

Matemáticas Académicas

4ºB ESO

Capítulo 10: Funciones y gráficas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



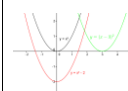
Realizados por:

Hugo Bastante Gómez-Limón

Revisor: **Luis Carlos Vidal Del Campo**

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

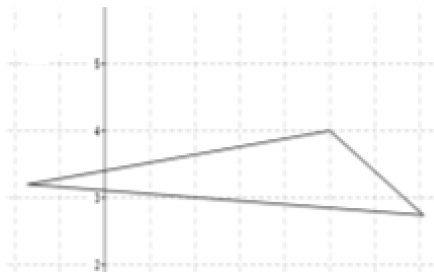
RESUMEN

NOCIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLOS								
Función	Una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x , le corresponde un solo valor de la dependiente, y .	$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$								
Gráfica de una función	Son los (normalmente infinitos) puntos por los que pasa. Es decir, todos los valores $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$.									
Maneras de describir una función.	- Dando una tabla de valores. Como en la columna de al lado - Dando una expresión. $y = 2^x$ - A trozos: Varias expresiones. $y = \begin{cases} x + 1, & x > 2 \\ x, & x \leq 2 \end{cases}$	<table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>-3</td><td>2</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	X	Y	-3	2	-2	0	2	3
X	Y									
-3	2									
-2	0									
2	3									
Dominio y recorrido.	- Dominio. Son los valores de “x” donde la función tenga sentido. - Recorrido. Son los valores de “y” que se alcanzan.	El dominio de la función $\sqrt{2 - x}$ es $(-\infty, 2)$ y su recorrido $[0, +\infty)$								
Características de una función	<i>Debemos estudiar su continuidad, crecimiento, máximos y mínimos, curvatura, simetrías y comportamiento en el infinito.</i>	$y = x^2 + 2$ es continua, creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$, tiene un mínimo absoluto en 0 y es siempre convexa								
Traslaciones	- Vertical. $y = f(x) + K$. En sentido de K: Si K es positivo hacia arriba, si no hacia abajo. - Horizontal. $y = f(x + K)$. En sentido contrario de K: Si K es positivo hacia la izquierda, si no hacia la derecha.									
Valores asociados	- Tasa de variación (TV): $f(b) - f(a)$ - Tasa de variación media (TVM): $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ - Tasa de crecimiento T_{rec}: $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$ $TV[3,5] = 2$ $TVM[3,5] = \frac{2}{5 - 3} = 1$ $T_{\text{rec}}[3,5] = \frac{2}{5} = 40\%$								

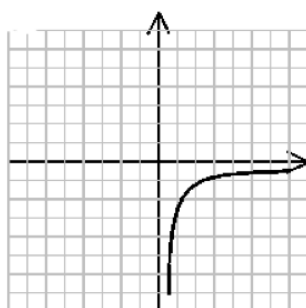
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.

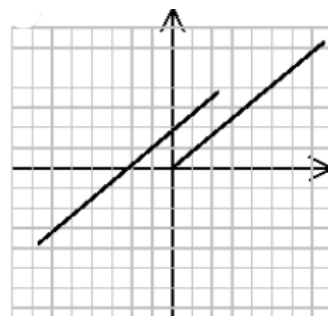
a)



b)



c)



a) No es función

b) sí es función

c) No es función

a) y c) no son funciones al existir valores de X que le corresponde más de un valor en Y

2. Un ciclista bebe $\frac{1}{2}$ litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{10} = \frac{x}{20} \rightarrow f(x) = \frac{x}{20}$$

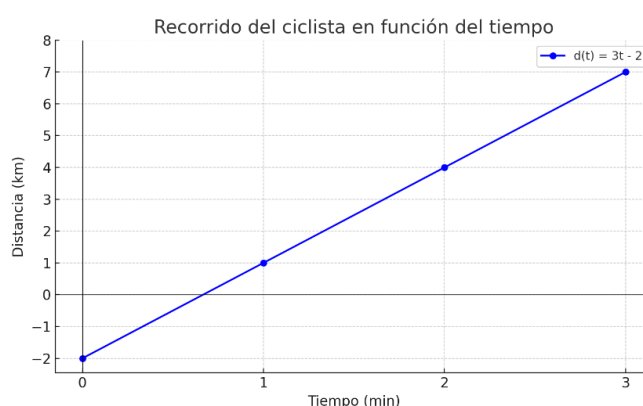
Km recorridos (x)	Agua consumida $f(x) = \frac{x}{20}$
0 km	$f(0) = \frac{0}{20} = 0 \text{ l}$
10 km	$f(10) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ l}$
20 km	$f(20) = \frac{20}{20} = 1 \text{ l}$
40 km	$f(40) = \frac{40}{20} = 2 \text{ l}$
100 km	$f(100) = \frac{100}{20} = 5 \text{ l}$
200 km	$f(200) = \frac{200}{20} = 10 \text{ l}$
400 km	$f(400) = \frac{400}{20} = 20 \text{ l}$
800 km	$f(800) = \frac{800}{20} = 40 \text{ l}$

3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres pri-

meros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.

$$d(t) = 3t - 2 \quad (t \text{ en minutos})$$

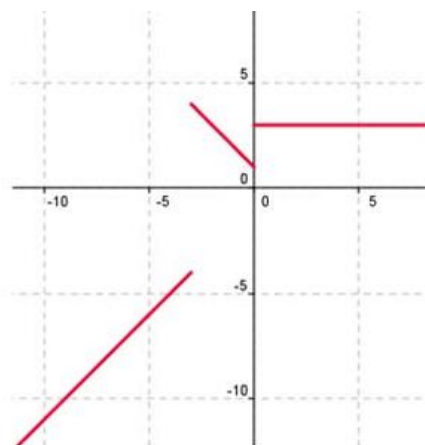
Tiempo (t)	Distancia recorrida $d(t)$ $= 3t - 2$
0 min	$d(0) = 3 \cdot 0 - 2 = -2 \text{ km}$
1 min	$d(1) = 3(1) - 2 = 1 \text{ km}$
2 min	$d(2) = 3(2) - 2 = 4 \text{ km}$
3 min	$d(3) = 3(3) - 2 = 7 \text{ km}$



4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

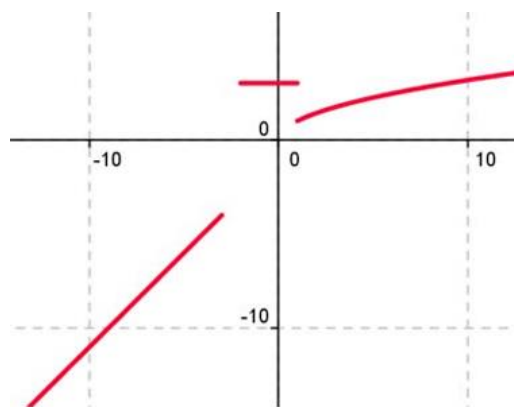
a.
$$\begin{cases} x - 1 & \text{Si } x < -3 \\ -x + 1 & \text{Si } -3 \leq x < 0 \\ 3 & \text{Si } 0 \leq x < \infty \end{cases}$$
 Puntos: -5, -3,1, -3, -1, 0,1, 0, 1

x	Intervalo que pertenece	$f(x)$
-5	$x < -3$	$f(-5) = -5 - 1 = -6$
-3,1	$x < -3$	$f(-3,1) = -3,1 - 1 = -4,1$
-3	$-3 \leq x < 0$	$3 + 1 = 4$
-1	$-3 \leq x < 0$	$1 + 1 = 2$
0	$0 \leq x < \infty$	3
0,1	$0 \leq x < \infty$	3
1	$0 \leq x < \infty$	3



b. $\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{Si } x < -2 \\ 3 & \text{Si } -3 \leq x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{Si } 1 \leq x \end{cases}$ Puntos: -3, -2,1, -2, 0, 0,9, 1, 4, 9

x	Intervalo que pertenece	$f(x)$
-3	$x < -2$	$f(-3) = \frac{1}{-3}$
-2,1	$x < -2$	$f(-2,1) = \frac{1}{-2,1}$
-2	No pertenece a ningún tramo	No definida
0	No pertenece a ningún tramo	No definida
0,9	No pertenece a ningún tramo	No definida
1	$1 \leq x$	$f(1) = \sqrt{1} = 1$
4	$1 \leq x$	$f(4) = \sqrt{4} = 2$
9	$1 \leq x$	$f(9) = \sqrt{9} = 3$



5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

a) $x + \sqrt{2x+4}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$Dom: (-2, \infty) \cup (2, \infty)$

b) $\sqrt{x + \frac{1}{x+2}} \rightarrow x + \frac{1}{x+2} \geq 0 \rightarrow \frac{x(x+2)+1}{x+2} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+2x+1}{x+2} \geq 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+2} \geq 0 \rightarrow$

$x+2 > 0 \rightarrow x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad Dom: (-2, \infty)$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y = 14x + 2$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}$

b) $y = \frac{1}{x-1}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$
 $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$

$y = \frac{1}{x-1} \rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \rightarrow \text{Nunca toma valor } 0$

c) $y = \sqrt{2+x}$

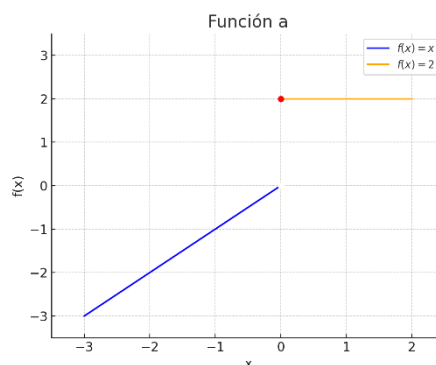
- Dominio: $[-2, \infty)$
 $2+x \geq 0 \rightarrow x \geq -2$
- Recorrido: $[0, \infty)$

$$y^2 = 2+x \rightarrow x = y^2 - 2 \rightarrow y^2 - 2 \geq -2 \rightarrow y^2 \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

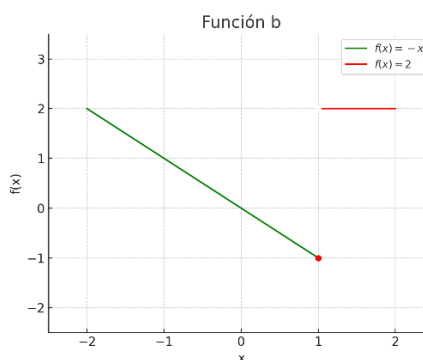
a) $\begin{cases} x, & \text{Si } x \in [-3, 0) \\ 2, & \text{Si } x \in [0, 2] \end{cases}$

- Dominio: $[-3, 2]$
- Recorrido: $[-3, 0) \cup \{2\}$



b) $\begin{cases} -x, & \text{Si } x \in [-2, 1] \\ 2, & \text{Si } x \in (1, 2] \end{cases}$

- Dominio: $[-2, 2]$
- Recorrido: $[-1, 2]$



8. Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones y dibújalas:

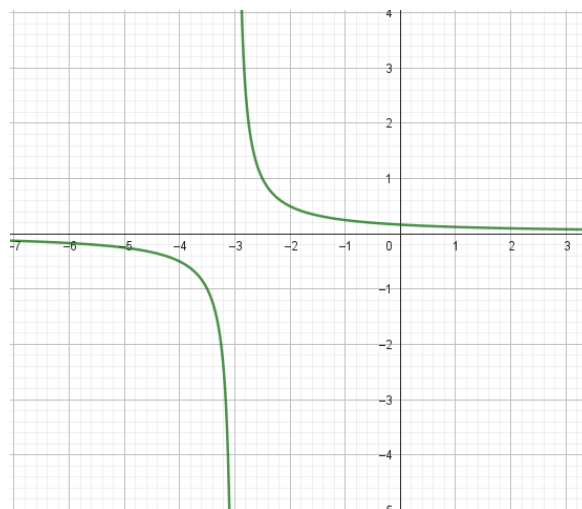
a) $\frac{1}{2x+6}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-3\}$

$$2x + 6 = 0 \rightarrow 2x = -6 \rightarrow x = -\frac{6}{2} \rightarrow x = -3$$

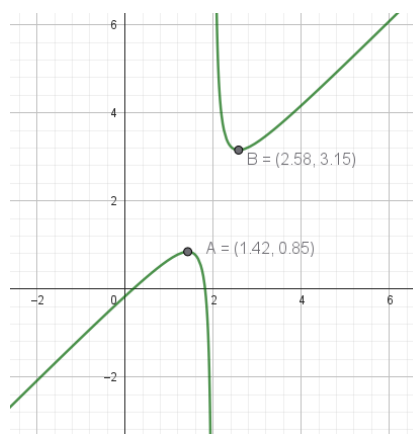
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$

$$y = \frac{1}{2x+6} \rightarrow 2x+6 = \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{1}{2y} - 3$$



b) $x + \frac{1}{3x-6}$

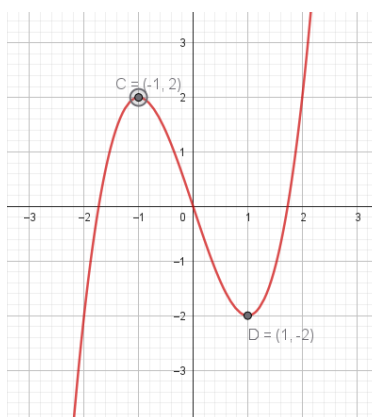
- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$
 $3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} \rightarrow x = 2$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
 $(-\infty, 0,85] \cup [3,15, \infty)$



c) $x^3 - 3x$

Es una función polinómica

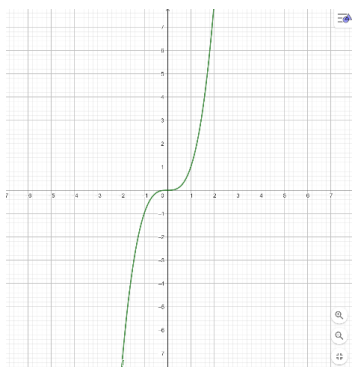
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}$



9. Dibuja las siguientes funciones e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

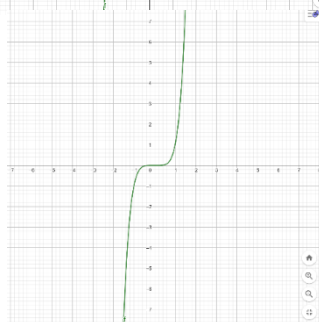
a) $y = x^3$

- Crecimiento: $\mathbb{R}$



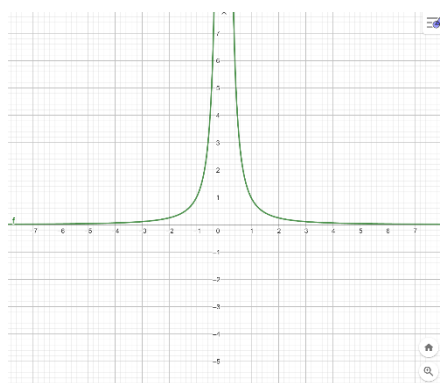
b) $y = x^5$

- Crecimiento: $\mathbb{R}$

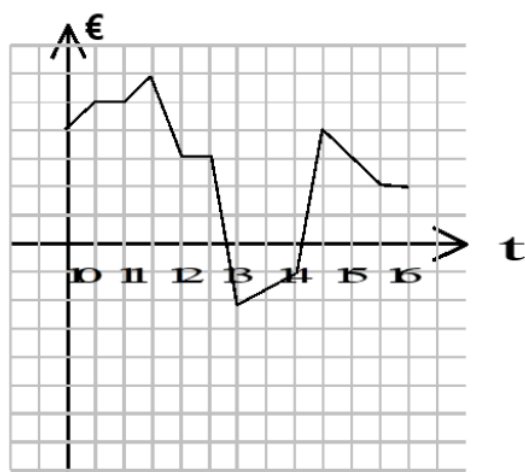


c) $y = \frac{1}{x^2}$

- Crecimiento: $(-\infty, 0)$
- Decrecimiento: $(0, \infty)$



10. La grafica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos

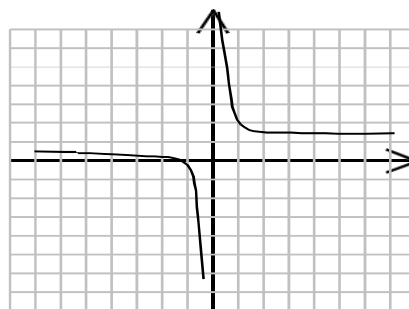


(Suponemos abre a las 10 horas hasta las 16 horas)

- Dominio: $[10, 16]$
- Recorrido: $[-2000, 6000]$
- Puntos de Corte: $t \approx 12,5 \rightarrow f(12,5) = 0$; $t = 14,1 \rightarrow f(14,1) = 0$
- Simetría: No simétrica ni par ($f(t) = f(-t)$) ni impar ($f(t) = -f(-t)$).
La gráfica es irregular y no simétrica.
- Periodicidad: La gráfica no presenta ningún patrón que se repita con regularidad.
- Crecimiento: $(10, 11,5) \cup (13, 14,5)$
- Decrecimiento: $(11,5, 13) \cup (14,5, 16)$
- Continuidad: Continua en todo su dominio
- Máximos: $(11,5, 6000)$ y $(14,5, 5000)$
- Mínimos: $(13, -2000)$

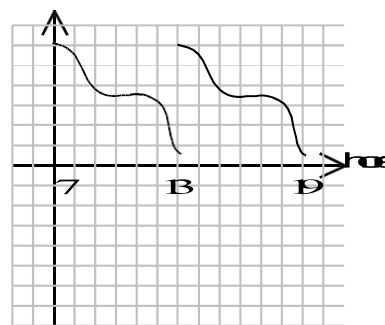
11. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Recorrido: $\mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de Corte:
 - Eje Y: no hay corte, porque no está definida en $x = 0$
 - Eje X: $(-1, 0)$
- Simetría: $f(-x) = -f(x)$ Es simétrica respecto al origen
- Periodicidad: No es una función periódica
- Decrecimiento: En todo su dominio
- Continuidad: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Máximos y mínimos: No tiene máximos ni mínimos relativos o absolutos.

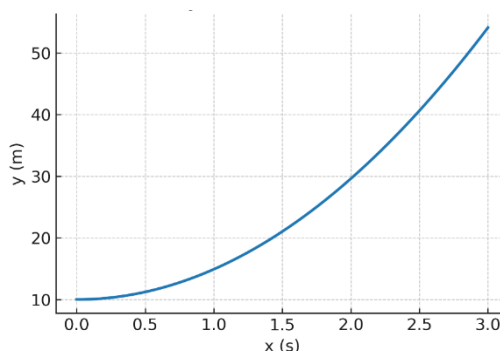


12. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.

- Dominio: $[7, 19]$
- Recorrido: $[0, 6]$
- Puntos de corte: $(7, 6)$
- Simetría: No presenta
- Periodicidad: Periódica de periodo $T = 6$
- Decrecimiento: siempre
- Continuidad: Discontinua en $(7, 6)$, $(13, 0)$, $(19, 0)$
- Máximos: $(7, 6)$
- Mínimos: $(13, 0)$, $(19, 0)$



13. Representa la función $y = 10 + \frac{1}{2} \cdot 9,8x^2$ que poníamos como ejemplo e interpreta su sentido físico



Si interpretamos x como el tiempo t (s) y y como la posición (m) en una línea vertical, la función describe un MRUA (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado) con:

- Posición inicial: $y(0) = 10 \text{ m}$
- Velocidad inicial: $v(0) = 0$

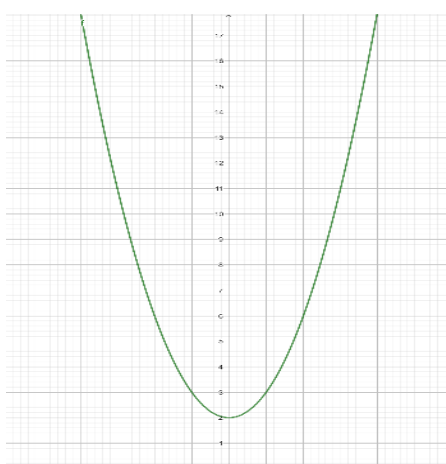
- Aceleración constante: $\frac{d^2y}{dx^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$

El signo positivo de la aceleración indica que el eje y está tomado en la misma dirección que la aceleración. En contexto de caída libre, esto suele significar que hemos elegido el sentido “hacia abajo” como positivo. Con esa convención, el modelo sería el de un objeto que parte en reposo a una altura de 10 m.

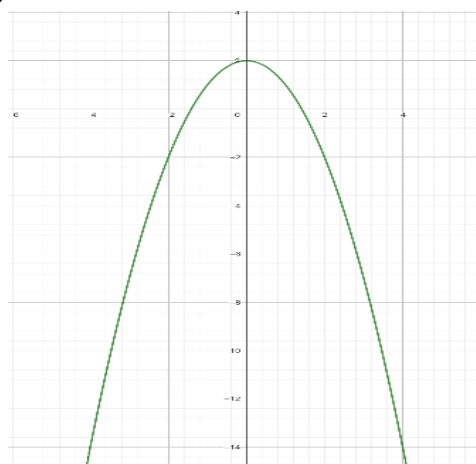
- Velocidad: $\frac{dy}{dx} = 9,8x \text{ m/s}$
- Aceleración: $\frac{d^2y}{dx^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$

14. Representa gráficamente las siguientes funciones:

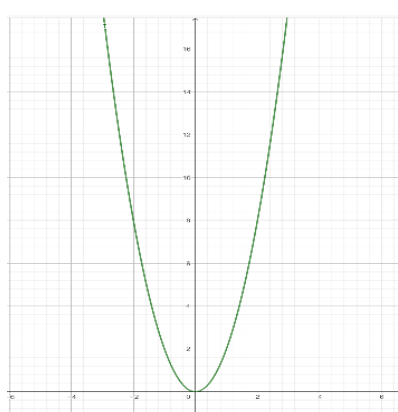
a) $y = x^2 + 2$



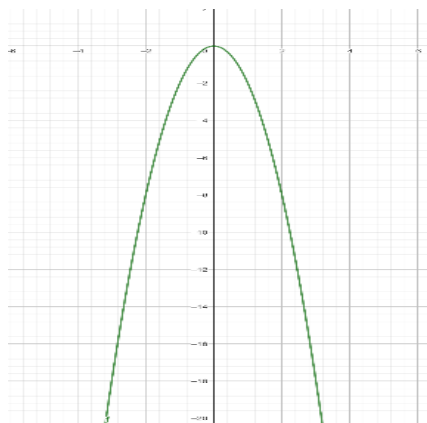
b) $y = 2 - x^2$



c) $y = 2x^2$



d) $y = -2x^2$



15. Representa gráficamente las siguientes funciones:

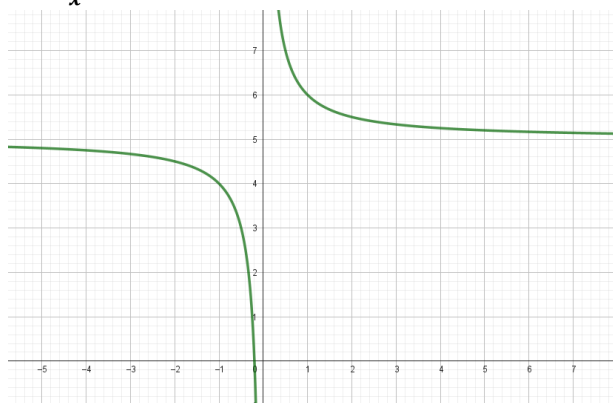
a) $y = \frac{1}{x} + 5$

b) $y = \frac{5}{x}$

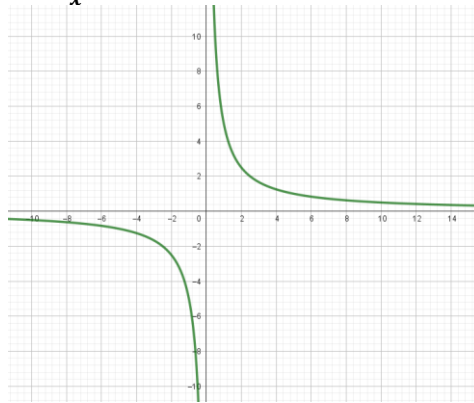
c) $y = \frac{1}{x} - 2$

d) $y = \frac{2}{x} + 3$

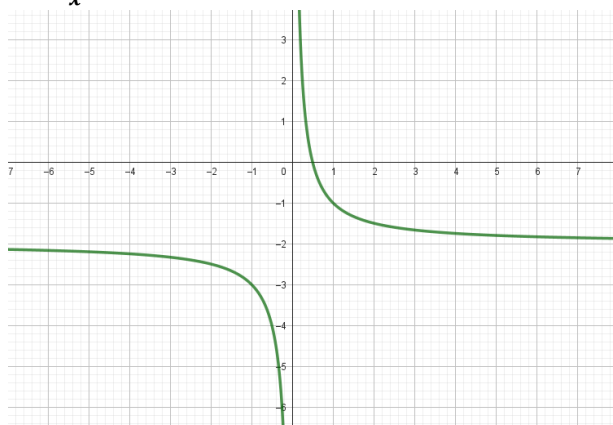
$$y = \frac{1}{x} + 5$$



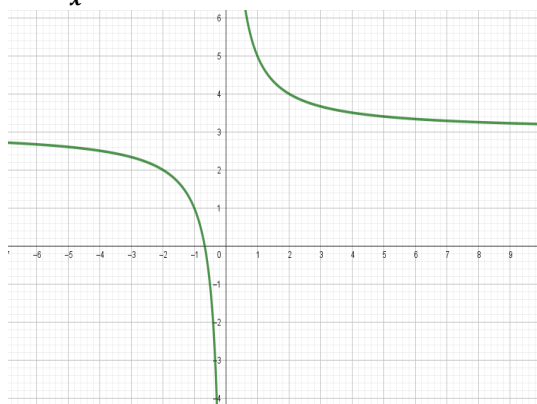
$$y = \frac{5}{x}$$



$$y = \frac{1}{x} - 2$$

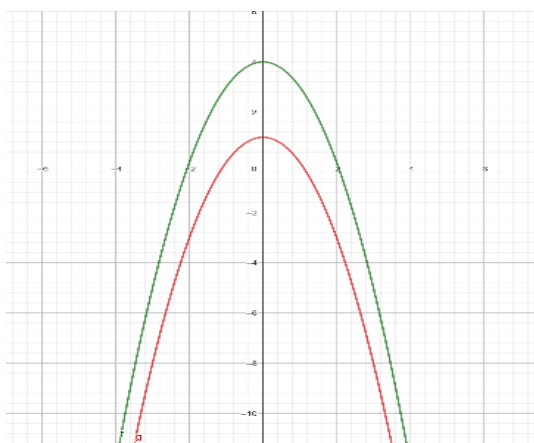


$$y = \frac{2}{x} + 3$$

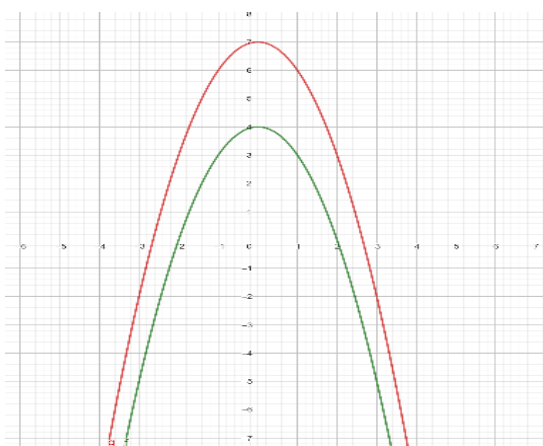


16. Representa la función $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de las funciones:

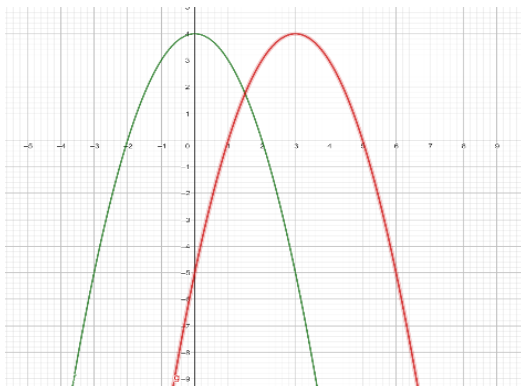
a) $y = f(x) - 3$



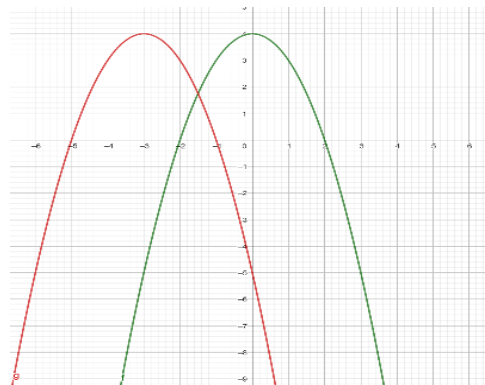
b) $y = f(x) + 3$



c) $y = f(x - 3)$

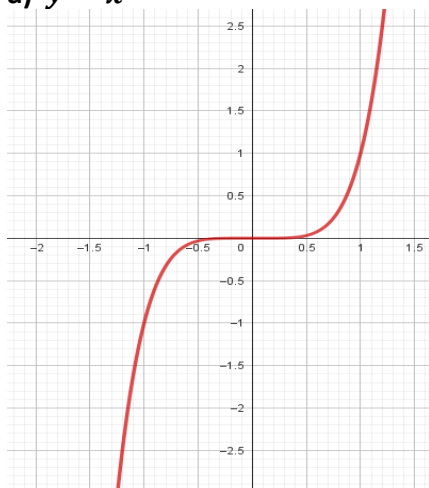


d) $y = f(x + 3)$

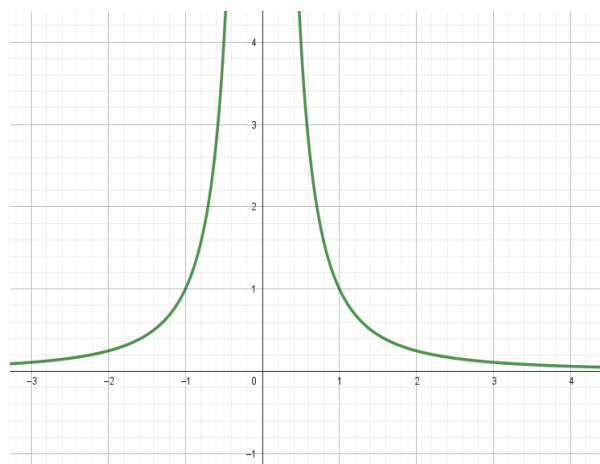


17. Utiliza GeoGebra para dibujar las siguientes funciones y comprueba tus anteriores representaciones:

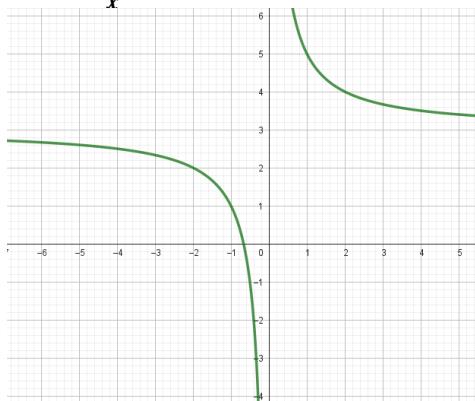
a) $y = x^5$



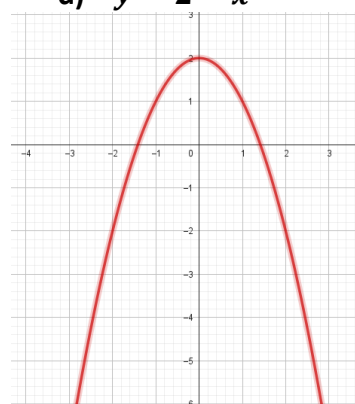
b) $y = \frac{1}{x^2}$



c) $y = \frac{2}{x} + 3$



d) $y = 2 - x^2$



18. Dada la función $f(x) = (x - 1)^3$ calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

$$f(0) = (0 - 1)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$f(1) = (1 - 1)^3 = (0)^3 = 0$$

$$T.V.M[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{-1 + 3} = \frac{0 - (-1)}{1} = 1 > 0$$

Esto significa que la función es creciente en el intervalo $[0, 1]$

19. Dada la función $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo $[-3, -1]$ ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

$$f(-3) = \frac{3}{-3} = -1$$

$$f(-1) = -\frac{3}{1} = -3$$

$$T.V.M[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 + 3} = \frac{-3 + 1}{2} = -1 < 0$$

Esto significa que la función es decreciente en $[-3, -1]$

20. Calcula la TVM de esta función $f(x)$ en los siguientes intervalos:



a) $[-1, 0]$ $T.V.M[-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{1} = \frac{1 - (-1)}{1} = 2$

b) $[1, 2]$ $T.V.M[1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2$

21. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 1}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$T.V.M[0, 2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{1.5-(-0.5)}{2} = \frac{2}{2} = 1 > 0$$

Entonces, la función es creciente en $[0,2]$

22. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo

$$f(1) = 2(1)^2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) = 8 - 6 = 2$$

$$T.V.M[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{2-(-1)}{1} = 3 > 0$$

La función es creciente en $[1,2]$

23. Dada la función $f(x) = (x + 1)^3$ calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$.

$$f(1) = (1 + 1)^3 = 8$$

$$f(0) = (0 + 1)^3 = 1$$

$$T.V.M[0, 1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{8-1}{1} = 7$$

24. La función $f(x) = 1000 \cdot (1,03)^x$ representa el resultado de ingresar 1 000 € en el banco ($x = 0$ es el estado inicial y, naturalmente, vale 1 000 €). Calcula su tasa de crecimiento entre 0 y 1, entre 1 y 2 y entre 2 y 3. ¿Qué relación hay entre ellas? ¿Puedes dar una explicación de por qué?

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- Intervalo $[0,1]$

$$f(0) = 1000 \cdot (1,03)^0 = 1000$$

$$f(1) = 1000 \cdot (1,03)^1 = 1030$$

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1030-1000}{1} = 30\text{€/año}$$

- Intervalo $[1,2]$

$$f(1) = 1000 \cdot (1,03)^1 = 1030$$

$$f(2) = 1000 \cdot (1,03)^2 = 1060,9$$

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{1060,9-1030}{1} = 30,9\text{ €/año}$$

- Intervalo $[2,3]$

$$f(2) = 1000 \cdot (1,03)^2 = 1060,9$$

$$f(3) = 1000 \cdot (1,03)^3 = 1092,73$$

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{1092,73-1060,9}{1} = 31,83\text{ €/año}$$

La relación es cada valor se obtiene del anterior multiplicado por 1,03 y esto es porque la tasa de crecimiento se calcula sobre el capital que había anteriormente y no sobre el inicial.

25. La siguiente tabla representa la población mundial (estimada) en millones de personas. Calcula la tasa de crecimiento para cada intervalo de 5 años. ¿Qué observas?

AÑO	POBLACIÓN
1970	3692
1975	4068
1980	4435
1985	4831
1990	5264
1995	5674
2000	6071
2005	6456
2010	6916

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{\text{Población final} - \text{Población inicial}}{\text{Años transcurridos}}$$

- 1) Intervalo 1970-1975

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{4068 - 3692}{5} = \frac{376}{5} = 75,2 \text{ millones por año}$$

- 2) Intervalo 1975-1980

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{4435 - 4068}{5} = \frac{367}{5} = 73,4 \text{ millones por año}$$

- 3) Intervalo 1980-1985

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{4831 - 4435}{5} = \frac{396}{5} = 79,2 \text{ millones por año}$$

- 4) Intervalo 1985-1990

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{5264 - 4831}{5} = \frac{433}{5} = 86,6 \text{ millones por año}$$

- 5) Intervalo 1990-1995

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{5674 - 5264}{5} = \frac{410}{5} = 82 \text{ millones por año}$$

- 6) Intervalo 1995-2000

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{6071 - 5674}{5} = \frac{397}{5} = 79,4 \text{ millones por año}$$

- 7) Intervalo 2000-2005

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{6456 - 6071}{5} = \frac{385}{5} = 77 \text{ millones por año}$$

- 8) Intervalo 2005-2010

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{6916 - 6456}{5} = \frac{460}{5} = 92 \text{ millones por año}$$

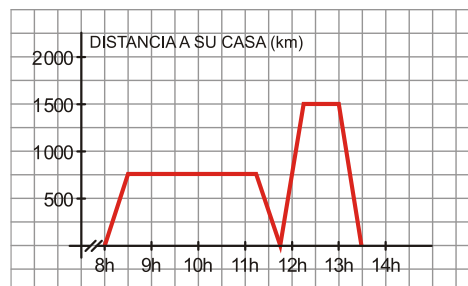
26. ¿Podrías dar un ejemplo de una función cuya tasa de crecimiento sea constantemente 2?

Quando hablamos de **tasa de crecimiento constante**, nos referimos a que la **pendiente de la gráfica** de la función no cambia. Esto ocurre con las funciones afines de pendiente positiva, cuya gráfica es una línea recta, por ejemplo $f(x) = 2x + 9$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación. Las distancias vienen dadas en metros, (no en km).

- ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?
- ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?
- ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?
- ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?



a. ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?

- Las clases comienzan cuando Pablo llega al instituto por primera vez. Según la gráfica, esto ocurre a las 8:30.
- El recreo empieza cuando Pablo regresa a su casa desde el instituto. Esto ocurre a las 11:15.

b. ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?

- La distancia al instituto es la distancia máxima alcanzada antes de regresar a casa por primera vez. Según la gráfica, esto es 0,75 km.
- Pablo sale a las 8:00 y llega al instituto a las 8:30, por lo que tarda media hora.
- Velocidad: $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5 \text{ km/h}$

c. ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?

- El consultorio médico es la distancia máxima alcanzada después de regresar a casa durante el recreo. Según la gráfica, esto es 1,5 km.
- Pablo sale de su casa a las 11:45 y llega al consultorio a las 12:15, por lo que tarda media hora.
- Velocidad: $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{1,5}{0,5} = 3,0 \text{ km/h}$

d. ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?

- Pablo llega al instituto a las 8:30 y se va a las 11:45, por lo que está en clase durante 3 horas

y 15 minutos.

- Pablo llega al consultorio a las 12:15 y está hasta las 13:00 por lo que está en el consultorio

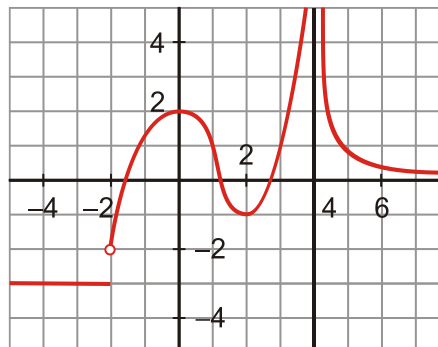
45 minutos.

2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:

a) Indica cuál es su dominio de definición.

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2)$?



a) Indica cuál es su dominio de definición.

- $Dom: (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

- En $x = -2$ y en $x = 4$ es discontinua

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2)$?

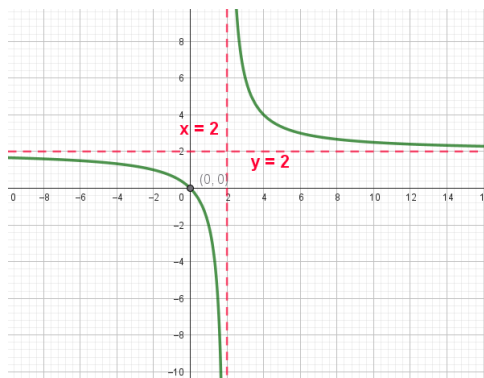
- Crecimiento: $(-2, 0) \cup (2, 4)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (4, \infty)$
- En el intervalo $(-\infty, -2)$, la función es constante.

3. Dibuja las gráficas de estas hipérbolas y determina sus dominios, calcula sus asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

a) $y = \frac{2x}{x-2}$

b. $y = \frac{2x-3}{x-2}$

c. $y = \frac{4x}{2x+1}$



$$y = \frac{2x}{x-2}$$

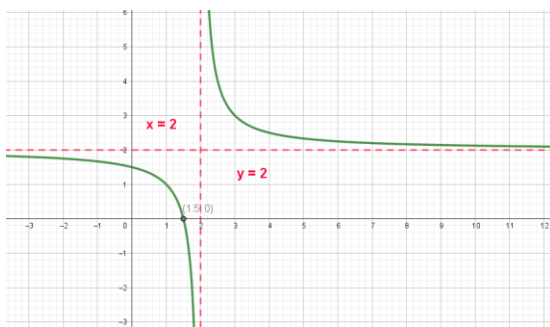
- Dominio: $Dom: \mathbb{R} - \{2\}$
 $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

- Asíntotas:

AV: $x = 2$

AH: $y = 2$

- Cortes con el eje x: $(0,0)$
- Cortes con el eje y: $(0, 0)$

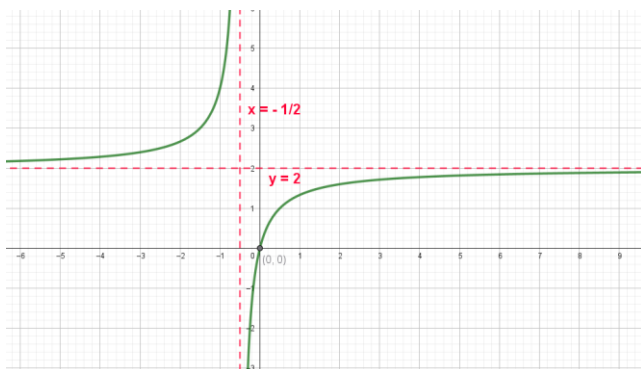


$$y = \frac{2x-3}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

- Dominio: $Dom: \mathbb{R} - \{2\}$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

- Asíntotas:
AV: $x = 2$
AH: $y = 2$
- Cortes con el eje x: (1,5, 0)
- Cortes con el eje y: (0, 0)



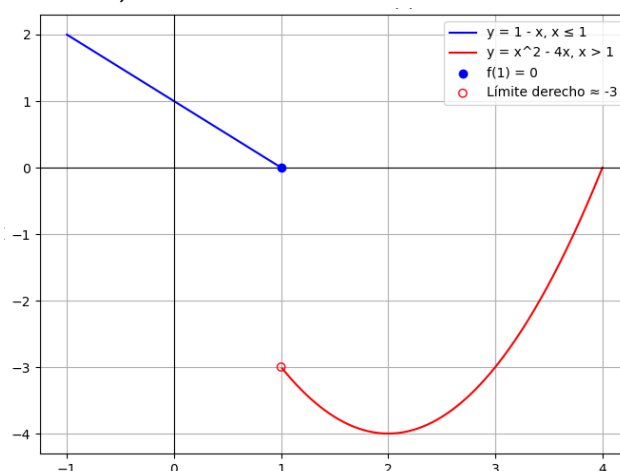
$$y = \frac{4x}{2x+1}$$

- Dominio: $Dom: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

- Asíntotas:
AV: $x = -\frac{1}{2}$
AH: $y = 2$
- Cortes con el eje x: (0,0)
- Cortes con el eje y: (0, 0)

4. Dibuja la gráfica $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{Si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x, & \text{Si } 1 < x \end{cases}$ y explica si es continua en $x = 1$



- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x) = 1 - 4 = -3$
- $f(1) = 1 - 1 = 0$

Como los límites laterales son distintos, la función NO es continua en $x = 1$.

5. Tres kilos de peras nos han costado 4,5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10,5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, “y”, en función de los kilos que compremos, “x”. Representála gráficamente.

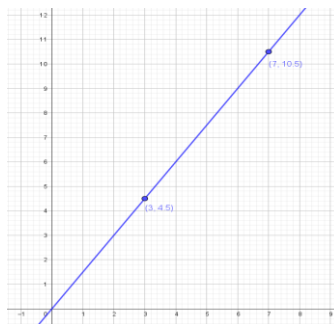
Puntos (3, 4,5) y (7, 10,5)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$y = mx + b \rightarrow y = 1,5x + b$$

$$4,5 = 1,5(3) + b \rightarrow 4,5 = 4,5 + b \rightarrow b = 0$$

Cada kilogramo cuesta 1,5€



6. Describe las siguientes funciones cuadráticas y haz un boceto de su gráfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$

b. $y = x^2 + 3x - 4$

c. $y = 8 - 2x - x^2$

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$

$$4x^2 + 8x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8}$$

$$\rightarrow x_1 = 0,5 \quad x_2 = -2,5$$

Puntos de Corte con el eje X: (0,5, 0) y (-2,5, 0)

$$y(0) = 4(0)^2 + 8 \cdot 0 - 5 = -5$$

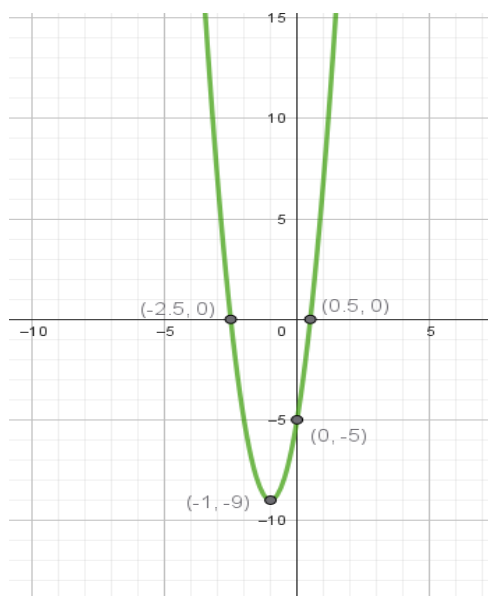
Puntos de Corte con el eje Y: (0, -5)

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 4} = -1$$

$$Y_v = 4(-1)^2 + 8(-1) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Vértice: (-1, -9)

Apertura: $a = 4 > 0$, la parábola abre hacia arriba.



b. $y = x^2 + 3x - 4$

○ Puntos de Corte con el eje X:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -4$$

Cortes con el eje X: (-4, 0) y (1, 0)

○ Puntos de Corte con el eje Y: (0, -4)

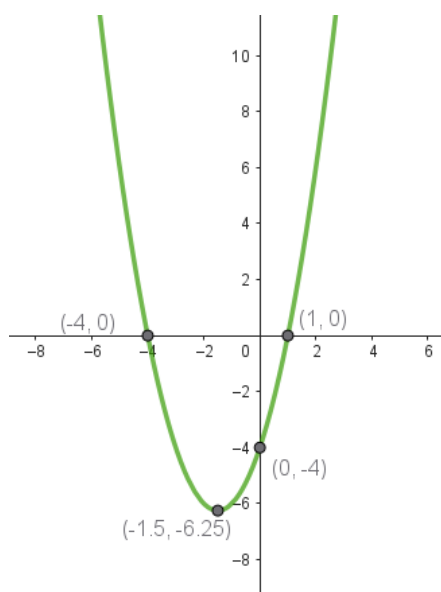
$$y(0) = (0)^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

○ Vértice: (-1,5, -6,25)

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -1,5$$

$$Y_v = (-1,5)^2 + 3(-1,5) - 4 = 2,25 - 4,5 - 4 = -6,25$$

○Apertura: $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba.



c. $y = 8 - 2x - x^2$

- Puntos de Corte con el eje X:

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -4$$

Cortes con el eje X: $(-4, 0)$ y $(2, 0)$

- Puntos de Corte con el eje Y: $(0, 8)$

$$y(0) = -(0)^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8$$

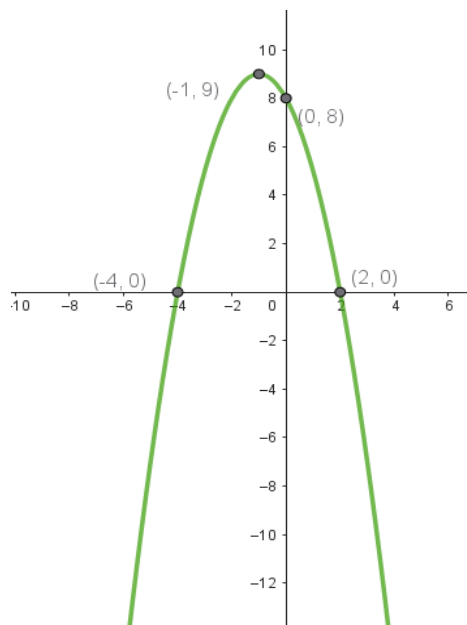
- Vertice: $(1, 5)$

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

$$Y_v = (-1)^2 - 2(1) + 8 = -1 - 2 + 8 = 5$$

- Apertura

Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.



7. Calcula los puntos de corte con los ejes y el vértice de las siguientes parábolas y utiliza estos datos para representarlas gráficamente.

a. $y = x^2 + 5x + 6$

b. $y = -x^2 + 4x + 5$

a. $y = x^2 + 5x + 6$

- Puntos de Corte con el eje X:

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = -3$$

Cortes con el eje X: $(-2, 0)$ y $(-3, 0)$

- Puntos de Corte con el eje Y: $(0, 6)$

$$y = 0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6$$

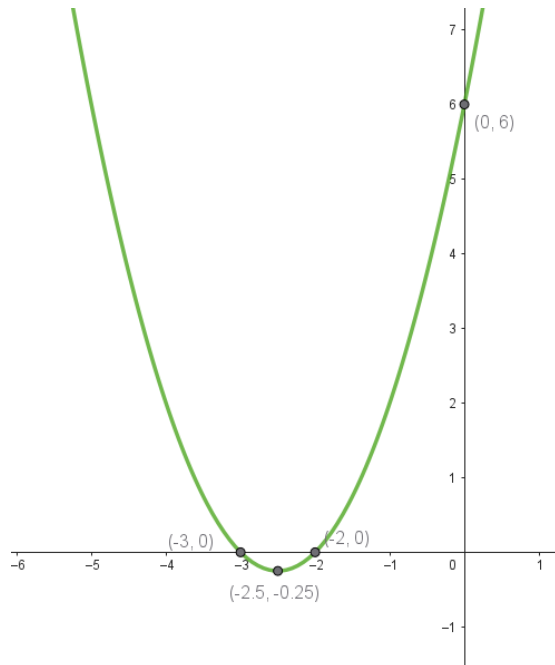
- Vértice: $(-2,5, -0,25)$

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot 1} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

$$Y_v = (-2,5)^2 + 5(-2,5) + 6 = 6,25 - 12,5 + 6 = -0,25$$

- Apertura

Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba.



b. $y = -x^2 + 4x + 5$

○ Puntos de Corte con el eje X:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

Cortes con el eje X: (5, 0) y (-1, 0)

○ Puntos de Corte con el eje Y: (0,5)

$$y(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5$$

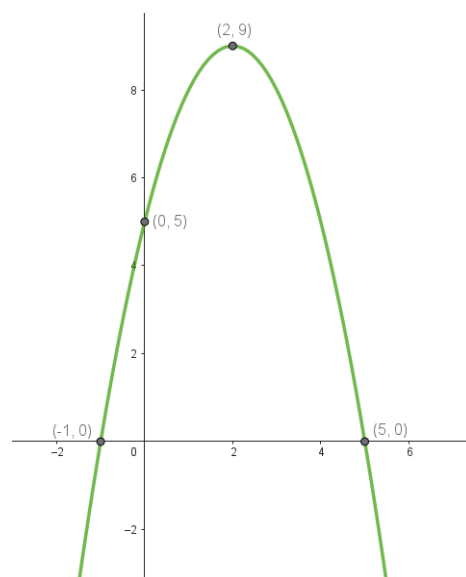
○ Vértice: (2, 9)

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$Y_v = -(2)^2 + 4(2) + 5 = -4 + 8 + 5 = 9$$

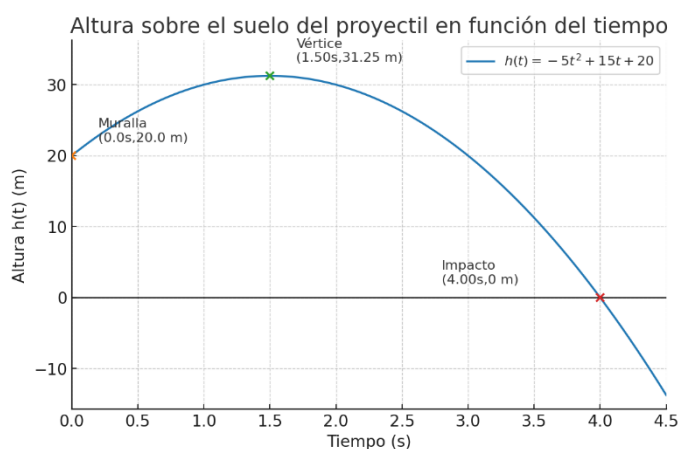
○ Apertura

Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.



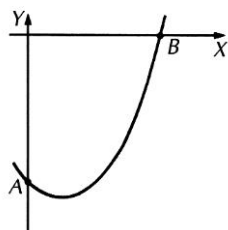
8. La altura sobre el suelo de un proyectil lanzado desde lo alto de una muralla viene dada, en función del tiempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, donde t se expresa en segundos, y h , en metros. Dibuja la gráfica de esta función y calcula:

- La altura de la muralla.
- La altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla.
- El tiempo que tarda en impactar contra el suelo.



- La altura de la muralla.
La altura de la muralla sería de 20 metros de altura
- La altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla.
La altura máxima alcanzada por el proyectil sería de 31,2 metros de altura
- El tiempo que tarda en impactar contra el suelo.
El proyectil tardaría en impactar contra el suelo en el instante de 4 segundos

9. La gráfica muestra el dibujo aproximado de la curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. Las coordenadas de los puntos A y B.

b. La ecuación de una recta que pase por los puntos A y B.

a. Las coordenadas de los puntos A y B.

$$x^2 - 2x - 8 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -2; \quad B(4, 0)$$

$$y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8; \quad A(0, -8)$$

b. La ecuación de una recta que pase por los puntos A y B.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-8)}{4 - 0} = 2$$

La ecuación de la recta es: $y = 2x - 8$

10. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{3}{x}$

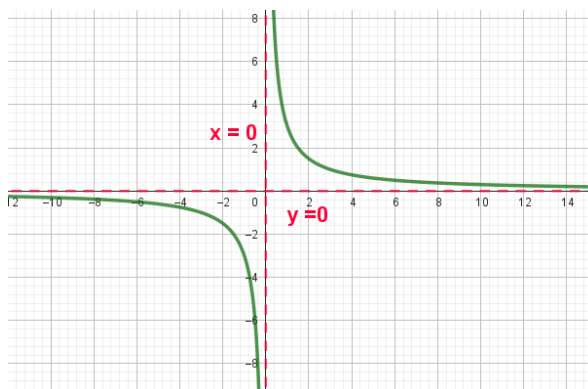
b) $y = \frac{4}{x-5}$

c) $y = \sqrt{x+4}$

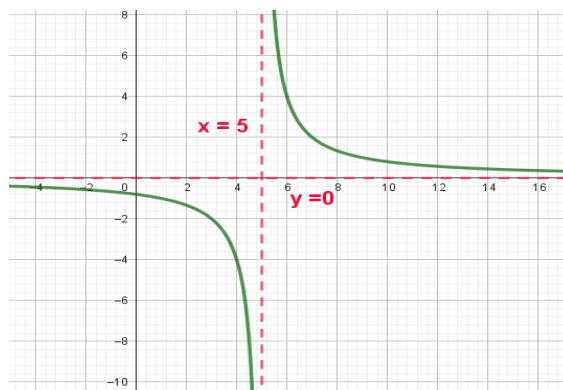
d) $y = \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 10 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

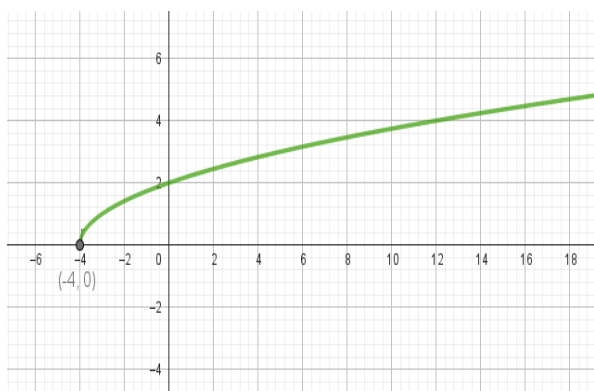
$y = \frac{3}{x}$



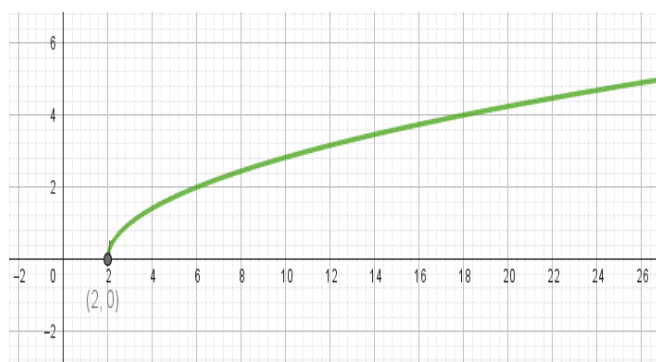
$y = \frac{4}{x-5}$



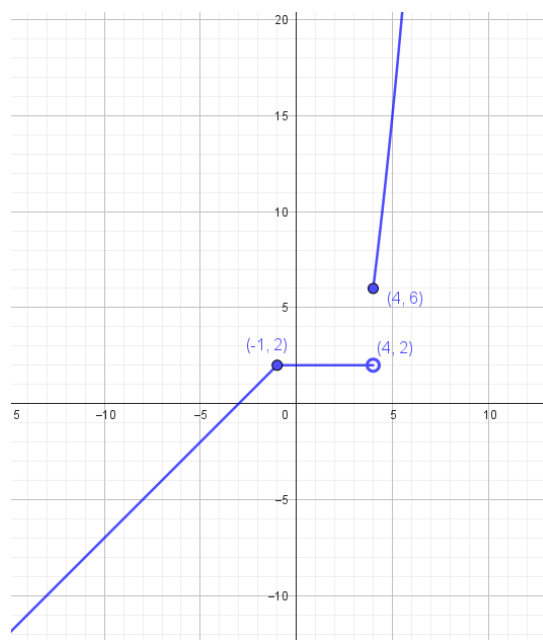
$$y = \sqrt{x+4}$$



$$y = \sqrt{x-2}$$



$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ x^2 - 10 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$



11. El coste diario de fabricación, en euros, de x artículos se expresa con la igualdad, $C(x) = 40x + 250$ y el ingreso diario de su venta, mediante $V(x) = -2x^2 + 100x$. ¿Qué cantidad de artículos se deben fabricar al día para que su venta reporte un beneficio máximo? Nota: el beneficio es la diferencia entre el ingreso y el coste.

$$B(x) = V(x) - C(x) = (-2x^2 + 100x) - (40x + 250) = -2x^2 + 60x + 250$$

La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, por lo que el vértice será el beneficio máximo.

$$\text{La abscisa es: } \frac{-60}{2 \cdot (-2)} = 15$$

Debe fabricar 15 artículos al día para que el beneficio sea máximo.

12. La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

$$b + h = 4 \rightarrow h = 4 - b$$

$$\text{área} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b(4 - b) = 2b - \frac{1}{2}b^2 = -\frac{1}{2}b^2 + 2b$$

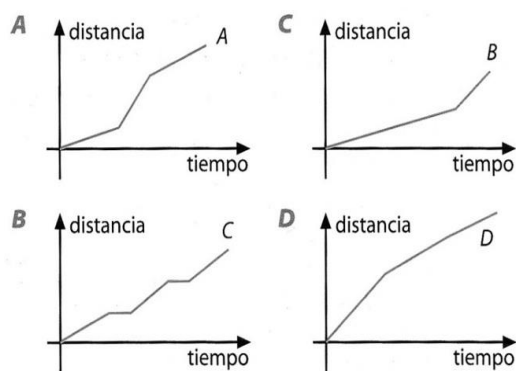
La gráfica es una parábola abierta hacia abajo, por lo que el vértice será el área máxima.

$$x = b = \frac{-B}{2A} = \frac{-2}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{la base debe medir 2 cm y } h = 4 - b = 4 - 2 = 2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ cm}^2$$

La base y la altura deben medir 2 cm cada una para que el área sea máxima, y esa área Máxima es 2 cm^2

13. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario al instituto:



a) Emilio es el que vive más lejos del Instituto.

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca del Instituto.

a) Emilio es el que vive más lejos del Instituto.

La gráfica A pertenecería a Emilio

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

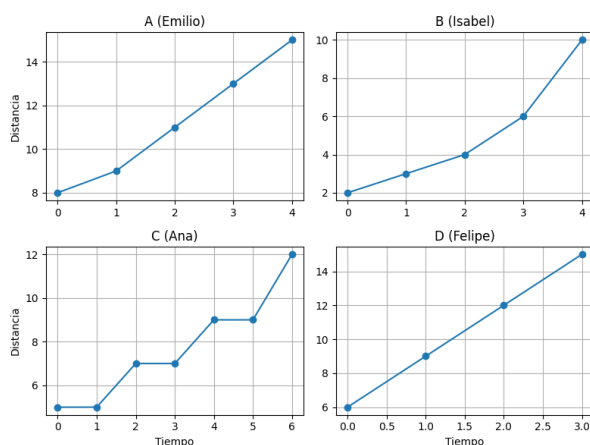
La gráfica C pertenece a Ana

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

La gráfica D pertenece a Felipe

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca del Instituto.

La gráfica B pertenecería a Isabel



14. Un rectángulo tiene un perímetro de 14 cm. Suponiendo que la base de este tiene una longitud de x cm,

a) Probar que el área del mismo A está dada por la función $A(x) = x(7 - x)$.

b) Dibuja la gráfica correspondiente a esta función, tomando para ello valores de x de 0 a 7. Utilizando la gráfica, calcula los siguientes apartados.

c) El área del rectángulo cuando $x = 2,25 \text{ cm}$.

d) Las dimensiones del rectángulo cuando su área es 9 cm^2 .

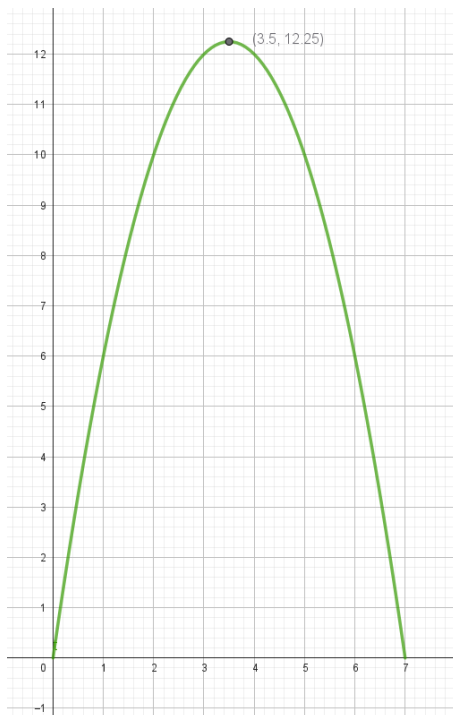
e) El área máxima del rectángulo.

f) Las dimensiones del rectángulo correspondientes a esa área máxima.

a) $P = 2(\text{base} + \text{altura}) = 14 \rightarrow \text{base} + \text{altura} = 7 \rightarrow h = 7 - x$

$$A(x) = x \cdot h = x(7 - x)$$

b)



c) $A(2,25) = 2,25 \cdot (7 - 2,25) = 2,25 \cdot 4,75 = 10,6875 \text{ cm}^2$

d) $A(x) = x(7 - x) = 9 \rightarrow -x^2 + 7x - 9 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 9 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \rightarrow x_1 = \frac{7 - 3,606}{2} \approx 1,697; x_2 = \frac{7 + 3,606}{2} \approx 5,303$$

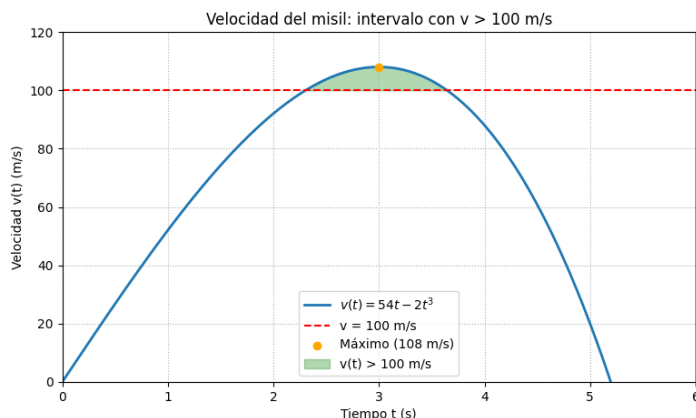
e) $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2(-1)} = \frac{7}{2} = 3,5$

$$A(3,5) = 3,5 \cdot (7 - 3,5) = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25 \text{ cm}^2$$

f) $h = 7 - x = 7 - 3,5 = 3,5 \text{ cm}$

15. La velocidad v en m/s de un misil t segundos después de su lanzamiento viene dada por la ecuación $v = 54t - 2t^3$. Utilizando la gráfica de esta función, calcula:

- La máxima velocidad que alcanza el misil.
- El tiempo que necesita para acelerar hasta conseguir una velocidad de 52 m/s.
- El intervalo (aproximado, resuelve gráficamente) de tiempo en el cual el misil vuela a más de 100 m/s.



a. La velocidad máxima la alcanza a los 3 s.

$$b. 54t - 2t^3 = 52 \rightarrow 2t^3 - 54t + 52 = 0$$

$$\rightarrow t^3 - 27t + 26 = 0$$

$$t = 1 ; t = 4,62 ; t = -5,62 \text{ no válida}$$

El misil alcanza 52 m/s en dos instantes:

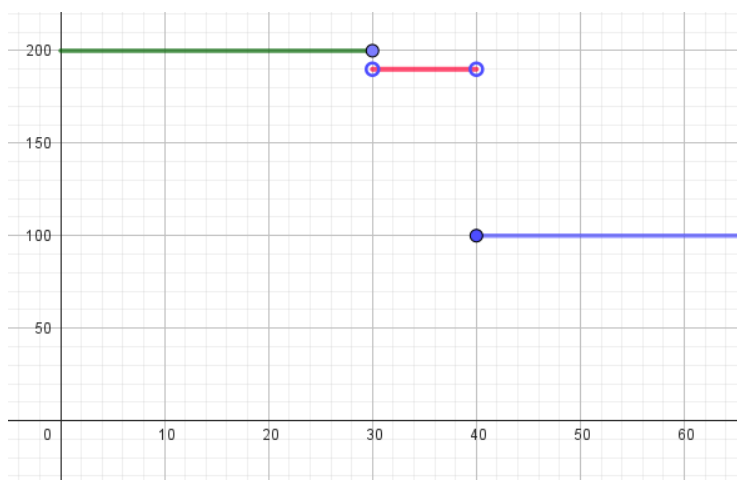
$t=1$ s (en la subida) y $t \approx 4,62$ s (en la bajada).

Vuela a más de 100 m/s en el intervalo aproximado (2,3 , 3,5)

16. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5 % por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

$$200 - 0,05 \cdot 200 = 190$$

$$f(x) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 190 & \text{si } 30 < x < 40 \\ 100 & \text{si } x \geq 40 \end{cases}$$



17. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$

c. $y = \sqrt{3x+6}$

e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$

d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$

f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$

$$4x - 1 = 0 \rightarrow 4x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow$$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1 \rightarrow$

Dominio: $\mathbb{R}$

c. $y = \sqrt{3x + 6}$

$$3x + 6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq -6 \rightarrow x \geq -\frac{6}{3} \rightarrow x \geq -2 \rightarrow \text{Dominio: } [-2, \infty)$$

d. $y = 2 - \frac{3}{x^2 - 3x}$

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x - 3) \rightarrow x = 0 ; x = 3 \rightarrow \text{Dominio: } \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

e. $y = \frac{4x^2 - 3x}{1 + 5x - 6x^2}$

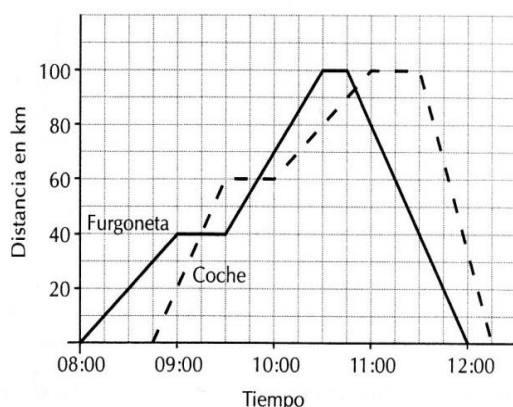
$$1 + 5x - 6x^2 = -(6x^2 - 5x - 1) = -(6x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{6}, x = 1$$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{6}, 1\right\}$

f. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

Dominio: $\mathbb{R}$

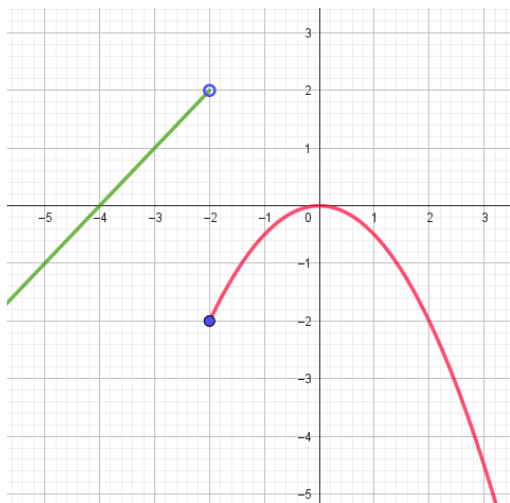
18. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo de Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.



- ¿Cuánto tiempo se detuvo la furgoneta durante el trayecto?
- ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
- ¿Qué velocidad llevaba la furgoneta entre las 9:30 y las 10:00?
- ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
- ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

- Observando la grafica obtenemos que la furgoneta se retiene durante 30 minutos (desde los 9:00 a 9:30) y 15 minutos (desde las 10:30 a las 10:45)
- A las 9:15 (intersección de ambas gráficas en $d = 40$ km).
- La furgoneta recorre: $70 - 40 = 30$ km en 30 min, luego la velocidad es: $30/0,5 = 60$ km/h.
- La máxima velocidad alcanzada por el coche se corresponde con la mayor inclinación de la recta que es de 11:30 a 12:15, recorre 100 km en 45 min luego la velocidad en ese tramo es de: $100/0,75 = 133$ km/h aproximadamente.
- Recorre 200 km (ida y vuelta) en 3 horas y 30 min (8:45 a 12:15) luego la velocidad media fue $V = 200/3,5 = 85,7$ km/h

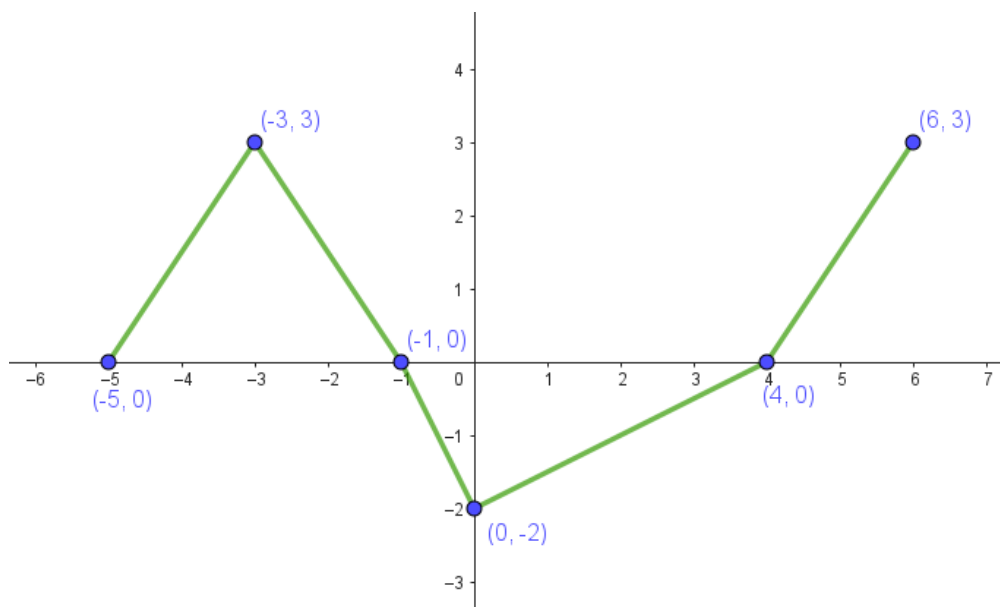
19. Representa gráficamente la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{Si } x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{Si } -2 \leq x \end{cases}$ Una vez representada estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.



- Creciente: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decreciente: $(0, \infty)$
- Máximo relativo: $(0, 0)$
- Discontinua en $x = -2$ de salto finito
 - $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 4) = -2 + 4 = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}(-2)^2 = -2$
 - $f(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^2 = -2$

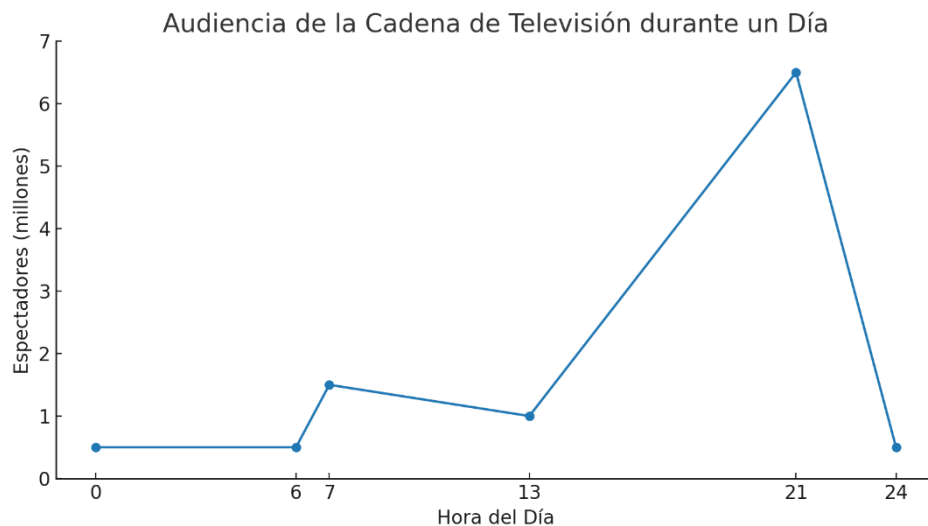
20. Representa gráficamente una función, f , que cumpla las siguientes condiciones:

- Dom $(f) = [-5, 6]$
- Crece en los intervalos $(-5, -3)$ y $(0, 6)$; decrece en el intervalo $(-3, 0)$.
- Es continua en su dominio.
- Corta al eje X en los puntos $(-5, 0)$, $(-1, 0)$ y $(4, 0)$.
- Tiene un mínimo en $(0, -2)$ y máximos en $(-3, 3)$ y $(6, 3)$.



21. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

- a. A las 0 horas había, aproximadamente, 0.5 millones de espectadores.
- b. Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.
- c. A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1.5 millones de espectadores.
- d. La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
- e. Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6.5 millones de espectadores.
- f. A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0.5 millones de espectadores.



AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas es una función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$

2. Estamos confeccionando una tabla de valores de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica qué punto (o puntos) no debería estar en la tabla:

a) (0, 1)

b) (1/2, 2)

c) (2, 1/5)

d) (1, 0)

Para que la función no este definida, se tendría que cumplir $x^2 + 1 = 0$, pero esta solución nunca es real puesto que $x^2 \geq 0$ por lo que no existe ningún punto que podamos excluir de la tabla la cual queremos hacer

3. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ es:

a) La recta real

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$x^2 + 1 < 0 \rightarrow x^2 < -1 \text{ No existe numeros reales}$$

a) La recta real

4. Indica que tipo de discontinuidad o continuidad presenta la función

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2, 1] \\ x, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases} \text{ en el punto } x = 1$$

a) Es continua

b) Tiene una discontinuidad evitable

c) Tiene un salto finito de tamaño 2

d) Tiene un salto infinito

1) $f(1) = -1$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -x = -1$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

Como los limites laterales no son iguales, hay una discontinuidad de salto finito

b) Tiene una discontinuidad evitable

5. Señala la función que tiene simetría par:

a) $y = x$

b) $y = x^2 + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

Tiene que ser $f(x) = f(-x)$

b) $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$

b) $y = x^2 + 3$

6. Señala la función que tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 0$:

a) $y = x$

b) $y = x^2 + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

Para que $y = 0$ sea asíntota horizontal el límite de la función en el infinito ha de ser 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0, \text{ las otras funciones no tienen límite} = 0$$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

7. La tasa de variación de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

a) $TV[-1, 2] = 1$

b) $TV[-1, 2] = 2$

c) $TV[-1, 2] = 3$

d) $TV[-1, 2] = 0$

$$\text{Tasa de variación: } f(b) - f(a) = f(2) - f(-1) = 2 - [-(-1)] = 1$$

a) $TV[-1, 2] = 1$

8. La tasa de variación media de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

a) $TV[-1, 2] = 1/3$

b) $TV[-1, 2] = 2/3$

c) $TV[-1, 2] = 1$

d) $TV[-1, 2] = 3$

$$\text{Tasa de variación media} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

a) $TV[-1, 2] = 1/3$

9. La tasa de crecimiento de la función $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-2,1] \\ x, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$ entre -1 y 2 es igual a:

a) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 3$

b) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 2$

c) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 0$

d) $T_{\text{crec}}[-1, 2] = 1$

$$\text{Tasa de crecimiento} = \frac{f(b)-f(a)}{f(a)} = \frac{f(2)-f(-1)}{f(-1)} = \frac{2-1}{1} = 1$$

$$\text{d) } T_{\text{rec}} [-1, 2] = 1$$

10. La función $y = x^2 + 3$ tiene un mínimo absoluto en el punto:

a) (1, 4)

b) (0, 0)

c) (0, 3)

d) (3, 0)

Como la gráfica de la función es una parábola abierta hacia arriba, el mínimo es el vértice

$$\text{Mínimo absoluto} \rightarrow X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$Y_v = f(0) = 0^2 + 3 = 3$$

Todos los enunciados de las actividades propuestas, ejercicios y problemas y autoevaluación se corresponden con los propuestos en Apuntes de Matemáticas MAREA VERDE, Funciones y gráficas, 4ºB ESO.

https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/LOMLOE/4B/10_Funciones_4B.pdf