Solución: b)

9. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras distintas. ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
   a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

Solución: a)

10. Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se pueden escribir números impares de 3 cifras (iguales o distintas). ¿Cuántos números diferentes se pueden escribir?
    a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

Solución: a)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

1. (Selectividad)

Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

Solución:

$$P(\{\text{salga múltiplo de } 3\}) = P(\{\text{salga } 3, 6, 9 \text{ ó } 12\}) = P(\{\text{salga } 3\}) + P(\{\text{salga } 6\}) + P(\{\text{salga } 9\}) + P(\{\text{salga } 12\})$$
$$= P(\{\text{salga un 1 y luego un 2}\}) + P(\{\text{salga un 2 y luego un 1}\}) +$$
$$+ P(\{\text{salga un 1 y luego un 5}\}) + P(\{\text{salga un 2 y luego un 4}\}) + P(\{\text{salga un 3 y luego un 3}\}) +$$
$$P(\{\text{salga un 4 y luego un 2}\}) + P(\{\text{salga un 5 y luego un 1}\}) +$$
$$+ P(\{\text{salga un 3 y luego un 6}\}) + P(\{\text{salga un 4 y luego un 5}\}) + P(\{\text{salga un 5 y luego un 4}\}) +$$
$$+ P(\{\text{salga un 6 y luego un 3}\}) + P(\{\text{salga un 6 y luego un 6}\}) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \ldots^{12} \ldots + \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

2. (Selectividad)

En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo *A* consta de 30 estudiantes, y los grupos *B* y *C* tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo *A* ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo *B* y el 40 por ciento del resto han elegido informática. A) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática. B) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al grupo *B*.

Solución:A) $P(I) = \frac{40+80+40}{300} = \frac{8}{15}$ ***B)*** $P(B) = \frac{20}{60+20+60} = \frac{1}{7}$

3. (Selectividad) Opción B (3 puntos)

Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan es 0.12, la probabilidad de que salga una copa es 0.08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84. A) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa. B) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

Solución: A)

$$P(ni\ as\ ni\ copa) = P(as' \cap copa') = P\left((as \cup copa)'\right) = 1 - P(as \cup copa) = 0'84 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(as \cup copa) = 1 - 0'84 = 0'16$$

B)

$$0'16 = P(as \cup copa) = P(as) + P(copa) - P(as \cap copa) = 0'12 + 0'08 - P(as \cap copa) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(as\ de\ copas) = P(as \cap copa) = 0'2 - 0'16 = 0'04$$

Como la probabilidad de que salga es positiva, se puede afirmar que no se ha eliminado.

4. (Selectividad). Opción A. (3 puntos)

En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de: a) que sea hombre. b) que esté enfermo. c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

Solución: a) Si x es el número de mujeres, el número de ciudadanos es 2 x+x=3 x, por lo que $P(\text{hombre}) = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

b)

$$P(\{\text{esté enfermo}\}) = P(\{\text{esté enfermo}\} \cap \{\text{hombre}\}) + P(\{\text{esté enfermo}\} \cap \{\text{mujer}\}) =$$

$$= P(\{\text{esté enfermo}\}/\{\text{hombre}\})P(\{\text{hombre}\}) + P(\{\text{esté enfermo}\}/\{\text{mujer}\})\,P(\{\text{mujer}\}) = \frac{6}{100}\frac{2}{3} + \frac{11}{100}\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{23}{300}$$

c) $$P(\{\text{hombre}\}/\{\text{está enfermo}\}) = \frac{P(\{\text{hombre}\} \cap \{\text{enfermo}\})}{P(\{\text{esté enfermo}\})} = \frac{\frac{12}{300}}{\frac{23}{300}} = \frac{12}{23}$$

5. (Selectividad). Opción B. (3 puntos)

Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de: a) que los calcetines sean negros. b) que los dos calcetines sean del mismo color. c) que al menos uno de ellos sea rojo. d) que uno sea negro y el otro no.

Solución: a) $$P(\{\text{dos calcetines negros}\}) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{18 \times 17}{2}} = \frac{28}{153}$$

b)

$$P(\{\text{calcetines mismo color}\}) = P(\{\text{dos calcetines negros}\}) + P(\{\text{dos calcetines azules}\}) +$$

$$+ P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) = \frac{28}{153} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{18}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{28}{153} + \frac{15}{153} + \frac{6}{153} = \frac{49}{153}$$

c)

$$P(\{\text{al menos uno rojo}\}) = P(\{\text{uno rojo}\}) + P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) =$$

$$= P(\{\text{el primero rojo}\})\,P(\{\text{el segundo no rojo}\}/\{\text{el primero rojo}\}) +$$

$$+ P(\{\text{el primero no rojo}\})\,P(\{\text{el segundo rojo}\}/\{\text{el primero no rojo}\}) + P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) =$$

$$= \frac{4}{18}\frac{14}{17} + \frac{14}{18}\frac{4}{17} + \frac{6}{153} = \frac{62}{153}$$

d)

$$P(\{\text{uno negro}\}) = P(\{\text{el primero negro}\})\,P(\{\text{el segundo no negro}\}/\{\text{el primero negro}\}) +$$

$$+ P(\{\text{el primero no negro}\})\,P(\{\text{el segundo negro}\}/\{\text{el primero no negro}\}) =$$

$$= \frac{8}{18}\frac{10}{17} + \frac{10}{18}\frac{8}{17} = \frac{80}{153}$$

6. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)

Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto, a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día. b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

Solución: a)

$$P(\{\text{uno celebre cumpleaños}\}) =$$
$$= P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) +$$
$$+ P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) +$$
$$P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) =$$
$$= \frac{1}{365}\frac{364}{365}\frac{364}{365} + \frac{364}{365}\frac{1}{365}\frac{364}{365} + \frac{364}{365}\frac{364}{365}\frac{1}{365} = 3\frac{364^2}{365^3}$$

b)

$$P(\{\text{al menos dos celebren cumpleaños}\}) =$$
$$= P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) +$$
$$+ P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) +$$
$$+ P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) +$$
$$+ P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\})$$
$$= \frac{1}{365}\frac{1}{365}\frac{364}{365} + \frac{1}{365}\frac{364}{365}\frac{1}{365} + \frac{364}{365}\frac{1}{365}\frac{1}{365} + \frac{1}{365}\frac{1}{365}\frac{1}{365} = 3\frac{364}{365^3} + \frac{1}{365^3}$$

7. (Selectividad) Opción A (3 puntos)

En una bolsa hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa *B* hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de *A*, anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa *B*, a continuación se extrae al azar una bola de *B* y se anota también su paridad. A) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad. B) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de *B* corresponda a un número impar.

Solución: A)

$$P(\{\text{las dos tengan la misma paridad}\}) =$$
$$= P(\{\text{la primera par}\} \cap \{\text{la segunda par}\}) + P(\{\text{la primera impar}\} \cap \{\text{la segunda impar}\}) =$$
$$= P(\{\text{la primera par}\})P(\{\text{la segunda par}\}/\{\text{la primera par}\}) +$$
$$+ P(\{\text{la primera impar}\})P(\{\text{la segunda impar}\}/\{\text{la primera impar}\}) = \frac{3}{7}\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{4}{7}$$

B)

$$P(\{\text{la segundaimpar}\}) =$$
$$= P(\{\text{la primeraimpar}\})P(\{\text{la segundaimpar}\}/\{\text{la primeraimpar}\}) +$$
$$+ P(\{\text{la primerapar}\})P(\{\text{la segundaimpar}\}/\{\text{la primerapar}\}) = \frac{4}{7}\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\frac{2}{6} = \frac{3}{7}$$

8. (Selectividad). Opción A. (3 puntos)

Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna *B* contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

Solución: a)

$$P(\{\text{las dos sean blancas}\})=$$
$$=P(\{\text{coja la primera urna}\}\cap\{\text{saque dos blancas}\})+P(\{\text{coja la segunda urna}\}\cap\{\text{saque dos blancas}\})=$$
$$=P(\{\text{coja la primera urna}\})P(\{\text{saque dos blancas}\}/\{\text{ha cogido la primera urna}\})+$$
$$+P(\{\text{coja la segunda urna}\})P(\{\text{saque dos blancas}\}/\{\text{ha cogido la segunda urna}\})=\frac{1}{2}\frac{6}{10}\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\frac{5}{7}\frac{4}{6}=$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{21}=\frac{17}{42}$$

b)

$$P(\{\text{las dos sean del mismo color}\})=P(\{\text{las dos sean blancas}\})+P(\{\text{las dos sean negras}\})$$
$$=\frac{17}{42}+P(\{\text{coja la primera urna}\}\cap\{\text{saque dos negras}\})+P(\{\text{coja la segunda urna}\}\cap\{\text{saque dos negras}\})=$$
$$=\frac{17}{42}+P(\{\text{coja la primera urna}\})P(\{\text{saque dos negras}\}/\{\text{ha cogido la primera urna}\})+$$
$$+P(\{\text{coja la segunda urna}\})P(\{\text{saque dos negras}\}/\{\text{ha cogido la segunda urna}\})=\frac{17}{42}+\frac{1}{2}\frac{4}{10}\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\frac{2}{7}\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{17}{42}+\frac{5}{21}=\frac{52}{105}$$

c)

$$P(\{\text{las dos sean de distinto color}\})=1-P(\{\text{las dos sean del mismo color}\})=1-\frac{52}{105}=\frac{53}{105}$$

9. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)

De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar: a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey. b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

Solución: a)

$$P(\{\text{al menos se elija un rey}\})=$$
$$=P(\{\text{se elija un rey}\})+P(\{\text{se elijan dos reyes}\})+P(\{\text{se elijan tres reyes}\})+P(\{\text{se elijan 4 reyes}\})=$$
$$=\frac{4\binom{36}{3}}{\binom{40}{4}}+\frac{\binom{4}{2}\binom{36}{2}}{\binom{40}{4}}+\frac{\binom{4}{3}\binom{36}{1}}{\binom{40}{4}}+\frac{1}{\binom{40}{4}}=\frac{4\frac{36\times35\times34}{6}+6\frac{36\times35}{2}+4\times36+1}{\frac{40\times39\times38\times37}{4\times6}}=\frac{6497}{18278}$$

b)

$$P(\{3\text{ del mismo palo}\})=$$
$$=P(\{3\text{ oros}\})+P(\{3\text{ bastos}\})+P(\{3\text{ copas}\})+P(\{3\text{ espadas}\})=$$
$$=4\frac{\binom{10}{3}\binom{30}{1}}{\binom{40}{4}}=\frac{4\frac{10\times9\times8\times30}{6}}{\frac{40\times39\times38\times37}{24}}=\frac{160}{1071}$$

10. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)

La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar: a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té? b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té? c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

Solución: a)

$$P(\{\text{desayune té}\}) =$$
$$= P(\{\text{desayune té}\} \cap \{\text{sea española}\}) + P(\{\text{desayune té}\} \cap \{\text{sea extranjera}\}) =$$
$$= P(\{\text{desayune té}\}/\{\text{sea española}\})\, P(\{\text{sea española}\}) +$$
$$+ P(\{\text{desayune té}\}/\{\text{sea extranjera}\})\, P(\{\text{sea extranjera}\}) = \frac{1}{8}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

b)
$$P(\{\text{sea extranjera}\}/\{\text{desayune té}\}) = \frac{P(\{\text{desayune té}\} \cap \{\text{sea extranjera}\})}{P(\{\text{desayune té}\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{8}{9}$$

c)
$$P(\{\text{sea española}\}/\{\text{no desayune té}\}) = \frac{P(\{\text{no desayune té}\} \cap \{\text{sea española}\})}{P(\{\text{no desayune té}\})} =$$
$$= \frac{P(\{\text{sea española}\}) - P(\{\text{desayune té}\} \cap \{\text{sea española}\})}{\frac{23}{32}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{4} - \left(P(\{\text{desayune té}\}) - P(\{\text{desayune té}\} \cap \{\text{sea extranjera}\})\right)}{\frac{23}{32}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{9}{32}}{\frac{23}{32}} = \frac{7}{23}$$

11. (Selectividad) Opción A (2.5 puntos)

Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades. Las unidades pueden tener defectos de dos tipos, *A* y *B*. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo *A* únicamente, 8 unidades con defecto del tipo *B* únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total: a) Cero defectos. b) Una unidad con defecto del tipo *A* y otra con defecto del tipo *B*, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

Solución: a) $P(\{0 \text{ defectos}\}) = \dfrac{\binom{80}{3}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{80\times 79\times 78}{100\times 99\times 98} = \dfrac{4108}{8085}$

$$P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B\} \cup \{\text{una defectos } A \text{ y } B\}) =$$

b) $= P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B\}) + P(\{\text{una defectos } A \text{ y } B\}) -$

$$- P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \text{ y una defectos } A \text{ y } B\})$$

Como los cambios de orden no afectan a la probabilidad, tenemos que:

$$P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B\}) =$$

$$= 6\, P(\{\text{la primera defecto } A \text{ y la segunda defecto } B \text{ y la tercera sin defectos}\}) = 6\frac{1}{10}\frac{8}{99}\frac{80}{98} = \frac{64}{1617}$$

$$P(\{\text{una defectos } A \text{ y } B\}) =$$

c) $= 3\, P(\{\text{la primera defectos } A \text{ y } B \text{ y las otras dos sin defectos}\}) = 3\dfrac{2}{100}\dfrac{\binom{80}{2}}{\binom{99}{2}} = \dfrac{3}{50}\dfrac{80\times 79}{99\times 98} = \dfrac{316}{8085}$

$$P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \text{ y una defectos } A \text{ y } B\}) =$$

$$= 6\, P(\{\text{la primera defecto } A \text{ y la segunda defecto } B \text{ y la tercera defectos } A \text{ y } B\}) = 6\frac{1}{10}\frac{8}{99}\frac{2}{98} = \frac{8}{8085}$$

Entonces

$$P(\{\text{una defecto } A \text{ y una defecto } B\} \cup \{\text{una defectos } A \text{ y } B\}) = \frac{64}{1617} + \frac{316}{8085} - \frac{8}{8085} = \frac{628}{8085}$$

12. (Selectividad) Opción A (3 puntos)

Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra. A) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par. B) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

13. (Selectividad) Opción A. (3 puntos)

Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide: a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce. b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

Solución:

14. (Selectividad) Opción A (2 puntos)

En dos urnas *A* y *B*, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la *A*, si la bola escogida resultó ser blanca?

Solución:

15. (Selectividad) Opción B (2 puntos)

Se dispone de dos urnas *A* y *B*, de idéntico aspecto externo. La urna *A* contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que *B* contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reemplazamiento, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que: a) Ambas bolas sean rojas. b) Las dos bolas sean del mismo color.

Solución:

16. (Selectividad)Opción A. (2 puntos)

Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas. (a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4. (b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

Solución:

16. (Selectividad) Opción A (3 puntos)

En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de 1/3, si es de dificultad media, 2/5, y si es de escasa dificultad, 3/4. Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen. Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.

Solución:

17. (Selectividad) Opción A. (2puntos)

De una urna con cinco bolas, dos blanca y tres negras, extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: a) A = Las dos bolas extraídas son del mismo color. b) B = Extraemos al menos una bola blanca.

Solución:

18. (Selectividad) Opción B. (2 puntos)

Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

Solución:

19. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)

Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

Solución:

20. (Selectividad) Opción B. (2 puntos)

Se considera una célula en el instante **t** = 0. En el instante **t** = 1 la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir, con probabilidad 1/4. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo t = 2 cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro. A) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo t = 2? B) ¿Con qué probabilidad?

Solución:

21. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)

Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: (a) *A* = Se obtiene cinco en alguno de los dados. (b) *B* = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación). (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

Solución:

22. (Selectividad) Opción B. (2 puntos)

Se dispone de tres urnas, la *A* que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la *B* con tres blancas y tres rojas, y la *C* con una blanca y cinco rojas. (a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? B) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:

23. (Selectividad) Opción A (2 puntos)

Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0.7 y de que figure a nombre de una mujer es 0.3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0.8 y de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un número de teléfono al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja? ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

Solución:

24. (Selectividad) Opción B (2 puntos)

Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno.

¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen?

¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

Solución:

25. (Selectividad). (2 puntos)
De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas? (b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?
Solución:

26. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $\boldsymbol{P}(A)$ = 0.6; $\boldsymbol{P}(B)$ = 0.2 y $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ = 0.7.
(a) Calcúlese $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes. (b) Calcúlese $P(A \cup B)$
Solución:

27. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)
La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto *A* es 0.6; la probabilidad de que compre un producto *B* es 0.5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto *B* no habiendo comprado el producto *A* es 0.4. A) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto *B*? b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?
Solución:

28. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)
Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete *A* es 0.3; de que se remita al bufete *B* es 0.5 y de que se remita al bufete *C* es 0.2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete *A* sea ganado en los tribunales es 0.6; para el bufete *B* esta probabilidad es 0.8 y para el bufete *C* es 0,7. a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso. b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete *A*.
Solución:

29. (Selectividad). Modelo Opción A. (2 puntos)
En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido *A* es 0.4; la probabilidad de que vote al partido *B* es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar: a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico. b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido *B*?
Solución:

30. (Selectividad) Opción B. (2 puntos)
Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos *B1*: La primera bola es blanca, *B2*: La segunda bola es blanca y *B3*: La tercera bola es blanca.
a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no. b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.
Solución:

31. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)
Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos: (a) El coche es del modelo C. (b) El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel. (c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C.
Solución:

32. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)
Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0.01 para A, de 0.02 para B y de 0.03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina *A*, sabiendo que no es defectuoso?
Solución:

33. (Selectividad). Opción A. (2 puntos)
En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que: (a) Los tres escojan la misma película. (b) Dos escojan la película *A* y el otro la *C*.
Solución:

34. (Selectividad). Opción B. (2 puntos)

Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números. (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él? (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

Solución:

35. (Selectividad). Modelo Opción A. (2 puntos)

Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

Solución:

36. Selectividad. Modelo Opción B. (2 puntos)

Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0.05 de falsos positivos, esto es, casos en los que, estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0.99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0.99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

Solución:

37. Selectividad. Opción A. (2 puntos)

Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras. a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra? b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

Solución:

38. Selectividad. Opción B. (2 puntos)

Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas: a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble. b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

Solución:

39. Selectividad. Opción A. (2 puntos)

Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0.3. A) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche? B) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento? C) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?

Solución:

40. Selectividad. Opción B. (2 puntos)

Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito. ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros? Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

Solución:

41. Selectividad. Opción A. (2 puntos)

Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

Solución:

42. Selectividad. Opción A. (2 puntos)

Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$ $P(B) = 0.5$ $P(A \cap B) = 0{,}45$

Calcular a) $P(B/A)$ b) $P(A^c \cap B^c) =$ A^c representa el suceso complementario del suceso A.

Solución:

43. Selectividad. Opción A (2 puntos)

El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos: (a) Las tres personas votan al candidato A. (b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B. (c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

Solución:

44. Selectividad. Opción B (2 puntos)

De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener: (a) Tres reyes. (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera. (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

Solución:

45. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0.99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0.05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0.99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

Solución:

46. Selectividad. Opción A (2 puntos)

En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor. (a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor? (b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?

Solución:

47. Selectividad. Opción B (2 puntos)

En una clase, el 20 % de los alumnos aprueba lengua, el 30 % aprueba matemáticas y el 40 % aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12 % aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7 % aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua"? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?

Solución:

48. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0.55 y por E_2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

Solución:

49. Selectividad. Opción B (2 puntos)

En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0.02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0.09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

Solución:

50. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0.95 y de que se active el segundo es 0.90. (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores. (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Solución:

51. Selectividad. Opción B (2 puntos)

En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa poblaci6n el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol. (a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol. (b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

52. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0.6, la empata con probabilidad 0.3 y la pierde con probabilidad 0.1. El jugador juega dos partidas. (a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio. (b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

Solución:

53. Selectividad. Opción B (2 puntos)

En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:
(a) No curse la opción Científico-Tecnológica. (b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

Solución:

54. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.
(a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
(b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

Solución:

55. Selectividad. Opción B (2 puntos)

En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4".

Solución:

56. Selectividad. Opción A (2 puntos)

En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide:
(a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb.
(b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

Solución:

57. Selectividad. Opción B (2 puntos)

Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ $P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$ Calcular: (a) $P(B/A)$. (b) $P(\overline{A}/B)$

Solución:

58. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.12$.
(a) Calcular las probabilidades de los sucesos(A U B) y (A/(A U B)).
(b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

Solución:

59. Selectividad. Opción B (2 puntos)

Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

Solución:

60. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0.25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Solución:

61. Selectividad. Opción B (2 puntos)

Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide: a) Describir el espacio muestral de este experimento. b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

Solución:

62. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0.2 %, mientras que dicha proporción es 0.5 % en la segunda y 0.1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Solución:

63. Selectividad. Opción B (2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Solución:

64. Selectividad. Opción A (2 puntos)

Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

65. Selectividad. Opción B (2 puntos)

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar. (a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso. (b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

Solución:

66. Selectividad. Opción A (2 puntos)

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0.01 para la marca A; 002 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

(a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado. (b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Solución:

67. Selectividad Opción A, 2 puntos

En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane. b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Solución:

68. Selectividad Opción B, 2 puntos

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A)$ = 1/4, $P(B)$ = 1/3, $P(AUB)$ = 1/2

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P\left(\overline{A} / \overline{B}\right)$.*Nota*.- La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

69. Selectividad Opción A, 2 puntos

Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0.46; la probabilidad de que practique B es igual a 0.33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0.15. a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores? b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

Solución:

70. Selectividad Opción B, 2 puntos

Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3. a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya? b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

Solución:

71. Selectividad Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:

$P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cup B \cup C) = 2/3$; $P(A \cap B \cap C) = 0$: $P(A/B) = P(C/A)$= ½.

(a) Calcúlese $P(C \cap B)$. (b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

72. Selectividad Opción B, 2 puntos

Para la construcción de un luminoso de feriase dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0.01 si la bombilla es blanca, es igual a 0.02 si la bombilla es azul e igual a 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor. (a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Solución:

73. Selectividad. Opción A, 2 puntos

En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %. a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado. b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Solución:

74. Selectividad Opción B, 2 puntos

La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0.55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0.40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0.25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.

Solución:

75. Selectividad. Opción A, 2 puntos

Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza. a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento. b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

Solución:

76. Selectividad l. Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.4$.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A\ B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese.

b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.

c) Si $P(A/B) = 0$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.

d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.

Solución:

77. Selectividad. Opción A, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.4$; $P(A \cap B) = 0.1$.

Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$. Nota. $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

78. Selectividad. Opción B, 2 puntos

Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución:

79. Selectividad. Opción A, 2 puntos

Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que: $P(A/C) \geq P(B/C)$, $P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C})$.

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

Solución:

80. Selectividad. Opción B, 2 puntos

Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: *La economía de un cierto país está en recesión.*
Suceso B: *Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.*
Se sabe que $P(A) = 0.005$; $P(B/A) = 0.95$; $P(\overline{B}/\overline{A}) = 0.96$. a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión. b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Solución:

81. Selectividad Opción A, 2 puntos

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar. a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería? b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

Solución:

82. Selectividad Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0.6$. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos: a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$. c) $B \subset A$ y $P(B) = 0.3$.d) $P(A \cap B) = 0.1$.

Solución:

83. Selectividad. Opción A, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a 7/12. Se sabe además que $P(A/B) = 1/2$. a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B. b) Calcula la probabilidad de que ocurra A.

Solución:

84. Selectividad. Opción B, 2 puntos

En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0.2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.3. Se elige al azar un habitante de la población. a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente. b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Solución:

85. Selectividad, 2 puntos

En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0.12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.

Solución:

86. Selectividad, 2 puntos

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5, de que sea un camión es 0.3 y de que sea una motocicleta es 0.2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0.06 para un coche, 0.02 para un camión y 0.12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar. A) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida. B) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.

Solución:

87. Selectividad, 2 puntos

Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0.49 y de nazca un niño es 0.51. Una familia tiene dos hijos:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

88. Selectividad. Opción B, 2 puntos

Se disponen de tres urnas A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca? b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:

89. Selectividad. Opción A, 2 puntos

La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

90. Selectividad. Opción B, 2 puntos

Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12 109	9 863
No apto	1 717	1 223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto? 2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

91. Selectividad Opción A, 2 puntos

Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

Solución:

92. Selectividad Opción A, 2 puntos

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba? (b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Solución:

93. Selectividad Opción B, 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B)$ = 0.1 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$ $P(A|B)$ = 0.5.Calcula:

(a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B} / \overline{A})$

Solución:

94. Selectividad. Opción A, 2 puntos.

Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde. (a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

95. Selectividad Opción B, 2 puntos

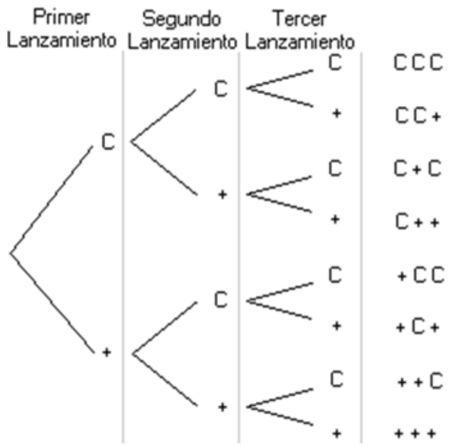
Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$. a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B. b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B. *Nota:* $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

Solución:

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama en árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.

Solución gráfica:

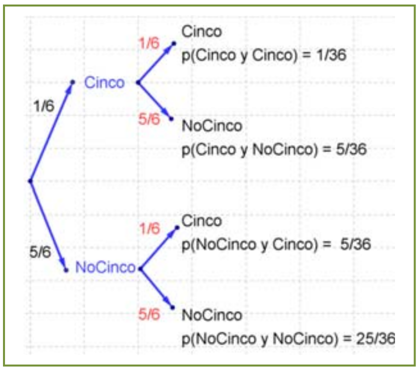


Número de caras	***0***	***1***	***2***	***3***
Función de cuantía: p(x)	***1/8***	***3/8***	***3/8***	***1/8***
Función de distribución: F(x)	***1/8***	***4/8 = 1/2***	***7/8***	***8/8 = 1***

2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.

Solución:

Número de 5s:	***0***	***1***	***2***
Función de cuantía: p(x)	***25/36***	***10/36***	***1/36***
Función de distribución: F(x)	***25/36***	***35/36***	***36/36 = 1***



3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

Solución: 800 euros.

4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cara o cruz (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, ¡que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar! Imagina que lleva 500 euros. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades y sus probabilidades. B) La distribución de probabilidad: Ganancia $(x) \rightarrow$ Probabilidad (x). C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

Solución gráfica:

	Probabilidad	***Ganancia***
Probabilidad de ganar 10 euros	***63/64***	***10***
Probabilidad de perder	***1/64***	***320***

E(x) = 10(63/64) – 320(1/64) = 310/64. Es ventajoso si llevamos suficiente dinero. Pero con 500 euros ya no tiene dinero para la séptima jugada seguida de pérdidas.

5. Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?

Solución: Sea x la cantidad apostada

P(x)	*1/6*	*15/36*	*15/36*
Ganancia	*3x – x = 2x*	*x – x = 0*	*x – x = 0*

E(x) = 2/6. La mejor estrategia es apostar al 7.

6. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:

Sexo del recién nacido:		chica	chico
Probabilidad:		0.485	0.515

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

Solución: Utilizando la función de probabilidad de la distribución binomial tenemos que:

$$P(x=7)=\binom{10}{7}\cdot 0{,}485^7\cdot 0{,}515^3$$

7. Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No lo calcules, sólo plantea como lo calcularías).

Solución: Utilizando la función de distribución del modelo discreto de probabilidad binomial tenemos que:

$$\sum_{x=6}^{15}\binom{20}{x}\cdot 0{,}12^x\cdot 0{,}88^{20-x}$$

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.

Solución: E(x) = 1; σ^2 = 1/2; σ = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1

Solución: A) P(caras < 1) = P(caras = 0) = 1/8. B) P(caras $\leq$ 1) = P(caras = 0) + P(caras = 1) = 1/2.

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

Solución: A) P(caras < 3) = 1/2. B) P(caras $\leq$ 3) = 13/16.

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

Solución: Utilizando la función de distribución del modelo discreto de probabilidad binomial tenemos que

$$P(caras < 5) = \sum_{x=0}^{4}\binom{15}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{15-x}=\frac{1941}{2^{15}}$$

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

Solución: Utilizando la función de distribución del modelo discreto de probabilidad binomial tenemos que

$$P(\text{número de 5s} > 10) = \sum_{x=11}^{15}\binom{15}{x}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{15-x}$$

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consume de una fábrica se ha comprobado que el 90 % son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, varianza y desviación típica.

Solución: Utilizando el teorema del límite central tenemos que E(x) = 500*0.9 = 450; σ^2 = 500*0.9*0.10 = 45; $\sigma \approx$ 6.7.

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80 % de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

Solución: 800 curaciones.

15. Utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para indicar los intervalos de probabilidad para el juego de apostar a obtener más de 7 al tirar dos dados. (*Ayuda*: $\mu = -1/6$ y $\sigma \approx 0.986$).

Solución: Para k = 2, P(437 $\leq$ x $\leq$ 463) $\geq$ 0.75; Para k = 3, P(430 $\leq$ x $\leq$ 470) $\geq$ 0.89.

16. En la fábrica de bombillas de bajo consumo con $B(500, 0.9)$ utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que $P(a \leq x \leq b) \geq 0.75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0.89$.

***Solución:** Para k = 2, $P(-2.138 \leq x \leq 1.805) \geq 0.75$; Para k = 3, $P(-3.124 \leq x \leq 2.7914) \geq 0.89$.*

17. En la medicina para la hepatitis C con $B(1000, 0.8)$ utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que la probabilidad de curación sea $P(a \leq x \leq b) \geq 0.75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0.89$.

***Solución:** Para k = 2, $P(775 \leq x \leq 825) \geq 0.75$; Para k = 3, $P(762 \leq x \leq 838) \geq 0.89$.*

18. Calcula A para que $f(x) = A(x^2 - 16)$ sea una función de densidad. Determina el dominio. Calcula la media y la varianza.

***Solución:** $A = -3/256$. $\{x: -4 \leq x \leq 4\}$; $\mu = 0$; $\sigma^2 = 16/5$.*

19. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:
a) $P(z \leq 0.37)$; b) $P(z < 1.51)$; c) $P(z \geq 0.87)$; d) $P(z \leq -0.87)$; e) $P(0.32 < z < 1.24)$.

***Solución:** $P(z \leq 0.37) = 0.6443$; $P(z < 1.51) = 0.9345$; $P(z \geq 0.87) = 0.166$; $P(z \leq -0.87) = 0.166$;*
$P(0.32 < z < 1.24)$.=0.8925-0.6217=0.2708

20. Se trata a pacientes con trastorno del sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

***Solución:** $P(x > 300) = 0.3707$.*

21. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m^2 con una desviación típica de 80 mm/m^2. Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m^2. b) La precipitación esté entre 400 y 510 mm/m^2. c) La precipitación sea menor de 300 mm/m^2.

***Solución:** a) $P(x \geq 500) = 0.2676$; b) $P(400 < x < 510) = 0.5058$; c) $P(x < 300) = 0.0307$.*

22. En el caso del problema anterior de una $N(450, 80)$ determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

***Solución:** $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.8544$, $P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$*

23. En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alcance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

***Solución:** a) $P(x = 25)$, o mejor, $P(x \geq 25) = 0.0062$; b) $P(x < 25) = 0.9938$; c) $P(18 < x < 22) = 0.6826$; d) Rápido si su velocidad es mayor que 22 km/h, muy rápido si 24 km/h, lento si 18 km/h, y muy lento si 18 km/h.*

24. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿Y de que sea mayor que 800?

***Solución:** $P(400 < x < 600) \approx 1$; $P(x > 800) \approx 0$.*

25. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70 % de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida media sea superior a 1000 horas?

***Solución:** $P(20 < x < 30) = 0.0823$.*

26. Se investigan a pie de urna las preferencias de votos en la Comunidad de Madrid. De 2000 encuestas 700 votan al partido X. Cuantos tendrían que votar al partido estudiado para que ganara con un 99% de confianza.

Solución: *Como 700/2000 = 35, una primera respuesta podría ser que 0.35·8000000 = 2800000 votos, pero, ¿qué confianza podemos tener de ese resultado.*

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, $1-\alpha$. Sea $\alpha = 0.01$ y $1-\alpha = 0.99$.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media $\mu = np = 2000 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea: $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.99$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$P(\mu - k\sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0.5) \geq 0.99$

Tipificamos: $P(\frac{-k\sigma - 0'5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma}) \geq 0.99$.

Obtenemos que z = $\frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma} \geq 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que:

$$P(2\,796\,519 \leq x \leq 2\,803\,480) \geq 0.99.$$

27. Rehaz los cálculos de la actividad resuelta anterior para un nivel de confianza del 99 %.

Solución: *Como 700/2000 = 35, una primera respuesta podría ser que 0.35·8 000 000 = 2 800 000 votos, pero ¿qué confianza podemos tener de ese resultado.*

Fijamos un nivel de significación α, o un grado de confianza, $1-\alpha$. Sea $\alpha = 0.01$ y $1-\alpha = 0.99$.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media $\mu = np = 2000 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea: $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.99$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p:

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0.5) \geq 0.99$$

Tipificamos: $P(\frac{-k\sigma - 0'5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma}) \geq 0.99$.

Obtenemos que z = $\frac{+k\sigma + 0'5}{\sigma} \geq 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma$. Debemos sustituir μ y α en función de p como se hizo anteriormente y se obtiene que: $P(2\,796\,519 \leq x \leq 2\,803\,480) \geq 0.99$.

28. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: *$P(1\,198\,643 \leq x \leq 1\,201\,357) \geq 0.95$.*

29. Se lanza 600 veces un dado y contamos el número de 5s. a) ¿Cuál es el intervalo simétrico respecto de la media con una probabilidad de 0.99? b) Lo mismo con una probabilidad del 0.6.

Solución: *a) $P(76 \leq x \leq 124) \geq 0.99$; b) $P(92 \leq x \leq 108) \geq 0.6$.*

30. Un determinado avión de la compañía tiene 260 plazas. ¿Qué número de reservas n puede aceptar la compañía admitiendo una probabilidad del 0.02 para que el número de reservas supere al número de plazas sabiendo que el 5% de las personas que reservan un billete no se presenta. (Ayuda: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0.02 \Rightarrow p(x \leq 260) = 1 - p(x > 260) \geq 0.98$).

Solución: *Se cumple que $p(x \leq 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{n}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{n-i} \geq 0.98$. Probando con $n > 260$, se cumple que el primer n en el que la probabilidad baja de 0.98 es 268: $p(x \leq 260) = \sum_{i=0}^{260} \binom{268}{i} \left(\frac{95}{100}\right)^i \left(\frac{5}{100}\right)^{268-i} = 0.95...$ Por tanto $n = 267$*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuanta el número de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

Solución gráfica:

Número de treses	0	1	2	3
Función de cuantía: p(x)	125/216	75/216	15/216	1/216
Función de distribución: F(x)	125/216	200/216	215/216	216/216

E(x) = 0.5; σ^2 = 0.666…; σ =0.816.

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga ganamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿Y en 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

Solución:

Número de caras	0	1	2	3	4
Ganar	–3	5 – 3 = 2	10 – 3 = 7	15 – 3 = 12	20 – 3 = 17
p(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

En una jugada se espera ganar 7 euros, en 20 se espera 140 euros y en 100 jugadas, 700 euros.

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, "suma de puntos obtenidos". A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?

Solución gráfica: A)

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(x)	1/24	2/24	3/24	4/24	4/24	4/24	3/24	2/24	1/24

B) E(x) = 3.33… euros.

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

Solución: Utilizando la función de probabilidad de la distribución binomial tenemos que:

$$P(x=X)=\binom{10}{X}\cdot 0{,}2^{X}\cdot 0{,}8^{10-X};$$

P(x = 9) o P(x = 10) = $\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^{9}\cdot 0{,}8^{10-9}$ + $\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}$ *= 0.2⁹ · (8 + 0.2) = 0.0000042.*

5. Si $p(x)$ es la probabilidad de tener x éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$, y $p(x+1)$ es la de obtener $x+1$ éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente: $p(x+1)=\frac{p(x)}{x+1}(n-x)\frac{p}{q}$

Solución:

$$P(x+1)=\binom{n}{x+1}\cdot p^{x+1}\cdot q^{n-x-1}=\frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\cdot p^{x}\cdot p\cdot\frac{q^{n-x}}{q}=\frac{n!(n-x)}{x!(x+1)(n-x)!}\cdot p^{x}\cdot p\cdot\frac{q^{n-x}}{q}=\frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}$$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al dos por 1 a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale un impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale, ¿Te parece un juego equitativo?

Solución: E(x) = –10/ 37. No es equitativo. Gana la banca.

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparece cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si en el segundo, 20, si en el tercero, 40, … y en el n-ésimo, $10\cdot 2^{n+1}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

Solución: Con 5 jugadas E(x) = 25 €, con 10 jugadas E(x) = 50 €.

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0.95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

Solución: P(143 $\le$ x $\le$ 191) $\ge$ 0.95.

9. Calcula A para que la función siguiente sea una función de densidad de probabilidad. $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ Ax & si\ 0\le x<8 \\ A(16-x) & si\ 8\le x<16 \\ 0 & si\ x>16 \end{cases}$. A) Dibuja su gráfica y calcula las siguientes probabilidades: $P(x< 5)$; $P(6 < x < 10)$; $P(x > 12)$. B) Calcula la media y la desviación típica

Solución gráfica: A) A = 1/160; P(x< 5) = 5/160; P(6 < x < 10) = 8/160; P(x > 12) = 156/160. B) E(x) = 3.2;

10. Calcula A en cada uno de los casos siguientes para que la función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.
    A) $f(x) = Ax^2(x-3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$. B) $f(x) = Ax\,(x-3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$.
    C) $f(x) = Ax^3(x-3)$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$. D) $f(x) = Ax^2(x-3)^2$ siendo nula para $x < 0$, y $x > 3$
    Calcula en cada caso $P(x< 1)$ y $P(x > 2)$. Determina la media y la varianza. Analiza las diferencias.

Solución: A) A = 4/27; B) A = 4/27; C) A = 10/351; D) A = 10/81.

11. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ calcula $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Determina también la media y la desviación típica.

Solución: P(x = 0) = 0.0282, P(x ≠ 0) = 0.972, P(x = 10) = 0.028 y P(x = 7) = 0.009; E(x) = 3; σ^2 = 2.1; σ = 1.45.

12. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:
    a) 0 caras, b) 1 cara, c) 2 caras, d) 3 caras

Solución: P(0) = 1/32; P(1) = 5/32; P(2) = 10/32; P(3) = 10/32.

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(z = 0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1.82)$, d) $P(z > 1.82)$.

Solución: a) P(z = 0) = 0, b) P(z < 0) = 0.5, c) P(z = 1.82) = 0, d) P(z > 1.82) = 0.0344.

14. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.

Solución: a) P(z > 4) = 0, b) P(z < 4) = 1, c) P(z > 1) = 0.1587, d) P(z < 1) = 0.8413.

15. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
    a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1.3 < z < 4)$, c) $P(-0.2 < z < 2.34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.

Solución: a) P(1 < z < 2) = 0.1359, b) P(–1.3 < z < 4) = 0.9032, c) P(–0.2 < z < 2.34) = 0.5694, d) P(–1 <z < 1) = 0.6826

16. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

Solución: a) P(x > 4) = 0.0668, b) P(x < 4) = 0.9332, c) P(x > 1) = 0.5, d) P(x < 1) = 0.5

17. Calcula en una distribución normal $N(0.5, 0.2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

Solución: a) P(x > 4) = 0, b) P(x < 4) = 1, c) P(x > 1) = 0.0062, d) P(x < 1) = 0.9938.

18. Calcula en una distribución normal $N(1, 1/2)$ las probabilidades siguientes:
    a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1.3 < x < 4)$, c) $P(-0.2 < x < 2.34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.

Solución: a) P(1 < x < 2) = 0.4772, b) P(–1.3 < x < 4) = 1, c) P(–0.2 < x < 2.34) = 0.9881, d) P(–1 < x < 3) = 1

19. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x = 0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x = 10)$ y $P(x = 7)$. Compara con los resultados obtenidos en el ejercicio 9.

Solución: μ = 3, σ = 1.45; P(x = 0) = 0.984, P(x ≠ 0) = 0.016, P(x = 10) = 0 y P(x = 7) = 0.008.

20. En una distribución binomial $B(100, 0.4)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \le 50)$, $P(x \ge 50)$ y $P(40 \le x \le 50)$.

Solución: μ = 40, σ = 4.898; P(x > 40) = 0.4602, P(x ≤ 50) = 0.9738, P(x ≥ 50) = 0.0262 y P(40 ≤ x ≤ 50) = 0.9476.

21. En una distribución binomial $B(1000, 0.5)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ y $P(50 \le x \le 150)$.

Solución: μ = 500, σ = 15,81; P(x < 200) = 0, P(x = 150) = 1, P(x < 150) = 1 y P(50 ≤ x ≤ 150) = 1.

22. En una distribución binomial $B(1000, 0.05)$ calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $P(x > 200)$, $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ y $P(50 \le x \le 200)$.

Solución: μ = 50, σ = 6.89; P(x > 200) = 0, P(x = 200) = 0, P(x < 200) = 1y P(50 ≤ x ≤ 200) = 0.5279.

23. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

Solución: μ = 0.1, σ = 0.31; P(x > 2) = P(z > 4.51) = 0, siendo z una N(0,1).

24. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0.4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que: a) María gane alguna vez. b) Raquel gane al menos una vez. c) Raquel gane más de la mitad de las partidas. d) María gane 2 partidas.

Solución: a) P(María gane alguna vez) = 0.9534. b) P(Raquel gane al menos una vez) = 0.9959. c) P(Raquel gane más de la mitad de las partidas) = 0.5443. d) P(María gane 2 partidas) = 0.2488.

25. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina las probabilidad de que: a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm. b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm. c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

Solución: a) $P(x > 190) = 0.2646$; b) $P(x < 160) = 0.0918$; c) P160 < x < 190) 0.6536.

26. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que: a) Un opositor obtenga 120 puntos. b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban? c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20 % de los mejores, ¿cuántos puntos debe obtener un opositor para aprobar?

Solución: a) Si es una distribución normal, 0. Si la consideramos binomial, 0.0054; b) Aprueban un 2 %; c) Más de 108 puntos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se lanza un dado tres veces y se anota el números de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:

   a) $B(4, 1/6)$ b) $B(4, 1/4)$ c) $B(3, 1/6)$ d) $B(3, 5/6)$

Solución: c)

2. En la distribución anterior, la media es:

   a) $\mu = 4/6$ b) $\mu = 1/2$ c) $\mu = 15/6$ d) $\mu = 1$

Solución: b)

3. Y la varianza es:

   a) $\sigma^2 = 15/12$ b) $\sigma^2 = 5/6$ c) $\sigma^2 = 1/36$ d) $\sigma^2 = 5/12$

Solución: d)

4. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(z \leq 2.02)$, que vale:

   a) $P(z \leq 2.02) = 0.0217$ b) $P(z \leq 2.02) = 0.9772$ c) $P(z \leq 2.02) = 0.0228$ d) $P(z \leq 2.02) = 0.9783$

Solución: d)

5. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $P(0.5 < z < 1.5)$, que vale:

   a) 0.3417 b) 0.9332 c) 0.6915 d) 0.2742

Solución: a)

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de $P(x < \mu)$ es:

   a) –0.4 b) 0.5 c) 0.6 d) No puede saberse

Solución: b)

7. En una distribución binomial $B(10, 0.3)$ el valor de $P(x = 0)$ es:

   a) 0.11 b) 0.0198 c) 0.00001024 d) 0.8

Solución: b)

8. El 2 % de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

   a) 0.6011 b) 0.7635 c) 0.9357 d) 0.8655

Solución: c)

9. Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

   a) 0.5987 b) 0.4027 c) 0.9357 d) 0.8074

Solución: a)

10. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Juegan 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

   a) 0.0123 b) 0.5 c) 0.8972 d) 0.9877

Solución: d)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://pedroreina.net/pau/
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/
http://www.segundoperez.es/
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

1. Un árbitro de fútbol ha observado que en el tipo de partidos que él arbitra un 70 % de los penaltis terminan en gol. Un partido se pretende decidir mediante una tanda de 10 lanzamientos de penalti por cada equipo. El primer equipo ya ha lanzado sus penaltis y ha obtenido 8 goles. Seguidamente va a lanzar sus penaltis el otro equipo: a) Describe la variable que representa el número de goles que este equipo va a obtener. ¿Cuál es el número de goles esperado? b) ¿Cuál es la probabilidad de que meta también 8 goles y se vuelva a empatar el partido? c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el segundo equipo, es decir, de que meta 9 o más goles? (Selectividad)

Solución:

2. El gasto total diario de una familia es una variable normal con media 30 € y desviación típica 6 €. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día se gasten más de 36 €? ¿Y de que se gasten menos de 12 €? b) ¿Qué porcentaje de días se encontrará el gasto entre 36 € y 42 €? c) Calcula el valor por debajo del cual se encuentran el 80 % de los gastos totales diarios de la familia. (Selectividad)

Solución:

3. El Ayuntamiento de cierta ciudad ha promovido una campaña para mejorar la estética de la misma, de forma que en los edificios haya sólo una antena de televisión para todos los vecinos. El fruto de esa campaña ha sido que el 80 % de los edificios tienen efectivamente sólo una antena. Supongamos ahora que en una calle hay 15 edificios: a) Describe la variable que representa el número de edificios de la calle que tienen una sola antena. ¿Cuántos edificios se espera que tengan sólo una antena? b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 11 edificios con sólo una antena? c) ¿Cuál es la probabilidad de que 14 o más tengan sólo una antena? (Selectividad)

Solución:

4. En un almacén de fruta la demanda total diaria de manzanas (en kilos) sigue una distribución normal de media 1.000 y desviación típica 100. a) Calcula el porcentaje de días en que la demanda no supera los 1.100 kilos. b) El almacén dispone diariamente de 1.200 kilos de manzanas. ¿Cuál es la probabilidad de que un día la demanda supere esta cantidad y no pueda ser atendida? c) Calcula el número de kilos de manzanas por debajo del cual se sitúan el 95 % de las cantidades totales que se le demandan al almacén diariamente. (Selectividad)

Solución:

5. Para cierto modelo de lavadora se ha analizado el tiempo de funcionamiento que transcurre sin necesitar revisión técnica, llegando a la conclusión de que dicho tiempo es una variable Normal de media 5.040 horas de lavado con una desviación típica de 720 horas. a) Calcula la probabilidad de que una lavadora de ese modelo no supere las 3.960 horas de lavado sin necesitar revisión. b) Calcula la probabilidad de que supere las 6.480 horas sin necesitar revisión. c) Calcula la probabilidad de que funcione sin necesidad de revisión entre 5.760 y 6.120 horas. d) ¿Qué número de horas no supera sin necesitar revisión el 90 % de este tipo de lavadoras? (Selectividad)

Solución:

6. Una empresa de marketing ha realizado un estudio sobre el lanzamiento al mercado de cierta bebida refrescante. La conclusión es que la bebida gusta a un 80 % de las personas que la prueban. Una vez realizado el estudio, un grupo de 12 personas elegidas al azar fue invitado a probar la bebida: a) De las 12 personas sólo a 5 les gustó la bebida. Si el estudio de marketing es correcto ¿cuál es la probabilidad de que esto haya sucedido? b) Si el estudio de marketing es correcto, ¿cuál era la probabilidad de que a más de 10 personas les hubiera gustado la bebida? c) Si el estudio de marketing es correcto, ¿cuál era la probabilidad de que a alguno de los 12 no le hubiera gustado la bebida? (Selectividad)

Solución:

7. Un 30 % de los pacientes que acuden al servicio de urgencias de un hospital no realizan en realidad una consulta urgente y podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera. En una mañana han acudido 10 pacientes al servicio de urgencias. a) ¿Qué probabilidad hay de que 6 de ellos no realicen una consulta urgente? b) ¿Qué probabilidad hay de que menos de 3 pacientes no realicen una consulta urgente? c) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos no realice una consulta urgente? (Selectividad)

Solución:

8. En una empresa, el dinero percibido anualmente por cada empleado en concepto de dietas sigue una distribución Normal de media 1900 euros y desviación típica 250 euros. a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado cobre por dietas menos de 1525 euros? ¿Cuál es la probabilidad de que cobre más de 2400 euros? b) ¿Qué porcentaje de empleados cobrarán entre 1525 euros y 2400 euros?c) Se sabe que un individuo cobra en dietas más que un 70% de los empleados de la empresa y menos que un 30 %. ¿Cuánto se lleva en dietas?

(Selectividad)

Solución:

9. Según un estudio llevado a cabo en cierta ciudad hace 2 años, al 10 % de los jóvenes residentes en la misma le gustaba la música clásica. Se pretende evaluar si ese estudio sigue siendo válido (de forma que todavía en la actualidad le guste ese tipo de música al 10 % de los jóvenes de la ciudad). Para ello se ha realizado una encuesta a 20 jóvenes al azar, resultando que a 4 les gusta la música clásica. Si el estudio realizado hace 2 años sigue siendo válido: a) ¿Cuál era la probabilidad de que se hubiera producido el resultado mencionado en la encuesta a los 20 jóvenes? b) ¿Qué probabilidad había de que la música clásica le hubiera gustado como mucho a 2 de los 20? c) ¿Qué probabilidad había de que le hubiera gustado a alguno de los 20? d) De los 20 encuestados ¿cuál era el número esperado de jóvenes a quienes gustaría la música clásica? (Selectividad)

Solución:

10. Una cadena de establecimientos comerciales ha hecho un estudio que cifra en un 48 % el porcentaje de los clientes que utilizan para sus pagos algún tipo de tarjeta. En la cola de una de sus tiendas hay 6 clientes: a) ¿Qué probabilidad hay de que 4 de ellos paguen con tarjeta? ¿Qué probabilidad hay de que más de 4 paguen con tarjeta? b) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos pague con tarjeta? c) ¿Qué probabilidad hay de que alguno de ellos no pague con tarjeta? (Selectividad)

Solución:

Puedes encontrar muchas pruebas de acceso a la universidad y sus soluciones, de muchas comunidades autónomas en:

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Página muy completa, con los ejercicios muy bien explicados

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)

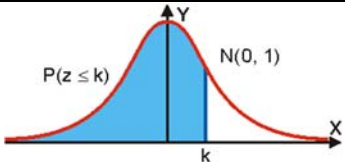


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000