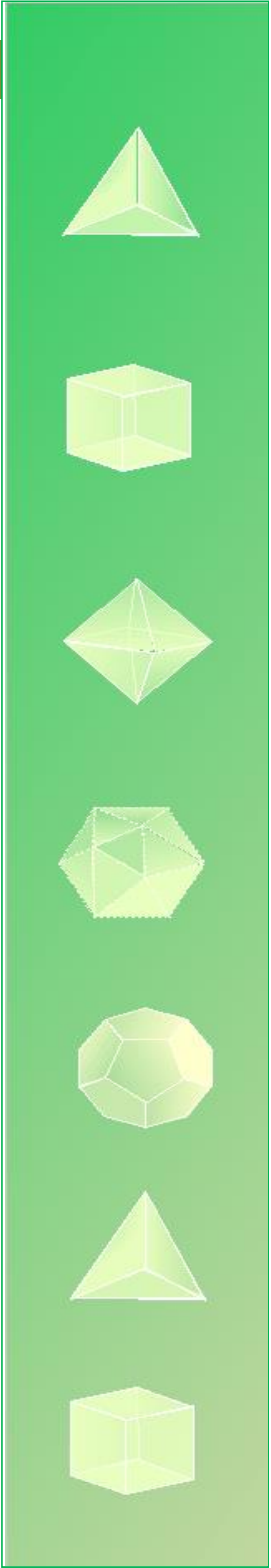


Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 12: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

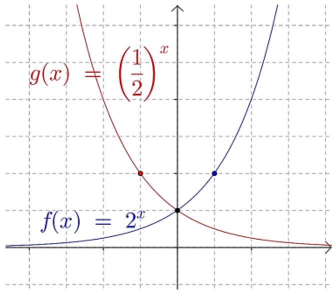
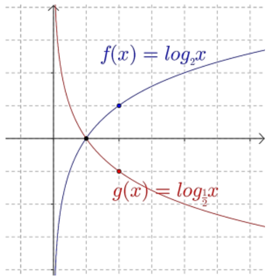
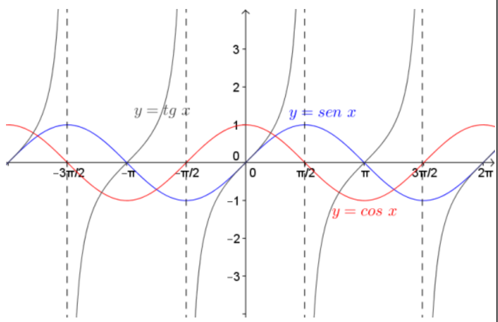
www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

RESUMEN

NOCIÓN	***DEFINICIÓN***	***EJEMPLOS***
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$log_4 7 = \dfrac{log\ 7}{log\ 4} = 1.40$
Operaciones con logaritmos	Logaritmo de un producto: $log_b (x \cdot y) = log_b x + log_b y$ Logaritmo de un cociente: $log_b (x : y) = log_b x - log_b y$ Logaritmo de una potencia: $log_b x^y = y \cdot log_b x$	$log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3 \log b + \log c) - 2 \log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: Todos los números reales positivos. *Recorrido*: Todos los números reales. **Continua** en todo el dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funciones trigonométricas $y = \text{sen } x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg } x$	<u>**Funciones seno y coseno**</u>: *Dominio*: Todos los números reales *Recorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π <u>**Función tangente**</u>: *Dominio y continuidad*: Todo $\Re$ salvo $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) *Recorrido*: Todos los números reales. Periódica de periodo π. <u>**Simetría**</u>: Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

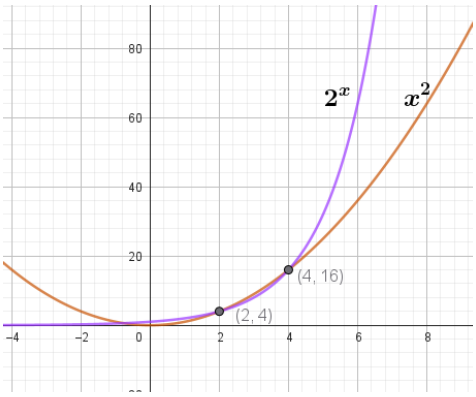
1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

$$\mathrm{N}(\mathrm{t}) = \mathrm{N}_0 \cdot 3^{\mathrm{t}} \rightarrow \mathrm{N}(\mathrm{t}) = 3^{\mathrm{t}}$$

Tiempo t (horas)	$\mathrm{N}(\mathrm{t}) = 3^{\mathrm{t}}$
0	$\mathrm{N}(0) = 3^0 = 1$
1	$\mathrm{N}(1) = 3^1 = 3$
2	$\mathrm{N}(2) = 3^2 = 9$
3	$\mathrm{N}(3) = 3^3 = 27$
4	$\mathrm{N}(4) = 3^4 = 81$
5	$\mathrm{N}(5) = 3^5 = 243$

2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

x	$y = x^2$	$y = 2^x$
0	0	1
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64

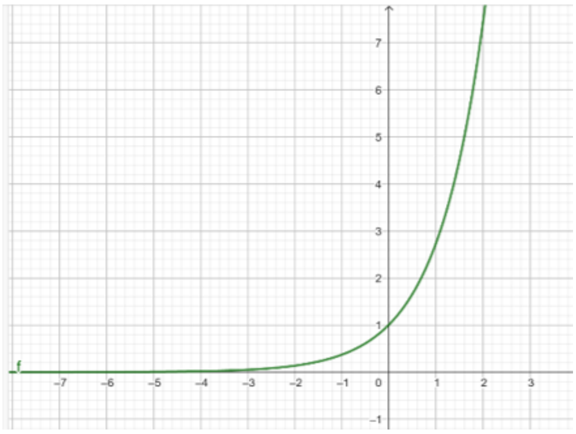


- Desde 0 hasta $x = 2$, ambas funciones tienen valores similares
- Desde $x = 3$, la exponencial empieza a superar rápidamente a la cuadrática

3. Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

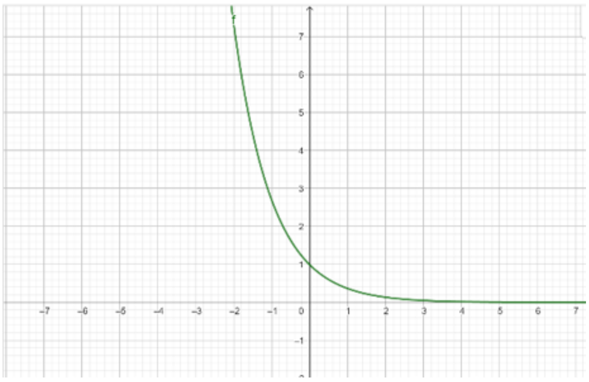
1) $y = e^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	0,135	0,368	1	2,718	7,389



2) $y = e^{-x}$

x	-2	-1	0	1	2
y	7,389	2,718	1	0,368	0,135



4. Una persona ha ingresado una cantidad de 5000 euros a interés del 3% en un banco de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03%

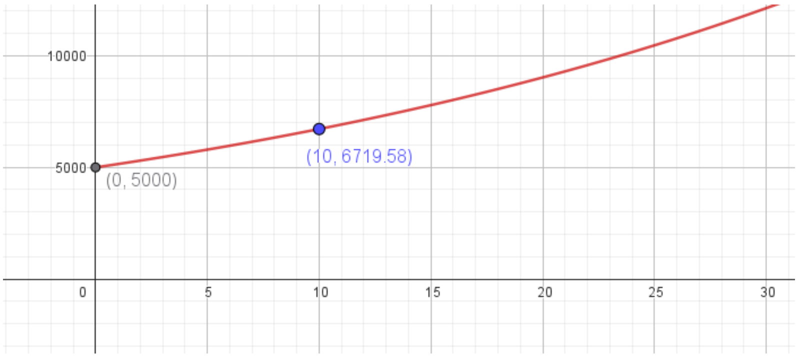
a) Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años

Años (t)	1	2	3	4	5	10
Capital (€)	5150	5304,50	5463,64	5627,55	5796,38	6719,58

b) Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años

$$C(t) = 5000 \cdot (1{,}03)^t$$

c) Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien que unidades deberás utilizar en los ejes



5. **Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias**
   a) **Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 del mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás")**

Como cada hora se va multiplicando por 2/3 es una función exponencial. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

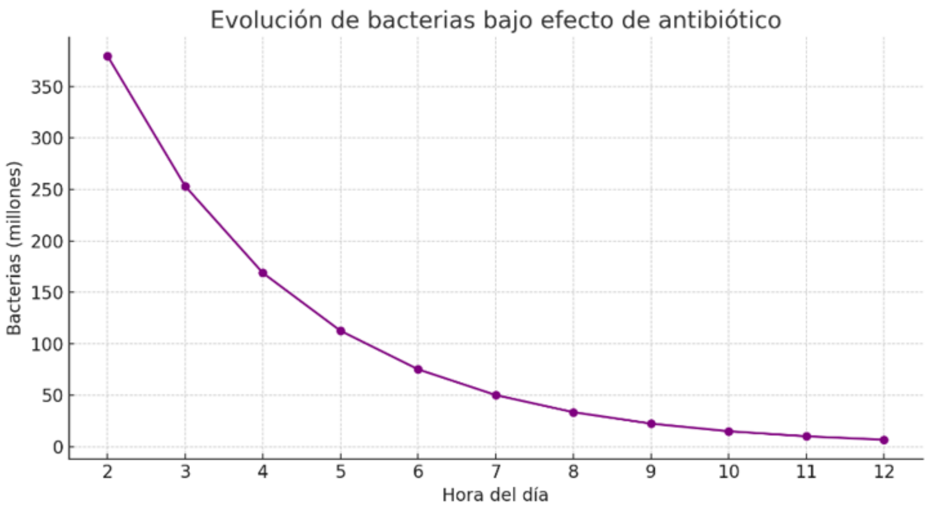
Esta función para x = 0 toma el valor 1, para las bacterias debe tomar el valor 50 millones,

$y = 50 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ y como lo toma para x = 7, tenemos x – 7 = 0 por tanto,

$y = 50 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-7}$, ya podemos ir calculando los valores, también podíamos haberlo hecho, dividiendo entre 2/3 para ir hacia atrás en las horas y multiplicando por 2/3 para ir hacia adelante.

Hora del día	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bacterias (millones)	379	253	168	112	75	50	33	22	14	9	6

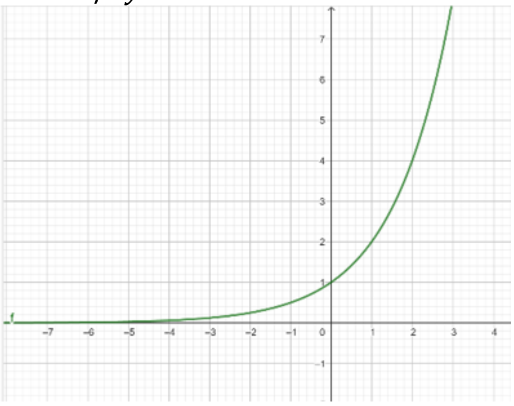
   b) **Representa gráficamente estos datos:**



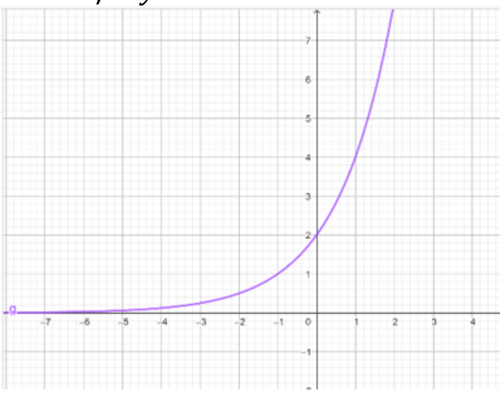
6. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 2^{x+1}$ **c)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 2^x$

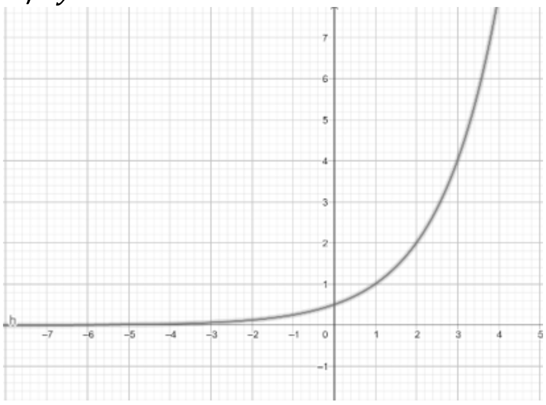


b) $y = 2^{x+1}$



Toda la gráfica está desplazada 1 unidad hacia la izquierda con respecto a la inicial

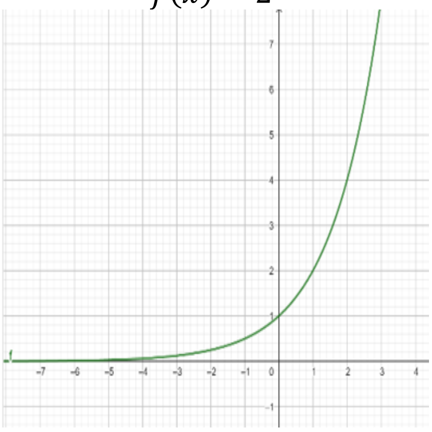
c) $y = 2^{x-1}$



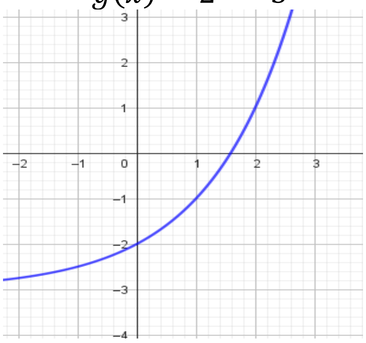
Toda la gráfica está desplazada 1 unidad hacia la derecha con respecto a la inicial

7. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular la tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$

$f(x) = 2^x$

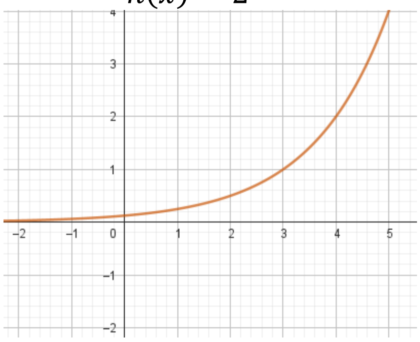


$g(x) = 2^x - 3$



Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia abajo con respecto a la inicial

$h(x) = 2^{x-3}$



Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia la derecha con respecto a la inicial

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

8. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición (sin calculadora):

$$\log_b(a) = c \leftrightarrow a = b^c$$

a) $\mathbf{\log_3 81} \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow \log_3 81 = 4$

b) $\mathbf{\log_2 256} \rightarrow 2^x = 256 \rightarrow 2^x = 2^8 \rightarrow \log_2 256 = 8$

c) $\mathbf{\log 10000} \rightarrow 10^x = 10000 \rightarrow 10^x = 10^4 \rightarrow log\ 10000 = 4$

d) $\mathbf{\log_5 125} \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow 5^x = 5^3 \rightarrow \log_5 125 = 3$

e) $\mathbf{\log_2 0,25} \rightarrow 2^x = 0{,}25 \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^2} \rightarrow 2^x = 2^{-2} \rightarrow \log_2 0{,}25 = -2$

f) $\mathbf{\log 0,001} \rightarrow 10^x = 0{,}001 \rightarrow 10^x = \frac{1}{10^3} \rightarrow 10^x = 10^{-3} \rightarrow \log 0{,}001 = -3$

9. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes (sin calculadora):

a) $\mathbf{\log_4 2} = x \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow (2^2)^x = 2^1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

b) $\mathbf{\log_9 27} = x \rightarrow (3^2)^x = 27 \rightarrow 3^{2x} = 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \log_9 27 = \frac{3}{2}$

c) $\boldsymbol{log_{81} 27} = x \rightarrow (3^4)^x = 27 \rightarrow 3^{4x} = 3^3 \rightarrow 4x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{4} \rightarrow \log_{81} 27 = \frac{3}{4}$

d) $\boldsymbol{log_2 0,125} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \rightarrow 2^x = 2^{-3} \rightarrow x = -3 \rightarrow \log_2 0{,}125 = -3$

e) $\mathbf{\log_3 \frac{1}{9}} = x \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^2} \rightarrow 3^x = 3^{-2} \rightarrow x = -2 \rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

f) $\mathbf{\log_2 \frac{3}{12}} = x \rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \rightarrow 2^x = 2^{-2} \rightarrow x = -2 \rightarrow \log_2 \frac{3}{12} = -2$

g) $\mathbf{\log_{16} 2} = x \rightarrow 16^x = 2 \rightarrow (2^4)^x = 2 \rightarrow 2^{4x} = 2 \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow \log_{16} 2 = \frac{1}{4}$

h) $\mathbf{\log_{64} 32} = x \rightarrow 64^x = 32 \rightarrow (2^6)^x = 2^5 \rightarrow 6x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{6} \rightarrow \log_{64} 32 = \frac{5}{6}$

i) $\boldsymbol{log_4 \sqrt{2}} = x \rightarrow 4^x = 2^{1/2} \rightarrow (2^2)^x = 2^{1/2} \rightarrow 2x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow \log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

j) $\mathbf{\log_3 \sqrt{27}} = x \rightarrow 3^x = \sqrt{3^3} \rightarrow 3^x = 3^{3/2} \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

k) $\mathbf{\log \sqrt[3]{100}} = x \rightarrow 10^x = \sqrt[3]{10^2} \rightarrow 10^x = 10^{3/2} \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \log \sqrt[3]{100} = \frac{3}{2}$

10. Halla el valor de x en las siguientes igualdades:

$$log_b\, a = c \Leftrightarrow b^c = a$$

a) $\boldsymbol{log_8 x} = \frac{2}{3} \rightarrow 8^{2/3} = x \rightarrow (2^3)^{2/3} = x \rightarrow x = 2^{6/3} = 2^2 = 4$

b) $\boldsymbol{log_x 81 = 4} \rightarrow x^4 = 81 \rightarrow x = \sqrt[4]{81} = 3 \rightarrow$

c) $\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}} 27 = x} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \rightarrow 3^{-x} = 3^3 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3$

d) $\boldsymbol{log_x 0,5 = -1} \rightarrow x^{-1} = 0{,}5 \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$

e) $\boldsymbol{log\, x = -4} \rightarrow 10^{-4} = x \rightarrow \frac{1}{10^4} = x \rightarrow x = 0{,}0001$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

11. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base, y compara los resultados con los obtenidos en la actividad:

a) $\boldsymbol{log_4 2} = x \to 4^x = 2 \to (2^2)^x = 2^1 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2} \to log_4 2 = \frac{1}{2}$

b) $\boldsymbol{log_9 27} = x \to (3^2)^x = 27 \to 3^{2x} = 3^3 \to 2x = 3 \to x = \frac{3}{2} \to log_9 27 = \frac{3}{2}$

c) $\boldsymbol{log_{81} 27} = x \to (3^4)^x = 27 \to 3^{4x} = 3^3 \to 4x = 3 \to x = \frac{3}{4} \to log_{81} 27 = \frac{3}{4}$

d) $\boldsymbol{log_2 0,125} = x \to 2^x = \frac{1}{8} \to 2^x = \frac{1}{2^3} \to 2^x = 2^{-3} \to x = -3 \to log_2 0{,}125 = -3$

e) $\boldsymbol{log_3 \frac{1}{9}} = x \to 3^x = \frac{1}{3^2} \to 3^x = 3^{-2} \to x = -2 \to log_3 \frac{1}{9} = -2$

12. Sabiendo que log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula:
a) log 5 b) log 25 c) log 24 d) log 60

a) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 \approx 0{,}699$

b) $\log 25 = \log(5^2) = 2\log(5) \to \log 25 \approx 2 \cdot 0{,}699 = 1{,}398$

c) $\log 24 = \log(3 \cdot 8) = \log 3 \cdot 2^3 = \log 3 + 3 \cdot \log 2 = 0{,}477 + 3 \cdot 0{,}301 \approx 1{,}380$

d) $\log 60 = \log(2 \cdot 3 \cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 = 0{,}301 + 0{,}477 + 1 \approx 1{,}778$

13. Sabiendo que log 8 = 0,903, y sin utilizar calculadora, halla los siguientes:
a) log 80 b) log 2 c) log 64 d) log 0,8 e) log 1,25 f) log $\sqrt[3]{800}$

a) $\log 80 = \log 8 \cdot 10 = \log 8 + \log 10 = 0{,}903 + 1 \approx 1{,}903$

b) $\log 2 = \log \sqrt[3]{8} = \frac{1}{3} \cdot \log 8 = \frac{1}{3} 0{,}903 \approx 0{,}301$

c) $\log 64 = \log(2^6) = 6\log 2 \approx 6 \cdot 0{,}301 = 1{,}806$

d) $\log 0{,}8 = \log \frac{8}{10} = \log 8 - \log 10 = 0{,}903 - 1 \approx -0{,}097$

e) $\log 1{,}25 = \log \frac{10}{8} = \log 10 - \log 8 = 1 - 0{,}903 \approx 0{,}097$

f) $\log \sqrt[3]{800} = \log\left(800^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\log 800 = \frac{1}{3} \cdot \log(8 \cdot 100) = \frac{1}{3} \cdot (\log 8 + \log 100) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}903 + 2) \approx 0{,}067$

14. Toma logaritmos y desarrolla:

a) $\boldsymbol{A = \frac{2x^3 \cdot y^2}{3z}} \to \log A = \log(2x^3 \cdot y^2) - \log(3z) \to \log A = \log 2 + \log x^3 + \log y^2 - \log 3 + \log z \to$
$\to \log A = \log 2 + 3\log x + 2\log y - \log 3 + \log z$

b) $\boldsymbol{B = \frac{\sqrt[2]{x^3 \cdot y^2}}{10z}} \to B = \frac{(2x^3 \cdot y^2)^{1/2}}{10z} \to \log B = \log((2x^3 \cdot y^2)^{\frac{1}{2}} - \log(10z) \to$
$\to \log B = \frac{1}{2}\log(2x^3 \cdot y^2) - \log(10z) \to \log B = \frac{1}{2}(\log 2 + \log x^3 + \log y^2) - \log(10z) \to$
$\to \log B = \frac{1}{2}(\log 2 + 3\log x + 2\log y) - (\log 10 + \log z)$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión:

a) log 2 – log 12 + 1 + log 3 **b) 2 log 5 + $\frac{1}{2}$ log 5 – 2** **c) 2 log 2*a* – log *a***

a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3 = \log 2 - \log 12 + \log 10 + \log 3 \to \log(2 \cdot 10 \cdot 3) - \log 12 =$

$$= \log 60 - \log 12 = \log\left(\frac{60}{12}\right) = \log 5$$

b) $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 5 - 2 = \log 5^2 + \log 5^{\frac{1}{2}} - \log 100 = \log 25 + \log\sqrt{5} - \log 100 =$

$$= \log\left(\frac{25\cdot\sqrt{5}}{100}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

c) $2\log 2a - \log a \to \log 4a^2 - \log a = \log\left(\frac{4a^2}{a}\right) = \log 4a$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) log (x + 1)^2 = 6 **b) log x + log 5 = log 20** **c) log (7 – 3x) – log (1 – x) = log 5**

a) $\log(x+1)^2 = 6 \to (x+1)^2 = 10^6 \to x + 1 = \sqrt{10^6} \to x = \pm 1000 - \to$

$$\to x_1 = 999 \quad y \quad x_2 = -1001$$

b) $\log x + \log 5 = \log 20 \to \log 5x = \log 20 \to 5x = 20 \to x = \frac{20}{5} = 4$

c) $\log(7-3x) - \log(1-x) = \log 5 \to \log\left(\frac{7-3x}{1-x}\right) = log 5 \to \frac{7-3x}{1-x} = 5 \to$

$$\to 7 - 3x = 5(1-x) \to 7 - 3x = 5 - 5x \to 2x = -2 \to x = -1$$

17. Cuando nació un niño sus padres colocaron 1 000 euros en una libreta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá la cuenta cuando el niño cumpla 15 años?

$\mathrm{A} = \mathrm{P}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}} \to \mathrm{A} = 1000 \cdot (1 + 0{,}025)^{15} \to \mathrm{A} = 1000 \cdot (1{,}025)^{15} \to$

$\to \mathrm{A} = 1000 \cdot 1{,}448 \to \mathrm{A} \approx 1448€$

18. La población de ciertas bacterias se multiplica por 1,5 cada día. Si al comienzo hay 18 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de una semana?

$P(t) = P_o \cdot r^t \to P(7) = 18 \cdot (1{,}5)^7 \to P(7) = 18 \cdot 17{,}0869 \approx 307{,}5462$ millones

19. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto hay que invertir un capital de 20 000 euros para ganar 1 000 euros en tres años?

$\mathrm{A} = \mathrm{P}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}} \to 21000 = 20000 \cdot (1+\mathrm{r})^3 \to \frac{21000}{20000} = (1+\mathrm{r})^3 \to 1{,}05 = (1+\mathrm{r})^3 \to$

$\to 1 + \mathrm{r} = \sqrt[3]{1{,}05} \to r = 1{,}01639 - 1 \to r \approx 0.01639 = 1{,}64\%$

20. Si invertimos 7 000 euros al 1,35 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años deben transcurrir para haber ganado al menos 790 euros?

$A = P(1+r)^t \rightarrow 7000 + 790 = 7000 \cdot (1 + 0{,}0135)^t \rightarrow \frac{7790}{7000} = (1 + 0{,}0135)^t \rightarrow$

$\rightarrow 1{,}12714 = (1 + 0{,}0135)^t \rightarrow \log 1{,}12714 = t \log(1{,}0135) \rightarrow t = \log \frac{1{,}12714}{1{,}0135} \approx 8{,}53$ años

21. Calcula en cuántos años se duplica una población que crece al ritmo del 10 % anual.

$A = P(1+r)^t \rightarrow 2P = P(1{,}10)^t \rightarrow 2 = 1{,}10^t \rightarrow \log 2 = t \cdot \log 1{,}10 \rightarrow$

$\rightarrow t = \log \frac{2}{1{,}10} \rightarrow t \approx 7{,}27$

22. Si una población de 8 millones de habitantes se ha convertido en 15 millones en 7 años, ¿cuánto ha crecido cada año? (*Ojo*: ¡no se trata de dividir entre 7).

$A = P(1+r)^t \rightarrow 15 = 8\,(1+r)^7 \rightarrow \frac{15}{8} = (1+r)^7 \rightarrow 1{,}875 = (1+r)^7 \rightarrow r = \sqrt[7]{1{,}875} - 1$

$\rightarrow r \approx 0{,}961 = 9{,}61\%\ anual$

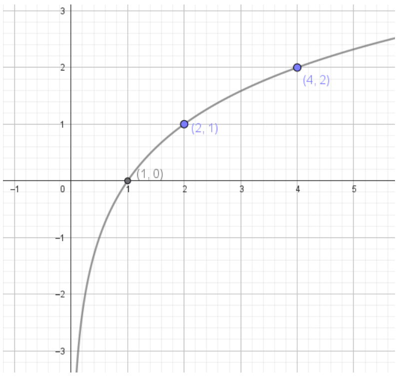
23. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2 x$ **b)** $f(x) = \log_{1/2} x$ **c)** $f(x) = \log_{1,5} x$

Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (*b*, 1) y (1/*b*, –1).

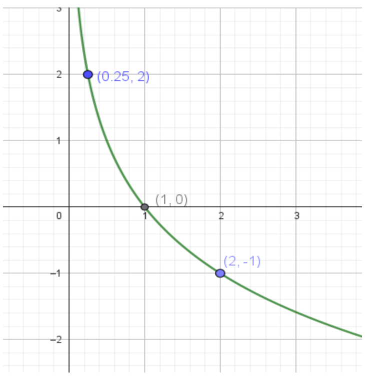
a) $f(x) = \log_2 x$

x	f(x)
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



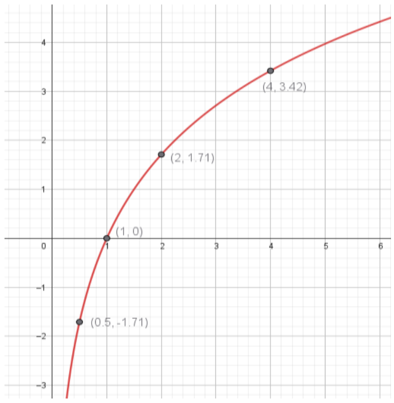
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	f(x)
0,25	2
0,5	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



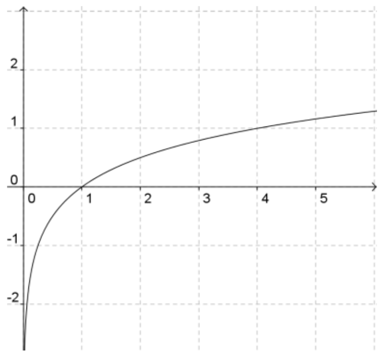
c) $f(x) = \log_{1,5} x$

x	f(x)
0,25	-2,71
0,5	-1,71
1	0
2	1,71
4	3,42
8	5,13

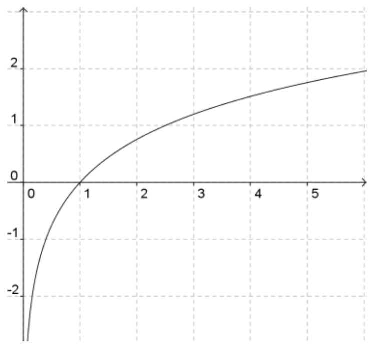


24. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

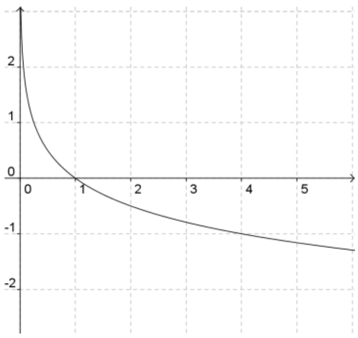
a)



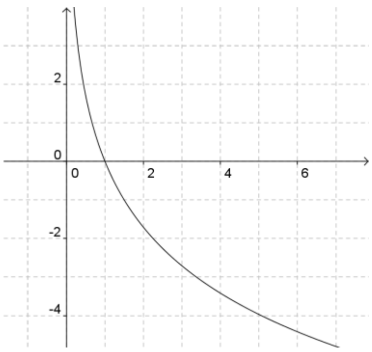
b)



c)



d)



a) Pasa por (4, 1), $\log_a x = y \rightarrow \log_a 4 = 1 \rightarrow a^1 = 4 \rightarrow a = 4 \rightarrow y = \log_4 x$

b) Pasa por (6, 2), $\log_a x = y \rightarrow \log_a 6 = 2 \rightarrow a^2 = 6 \rightarrow a = \sqrt{6} \approx 2,5 \rightarrow y = \log_{2,5} x$

c) Pasa por (4, -1), $\log_a x = y \rightarrow \log_a 4 = -1 \rightarrow a^{-1} = 4 \rightarrow a = \frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow y = \log_{0,25} x$

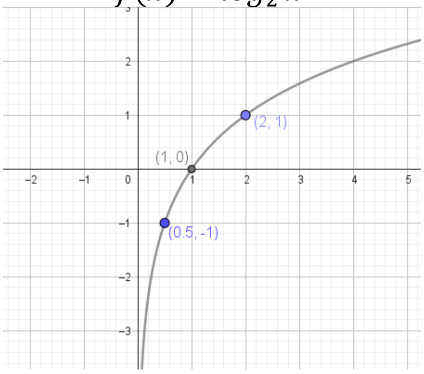
d) Pasa por (5, -4),

$$\log_a x = y \rightarrow \log_a 5 = -4 \rightarrow a^{-4} = 5 \rightarrow a^4 = \frac{1}{5} \rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} \approx 0,67 \rightarrow y = \log_{0,67} x$$

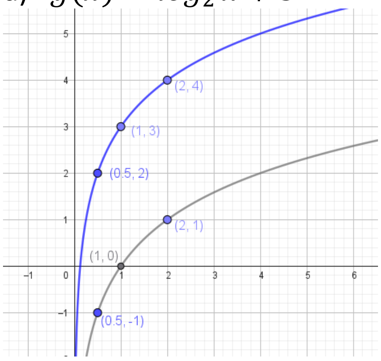
25. Repite en tu cuaderno el dibujo de la función $f(x) = log_2\, x$ representada en el ejercicio 23. Después piensa qué desplazamiento sufren respecto a ella las funciones siguientes y represéntalas en la misma gráfica sin hacer tablas de valores:

a) $g(x) = log_2\, x + 3$ b) $h(x) = log_2\, x - 3$ c) $i(x) = log_2(\,x + 3)$ d) $j(x) = log_2(\,x - 3)$

$f(x) = log_2\, x$

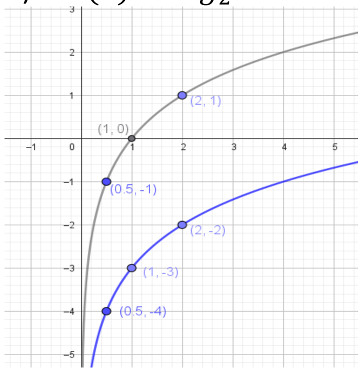


a) $g(x) = log_2\, x + 3$



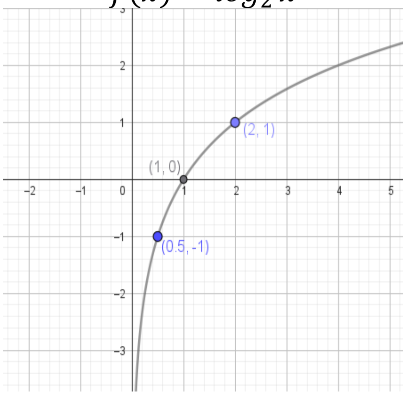
Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia arriba con respecto a la inicial

b) $h(x) = log_2\, x - 3$

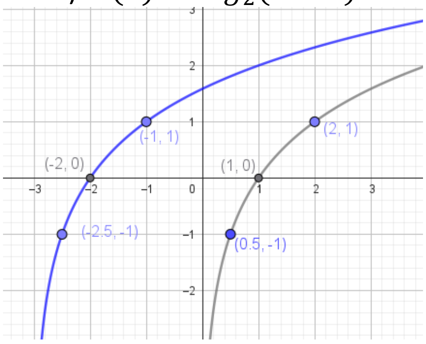


Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia abajo con respecto a la inicial

$f(x) = log_2\, x$

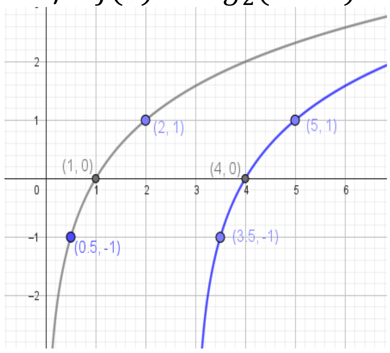


c) $i(x) = log_2(x + 3)$



Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia la izquierda con respecto a la inicial

d) $j(x) = log_2(x - 3)$

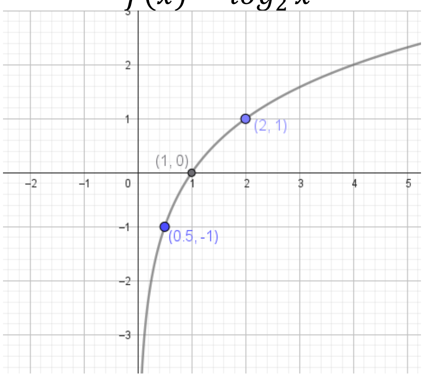


Toda la gráfica está desplazada 3 unidades hacia la derecha con respecto a la inicial

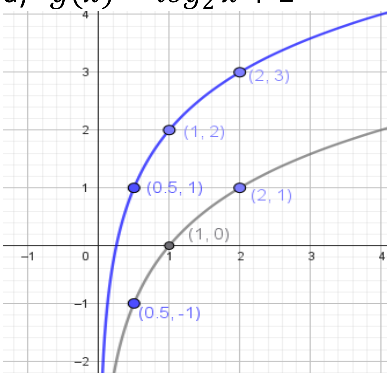
26. Haz el mismo proceso del ejercicio anterior con las funciones siguientes:

a) $g(x) = log_2\, x + 2$ b) $h(x) = log_2\, x - 2$ c) $i(x) = log_2(\,x + 2)$ d) $j(x) = log_2(\,x - 2)$

$f(x) = log_2\, x$

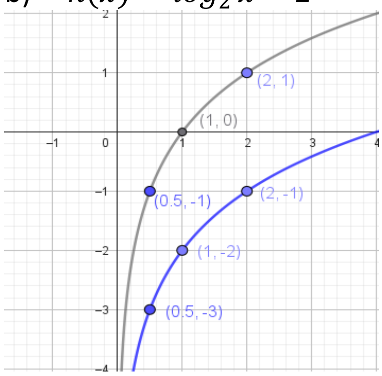


a) $g(x) = log_2\, x + 2$



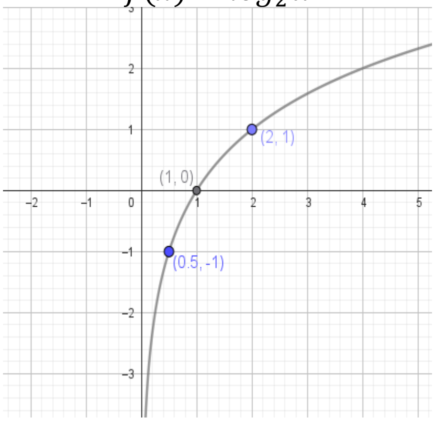
Toda la gráfica está desplazada 2 unidades hacia arriba con respecto a la inicial

b) $h(x) = log_2\, x - 2$

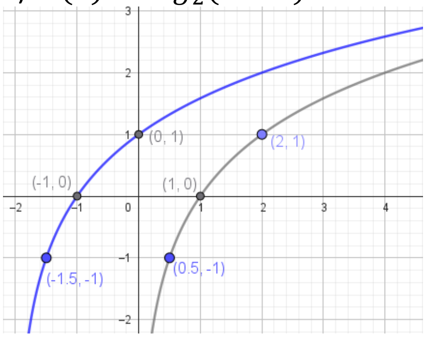


Toda la gráfica está desplazada 2 unidades hacia abajo con respecto a la inicial

$f(x) = log_2\, x$

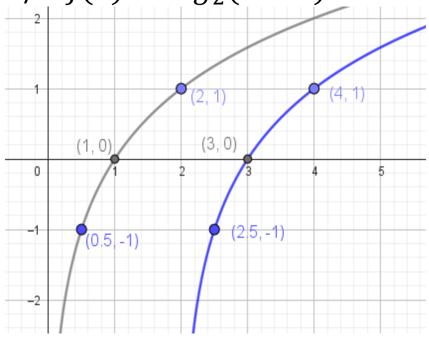


c) $i(x) = log_2(x+2)$



Toda la gráfica está desplazada 2 unidades hacia la izquierda con respecto a la inicial

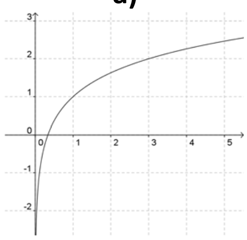
d) $j(x) = log_2(x-2)$



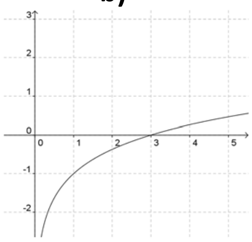
Toda la gráfica está desplazada 2 unidades hacia la derecha con respecto a la inicial

27. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

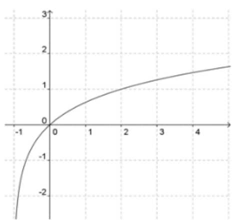
a)



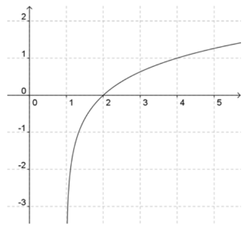
b)



c)



d)



Hay que tener en cuenta que siempre es log1 = 0 y $log_a\, a = 1$ por lo cual la gráfica debe pasar por los puntos (1, 0) y (a, 1). Si no es así hay que ajustar la función $y = log_a\, x$ con algún factor o algún desplazamiento para que pase por ambos puntos manteniendo la asíntota en el eje OX.

a) Si desplazamos la curva verticalmente una unidad pasará por los puntos (1, 0) y (3, 1). Por tanto, $log_a\, 3 = 1$, a = 1, la función es $\boldsymbol{y = log_3\, x + 1}$.

b) Si desplazamos la curva una unidad hacia arriba pasará por los puntos (1, 0) y (3, 1). Por tanto, la función es $\boldsymbol{y = log_3\, x - 1}$.

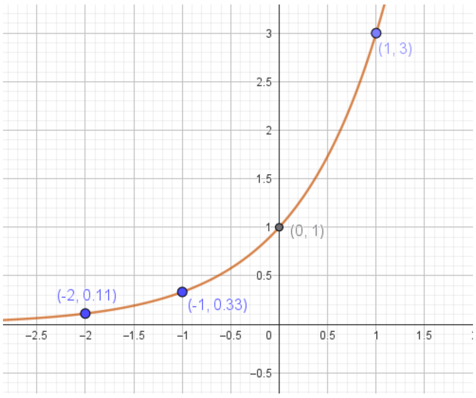
c) Si desplazamos la curva una unidad hacia la derecha pasará por los puntos (1, 0) y (3, 1). Por tanto, la función es $\boldsymbol{y = log_3(x+1)}$.

d) Si desplazamos la curva una unidad hacia la izquierda pasará por los puntos (1, 0) y (3, 1). Por tanto, la función es $\boldsymbol{y = log_3(x+1)}$.

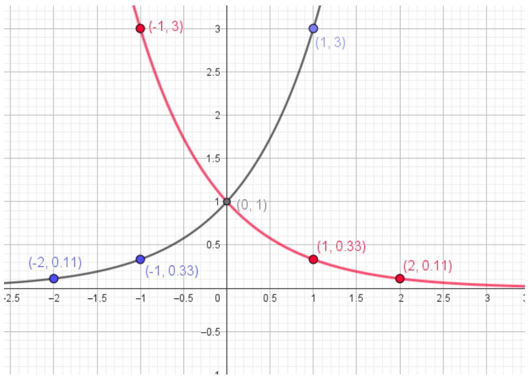
28. Representa en tu cuaderno $y = 3^x$usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$, $\boldsymbol{y = \log_3 x}$, $\boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{3}} x}$

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	1/9	1/3	1	3	9

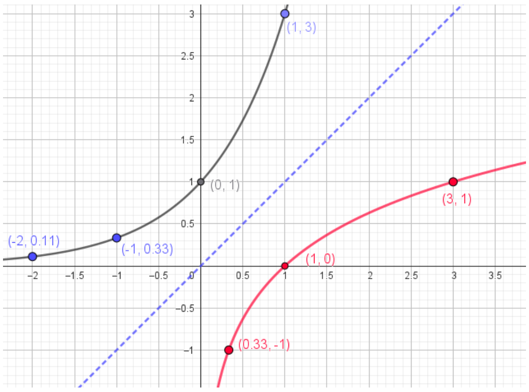
$y = 3^x$



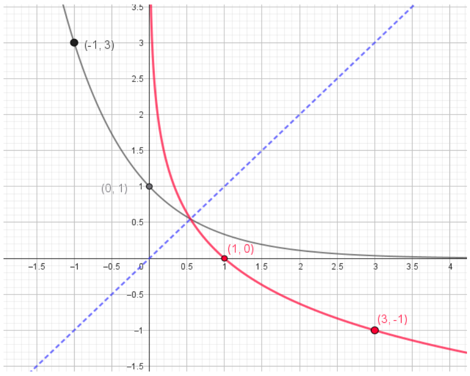
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



$y = \log_3 x$



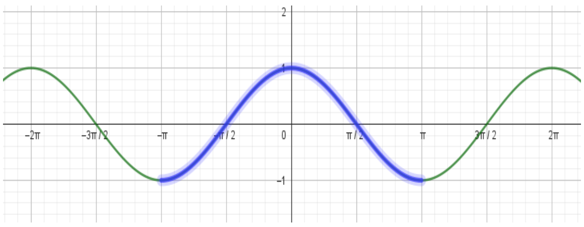
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$



3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

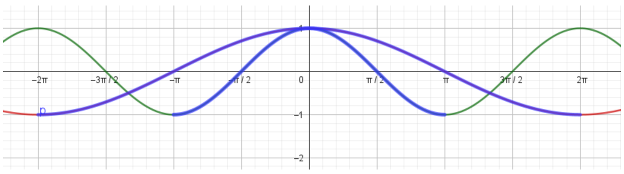
29. Representa en tu cuaderno las gráficas de las funciones $y = \cos x$, $y = \cos \frac{1}{2} x$ e $y = \frac{1}{2} \cos x$ comparándose después con la gráfica $y = \cos x$

$y = \cos x$



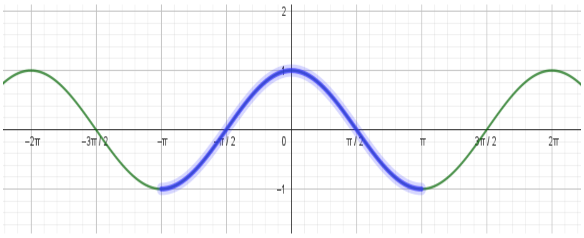
La función coseno tiene de amplitud 1 y de periodo 2π.

$y = \cos \frac{1}{2} x$



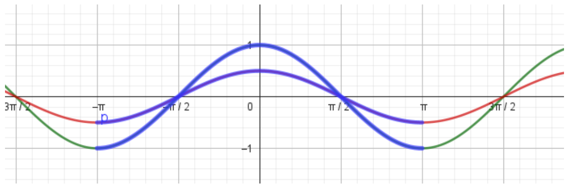
La función $y = \cos \frac{1}{2} x$ tiene la misma amplitud, 1, pero su periodo es 4π.

$y = \cos x$



La función coseno tiene de amplitud 1 y de periodo 2π.

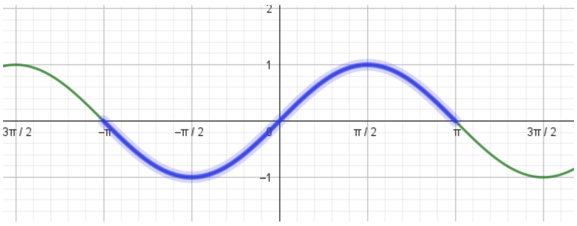
$y = \frac{1}{2}\cos x$



La función $y = \frac{1}{2}\cos x$ tiene el mismo periodo, 2π, que la función coseno pero su amplitud es la mitad: 1/2.

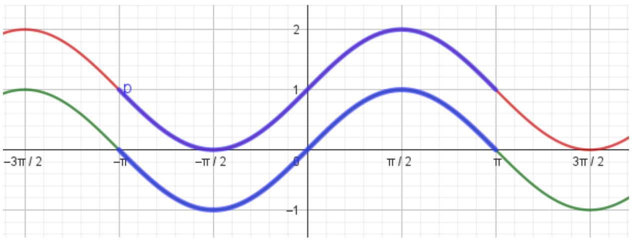
30. Partiendo de la gráfica de la función y = sen x, representa en tu cuaderno, sin hacer tablas de valores, las gráficas de y = 1 + sen x y de y = sen (x + π/6).

$y = senx$



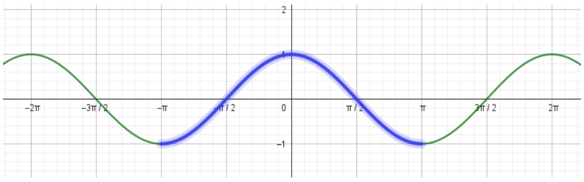
La función seno tiene de amplitud 1 y de periodo 2π.

$y = 1 + senx$



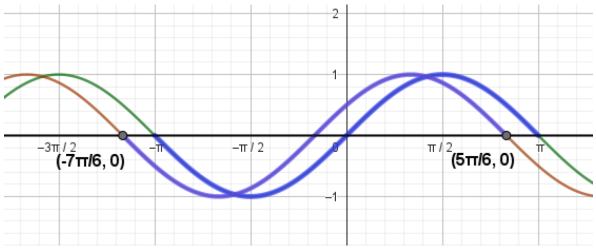
La función $y = 1 + senx$ tiene la misma amplitud, 1 y periodo pero su gráfica está desplazada una unidad hacia arriba.

$y = \operatorname{sen} x$



La función seno tiene de amplitud 1 y de periodo 2π.

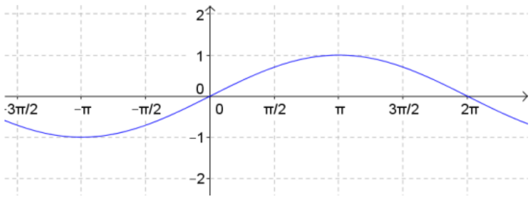
$y = sen(x + \frac{\pi}{6})$



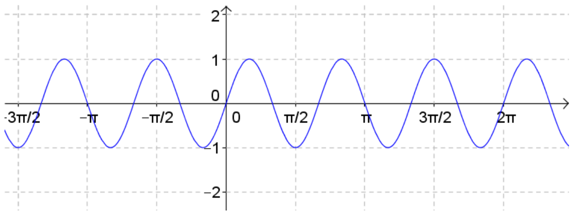
La función $y = sen(x + \frac{\pi}{6})$ tiene la misma amplitud y periodo que la función seno pero su gráfica está desplazada π/6 a la izquierda.

31. Identifica las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas:

a)



b)



a) f(0) = 0, como senx
f(x) = 1, en x = π, en vez de en x = π/2
f(x) = -1, en x = π, en vez de en x = -π/2
la amplitud es 1, el periodo es 4π, en vez de 2π
La gráfica pasa por los puntos críticos en valores el doble que en senx, por tanto la función es
f(x) = $\text{sen}\,\frac{1}{2}x$

b) Razonando como en a) pero en este caso se alcanzan los puntos críticos en valores la tercera parte que en senx, por tanto la función es f(x) = sen 3x, el periodo es 2π/3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

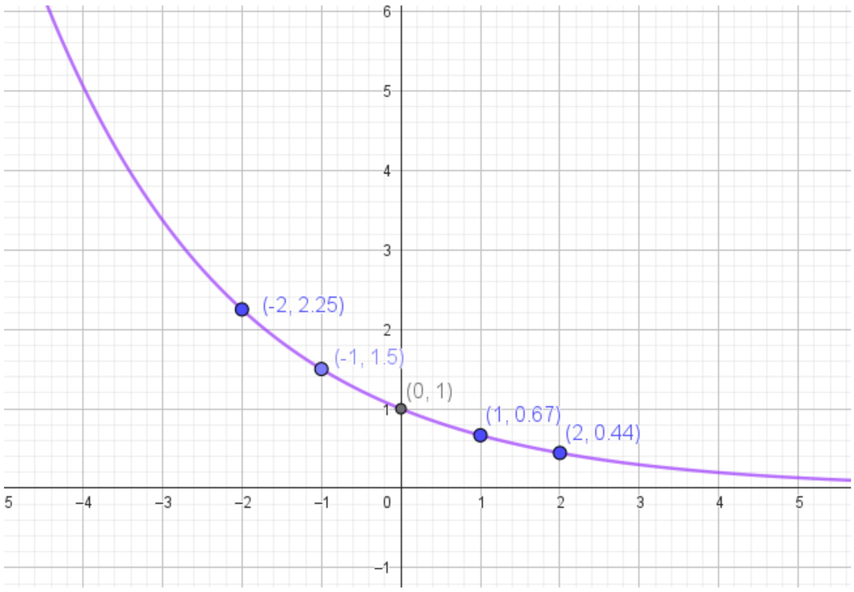
Función exponencial

1. Representa mediante una tabla de valores las siguientes funciones:

a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **b)** $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ **c)** $y = 2^{x/2}$ **d)** $y = 3^{-2x}$

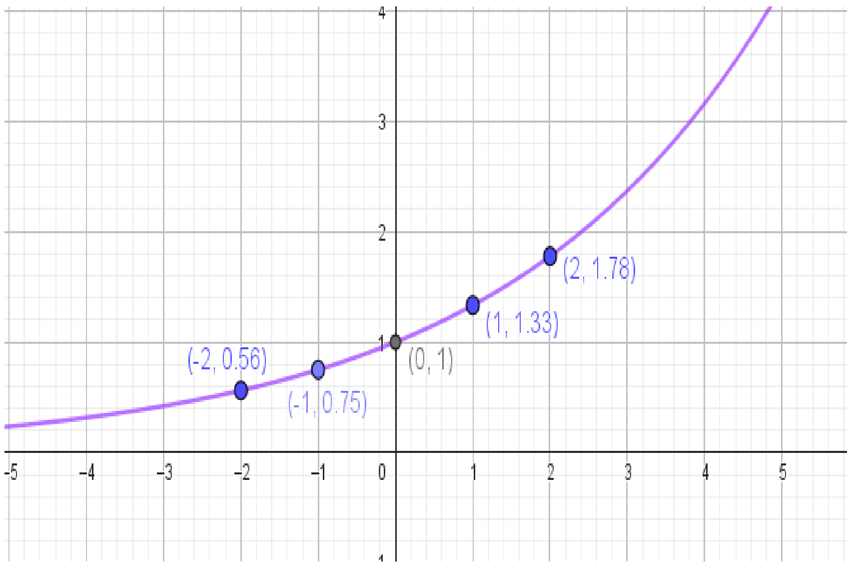
a)

x	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$
-2	$\frac{9}{4}$
-1	$\frac{3}{2}$
0	1
1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{4}{9}$



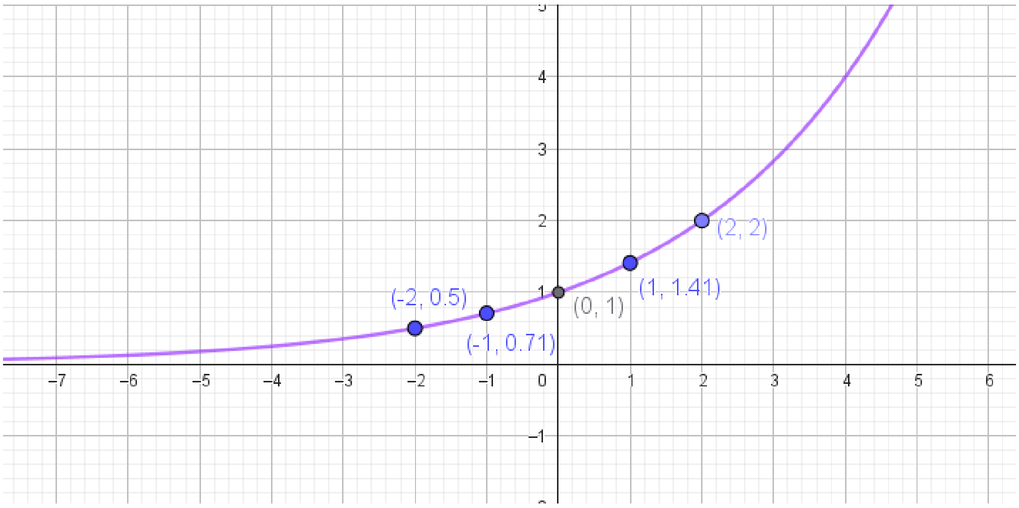
b)

x	$\left(\frac{4}{3}\right)^x$
-2	$\frac{9}{16}$
-1	$\frac{3}{4}$
0	1
1	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{16}{9}$



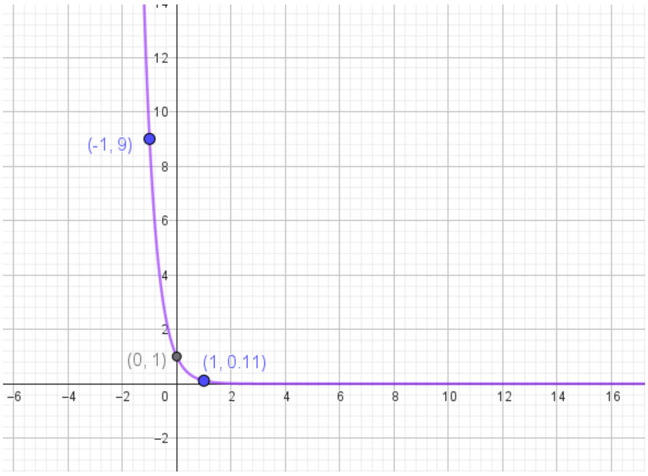
c)

x	$2^{\frac{x}{2}}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	1
1	$\sqrt{2}$
2	2



d)

x	3^{-2x}
-2	81
-1	9
0	1
1	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{81}$

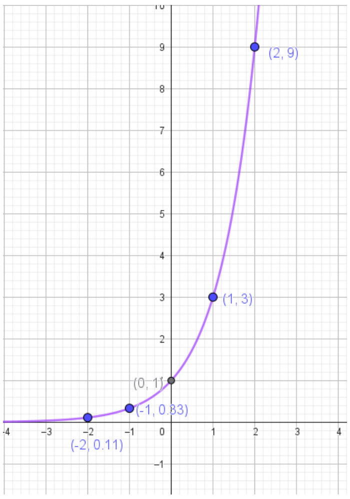


2. Representa mediante una tabla de valores la función $y=3^x$ y a continuación, sin tabla de valores, representa estas otras sobre el mismo dibujo:

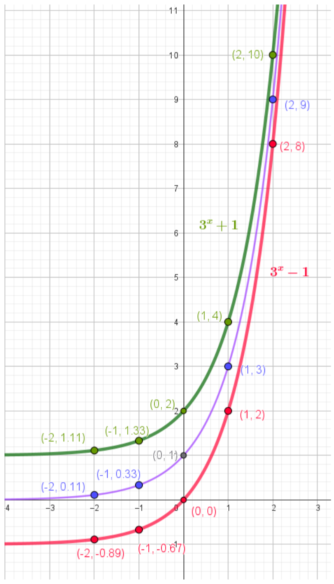
a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

a)

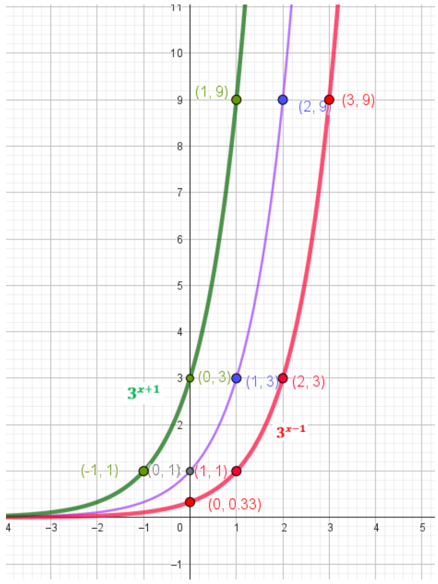
x	$y=3^x$
-2	1/9
-1	1/3
0	0
1	3
2	9



a) y b)



c) y d)



3. Encuentra una función exponencial $f(x) = b^x$ sabiendo que $f(2) = 9$.

$$f(x) = b^x \rightarrow f(2) = b^2 = 9 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow f(x) = 3^x$$

4. Encuentra una función $f(x) = k \cdot b^x$ sabiendo que $f(4) = 48$ y que $f(0) = 3$.

$$f(x) = kb^x \rightarrow f(0) = kb^0 = 3 \rightarrow k = 3$$

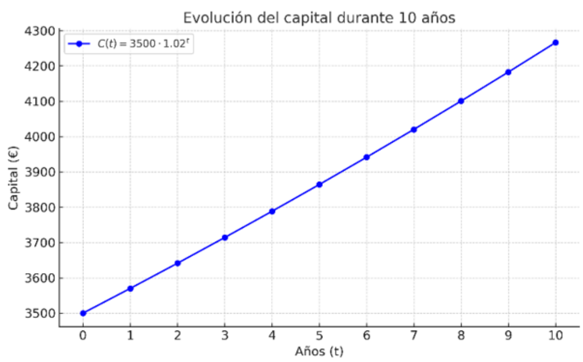
$$f(4) = 3b^4 = 48 \rightarrow b^4 = \frac{48}{3} = 16 \rightarrow b = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$

5. Si un capital de 3 500 euros se multiplica cada año por 1.02 representa en un gráfico la evolución de ese capital en los 10 primeros años. Escoge unas proporciones adecuadas para los ejes.

Año (t)	Capital (€)
0	3500
1	3570
2	3641,4
3	3714,23
4	3788,51
5	3864,28
6	3941,57
7	4020,4
8	4100,81
9	4182,82
10	4266,48

$$\mathrm{C(t)} = 3500 \cdot 1{,}02^{\mathrm{t}}$$



Parece una línea recta por las escalas

6. **Cierto tipo de células se reproduce por bipartición, comprobándose que el número de ellas se duplica cada día. Si en un día determinado el número de células era de 4 millones:**

   a. **Expresa mediante una función el número de células en función del número de días.**

   $$\mathrm{C(t)} = 4 \cdot 2^{\mathrm{t}}$$

   b. **Halla el número de células que habrá dentro de 3 días y el que había hace 3 días.**

   $\mathrm{C}(3) = 4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$

   $\mathrm{C}(-3) = 4 \cdot 2^{-3} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

   c. **¿En qué día piensas que el número de células era de 31 250?**

   $4 \cdot 2\mathrm{t} = 31250 \;\rightarrow 2^{\mathrm{t}} = \frac{31250}{4} \rightarrow \log 2 \cdot \mathrm{t} = \log 7812{,}5 \;\rightarrow t = \frac{\log\ 7812{,}5}{\log 2} = 12{,}93 \;\rightarrow$

   El día 13.

7. **La descomposición de cierto isótopo radiactivo viene dada por la fórmula $y = y_0 \cdot 2{,}7^{-0{,}25t}$, donde y_0 representa la cantidad inicial y *t* el número de milenios transcurrido. Si la cantidad actual es de 50 gramos, ¿cuál será la cantidad que quede al cabo de 8 000 años? ¿Cuál era la cantidad que había hace 5 000 años?**

   $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0 \cdot 2,7^{-0.25\mathrm{t}} \rightarrow \mathrm{y} = 50 \cdot 2,7^{-8 \cdot 0,25} \rightarrow \mathrm{y} = 50 \cdot 2,7^{-2} \rightarrow \mathrm{y} = 50 \cdot \dfrac{1}{2,7^2} = 6{,}86$

   Al cabo de 8 000 años quedan 6,86 gramos.

   $y = 50 \cdot 2{,}7^{-0{,}25\,(-5)} = 50 \cdot 2{,}7^{1{,}25} = 50 \cdot 2{,}7^{1{,}25} = 173{,}1$

   Había 173,1 gramos.

Función logarítmica

8. **Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición y sin utilizar la calculadora:**

   a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1\,000$ d) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ e) $\log_5 0{,}2$ f) $\log 0{,}1$

   a. $log_5 625 = x \;\rightarrow 5^x = 5^4 \rightarrow x = 4.$

   b. $log_2 128 = x \rightarrow 2^x = 128 \rightarrow 2^x = 2^7 \rightarrow x = 7 \;\rightarrow \log_2 128 = 7$

   c. $\log 1000 = x \rightarrow 10^x = 1000 \rightarrow 10^x = 10^3 \rightarrow x = 3 \;\rightarrow \log 1000 = 3$

   d. $\log_3 \frac{1}{27} = x \rightarrow 3^x = \frac{1}{3^3} \rightarrow 3^x = 3^{-3} \rightarrow x = -3 \;\rightarrow \log_3 \frac{1}{27} = -3$

   e. $\log_5 0{,}2 = x \rightarrow 5^x = \frac{1}{5} \rightarrow 5^x = 5^{-1} \rightarrow x = -1 \;\rightarrow \log_5 0{,}2 = -1$

   f. $\log 0{,}1 = x \rightarrow 10^x = \frac{1}{10} \rightarrow 10^x = 10^{-1} \rightarrow x = -1 \;\rightarrow \log 0{,}1 = -1$

9. **Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes, sin calculadora:**

   a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0.125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

   g) $\log_3 0.333\ldots$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1\,000}$

a. $\log_9 3 = x \to 9^x = 3 \to 3^{2x} = 3 \to 2x = 1 \to x = \frac{1}{2} \to \log_9 3 = \frac{1}{2}$

b. $log_4 32 = x \to 4^x = 32 \to 2^{2x} = 2^5 \to 2x = 5 \to x = \frac{5}{2} \to \log_4 32 = \frac{5}{2}$

c. $log_2 0{,}125 = x \to 2^x = \frac{1}{8} \to 2^x = 2^{-3} \to x = -3 \to \log_2 0{,}125 = -3$

d. $\log_9 27 = x \to (3^2)^x = 27 \to 3^{2x} = 3^3 \to 2x = 3 \to \log_9 27 = \frac{3}{2}$

e. $log_2\sqrt{8} = x \to 2^x = 8^{1/2} \to 2^x = 2^{3/2} \to x = \frac{3}{2} \to \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

f. $log_8 2 = x \to 8^x = 2 \to 2^{3x} = 2 \to 3x = 1 \to x = \frac{1}{3} \to \log_8 2 = \frac{1}{3}$

g. $log_3 0{,}333 = x \to 3^x = \frac{1}{3} \to 3^x = 3^{-1} \to x = -1 \to \log_3 0{,}333 = -1$

h. $log_8\sqrt{2} = x \to 8^x = 2^{1/2} \to 2^{3x} = 2^{1/2} \to 3x = 1/2 \to x = \frac{1}{6} \to \log_8 \sqrt{2} = \frac{1}{6}$

i. $log_3\sqrt[4]{27} = x \to 3^x = \sqrt[4]{3^3} \to 3^x = 3^{3/4} \to x = \frac{3}{4} \to \log_3 \sqrt[4]{27}$

j. $\log\sqrt{1000} = x \to 10^x = \sqrt{10^3} \to 10^x = 10^{3/2} \to x = \frac{3}{2} \to \log\sqrt{1000} = \frac{3}{2}$

10. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0{,}1$ d) $\log_{13}\sqrt{8}$ e) $\log_{16}\sqrt{1\,000}$

a. $\log_5 7 = \frac{\log 7}{\log 5} \approx \frac{0{,}8451}{0{,}6989} \approx 1{,}2091$

b. $\log_9 12 = \frac{\log 12}{\log 9} \approx \frac{1{,}0792}{0{,}9542} \approx 1{,}1310$

c. $\log_{20} 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log 20} \approx -\frac{1}{1{,}3010} \approx -0{,}7686$

d. $\log_{13}\sqrt{8} = \frac{\log\sqrt{8}}{\log 13} \approx \frac{0{,}4518}{1{,}1139} \approx 0{,}4054$

e. $\log_{16}\sqrt{1000} = \frac{\log\sqrt{1000}}{\log 16} \approx \frac{1{,}5}{1{,}2041} \approx 1{,}2459$

11. Utilizando los valores log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log\sqrt{6}$ f) $\log\sqrt[3]{25}$

a. $\log 27 = \log 3^3 = 3 \cdot \log 3 = 3 \cdot 0{,}477 = 1{,}431$

b. $\log 12 = \log(3 \cdot 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \cdot \log 2 = 0{,}477 + 2 \cdot 0{,}301 = 1{,}079$

- log 5 = log (10/2) = log10 – log 2 = 1 – 0,301 = 0,699.

c. $\log 20 = \log(4 \cdot 5) = \log 2^2 + \log 5 = 2\log 2 + \log 5 = 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}699 = 1{,}301$

d. $\log 50 = \log(2 \cdot 25) = \log 2 + \log(5^2) = \log 2 + 2\log 5 = 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}699 = 1{,}699$

e. $\log\sqrt{6} = \log(2 \cdot 3)^{1/2} = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = \frac{1}{2}(0{,}301 + 0{,}477) = 0{,}389$

f. $\log\sqrt[3]{25} = \log(5^2)^{1/3} = \log 5^{2/3} = \frac{2}{3} \cdot \log 5 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}699 = 0{,}466$

12. Llamando log 9 = *x* expresa en función de *x* los siguientes logaritmos:

a) log 81 b) log 900 c) $\log 0,\widehat{1}$ d) log 0,9 e) $\log \sqrt[3]{900}$

a. $\log 81 = \log 9^2 = 2\log 9 = 2x$

b. $\log 900 = \log(9 \cdot 100) = \log 9 + \log 10^2 = x + 2\log 10 = x + 2$

- 0,1111111.... = $\frac{1-0}{9} = \frac{1}{9}$

c. $\log \widehat{0{,}1} = \log\frac{1}{9} = log 1 - \log 9 = \ 0 - x = -x$

d. $\log 0{,}9 = \log\frac{9}{10} = \log 9 - \log 10 = x - 1$

e. $log\ \sqrt[3]{900} = \log 900^{1/3} = \frac{1}{3}\cdot\log 900 = \frac{1}{3}\cdot(x+2) = \frac{x+2}{3}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) 2 log *x* = log (10 – 3*x*)
b) log2 + log(11 – x²) = 2 log(5 – x)
c) log(*x² + 3x + 2*) – log (x² – 1) = log 2
d) log*x* + log(*x* + 15) = 2

a) $2\log x = \log(10-3x) \ \rightarrow \log x^2 = \log(10-3x) \rightarrow x^2 = 10-3x \rightarrow x^2+3x-10 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-10)}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} \ \rightarrow x_1 = 2 \ ; \ x_2 = -5$

b) $\log 2 + \log(11-x^2) = 2\log(5-x) \rightarrow \log[2\ (11-x^2)] = \log[(5-x)^2] \ \rightarrow$

$\rightarrow 22 - 2x^2 = x^2 - 10x + 25 \ \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{10\pm\sqrt{10^2-4(3)(3)}}{6} = \frac{10\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{10\pm 8}{6} \ \rightarrow x_1 = 3\ ,\ \ x_2 = \frac{1}{3}$

c) $\log(x^2+3x+2) - \log(x^2-1) = \log 2 \ \rightarrow \log(\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}) = \log 2 \ \rightarrow \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = 2 \ \rightarrow$

$\rightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = 2 \ \rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 2 \ \rightarrow x+2 = 2x-2 \ \rightarrow x = 4$

d) $y = \log x + \log(x+15) = 2 \ \rightarrow \log(x^2+15x) = 2 \ \rightarrow x^2+15x = 10^2 \ \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0 \rightarrow x = \frac{-15\pm\sqrt{15^2-4(-100)}}{2} = \frac{-15\pm\sqrt{625}}{2} = \frac{-15\pm 25}{2} \ \rightarrow \ x_1 = 5\ ,\ x_2 = -20$

14. ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número *x* y el de su inverso 1/*x*?

$\log\frac{1}{x} = log 1 - log x = 0 - \log x = -log x$

15. Si se multiplica por 36 el número *x*, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es dicha base?

$\log_b 36x = \log_b x + 2 \rightarrow \log_b 36 + \log_b x = \log_b x + 2 \rightarrow \log_b 36 = 2 \ \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = 36 \ \rightarrow b = \ \sqrt{36} = 6$

16. La escala Richter, usada para medir la intensidad de los terremotos, es una escala logarítmica: un terremoto de magnitud 5 es 100 veces más intenso que uno de magnitud 3, porque 5 = log 100 000 y 3 = log 1 000. Teniendo esto en cuenta, si el famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tuvo una magnitud de 8,2 y el de Haití (en 2010) fue de 7,2 ¿Cuántos veces más fuerte fue uno que otro?

$10^{8,2}$ = 158 489 319 y $10^{7,2}$ = 15 848 931,9, por lo que el de San Francisco tuvo una intensidad 10 veces mayor

Funciones trigonométricas

17. Determina todos los ángulos que verifican que *sen x* = 1/2.

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

18. Determina todos los ángulos que verifican que *sen x* = –1/2.

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

19. Determina todos los ángulos que verifican que *cos x* = 1/2.

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

20. Determina todos los ángulos que verifican que *cos x* = –1/2.

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

21. Determina todos los ángulos que verifican que *tg x* = –1.

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$

22. Calcula *sen x* y *cos x* si *tg x* = –3.

$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -3 \ \rightarrow \operatorname{sen} x = \ -3\cos x$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow (-3\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow 9\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \ \rightarrow 10\cos^2 x = 1 \ \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10} \ \rightarrow \cos x = \ \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{sen} x = \ -3\cos x = -3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \ \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ y $senx = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ o bien $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ y $senx = \frac{3}{\sqrt{10}}$

23. Calcula *sen x* y *tg x* si *cos x* = 0,4.

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2\ x = 1 - \cos^2 x \ \rightarrow \operatorname{sen} x = \ \sqrt{1 - 0{,}4^2} \approx \pm 0{,}9165$

$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \pm\frac{0{,}9165}{0{,}4} = \pm 2{,}291$

$senx = 0{,}9165$ y $tgx = 2{,}291$ o bien $senx = -0{,}9165$ y $tgx = -2{,}291$

24. Calcula *tg x* y *cos x* si *sen x* = –0,3.

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \rightarrow \cos x = \sqrt{1 - 0{,}3^2} \approx \pm 0{,}9539$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \pm \frac{0{,}3}{0{,}9539} = \mp 0{,}3145$$

$cosx = 0{,}9539$ y $tgx = -0{,}3145$ o bien $cosx = -0{,}9539$ y $tgx = 0{,}3145$

25. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos expresados en radianes siguientes:
a) 17π/3, b) –20π/3, c) 13π/2, d) –9π/2.

a) $\frac{\frac{17\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\frac{17}{3}}{2} = \frac{17}{6} \approx 2{,}83 \rightarrow 2$ vueltas y $0{,}83$ vueltas

Restamos 2 vueltas: $\frac{17\pi}{3} - 2(2\pi) = \frac{17\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

b) $2\pi = \frac{6\pi}{3}$, 20 = 3·6 + 2 , $-\frac{20\pi}{3} = -\frac{18\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ las razones de $-\frac{20\pi}{3}$, son las de $-\frac{2\pi}{3}$

o en sentido positivo $2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

c) $2\pi = \frac{4\pi}{2}$, 13 = 3·4 + 1 las razones de $\frac{13\pi}{2}$ son las de $\frac{\pi}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Infinito}$

d) $2\pi = \frac{4\pi}{2}$, 9 = 2·4 + 1 , $-\frac{9\pi}{2} = -\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$, las razones de $-\frac{9\pi}{2}$ son las de $-\frac{\pi}{2}$

o en sentido positivo $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{Infinito}$

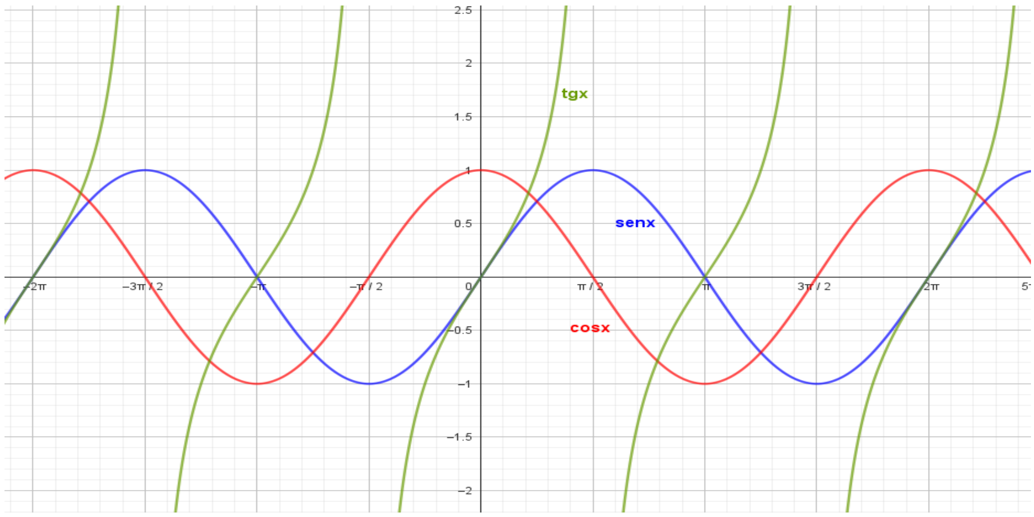
26. Dibuja en tu cuaderno sobre unos mismos ejes las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente e indica lo siguiente:

a) Si el seno vale cero, ¿cuánto vale el coseno, y la tangente?

b) Si el coseno vale cero, ¿cuánto vale el seno y la tangente?

c) Si la tangente vale cero, ¿cuánto vale el seno y el coseno?

d) Cuándo la tangente tiende a infinito, ¿cuánto vale el coseno?



a) Si el seno vale cero, ¿cuánto vale el coseno, y la tangente?

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos x = \sqrt{1-0} = \pm 1$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \pm\dfrac{0}{1} = 0$

El coseno vale 1 o -1 y la tangente, 0

b) Si el coseno vale cero, ¿cuánto vale el seno y la tangente?

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-0} = \pm 1$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \pm\dfrac{1}{0} = \text{Infinito}$

El seno vale 1 o -1, y la tangente, infinito

c) Si la tangente vale cero, ¿cuánto vale el seno y el coseno?

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \cdot \cos x = 0$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos x = \sqrt{1-0} = \pm 1$

El seno vale 0, y el coseno 1 o -1

d) Cuándo la tangente tiende a infinito, ¿cuánto vale el coseno?

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\infty} = 0$$

El coseno vale 0

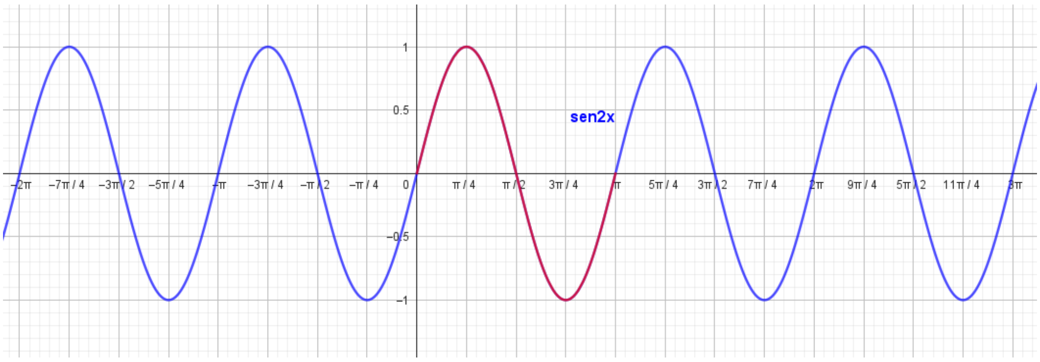
27. Dibuja la gráfica de la función *y* = *sen*(2*x*), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
2*x*	0	π/2	π	3π/2	2π
sen(2*x*)					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?
c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
$2x$	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
sen(2x)	0	1	0	-1	0
y	0	1	0	-1	0



a. La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$$\text{La amplitud es la altura maxima desde el eje horizontal } \rightarrow \mathrm{A} = 1$$

b. ¿Cuál es su periodo?

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

c. La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

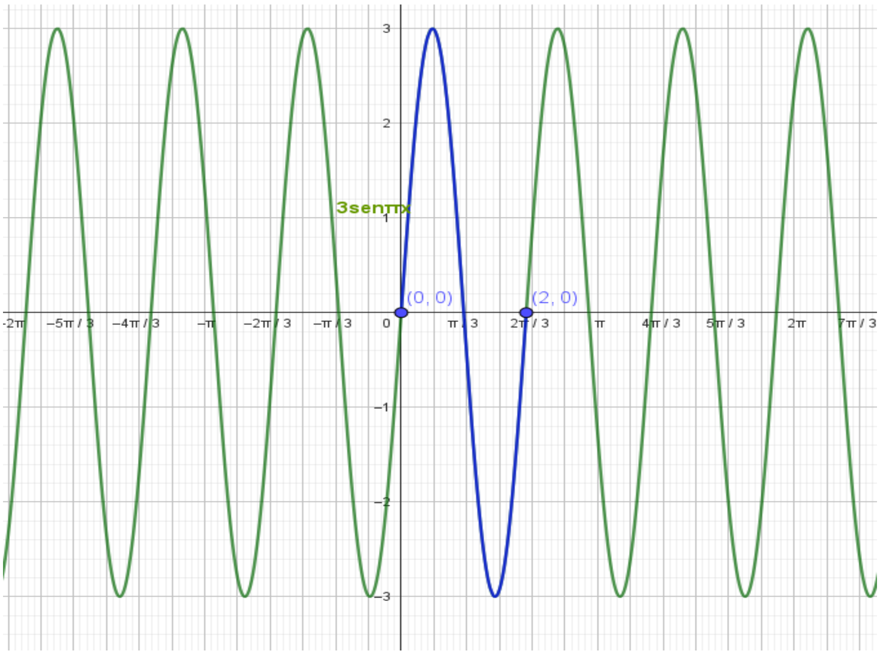
$$\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\pi}$$

28. Dibuja la gráfica de la función *y* = 3sen(π*x*), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
π*x*	0	π/2	π	3π/2	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	0	1/2	1	2/3	2
πx	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
$\operatorname{sen} \pi x)$	0	1	0	-1	0
$3\operatorname{sen}(\pi x)$	0	3	0	-3	0



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$A = 3$

b. ¿Cuál es su periodo?

$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$

29. Dibuja la gráfica de la función *y* = 2*sen*((π/3) *x*) + π/2, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
(π/3)*x*	0	π/2	π	3π/2	2π
sen((π/3)*x*)					
y					

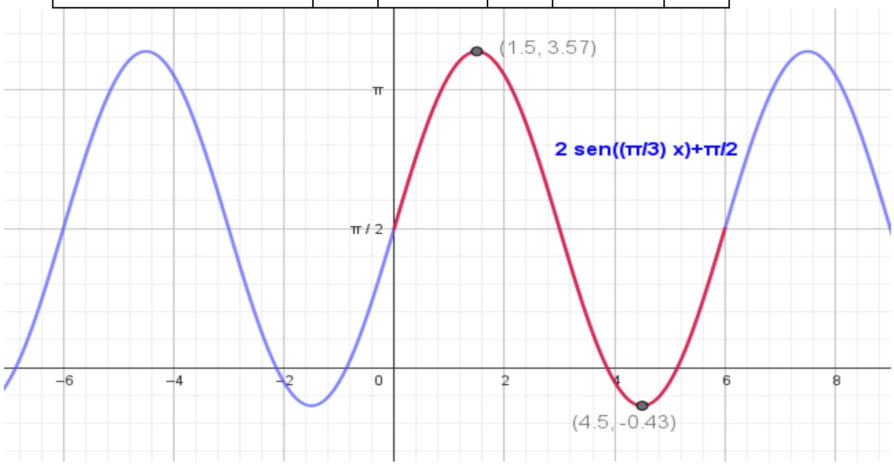
a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	0	3/2	3	9/2	6
$\frac{\pi}{3}x$	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
$\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}x$	0	1	0	-1	0

$2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \pi/2$	π/2	1 + π/2	π/2	π/2 – 1	π/2



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

La mitad de la distancia entre el valor máximo y mínimo de la función, $A = 2$

Si la función tiene la forma y = A sen(Bx) + C o y = A cos(Bx) + C, la amplitud es igual al valor absoluto de A, es decir, |A|.

b. ¿Cuál es su periodo?

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

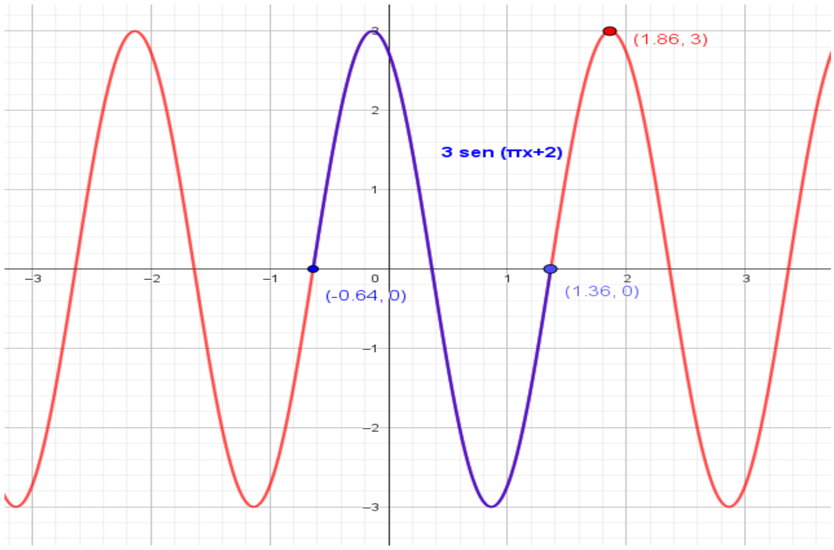
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6}$$

30. Dibuja la gráfica de la función *y* = 3*sen* (π*x* + 2), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
π*x* + 2	0	π/2	π	3π/2	2π
sen(π*x* + 2)					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	-2/π	1/2-2/π	1-2/π	3/2-2/π	2-2/π
$\boldsymbol{\pi x + 2}$	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2 π**
3 sen (πx)	0	1	0	-1	0
3 sen $(\pi x + 2)$	0	3	0	-3	0



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$$A = 3$$

b. ¿Cuál es su periodo?

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

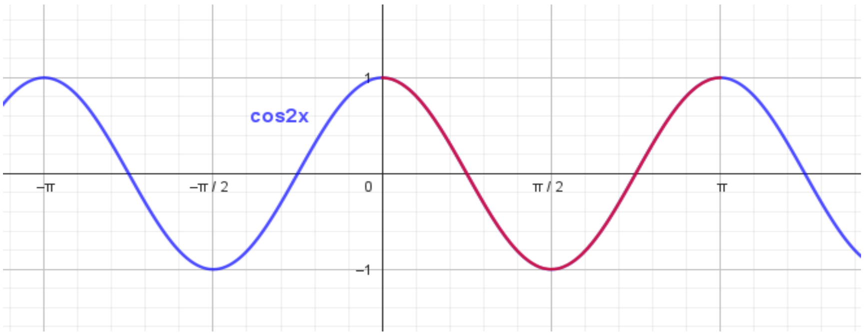
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

31. Dibuja la gráfica de la función *y* = *cos*(2*x*), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
2*x*	0	π/2	π	3π/2	2π
cos(2*x*)					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
cos (2x)	1	0	-1	0	1
y	1	0	-1	0	1



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$$\mathrm{A} = 1$$

b. ¿Cuál es su periodo?

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

$$\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{1}{\pi}$$

32. Dibuja la gráfica de la función *y* = 3*cos*(*πx*), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

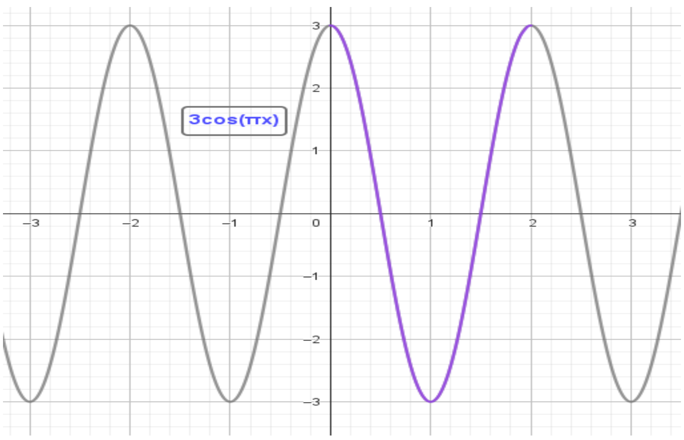
x					
πx	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	0	1/2	1	3/2	2
πx	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
3 cos (πx)	1	0	-1	0	1
y	3	0	-3	0	3



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$$A = 3$$

b. ¿Cuál es su periodo?

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

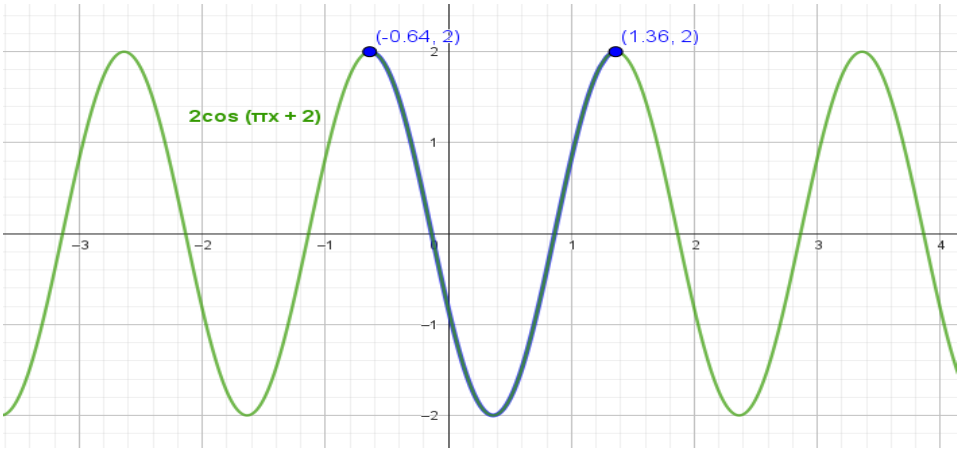
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

33. Dibuja la gráfica de la función *y* = 2*cos* (π*x* + 2), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno

x					
π*x* + 2	0	π/2	π	3π/2	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

x	-2/ π	½ - 2/π	1 – 2/π	3/2 – 2/π	2 – 2/π
π*x* + 2	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
$2\cos(\pi x + 2)$	1	0	-1	0	1
y	2	0	-2	0	2



a. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

$$A = 2$$

b. ¿Cuál es su periodo?

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

c. ¿Cuál es su frecuencia?

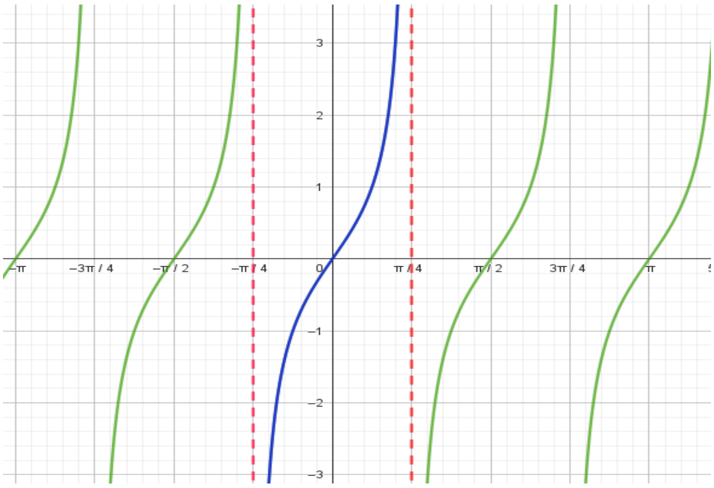
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

34. Dibuja la gráfica de la función y = tg(2x), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
2*x*	0	π/2	π	3π/2	2π
$tg(2x)$					
y					

¿Cuál es su periodo?

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x	**0**	**π/2**	**π**	**3π/2**	**2π**
tan(2x)	0	∞	0	∞	0
y	0	∞	0	∞	0



a) ¿Cuál es su periodo?

Periodo: $\frac{\pi}{2}$

Problemas

35. Por efecto de un antibiótico el número de bacterias de una colonia se reduce en 7% cada hora. Si en el momento de administrarse el antibiótico había 40 millones de bacterias ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

Quedan: 100 – 7 = 93 , $\mathrm{B(t)} = \mathrm{B_0} \cdot \mathrm{r^t} = 40 \cdot (0{,}93)^{10} = 40 \cdot 0{,}484 \approx 19{,}36$ millones

36. Una persona ingiere a las 8 de la mañana una dosis de 10 mg de medicamento. Dicho medicamento se va eliminando a través de la orina, y la cantidad que queda en el cuerpo al cabo de *t* horas viene dada por la fórmula $\boldsymbol{M(t) = 10 \cdot 0{,}8^t}$. Para que el medicamento haga efecto tiene que haber al menos una cantidad de 2 mg en el cuerpo. ¿Cuánto tiempo seguirá haciendo efecto después de su ingestión?

$\mathrm{M(t)} = 10 \cdot 0{,}8^{\mathrm{t}} \rightarrow \mathrm{M(t)} \geq 2 \rightarrow 10 \cdot 0{,}8^{\mathrm{t}} \geq 2 \rightarrow 0{,}8^{\mathrm{t}} \geq 0{,}2 \rightarrow \mathrm{t}\ln(0{,}8) \geq \ln(0{,}2) \rightarrow$

$\rightarrow \mathrm{t} \leq \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)} = 7{,}21$ horas dura el efecto.

37. La medida de la presión atmosférica P (en milibares) a una altitud de *x* kilómetros sobre el nivel del mar está dada por la ecuación $P(x) = 1035 \cdot e^{-0,12x}$

a. Si la presión en la cima de una montaña es de 449 milibares, ¿cuál es la altura de la montaña?

$P(x) = 1035 \cdot e^{-0,12x} \rightarrow 449 = 1035 \cdot e^{-0,12x} \rightarrow e^{-0,12x} = \frac{449}{1035} \rightarrow$

$\rightarrow -0,12x = ln\,(0,4338) \rightarrow x = \frac{0,8351}{0,12} = 6,96\ km$

b. ¿Cuál será la presión en la cima del Everest (altitud 8 848 metros)?

$P(8,848) = 1035 \cdot e^{-0,12 \cdot 8,848} \rightarrow P(8,848) = 1035 \cdot e^{-1,06176}$

$P(8,848) = 1035 \cdot 0,345 = 357,1\ milibares$

38. ¿A qué tanto por ciento hay que invertir un capital para duplicarlo en 10 años?

$\mathrm{M} = \mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \rightarrow 2\mathrm{C} = \mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{10} \rightarrow 2 = (1+\mathrm{i})^{10} \rightarrow (1+\mathrm{i}) = \sqrt[10]{2} \rightarrow$

$\rightarrow i = 1,07177 - 1 \rightarrow i = 0,07177 \rightarrow i = 7,177\%$

39. ¿Cuántos años debe estar invertido un capital para que al 5 % de interés se convierta en 1,25 veces el capital inicial?

$\mathrm{M} = \mathrm{C}(1+\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \rightarrow 1,25\mathrm{C} = \mathrm{C}(1+0,05)^{\mathrm{t}} \rightarrow 1,25 = (1,05)^{\mathrm{t}} \rightarrow \ln(1,25) = \ln(1,05)^{\mathrm{t}} \rightarrow$

$\rightarrow \mathrm{n}\,(1,25) = \mathrm{t}\ln\,(1,05) \rightarrow \mathrm{t} = \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,05)} = 4,57$

40. ¿Conoces esas muñecas rusas que llevan dentro otra muñeca igual, pero de menor tamaño, y así sucesivamente? Supongamos que cada muñeca tiene dentro otra que ocupa 2/3 de su volumen. Si la muñeca mayor tiene un volumen de 405 cm³ y la más pequeña es de 80 cm³, ¿cuántas muñecas hay en total en la serie? ¿Podrías dar una fórmula general para este cálculo?

$\mathrm{V}_1 = 405 \rightarrow \mathrm{r} = \frac{2}{3} \rightarrow \mathrm{V}_{\mathrm{n}} = \mathrm{V}_1 \cdot \mathrm{r}^{\mathrm{n}} = 405 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{n}} \rightarrow 80 = 405 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{n}} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{n}} = \frac{80}{405} \rightarrow$

$\rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{n}} = \ln\,\left(\frac{16}{81}\right) \rightarrow \mathrm{n} \cdot \ln\,\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{16}{81}\right) \rightarrow \mathrm{n} = \frac{\ln\left(\frac{16}{81}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \rightarrow \mathrm{n} = 4$ muñecas

41. Indica, sin dibujar la gráfica, el periodo, la amplitud y la frecuencia de las funciones siguientes:

a) $y = 2\ sen\ (\frac{x}{2})$

- Amplitud: 2
- Periodo: $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
- Frecuencia: $\frac{\frac{1}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}$

b) $y = 0,4\ cos\ (\frac{\pi x}{2})$

- Amplitud: 0,4
- Periodo: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
- Frecuencia:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

c) $\boldsymbol{y = 5\, sen\, (\frac{\pi x}{3})}$

- Amplitud: 5
- Periodo: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$
- Frecuencia: $\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$

d) $\boldsymbol{y = 3\, cos\, (\pi x)}$

- Amplitud: 3
- Periodo: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
- Frecuencia: $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de x que verifica la ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ es

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

$$\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64 \rightarrow \frac{2^{2x+6}}{2^{x-1}} = 64 \rightarrow 2^{2x+6-(x-1)} = 64 \rightarrow 2^{x+7} = 2^6 \rightarrow x+7 = 6 \rightarrow x = -1$$

Respuesta: d) -1

2. La función exponencial y = e^x tiende a * cuando x tiende a –∞ y a *** cuando x tiende a +∞. Indica con qué valores habría que rellenar los asteriscos:**

a) $0, \infty$ b) $\infty, 0$ c) $0, -\infty$ d) $-\infty, 0$

Respuesta: d) 0, ∞

3. Indica cuál es la función exponencial $f(x)$ = b^x que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

$\mathrm{f}(3) = \mathrm{b}^3 = 27 \rightarrow \mathrm{b}^3 = 27 \rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$

Respuesta: b) $\mathrm{f}(x) = 3^x$

4. El valor de x que verifica $log_2 1024$ es:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Otro valor

$$log_2 1024 = 2^x = 1024 \rightarrow 2^x = 2^{10} \rightarrow x = 10$$

Respuesta: c) 10

5. La ecuación logarítmica log x + log 6 = log 30 tiene como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

$$log\ x + log\ 6 = log\ 30 \rightarrow log\ 6x = log\ 30 \rightarrow 6x = 30 \rightarrow x = \frac{30}{6} = 5$$

Respuesta: d) 5

6. Indica la afirmación verdadera:

a. La función exponencial de base mayor que 1 es decreciente.

b. La función logarítmica de base mayor que 1 es decreciente.

c. La función exponencial siempre es creciente.

d. La función exponencial de base mayor que 1 es creciente.

Respuesta: d) La función exponencial de base mayor que 1 es creciente.

7. La expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale 1, donde *k* es un número entero, es:

a) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4}+k\pi$ c) $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2}+k\pi$

Respuesta: b) $\frac{\pi}{4}+k\pi$

8. La función $f(x) = 3\,sen(4x)$ tiene de amplitud, periodo y frecuencia, respectivamente:

a) $3,\frac{\pi}{2},\frac{2}{\pi}$ b) $4,\frac{\pi}{3},\frac{3}{\pi}$ c) $4,\frac{3}{\pi},\frac{\pi}{3}$ d) $3,\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}$

A = 3 , $T=\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

Respuesta: a) 3, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{\pi}$

9. El seno, el coseno y la tangente de $y=-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1$

$-\frac{7\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Respuesta: d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1

10. El seno, el coseno y la tangente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente

$a)$ $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1$

$\frac{13\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}$

Respuesta: a) $\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{\sqrt{3}}$