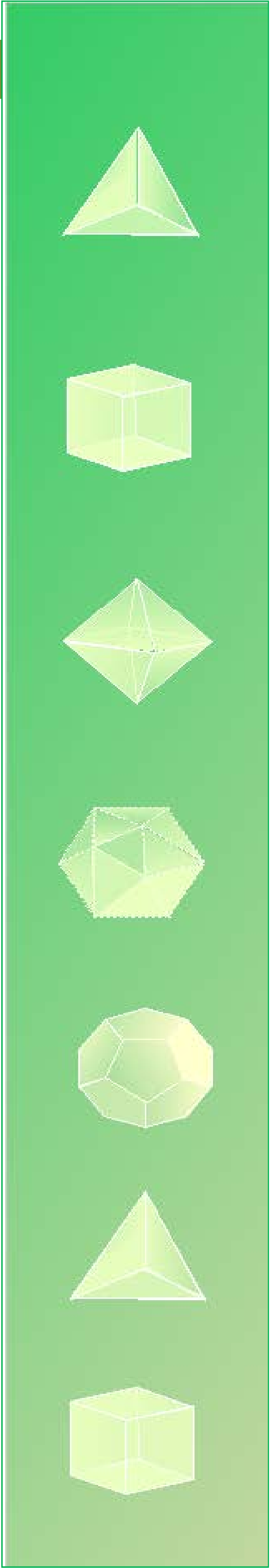


Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 7: Semejanza
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

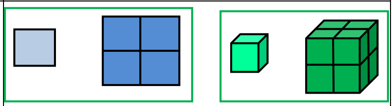
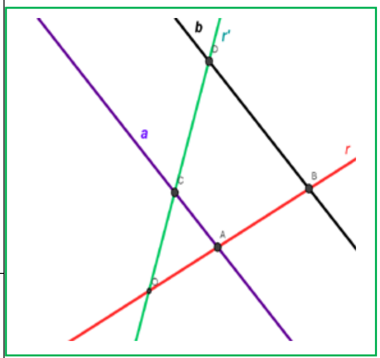
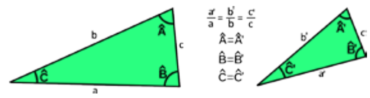
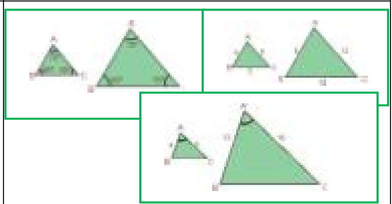
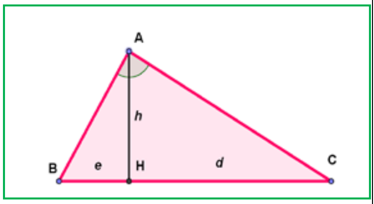
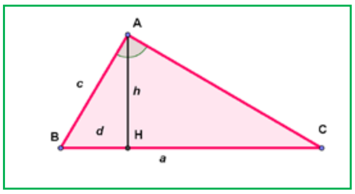
Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

RESUMEN

Noción	Definición	*Ejemplos*
Figuras semejantes	Si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales.	
Razón de semejanza	Coeficiente de proporcionalidad	
Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes	Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es $\boldsymbol{k}$, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k}^2$ y entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k}^3$.	
Teorema de Tales	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproco del teorema de Tales	Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entonces ***a*** y ***b*** son paralelas.	
Semejanza de triángulos	Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes sí: **Primero:** Tienen dos ángulos iguales. **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales. **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.	
Teorema de la altura	En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional de los segmentos en los que divide a la hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$ luego $h^2 = ed$.	
Teorema del cateto	En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$ luego $c^2 = ad$.	

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FIGURAS SEMEJANTES

1. **Mide tu altura en una foto y calcula el factor de semejanza.**
   Por ejemplo, altura 160 cm. Foto 16 cm. Factor de semejanza 160/16 = 10.

2. **El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?**
   Volumen esfera: $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\ r^3$; Radio melocotón: 8/4 = 4 cm, Radio hueso: 4/3 cm
   Volumen melocotón: $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\ 4^3=\frac{4^4\pi}{3}$; Volumen hueso: $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{4^4\pi}{3^4}$
   Razón de proporción: $\frac{Volumen\ melocotón}{Volumen\ hueso}=\frac{\frac{4^4\pi}{3}}{\frac{4^4\pi}{3^4}}=3^3=27$

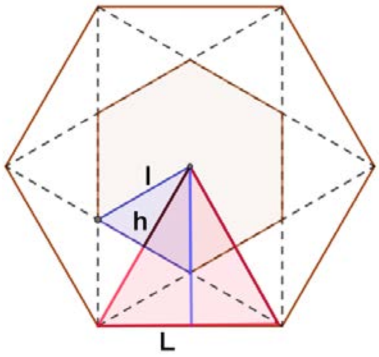
3. **En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 3 €, 6 € y 9 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.**
   Llamamos pizza 1 P1, 3€ y radio 7,5; pizza 2 P2, 6€ y radio 10 ; y pizza 3 P3, 9€ y radio 15 cm
   Las razones de los precios son: $\frac{P2}{P1}=\frac{6}{3}=2$; $\frac{P3}{P1}=\frac{9}{3}=3$
   Áreas de las pizzas: P1 = $\pi\cdot\ 7{,}5^2=\ 56{,}25\pi$ cm²
   P2 = $\pi\cdot\ 10^2=\ 100\pi$ cm² dividimos entre la razón 2 = 50 cm²
   P3 = $\pi\cdot\ 15^2=\ 225\pi$ cm² dividimos entre la razón = 75 cm²
   La pizza que ofrece mayor área y por tanto sale más económica es la P3.

4. **Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?**
   La relación entre la razón entre las alturas y la razón de los volúmenes es
   $$\frac{Volumen_{real}}{Volumen_{maqueta}}=\left(\frac{h_{real}}{h_{maqueta}}\right)^3 \text{ sustituimos } \frac{1000}{1}=\left(\frac{5}{h_{maqueta}}\right)^3\rightarrow\sqrt[3]{1000}=\frac{5}{h_{maqueta}}$$
   $10=\frac{5}{h_{maqueta}}\rightarrow h_{maqueta}=\frac{5}{10}=0{,}5$; la altura de la maqueta debe ser de 0,5 metros.

2. EL TEOREMA DE TALES

5. **En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio? *Comprobación*: ¿El resultado te parece real? ¿Es posible que un edificio tenga esa altura?**
   $\frac{10}{2}=\frac{h}{1{,}5}\rightarrow h=\frac{10\cdot1{,}5}{2}=7{,}5$; el edificio mide 7,5 metros. No es un gran edificio pero posible, una planta baja y primera.

6. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

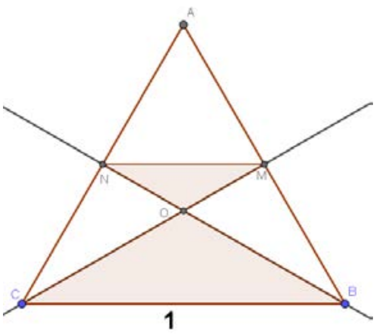


Tomamos un hexágono de lado L

h es la mitad del lado del triángulo equilátero formado en el hexágono exterior que mide 1, luego h = L/2

Sabemos que la altura de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ por tanto, $\frac{L}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l \rightarrow L = \sqrt{3}\,l$
Luego la razón es $\sqrt{3}$

7. En un triángulo regular *ABC* de lado 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

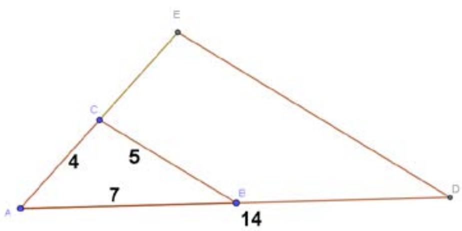


Sí son semejantes pues las rectas MN y BC son paralelas. La razón de semejanza es k = 1/2;
MN mide 1/2 cm.

8. Una pirámide regular hexagonal, de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Como se corta a 4 cm del vértice, la altura de la nueva pirámide es de 4 cm
Para calcular el lado de la base vemos la razón 10/4 = 2,5 luego el lado de la base de la nueva pirámide será 3/2,5 = 1,2 cm

9. Sean *ABC* y *AED* dos triángulos en posición Tales. Se sabe que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m y *AD* = 14 m. Calcula las dimensiones de *AED* y su perímetro.



$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{14}{7} = \frac{AE}{4} \rightarrow AE = 8$ m

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{14}{7} = \frac{DE}{5} \rightarrow DE = 10$ m

Perímetro: 14 + 10 + 8 = 32 m

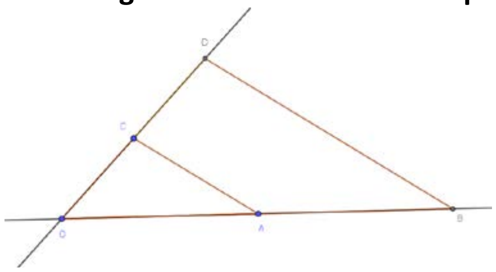
10. ***Reto*: Utiliza una hoja en blanco para demostrar el teorema de Tales sin ayuda. No hace falta que utilices el mismo procedimiento que el libro. Hay muchas maneras de demostrar el teorema.**

Respuesta manipulativa y abierta:

11. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.

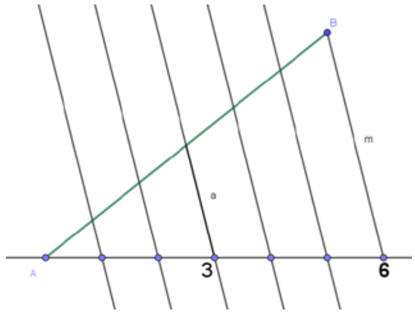
No, en este caso pueden no ser rectas paralelas y que no se verifique que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$.

12. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.



Sí, Los triángulos están en posición Tales.

13. Si divides el segmento *AB* en 6 partes iguales. Busca la relación de semejanza entre el sexto segmento y el tercero.

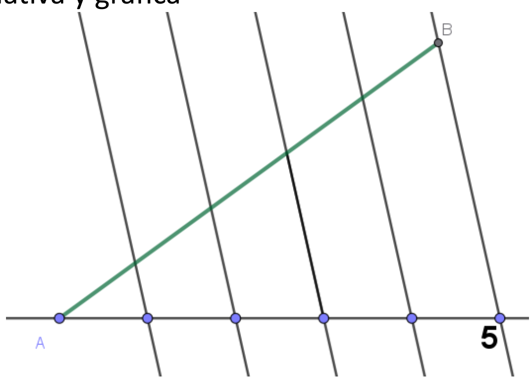


Los triángulos están en posición de Tales, luego

$$\frac{m}{a}=\frac{6}{3}=2$$

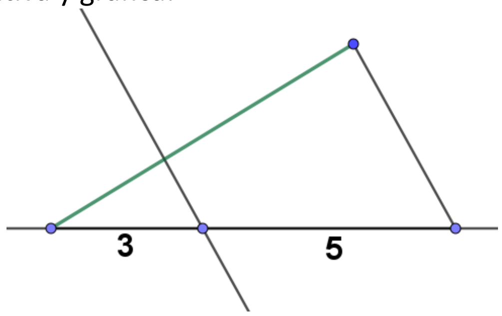
14. Dibuja en tu cuaderno un segmento y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás. Demuestra que, utilizando el teorema de Tales los segmentos obtenidos son, en efecto, iguales.

Respuesta manipulativa y gráfica



15. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.

Respuesta manipulativa y gráfica:



16. Dibuja en tu cuaderno una recta numérica y representa en ella los siguientes fracciones:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

Respuesta manipulativa y gráfica:

3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

17. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 60° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.

c) *A* = 30°, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *A'*= 30°, *b'* = 4 cm, *c'* = 5 cm

d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 14 cm, *b'* = 16 cm, *c'* = 25 cm

a) 180° - 60° - 40° = 80° ; 180° - 60° - 80° = 40° , Sí por tener los ángulos iguales.

b) 180° - 80° = 100° , 100°/2 = 50° ; 180° - 50° - 50° = 80° , Sí por tener los ángulos iguales.

c) Tienen un ángulo igual, 2 · 4 = 8, 2 · 5 = 10 y 2 lados proporcionales. Sí son semejantes.

d) 2 · 7 = 14, 2 · 8 = 16 , 2 · 12 = 24 ≠ 25; NO. Los lados no son proporcionales.

18. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* = 10 cm. *a*' = 5 cm, ¿ *b*', *c*'?

b) *A* = 37°, *b* = 10 cm, c = 12 cm. *A'* = 37°, *b'* = 10 cm, ¿*c'*?

a) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \to \frac{12}{5} = \frac{15}{b'} = \frac{10}{c'} \to 12b' = 75 \to b' = \frac{75}{12} = 6{,}25 \text{ cm}$

$$12c' = 50 \to c' = \frac{50}{12} = 4{,}17 \text{ cm}$$

b) Como tienen un ángulo igual, los lados que lo comprenden deben ser proporcionales

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \to \frac{10}{10} = \frac{12}{c'} \to c' = 12$$

19. Un triángulo tiene lados de 12 cm, 14 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

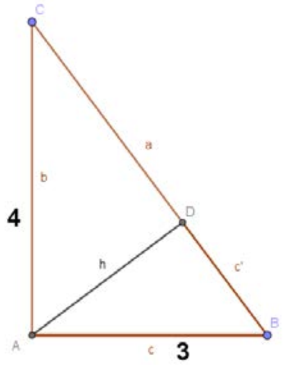
El perímetro del triángulo dado es: 12 + 14 + 8 = 34 .

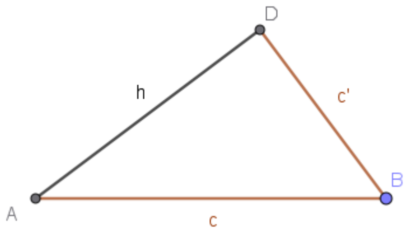
Vemos la razón de los perímetros 80/34 = 2,353

Calculamos los lados: 12 · 2,353 = 28,24 cm ; 14 · 2,353 = 32,94 cm ; 8 · 2,353 = 18,82 cm

20. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

Tenemos 2 triángulos rectángulos que tienen 2 ángulos iguales, el recto y el B y un lado igual, el c, luego son proporcionales



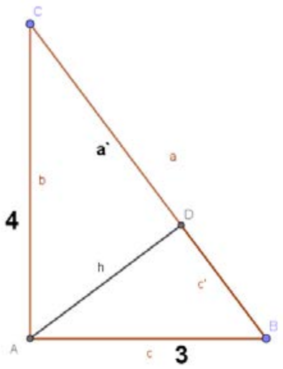


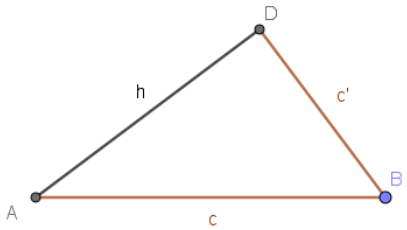
Calculamos la hipotenusa del triángulo inicial: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow a = 5$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{4}{h} \rightarrow 5h = 12 \rightarrow h = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm

21. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la proyección sobre la hipotenusa de cada uno de esos catetos?

Tenemos 2 triángulos rectángulos que tienen 2 ángulos iguales, el recto y el B y un lado igual, el c, luego son proporcionales





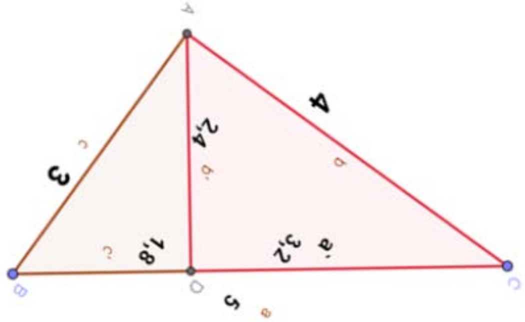
Calculamos la hipotenusa del triángulo inicial: $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow a = 5$

Debemos calcular c’ y a’, sabemos que c’ + a’ = a = 5,

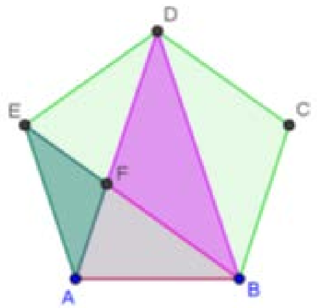
Calculamos c’: $\frac{a}{c} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{3}{c'} \rightarrow 5c' = 9 \rightarrow c' = \frac{9}{5} = 1{,}8$ cm

De donde c’ + a’ = 5 , 1,8 + a’ = 5 , a’ = 5 – 1,8 = 3,2 cm

22. Dibuja los tres triángulos semejantes para el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 en posición de Tales.

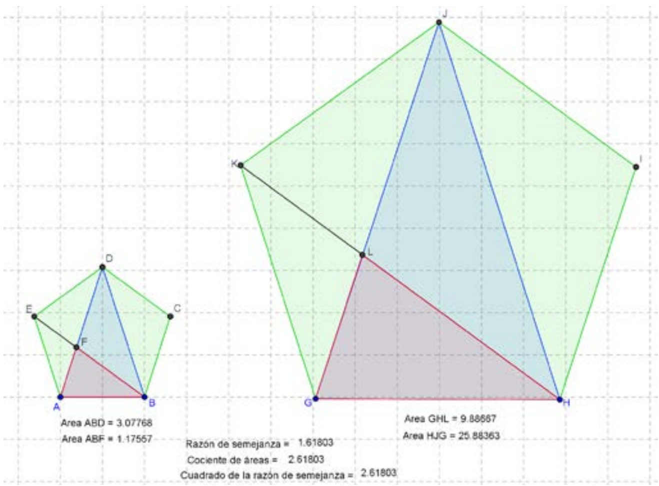


23. Dibuja un pentágono *GHIJK* del mismo modo que has construido el *ABCDE* con la condición de que la longitud de sus lados sea el triple del que ya está construido. Para facilitar la tarea puedes activar la cuadrícula y mover los puntos iniciales.



a) Calcula las áreas de los triángulos *HJG* y *GHL*, su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.

b) Comprueba que la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza de los triángulos *GHJ* y *GHL* del pentágono *GHIJK* coinciden con las de los triángulos *ABD* y *ABF* del pentágono *ABCDE.*



Si el lado del pentágono pequeño mide 2 y el del grande 6, luego k = 3
La razón de semejanza entre las áreas es $k^2 = 3^2 = 9$.

24. Calcula las áreas de los dos pentágonos anteriores y relaciona su cociente con el cuadrado de la razón de semejanza.

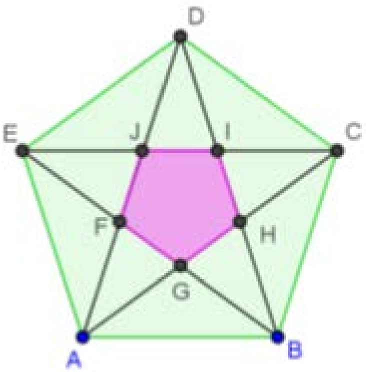
El área es el cuadrado de la razón de semejanza. Por ejemplo, si un pentágono tiene de lado 2 y otro 6 la proporción es 3 y la de las áreas es $3^2 = 9$

25. ***Otros triángulos del pentágono.*** **Investiga si los triángulos *AFE* y *BDF* son semejantes y si lo son calcula su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y compara este resultado con el cuadrado de la razón de semejanza.**

Sí lo son. La razón de semejanza es Φ = 1,618… y la relación entre las áreas es Φ^2 =2,62.

La segunda es el cuadrado de la primera (si se toman todos los decimales)

26. ***Pentágono dentro de un pentágono.*** **Dibuja el pentágono *FGHIJ* que se forma en el pentágono *ABCDE* al trazar sus diagonales, ambos son semejantes porque son polígonos regulares. Calcula la razón de semejanza y el cociente entre sus áreas. Observa los triángulos AGF y ABD ¿son semejantes?**

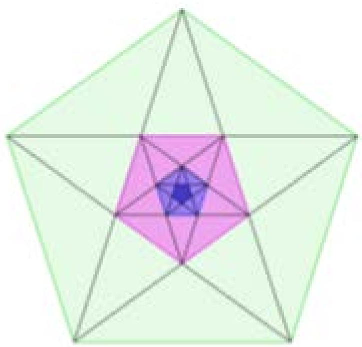


¡Ya sabes! La estrella pitagórica, la de 5 puntas, y por ello el pentágono regular, son figuras relacionadas con el número de oro, Φ = 1,618…

El cociente entre dos longitudes consecutivas de la estrella es, siempre, Φ.

La razón entre las áreas es Φ^2 =2.62…

27. Observa los pentágonos regulares de la figura: a) ¿Son todos semejantes? b) Te parece que el proceso de dibujar pentágonos dentro de pentágonos es infinito ¿Por qué? c) ¿Cuál es la sucesión de las razones de semejanza entre el pentágono mayor y cada uno de los siguientes?



a) Sí, son semejantes.

b) No hay razón teórica para que tenga que pararse (si bien obviamente será complicado dibujar pentágonos más pequeños que un átomo).

c) La relación entre los lados de los pentágonos es Φ = 1,618…, o si dividimos el mayor por el menor: $1/\Phi = \delta$ = 0,38…. La sucesión es, por tanto 0,38, $0{,}38^2$, $0{,}38^3$, $0{,}38^4$ ... es decir 0,38, 0,1444, 0,054872, 0,02085136...

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Figuras semejantes

1. **Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. toma medidas y determina las razones de semejanza. Calcula las medidas reales y comprueba que la razón de semejanza obtenida es correcta.**

   Respuesta manipulativa y abierta. Práctica personal.

2. **En un mapa de carretera de escala 1:3000 la distancia entre dos ciudades es de 2,7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.**

   2,7 · 3000 = 8100 cm = 81 m

3. **Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0,034 mm de diámetro?**

   0,034 · 500 = 17 mm

4. **Pericles murió de peste en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo debían construir un altar en forma de cubo cuyo volumen duplicara exactamente el que ya existía. ¿Cuál debía ser la razón de proporcionalidad de los lados? ¿Es posible construir exactamente un cubo con dicha razón?**

   Si el que existía tenía un volumen x^3 el volumen del nuevo debía ser $2x^3$ por lo que la razón de los volúmenes es 2. La relación entre una razón lineal y una razón de volumen es que la mayor es el cubo de la menor o bien la menor es la raíz cúbica de la mayor, en este caso la razón de los lados sería $\sqrt[3]{\mathbf{2}}$ que es un número irracional y por tanto es imposible construir un cubo que tenga el doble de volumen que otro existente.

5. **En una fotografía una persona que sabe que mide 1,75 m tiene una altura de 2,3 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5,7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?**

   Pasamos la altura de la persona a cm, 1,75 m = 175 cm

   $$\frac{altura\ persona}{altura\ persona\ foto} = \frac{altura\ árbol}{altura\ árbol\ foto} \to \frac{175}{2,3} = \frac{h}{5,7} \to h = \frac{175 \cdot 5,7}{2,3} = 434 \text{ cm} = 4,34 \text{ m}$$

6. **¿Cuánto mide el lado de un icosaedro cuya superficie es el triple del de otro icosaedro de lado 4 cm?**

   La relación entre una razón lineal y una razón de superficie es que la mayor es el cuadrado de la menor o bien la menor es la raíz cuadrada de la mayor, en este caso como la razón de las superficies es 3, la razón de los lados es $\sqrt{\mathbf{3}}$ y el lado del nuevo icosaedro mide $4\sqrt{\mathbf{3}}$

7. **Suponemos que un melocotón es una esfera, y que su hueso tiene un diámetro que es un tercio del del melocotón. ¿Cuánto es mayor la pulpa del melocotón que su hueso?**

El diámetro del melocotón es 3 veces el diámetro del hueso, luego el volumen del melocotón es $3^3 = 27$ veces el volumen del hueso.

8. ¿Son semejantes todos los cuadrados? ¿Y todos los rombos? ¿Y todos los rectángulos? ¿Cuándo son semejantes dos rombos? ¿Y dos rectángulos?

Todos los cuadrados son semejantes, Los rombos y los rectángulos, no. Dos rombos son semejantes si tienen sus ángulos iguales. Dos rectángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

9. El área de un rectángulo es 10 cm², y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?

Como un lado es la mitad del otro, ½ el área será ¼ luego 10/4 = 2,5 es el área

Área rectángulo = base · altura , tenemos 2,5 = b · 1 , de donde b = 2,5 cm mide el otro lado.

Perímetro: 2,5 + 2, 5 + 1 + 1 = 7 cm

10. ¿Son semejantes todas las esferas? ¿Y los icosaedros? ¿Y los cubos? ¿Y los dodecaedros? ¿Cuándo son semejantes dos cilindros?

Todas las esferas son semejantes, todos los icosaedros, todos los cubos, y todos los dodecaedros. Pero todos los cilindros, no. Lo son si sus dimensiones, radio de la base y altura, son proporcionales.

11. La arista de un octaedro mide 7,3 cm, y la de otro 2,8 cm, ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre sus superficies? ¿Y entre sus volúmenes?

La razón entre sus lados es: $\frac{7{,}3}{2{,}8} = 2{,}61$

La razón entre las superficies es: $\left(\frac{7{,}3}{2{,}8}\right)^2 = 6{,}81$

La razón entre los volúmenes es: $\left(\frac{7{,}3}{2{,}8}\right)^3 = 17{,}78$

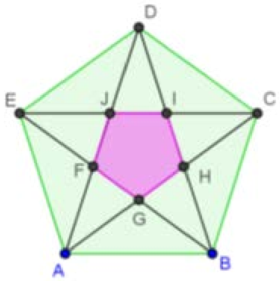
12. La medida normalizada A$ tiene la propiedad de que partimos el rectángulo por la mitad de su parte más larga, el rectángulo que se obtiene es semejante al primero. Duplicando, o dividiendo se obtienen las dimensiones de los rectángulo A1, A2, A3, A4, A5…. El rectángulo A4 mide 29,7 cm x 21 cm. Determina las medidas de A3 y de A5.

Al doblar el rectángulo por la mitad del lado largo los dos nuevos rectángulos tienen de largo el ancho del anterior y de ancho la mitad del largo del anterior.

El A3 se divide por su parte más larga y se obtiene el A4, luego el largo del A3 es el doble del ancho del A4 , 21 · 2 = 42 y el ancho del A3 es el mismo que el largo del A4 29,7 por tanto las medidas del A3 son 42 cm x 29,7 cm.

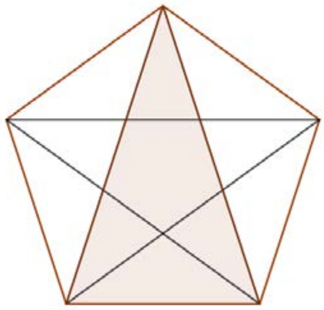
El A4 se divide por su parte las larga y se obtiene el A5, luego el ancho del A5 es la mitad del largo del A4, 29,7/2 = 14,85 y el ancho del A5 es el mismo que el largo del A4, por tanto las medidas del A3 son 21 cm x 14,85 cm

13. Dibuja un pentágono regular y traza sus diagonales. Tienes un nuevo pentágono regular. ¿Cuál es la razón de semejanza?



Pentágono regular y estrella son las figuras áureas.
La razón de semejanza es el número de oro,
luego P2/P1 = Φ y Razón P1/P2 = 1/Φ.

14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular y traza sus diagonales. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto? Este triángulo se denomina *triángulo áureo*, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro. En la figura que has trazado hay otros triángulos semejantes al áureo, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre ellos?



La suma de los ángulos de un polígono es: (n – 2)·180° para el pentágono, 3 · 180° = 540° como hay 5 ángulos tenemos 540°/5 = 108°, como las diagonales dividen el ángulo en tres partes tenemos 108°/3 = 36°, como el triángulo es isósceles, 180° - 36° = 142°, 142°/2 = 72°.

Los ángulos del triángulo son: 36°, 72° y 72°.

La razón de proporcionalidad entre los triángulos semejantes al áureo es el número de oro, Φ.

15. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 1600 cm², ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

1 600 · (1 500 000)^2 = 3 600 000 000 000 000 cm^2 = 360 000 km^2

16. *Eratóstenes de Alejandría* (276 – 196 a. C.) observó que en Siena la dirección de los rayos solares era perpendicular a la superficie de la Tierra en el solsticio de verano. Viajó siguiendo el curso del Nilo una distancia de 790 km (5 mil estadios) y midió la inclinación de los rayos del sol en el solsticio de verano en Alejandría que era de α = 7° 12'. Utilizó la proporcionalidad: 2πR/790 = 360°/α para determinar el radio de la Tierra. ¿Qué obtuvo?

12' son 12/60 = 0,2° entonces, 7°12' son 7,2°

como $\frac{2\pi R}{790} = \frac{360}{\alpha} \to \frac{2\pi R}{790} = \frac{360}{7{,}2} \to r = \frac{360\cdot 790}{2\pi\cdot 7{,}2} = 6\,286{,}62$ km.

17. Tenemos un conjunto de rectángulos de lados: A: 4 y 7, B: 2 y 5, C: 8 y 14, D: 4 y 10, E: 3 y 7, F: 9 y 21. Indica cuáles son semejantes. Dibuja y recorta el rectángulo A, y dibuja el resto de rectángulos. Superpón el rectángulo A con los otros rectángulos y explica que observas con el que es semejante. ¿Qué longitud tiene el otro lado de un rectángulo semejante a A cuyo lado menor mida 10 cm?

Debemos probar con todos los rectángulos por pares, obtenemos

A y C: $\frac{4}{8}=\frac{7}{14}$; B y D: $\frac{2}{4}=\frac{5}{10}$; E y F: $\frac{3}{9}=\frac{7}{21}$ son semejantes

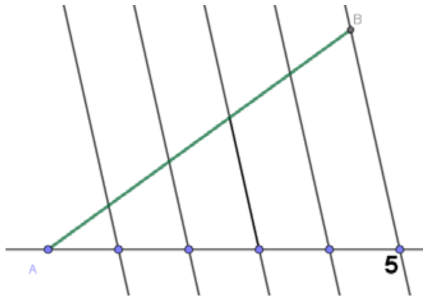
Dibujar y recortar, respuesta manipulativa, el C tiene un área 4 veces mayor que el A.

$\frac{4}{10}=\frac{7}{x}\rightarrow x=\frac{7\cdot 10}{4}=17{,}5$ el otro lado tiene una longitud de 17,5 cm.

El teorema de Tales

18. Divide un segmento cualquiera en 5 partes iguales utilizando el teorema de Tales. ¿Sabrías hacerlo por otro procedimiento exacto?

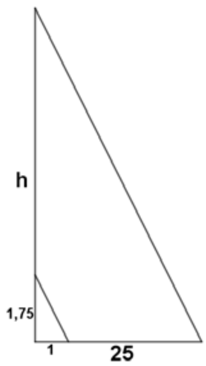
Respuesta manipulativa y gráfica



19. Divide un segmento cualquiera en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.

Respuesta manipulativa y gráfica

20. Si alguien mide 1,75 m y su sombra mide 1 m, calcula la altura del edificio cuya sombra mide 25 m a la misma hora.



$\frac{h}{25}=\frac{1{,}75}{1}\rightarrow h=25\cdot 1{,}75=43{,}75$ m.

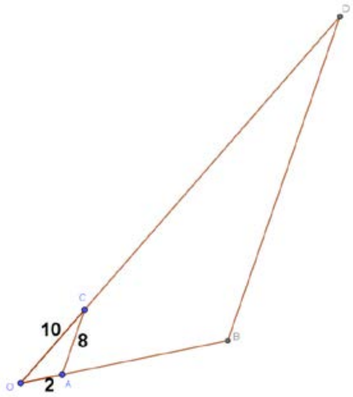
21. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

Calculamos la diagonal del rectángulo semejante: $d^2=36^2+48^2=3600\rightarrow d=60$ m.

Como son semejantes $\frac{36}{a}=\frac{60}{75}\rightarrow a=\frac{36\cdot 75}{60}=45$ m. y $\frac{48}{b}=\frac{60}{75}\rightarrow b=\frac{48\cdot 75}{60}=60$ m.

Los lados miden 45 m y 60 m.

22. Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de *OBD* es 200 cm, y *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm y *OC* mide 10 cm. Determina las longitudes de los lados de *OBD*.



El perímetro de 0AC es: 10 + 8 + 2 = 20 cm

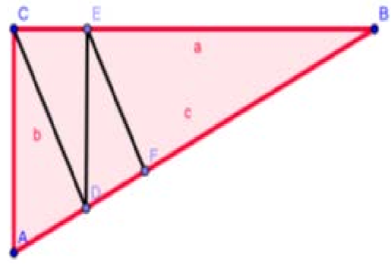
La razón de los perímetros es 200/20 = 10

La longitud de los lados es:

OB = 2 · 10 = cm

OD = 10 · 10 = 100 cm

BD = 8 · 10 = 80 cm.



23. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c* = 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba ha calculado la longitud del lado *AD*. Utiliza el teorema de Tales para determinar las longitudes de los segmentos *AD*, *CD*, *DE, DF, EB, BF* y *EF*. Calcula el área del triángulo *ABC* y de los triángulos *ACD, CDE, DEF* y *EFB*.

Sí, utiliza la semejanza de triángulos, el triángulo grande ABC es semejante al triángulo ACD, pues son triángulos rectángulos con un ángulo distinto de recto, común.
Por lo que AD/AC = AC/AB , AD = 45 · 45/75 = 27 u. AD = 27u.

Área ABC = AC · CB/2 = 1350 u^2;

$AC^2 = AD^2 + CD^2 \rightarrow 45^2 = 27^2 + CD^2 \rightarrow CD = \sqrt{2025 - 729} = 36$, CD = 36 u.

Área ACD = CD · AD/2 = 36 · 27/2 = 486 u^2.

Como AB = 75, y AD = 27, DB = 75 – 27 = 48,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{ED} \quad \rightarrow \quad ED = \frac{AC \cdot DB}{AB} = \frac{45 \cdot 48}{75} = 28{,}8$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB} \quad \rightarrow \quad EB = \frac{DB \cdot CB}{AB} = \frac{48 \cdot 60}{75} = 38{,}4$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EF} \quad \rightarrow \quad EF = \frac{AC \cdot EB}{AB} = \frac{45 \cdot 38{,}4}{75} = 23{,}04$$

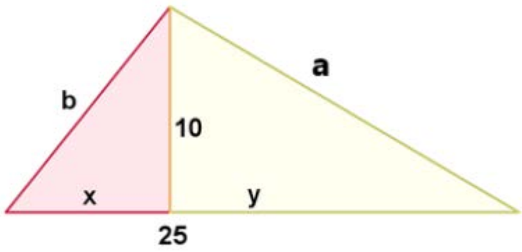
CD = 36u; DE = 28,8u; EF = 23,04u.

Semejanza de triángulos

24. El triángulo rectángulo *ABC* tiene un ángulo de 54° y otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 36°. ¿Podemos asegurar que son semejantes? Razona la respuesta.

Como 54° + 36° = 90°, sí podemos asegurar que son semejantes pues tienen los 3 ángulos iguales: 90°, 36° y 54°.

25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y la altura sobre la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto miden los catetos?



Como los triángulos que se forman al dibujar la altura son semejantes al inicial, x + y = 25 y

$\frac{a}{25} = \frac{y}{a} \rightarrow a^2 = 25y \rightarrow a = \sqrt{25y} \rightarrow a = 5\sqrt{y}$

$\frac{b}{25} = \frac{x}{b} \rightarrow b^2 = 25x \rightarrow b = \sqrt{25x} \rightarrow b = 5\sqrt{x}$

Como el área del triángulo mayor es:

Base · altura/2, 25 · 10 / 2 = 125 y también el área es (tomando base y altura los catetos)

b · a/ 2 igualamos $\frac{b \cdot a}{2} = 125 \rightarrow ba = 250 \rightarrow 250 = 5\sqrt{x} \cdot 5\sqrt{y} \rightarrow xy = 100$

tenemos, x + y = 25 , xy = 100 , que son la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado, es decir, $z^2 - 25z + 100 = 0$ resolvemos

z = 20 y z = 5 una solución corresponde a x y otra a y entonces

$b = 5\sqrt{x} = 5\sqrt{5} = 11{,}18$; $a = 5\sqrt{y} = 5\sqrt{20} = 22{,}18$

Los catetos miden 11,18 cm y 22,18 cm.

26. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 50° y otro de 40°. Un ángulo de 90° y otro de 40°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 40°. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 70°.

c) *A* = 72°, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72°, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

a) 180° – 50° – 40° = 90° ; 180° – 90° – 40° = 50° ; Sí, tienen los tres ángulos iguales.

b) 180° – 40° = 140°, 140°/2 = 70° ; 180° – 70° – 70° = 40° ; Sí, tienen los tres ángulos iguales.

c) Tienen un ángulo igual y los lados que lo comprenden, $\frac{10}{5} = \frac{12}{6}$ proporcionales. Sí.

d) $\frac{7}{21} = \frac{5}{15} = \frac{8}{24}$. Sí, tienen los tres lados proporcionales.

27. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 12 cm, *b* = 9 cm, *c* = 15 cm. *a*' = 8 cm, ¿*b*', *c*'?

b) *A* = 45°, *b* = 6 cm, c = 4 cm. *A'* = 45°, *b'* = 24 cm, ¿*c'*?

a) $\frac{12}{8} = \frac{9}{b'} = \frac{15}{c'} \rightarrow 12b' = 72 \rightarrow b' = 6$; $12c' = 120 \rightarrow c' = 10$

b' = 6 cm y c' = 10 cm

b) $\frac{6}{24} = \frac{4}{c'} \rightarrow 6c' = 96 \rightarrow c' = 16$; c' = 16 cm

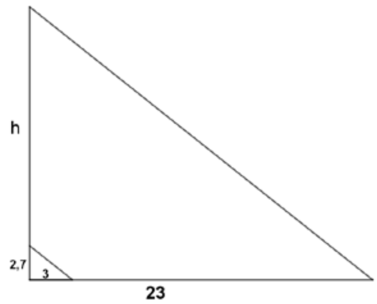
28. Las longitudes de los lados de un triángulo son 7 cm, 9 cm y 10 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 65 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Calculamos el perímetro del triángulo dado: 7 + 9 + 10 = 26

Hallamos la razón entre los perímetros: $\frac{65}{26}=2{,}5$ los lados del triángulo semejante miden:

7 · 2,5 = 17,5 cm ; 9 · 2,5 = 22,5 cm ; 10 · 2,5 = 25 cm.

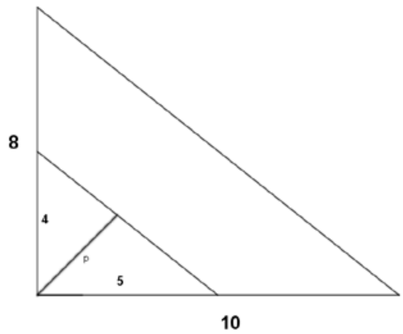
29. La sombra de un edificio mide 23 m, y la del primer piso 3 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 2,7 m, ¿cuánto mide el edificio?

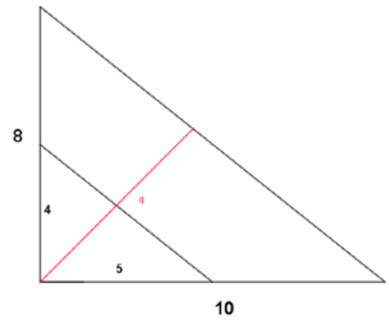


Los triángulos están en posición de Tales por lo que son semejantes

$\frac{h}{23}=\frac{2{,}7}{3}\rightarrow h=\frac{23\cdot 2{,}7}{3}=20{,}7$ m

30. Demuestra que en dos triángulos semejantes las bisectrices son proporcionales.





Como todos los triángulos que se forman son semejantes, las medidas son proporcionales.

Los lados del grande son el doble que los del pequeño, luego las bisectrices son una el doble de otra.

31. Un triángulo rectángulo isósceles tiene la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un cateto de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

Área$_2$ = $\frac{b\cdot h}{2}=\frac{9\cdot 9}{2}=\frac{81}{2}=40{,}5$ cm^2

La hipotenusa de este triángulo vale: $a^2=9^2+9^2=81+81=162\rightarrow a=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

La razón entre las hipotenusas es: $\frac{9\sqrt{2}}{9}=\sqrt{2}$, luego la razón entre las áreas es el cuadrado

de la razón de las hipotenusas: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, por tanto,

Área$_1$ = $\frac{Área_1}{2}=\frac{40{,}5}{2}=20{,}25$ cm^2

32. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Son semejantes? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

Son semejantes.

Al construirse con los puntos medios, los lados miden la mitad, luego el perímetro es la mitad del triángulo original y el área, $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, la cuarta parte.

33. La altura y la base de un triángulo isósceles miden respectivamente 7 y 5 cm; y es semejante a otro de base 12 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Como son semejantes: $\frac{h}{7} = \frac{12}{5} \to h = \frac{7 \cdot 12}{5} = 16{,}8 \text{ cm}$

$área = \frac{base \cdot altura}{2}$; $Área_1 = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17{,}5 \text{ cm}^2$; $Área_2 = \frac{12 \cdot 16{,}8}{2} = 100{,}8 \text{ cm}^2$

34. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua la medida de los ángulos que faltan sabiendo que:

a) Son rectángulos y un ángulo del primer triángulo mide 52°.

b) Dos ángulos del primer triángulo miden 30° y 84°.

a) Como es rectángulo un ángulo es 90°, el otro será de: 90° – 52° = 38°

b) Solo nos falta un ángulo que valdrá: 180° – 30° – 84° = 66°

35. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua las medidas que faltan sabiendo que:

a) Los lados del primer triángulo miden 10 m, 15 m y *z* m. Los del segundo: *x* m, 9 m y 8 m.

b) Los lados del primer triángulo miden 4 m, 6 m y 8 m. Los del segundo: 6 m, *x* m y *z* m.

c) Un lado del primer triángulo mide 12 cm y la altura sobre dicho lado 6 cm. El lado correspondiente del segundo mide 9 cm, y la altura *x* cm

d) Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de 35° y el lado igual de 20 cm y el desigual de 7 cm; el otro tiene el lado igual de 5 cm. ¿Cuánto miden sus otros lados y ángulos?

a) $\frac{10}{x} = \frac{15}{9} = \frac{z}{8} \to 9 \cdot 10 = 15x \to x = \frac{90}{15} = 6\ m \to 9z = 8 \cdot 15 \to z = \frac{120}{9} = 13{,}33\ m$

b) $\frac{4}{6} = \frac{6}{x} = \frac{8}{z} \to 4x = 6 \cdot 6 \to x = \frac{36}{4} = 9\ m \to 4z = 6 \cdot 8 \to z = \frac{48}{4} = 12\ m$

c) $\frac{6}{x} = \frac{12}{9} \to 12x = 6 \cdot 9 \to x = \frac{54}{12} = 4{,}5 \text{ cm}$

d) Los ángulos miden lo mismo en los dos triángulos. 180° – 35° = 145°, 145°/2 = 72,5° luego los ángulos miden 35°, 72,5° y 72,5°

Los lados: $\frac{20}{5} = \frac{7}{x} \to 20x = 5 \cdot 7 \to x = \frac{35}{20} = 1{,}75 \text{ cm}$

36. Enuncia el primer criterio de semejanza de triángulos para triángulos rectángulos.

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual un ángulo distinto del recto.

37. Los egipcios usaban una cuerda con nudos, todos a la misma distancia, para obtener ángulos rectos. Formaban triángulos de longitud 3, 4 y 5. ¿Por qué? Los indios y los chinos usaban un procedimiento similar aunque utilizando cuerdas con los nudos separados en 5, 12 y 13, y también 8, 15 y 17. ¿Por qué? Escribe las longitudes de los lados de triángulos semejantes a los indicados.

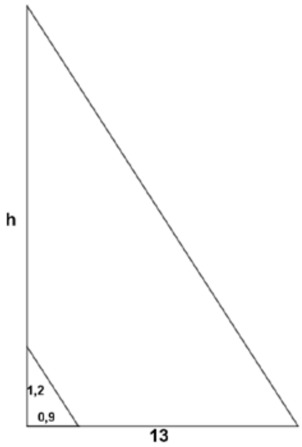
Porque es el triángulo rectángulo más pequeño de lados enteros, ya que $5^2 = 3^2 + 4^2$;

Por la misma razón son rectángulos 5, 12 y 13 pues 169 = 144 + 25;

y 8, 15 y 17 pues $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$.

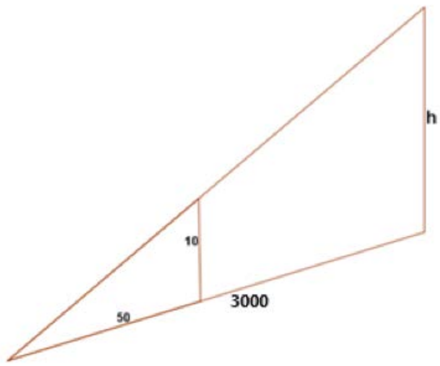
Semejante a T1 (3, 4, 5), multiplicamos por 3 o por 2: 9, 12, 15 y 6, 8, 10.
Semejante a T2 (5, 12, 13), multiplicamos por 2: 10, 24, 26.
Semejante a T3 (8, 15, 17) dividimos entre 2: 4, 7,5, 8,5 o multiplicamos por 2: 16, 30, 34.

38. Se quiere calcular la altura de un árbol para lo que se mide su sombra: 13 m, y la sombra de un palo de 1,2 m de longitud, 0,9 m. ¿Qué altura tiene el árbol?



$\frac{h}{13} = \frac{1,2}{0,9} \rightarrow h = \frac{13 \cdot 1,2}{0,9} = 17,33$ m

39. Ahora no podemos usar el procedimiento de la sombra porque el árbol es inaccesible (hay un río en medio) pero sabemos que está a 30 m de nosotros. ¿Cómo lo harías? Pepe ha cogido un lápiz que mide 10 cm y lo ha colocado a 50 cm de distancia. De ese modo ha conseguido ver alineado la base del árbol con un extremo del lápiz, y la punta del árbol con el otro. ¿Cuánto mide este árbol?



$\frac{h}{3000} = \frac{10}{50} \rightarrow h = \frac{3000 \cdot 10}{50} = 600$ cm = 6 m.

El árbol mide 6 metros.

AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:1200 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:

a) 60 m **b) 60 km** **c) 240 km** **d) 240 cm**

5 · 1200 = 6000 cm = 60 m

a) 60 m

2. Si un microscopio tiene un aumento de 1000X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos una célula de 0,01 mm de diámetro

a) 1 cm **b) 1 mm** **c) 0,1 cm** **d) 100 mm**

1000 · 0,01 = 10 mm = 1 cm

a) 1 cm

3. Queremos construir un cuadrado de área doble de uno de un metro de lado. El lado del nuevo cuadrado debe medir:

a) 2 metros **b) $\sqrt{2}$ metros** **c) $\sqrt[3]{2}$ metros** **d) 1,7 metros**

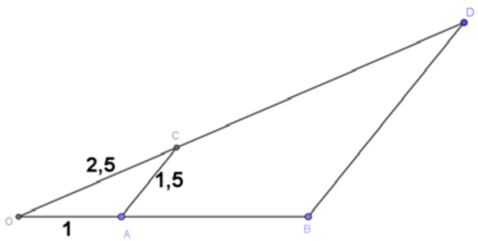
Como queremos que el área sea el doble, la razón de las áreas es 2 luego la razón de los lados es $\sqrt{2}$, el cuadrado inicial tiene un lado de 1 m luego el nuevo debe medir $\sqrt{2}$ m.

b) $\sqrt{2}$ metros

4. Sean *OAC* y *OBD* dos triángulos en posición *Tales*. El perímetro de *OBD* es 50 cm, y *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1,5 cm y OC mide 2,5 cm. Las longitudes de los lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm **b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm**

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm **d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.**



Calculamos el perímetro del triángulo dado:

1 + 1,5 + 2,5 = 5

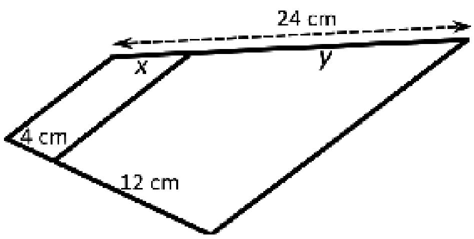
Hallamos la razón de los perímetros: $\frac{50}{5} = 10$

Las longitudes de OBD son:

OB: 10·1 = 10; BD: 10·1,5 = 15 ; OD: 10·2,5 = 25

b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

5. En la figura adjunta los valores de *x* e *y* son:



a) 6 y 12 cm **b) 5 y 19 cm** **c) 6 y 18 cm** **d) 5 y 20 cm**

$\frac{24}{16} = \frac{x}{4} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 24}{16} = 6$; $\frac{24}{16} = \frac{y}{12} \rightarrow y = \frac{12 \cdot 24}{16} = 18$

c) 6 y 18 cm

6. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. Los lados de *ABC* miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de *DEF* mide 60 m. Los lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 y 14 cm **b) 12, 20 y 28 cm** **c) 9, 15 21 m** **d) 12, 20 y 28 m**

Calculamos el perímetro del triángulo dado: 3 + 5 + 7 = 15

Hallamos la razón de los perímetros: $\frac{6000}{15} = 400$

Las longitudes de DEF son: 3·400 = 1200 cm ; 5·400 = 2000 cm ; 7·400 = 2800 cm

d) 12, 20 y 28 m

7. Dos triángulos rectángulos son proporcionales si:

a) Tienen la hipotenusa proporcional **b) Tienen un ángulo igual**
c) Tienen un ángulo distinto del recto igual **d) Sus áreas son proporcionales**

c) Tienen un ángulo distinto del recto igual

8. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. El ángulo A mide 30°, y el B, 72°. ¿Cuánto miden los ángulos *D*, *E* y *F*?

a) *D* = 72°, *E* = 78° y *F* = 30° **b) *D* = 30°, *E* = 88° y *F* = 72°** **c) *D* = 30°, *E* = 72° y *F* = 68°**

180° – 72° – 30° = 78°

a) *D* = 72°, *E* = 78° y *F* = 30°

9. La altura de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 5 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura?

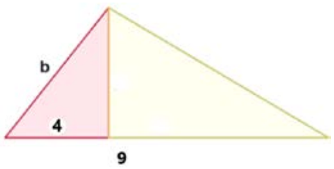
a) 5,67 cm **b) 4,47 cm** **c) 6 cm** **d) 5 cm**

$h^2 = 5 \cdot 4 = 20 \rightarrow h = \sqrt{20} = 4{,}47$

c) 6 y 18 cm

10. La proyección de un cateto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm, y la hipotenusa 9 cm, ¿cuánto mide el cateto?

a) 7 cm **b) 5 cm** **c) 5.67 cm** **d) 6 cm.**



$$\frac{9}{b} = \frac{b}{4} \rightarrow b^2 = 36 \rightarrow b = 6$$

d) 6 cm.

Todos los enunciados de las actividades propuestas, ejercicios y problemas y autoevaluación se corresponden con los propuestos en Apuntes de Matemáticas MAREA VERDE, Semejanza, 4ºB ESO.

https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/4B/07_Semejanza_4B.pdf