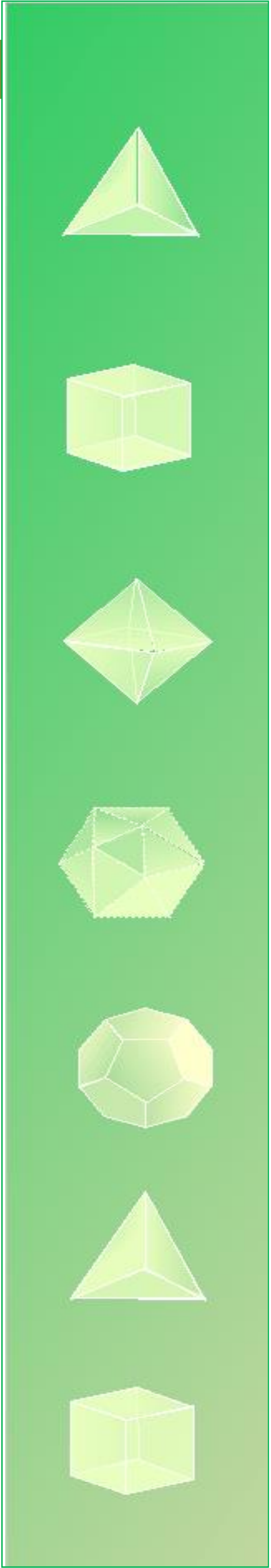


Actividades para el aula con calculadora

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: FESPM

Recopilados por: Luis Carlos Vidal del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Todos los ejercicios que se presentan a continuación han sido recopilados de la página de "RECURSOS DIDÁCTICOS" de la web de CASIO:

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/

Concretamente del apartado "Actividades para el aula":

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo
IES ATENEA Ciudad Real

ARITMÉTICA

www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

Realizados por: FESPM

Recopilados por: Luis Carlos Vidal del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Problema

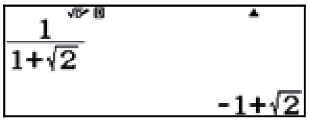
Suma finita

Determinar el número natural n tal que:

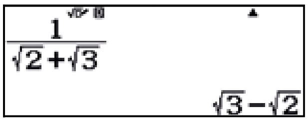
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=10$$

En primer lugar, se racionalizan los primeros sumandos (la calculadora lo hace de forma automática):

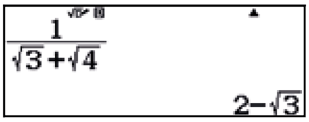
Sumando 1



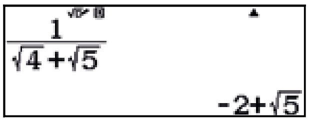
Sumando 2



Sumando 3



Sumando 4



Se pueden ahora anotar las sumas de los primeros n sumandos:

S_1	S_2	S_3	S_4
$-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{3}$	1	$-1+\sqrt{5}$

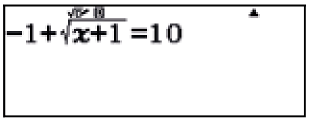
Se observa que $S_n=-1+\sqrt{n+1}$. Para determinar el número natural para el que la suma alcanza el valor 10, hay que resolver la siguiente ecuación:

$$10=-1+\sqrt{n+1}$$

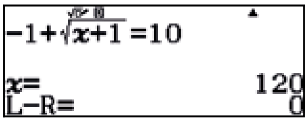
Esta ecuación puede resolverse con la función SOLVE, a la que se accede mediante la combinación de teclas [SHIFT] [CALC].

[(−)] [1] [+] [√■] [x] [+]

[1] [▶] [ALPHA] [CALC] [1] [0]



[SHIFT] [CALC] [=]



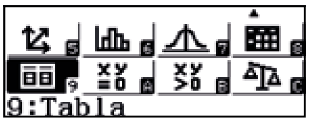
Luego, el número natural pedido es el 120.

Otra manera de resolver el problema consiste en utilizar el menú *Tabla*, para determinar la antiimagen de 10 según la función:

$$f(x)=\sum_{1}^{x}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

Para ello se procede de la siguiente manera:

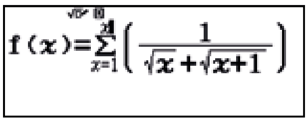
[MENU] [9]

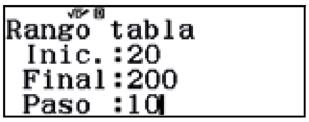


[SHIFT] [x] [▤] [1] [▼] [√■] [x]

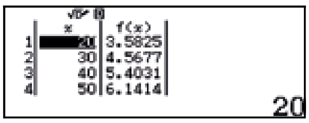
[▶] [+] [√■] [x] [+] [1] [▶]

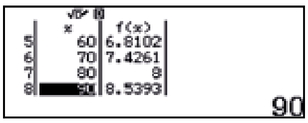
[▶] [▶] [1] [▶] [x] [=]

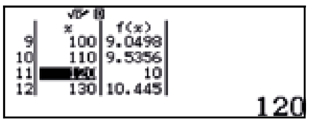




Seguidamente se busca la antiimagen de 10:







Como se observa, el número buscado es el 120.

03 | Regularidades numéricas
Recurrencia en una tabla de multiplicar

La tabla de multiplicar presenta interesantes relaciones entre los números que contiene. Si te fijas, por ejemplo, en la diagonal principal de la tabla, observarás que está formada por la sucesión de cuadrados perfectos:

1, 4, 9, 16, 25, ...

La generalización matemática de dicha sucesión es $a_n = n^2$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

Observa la siguiente tabla de multiplicar, en la que los números aparecen dispuestos formando una escuadra de carpintero:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

1 Halla la suma de los números contenidos en cada escuadra:

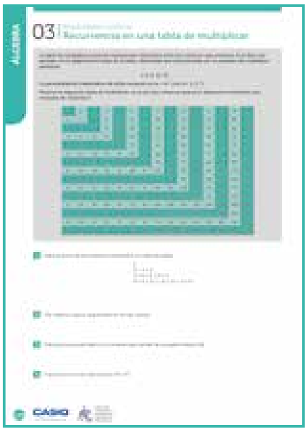
1
2 + 4 + 2
3 + 6 + 9 + 6 + 3
4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4
...

2 ¿Se observa alguna regularidad en dichas sumas?

3 Calcula la suma de todos los números que forman la escuadra número 16.

4 Calcula la suma de toda la tabla 15 x 15.

Recurrencia en una tabla de multiplicar



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad plantea la búsqueda de patrones en problemas aritméticos y la generalización de los resultados obtenidos.
- Para desarrollar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas*, que permite resolver sumas finitas de progresiones aritméticas y geométricas. Se accede a dicha función mediante SHIFT x.

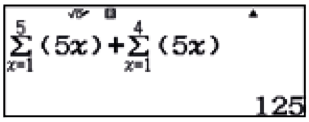
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

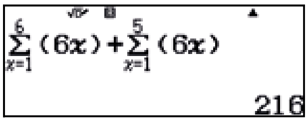
1

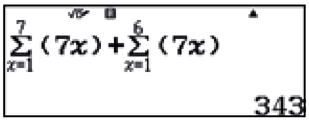
El resultado de la suma de los números contenidos en las primeras escuadras puede calcularse directamente:

1; 2 + 4 + 2 = 8; 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27; 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 64

Para calcular las siguientes sumas se recurre a la función *Sumas finitas*:







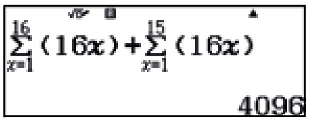
2

Como se observa, la suma de los números contenidos en las escuadras coincide con la sucesión de los cubos perfectos:

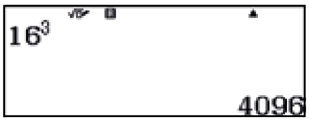
$1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$ ... n^3

3

La suma de los números contenidos en la escuadra 16 es:



Se comprueba que dicha suma es 16^3.



Se puede demostrar de forma analítica que el resultado de la n-ésima suma es n^3:

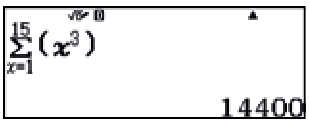
$$n \cdot 1 + n \cdot 2 + ... + n \cdot (n-1) + n \cdot n + n \cdot (n-1) + n \cdot (n-2) + ... + n \cdot 2 + n \cdot 1 =$$

$$= n \cdot (1 + 2 + ... + n) + n \cdot (1 + 2 + ... + n - 1) = n \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n + n \cdot \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) =$$

$$= n^2 \cdot \left(\frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2}\right) = n^2 \cdot n = n^3$$

4

La suma de todos los números de la tabla 15 x 15 es $\sum_{n=1}^{15} n^3$:



En consecuencia, la suma de todos los números de la tabla 15 x 15 es 14 400.

04 Operaciones

¿Cuánto cobran los deportistas y cómo tributan a Hacienda?

Forbes es una revista especializada en el mundo de los negocios y las finanzas que se publica en los Estados Unidos. Fue fundada en 1917 y cada año publica una serie de listas que despiertan gran interés entre los lectores; una de ellas es la lista de los deportistas mejor pagados.

En el año 2016, un futbolista encabezó la lista de los deportistas mejor pagados, por primera vez desde que empezara a publicarse esta lista. Se trataba de Cristiano Ronaldo, con unos ingresos de 88 millones de dólares anuales, de los cuales 56 millones correspondían al salario y 32 millones a los derechos de imagen.

La primera mujer aparecía en el puesto número 40. Se trataba de la tenista Serena Williams, quien acreditaba unas ganancias de 28,9 millones de dólares, de los cuales 8,9 millones correspondían a premios y 20 millones a patrocinios.

1. En España, los futbolistas deben declarar el 85 % de sus ingresos en el IRPF; el 15 % restante pueden cobrarlo como derechos de imagen a través de sociedades (siempre y cuando dichas sociedades tengan actividad). A partir del ejercicio 2016, el tipo impositivo aplicable a los contribuyentes que declaran más de 60 000 € anuales es del 45 %, y el impuesto de sociedades, del 25 %. ¿Cuánto pagó Cristiano Ronaldo en concepto de IRPF? (Expresa el resultado en euros, para ello debes averiguar cómo está el cambio con la moneda americana).

2. Los docentes de secundaria cobran una media de 24 000 € al año, con un tipo aplicable de IRPF del 30 %. ¿Cuánto debe pagar a Hacienda un docente de secundaria?

3. Analiza los resultados obtenidos en las dos actividades anteriores y compáralos. ¿Te parece justo el tipo aplicable de IRPF para estos dos trabajadores?

4. En los Estados Unidos los impuestos que se deben tributar varían según el Estado, si bien, en general las grandes fortunas aportan a las arcas públicas alrededor del 39,6 % de sus ingresos. Según este dato, ¿cuánto aporta Serena Williams a las arcas públicas?

5. Si un deportista español ha abonado 3 825 000 € en concepto de IRPF (correspondiente al 45 % de su salario) y 375 000 € en concepto de sociedades (correspondiente al 25 % de sus ingresos por derechos de imagen), ¿cuánto gana anualmente de media?

04 Operaciones
¿Cuánto cobran los deportistas y cómo tributan a Hacienda?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO
3º y 4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Esta actividad se plantea con el fin de trabajar la proporcionalidad y los porcentajes, así como las aplicaciones de estos contenidos a problemas del ámbito cotidiano.
- Conviene prestar especial atención al modo de configurar la calculadora en los diferentes formatos de entrada y salida de datos, accediendo mediante las teclas el menú [SHIFT] [MENU] [3] [2] [3].
- Para una mejor visualización de las cifras obtenidas conviene activar la opción *Separar dígitos*: [SHIFT] [MENU] ▼ ▼ [2] [1].

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Cristiano Ronaldo pagó el 45 % de 56 000 000 $ en concepto de IRPF. Es decir:

45%×56000000

25 200 000

Un US dollar equivalía durante la fecha de publicación de la lista Forbes a 0,94 €, en consecuencia, la cifra anterior se expresa en euros como:

Ans×0.94

23 688 000

2

Un docente ha de pagar el 30 % de 24 000 €. Es decir:

30%×24000

7 200

3

Los alumnos han de analizar los resultados de las dos actividades anteriores y comparar los resultados valorando el concepto de impuesto progresivo.

4

Serena Williams ha de abonar a las arcas públicas el 39,6 % de sus ingresos, que ascienden a 28,9 millones de dólares.

39.6%×28900000

11 444 400

5

El salario del deportista y sus ingresos por derechos de imagen se muestran a continuación:

3825000÷45%

8 500 000

375000÷25%

1 500 000

04 | Regularidades numéricas
Torre de números impares

El triángulo de Pascal o de Tartaglia es una disposición de números en forma triangular en la que cada número de la fila inferior es la suma de los dos números superiores contiguos.

Algunas propiedades numéricas del triángulo de Pascal son las siguientes:

- La segunda diagonal está formada por los números naturales.

  1, 2, 3, 4, 5, ...

- La tercera diagonal está formada por los números triangulares.

  1, 3, 6, 10, ...

- La suma de las filas corresponden a las potencias de 2:

  2, 4, 8, 16, 32, ...

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Observa la siguiente pirámide de números:

1					
3	5				
7	9	11			
13	15	17	19		
21	23	25	27	29	

1 ¿Los elementos de qué fila suman 29 791?

2 ¿Qué número ocupa la posición 6 en la diagonal (1, 3, 7, 13, 21, ...)? ¿Y la posición 100? Generaliza el resultado.

3 ¿Qué número ocupa la posición 6 en la diagonal (1, 5, 11, 19, 29,...)? ¿Y la posición 100? Generaliza el resultado.

4 ¿Qué número ocupa la posición central en la fila 7? Generaliza el resultado.

Torre de números impares

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Esta actividad se plantea con la intención de buscar patrones en problemas aritméticos y de generalizar los resultados obtenidos.
- En la actividad se estudian sucesiones aritméticas de segundo orden y sucesiones de números cúbicos perfectos.
- Conviene hacer uso del menú de *Estadística bidimensional*, concretamente de la opción *Regresión cuadrática*, para calcular el término general de la sucesión.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

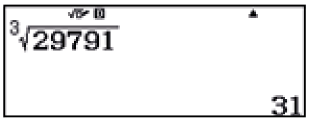
1

La sucesión correspondiente a las sumas de las filas es:

$$1,\ 3 + 5 = 8,\ 7 + 9 + 11 = 27,\ 13 + 15 + 17 + 19 = 64\ldots$$

Es decir, se trata de la sucesión de las potencias cúbicas de los números naturales: $1^3, 2^3, 3^3, 4^3\ldots\ n^3$.

En consecuencia, la fila cuyos elementos suman 29 791 es:

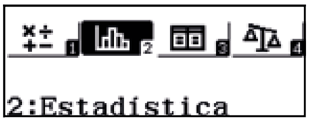


2

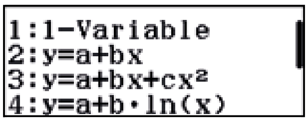
Para calcular el término general de la sucesión formada por los elementos de la primera diagonal (1, 3, 7, 13, 21, 31,...) se entra en el menú *Estadística* y se selecciona la opción correspondiente a la regresión cuadrática.

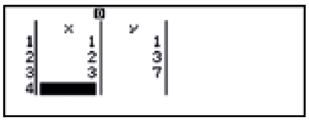
Seguidamente, basta con introducir los tres primeros términos que forman la sucesión:

MENU 2

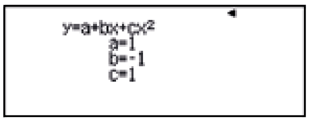


3

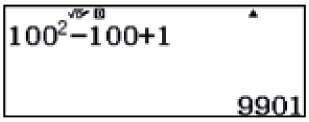




AC OPTN 3

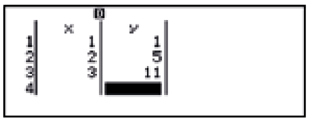


En consecuencia, el término general de la sucesión es $b_n = n^2 - n + 1$, y el término 100 es:

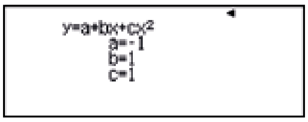


3

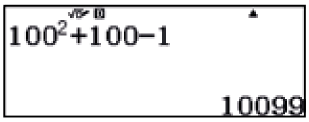
Se puede comprobar que se trata de una sucesión aritmética de orden 2:



AC OPTN 3



El término general de la sucesión es $c_n = n^2 + n - 1$ y el término 100 es:



4

Fila	1	3	5	7	$2n - 1$
Número central	1	9	25	49	$(2n - 1)^2$

06 | Aproximaciones y errores
El número *e*. Aproximación numérica

Uno de los problemas actuales que más preocupan a la sociedad es la sobreexplotación de los recursos y las terribles consecuencias que se derivan de esta práctica, como por ejemplo, la escasez de alimentos en un futuro próximo. Para analizar este problema, hay que tener en cuenta la tasa de crecimiento de la población mundial.

Para estudiar la tasa de crecimiento de una población se utiliza una expresión algebraica en la que intervienen los logaritmos naturales, que son aquellos que tienen como base el número e.

En esta actividad vamos a acercarnos a este número tan presente en la naturaleza y a su vez tan poco conocido.

1 Calcula el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donde n es un número natural, para valores de n muy grandes. Organiza los resultados que obtengas en una tabla y pon en común los resultados que obtengas con los de tus compañeros.

2 Aunque habitualmente se recomienda trabajar con dos cifras decimales, deberás tomar más cifras decimales para diferenciar los resultados que corresponden a diferentes valores de n. Vuelve a realizar los cálculos del apartado anterior asegurándote que obtienes resultados distintos para diferentes valores de n. ¿Coincide alguno de los resultados que has hallado con los de algún compañero? ¿Qué resultados se repiten? ¿Qué valores de n se han introducido en la calculadora?

3 ¿Cuál es valor de n más grande que admite la calculadora tal que el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es diferente de 1?

> **Nota:** Cuanto mayor sea n más se aproximará el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a un número fijo: el número e. Puedes obtener un valor muy aproximado a e (tanto como tu calculadora te permite) mediante la combinación de teclas ALPHA $\times10^x$.

4 Vuelve a elaborar una tabla con los valores numéricos de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para los valores más altos posibles de n. Pon en común tus resultados con los de tus compañeros.

5 En algunos casos habrás obtenido resultados expresados en notación científica. Expresa dichos resultados en notación decimal. ¿Para qué valor de n has obtenido el menor resultado en el apartado anterior? ¿En cuántas cifras decimales coincide el valor de la expresión algebraica con el valor real del número e?

> **Nota:** Como bien sabes, el número π es un número irracional, es decir, un número decimal con infinitas cifras no periódicas que no puede expresarse como cociente de dos números enteros. Son números irracionales π, raíz de 2, raíz de 5… y también el número e. Solo falta por conocer el número imaginario i de la famosa identidad de Euler $e^{i\pi}+1=0$.

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

El número *e*. Aproximación numérica

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

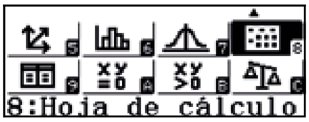
- En estas actividades se trabaja el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica y se justifica la importancia del número e en la vida cotidiana, a la vez que se calcula una aproximación de su valor numérico.
- La actividad 1 puede suscitar una discusión sobre qué se considera un número grande, en función del nivel en el que se esté trabajando.
- En la actividad 4 se puede analizar qué parte de la expresión algebraica es la que da como resultado 1, en lugar de una correcta aproximación del número e. Se puede aprovechar la actividad para analizar los casos en los que no resulta adecuado el uso de la notación científica.
- En la actividad 6 se pueden estudiar, a modo de ampliación, los conceptos de crecimiento y límite de una sucesión.

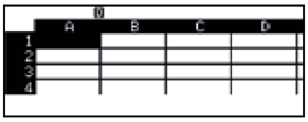
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

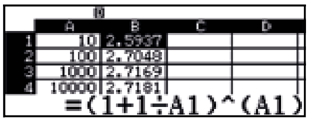
Para realizar esta actividad, se accede al menú *Hoja de cálculo*, al que se accede mediante:

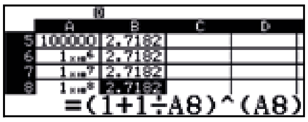
MENU 8

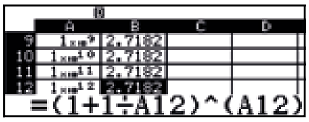




En la columna A se introducen valores altos de n, y en la celda B1, la fórmula **(1 + 1:A1)^A1**, que se extiende en el rango deseado de la columna B. Se obtiene, así, una tabla como la siguiente:





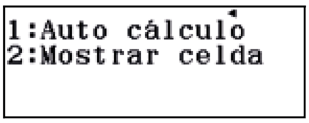


Como se observa, los resultados se presentan con solo 4 cifras decimales y parecen tender al valor 2,7182.

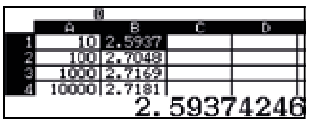
2

Al colocar el cursor en las celdas de la columna B aparece la fórmula que proporciona los resultados contenidos en estas celdas, pero no los propios resultados. Para que se visualicen, con más cifras decimales de las que se muestran en la tabla, hay que modificar la configuración de la calculadora:

SHIFT MENU ▼ 4 2 2

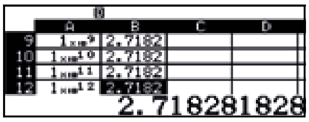


Ahora se muestran los valores numéricos contenidos en las celdas:



Se observa que el último valor de n para el que se obtiene un resultado distinto al de las celdas precedentes es $n = 1 \cdot 10^{10}$, al que le corresponde el valor 2,718281828.

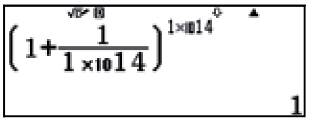
El número *e*. Aproximación numérica



Es por ello que, con toda seguridad, los alumnos habrán obtenido en múltiples ocasiones el resultado 2,718281828.

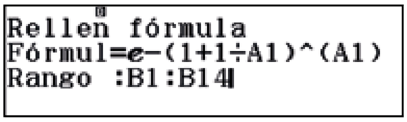
3

A partir de $n = 1 \cdot 10^{13}$ el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es 1.

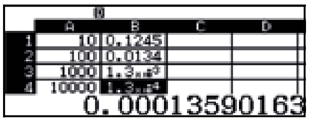


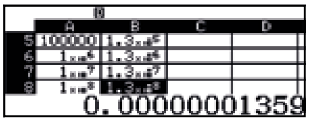
4

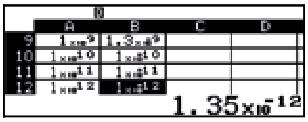
En esta ocasión, hay que introducir en la casilla B1 la fórmula *e*–(1+1:A1)^A1 y extenderla al rango de la columna B que se considere apropiado:

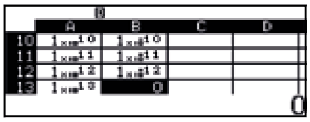


Se obtiene, así, una lista de valores como la siguiente:









5

El menor resultado se obtiene para $n = 1 \cdot 10^{12}$, alcanzando el valor $1 \cdot 10^{-12}$, es decir, 0,0000000000012 (para $n = 1 \cdot 10^{13}$ se obtiene 0).

Esto significa que cuando $n = 1 \cdot 10^{12}$ el valor numérico de la expresión algebraica $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ coincide en 11 cifras con el valor de *e*.

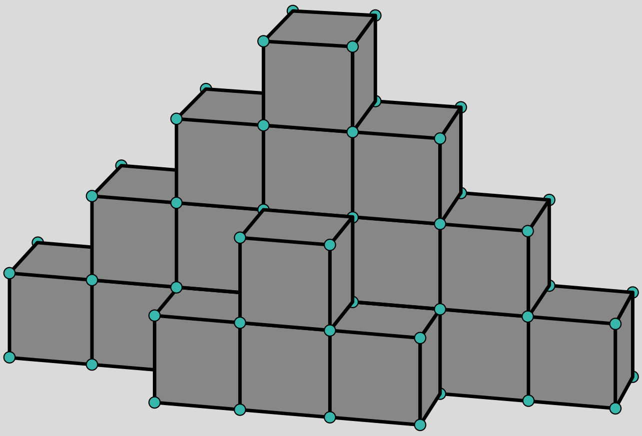
07 | Regularidades numéricas
Pirámides de cubos

Las figuras geométricas en el espacio pueden seguir interesantes patrones numéricos. Trata de encontrar dichos patrones en la siguiente figura:

Se observan dos especies de pirámides formadas por cubos. La primera de ellas, la más pequeña, está formada por 4 cubos y tiene 2 cubos de altura.

La segunda pirámide, situada tras la primera, tiene una altura dos cubos superior a la pirámide que le precede.

Cada capa tiene una altura dos cubos superior a la capa anterior, hasta alcanzar los 10 cubos de altura. A partir de esa capa, las siguientes tienen, sucesivamente, alturas inferiores en dos cubos a las capas anteriores.



1 ¿Cuántos cubos hay que utilizar para completar la figura que se ha descrito?

2 ¿Cuántos cubos habría que usar en total para construir una figura como la descrita pero de 50 cubos de altura?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

07 | Regularidades numéricas
Pirámides de cubos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

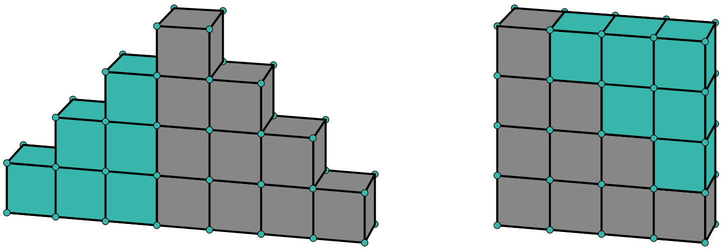
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Esta actividad se plantea para buscar patrones en problemas geométricos y generalizar resultados.
- Para realizar la actividad se hará uso de la función *Sumas finitas* de la calculadora.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

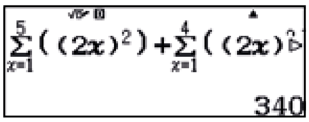
La primera capa, de 2 cubos de altura, está compuesta por 4 cubos ($4 = 2^2$)

La segunda capa, de 4 cubos de altura, está compuesta por 16 cubos ($16 = 4^2$)



Como se observa, cada capa tiene tantos cubos como el cuadrado de su altura. En consecuencia, para una construcción de 10 cubos de altura, el total de cubos utilizados coincide con la suma de los cuadrados de los 5 primeros números pares consecutivos más la suma de los 4 primeros números pares consecutivos, que corresponde a las caras posteriores. Es decir:

$$\sum_{x=1}^{5}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{4}(2x)^2$$

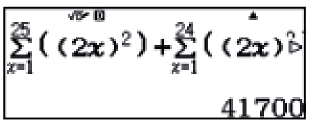


Por tanto, hacen falta 340 cubos.

2

En el caso de una construcción de 50 cubos de altura, el número de cubos requeridos es:

$$\sum_{x=1}^{25}(2x)^2 + \sum_{x=1}^{24}(2x)^2$$



En consecuencia, hacen falta 41 700 cubos.

11 | Logaritmos
Número de cifras de un número “muy grande”

1262383049660586222684174870651169998454847760535761095005091
6182626818413620269880155156801376138071753405453485116413864
8904527031605516052768809525956360593996436471601951598338820
9962459578542172100149933776393858121960407273342250718005600
9672540900795541095168165737795933263322883148732515590778530
6844497786480339196258080068276001784958928193764231021494476
2837569186221071720202524163030311855918867830431407694380169
2528246980959705901641444238894928620825482303431806955690226
3087734268295039009305293951812087395919671958415360531431457
75307050594328881077553168201547775

En ocasiones, puede resultar interesante conocer el número de cifras que tiene el resultado de una operación, sin necesidad de conocer cuál es ese resultado. Una manera de hacerlo, es utilizar los logaritmos, como verás a continuación.

Utiliza la calculadora para dar respuesta a las siguientes preguntas:

1 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{33}?

2 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{34}?

3 ¿Cuántas cifras tienen los números 2^{300} y 2^{332}?

4 ¿Cuántas cifras tiene el número 2^{333}? ¿Qué sucede cuando intentas responder a esta pregunta usando la calculadora?

5 Para responder a la cuestión anterior, calcula los logaritmos decimales de los siguientes números:

2, 3, 31, 45, 405, 607, 1 234, 5 678, 12 345, 67 890, 12 3456, 789 012

Observa la parte entera de cada logaritmo. ¿Qué puedes deducir?

6 Aplica tus deducciones y resuelve nuevamente la actividad 3 pero de distinta forma.

7 Intenta resolver la actividad 4 por el mismo método. ¿Qué observas?

8 ¿Conoces alguna propiedad de los logaritmos que pueda solventar el error que indica la calculadora en la actividad 7?

9 A partir de las conclusiones que extraigas en la actividad 7, deduce cuántas cifras tiene el número 2^{333}.

Número de cifras de un número “muy grande”

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El alumnado deberá conocer, previamente a la realización de esta práctica, conceptos básicos de notación científica.
- El alumno debe conocer el concepto de logaritmo y sus propiedades básicas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

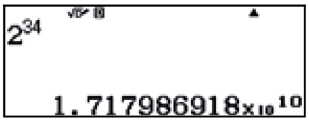
1

Se realiza la operación y se cuentan las cifras:

El número tiene 10 cifras.

2

Se procede de manera análoga a la actividad anterior:



El número tiene 11 cifras. Se cuenta la cifra entera (de un solo dígito, ya que el resultado se muestra en notación científica) más las 10 posiciones que indican el exponente 10.

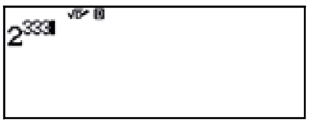
3

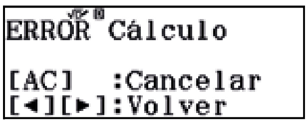
Se procede como en los casos anteriores:

Los números tienen 91 y 100 cifras, respectivamente.

4

Se procede como en los casos anteriores:





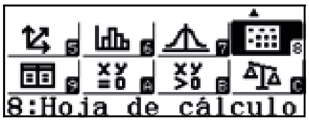
La calculadora ve superada su capacidad y no es capaz de hallar el resultado, por lo que no se puede contar el número de cifras de un número tan grande. Habrá, por tanto, que buscar otra estrategia.

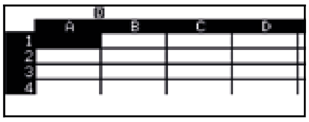
Número de cifras de un número "muy grande"

5

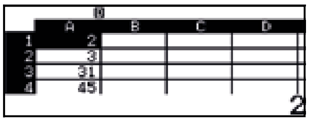
Para resolver estas cuestiones se accede al modo *Hoja de cálculo*:

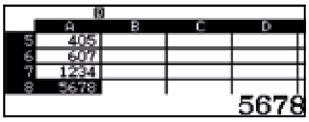
[MENU] [8]

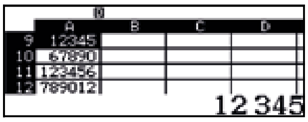




Seguidamente se introducen, en la columna A, los números indicados.

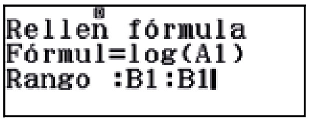


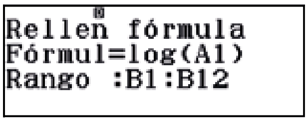




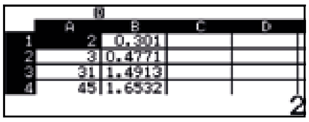
Se selecciona la celda B1 y se introduce la fórmula **log(A1)**. Seguidamente se extiende dicha fórmula al rango B1:B12.

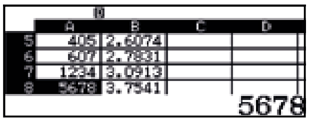
[OPTN] [1] [log□] [(] [ALPHA] [(−)] [1] [)] [ALPHA] [,,,] [1] [ALPHA] [ALPHA] [,,,] [1] [2]

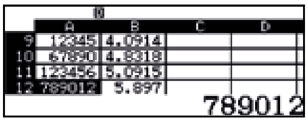




En la columna B aparecen los correspondientes logaritmos:



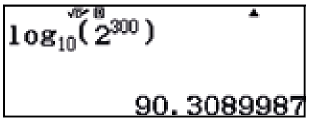


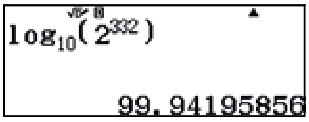


Se observa que la parte entera de cada logaritmo es una unidad inferior al número de cifras del número correspondiente. Es fácil deducir que si un número tiene n cifras su logaritmo decimal consta de una parte entera con n - 1 cifras. Este resultado se puede utilizar para resolver la actividad 3.

6

Se calcula, en cada caso, el logaritmo decimal y se considera su parte entera:

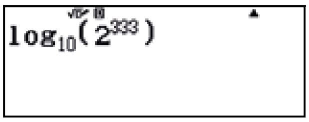


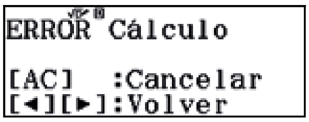


Sumando una unidad a la parte entera de cada logaritmo se obtiene el número de cifras correspondiente:

7

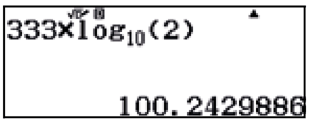
Al intentar resolver la actividad 4 utilizando logaritmos, la calculadora devuelve un mensaje de error.





Sin embargo, para calcular el número de cifras de 2^{333}, se puede hacer uso de las propiedades de los logaritmos.

En concreto de $\log_{10} x^p = p \cdot \log_{10} x$



Por tanto, se concluye que el número 2^{333} tiene 101 cifras.

12 Notación científica

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

El CERN es el centro de investigación más importante de Europa. Se han necesitado más de 30 años y una inversión de 6 500 millones € para finalizar su construcción. Decenas de premios nobel han usado y siguen usando sus instalaciones.

Los países miembros del CERN (entre los que se encuentra España) financian con dinero público su presupuesto anual, que asciende a mil millones de francos suizos (CHF).

1 Expresa en notación científica el presupuesto del CERN. Expresa dicho presupuesto en euros (€) y en dólares US ($) de acuerdo con el tipo de cambio vigente.

[1 € = 1,14479 US $, 1 CHF = 0,90767 €]

2 Compara el presupuesto anual del CERN con los presupuestos generales del estado español para el año 2016, que ascendían a 274 731,84 M €.

3 Durante el funcionamiento de sus instalaciones, el CERN genera una factura eléctrica de doscientos cincuenta millones de euros anuales. ¿Qué porcentaje representa esta cifra sobre el total de su presupuesto?

4 El LHC (Large Hadron Collider) es la joya de la corona del CERN. Se trata de un acelerador de partículas que puede acelerar protones hasta alcanzar 0,999999991 veces la velocidad de la luz. ¿Cuántos kilómetros recorre durante un minuto un protón que se mueve a esa velocidad en uno de los anillos de aceleración del LHC?

5 Compara el valor que has obtenido en el apartado anterior con la distancia media estimada entre la Tierra y el Sol, de aproximadamente $1{,}5 \times 10^{11}$ m).

6 El LHC es un anillo casi circular de 27 km de longitud. ¿Cuál es el radio de ese anillo? ¿Qué superficie interior alberga dicho anillo? Compara esa cantidad con la superficie de un campo de futbol (~ 1 ha) y con la superficie de una ciudad cosmopolita como Barcelona (~100 km²).

12 Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

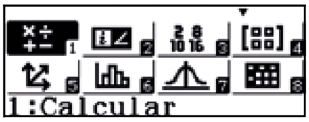
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Previamente a la realización de la actividad, se recomienda contextualizarla con una breve explicación de qué es el CERN y que investigaciones se llevan a cabo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se introduce el presupuesto expresado en francos suizos y se expresa en notación científica:

MENU 1



1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 =

1000000000
1 000 000 000

ENG

1000000000
1×10^{9}

Seguidamente se expresa el presupuesto en euros, aplicando el tipo de cambio vigente 1 CHF = 0,90767 €:

Ans × 0 . 9 0 7 6 7 =

Ans×0.90767
907 670 000

SHIFT ENG

Ans×0.90767
907.67×10^{6}

A continuación, se expresa el resultado en dólares US ($):

Ans × 1 . 1 4 4 7 9 =

Ans×1.14479
1 039 091 539

SHIFT ENG

Ans×1.14479
1.039091539×10^{9}

2

Se dividen ambos presupuestos:

$$\frac{274731.84\times10^{6}}{907670000}$$
302.6781099

En consecuencia, los presupuestos generales del estado español son más de 300 veces el presupuesto del CERN.

12 Notación científica

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

3

Para calcular el porcentaje, se divide la factura eléctrica entre el presupuesto total:

[2] [5] [0] [x10ˣ] [6] [÷] [1] [x10ˣ] [9] [=]

```
250×x10 6÷1 x10 9
                1
                4
```

[S⇔D]

```
250×x10 6÷1 x10 9
             0.25
```

Por tanto, el CERN dedica el 25% de su presupuesto al gasto eléctrico.

4

Se introduce la velocidad de la luz, c_0:

[SHIFT] [7] [1] [3] [=]

```
1:Universal
2:Electromagnétic
3:Atómica&Nuclear
4:Fisicoquímicas
```

```
1:h    2:ħ    3:C0
4:ε0   5:μ0   6:Z0
7:G    8:lP   9:tP
```

```
C0
```

```
C0
      299 792 458
```

Seguidamente se multiplica por 0, 999999991, para obtener la velocidad del protón:

[Ans] [×] [0] [•] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [1] [=]

```
Ans×0.999999991
    299 792 455.3
```

El resultado se expresa en m/s. Para obtener la velocidad en km/h se procede a realizar la conversión entre las unidades:

[SHIFT] [8] [▼] [1] [2] [=]

```
1:Longitud
2:Area
3:Volumen
4:Masa
```

```
1:Velocidad
2:Presión
3:Energía
4:Potencia
```

```
1:km/h▸m/s    2:m/s▸km/h
```

```
Ansm/s▸km/h
```

Se obtiene, así:

```
Ansm/s▸km/h
    1 079 252 839
```

Dividiendo entre 60 se obtiene la distancia que recorre en un minuto:

[Ans] [÷] [6] [0] [=] [ENG]

```
Ans÷60
  17.98754732x10^6
```

5

En primer lugar se expresa la distancia recorrida por el protón en metros.

[1] [•] [8] [x10ˣ] [7] [×] [1] [0] [0] [0] [=]

```
1.8x10 7×1000
       1.8x10^10
```

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (I)

A continuación, se divide la distancia recorrida por el protón por la distancia entre la Tierra y el Sol:

Ans ÷ 1 • 5 x10ˣ 1 1 =

```
Ans÷1.5×10 11
                    3
                   25
```

S⇔D

```
Ans÷1.5×10 11
                 0.12
```

Ans × 1 0 0 =

```
Ans×100
                   12
```

Por tanto, el protón podría completar el viaje de ida y vuelta de la Tierra al Sol 6 veces en un minuto.

6

Se considera que la longitud de una circunferencia es $L = 2\pi r$, por lo que el radio se calcula como $r = L : 2\pi$.

2 7 ÷ (2 SHIFT x10ˣ) =

```
27÷(2π)
          4.297183463
```

En consecuencia, el radio del anillo es aproximadamente de 4,297 km.

Para calcular el área, se considera que $A = \pi r^2$, de manera que:

SHIFT x10ˣ × Ans x² =

```
π×Ans²
          58.01197676
```

Es decir, aproximadamente 58 km².

Para comparar esta área con la superficie de un campo de fútbol, conviene expresar ambas superficies en la misma unidad, en este caso, en m²: 1 ha = 10 000 m²

```
58×1000²÷10000
                5 800
```

En consecuencia, la superficie que encierra el anillo equivale a 5 800 campos de futbol.

Si se compara esta superficie con la de una ciudad como Barcelona, se tiene:

5 8 ÷ 1 0 0 =

```
58÷100
                   29
                   50
```

S⇔D

```
58÷100
                 0.58
```

Luego, la superficie que ocupa el LHC es más de la mitad de la superficie de Barcelona.

13 Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

El LHC, emplazado en el CERN, es el acelerador de partículas más grande y energético del mundo. Se trata de un túnel circular de 27 km de longitud por el interior del cual se aceleran haces de protones en sentidos opuestos a velocidades próximas a la luz. Cuando las partículas colisionan, producen altísimas energías a escala subatómica que permiten simular eventos que ocurrieron inmediatamente después del Big Bang.

1 Los haces de protones recorren el anillo de 27 km de longitud a altas velocidades, de manera que completan 11 000 vueltas por segundo. ¿Cuántos metros recorren los protones en un minuto?

2 En cada uno de estos haces hay 100 000 000 000 protones. A pesar de la enorme cantidad de protones que hay en cada haz, unos pocos gramos de hidrógeno son suficientes para proporcionar protones que acelerar durante el próximo millón de años. Comprueba la validez de esta afirmación.

3 Para generar los campos magnéticos que mantienen confinados los haces de protones dentro del LHC se utilizan bobinas formadas por hilos de 0,007 mm de grosor (diez veces más finos que un pelo humano) formados por una aleación de niobio-titanio. Dichos hilos soportan intensidades de corriente de 12 000 amperios (más de 400 veces la intensidad que soportan los cables que se usan con tensiones habituales). Para hacernos una idea de la cantidad de cable instalado, si alineáramos todos los filamentos utilizados en los imanes del LHC podríamos ir y volver al Sol más de seis veces.

a) Compara la longitud de cable instalado con las distancias del Sol a los distintos planetas del sistema Solar expresados en UA (1 UA = distancia Tierra-Sol ~150 × 10^6 km):

Sol – Mercurio: 0,39 UA
Sol – Venus: 0,72 UA
Sol –Tierra: 1,00 UA
Sol – Marte: 1,52 UA
Sol – Júpiter: 5,20 UA
Sol – Saturno: 9,54 UA
Sol – Urano: 19,19 UA
Sol – Neptuno: 30,06 UA

b) Teniendo en cuenta que un clip tiene un grosor del orden de 1 mm, ¿cuántos filamentos conductores de niobio-titanio caben en un clip?

4 Tras la colisión de dos haces de protones, se alcanzan temperaturas que exceden en más de 100 000 veces la temperatura del centro del Sol; sin embargo, el interior del LHC es el lugar más frío del universo conocido (1,9 K), así como uno de los más vacíos (con presiones de aproximadamente 10^{-13} atm). Se han de mantener estas condiciones de presión y temperatura para que se mantenga la propiedad de superconductividad de los imanes. Teniendo en cuenta que el cero absoluto de temperatura corresponde a los –273 ºC, ¿qué tanto por ciento del cero absoluto se alcanza en el interior del LHC?

Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Previamente a la realización de la actividad, se recomienda contextualizarla con una breve explicación de qué es el CERN y qué investigaciones se llevan a cabo.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

La distancia que recorren los protones en un minuto, expresada en metros, es:

```
11×10³×27×10³×60
                1.782×10¹⁰
```

2

Cabe recordar que la masa, expresada en gramos, de 1 mol de hidrógeno coincide con el valor de su masa atómica. Por tanto, la masa de 1 mol de H es 1 g. Por otra parte, un mol de cualquier sustancia contiene un número de partículas igual a el Número de Avogadro: $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$. En consecuencia, el número de paquetes de 10^{11} protones que hay en 1 g de hidrógeno es el cociente $N_A : 10^{11}$.

SHIFT 7 | 4 | 3 | ÷ 1 ×10ˣ 1 1 =

```
1:Universal
2:Electromagnétic
3:Atómica&Nuclear
4:Fisicoquímicas
```

```
1:u     2:f     3:NA
4:k     5:Vm    6:R
7:C1    8:C2    9:σ
```

```
NA÷10¹¹
          6.02214129×10¹²
```

Si se lanzara un paquete de protones cada segundo, el tiempo que se tardaría en lanzar todos los protones sería $6{,}022 \cdot 10^{12}$ s. Este tiempo, expresado en años es:

```
Ans÷3600÷24÷365
              190 960.8476
```

Se puede calcular, ahora, cuántos gramos de hidrógeno se necesitan para enviar paquetes de protones durante 1 millón de años:

```
1×10⁶÷Ans
              5.236675541
```

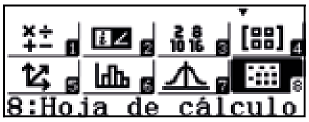
Así pues, con solo 5 g de hidrógeno se podrían enviar paquetes de 10^{11} protones a un ritmo de un paquete cada segundo durante 1 millón de años, por lo que la afirmación es consistente.

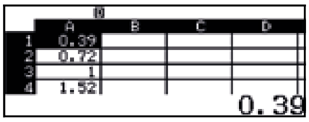
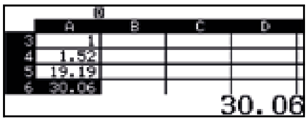
13 | Notación científica
Un viaje numérico al CERN: entre lo infinito y lo ínfimo (II)

3

a) Se introducen todos los valores en una hoja de cálculo:

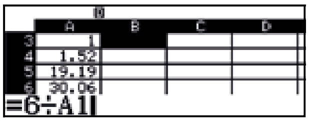
MENU 8

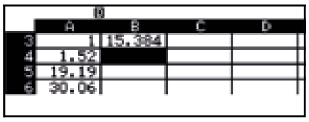


A continuación se introduce en la celda B1 la siguiente fórmula:

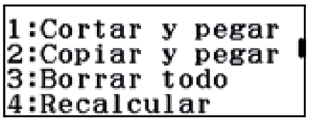
ALPHA CALC 6 ÷ ALPHA (−) 1   =

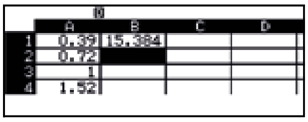
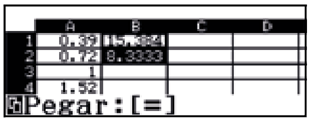




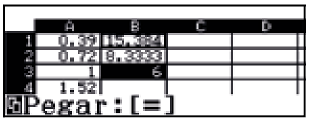
Seguidamente, se copia esta fórmula en el resto de celdas de la columna B:

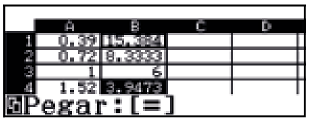
OPTN ▼   2   ▼ =   ▼ =

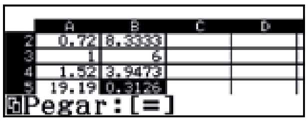


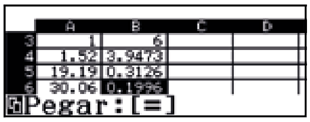



▼ =   ▼ =   ▼ =

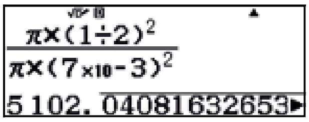








b) Para determinar cuántos filamentos caben en el grosor de un clip hay que comparar las áreas, no los diámetros.

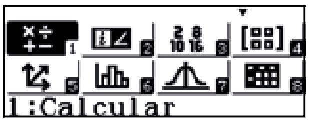


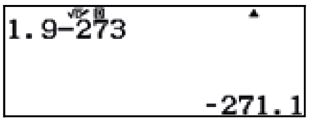
Es decir, en el grosor de un clip caben más de 5 000 cabezas de filamento conductor.

4

En primer lugar, se expresa la temperatura en grados Celsius:

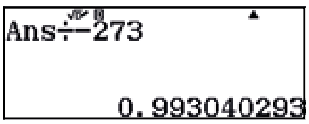
MENU 1





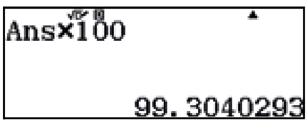
Seguidamente, se divide esta temperatura por la correspondiente al 0 K, es decir –273 ºC:

Ans ÷ (−) 2 7 3 S⇔D



A continuación, se multiplica por 100 para obtener el porcentaje:

Ans × 1 0 0 = S⇔D



15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

Hagamos un viaje en el tiempo hacia el pasado desde el momento presente y veamos algunos de los acontecimientos físicos más relevantes durante la evolución del Universo:

- **Actualidad** (13 700 millones de años desde el *Big Bang*). En el CERN, los físicos han iniciado un viaje en el tiempo para determinar el origen de la materia que conforma nuestro Universo. La temperatura cósmica de fondo ha descendido hasta casi los –270 °C. ¿Empieza nuestra muerte térmica?
- **Vida en la Tierra** (10 000 millones de años desde el *Big Bang*). Una sopa de moléculas orgánicas aparece en la Tierra, un pequeño planeta azul situado en los confines de la Vía Láctea, una galaxia espiral de tamaño medio perdida en la inmensidad del Universo.
- **Sistema Solar** (9 200 millones de años desde el *Big Bang*). La fuerza de la gravedad ha agrupado los residuos estelares en torno al Sol hasta formar un sistema planetario.
- **Estrellas y galaxias** (200 millones de años después del *Big Bang*). La fuerza de la gravedad atrae el polvo cósmico material y los átomos ligeros se fusionan en el corazón de las estrellas, que paulatinamente se van agrupando en cúmulos y galaxias. Empiezan a producirse átomos pesados como resultado de las reacciones nucleares de fusión. La temperatura cósmica desciende hasta los 4 000 °C.
- **Átomos ligeros** (380 000 años desde el *Big Bang*). Se forman los primeros átomos de hidrógeno y helio. Los fotones escapan de la interacción con los electrones y el Universo se ilumina por primera vez.
- **Núcleos ligeros** (3 minutos desde el *Big Bang*). Protones y neutrones se unen para formar los núcleos de los átomos ligeros. Los fotones son continuamente emitidos y absorbidos por la materia. Todo está a oscuras, el Universo es opaco.
- **Protones y neutrones** (0,01 milisegundos después del *Big Bang*). Se forman los protones y los neutrones a partir de los quarks y los gluones. Todo el Universo existente tiene el tamaño del actual Sistema Solar. La temperatura cósmica de fondo supera el billón de grados Celsius.
- **Plasma de quarks y gluones** (una billonésima de segundo desde el *Big Bang*). Entran en acción la fuerza nuclear débil y la fuerza electromagnética. El radio del Universo no alcanza los 300 millones de kilómetros. La temperatura cósmica de fondo es de 10 000 billones de grados Celsius.
- **Zoo de partículas** (10^{-35} s después del *Big Bang*). Una billonésima de billonésima de billonésima de segundo después de la gran explosión, apenas un suspiro cósmico. Mesones, electrones, quarks, neutrinos y fotones interaccionan de forma continua. La fuerza nuclear fuerte y la fuerza electrodébil dominan un Universo que cabe en una manzana. La temperatura cósmica de fondo es de 1 000 000 billones de billones de grados Celsius.
- **$t = 10^{-43}$ s, $T = 10^{32}$ °C**. Albores del Big Bang: origen de nuestro horizonte de exploración temporal. Todo el Universo, concentrado en un punto, acaba de estallar.

1 Expresa las cantidades temporales del texto en notación científica y con la unidad de medida indicada.

2 Expresa las cantidades anteriores en segundos.

3 Expresa en escala logarítmica decimal los valores temporales correspondientes a cada uno de los hitos anteriores.

4 Establece la proporción correspondiente a la distancia temporal entre los hitos consecutivos. ¿Qué se puede deducir a partir de los resultados obtenidos?

5 Imagina que toda la historia del Universo pudiera concentrarse en el periodo de tiempo correspondiente a un sólo año solar terrestre. ¿En qué punto temporal de ese año nos encontraríamos en la actualidad?

6 Discute y reflexiona con tus compañeros sobre los resultados obtenidos en las actividades anteriores. ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

7 ¿Qué nuevas preguntas te plantearías a partir del modelo de evolución temporal del Universo que se ha trabajado?

Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II Iberia
Hoja de cálculo (Excel Microsoft Office o Calc LibreOffice)
GeoGebra
Recursos on-line y bibliografía complementaria:

- Origen y evolución del Universo: http://www.iac.es/cosmoeduca/universo/charla1.html
- The Scale of the Universe: http://htwins.net/scale2/
- Nanoraisen, aventuras a través de los decimales: http://www.nanoreisen.com/espanol/index.html
- Potencias de 10: https://www.youtube.com/watch?v=9JUpIa4ncWg&feature=youtu.be
- The Scales of the Universe: https://finance.yahoo.com/video/3-minute-animation-change-way-181643354.html
- Linea de tiempo sobre el Universo: https://prezi.com/s3hdurrkr0lp/linea-del-tiempo-sobre-el-origen-del-universo/
- Is that a Big Number: http://www.isthatabignumber.com/home/

NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO y 4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La actividad puede trabajarse individualmente o en pequeños grupos de estudio. Se recomienda trabajar conjuntamente con la asignatura de Física y Química, puesto que los contenidos de aplicación están directamente relacionados con esta materia. Asimismo, se aconseja acompañar alguna de las sesiones con algunos de los breves vídeos propuestos en la bibliografía complementaria.
- Para la realización de los cálculos propuestos en las actividades es necesario hacer uso del menú de configuración *Formato de número*. Se accede a dicho menú mediante:

ALPHA MENU 3

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

También deben utilizarse las teclas de las funciones exponencial y logarítmica de base 10, 10^x y $\log_{10} x$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se accede al menú *Formato de número*, se selecciona la opción *Notación científica* y se escogen dos cifras significativas.

SHIFT MENU 3

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

2

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

2

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
Científ:Selec 0~9
```

Seguidamente se introducen las cantidades:

13.700 millones de años

```
13700×10^6
                1.4×10^10
```

10.000 millones de años

```
10000×10^6
                1.0×10^10
```

9.200 millones de años

```
9200×10^6
                9.2×10^9
```

200 millones de años

```
200×10^6
                2.0×10^8
```

380.000 años

```
380000
                3.8×10^5
```

3 minutos

```
3
                3.0×10^0
```

0,01 milisegundos

```
0.01×10^-3
                1.0×10^-5
```

billonésima de segundo

```
1×10^-12
                1.0×10^-12
```

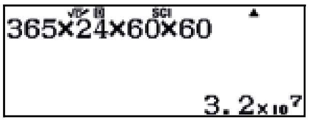
$t = 10^{-43}$ s

```
1×10^-43
                1.0×10^-43
```

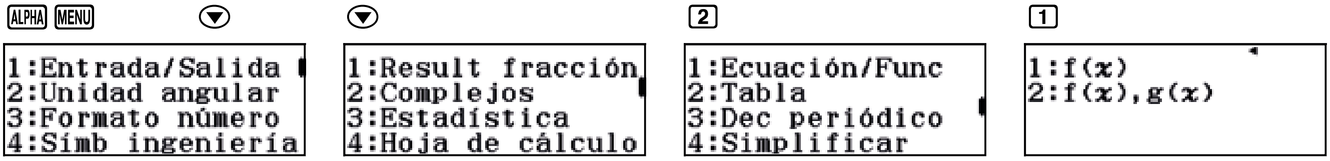
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

2

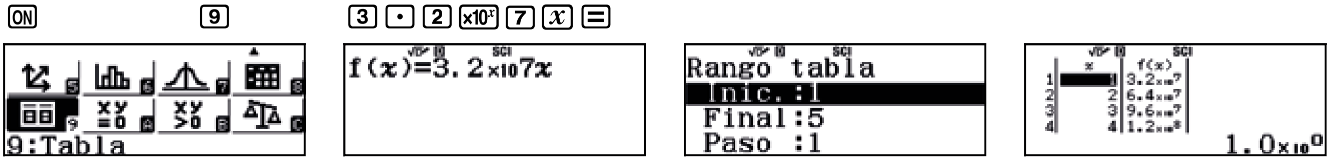
Para expresar en segundos todos aquellos valores temporales que vienen dados en años terrestres hay que multiplicar por el siguiente factor:



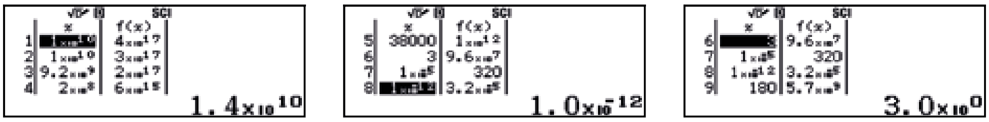
Para realizar todas las conversiones de años a segundos puede usarse una tabla de valores. Para ello, conviene configurar la calculadora para que genere una tabla con una sola función:



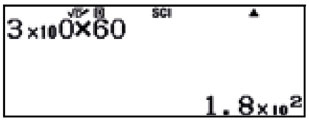
Seguidamente, se accede al menú *Tabla* y se define la función $f(x) = 3{,}2 \cdot 10^7 x$:



La elección de los valores inicial, final y de paso es irrelevante, ya que los valores de la variable x se cambiarán por los que interesan realmente, que son los tiempos de los acontecimientos cósmicos expresados en años:



La conversión de minutos a segundos viene dada por el siguiente factor:



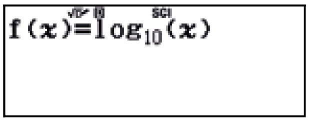
El resto de valores ya están expresados en segundos, por lo que se obtiene la siguiente tabla, en la que se han expresado los resultados con 3 cifras significativas:

t	t(s)
$1{,}37 \cdot 10^{10}$ y	$4{,}32 \cdot 10^{17}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{10}$ y	$3{,}15 \cdot 10^{17}$ s
$9{,}20 \cdot 10^{9}$ y	$2{,}90 \cdot 10^{17}$ s
$2{,}00 \cdot 10^{8}$ y	$6{,}31 \cdot 10^{15}$ s
$3{,}80 \cdot 10^{5}$ y	$1{,}20 \cdot 10^{13}$ s
$3{,}00 \cdot 10^{0}$ min	$1{,}80 \cdot 10^{2}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-2}$ ms	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s
$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s

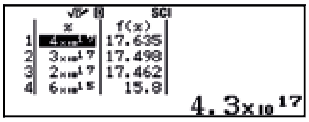
15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

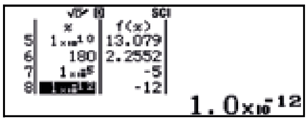
3

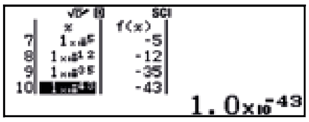
Para realizar la conversión a la escala logarítmica se construye una tabla de valores para la función del logaritmo decimal $f(x) = \log x$:



Análogamente a lo expuesto en el apartado anterior, se conservan los valores que la calculadora ofrece por defecto para inicio, fin y paso. A continuación, se introducen los diez valores de *x* correspondientes a los tiempos expresados en segundos de la tabla anterior:



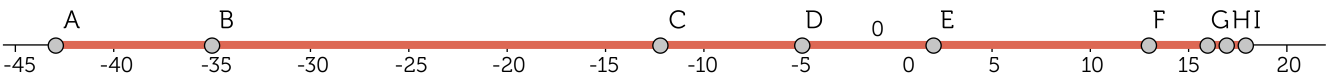




Con 3 cifras significativas, se obtendría la siguiente tabla:

t	t(s)	log t
$1{,}37 \cdot 10^{10}$ y	$4{,}32 \cdot 10^{17}$ s	18
$1{,}00 \cdot 10^{10}$ y	$3{,}15 \cdot 10^{17}$ s	17
$9{,}20 \cdot 10^{9}$ y	$2{,}90 \cdot 10^{17}$ s	17
$2{,}00 \cdot 10^{8}$ y	$6{,}31 \cdot 10^{15}$ s	16
$3{,}80 \cdot 10^{5}$ y	$1{,}20 \cdot 10^{13}$ s	13
$3{,}00 \cdot 10^{0}$ min	$1{,}80 \cdot 10^{2}$ s	2
$1{,}00 \cdot 10^{-2}$ ms	$1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s	-5
$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-12}$ s	-12
$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-35}$ s	-35
$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	$1{,}00 \cdot 10^{-43}$ s	-43

Se pueden colocar, ahora, en una recta los valores calculados para $\log_{10} t$:



La escala logarítmica proporciona una gráfica que permite visualizar de forma razonable los hitos temporales, considerando que el *Big Bang*, es decir, el origen del tiempo, se sitúa muy cerca de $\log_{10} t = -43$.

		log *t*	Diferencia
Hoy	J	18	61
	I	17	60
	H	17	60
	G	16	59
	F	13	56
	E	2	45
	D	-5	38
	C	-12	31
	B	-35	8
Big Bang	A	-43	0

15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

4

Los datos registrados en la tabla anterior pueden reordenarse en orden ascendente, tomando el origen del tiempo en log t = -43. Asimismo, se pueden calcular las distancias entre los puntos consecutivos:

	log t	Diferencia	Incremento sumativo (x)	10^x	Factor multiplicativo de crecimiento
A	-43	0	0	$1{,}00 \cdot 10^{0}$	1
B	-35	8	8	$1{,}00 \cdot 10^{8}$	100 000 000
C	-12	31	23	$1{,}00 \cdot 10^{23}$	10 000 000 000 0000 000 000 000
D	-5	38	7	$1{,}00 \cdot 10^{7}$	10 000 000
E	2	45	7	$1{,}00 \cdot 10^{7}$	10 000 000
F	13	56	11	$1{,}00 \cdot 10^{11}$	100 000 000 000
G	16	59	3	$1{,}00 \cdot 10^{3}$	1 000
H	17	60	1	$1{,}00 \cdot 10^{1}$	10
I	17	60	0	$1{,}09 \cdot 10^{0}$	1,09
J	18	1	18	$1{,}00 \cdot 10^{1}$	10

Puesto que los datos se proporcionan mediante una escala logarítmica decimal, el incremento sumativo (x) se puede reinterpretar cómo el factor de crecimiento entre un valor y otro, mediante las potencias de base 10 (10^x).

Las posiciones de los distintos puntos en la escala logarítmica evidencia cuáles son las distancias temporales entre dichos puntos.

Como se observa, la distancia, en términos temporales, entre los puntos B y C es muy superior al resto. Así mismo, el intervalo temporal correspondiente a los puntos C y D es muy similar al que corresponde a los puntos D y E.

5

Se ha de definir una función (escala) en la que la edad del Universo corresponda con 365 unidades temporales, que llamaremos *días monstruocósmicos*. Se divide, a su vez, los *días monstruocósmicos* en *horas monstruocósmicas*, *minutos monstrucósmicos* y *segundos monstruocósmicos*. Haciendo uso de esta escala, y teniendo en cuenta que la edad del Universo es del orden de 13.700 millones de años terrestres, se puede determinar la duración del *día monstruocósmico*, así como de la hora, el minuto y el segundo:

Día monstruocósmico	*Hora monstruocósmica*	*Minuto monstruocósmico*	*Segundo monstruocósmico*
13700×10^6÷365 → 3.8×10^{7}	Ans÷24 → 1.6×10^{6}	Ans÷60 → 2.6×10^{4}	Ans÷60 → 4.3×10^{2}

En consecuencia:

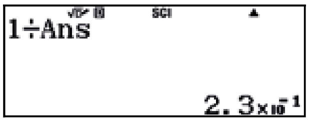
- 1 día *monstruocósmico* = $3{,}8 \cdot 10^{7}$ años terrestres
- 1 hora *monstruocósmica* = $1{,}6 \cdot 10^{6}$ años terrestres
- 1 minuto *monstruocósmico* = $2{,}6 \cdot 10^{4}$ años terrestres
- 1 segundo *monstruocósmico* = $4{,}3 \cdot 10^{2}$ = 430 años terrestres

De lo que se deduce que 1 centésima de segundo *monstrucósmico* equivale a unos 4,3 años terrestres:

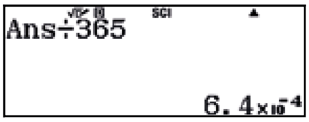
```
4.3×10^2÷100
                4.3×10^0
```

15 | Notación científica
Back to the BigBang: el timeline del Universo (II)

En consecuencia, 1 año terrestre equivale a 0,23 centésimas de segundo *monstrucósmico*, es decir, a 2,3 milésimas:



Se puede calcular, ahora, la equivalencia de 1 día terrestre con las unidades *monstruocósmicas*, dividiendo el resultado anterior entre 365:



Se obtiene, así, que un año terrestre equivale a 0,00064 centésimas de segundo *monstruocósmico*.

En conclusión, si el origen del Universo se sitúa en el inicio del 1 de enero, en la actualidad estaríamos viviendo en la última milésima de segundo del último minuto de la última hora del 31 de diciembre.

6

Actividad de debate dentro del aula.

7

Actividad de debate dentro del aula.

FUNCIONES

www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

Realizados por: FESPM

Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

07 | Función lineal
¡Hagamos la rotonda más grande!

El ayuntamiento de València desea ampliar una rotonda inicial de 3,5 m de radio, y volver a cercar aprovechando la valla que inicialmente la rodea.

1 ¿Cuánto mide la longitud de la valla inicial que la rodea?

2 Si aumentamos el radio 1,5 m, ¿cuánto aumenta la longitud de la valla nueva?

3 Completa la siguiente tabla:

Aumento del radio (m)	Aumento de la valla (m)
0	$A_L(0) = 0$
1	$A_L(1) = 2\pi \approx 6{,}2832$ m
1,25	
1,5	
1,75	
2	
2,25	
2,5	
x	$A_L(x) =$

4 Representa gráficamente la función $A_L(x)$. ¿Qué tipo de función es? Enumera sus características.

5 Si la longitud de la valla aumenta 1 m, ¿cuánto aumenta el radio? ¿Y si aumenta 15 m?

6 Si reponer 1 metro de valla cuesta 253 €, halla la expresión de la función que determina el coste del aumento de la valla. ¿Cuánto costaría el aumento de valla si el radio aumenta 2 m?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

07 | Función lineal
¡Hagamos la rotonda más grande!

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de los valores de una función.
  - Representar gráficamente funciones.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE* de la calculadora.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

La longitud de una circunferencia de radio 3,5 m es:

$$L(3{,}5) = 2\pi \cdot 3{,}5 = 7\pi \approx 21{,}99 \text{ m}$$

Si se aumenta el radio 1,5 m, la nueva rotonda tiene radio 5 m y su longitud es:

$$L(5) = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31{,}415 \text{ m}$$

El aumento de la longitud de la rotonda es:

$$A(1{,}5) = A_L(1{,}5) = 10\pi - 7\pi = 3\pi \approx 9{,}42 \text{ m}$$

Si el aumento del radio es x, la longitud de la nueva circunferencia es:

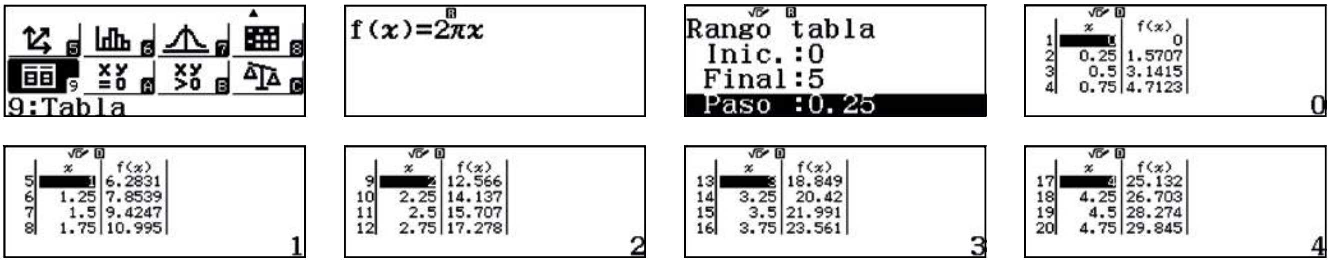
$$L(3{,}5 + x) = 2\pi \cdot (3{,}5 + x) = 7\pi + 2\pi \cdot x$$

El aumento de la longitud de la rotonda es:

$$A_L(x) = L(3{,}5 + x) - L(3{,}5) = 7\pi + 2\pi \cdot x - 7\pi = 2\pi \cdot x$$

Para calcular los valores de la tabla se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9):

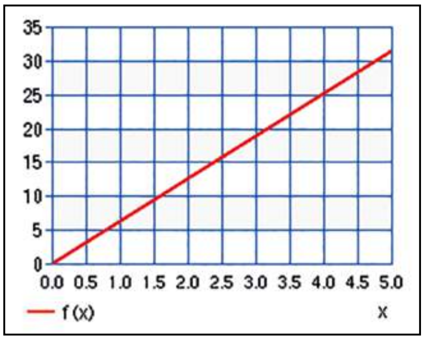
2 SHIFT x10^x x = 0 = 5 = 0 . 5 = =



Aumento del radio (m)	Aumento de la valla (m)
0	0
1	6,28
1,25	7,85
1,5	9,42
1,75	11,00
2	12,57
2,25	14,14
2,5	15,71
x	$A_L(x) = 2\pi x$

4

Se utiliza el código *QR* (SHIFT OPTN) para representar gráficamente la función:



Se observa que:

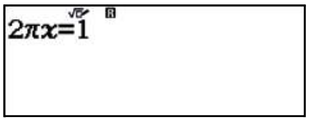
- La función es una recta.
- La pendiente o gradiente de la recta es $m = 2\pi > 0$. Entonces, la recta es creciente.
- La ordenada en el origen es $n = 0$, en consecuencia, la recta pasa por el origen de coordenadas.

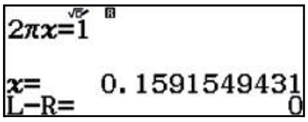
5

Para calcular en qué valor de x (aumento del radio) el aumento de la valla de la rotonda es 1 m, se resuelve la ecuación $A_L(x) = 1$ mediante la función *SOLVE*:

$$2\pi \cdot x = 1$$

2 SHIFT ×10ˣ x ALPHA CALC 1 SHIFT CALC =

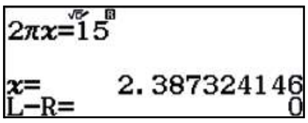




Aumentando 1 m la longitud de la valla de la rotonda, el radio aumenta aproximadamente 16 cm.

Análogamente, para calcular el aumento del radio x si la valla aumenta 15 m, se resuelve la ecuación $A_L(x) = 15$, obteniendo un aumento del radio aproximado de 2,39 m:

$$2\pi \cdot x = 15$$



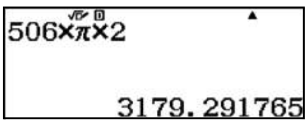
6

La expresión de la función *coste del aumento de la valla* es:

$$f(x) = 253 \cdot 2\pi \cdot x = 506\pi \cdot x$$

Si el aumento del radio de la valla es 2 m, el coste de reponerla es:

$$f(2) = 506\pi \cdot 2 \approx 3\,179{,}29 \text{ €}$$



09 | Función lineal, función cuadrática y función cúbica
Cuerda alrededor de la Tierra

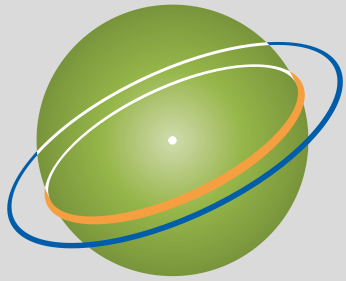
Imagina una cuerda que rodee la Tierra por el Ecuador.

¿Cuánto tendrías que alargar la cuerda para lograr que la distancia entre la cuerda y la superficie de la Tierra fuera de 1 metro en todos sus puntos?

¿Cuánto aumentaría el área del nuevo círculo?

Si envolviéramos la Tierra con una esfera a una distancia de 1 metro en todos sus puntos, ¿cuánto aumentaría el volumen de la esfera?

Nota: se adopta como radio de la Tierra el valor de 6 370 km.



A partir de una esfera de 1 m de radio, R = 1 m, se construye una nueva esfera concéntrica a la anterior de 2 metros de radio.

1 ¿Cuánto aumenta la longitud de la circunferencia máxima de la nueva esfera respecto a la longitud de la esfera inicial?

2 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento de la longitud
0	
1	
2	
3	
x	$A_L(x)$ =

3 ¿Qué tipo de función es $A_L(x)$? Represéntala gráficamente.

4 ¿Cuánto aumenta el área del círculo máximo de la nueva esfera respecto al de la esfera inicial si aumentamos el radio?

5 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento del área
0	
1	
2	
3	
x	$A_S(x)$ =

6 ¿Qué tipo de función es $A_S(x)$? Represéntala gráficamente.

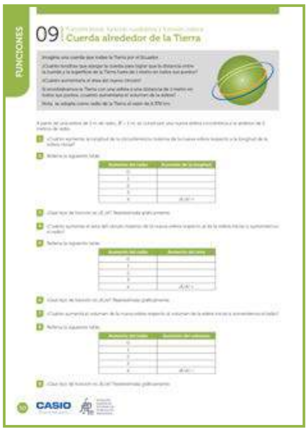
7 ¿Cuánto aumenta el volumen de la nueva esfera respecto al volumen de la esfera inicial si aumentamos el radio?

8 Rellena la siguiente tabla:

Aumento del radio	Aumento del volumen
0	
1	
2	
3	
x	$A_V(x)$ =

9 ¿Qué tipo de función es $A_V(x)$? Represéntala gráficamente.

Cuerda alrededor de la Tierra



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

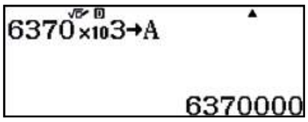
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Utilizar la notación científica.
  - Definir un valor constante con la memoria de la calculadora.
  - Construir la tabla de valores de funciones.
  - Representar gráficamente funciones.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

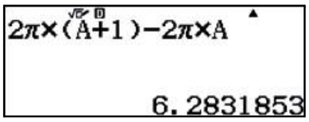
Como se van a efectuar diversas operaciones con el radio de la Tierra, es conveniente introducir su valor en la variable A (A = 6 370 · 10³ m):

6 3 7 0 x10ˣ 3 STO (–)

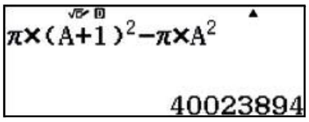


El aumento de longitud de la circunferencia, $2\pi \cdot (A + 1) - 2\pi \cdot A$, es aproximadamente 6,28 m:

2 SHIFT x10ˣ × (ALPHA (–) + 1) – 2 SHIFT x10ˣ × ALPHA (–) =

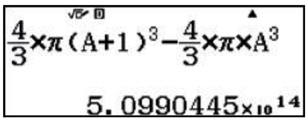


El aumento del área del círculo máximo, $\pi \cdot (A + 1)^2 - \pi \cdot A^2$, es aproximadamente 40 023 894 m², es decir, 40,02 km²:



El volumen de la esfera sufre un aumento aproximado de $5{,}1 \cdot 10^{14}$ m³, es decir, $5{,}1 \cdot 10^5$ km³:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (A + 1)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot A^3$$



1 2 3

Si x = 1 m el aumento de longitud es:

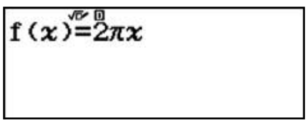
$$A_L(1) = 2\pi \cdot (1 + 1) - 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

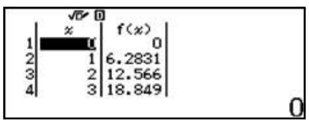
En general:

$$A_L(x) = 2\pi \cdot (1 + x) - 2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot x$$

Expresión de la que se deduce que es una función lineal.

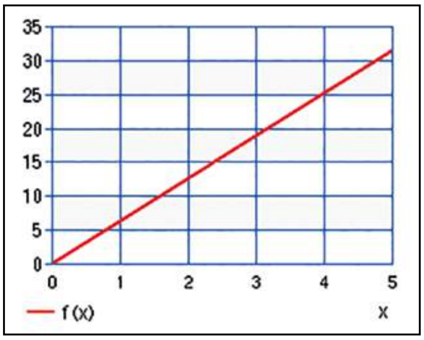
Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:





Aumento del radio	Aumento de la longitud
0	0
1	6,28
2	12,57
3	18,85
x	$A_L(x) = 2\pi \cdot x$

Para representar la función se utiliza el código *QR*:



4 5 6

Si $x = 1$ m el aumento del área es:

$$A_S(1) = \pi \cdot (1 + 1)^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$$

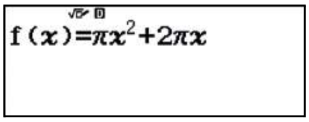
En general:

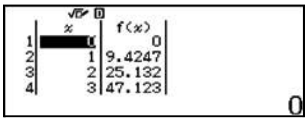
$$A_S(x) = \pi \cdot (x + 1)^2 - \pi \cdot 1^2$$

$$A_S(x) = \pi \cdot (x + 1)^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x$$

De esta expresión se deduce que la función es una parábola cóncava.

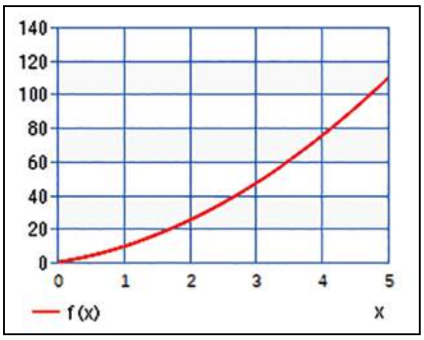
Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:





Aumento del radio	Aumento del área
0	0
1	9,42
2	25,13
3	47,12
x	$A_S(x) = \pi \cdot x^2 + 2\pi \cdot x$

Se genera el código *QR* para representar la función:



Cuerda alrededor de la Tierra

7 **8** **9**

Si x = 1 m el aumento del volumen es:

$$A_V(1) = \frac{4}{3}\pi \cdot (1+1)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{28}{3}\pi$$

En general se obtiene:

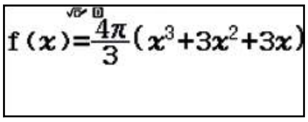
$$A_V(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot (x+1)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$$

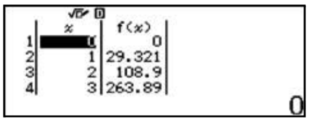
Expresión que al simplificar se transforma en:

$$A_V(x) = \frac{4\pi}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x)$$

Se trata de una función cúbica.

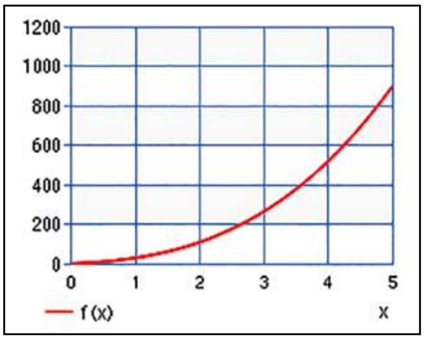
Para rellenar la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:





Aumento del radio	Aumento del volumen
0	0
1	29,32
2	108,9
3	263,89
x	$A_V(x) = \frac{4\pi}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x)$

La función se representa con el código *QR*:



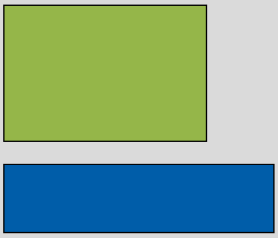
Ampliación

1 ¿Cuánto hay que aumentar el radio de la esfera inicial para que la longitud de la circunferencia máxima aumente en 1 km?

2 ¿Y si se desea duplicar el área del círculo máximo?

3 ¿Cuánto hay que aumentar el radio de la esfera inicial para que se duplique su volumen?

10 | Función lineal, función afín y función cuadrática
Rectángulos isoperimétricos



Se llaman rectángulos isoperimétricos a los rectángulos que tienen el mismo perímetro.

Si el perímetro es P, ¿cómo puedes averiguar la longitud de la base b, en función de la altura a?

¿Cuál es la fórmula que proporciona el área, A, de los rectángulos isoperimétricos en función de la altura?

1 Antes de contestar a las preguntas analiza algunos casos particulares.

Completa la siguiente tabla con algunos valores:

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40			
40			
40			
40			
40			
40	a	$b =$	$A =$

2 Elige otro valor para el perímetro y vuelve a completar una tabla como la anterior.

3 Representa gráficamente la función de la longitud de la base para cada uno de los casos particulares que has analizado.

¿Qué tipo de funciones son?

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas? ¿Para qué valores de x tiene sentido dibujar la gráfica en cada caso?

4 Representa gráficamente la función $f(x) = x$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 3**?

5 De todos los rectángulos isoperimétricos de perímetro P, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Representa gráficamente la función del área para cada uno de los dos casos particulares que has analizado.

¿Qué propiedades tienen en común ambas gráficas?

6 Representa gráficamente la función $f(x) = x^2$. ¿Qué transformaciones algebraicas hay que realizar para pasar de la función $f(x) = x^2$, a cada una de las gráficas obtenidas en el **apartado 5**?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Rectángulos isoperimétricos

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende que los estudiantes se aproximen al estudio de las familias de las funciones lineales y cuadráticas a partir del análisis de casos particulares y de su generalización en un contexto geométrico.
- Se pretende que el alumnado investigue sobre el efecto que producen en las gráficas de las funciones $f(x) = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ los cambios en los parámetros c y d, y las dilataciones verticales de factor $a = -1$.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

Perímetro (cm)	Longitud de la altura (cm)	Longitud de la base (cm)	Área (cm²)
40	1	19	19
40	5	15	75
40	10	10	100
40	15	5	75
40	19	1	19
40	a	$b = 20 - a$	$A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$

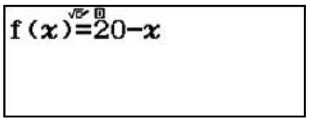
2

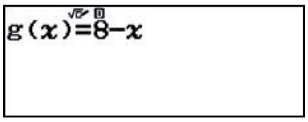
Respuesta abierta. Ejemplo: $P = 16$, $b = 8 - a$ y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$.

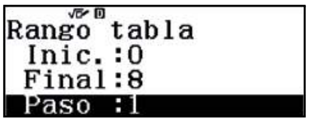
3

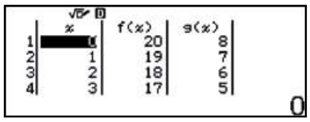
La longitud de la base se obtiene al despejar b en la expresión del perímetro de un rectángulo. Como la expresión del perímetro es $P = 2a + 2b$, $b = \frac{P}{2} - a$.

Las funciones $f(x) = 20 - x$ y $g(x) = 8 - x$ son afines. Para obtener sus gráficas se utiliza el menú *Tabla* (MENU 9) y se genera el código *QR* (SHIFT OPTN):









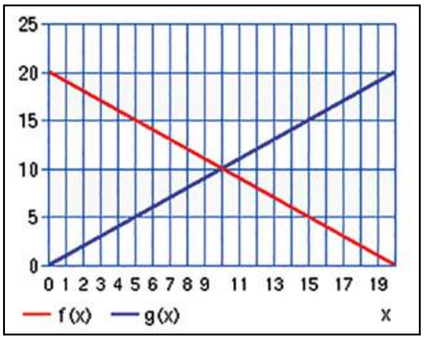
1/1

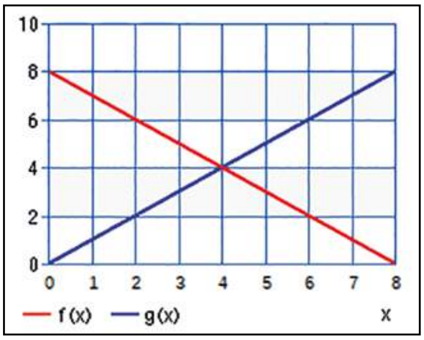
Ambas funciones tienen la misma pendiente y por tanto sus gráficas son rectas paralelas. Los valores de x para los que tiene sentido dibujar las gráficas son los que pertenecen al intervalo $\left[0, \frac{P}{2}\right]$.

Rectángulos isoperimétricos

4

En ambos casos se produce una dilatación vertical de factor –1. Hay una traslación vertical hacia arriba de 20 unidades para $f(x) = 20 - x$ y de 8 unidades para $g(x) = 8 - x$:



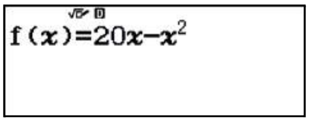


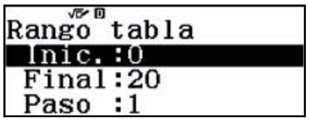
5

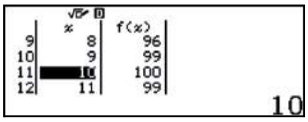
El área en los casos particulares analizados es $A = (20 - a) \cdot a = 20a - a^2$ para un rectángulo de perímetro 40 cm y $A = (8 - a) \cdot a = 8a - a^2$ si el perímetro es 16 cm. Generalizando, se obtiene que el área de un rectángulo de perímetro P es $A = \left(\frac{P}{2} - a\right) \cdot a = \frac{P}{2}\, a - a^2$. Todas las gráficas son parábolas convexas.

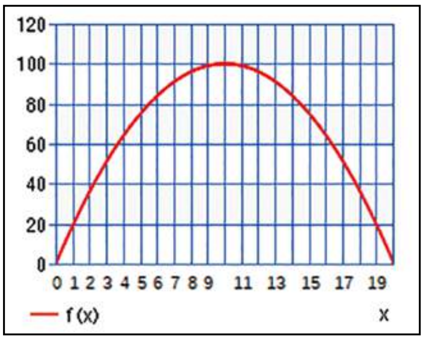
El área máxima se obtiene analizando los valores a partir de la tabla y de la gráfica o calculando el vértice de las parábolas mediante el menú *Ecuación/Función* (MENU ALPHA (–)).

Para P = 40 cm, (A = $20a - a^2$), se obtiene el área máxima con la tabla y la gráfica:

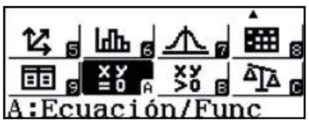


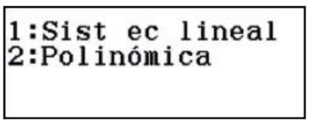


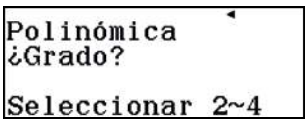


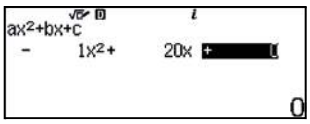


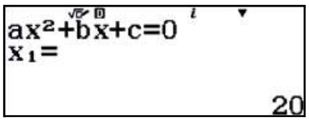
Con el menú *Ecuación/Función* además de las soluciones de la ecuación, se calcula también el vértice:

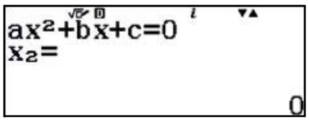


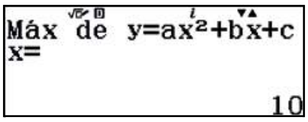


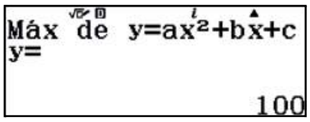






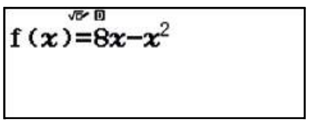


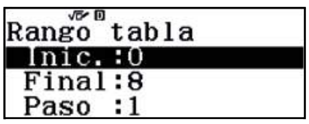


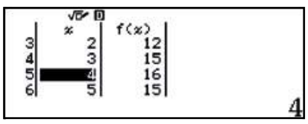


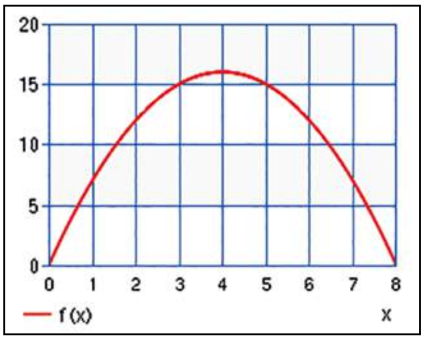
De las dos maneras, se obtiene que el área máxima se alcanza en x = 10 cm y su valor es 100 cm².

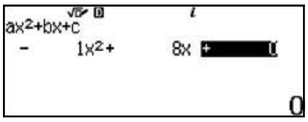
Al igual que antes, para P = 16 cm, ($A = 8a - a^2$), se utilizan los dos menús:

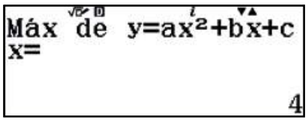


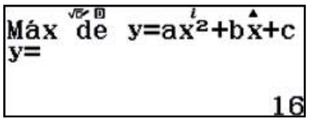












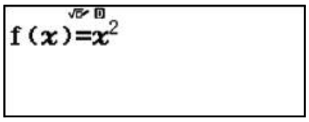
El área máxima se alcanza en $x = 4$ cm y su valor es 16 cm².

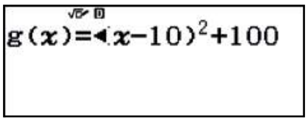
Generalizando, el área máxima se alcanza en $x = \frac{P}{4}$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado y su valor es $\left(\frac{P}{4}\right)^2$. El dominio de definición es $\left(0, \frac{P}{2}\right]$.

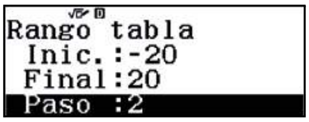
6

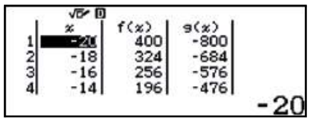
En ambos casos hay que hacer una dilatación vertical de factor –1, una traslación horizontal de $\frac{P}{4}$ unidades a la derecha y otra vertical de $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ unidades hacia arriba.

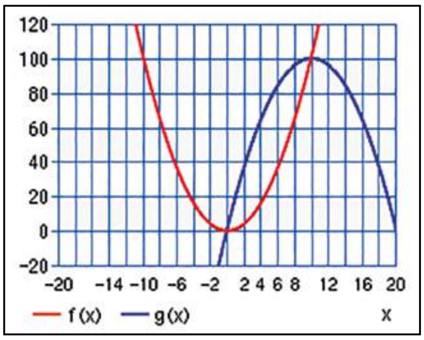
Perímetro = 40 cm. Área: $A = 20a - a^2 = -(a - 10)^2 + 100$





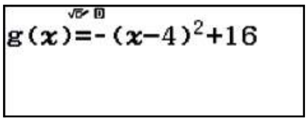


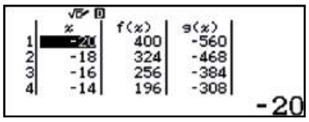


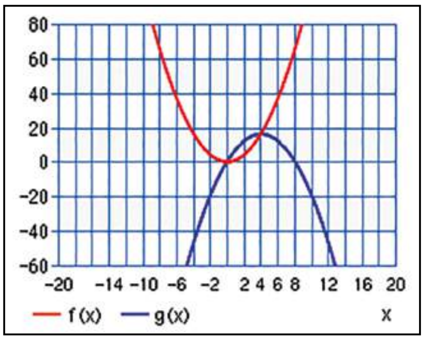


Traslación horizontal: 10 unidades a la derecha. Traslación vertical: 100 unidades hacia arriba.

Perímetro = 16 cm. Área: $A = 8a - a^2 = -(a - 4)^2 + 16$



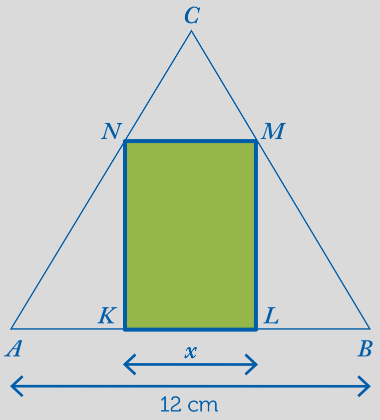




Traslación horizontal: 4 unidades a la derecha. Traslación vertical: 16 unidades hacia arriba.

12 Función cuadrática

Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero



En un triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ de lado $\overline{AB}$ = 12 cm se ha inscrito un rectángulo $KLMN$ de lado $\overline{KL}$ = x cm.

1 Calcula el área del rectángulo $KLMN$ para x = 2 cm.

2 Determina el área $S(x)$ del rectángulo $KLMN$ en función de $x = \overline{KL}$.

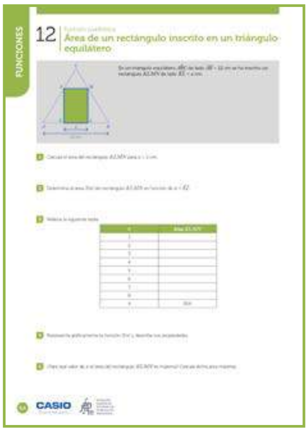
3 Rellena la siguiente tabla:

x	Área $KLMN$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
x	$S(x)$

4 Representa gráficamente la función $S(x)$ y describe sus propiedades.

5 ¿Para qué valor de x el área del rectángulo $KLMN$ es máxima? Calcula dicha área máxima.

12 | Función cuadrática
Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Calcular el valor máximo de una función
  - Representar gráficamente funciones.
  - Visualizar la simetría de la parábola.
  - Resolver ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

De la figura se deduce que:

$$\overline{AK} = \overline{BL} = 6 - \frac{x}{2}$$

$$\overline{MN} = \overline{CM} = \overline{CN} = x$$

$$\overline{AK} + \overline{BL} = 12 - x = \overline{AN} + \overline{BN}$$

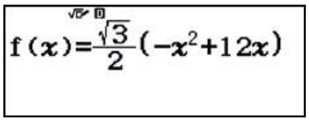
Por tanto, el área del rectángulo $KLMN$ es igual al área del triángulo equilátero $\overset{\triangle}{ABC}$ menos la suma de las áreas de dos triángulos equiláteros de lados x y $12 - x$, respectivamente:

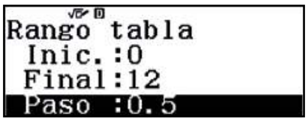
$$S_{KLMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 12^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12 - x)^2\right)$$

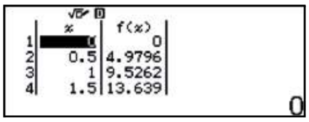
Simplificando la expresión se obtiene:

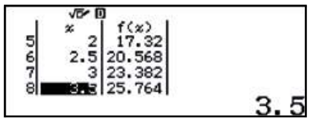
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x),\ x \in [0, 12]$$

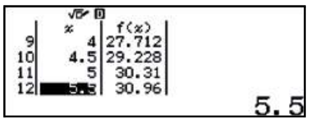
Se rellena la tabla de valores de esta función con el menú *Tabla*:

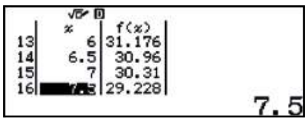


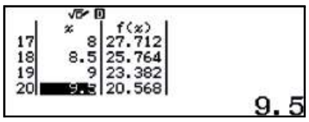


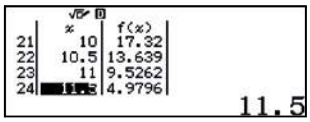












Si x = 2 cm, $S(2) = 10 \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}32$ cm^2.

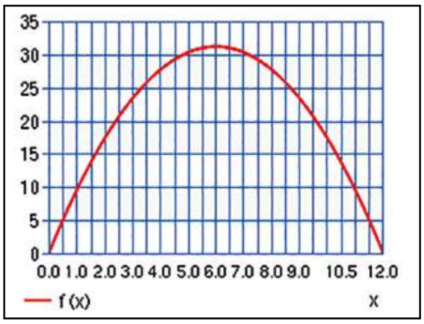
La tabla queda de la siguiente manera:

x	Área $KLMN$
1	9,53
2	17,32
3	23,38
4	27,12
5	30,96
6	31,18
7	30,31
8	27,71
x	$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x)$

12 Función cuadrática
Área de un rectángulo inscrito en un triángulo equilátero

4 5

Se utiliza el código *QR*:



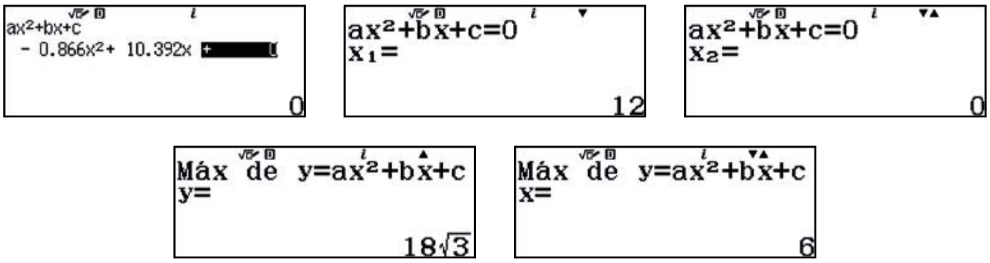
La gráfica de la función es una parábola convexa. El máximo se alcanza en el vértice, es decir, cuando x = 6 cm.

El menú *Ecuación/Función* permite hallar los puntos de corte con el eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$S(x) = 0$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-x^2 + 12x) = 0$$

Al mismo tiempo la calculadora muestra las coordenadas del vértice de la parábola, que en este caso corresponde al máximo de la función:



Los puntos de corte con el eje de abscisas son (0, 0) y (12, 0) .

El valor máximo se alcanza cuando x = 6 cm y el área máxima es:

$$S(6) = 18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Finalmente, se observa que, para el valor máximo $\overline{MN}$ es paralela media del triángulo equilátero. Entonces, $\overline{KN}$ es igual a la mitad de la altura del triángulo equilátero.

13 | Función cuadrática
Choque frontal

El test SHARP para cascos y el EURO NCAP para coches, ofrecen información del nivel de seguridad para los usuarios. Ambos se han convertido en un estándar de referencia en su campo.

Las pruebas de EURO NCAP son cada vez más exigentes. A día de hoy, los coches exhiben un máximo de cinco estrellas, no solo por la protección de los pasajeros y de los peatones ante una colisión, sino también por su capacidad de evitar accidentes. Las pruebas representan casos reales de accidentes que podrían ocasionar lesiones personales o la muerte. Los fabricantes deben demostrar que sus coches están equipados, de serie, con la tecnología necesaria para evitar o mitigar accidentes y que cuando estos se produzcan, la protección sea la adecuada para los pasajeros y los demás usuarios de la carretera.

En las imágenes se observa la diferencia entre el mismo test para un coche de hace 20 años y uno actual. Aunque sea visible la mejora de los sistemas de seguridad pasiva, ¿no debemos ser más activos en pro de nuestra propia seguridad?

1 En una caída libre, en el instante inicial, un objeto se encuentra a su máxima altura (h_0) y sin velocidad inicial, de manera que su energía inicial es exclusivamente energía potencial ($Ep_0 = m \cdot g \cdot h_0$). A medida que transcurre la caída, la energía potencial se va transformando en energía cinética ($Ec = \frac{1}{2} m \cdot v^2$) de tal forma que, en el momento de la colisión contra el suelo, toda la energía potencial en el momento inicial (Ep_0) se ha transformado en energía cinética final (Ec_F), dándose la siguiente igualdad:

$$Ep_0 = Ec_F$$
$$m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F^2$$

En el caso del choque frontal entre dos vehículos de igual masa y que circulan a la misma velocidad y sentido contrario ($v_1 = -v_2 = v_{choque}$), la energía cinética total será la suma de las energías cinéticas de ambos vehículos:

$$Ec_{choque} = Ec_{v_1} + Ec_{v_2} = \frac{1}{2} m \cdot v_{choque}^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_{choque}^2 = m \cdot v_{choque}^2$$

Utilizando la información anterior y sabiendo que la altura media de una planta de un edificio es de 3 m, realiza una tabla de equivalencia que relacione la velocidad en un choque frontal entre dos vehículos de igual masa que circulan a la misma velocidad (expresada en km/h), con el número de plantas de caída libre de uno de ellos, necesarias para que la energía cinética en el momento del choque frontal sea igual a la energía cinética de la caída en el momento del impacto con el suelo.

Choque frontal

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad está diseñada para concienciar al alumnado, como usuario de distintos medios de transporte, en el uso de medidas de seguridad pasiva y en la conducción responsable. Para resolverla hay que tener en cuenta que estamos buscando la equivalencia energética entre dos situaciones distintas: un choque frontal de dos vehículos de igual masa a igual velocidad y el impacto contra el suelo en una caída libre de uno de esos coches. Esta equivalencia la hacemos a través de las energías cinéticas en el momento del impacto en ambas situaciones.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Si se iguala a la energía cinética de la caída libre en el momento del impacto contra el suelo quedaría:

$$Ec_{F_{caída}} = Ec_{choque} \Rightarrow \frac{1}{2}\, m \cdot v_{caída}^2 = m \cdot v_{choque}^2$$

Por lo que la equivalencia es:

$$v_{caída}^2 = 2 \cdot v_{choque}^2 \Rightarrow v_{caída} = \sqrt{2} \cdot v_{choque}$$

Sin embargo, lo que se busca es la equivalencia entre velocidad de una situación y la altura en la otra, por lo que se tiene que:

$$Ep_0 = Ec_{caída} \Rightarrow Ep_0 = Ec_{choque}$$

$$m \cdot g \cdot h_0 = m \cdot v_{choque}^2$$

$$h_0 = \frac{v_{choque}^2}{g}$$

Se modifica la expresión para que la velocidad (que viene dada en km/h) se exprese en m/s:

$$h_0 = \frac{1}{g}\left(\frac{v_{choque} \cdot 1000}{3600}\right)^2$$

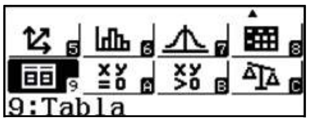
O lo que es lo mismo:

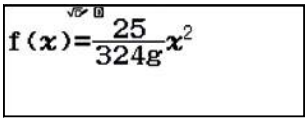
$$h_0 = \frac{25}{324 \cdot g}\, v_{choque}^2$$

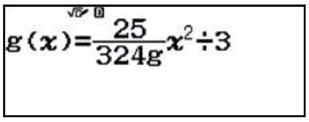
Para obtener el número de plantas del edificio solo se divide la expresión anterior entre 3 y se realiza la tabla de valores:

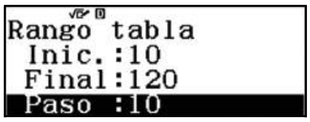
2 5 ▭ 3 2 4 SHIFT 7 ▼ 1 1 ▶ x x²

= = 1 0 = 1 2 0 = 1 0

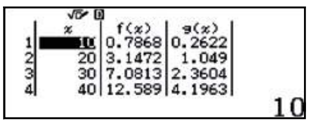


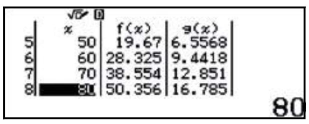


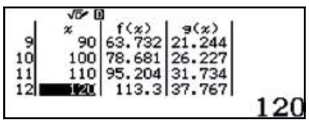




= =

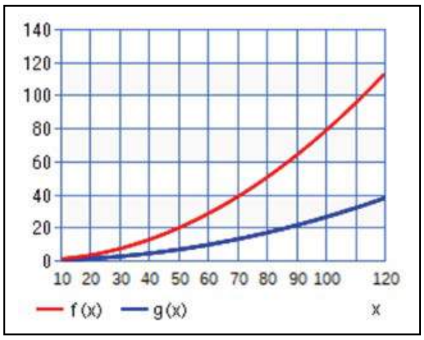






13 Función cuadrática
Choque frontal

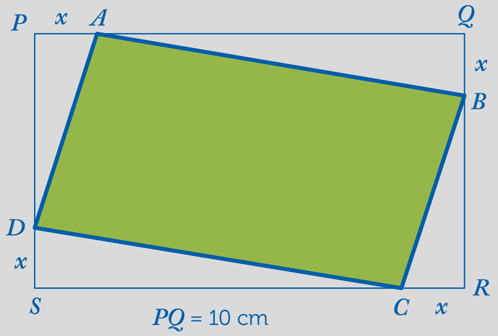
Se utiliza el código *QR* (SHIFT OPTN) para representar gráficamente la función cuadrática:



Se aprecia como la energía cinética en un choque frontal entre dos vehículos (de igual masa) que circulen ambos a una velocidad de 50 km/h, equivale a la energía que tiene cualquiera de ellos al impactar contra el suelo si cae desde una altura de aproximadamente 20 metros o, lo que es lo mismo, desde lo alto de un edificio de aproximadamente 7 plantas. Se comenta con el alumnado otros resultados que aparecen en las tablas y se enfatiza el hecho de que, como el modelo es cuadrático, si la razón entre dos velocidades de choque es k, la razón entre las alturas es k^2; entonces, si en lugar de chocar a 10 km/h choca a 30 km/h el valor correspondiente para la altura será aproximadamente:

$$0{,}7868 \text{ m} \cdot 3^2 = 7{,}0813 \text{ m}$$

14 Función cuadrática
Área de un cuadrilátero



En el rectángulo $PQRS$ de lados $\overline{PQ}$ = 10 cm y $\overline{PS}$ = 6 cm se inscribe el paralelogramo $ABCD$.

Los vértices A, B, C, D pertenecen a los lados $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, respectivamente, de forma que:

$$\overline{PA} = \overline{QB} = \overline{RC} = \overline{SD} = x$$

1 Calcula el área del cuadrilátero $ABCD$ para x = 1 cm.

2 ¿Qué valores puede tomar x?

3 Rellena la siguiente tabla:

x	Área $ABCD$
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	
4,5	
5	
x	$S(x)$

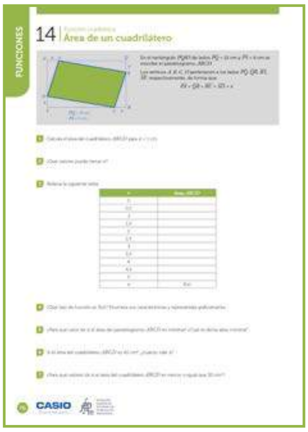
4 ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Enumera sus características y represéntala gráficamente.

5 ¿Para qué valor de x el área del paralelogramo $ABCD$ es mínima? ¿Cuál es dicha área mínima?

6 Si el área del cuadrilátero $ABCD$ es 40 cm², ¿cuánto vale x?

7 ¿Para qué valores de x el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm²?

14 | Función cuadrática
Área de un cuadrilátero



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

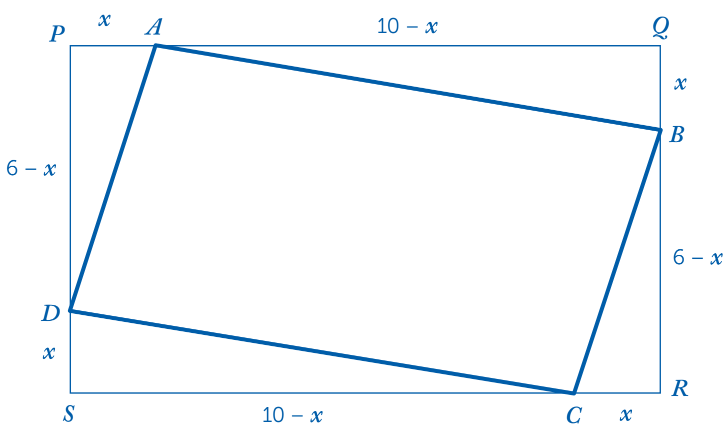
NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Calcular el valor mínimo de una función.
  - Representar funciones gráficamente.
  - Resolver ecuaciones de segundo grado.
  - Resolver inecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2 3

De la figura se deduce que el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual al área del rectángulo $PQRS$ menos la suma de las áreas de los triángulos rectángulos PAD, QAB, RCB y SCD, por tanto, el área viene expresado por:



$$S_{ABCD} = 10 \cdot 6 - \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (10 - x)\right) =$$

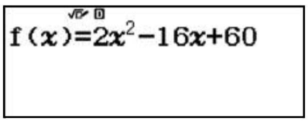
$$10 \cdot 6 - \left(\frac{2 \cdot x \cdot (6 - x)}{2} + \frac{2 \cdot x \cdot (10 - x)}{2}\right) =$$

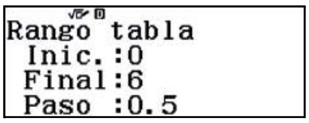
$$10 \cdot 6 - (x \cdot (6 - x) + x \cdot (10 - x))$$

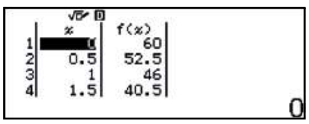
Simplificando la expresión se obtiene:

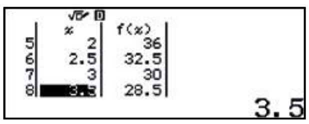
$$S(x) = 2x^2 - 16x + 60,\ x \in [0, 6]$$

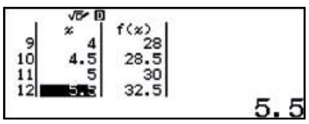
Para construir la tabla de valores se utiliza el menú *Tabla*:











En la tabla se observa que $S(1) = 46$ cm^2.

14 | Función cuadrática
Área de un cuadrilátero

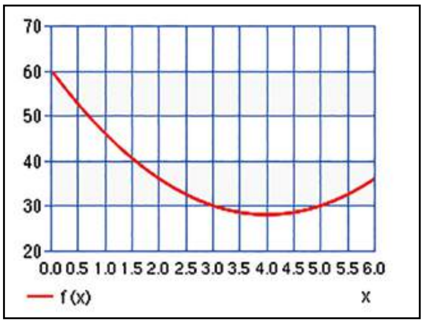
La tabla queda de la siguiente manera:

x	Área $ABCD$
0	60
0,5	52,5
1	46
1,5	40,5
2	36
2,5	32,5
3	30
3,5	28,5
4	28
4,5	28,5
5	30
x	$S(x) = 2x^2 - 16x + 60$

4

La representación de la función se obtiene mediante el código *QR*:

1/1



La gráfica de la función $S(x)$ es una parábola cóncava.

5

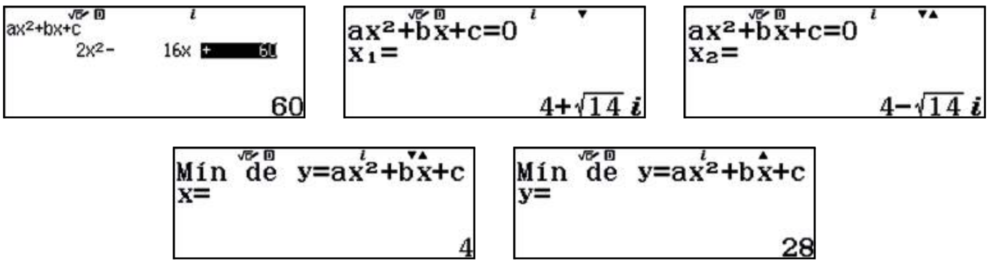
En la gráfica se observa que el mínimo se alcanza en el vértice: $x = 4$.

El menú *Ecuación/Función* permite hallar los puntos de corte con el eje de abscisas resolviendo la ecuación:

$$S(x) = 0$$

$$2x^2 - 16x + 60 = 0$$

La calculadora muestra también las coordenadas del vértice de la parábola, que en este caso corresponde al mínimo de la función:



En consecuencia, el mínimo se alcanza en $x = 4$ cm y el área mínima del cuadrilátero $ABCD$ es $S(4) = 28$ cm².

6

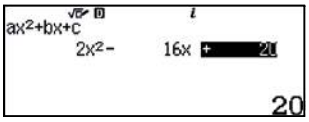
Para determinar los valores de x para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es 40 cm², se resuelve la ecuación:

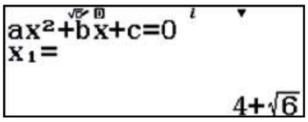
$$S(x) = 40$$

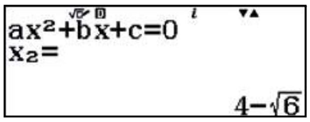
$$2x^2 - 16x + 60 = 40$$

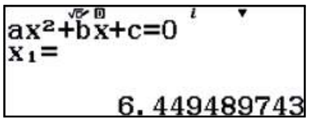
$$2x^2 - 16x + 20 = 0$$

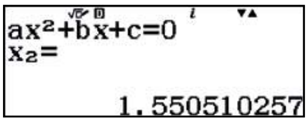
Se utiliza el menú *Ecuación/Función*:











La primera solución no pertenece al dominio.

Así pues, el área del cuadrilátero es 40 cm² cuando $x = 4 - \sqrt{6} \approx 1{,}55$ cm.

7

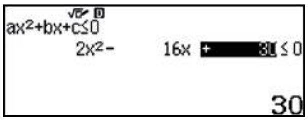
Para determinar los valores para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm² se resuelve la inecuación:

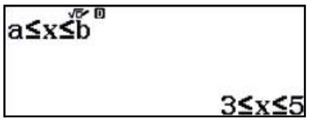
$$S(x) \leq 30$$

$$2x^2 - 16x + 60 \leq 30$$

$$2x^2 - 16x + 30 \leq 0$$

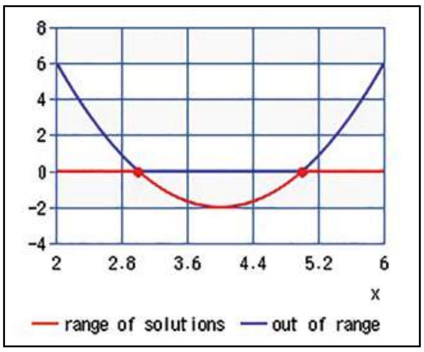
Se utiliza el menú *Inecuación*:



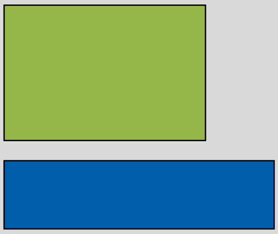


El área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm² cuando $x \in [3, 5]$.

Con el código *QR* se obtiene la representación gráfica de la solución de la inecuación:



16 | Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes



Se llaman rectángulos equivalentes a los rectángulos que tienen la misma área.

La fórmula $x \cdot y = 36$ expresa el área de todos los rectángulos de área 36 u^2, en la que x representa la longitud de la base e y la longitud de la altura.

1 Completa la tabla siguiente con algunos valores:

Longitud de la base	Longitud de la altura	Área	Perímetro
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	
		36	

2 ¿Cuántos rectángulos diferentes de dimensiones enteras se pueden construir? Explica cómo lo has averiguado.

3 ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden construir?

Escribe la fórmula que permite obtener la longitud de la altura de un rectángulo de área 36 u^2 a partir de la longitud de la base.

Representa gráficamente la función anterior y analiza sus características.

¿Cuál es el rectángulo que tiene el perímetro más pequeño?

4 ¿Qué le ocurre a la altura de los rectángulos de área 36 u^2 a medida que la base toma valores muy próximos a cero? ¿Y si la base toma valores cada vez más grandes?

5 Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y compara sus características con la función de la altura.

6 Representa gráficamente distintas funciones del tipo $f(x) = \frac{a}{x}$ y compáralas con la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

¿Qué cambios se producen en la gráfica de la función al variar el valor del parámetro a?

16 | Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad permite utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre la altura y la base de rectángulos equivalentes.
- Este contexto sirve para analizar las características de la función de proporcionalidad inversa, y en particular, sus asíntotas.
- Con las últimas actividades se estudia las dilataciones en la familia de funciones de proporcionalidad inversa.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2

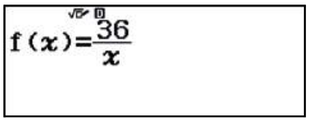
Se pueden construir 9 rectángulos. Las dimensiones de la base y la altura son los divisores de 36. Se utiliza la tabla para recoger todas las posibilidades:

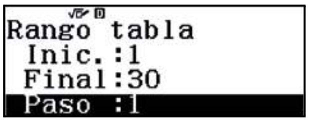
Longitud de la base	Longitud de la altura	Área	Perímetro
1	36	36	74
2	18	36	40
3	12	36	30
4	9	36	26
6	6	36	24
9	4	36	26
12	3	36	30
18	2	36	40
36	1	36	74

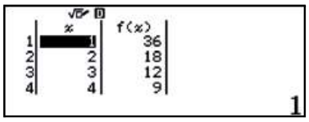
3

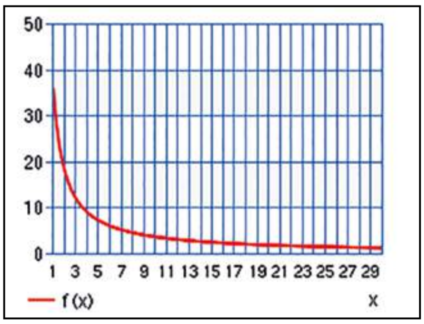
Se pueden construir infinitos rectángulos. La fórmula de la altura es $y = \frac{36}{x}$, siendo x la longitud de la base.

Su representación gráfica se puede obtener utilizando el menú *Tabla* y el código *QR*:





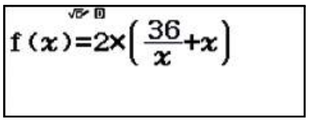


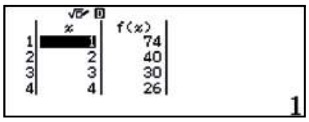


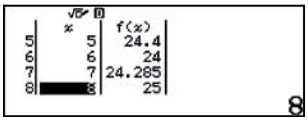
16 | Función de proporcionalidad inversa
Rectángulos equivalentes

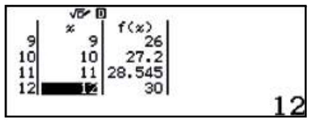
La expresión del perímetro es $P = 2 \cdot \left(\frac{36}{x} + x\right)$.

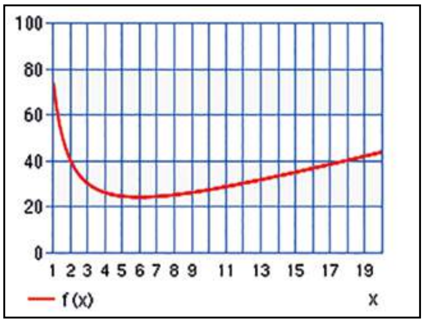
Mediante la tabla de valores o su gráfica se comprueba que el rectángulo de perímetro mínimo es el cuadrado:





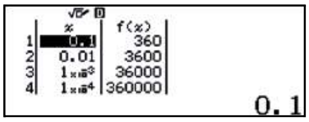


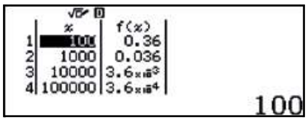




4

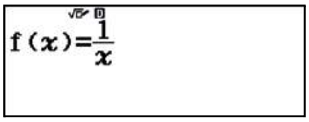
A medida que la longitud de la base se aproxima a cero, la altura tiende a infinito. Es decir, la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Cuando la base toma valores cada vez más grandes, la altura tiende a 0. Es decir, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$:

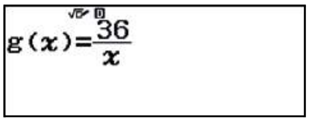


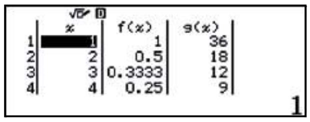


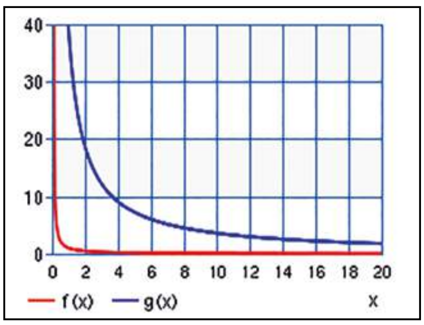
5

Si se comparan ambas funciones en un mismo gráfico se observa que tienen las mismas propiedades: mismo dominio, recorrido y asíntotas. La función de la altura es una transformación de la función de proporcionalidad inversa. Se trata de una dilatación vertical de factor 36:









CASIO División Educativa

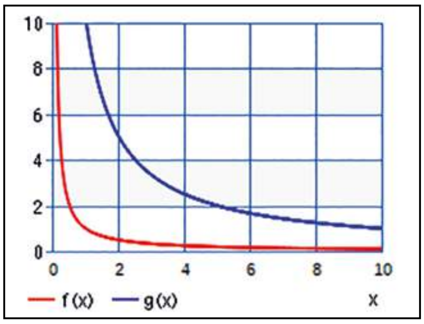
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

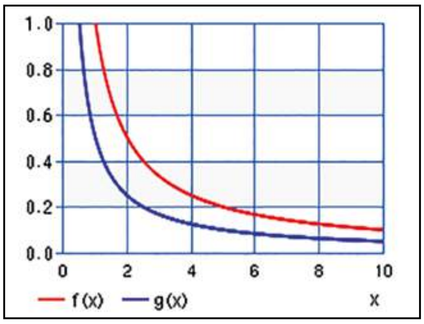
6

Los cambios en el parámetro a producen dilataciones verticales en la gráfica:

$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{10}{x}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{0{,}5}{x}$

1/1 $\qquad$ 1/1





Ampliación

1 **Parejas de divisores**

Los números enteros positivos a y b satisfacen la relación $a \cdot b = 2010$.

Si $a > b$, ¿cuál es el menor valor posible de $a - b$?

¿Cuál es el menor valor posible de $a - b$ si a y b son números reales positivos?

¿Cuál es el menor valor posible de $a - b$ si a y b son números reales cualesquiera?

Maurici Contreras
Calendario matemático 2014-15: 27 de abril
SEMCV

17 | Función de proporcionalidad inversa
Gases. Ley de Boyle-Mariotte

El físico y químico anglo-irlandés Robert Boyle (1662) y el físico y botánico francés Edme Mariotte (1676) formularon, de forma independiente, una de las leyes de los gases, la ley de Boyle-Mariotte que relaciona el volumen y la presión de una cierta cantidad de gas mantenida a temperatura constante.

En un recipiente cerrado, a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que se le aplica.

En términos matemáticos $P \cdot V = k$. Siendo k constante si la temperatura y la masa se mantienen constantes.

Al aumentar el volumen, las partículas (átomos o moléculas) del gas tardan más en llegar a las paredes del recipiente y por lo tanto chocan menos veces por unidad de tiempo contra ellas. Esto significa que la presión será menor ya que ésta representa la frecuencia de choques del gas contra las paredes. Cuando disminuye el volumen la distancia que tienen que recorrer las partículas es menor y por tanto se producen más choques en cada unidad de tiempo, es decir, aumenta la presión.

No es necesario conocer el valor exacto de la constante k para poder utilizar dicha ley. Supongamos que tenemos un cierto volumen de gas V_1 que se encuentra a una presión P_1 al comienzo del experimento. Si variamos el volumen de gas hasta un nuevo valor V_2, entonces la presión cambiará a P_2, y se cumplirá que:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

Para poder verificar su teoría, Boyle introdujo un gas en un cilindro con un émbolo y comprobó las distintas presiones al bajar el émbolo.

V(L)	Presión (atm)
60	0,5
30	1,0
20	1,5
15	2,0
12	2,5
10	3

1 Representa los datos del experimento, obtén la expresión de la función que relaciona la presión según el volumen y represéntala gráficamente.

2 ¿Qué presión se debe aplicar para que el gas ocupe 25 L? ¿Cuál será el volumen si se aplica una presión de 2,25 atm?

3 Otro gas ocupa 8 L a una presión de 2,5 atm. Si la temperatura permanece constante, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

La presión también se puede expresar en mmHg: 1 atm equivale a 760 mmHg.

¿Cuál es la presión en mmHg, si se pasa a un recipiente de 5 L? ¿Qué volumen ocupa el gas si se le aplica una presión de 950 mmHg?

Averigua la expresión de la función que relaciona la presión según el volumen para este gas y represéntala gráficamente.

4 Compara las dos gráficas que has obtenido. ¿Qué características tienen en común? ¿Qué diferencias observas?

17 | Función de proporcionalidad inversa
Gases. Ley de Boyle-Mariotte

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

- Esta actividad pretende utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre el volumen y la presión de los gases, en un recipiente cerrado a temperatura constante. Este contexto favorece un análisis significativo de las características de la función de proporcionalidad inversa y propicia el estudio del efecto en la gráfica de la variación del parámetro a en la expresión analítica de una función cuya expresión general es:

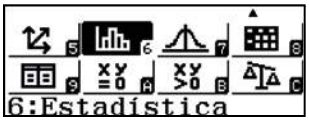
$$f(x) = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$$

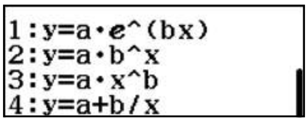
- Además, los factores de conversión, permiten en un mismo contexto utilizar la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se elige el menú *Estadística* opción $y = a + \frac{b}{x}$ (MENU 6 ▼ 4) sin frecuencias, que se desactivan con la siguiente secuencia: SHIFT MENU ▼ 3 2.

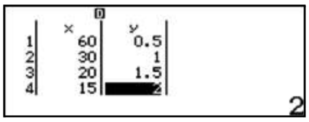
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

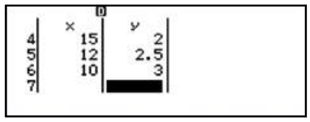
1

Se introducen los datos del experimento en la calculadora desde el menú *Estadística* y se genera un código *QR* pulsando las teclas SHIFT OPTN:

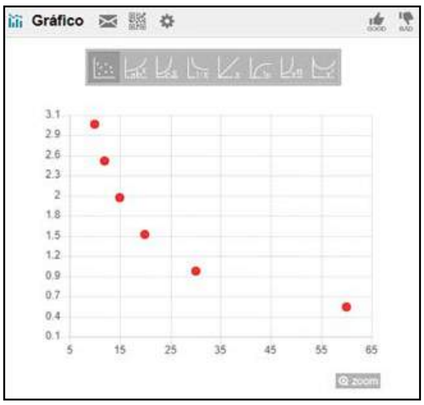


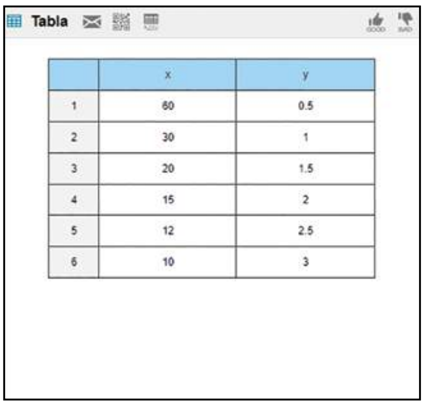






La nube de puntos obtenida es:



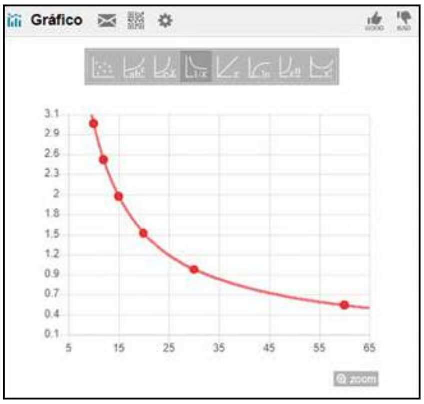


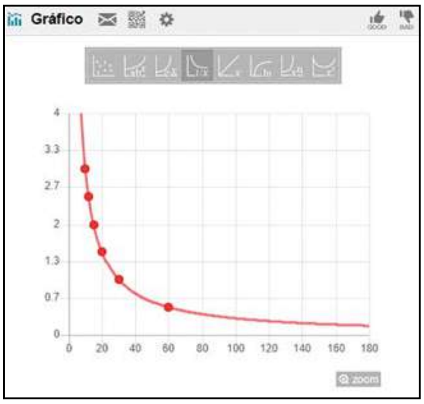
Tabla

	x	y
1	60	0.5
2	30	1
3	20	1.5
4	15	2
5	12	2.5
6	10	3

17 | Función de proporcionalidad inversa
Gases. Ley de Boyle-Mariotte

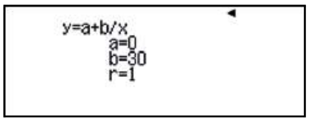
El servicio de visualización en línea permite obtener la gráfica de la regresión y modificar la escala:





La expresión se obtiene desde *Cálc regresión* (OPTN 4):

$$P = \frac{30}{V}$$



El valor de la constante de proporcionalidad, k = 30, se obtiene fácilmente multiplicando los pares de valores de la tabla de datos.

2

P (25) = $\frac{30}{25}$ = 1,2 atm

V (2,25) = $\frac{30}{2{,}25}$ = 13,3 L

3

La constante de proporcionalidad es:

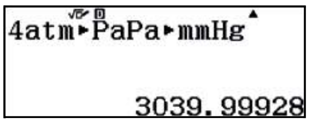
$$k = 8 \cdot 2{,}5 = 20 \text{ atm}$$

Utilizando la expresión $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$, se obtiene 8 · 2,5 = P_2 · 5. De donde se deduce que $P_2 = \frac{20}{5}$ = 4 atm.

Haciendo la conversión de atm a mmHg, se obtiene:

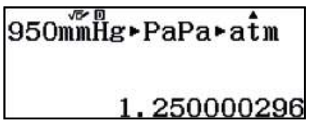
$$4 \text{ atm} \cdot \frac{760 \text{ mmHg}}{1 \text{ atm}} = 3040 \text{ mmHg}$$

4 SHIFT 8 ▼ 2 1 SHIFT 8 ▼ 2 4 =



De la misma manera, 950 mmHg · $\frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}}$ = 1,25 atm:

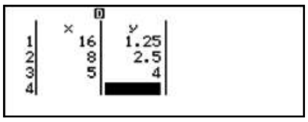
9 5 0 SHIFT 8 ▼ 2 3 SHIFT 8 ▼ 2 2 =

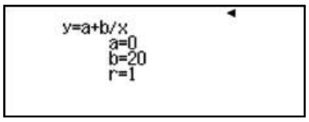


A partir de la expresión $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$, se obtiene $V_2 = \frac{20}{1{,}25}$ = 16 L.

Gases. Ley de Boyle-Mariotte

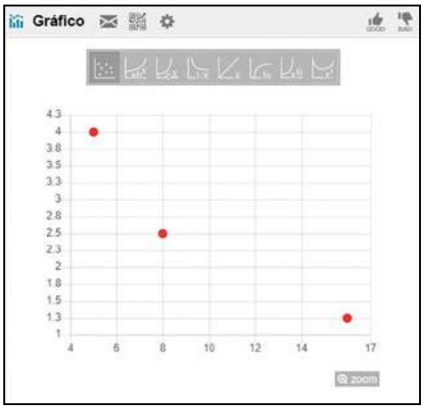
La expresión de la función presión-volumen se obtiene con el menú *Estadística*:

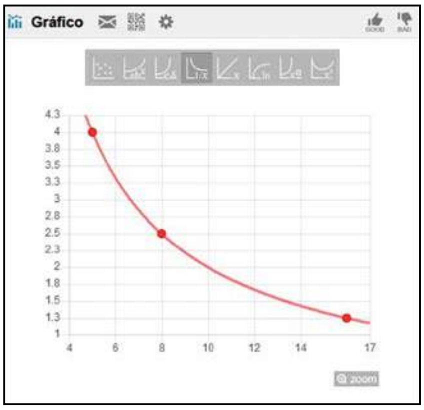




Por consiguiente, $P = \frac{20}{V}$.

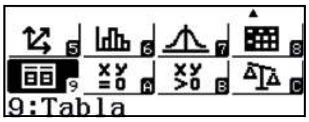
Se obtiene la gráfica generando un código *QR* desde la tabla de datos:

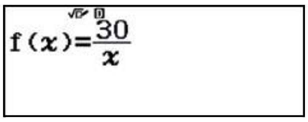


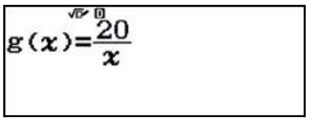


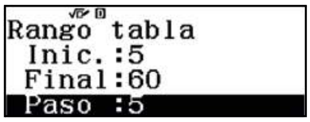
4

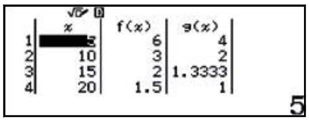
Se introducen las dos funciones en el menú *Tabla* y se obtiene la representación gráfica generando un código *QR*:

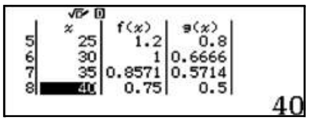


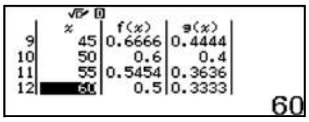


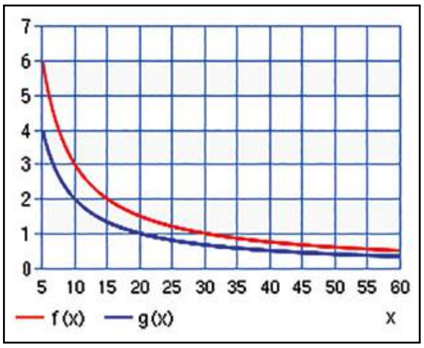












Se observa que se trata de sendas dilataciones verticales de factor positivo. Estas dilataciones no modifican las asíntotas, si el parámetro a (constante de proporcionalidad) crece, la dilatación es cada vez mayor, es decir, la gráfica es más "estirada".

18 | Función racional
Pisando fuerte

La empresa *Adelante* fabrica zapatillas deportivas y quiere lanzar un nuevo modelo llamado *Pisa Fuerte*.

Para la producción de dichas zapatillas necesita una inversión inicial de 1 000 € y la fabricación de cada par de zapatillas le supone un gasto de 50 €.

1 Si la empresa fabrica 100 pares de zapatillas ¿qué coste de fabricación tiene cada par de zapatillas?

2 Rellena la siguiente tabla:

Número de pares fabricados	Coste por par de zapatillas (€)
10	
25	
50	
100	
150	
200	
250	
x	$c(x)$

3 Representa gráficamente la función $c(x)$. ¿Qué tipo de función es $c(x)$? Describe sus características.

4 Si la empresa *Adelante* quiere que un par de zapatillas tenga un coste de fabricación de 75 €, ¿cuántos pares tiene que fabricar?

5 Haz una tabla de valores de las funciones $c(x)$ y $g(x) = \frac{1000}{x}$ cuando $x \in \,]0, +\infty[$.

6 Compara las características de las funciones $c(x)$ y $g(x)$.

7 Si la empresa quiere obtener un beneficio del 20% por la venta de las zapatillas *Pisa Fuerte*, ¿a qué precio tiene que vender cada par de zapatillas?

8 ¿Cuántos pares debe vender como mínimo para que el precio no supere los 95 €?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

18 | Función racional
Pisando fuerte

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente.
  - Estudiar las características de la función racional.
  - Resolver una ecuación racional.
  - Comparar dos funciones racionales.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Si se fabrican 100 pares de zapatillas el coste de fabricación por unidad es:

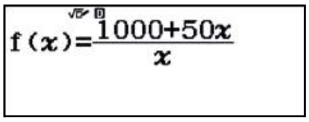
$$\frac{1000 + 50 \cdot 100}{100} = 60 \text{ €}$$

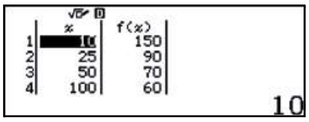
Si x es el número de pares de zapatillas fabricadas, el coste por unidad es:

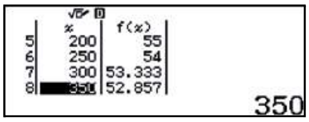
$$c(x) = \frac{1000 + 50x}{x} = \frac{1000}{x} + 50,\ x \in]0, +\infty[$$

2

Se completa la tabla de la función utilizando el menú *Tabla*:



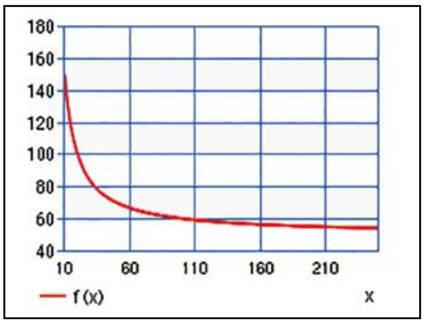




Número de pares fabricados	Coste por par de zapatillas (€)
10	150
25	90
50	70
100	60
150	55
200	54
250	30
x	$S(x) = \frac{1000 + 50x}{x}$

3

Para representar gráficamente la función se utiliza el código *QR*.

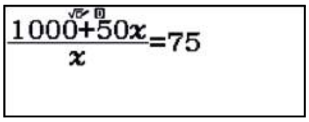


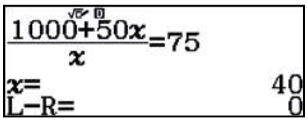
Es una función racional. La función es decreciente.

4

Para calcular cuántos pares se tienen que fabricar para que el coste del par sea 75 € se resuelve la ecuación con la función *SOLVE*:

$$\frac{1000 + 50x}{x} = 75$$

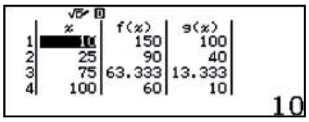


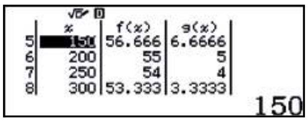


Por consiguiente, se tienen que fabricar 40 pares de zapatillas.

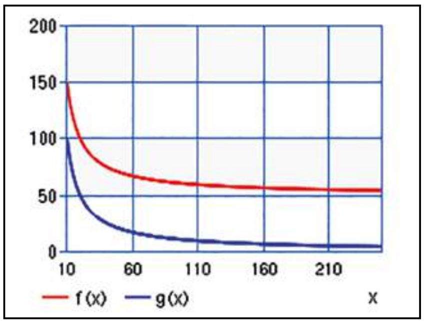
5

Se construyen las tablas de las funciones $c(x)$ y $g(x) = \frac{1000}{x}$ cuando $x \in\ ]0, +\infty[$:





Con el código *QR* se obtienen las gráficas de las dos funciones en los mismos ejes:



6

Se observa que $c(x) = \frac{1000}{x} + 50 = g(x) + 50$.

La función $c(x)$ es una traslación vertical de 50 unidades hacia arriba de la función $g(x) = \frac{1000}{x}$, $x \in\ ]0, +\infty[$.

De la expresión $c(x) = \frac{1000}{x} + 50$ se deduce que el coste de fabricación de un par de zapatillas siempre es mayor de 50 €.

7

La función que proporciona el precio de venta de cada par de zapatillas para ganar un 20% es:

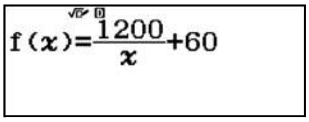
$$p(x) = \frac{120}{100} \cdot \frac{1000 + 50x}{x}$$

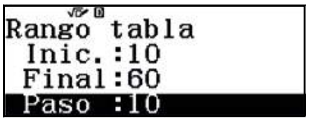
Simplificando se obtiene:

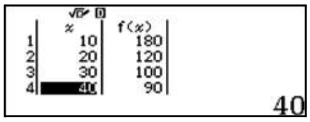
$$p(x) = \frac{1200 + 60x}{x} = \frac{1200}{x} + 60$$

8

Para obtener el número mínimo de pares de zapatillas para que el precio no supere los 95 € se utiliza el menú *Tabla*:

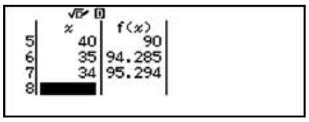




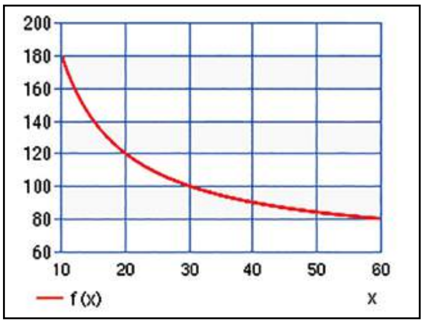


De los valores de la tabla se deduce que se deben vender más de 30 y menos de 40 pares de zapatillas.

Por iteración, se observa que hay que vender al menos 35 pares de zapatillas:

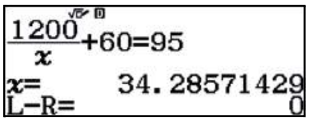


Mediante el código *QR* se puede visualizar la solución:



Si se desea observar mejor la solución, es posible ajustar la escala de los ejes desde el botón de herramientas:

Se comprueba la solución resolviendo la ecuación $\frac{1200}{x} + 60 = 95$ con la función *SOLVE*:



Teniendo en cuenta que la función es decreciente y que el número de pares de zapatillas es entero, se deduce que como mínimo se deben vender 35 pares para que el precio sea inferior a 95 €.

19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

El alumnado de 4º de secundaria del instituto IES Veles e Vents de Torrent quieren hacer una camiseta para celebrar su graduación. Han pedido presupuesto a dos empresas distintas, *Personaliza tu camiseta* y *Diseña tu camiseta*.

Ambas empresas les han comunicado que el precio de las camisetas depende de la cantidad final que pidan.

Para que los precios queden claros, cada empresa les ha enviado un correo con las siguientes tablas de precios:

Personaliza tu camiseta						
Número de camisetas	**1**	**2**	**5**	**10**	**20**	**50**
Precio unitario (€)	203	103	43	23	13	7

Diseña tu camiseta						
Número de camisetas	**1**	**2**	**5**	**10**	**20**	**50**
Precio unitario (€)	104	54	24	14	9	6

1 Representa gráficamente el precio de una camiseta en función del número de camisetas pedidas en cada una de las empresas y escribe, para cada una de ellas, una función que se ajuste a los precios por unidad.

2 En el instituto hay matriculados 150 alumnos en 4º de secundaria. Si todos quieren una camiseta, ¿cuánto les costaría una camiseta en *Personaliza tu camiseta*? ¿Y en la empresa *Diseña tu camiseta*?

3 Si solamente 120 alumnos desean comprar la camiseta, ¿cuánto debe pagar cada alumno por una camiseta en la empresa *Personaliza tu camiseta*? ¿Y en *Diseña tu camiseta*? ¿Y si solo la quieren comprar 80 alumnos?

4 Por muchas camisetas que encarguen, el precio de una camiseta nunca será menor que una cierta cantidad, ¿cuál es esa cantidad en cada una de las empresas?

5 Cada empresa cobra una cantidad fija por el diseño, ¿cuál es esa cantidad en cada una de las empresas?

6 Como el precio de cada camiseta depende del número total de camisetas que se pidan, deciden confeccionar una la lista con todos los compañeros que quieren comprarla y analizar en qué empresa les conviene encargarlas.

Según el número de peticiones, ¿en qué empresa les conviene encargarlas?

19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Esta actividad pretende utilizar el modelo de la función de proporcionalidad inversa para explicar y representar la relación entre el precio unitario y el precio total de una compra en la que el precio unitario varía según el número total de artículos adquiridos. Este contexto favorece un análisis significativo de las características de la función de proporcionalidad inversa y propicia el estudio del efecto en la gráfica de la variación de los parámetros en la expresión analítica de la función.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora es conveniente elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se debe elegir la opción $y = a + \frac{b}{x}$ (MENU 6 ▼ 4) del menú *Estadística*: sin frecuencias. Las frecuencias se desactivan con la siguiente secuencia: SHIFT MENU ▼ 3 2.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

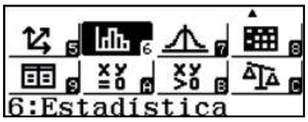
  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a:

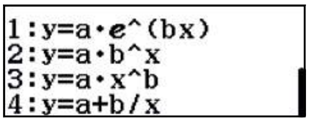
  http://wes.casio.com/es-es/class

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

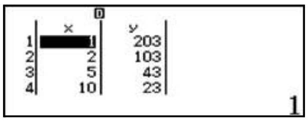
1

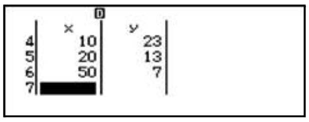
Se introducen los datos de los precios en el menú *Estadística* y se genera un código *QR* pulsando las teclas SHIFT OPTN:

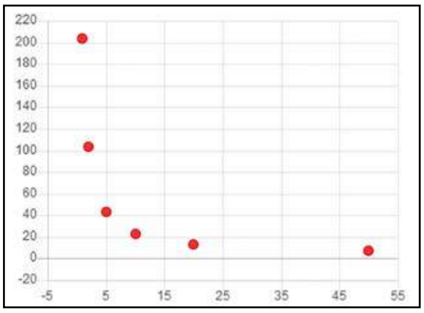




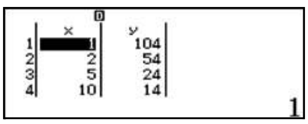
Personaliza tu camiseta

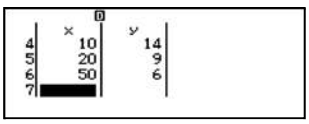






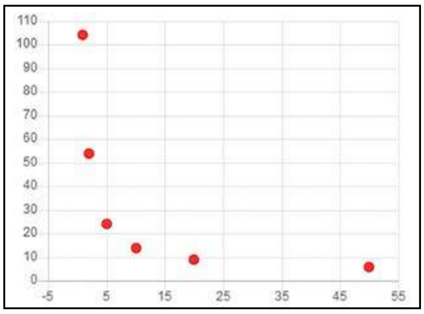
Diseña tu camiseta





19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

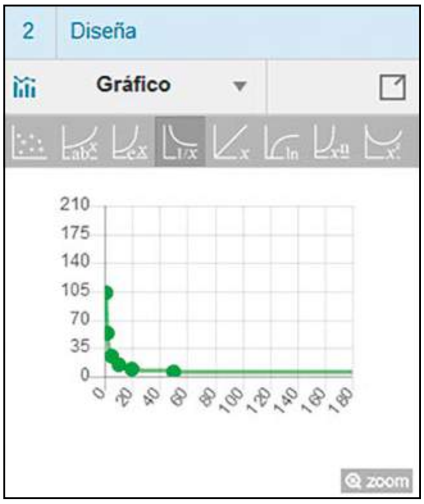
Diseña tu camiseta

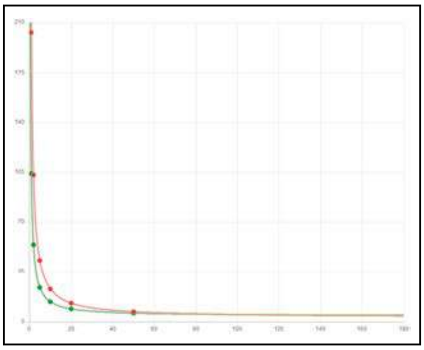


Se puede obtener la función que mejor se ajusta directamente, o bien elegir alguna de las regresiones que ofrece la aplicación y que mejor se ajuste a la nube de puntos. Teniendo en cuenta que el precio unitario disminuye a medida que aumenta el número total de camisetas compradas, la función que mejor se ajusta, pertenece a la familia de las funciones de proporcionalidad inversa.

Se pueden visualizar las dos regresiones en los mismos ejes representando simultáneamente las nubes de puntos mediante la colocación de múltiples gráficos estadísticos, unos encima de otros:

La representación gráfica de las regresiones tras ajustar los ejes es:





http://wes.casio.com/class/4Z3Q-Oiw2-y4p1-SqLe

La ecuación de la regresión se obtiene desde el menú *Estadística*. En primer lugar, se regresa a los datos estadísticos pulsando AC y mediante la secuencia OPTN 4 se obtiene la regresión:

Personaliza tu camiseta	*Diseña tu camiseta*
y=a+b/x a=3 b=200 r=1	y=a+b/x a=4 b=100 r=1
$y = 3 + \frac{200}{x}$	$y = 4 + \frac{100}{x}$

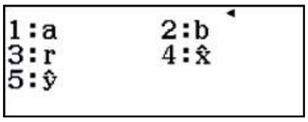
19 | Función racional
¿Cuánto cuesta una camiseta?

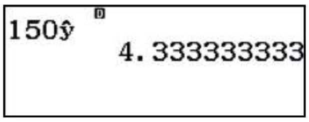
2

El precio unitario se calcula desde el menú *Estadística*:

Personaliza tu camiseta

OPTN ▼ 1 OPTN ▼ 4 5 ◀ 1 5 0 =





$\hat{y}(150) \approx 4{,}33$ €

De la misma forma se obtiene el otro precio:

Diseña tu camiseta: $\hat{y}(150) = 4{,}66666666 \approx 4{,}67$ €

3

Procediendo de la misma forma que en el **apartado 2**:

Personaliza tu camiseta: $\hat{y}(120) = 4{,}66666666 \approx 4{,}67$ € $\hat{y}(80) = 5{,}50$ €

Diseña tu camiseta: $\hat{y}(120) = 4{,}83333333 \approx 4{,}83$ € $\hat{y}(80) = 5{,}25$ €

4

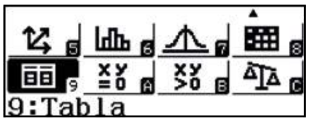
De las ecuaciones obtenidas en el **apartado 1**, se deduce que el precio de una camiseta nunca será menor de 3 € en la empresa *Personaliza tu camiseta*, ni de 4 € en *Diseña tu camiseta*.

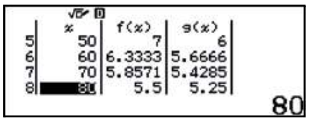
5

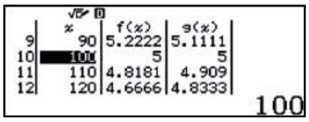
De las ecuaciones obtenidas en el **apartado 1**, se deduce que la empresa *Personaliza tu camiseta* cobra 200 € por el diseño de las camisetas y la empresa *Diseña tu camiseta*, 100 €.

6

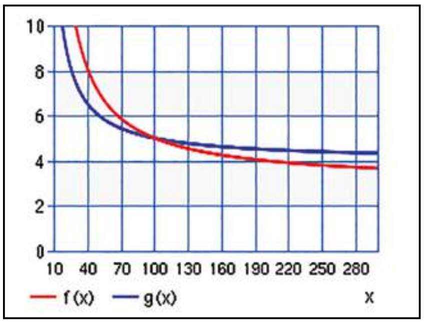
Se utiliza el menú *Tabla* para averiguar a partir de qué cantidad conviene elegir cada una de las empresas:







Generando un código *QR* se comprueba gráficamente la solución:



En cualquier caso, se observa que:

- Para un pedido de menos de 100 camisetas, la empresa *Diseña tu camiseta* ofrece mejor precio unitario.
- Para un pedido de 100 camisetas es indiferente qué empresa se elija.
- Y, para un pedido de más de 100 camisetas, la empresa *Personaliza tu camiseta* ofrece un precio más económico por camiseta.

20 Función exponencial
Concentración de anestesia en la sangre

Al inicio de una intervención quirúrgica, se administra anestesia a un paciente.

Sabiendo que la concentración de anestesia disminuye el 5% cada minuto, ¿cuánto tiempo crees que tendrá que transcurrir para que la concentración de anestesia en el paciente sea inferior al 0,5%?

1 Rellena la siguiente tabla:

Tiempo (min)	Concentración de anestesia
1	$C(1)$ = 95% = 0,95
2	
3	
5	
10	
15	
20	
30	
t	$C(t)$ =

2 Representa gráficamente la función $C(t)$. ¿Qué tipo de función es? Escribe sus características.

3 ¿En qué instante la concentración de anestesia es del 50%? ¿Y del 25%?

4 ¿En qué instante la concentración de anestesia es menor que el 0,5%?

CASIO División Educativa
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

20 | Función exponencial
Concentración de anestesia en la sangre

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO (Matemáticas Académicas)

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente con el código *QR*.
  - Calcular antiimágenes de la función resolviendo ecuaciones exponenciales con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Al cabo de 2 minutos la concentración de anestesia será:

$$C(2) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$$

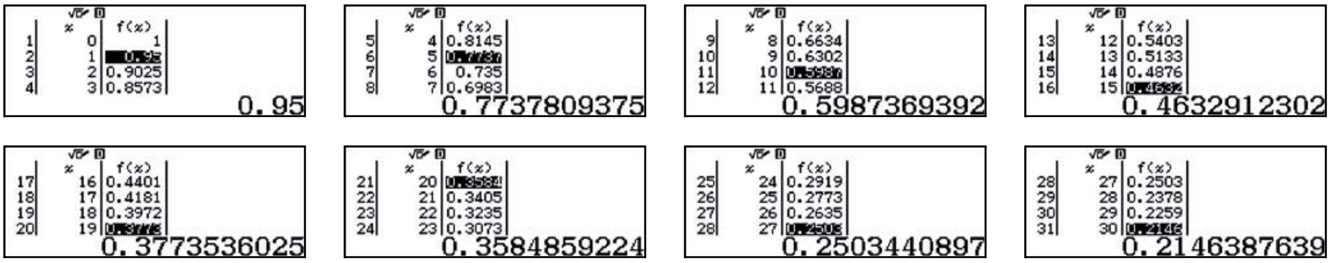
Al cabo de 3 minutos:

$$C(3) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}95^3$$

Generalizando se obtiene:

$$C(t) = 0{,}95^t$$

Se utiliza el menú *Tabla* para calcular la tabla de valores de la función:



La tabla queda de la siguiente forma:

Tiempo (min)	Concentración de anestesia
1	$C(1)$ = 95% = 0,95
2	$C(2)$ = 90,25% = 0,9025
3	$C(3)$ = 85,74% = 0,8574
5	$C(5)$ = 77,38% = 0,7738
10	$C(10)$ = 59,87% = 0,5987
15	$C(15)$ = 46,33% = 0,4633
20	$C(20)$ = 35,85% = 0,3585
30	$C(30)$ = 21,46% = 0,2146
t	$C(t) = 0{,}95^t$

20 | Función exponencial
Concentración de anestesia en la sangre

2

La representación gráfica se obtiene generando el código *QR*:

$C(t)$ es una función exponencial, sus características son:

- El dominio de la función es [0, + ∞[.
- El recorrido de la función es]0, 1].
- $C(0) = 1$.
- La función es estrictamente decreciente.
- La función se aproxima a 0 cuando la variable tiempo se aproxima a + ∞, es decir, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

3

Para calcular en qué instante la concentración de anestesia es del 50%, se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}50$:

$$0{,}95^t = 0{,}50$$

Se utiliza la función *SOLVE* para resolver la ecuación:

[0] [•] [9] [5] [$x^■$] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [0] [•] [5] [SHIFT] [CALC] [=]

```
0.95^x=0.5
```

```
0.95^x=0.5
x=       13.51340733
L-R=               0
```

Luego, la concentración de anestesia es aproximadamente del 50% al cabo 13 minutos y 30 segundos.

Análogamente, para saber el instante en el que la concentración es del 25% se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}25$:

$$0{,}95^t = 0{,}25$$

[0] [•] [9] [5] [$x^■$] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [0] [•] [2] [5] [SHIFT] [CALC] [=]

```
0.95^x=0.25
```

```
0.95^x=0.25
x=       27.02681467
L-R=               0
```

En consecuencia, la concentración es del 25% aproximadamente a los 27 minutos de la administración de la anestesia.

4

Se resuelve la ecuación $C(t) = 0{,}005$:

$$0{,}95^t = 0{,}005$$

```
0.95^x=0.005
```

```
0.95^x=0.005
x=       103.2945423
L-R=               0
```

Es decir, al cabo de 103,2945423 minutos (1h 43m 18s) desde que se administró la anestesia la concentración es menor que 0,5%.

21 | Función exponencial
Bola de nieve

Una bola de nieve pesa inicialmente 10 kilógramos. Mientras rueda, cada segundo que pasa, su peso aumenta un 5%.

1 Completa la siguiente tabla:

Tiempo (s)	Peso de la bola (kg)
1	$P(1) = 10 \cdot 1{,}05 = 10{,}50$ kg
2	
3	
5	
10	
15	
20	
30	
t	$P(t) =$

2 ¿Cuánto tiempo tardará la bola de nieve en duplicar su peso?

3 Dibuja la gráfica de la función $P(t)$. ¿Qué tipo de función es? Enumera sus características.

4 ¿En qué instante la bola pesará 25 kg? ¿Y 50 kg?

Bola de nieve

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar funciones gráficamente con el código *QR*.
  - Calcular antiimágenes de la función, resolviendo ecuaciones exponenciales con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Al cabo de 2 y 3 segundos la bola pesará:

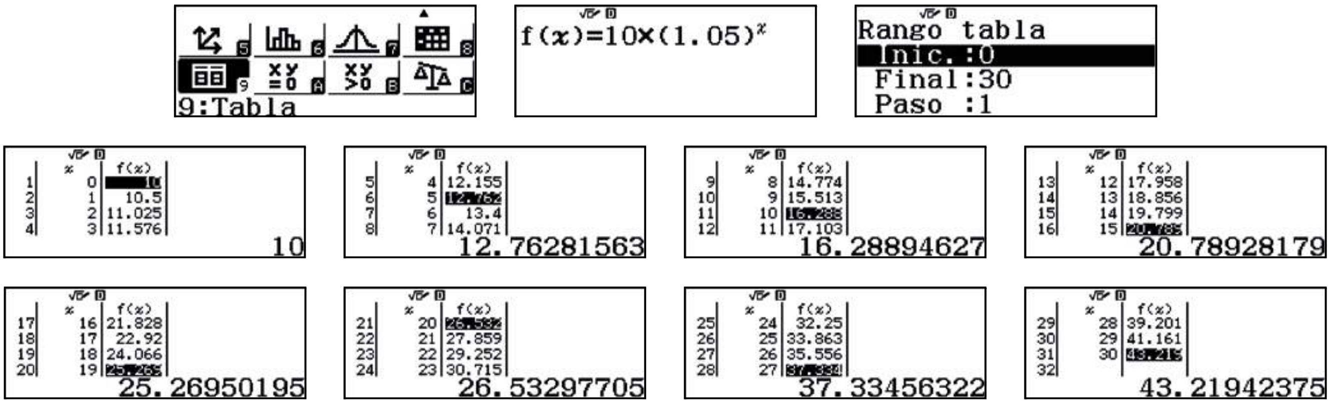
$$P(2) = 10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10 \cdot 1{,}05^2 = 11{,}025 \text{ kg}$$

$$P(3) = 10 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10 \cdot 1{,}05^3 \approx 11{,}576 \text{ kg}$$

Para t segundos:

$$P(t) = 10 \cdot 1{,}05^t \text{ kg}$$

Se utiliza el menú *Tabla* para completar la tabla de valores de la función:



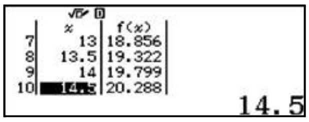
La tabla queda de la siguiente manera:

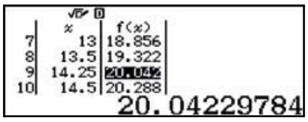
Tiempo (s)	Peso de la bola (kg)
1	10,500 kg
2	11,025 kg
3	11,576 kg
5	12,763 kg
10	16,289 kg
15	20,789 kg
20	26,533 kg
30	43,219 kg
t	$P(t) = 10 \cdot 1{,}05^t$

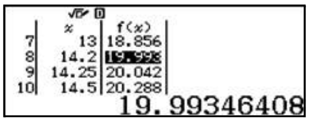
Bola de nieve

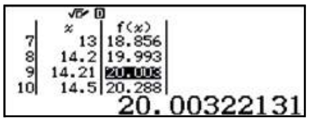
2

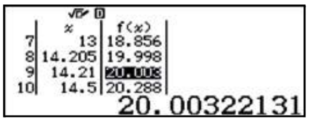
El menú *Tabla* permite introducir manualmente valores de la variable independiente. Se utiliza la iteración para obtener una aproximación, hasta las centésimas, del tiempo que tardará la bola de nieve en duplicar su peso:







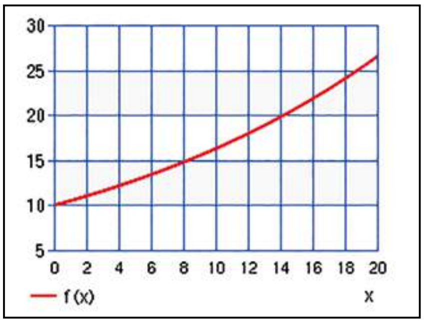




La bola de nieve duplicará su peso aproximadamente al cabo de 14,21 segundos.

3

Para representar gráficamente la función se utiliza el código *QR*:



$P(t)$ es una función exponencial, sus características son:

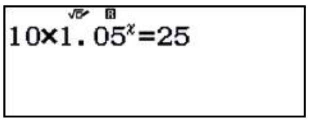
- El dominio de la función es [0, + ∞[.
- El recorrido de la función es [10, + ∞[.
- $P(0) = 10$.
- La función es estrictamente creciente.
- La función se aproxima a + ∞ cuando la variable tiempo tiende a + ∞.

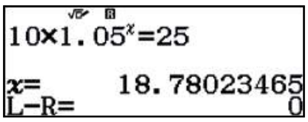
4

Para calcular en qué momento la bola pesará 25 kg, se resuelve la ecuación $P(t) = 25$:

$$10 \cdot 1{,}05^t = 25$$

Se resuelve utilizando la función *SOLVE*:

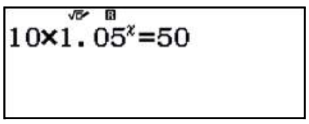


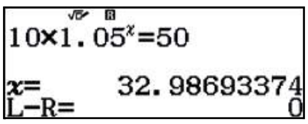


La bola pesará 25 kg al cabo de, aproximadamente, 19 segundos.

Análogamente, para saber el instante en el que la bola pesa 50 kg se resuelve la ecuación $P(t) = 50$:

$$10 \cdot 1{,}05^t = 50$$





Es decir, la bola pesará 25 kg aproximadamente a los 33 segundos.

22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

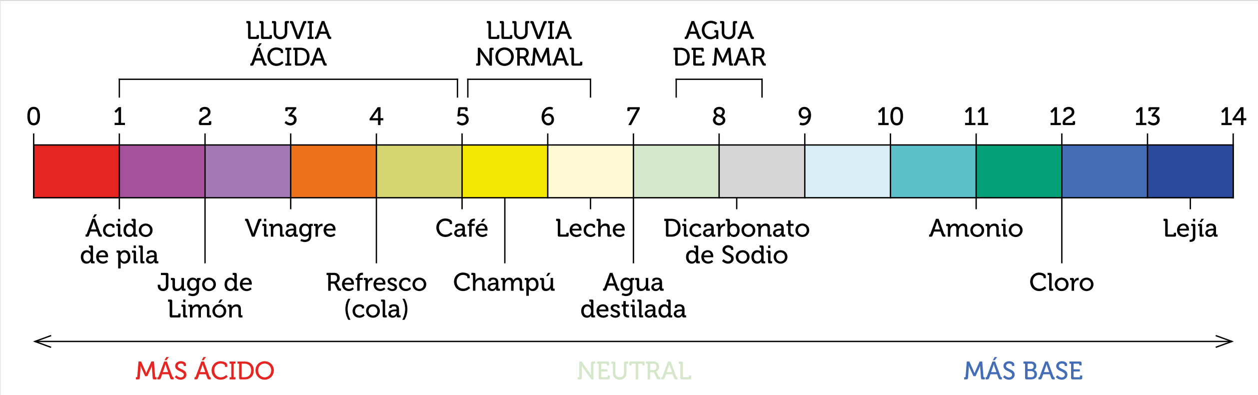
El pH es un parámetro muy usado en química para medir el grado de acidez o alcalinidad de las sustancias, la mayoría líquidos.

Esta medida está basada en la concentración de iones de hidrógeno ($[H^+]$) en un líquido y se mide en mol/L (moles por litro)[1].

La fórmula del pH es:

$$pH = -\log [H^+]$$

La escala de pH va de 0 hasta 14, siendo el 0 el punto máximo de acidez y el 14 la máxima alcalinidad, el 7 representa el punto medio de la tabla y es neutro, lo que quiere decir que las soluciones con un valor por debajo del 7 son ácidas y las que están por encima son básicas o alcalinas.



En una piscina, el valor óptimo de pH del agua oscila entre 7,2 y 7,6.

Si el pH disminuye por debajo de 7,2 el agua se vuelve ácida provocando problemas a las personas (irritación de la piel, ojos y mucosas) y a los materiales de la piscina (corrosión de escaleras, válvulas, bombas o en el propio filtro de la piscina).

Si el pH aumenta por encima de 7,6 el agua se vuelve demasiado alcalina, el desinfectante pierde efectividad, y en consecuencia, aumenta el riesgo de contagio de enfermedades. En este caso, la piel se irrita y reseca, y se fomenta la aparición de algas y calcio en la superficie del agua.

El pH del agua de las piscinas tiende a adquirir propiedades alcalinas, por ello es muy importante controlar diariamente este valor. La acción del desinfectante (cloro) depende directamente de este valor, pues si el pH del agua no se encuentra dentro del rango óptimo, el desinfectante perderá su efectividad.

1 Si una piscina tiene una concentración de iones de hidrógeno de $3{,}16 \cdot 10^{-9}$ mol/L, ¿es aconsejable bañarse en ella?

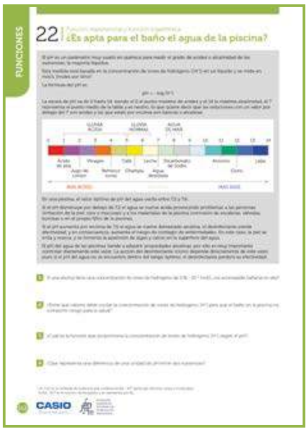
2 ¿Entre qué valores debe oscilar la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ para que el baño en la piscina no comporte riesgo para la salud?

3 ¿Cuál es la función que proporciona la concentración de iones de hidrógeno $[H^+]$ según el pH?

4 ¿Qué representa una diferencia de una unidad de pH entre dos sustancias?

[1] Un mol es la cantidad de sustancia que contiene $6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas (átomos, iones o moléculas). $6{,}022 \cdot 10^{23}$ es el número de Avogadro y se representa por N_A.

22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?



MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan para modelizar situaciones del mundo real. Las funciones logarítmicas son muy útiles cuando se quieren modelizar fenómenos que tienen un rango muy amplio de valores.
- Para contestar a la segunda cuestión, se configura la calculadora para que el formato de número sea en notación científica:

[ALPHA] [MENU] [3]

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
```

En este caso, se ha elegido la notación científica con tres cifras significativas:

[2]

```
1:Fijar decimales
2:Not científica
3:Normal
Cientif:Selec 0~9
```

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se calcula el siguiente logaritmo:

$$pH = -\log (3{,}16 \cdot 10^{-9})$$

[(−)] [log▫▫] [1] [0] [▶] [3] [·] [1] [6] [×10ˣ] [(−)] [9] [=]

```
-log10(3.16×10-9)
             8.500312917
```

Dado que el valor del pH del agua de la piscina es mayor que 7,6 el desinfectante pierde efectividad y el riesgo de contagio de enfermedades es alto. No es aconsejable el baño en la piscina.

2

Para que el baño sea aconsejable, el valor óptimo de pH del agua debe oscilar entre 7,2 y 7,6.

Para calcular el rango óptimo de la concentración de iones de hidrógeno, basta con resolver las siguientes expresiones:

$$7{,}2 = -\log x \quad \text{y} \quad 7{,}6 = -\log y$$

Despejando el logaritmo en cada expresión y aplicando la definición de logaritmos se obtiene que $x = 10^{-7{,}2}$ e $y = 10^{-7{,}6}$:

```
10^-7.2
               6.31×10^-8
```

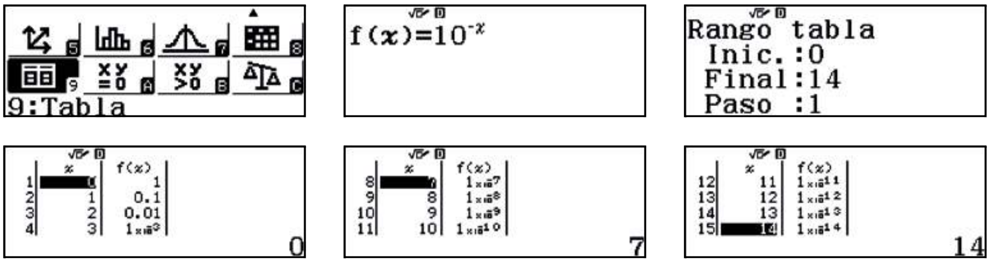
```
10^-7.6
               2.51×10^-8
```

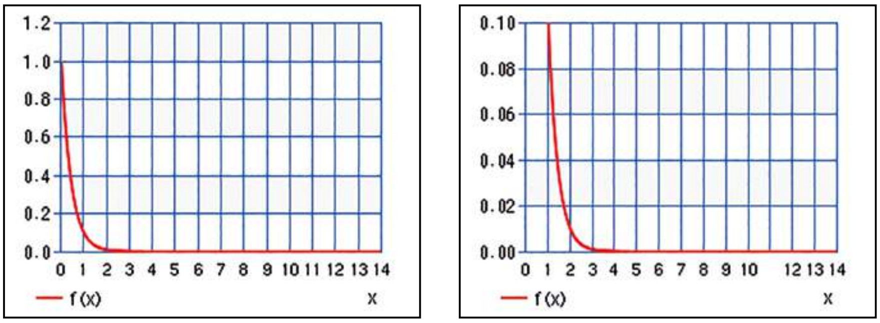
Luego, la concentración de iones de hidrógeno para que el baño en la piscina no comporte riesgo para la salud debe oscilar entre $2{,}51 \cdot 10^{-8}$ y $6{,}31 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

22 | Función exponencial y función logarítmica
¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

3

La función que permite conocer la concentración de iones de hidrógeno según su pH es la función exponencial $y = 10^{-x}$, cuya gráfica se obtiene generando un código *QR* desde la tabla de valores (menú *Tabla*) de la mencionada función:





4

La escala del pH es logarítmica, por tanto una diferencia de una unidad entre dos sustancias supone que una de ellas es 10 veces más básica o más ácida que la otra.

$$\text{pH}(A) - \text{pH}(B) = 1$$

$$-\log[\text{H}^+]_A + \log[\text{H}^+]_B = 1$$

$$\log\frac{[\text{H}^+]_B}{[\text{H}^+]_A} = 1$$

$$\frac{[\text{H}^+]_B}{[\text{H}^+]_A} = 10$$

¿Es apta para el baño el agua de la piscina?

Ampliación

La ionización, disolución en iones, del agua pura se representa de forma simplificada como:

$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$$

El producto de la concentración de iones hidronio o de hidrógeno [(H⁺)] por la concentración de iones de hidroxilo [(OH⁻)] se denomina producto iónico del agua y se representa por K_w.

A una temperatura de 25º C el producto iónico tiene un valor constante de 10^{-14}.

$$K_w = [H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$$

De esta expresión se deduce que las concentraciones de iones de hidronio y de hidroxilos son inversamente proporcionales, es decir, para que el valor de la constante se mantenga como tal, el aumento de una de las concentraciones implica la disminución de la otra en la misma proporción.

En el agua pura por cada ion hidronio hay un ion hidroxilo, por tanto $10^{-7} \cdot 10^{-7} = 10^{-14}$.

1 La cantidad de iones de hidroxilo viene dado por la fórmula $pOH = -\log [OH^-]$, siendo $[OH^-]$ la concentración de iones de hidroxilo. ¿Qué relación hay entre el pH y el pOH?

2 Completa la siguiente tabla:

PRODUCTOS COTIDIANOS				
Producto	**pH**	**$[H^+]$**	**$[OH^-]$**	**pOH**
Vinagre	3			
Bebidas carbonatadas			10^{-11}	
Pasta de dientes				4,1
Naranjas	3,5			
Leche de vaca		$3{,}98 \cdot 10^{-7}$		
Agua de mar				6

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Tomando logaritmos decimales en la expresión $[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$, se tiene:

$$\log([H^+] \cdot [OH^-]) = \log 10^{-14}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log([H^+]) + \log([OH^-]) = -14$$

Cambiando el signo en la expresión, se obtiene:

$$-\log([H^+]) - \log([OH^-]) = 14$$

Finalmente, sustituyendo $-\log([H^+])$ por pH y $-\log([OH^-])$ por pOH se obtiene:

$$pH + pOH = 14$$

2

La tabla se rellena con facilidad utilizando la relación del **apartado anterior** y las fórmulas de pH y pOH.

23 | Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

El consumo de agua en un edificio varía en función de la actividad que en él se desarrolla, horas del día, etc. Para determinar el diámetro de las tuberías a instalar, se debe realizar un cálculo hidráulico para estimar el caudal simultáneo máximo en la instalación de cada vivienda.

El cálculo del caudal simultáneo máximo Q_s viene dado por la expresión:

$$Q_s = \left(\sum_i q_i\right) \cdot k \qquad \text{dm}^3/\text{s}$$

donde la suma de todos los caudales q_i, correspondientes a cada tubería, están multiplicados por un coeficiente de simultaneidad k menor que la unidad, ya que normalmente, no todos los grifos están abiertos a la vez. El valor de este coeficiente k (norma francesa) viene dado por la expresión:

$$k = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

donde x es el número de grifos instalados en la unidad de estudio y el valor mínimo del coeficiente es k = 0,2

Cada uno de los aparatos domésticos de uso común debe recibir, con independencia del estado de funcionamiento de los demás, una demanda unitaria de caudales instantáneos mínimos de agua (q_i), de acuerdo con la siguiente tabla:

Tipo de aparato	Caudal instantáneo mínimo de agua fría (dm^3/s)	Caudal instantáneo mínimo de ACS (dm^3/s)
Lavabo	0,10	0,065
Ducha	0,20	0,10
Bañera de 1,40 m o más	0,30	0,20
Bidé	0,10	0,065
Inodoro con cisterna	0,10	-
Fregadero doméstico	0,20	0,10
Lavavajillas doméstico	0,15	0,10
Lavadero	0,20	0,10
Lavadora doméstica	0,20	0,15
Grifo aislado	0,15	0,10
Grifo garaje	0,20	-

*La demanda es menor en ACS (agua caliente sanitaria) porque al estar ésta a 60 ºC, se mezcla con la fría para consumir a aproximadamente 40 ºC

1 ¿A partir de qué número de grifos instalados, el coeficiente toma el valor constante k = 0,2?

2 Describe y representa la función que calcula el coeficiente de simultaneidad según el número de grifos.

3 Calcula el caudal máximo para una instalación como la de tu vivienda.

23 | Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU⁺

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad el alumnado podrá desarrollar estándares de operaciones, estimación, ecuaciones y funciones definidas a trozos. La resolución de un problema con datos reales facilita la conexión de las matemáticas con el mundo real.
- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU⁺ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a http://wes.casio.com/es-es/class.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

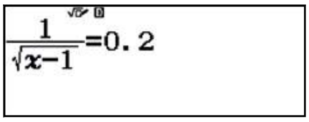
1

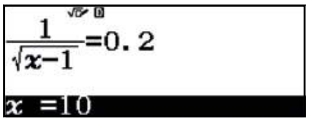
Para encontrar el número de grifos a partir del cual el coeficiente de simultaneidad toma el valor mínimo k = 0,2 se resuelve la ecuación con radicales:

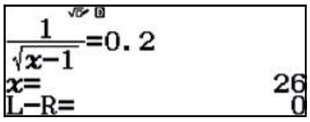
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{x-1} = 5 \rightarrow x = 26$$

Se puede también resolver con la función *SOLVE* SHIFT CALC:







Para introducir el signo = se utiliza ALPHA CALC.

2

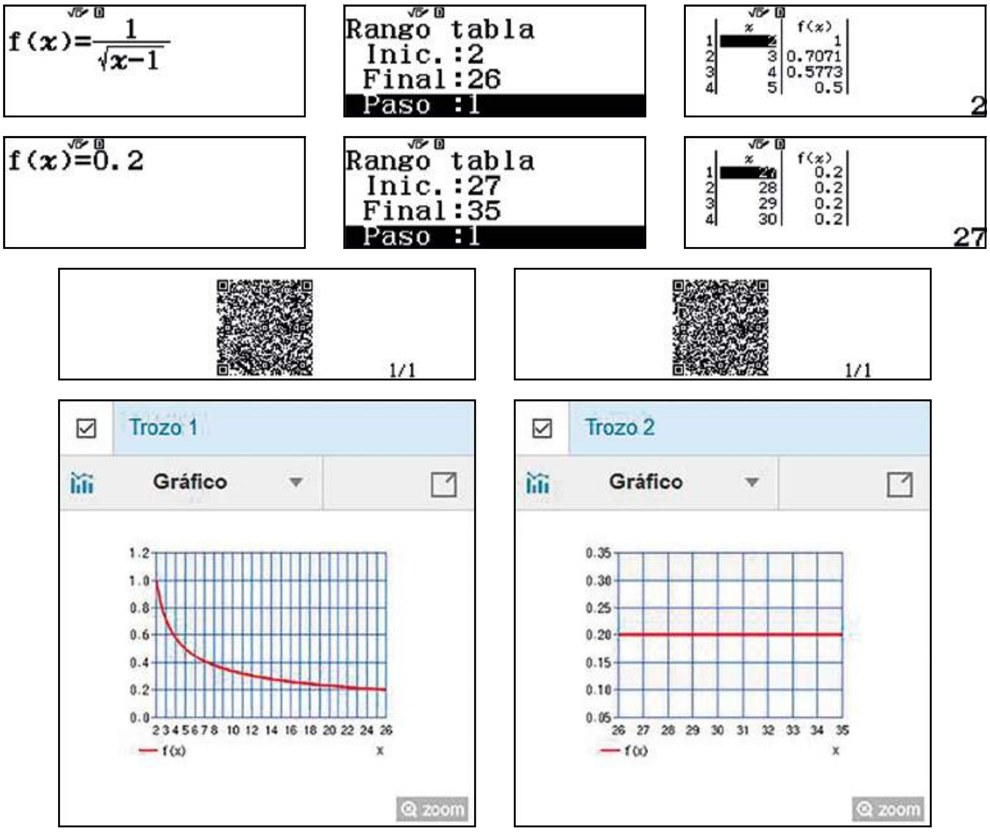
La función $k(x)$ que expresa el valor del coeficiente de simultaneidad, en función del número x de grifos instalados es:

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 \le x < 26 \\ 0{,}2 & \text{si } x \ge 26 \end{cases} \qquad x \text{ toma valores enteros}$$

Se incorporan los dos trozos de la función a la clase que se ha creado en la aplicación CASIO EDU⁺:

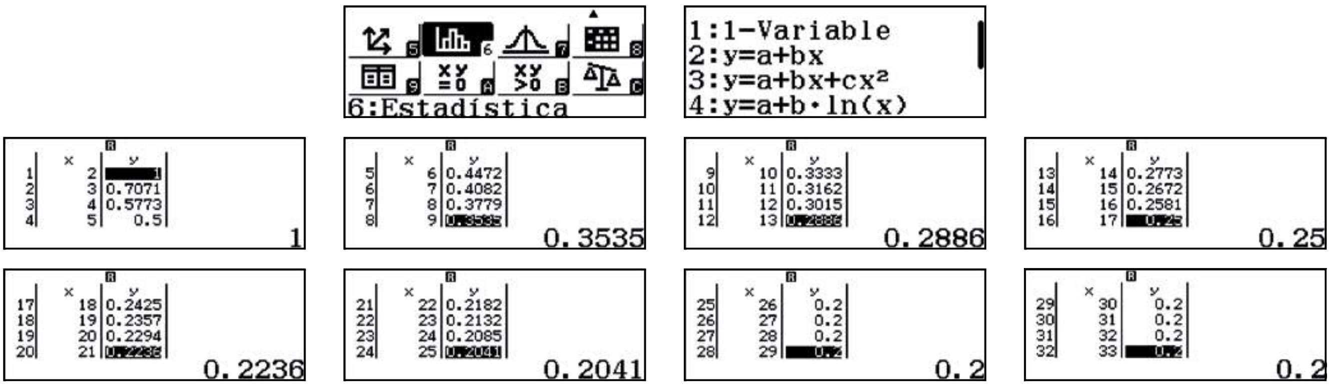
http://wes.casio.com/class/u7j6-9NrI-SsWs-nRju

23 Funciones definidas a trozos
Caudales domésticos de agua

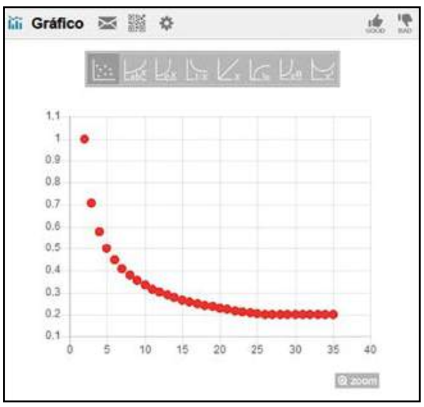


Se pueden visualizar los dos trozos de manera que las representaciones sean punto a punto, y combinarlos, si se introducen los datos desde el menú *Estadística*.

Se elige, por ejemplo, la opción 2 y se introducen los valores que se han obtenido en las tablas anteriores:



Generando un código *QR* se visualiza la nube de puntos:



3

A modo de ejemplo, se considera una vivienda con la siguiente instalación:

UNIDADES	Tipo de aparato	Caudal instantáneo mínimo de agua fría (dm^3/s)
1	Lavadero	0,20
1	Lavadora doméstica	0,20
1	Fregadero doméstico	0,20
1	Lavavajillas doméstico	0,15
2	Inodoro con cisterna	2 · 0,10
2	Lavabo	2 · 0,10
1	Ducha	0,20
1	Bañera de 1,40 m o más	0,30
1	Bidé	0,10
11		$\sum_i q_i$ **= 1,75 dm^3/s**

Se analiza el valor del coeficiente de simultaneidad para 11 unidades instaladas:

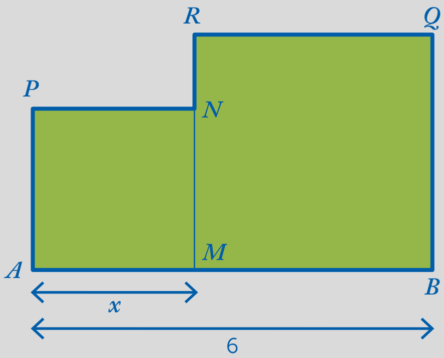
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$k(x) = 0{,}3162$$

Se obtiene que el caudal máximo que pasará es:

$$Q_s = 1{,}75 \cdot 0{,}3162 = 0{,}55335 \text{ dm}^3/\text{s}$$

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono



Sea M un punto sobre el segmento $\overline{AB}$ = 6 cm.

Sobre el mismo segmento se dibujan los cuadrados $AMNP$ y $MBQR$ como se muestra en la figura adjunta siendo $\overline{AM} = x$.

De esta manera se obtiene el hexágono $ABQRNP$.

1 Calcula el perímetro del hexágono $ABQRNP$ para x = 1 cm.

2 Rellena la siguiente tabla:

x (cm)	Perímetro $ABQRNP$ (cm)
0	
0,5	
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	
4,5	
5	
5,5	
6	
x	$P(x)$ =

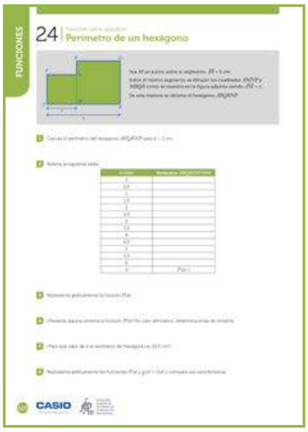
3 Representa gráficamente la función $P(x)$.

4 ¿Presenta alguna simetría la función $P(x)$? En caso afirmativo, determina el eje de simetría.

5 ¿Para qué valor de x el perímetro del hexágono es 20,5 cm?

6 Representa gráficamente las funciones $P(x)$ y $g(x) = |2x|$ y compara sus características.

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Expresar una función utilizando el valor absoluto.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Construir la tabla de valores de dos funciones.
  - Representar gráficas.
  - Comparar dos funciones.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

De la figura se deduce que:

$$\overline{RM} = 6 - x$$

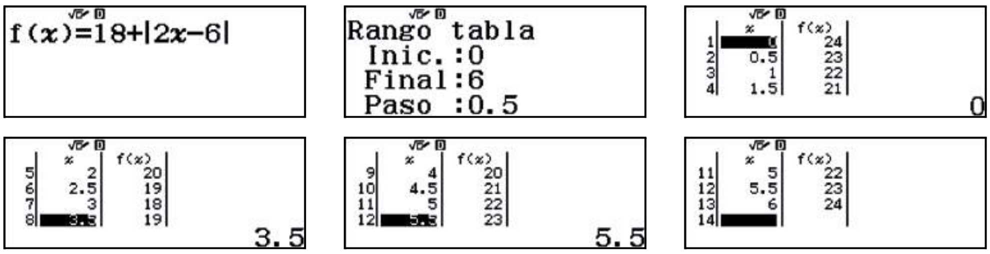
$$\overline{RN} = |\overline{RM} - \overline{MN}| = |(6 - x) - x| = |6 - 2x| = |2x - 6|$$

En consecuencia, el perímetro del hexágono $ABQRNP$ es:

$$P(x) = 6 + (6 - x) + (6 - x) + |2x - 6| + x + x = 18 + |2x - 6|$$

$$P(1) = 18 + |2 \cdot 1 - 6| = 22 \text{ cm}$$

Para construir la tabla se utiliza el menú *Tabla*:

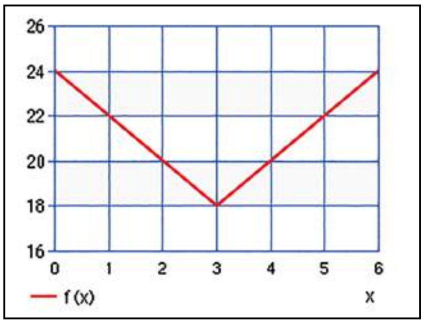


x (cm)	Perímetro $ABQRNP$ (cm)
0	24 cm
0,5	23 cm
1	22 cm
1,5	21 cm
2	20 cm
2,5	19 cm
3	18 cm
3,5	19 cm
4	20 cm
4,5	21 cm
5	22 cm
5,5	23 cm
6	24 cm
x	$P(x) = 18 + \|2x - 6\|$

24 | Función valor absoluto
Perímetro de un hexágono

3

Para representar la función se utiliza el código *QR*:



4

En la gráfica se aprecia que la función es simétrica respecto de la recta $x = 3$.

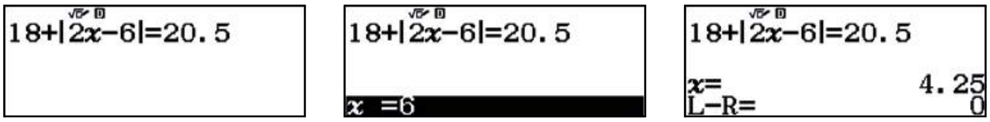
5

Para determinar el valor de x de manera que el perímetro del hexágono sea 20,5 cm, se resuelve la ecuación:

$$P(x) = 20{,}5$$

$$18 + |2x - 6| = 20{,}5$$

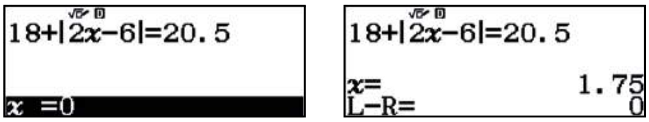
Se utiliza la función *SOLVE* para resolverla:



Una solución es $x = 4{,}25$ cm.

Como la función es simétrica respecto de la recta $x = 3$, se deduce que la otra solución es $x = 1{,}75$ cm.

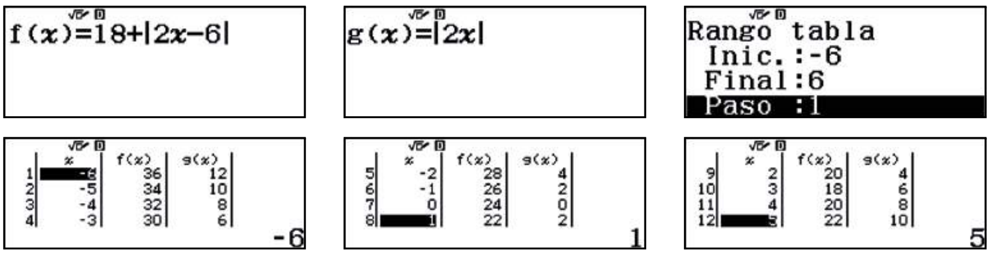
Para obtener esta solución con la calculadora se tiene que dar a la semilla un valor menor que 3. Por ejemplo $x = 0$:



Por consiguiente, el perímetro del hexágono es 20,5 cm cuando x vale 1,75 cm o 4,25 cm.

6

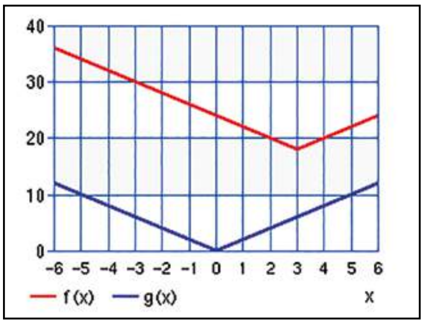
Para representar las funciones $P(x) = 18 + |2x - 6|$ y $g(x) = |2x|$ se construye una tabla con las dos funciones en el menú *Tabla*:



Perímetro de un hexágono

Se utiliza el código *QR* para obtener las gráficas de ambas funciones en los mismos ejes:

1/1



Se aprecia que la función $P(x) = 18 + |2x - 6|$ es una traslación de la función $g(x) = |2x|$, con un desplazamiento horizontal de 3 unidades a la derecha y uno vertical de 18 unidades hacia arriba.

Ampliación

1 Representa en los mismos ejes las funciones $f(x) = |3x|$ y $g(x) = |3x + 12| - 2$.

¿Qué desplazamientos hay que hacer para pasar de la función $f(x)$ a la función $g(x)$?

2 Aplica una traslación vertical de 2 unidades hacia arriba a la función $f(x) = |4x|$, ¿qué función se obtiene? Escribe su expresión analítica.

¿Qué función se obtiene si se aplica una traslación vertical hacia abajo de 8 unidades?

3 Aplica una traslación horizontal de 5 unidades hacia la derecha a la función $f(x) = |4x|$, ¿qué función se obtiene? Escribe su expresión analítica.

¿Qué función se obtiene si se aplica una traslación horizontal hacia la izquierda de 10 unidades?

25 | Función potencial
Tercera Ley de Kepler

En la siguiente tabla se relaciona la distancia media entre el Sol y cada uno de los planetas con el periodo orbital (tiempo que tarda en efectuar una vuelta completa cada planeta alrededor del Sol).

1UA (unidad astronómica) es igual a la distancia media del Sol a la Tierra.

1 año es el periodo orbital de la Tierra.

Planeta	Distancia media Sol-Planeta (UA)	Periodo orbital (años)
Mercurio	0,387	0,24
Venus	0,7239	0,62
Tierra	1	1
Marte	1,524	1,88
Júpiter	5,203	11,86
Saturno	9,537	29,45
Urano	19,191	
Neptuno		164,79

1 Dibuja una gráfica que represente el periodo orbital en función de la distancia media.

2 Sabiendo que la relación entre la distancia media x, y el periodo orbital T es potencial, es decir, $T = a \cdot x^b$, determina la expresión de la función.

Tercera Ley de Kepler del movimiento de los planetas.

Para cualquier planeta, el cuadrado del periodo orbital (T) o tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol, es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol (R).

$$T^2 = k \cdot R^3,\ k \approx 1\frac{\text{años}^2}{\text{UA}^3}.$$

3 Rellena los datos que faltan en la tabla.

25 | Función potencial
Tercera Ley de Kepler

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

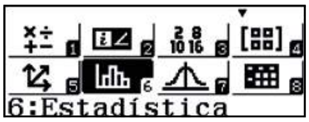
ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Calcular la regresión potencial.
  - Representar la gráfica de una nube de puntos.
- Se utiliza la función *SOLVE* para resolver una ecuación irracional.

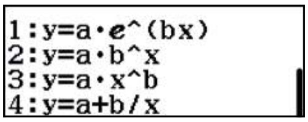
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

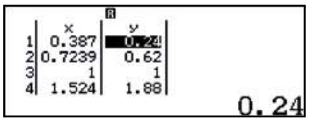
1

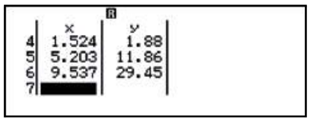
Para dibujar la gráfica, se rellena la tabla desde el menú *Estadística* (regresión potencial):

MENU 6 ▼ 3

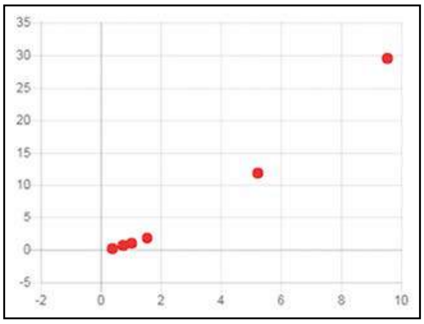






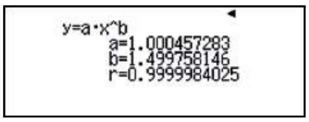


Se dibuja la nube de puntos con el código *QR*:



2

Se calcula la regresión con la calculadora (OPTN 4):

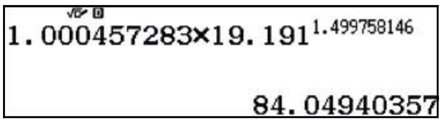


Se observa que, aproximadamente, el coeficiente de correlación es 1, y la regresión potencial es: $y = x^{3/2}$.

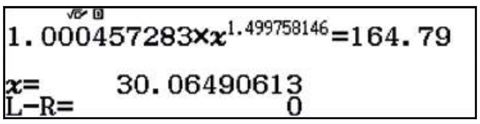
Función que cumple la tercera ley de Kepler.

3

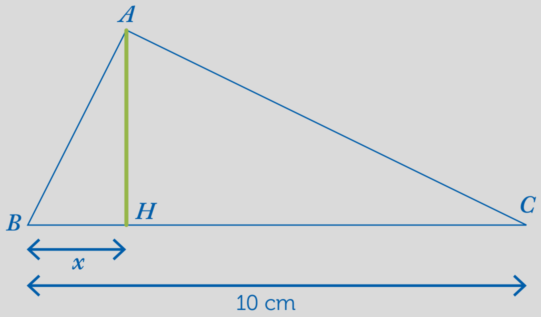
Se calcula el periodo orbital de Urano, aproximadamente 84,05 años:



Con la función *SOLVE* se obtiene que la distancia de Neptuno al Sol es, aproximadamente, 30,06 UA.



26 Función con radicales
Teorema de la altura



En un triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ siendo $\hat{A} = 90°$ y $\overline{BC} = 10$ cm se traza la altura $\overline{AH}$.

Sea $\overline{BH} = x$.

Teorema de la altura

Dado el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ siendo $\hat{A} = 90°$ y $\overline{AH}$ la altura . Se tiene que $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$.

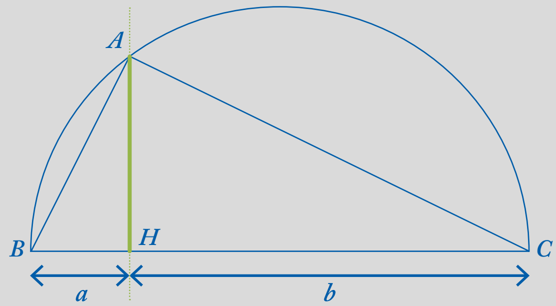
Dados dos números $a > 0$, $b > 0$, definimos la media geométrica de a y b como $M_G = \sqrt{a \cdot b}$.

Para construir, geométricamente, la media geométrica se dibuja un arco capaz de 90° sobre un segmento $\overline{BC} = a + b$, $\overline{BH} = a$, $\overline{CH} = b$.

Se dibuja la recta perpendicular por el punto H al segmento $\overline{BC}$ que corta al arco capaz en el punto A, $\angle BAC = 90°$, entonces: $\overline{AH} = \sqrt{a \cdot b}$.

La media aritmética de dos números $a > 0$, $b > 0$ es $M_A = \frac{a+b}{2}$, radio del arco capaz.

Se observa en el gráfico que $M_A \geq M_G$. La igualdad se alcanza cuando $a = b$.



1 Calcula la longitud $\overline{AH}$ de la altura para $x = 1$ cm.

2 Rellena la siguiente tabla:

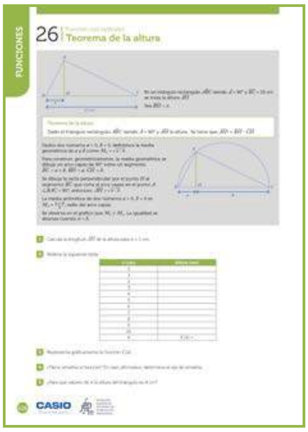
x (cm)	Altura (cm)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
x	$L(x) =$

3 Representa gráficamente la función $L(x)$.

4 ¿Tiene simetría la función? En caso afirmativo, determina el eje de simetría.

5 ¿Para qué valores de x la altura del triángulo es 4 cm?

26 | Función con radicales
Teorema de la altura



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Aplicar el teorema de la altura en un triángulo rectángulo.
  - Expresar una función utilizando radicales.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar gráficas.
  - Resolver ecuaciones con la función *SOLVE*.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

Se aplica el teorema de la altura al triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$:

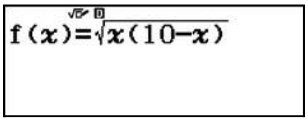
$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$$

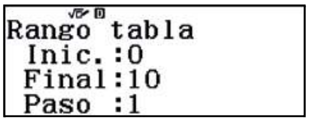
$$\overline{AH}^2 = x \cdot (10 - x)$$

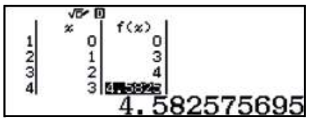
Entonces, $L(x) = \sqrt{x \cdot (10 - x)}$, $x \in [0, 10]$.

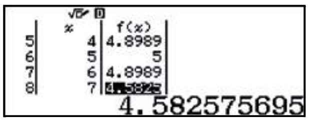
Si $x = 1$ cm, $\overline{AH} = L(1) = \sqrt{1 \cdot 9} = 3$ cm.

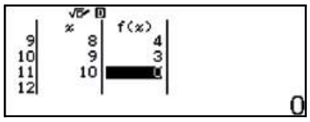
Para construir la tabla se utiliza el menú *Tabla*:











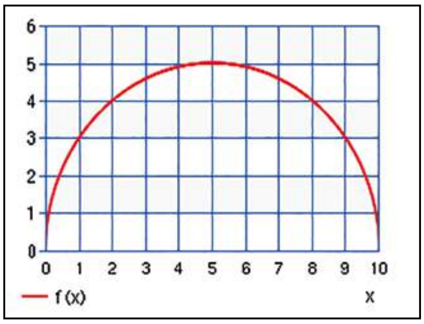
La tabla queda de la siguiente manera:

x (cm)	Altura (cm)
0	0
1	3
2	4
3	4,583
4	4,899
5	5
6	4,899
7	4,583
8	4
9	3
10	0
x	$L(x) = \sqrt{x \cdot (10 - x)}$

26 | Función con radicales
Teorema de la altura

3

Para representar la función se utiliza el código *QR*:



Se observa que el vértice A recorre el arco capaz de 90° sobre $\overline{BC}$, es decir, la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$.

4

La función es simétrica respecto de la recta $x = 5$.

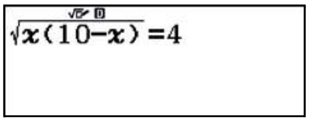
5

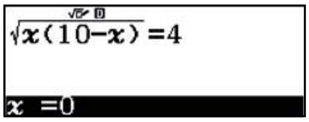
Para calcular los valores de x tales que la altura mide 4 cm se resuelve la ecuación:

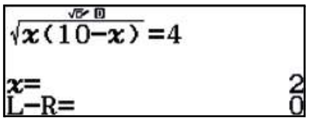
$$L(x) = 4$$

$$\sqrt{x \cdot (10 - x)} = 4$$

Para resolverla se utiliza la función *SOLVE*:



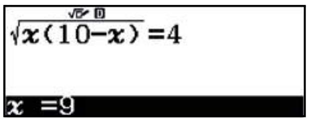


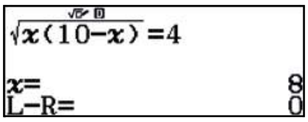


En consecuencia, la altura $\overline{AH}$ del triángulo $A\hat{B}C$ mide 4 cm cuando $x = \overline{BH} = 2$ cm.

Ahora bien, como la función es simétrica respecto de la recta $x = 4$, hay otra solución que es $x = 8$ cm.

Para obtener esta solución se tiene que dar a la semilla un valor mayor que 4. Por ejemplo, $x = 9$:





27 | Función seno
Área de una cometa

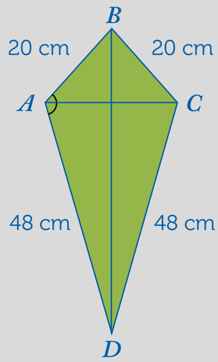
En Valencia es tradición volar cometas en las fiestas de Pascua.

En la playa de la Malvarrosa de Valencia durante dichas fiestas se realiza un concurso de cometas.

Para construir una cometa como la de la figura se dispone de dos cañas

de 20 cm de longitud, dos de 48 cm y dos transversales.

Se considera x el ángulo $\angle BAD$.



1 ¿Cuánto vale el área de la cometa si $x = \frac{5\pi}{6}$ rad?

2 Rellena la siguiente tabla:

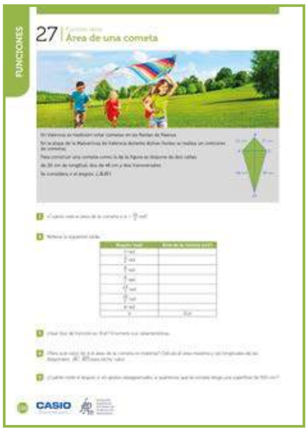
Ángulo (rad)	Área de la cometa (cm²)
0 rad	
$\frac{\pi}{6}$ rad	
$\frac{\pi}{3}$ rad	
$\frac{\pi}{2}$ rad	
$\frac{2\pi}{3}$ rad	
$\frac{5\pi}{6}$ rad	
π rad	
x	$S(x)$

3 ¿Qué tipo de función es $S(x)$? Enumera sus características.

4 ¿Para qué valor de x el área de la cometa es máxima? Calcula el área máxima y las longitudes de las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ para dicho valor.

5 ¿Cuánto mide el ángulo x, en grados sexagesimales, si queremos que la cometa tenga una superficie de 500 cm²?

27 | Función seno
Área de una cometa



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se quiere conseguir:
  - Transformar el enunciado de un problema a lenguaje algebraico.
  - Aplicar la fórmula trigonométrica del área de un triángulo.
  - Construir la tabla de valores de una función.
  - Representar gráficas.
  - Estudiar la función sinusoide.
  - Resolver ecuaciones trigonométricas.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 2

El área del triángulo $A\hat{B}D$ en función del ángulo es:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen } x$$

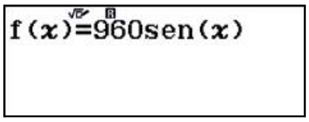
El área de la cometa $ABCD$ es el doble del área del triángulo $A\hat{B}D$:

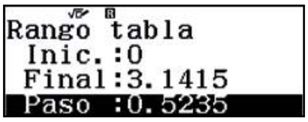
$$S(x) = 960 \cdot \text{sen } x,\ x \in [0, \pi]$$

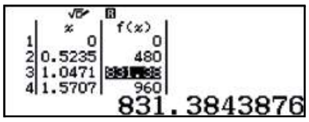
Para construir la tabla de la función se utiliza el menú *Tabla* y las unidades angulares se expresan en radianes:

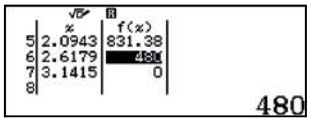
9 6 0 sen x)

= 0 = SHIFT ×10^x =
SHIFT ×10^x ÷ 6 =









El área del cometa para $x = \frac{5\pi}{6}$ rad es:

$$S\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 480 \text{ cm}^2$$

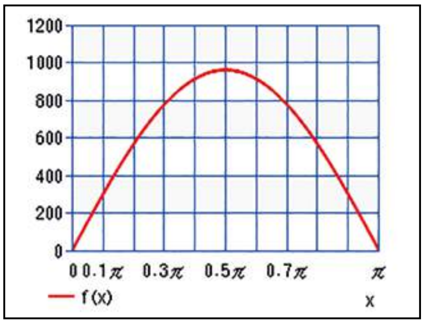
La tabla queda de la siguiente manera:

Ángulo (rad)	Área de la cometa (cm²)
0 rad	0 cm²
$\frac{\pi}{6}$ rad	480 cm²
$\frac{\pi}{3}$ rad	831,38 cm²
$\frac{\pi}{2}$ rad	960 cm²
$\frac{2\pi}{3}$ rad	831,38 cm²
$\frac{5\pi}{6}$ rad	480 cm²
π rad	0 cm²
x	$S(x)$

27 | Función seno
Área de una cometa

3 **4**

Para representar gráficamente la función se utiliza la función *QR*:



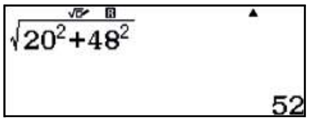
La función es una sinusoide.

El área máxima de la cometa se alcanza en $x = \frac{\pi}{2}$ rad:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 960 \text{ cm}^2$$

Para $x = \frac{\pi}{2}$ rad el triángulo $\overset{\triangle}{ABD}$ es rectángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

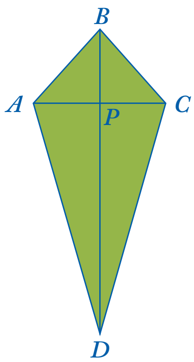
$$\overline{BD} = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52 \text{ cm}$$



Dado que las diagonales de la cometa, $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$, son perpendiculares siendo P su punto de intersección, se deduce que el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABD}$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$ rad es:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{960}{2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AP}$$

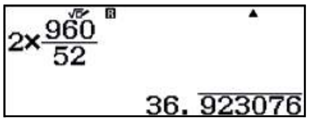
$$\frac{960}{2} = \frac{1}{2} \cdot 52 \cdot \overline{AP}$$



En consecuencia:

$$\overline{AP} = \frac{960}{52}$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AP} = 2 \cdot \frac{960}{52}$$



La diagonal $\overline{AC}$ de la cometa de área máxima es aproximadamente 36,92 cm.

5

Para calcular el valor de x que hace que el área de la cometa sea 500 cm² se resuelve la ecuación:

$$S(x) = 500$$

$$960 \cdot sen\,(x) = 500$$

27 | Función seno
Área de una cometa

La calculadora se configura con medidas angulares sexagesimales mediante la siguiente secuencia:

SHIFT MENU 2 — 1

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

```
1:Grado sexag (D)
2:Radián
3:Grado cent (G)
```

Para resolver la ecuación se utiliza la función *SOLVE*:

```
960sen(x)=500
```

```
960sen(x)=500

x=        31.38816646
L-R=                0
```

```
960sen(x)=500

x=        148.6118335
L-R=                0
```

La primera solución no forma una cometa. Por tanto, el ángulo x que hace que la cometa tenga una superficie de 500 cm^2 es, aproximadamente, 148° 37′:

Ans = °'''

```
Ans

        148°36'42.6"
```

Ampliación

1 Si las longitudes de las cañas son 24 y 50 cm, respectivamente, ¿para qué valor del ángulo el área de la cometa es máxima?

2 Cambia los valores de las longitudes iniciales y calcula de nuevo el valor del ángulo para que el área de la cometa sea máxima.

¿Qué observas? Redacta tus conclusiones.

01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

Los problemas que se plantean en topografía y navegación exigen la resolución de triángulos, es decir, la obtención de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos a partir de los conocidos.

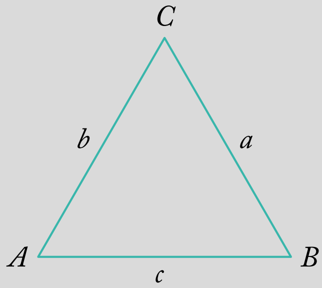
La resolución de un triángulo puede obtenerse mediante su construcción geométrica (con regla y compás) o utilizando expresiones trigonométricas (como los teoremas del seno y el coseno). Estos problemas pueden tener solución única, dos soluciones o bien pueden ser de imposible solución.

A continuación se utilizará el **teorema del coseno** para resolver un triángulo.

Dicho teorema es una generalización del teorema de Pitágoras. En francés lleva el nombre del matemático y astrónomo persa al-Kashi. Dicho teorema dice así:

Dado un triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$ de lados conocidos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{AB} = c$, se tiene:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$



1 Resuelve el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, de lados $a = 15$, $b = 34$ y $c = 35$.

2 Resuelve el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, conocidos $b = 4$, $c = 3$ y $\hat{A} = 60°$.

3 Resuelve el triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, conocidos $a = 3$, $c = 4$ y $\hat{A} = 30°$.

Teorema del coseno

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El alumnado deberá saber cómo calcular el valor numérico de una expresión algebraica previamente a la realización de esta actividad.
- El alumno tiene que conocer las razones trigonométricas.
- Para realizar la actividad se utilizará la función *CALC* y el modo *Ecuación/Función*, que permite la resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Se utilizarán razones trigonométricas para calcular ángulos (modo angular sexagesimal).

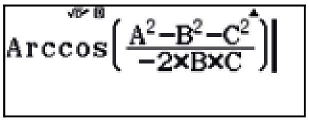
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

De este triángulo se conocen los tres lados y se desconocen los ángulos. Para determinar el ángulo A, se introduce en la calculadora la expresión:

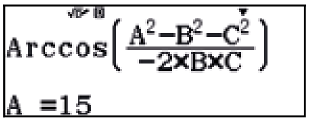
$$\hat{A} = \text{arccos}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

[SHIFT] [cos] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [x^2] [−] [ALPHA] [°'"] [x^2] [−] [ALPHA]
[x^{-1}] [x^2] [▼] [−] [2] [×] [ALPHA] [°'"] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [▶] [)]

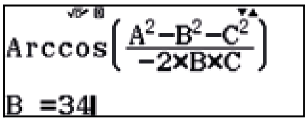


Seguidamente, se presiona [CALC] y se substituye en la fórmula los valores $A \longrightarrow a = 15$, $B \longrightarrow b = 34$, $C \longrightarrow c = 35$.

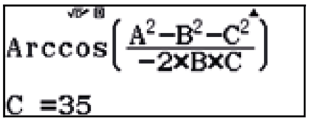
[CALC] [1] [5] [=]



[3] [4] [=]

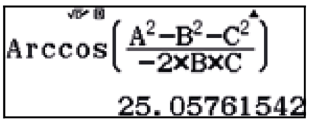


[3] [5] [=]

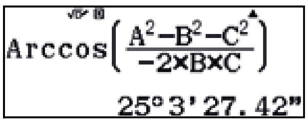


Al presionar [=] se obtiene el valor del ángulo $\hat{A}$:

[=]



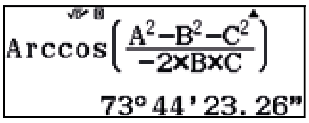
[°'"]



En consecuencia, el ángulo resulta $\hat{A} = 25°\ 3'\ 27{,}42''$.

Para determinar el valor del ángulo $\hat{B}$, se procede como en el caso anterior, sustituyendo los valores $A \longrightarrow b = 34$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow c = 35$.

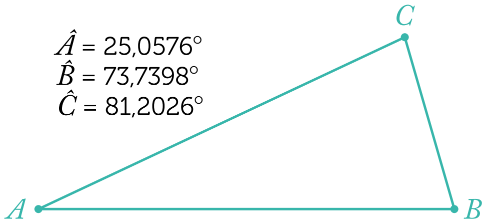
[CALC] [3] [4] [=] [1] [5] [=] [3] [5] [=] [=] [°'"]



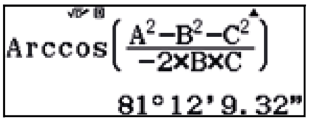
Es decir, $\hat{B} = 73°\ 44'\ 23{,}26''$.

01 | Resolución de triángulos. Valor de una expresión.
Teorema del coseno

El ángulo $\hat{C}$ se calcula como en los casos anteriores. Ahora se sustituyen los valores $A \longrightarrow c = 35$, $B \longrightarrow a = 15$, $C \longrightarrow b = 34$.



CALC 3 5 = 1 5 = 3 4 = = °'''

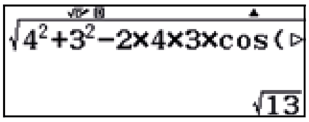


En consecuencia, $\hat{C} = 81°\ 12'\ 9{,}32''$.

El triángulo resulta con las dimensiones que se muestran en la figura adjunta.

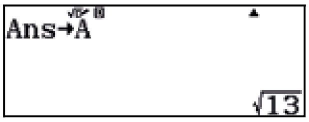
2

Para calcular el lado a se utiliza la fórmula del coseno: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$

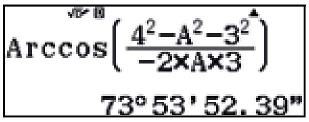


Por tanto, $a = \sqrt{13}$. Se almacena este valor en la variable A.

STO (−)

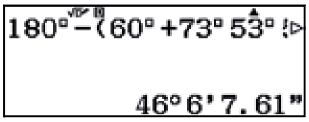


Para calcular el ángulo $\hat{B}$ se utiliza el teorema del coseno: $\hat{B} = \text{arccos}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$

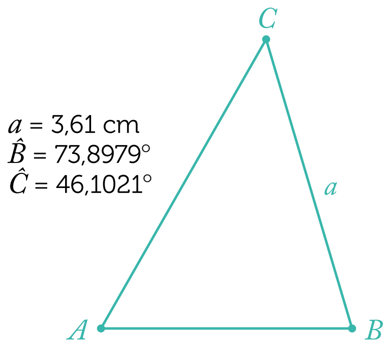


En consecuencia, $\hat{B} = 73°\ 53'\ 52{,}39''$.

Por tanto, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$.



Es decir, $\hat{C} = 46°\ 6'\ 7{,}61''$.



3

Si se resuelve gráficamente el problema se observa que existen dos soluciones.

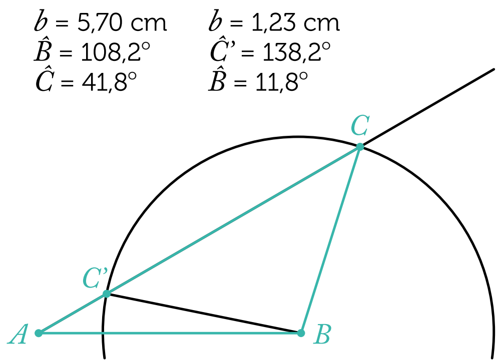
Se utiliza la fórmula del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ para calcular el lado b.

$$3^2 = b^2 + 4^2 - 2b \cdot 4 \cdot \cos 30°$$

Se observa que se trata de una ecuación de segundo grado.

Para resolver la ecuación utilizando la calculadora, se pasan todos los términos, ordenados según el grado, a uno de los miembros de la ecuación. Es decir, se iguala esta a cero:

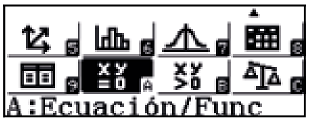
$b^2 + 4^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b - 9 = 0 \Rightarrow b^2 - 8 \cdot \cos 30° \cdot b + 7 = 0$

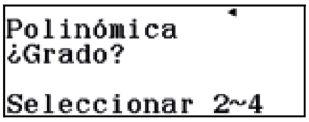


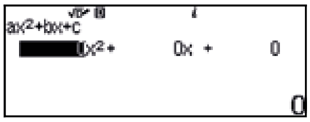
Teorema del coseno

Una vez se tiene dispuesta la expresión algebraica de esta manera, puede utilizarse el modo *Ecuación/Función* para calcular el lado b, resolviendo la ecuación de segundo grado.

MENU (–) 2 2 =

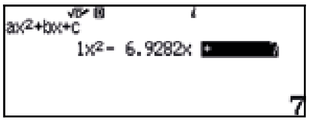


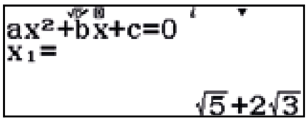


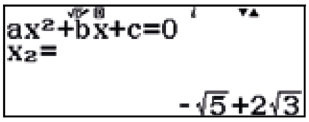


Se introducen los coeficientes correspondientes y se presiona =, con lo que se obtienen las dos soluciones de la ecuación:

= = =





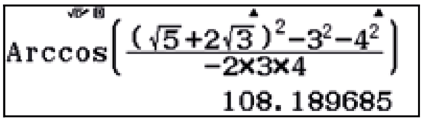


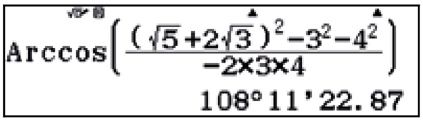
Se analizan ahora separadamente los triángulos que resultan de considerar cada una de las soluciones de la ecuación:

a) $b = \sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 5{,}70$

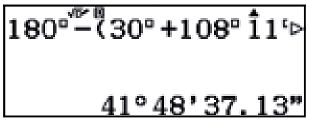
Se considera la primera solución y se aplica el teorema del coseno para calcular el ángulo B:

°'''





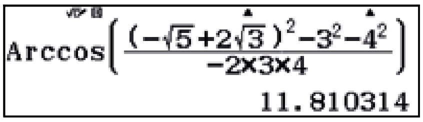
El ángulo $\hat{C}$ se calcula como $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:

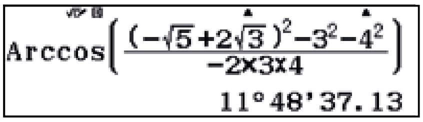


b) $b = -\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \approx 1{,}23$

Se considera la segunda solución y se aplica el teorema del coseno, con lo que se obtiene:

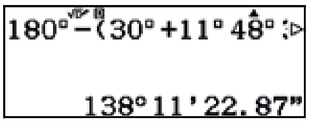
°'''





Es decir, $\hat{B} = 11° \; 48' \; 37{,}13''$.

En cuanto al ángulo $\hat{C}$, se obtiene a partir de $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$. Por tanto:



$\hat{C} = 138° \; 11' \; 22{,}87''$.

ESTADÍSTICA

www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

Realizados por: FESPM

Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer

¿Qué es la esperanza de vida al nacer? ¿Crees que es la misma para hombres y mujeres? ¿Qué crees que es la brecha de género?

La esperanza de vida al nacer es el número medio de años que esperaría vivir una persona en caso de mantenerse el patrón de mortalidad por edad (tasas de mortalidad a cada edad) actualmente observado. La esperanza de vida es el indicador más ampliamente utilizado para realizar comparaciones sobre la incidencia de la mortalidad en distintas poblaciones y, en base a ello, sobre las condiciones de salud y el nivel de desarrollo de una población.

La brecha de género (mujeres-hombres) es la diferencia de años entre la esperanza de vida de los hombres y la de las mujeres.

Hemos obtenido los siguientes datos del INE respecto a la esperanza de vida al nacimiento en España desde el año 1991 hasta el 2013.

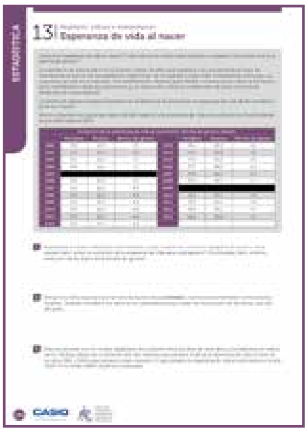
Evolución de la esperanza de vida al nacimiento. Brecha de género. España							
	Hombres	Mujeres	Brecha de género		Hombres	Mujeres	Brecha de género
1991	73,5	80,7	7,2	2003	76,4	83,0	6,6
1992	73,9	81,2	7,3	2004	77,0	83,6	6,6
1993	74,1	81,2	7,1	2005	77,0	83,5	6,5
1994	74,5	81,6	7,1	2006	77,7	84,2	6,4
1995	[redacted]			2007	77,8	84,1	6,4
1996	74,6	81,8	7,2	2008	78,2	84,3	6,1
1997	75,2	82,2	6,9	2009	[redacted]		
1998	75,4	82,3	6,9	2010	79,1	85,1	6,0
1999	75,4	82,3	6,9	2011	79,3	85,2	5,8
2000	75,9	82,7	6,8	2012	79,4	85,1	5,7
2001	76,3	83,1	6,8	2013	80,0	85,6	5,6
2002	76,4	83,1	6,8				

1 Representa los datos referentes a los hombres y a las mujeres en un mismo diagrama de puntos. ¿Qué puedes decir sobre la evolución de la esperanza de vida para cada género? ¿Qué puedes decir sobre la evolución de los datos de la brecha de género?

2 Dibuja una recta que pase por la nube de puntos de la **actividad 1**, tanto para los hombres como para las mujeres. Después introduce los datos en tu calculadora para y obtén las ecuaciones de las rectas que has dibujado.

3 Estas ecuaciones son un modelo algebraico de la relación entre los años de nacimiento y la esperanza de vida al nacer. ¿Podrías utilizar las ecuaciones que has obtenido para predecir cuál fue la esperanza de vida al nacer en los años 1995 y 2009 para hombres y para mujeres? ¿Y para predecir la esperanza de vida al nacimiento en el año 2029? ¿Y en el año 2063? Justifica tu respuesta.

13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

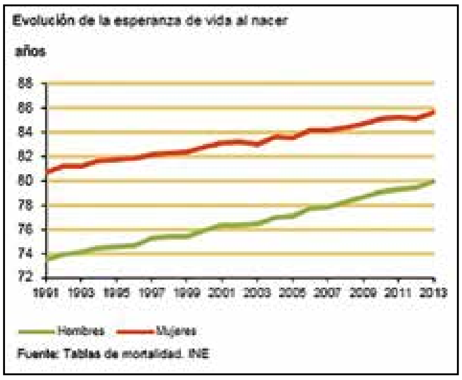
NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende que los alumnos de secundaria se inicien en el concepto de regresión lineal, utilizando datos reales.
- El uso de la calculadora propicia que la tarea se centre en la interpretación de los resultados y en el estudio de las limitaciones de la regresión lineal, y no tanto en el cálculo de la ecuación de la recta de regresión.
- Para realizar la actividad, conviene configurar la calculadora para que la tabla estadística no muestre la columna de las frecuencias. Para ello se procede tecleando la secuencia SHIFT MENU ▼ 3 2. Seguidamente, hay que seleccionar, en el menú *Estadística*, la opción 2: *regresión lineal* (MENU 6 2).
- Para visualizar la nube de puntos en la aplicación CASIO EDU+, es necesario generar un código *QR* (SHIFT OPTN), que se escaneará con dicha aplicación. El gráfico resultante se compartirá con una clase previamente creada. En esta ocasión, se tendrá que generar un código *QR* para los datos referentes a los hombres y otro para el correspondiente a las mujeres.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

A continuación se muestra un gráfico proporcionado por el INE sobre la evolución de la esperanza de vida al nacer:



Como se observa, en los países occidentales la esperanza de vida ha experimentado notables avances en el último siglo, y se ha conseguido con disminuciones en la probabilidad de morir debido a los avances médicos y tecnológicos, a la reducción en las tasas de mortalidad infantil, a cambios en los hábitos nutricionales y estilos de vida y a la mejora en las condiciones de vida y en la educación, así como al acceso de la población a los servicios sanitarios.

En las últimas décadas ha aumentado significativamente la esperanza de vida al nacimiento en hombres y mujeres, y la diferencia entre hombres y mujeres en años de esperanza de vida al nacer ha disminuido.

Según indican las proyecciones, la esperanza de vida al nacimiento alcanzaría los 84,0 años en los hombres y los 88,7 en las mujeres en el año 2029, lo que supone un incremento de 4,0 y de 3,0 años, respectivamente, respecto a los valores actuales. Ello supone alcanzar los 90,9 años de esperanza de vida al nacimiento para los hombres en el año 2063 y los 94,3 años para las mujeres.

http://www.ine.es/jaxi/menu.do?type=pcaxis&path=%2Ft20%2Fp319a%2Fserie%2Fp01&file=pcaxis&N=&L=0

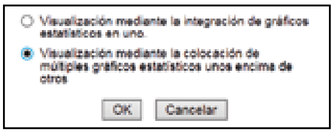
13 | Regresión: cálculo e interpretación
Esperanza de vida al nacer

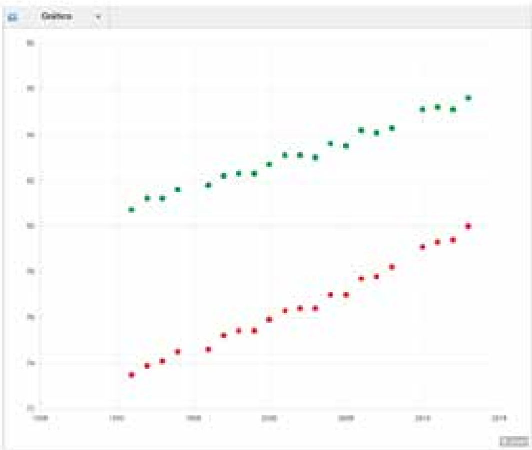
1

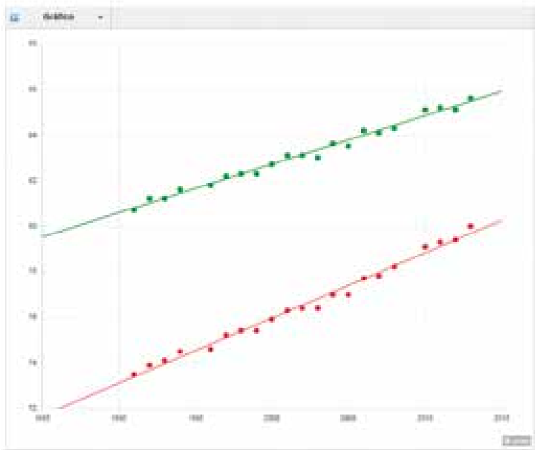
Para obtener las representaciones, se introducen los datos en la calculadora y se generan los correspondientes códigos QR. Las nubes de puntos se visualizan escaneando dichos códigos con la aplicación CASIO EDU+:

2

La creación de una clase mediante la aplicación CASIO EDU+ y la incorporación de ambos gráficos en la misma, permite combinar ambas nubes de puntos y representar gráficamente las correspondientes rectas de regresión.

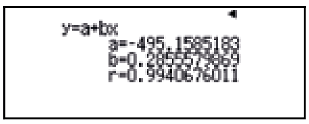




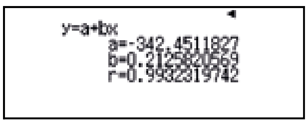


Las expresiones analíticas de las rectas de regresión se obtienen presionando la secuencia OPTN 4.

Hombres



Mujeres



Las rectas de regresión correspondientes a la esperanza de vida al nacer para hombres y mujeres son, respectivamente:

$f(x) = 0{,}2855579869x - 495{,}1585183$

$g(x) = 0{,}2125820569x - 342{,}4511827$

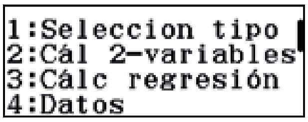
Esperanza de vida al nacer

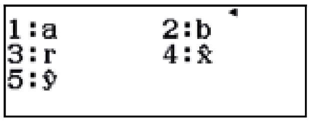
3

El cálculo de los valores estimados se puede hacer de dos formas distintas:

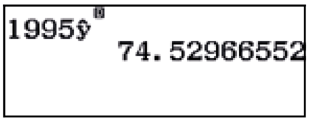
A) Desde el menú *Estadística*, con la siguiente secuencia de teclas:

AC OPTN ▼ 4 5





La opción 5:$\hat{y}$ permite estimar el valor de la variable y conocido el valor que toma la variable x. Así, en el caso de los hombres, se tiene:

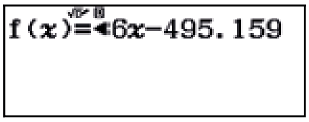


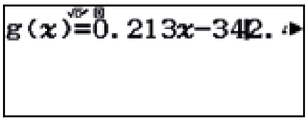
$\hat{y}(1995) = 74{,}53$

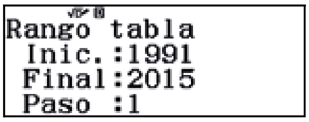
Para calcular el resto de estimaciones, basta con editar esta expresión e introducir el resto de valores.

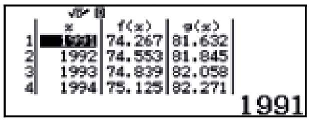
B) Desde el menú *Tabla* se introducen las expresiones de las regresiones en las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y se elige el rango de la tabla. La tabla permite introducir directamente valores para calcular las imágenes.

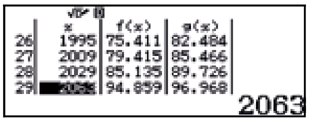
Si se introducen las ecuaciones de las regresiones con valores aproximados para los coeficientes, se obtienen los siguientes resultados:











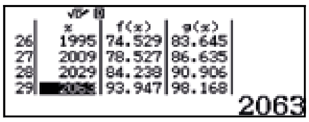
$f(1995) = 75{,}4$ $g(1995) = 82{,}5$ (Los datos reales son, respectivamente, 74,5 y 81,7)

$f(2009) = 79{,}4$ $g(2009) = 85{,}5$ (Los datos reales son, respectivamente, 78,6 y 84,7)

$f(2029) = 85{,}1$ $g(2029) = 89{,}7$

$f(2063) = 94{,}9$ $g(2063) = 97$

Ahora bien, si se introducen las funciones con todos los decimales que nos proporciona la calculadora, las estimaciones que se obtienen son:



$f(1995) = 74{,}5$ $g(1995) = 83{,}7$ (Los datos reales son, respectivamente, 74,5 y 81,7)

$f(2009) = 78{,}5$ $g(2009) = 86{,}6$ (Los datos reales son, respectivamente, 78,6 y 84,7)

$f(2029) = 84{,}2$ $g(2029) = 90{,}9$

$f(2063) = 93{,}9$ $g(2063) = 98{,}1$

12 | Regresión: cálculo e interpretación
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

La carrera de los 1 500 m lisos es en la actualidad la prueba estrella del atletismo de medio fondo.

La modalidad masculina forma parte de los Juegos Olímpicos modernos desde su primera edición, que tuvo lugar en Atenas en 1896. En dicha edición resultó vencedor el australiano Edwin Flack, quien obtuvo un registro de 4′ 33,2′′.

La modalidad femenina no fue reconocida hasta las Olimpiadas del año 1972, en las que resultó vencedora la soviética Lyudmila Bragina, con un tiempo de 4′ 01,38′′.

El atleta que ganó esta prueba en los Juegos Olímpicos, celebrados en Brasil, en el año 2016, fue el estadounidense Matthew Centrowitz, con un tiempo de 3′ 50′′.

Actualmente, el récord mundial lo ostenta el marroquí Hicham El Guerrouj, quien obtuvo en Roma, en junio del año 1988, la extraordinaria marca de 3′ 26,17′′.

La tabla que te presentamos a continuación recoge las marcas olímpicas de la carrera de 1 500 m masculinos desde Atenas 1896 hasta Río 2016:

AÑO	MARCA (min.)	AÑO	MARCA (min.)	AÑO	MARCA (min.)
1896	4,553	1948	3,83	1988	3,599
1900	4,103	1952	3,752	1992	3,678
1904	4,09	1956	3,687	1996	3,596
1908	4,057	1960	3,593	2000	3,535
1912	3,947	1964	3,635	2004	3,570
1920	4,03	1968	3,582	2008	3,549
1924	3,893	1972	3,605	2012	3,569
1928	3,887	1976	3,653	2016	3,833
1932	3,853	1980	3,64		
1936	3,797	1984	3,542		

1. Dibuja un diagrama de puntos que represente la información.
2. ¿Crees que los datos presentan una tendencia lineal? Justifica tu respuesta.
3. Dibuja una recta que represente la nube de puntos. ¿Sabes cómo se llama esta recta?
4. Obtén con la ayuda de la calculadora la expresión analítica de la recta anterior.
5. ¿En qué años no se celebraron olimpiadas? ¿Sabes por qué?
6. ¿Podrías predecir las marcas de los años olímpicos que faltan? Explica cómo lo harías.
7. ¿Crees que es razonable utilizar la recta de regresión para estimar la marca en los juegos olímpicos de 2048? ¿Por qué?
8. ¿Y para los del 2200? ¿Por qué?

12 | Regresión: cálculo e interpretación
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- El uso de la calculadora favorece la anticipación de conocimientos, anteponiendo, en la resolución de problemas, la experimentación, la interpretación y la formulación de conjeturas al cálculo algorítmico.
- Con esta actividad se persigue introducir el concepto de regresión lineal a los estudiantes de cuarto curso de secundaria, para trabajar su interpretación y estudiar sus limitaciones, utilizando datos reales. Las actividades están planteadas para que los alumnos reflexionen sobre los datos que se les presenta, antes de acudir a la calculadora.
- Antes de iniciar el trabajo con la calculadora, es conveniente elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso se configura la calculadora para que las tablas estadísticas no muestren las frecuencias:

SHIFT MENU ▼ 3 2

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Símb ingeniería
```

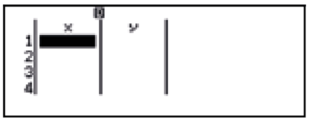
```
1:Result fracción
2:Complejos
3:Estadística
4:Hoja de cálculo
```

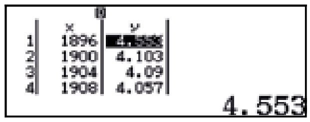
```
¿Frecuencia?
1:On
2:Off
```

- A continuación se selecciona el menú *Estadística* y la opción 2: $y=a+bx$, que permite trabajar con regresiones lineales. Seguidamente se introduce en la columna x los años y en la columna y las marcas:

MENU 6 2


```
1:1-Variable
2:y=a+bx
3:y=a+bx+cx²
4:y=a+b·ln(x)
```

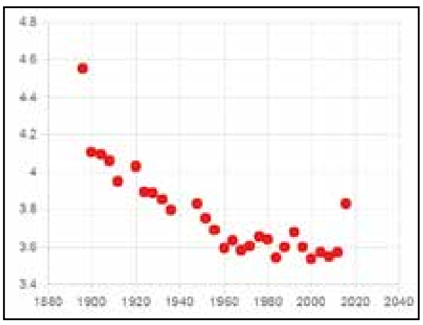




- Para visualizar la nube de puntos en la aplicación CASIO EDU+, es necesario generar un código *QR* (mediante la secuencia de teclas SHIFT OPTN). Dicho código se tiene que escanear con la aplicación y abrir o compartir en una clase previamente creada.
- En esta ocasión, la calculadora genera dos códigos, de manera que deben ser escaneados en orden para visualizar la nube de puntos

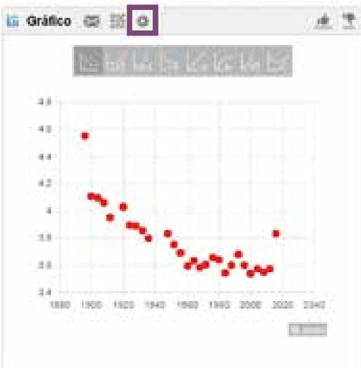
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

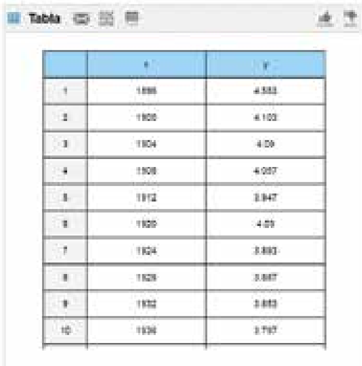
La aplicación CASIO EDU+ muestra la siguiente nube de puntos:



12 | Regresión: cálculo e interpretación
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

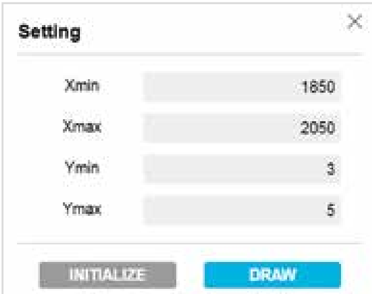
La aplicación permite cambiar la escala de los ejes. Para ello hay que presionar el icono de preferencias.





	x	y
1	1896	4.553
2	1900	4.103
3	1904	4.09
4	1908	4.057
5	1912	3.947
6	1920	4.03
7	1924	3.893
8	1928	3.887
9	1932	3.853
10	1936	3.797

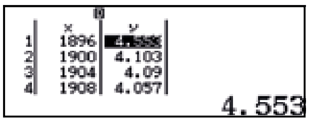
Escogemos la escala de los ejes que más nos convenga.



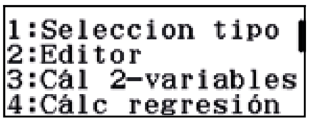
Antes de obtener la ecuación de la recta de regresión con la calculadora, se puede visualizar la gráfica correspondiente en la aplicación CASIO EDU+. Basta con seleccionar el icono adecuado.

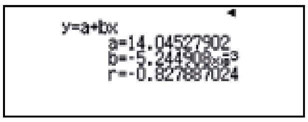
Para hallar la expresión analítica con la calculadora, se presiona la tecla OPTN y se selecciona la opción 4: *Cálc regresión*.

OPTN



4





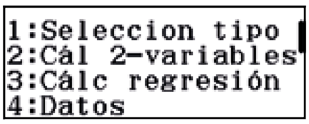
$$y = -0{,}005244908x + 14{,}04527902$$

Para determinar las marcas estimadas para los años que se piden, se pueden utilizar diversos procedimientos:

A) Desde la pantalla *Estadística* (AC) se presiona OPTN y se selecciona la opción 4: *Regresión*.

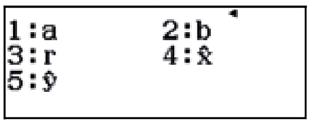
AC OPTN

▼



4

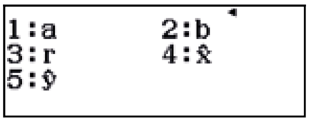
5

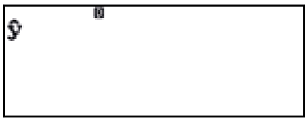


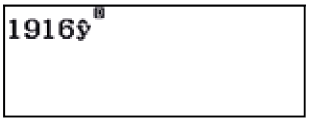
Atletismo: 1 500 metros lisos masculinos

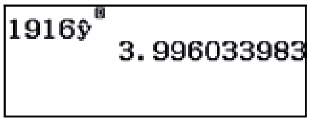
La opción 5: $\hat{y}$ permite obtener el valor de la variable y conocido el valor que toma la variable x. Así, por ejemplo, para determinar la marca del año 1946, hay que proceder de la siguiente manera:

[5] [◀] [1] [9] [1] [6]





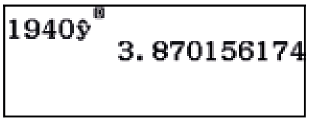




En consecuencia, se tiene que $\hat{y}(1916)$ = 3,996 min = 3′ 59,76′′.

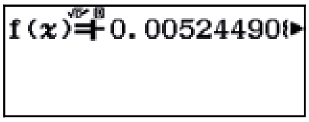
Para hallar las marcas que corresponden a otros años, basta con reescribir la expresión anterior, introduciendo el valor deseado de la variable x.

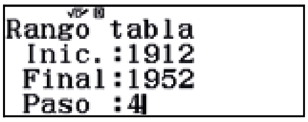
[◀] [◀] [DEL] [DEL] [4] [0] [▶] [=]

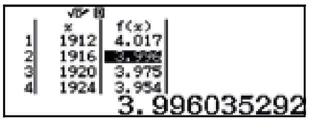


Se obtiene, así: $\hat{y}(1940)$ = 3,870 min = 3′ 52,22″

B) Desde el menú *Tabla* se introduce la expresión de la regresión en la función $f(x)$ y se elige el rango de la tabla:





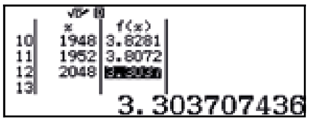


$\hat{y}(1916)$ = 3,996 minutos = 3′ 59,76″

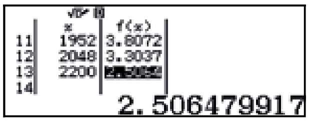
$\hat{y}(1940)$ = 3,870 minutos = 3′ 52,2″

$\hat{y}(1944)$ = 3,849 minutos = 3′ 50,94″

El menú *Tabla* permite introducir directamente un valor:



$\hat{y}(2048)$ = 3,304 minutos = 3′ 18,242″



$\hat{y}(2200)$ = 2,506 minutos = 2' 30,36″

PROBABILIDAD

www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

Realizados por: FESPM

Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

08 | Ley de los grandes números
Lanzamiento de una moneda

La ley de los grandes números se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad. Establece que la frecuencia relativa de los resultados de un determinado experimento aleatorio, tiende a estabilizarse en un número que es justamente la probabilidad, cuando dicho experimento aleatorio se realiza muchas veces.

1 Simula con la calculadora el lanzamiento de una moneda normal 20 veces. Observa si las frecuencias relativas de los resultados *salir cara* o *salir cruz* tienden al valor teórico $\frac{1}{2}$.

2 ¿Cómo procederías para simular los 20 lanzamientos de una moneda trucada?

Lanzamiento de una moneda

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad el alumnado podrá realizar una simulación trabajando con tablas y fórmulas en la hoja de cálculo. Podrá realizar diversos gráficos transfiriendo sus datos desde una tabla CSV.
- Para realizar esta actividad se utiliza el menú *Hoja de cálculo* (MENU 1) y el código *QR* (SHIFT OPTN).

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

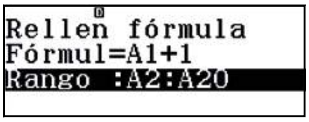
1

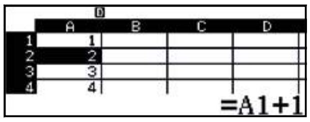
En el menú *Hoja de cálculo*, se introduce en la columna A el número de lanzamiento de la moneda:

En la celda A1 se introduce un 1 de primer lanzamiento.

En la celda A2 se pulsa OPTN 1, se escribe la fórmula =A1+1 y se ajusta el rango para no realizar la introducción de datos celda a celda:

ALPHA (−) 1 + 1 = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =

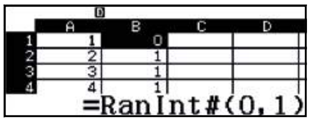




- En la columna B se simula el lanzamiento con la instrucción *RanInt#*(0,1) que devuelve de manera aleatoria 0 (cara) o 1 (cruz). Para escribir la instrucción directamente en las veinte celdas se procede de manera análoga:

  En la celda B1 se teclea la fórmula anterior:

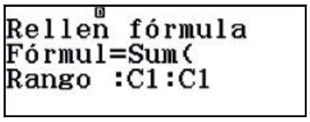
OPTN 1 ALPHA · 0 SHIFT) 1) ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =



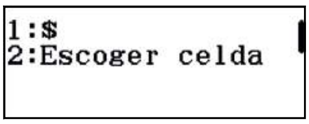
- En la columna C se cuentan el número de 1 (cruces) que se obtienen tras cada lanzamiento con la instrucción (B$1 fija la fila, se utiliza para copiar una fórmula y no modificar las referencias):

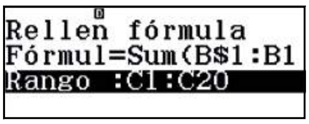
=Sum(B$1:B1) en la celda C1

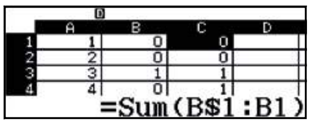
OPTN 1 OPTN ▼ 4



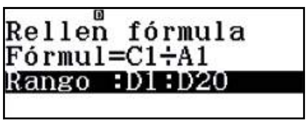
ALPHA °'" OPTN 1 1 ALPHA ∫□ ALPHA °'" 1) = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 2 0 = =

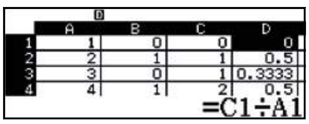




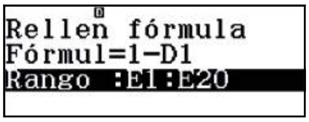


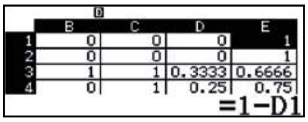
- En la columna D se calcula cómo va evolucionando la frecuencia relativa, según se efectúan los lanzamientos, empezando con $\frac{C1}{A1}$ y así hasta el vigésimo lanzamiento:





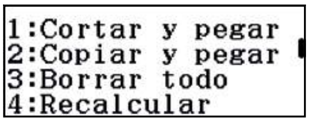
- En la columna E se calcula la frecuencia relativa del suceso *salir cruz* con =1–D1:



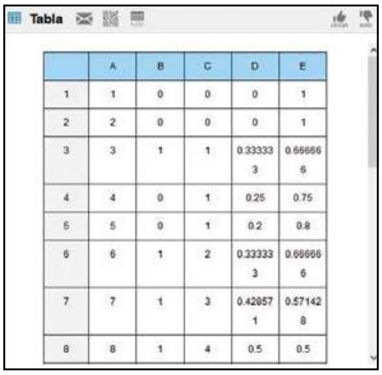


Se observa como en ambas columnas las frecuencias relativas tienden a su valor teórico.

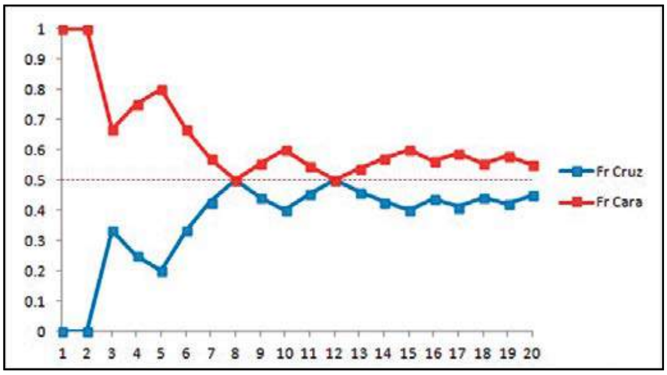
La opción *4:Recalcular* (OPTN ▼ 4) permite la simulación tantas veces como se considere oportuno para corroborar la probabilidad teórica:



Con el código *QR* (SHIFT OPTN) se obtiene la tabla que se puede exportar como archivo CSV de Excel para realizar los gráficos adecuados. Para ello se pulsa el icono :



	A	B	C	D	E
1	1	0	0	0	1
2	2	0	0	0	1
3	3	1	1	0.333333	0.666666
4	4	0	1	0.25	0.75
5	5	0	1	0.2	0.8
6	6	1	2	0.333333	0.666666
7	7	1	3	0.428571	0.571428
8	8	1	4	0.5	0.5



2

El siguiente procedimiento permite simular el lanzamiento de una moneda trucada.

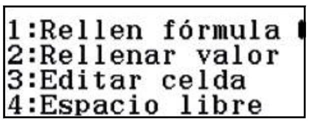
- En la columna B se simula el lanzamiento con la instrucción *Int*(*Ran#* + 0,4):

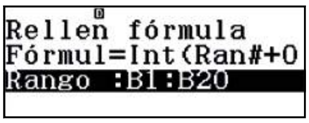
  Ran# devuelve un número aleatorio entre 0 y 1.

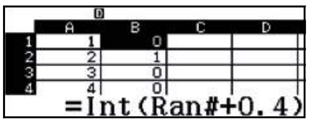
  - Si 0 < *Ran#* < 0,6 → 0 < *Ran#* + 0,4 < 1 → *Int*(*Ran#* + 0,4) = 0 → Cara
  - Si 0,6 < *Ran#* < 1 → 1 < *Ran#* + 0.4 < 2 → *Int*(*Ran#* + 0,4) = 1 → Cruz

De esta manera se truca la moneda al asignar al suceso *salir cara* un valor del 60% y al suceso *salir cruz* un valor del 40%.

En la celda B1 se teclea la fórmula anterior:

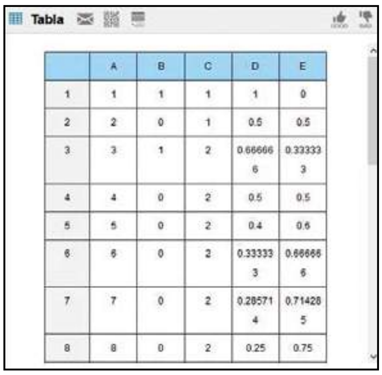




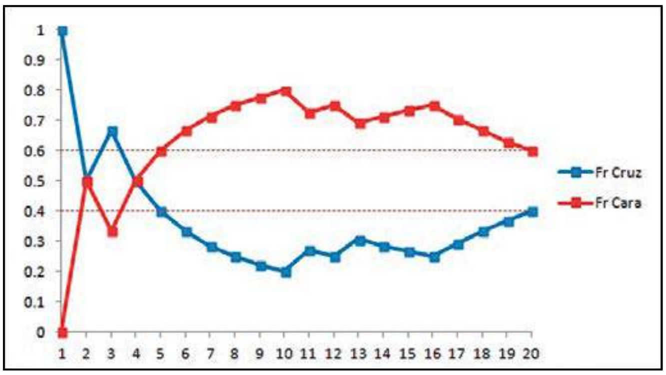


Para el resto de columnas se procede como en el **apartado 1**.

Con el código *QR* se obtiene la tabla que se puede exportar como archivo CSV:



	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	0
2	2	0	1	0.5	0.5
3	3	1	2	0.666666	0.333333
4	4	0	2	0.5	0.5
5	5	0	2	0.4	0.6
6	6	0	2	0.333333	0.666666
7	7	0	2	0.285714	0.714285
8	8	0	2	0.25	0.75



09 | Combinatoria. Regla de Laplace
Full de ases y reyes

La teoría de la Probabilidad es la herramienta matemática para trabajar con los fenómenos aleatorios, y nació gracias al interés que demostró un jugador empedernido, el Caballero De Meré, que le propuso a Blaise Pascal (1623-1662) la siguiente cuestión: ¿Cómo debe repartirse el dinero de las apuestas depositado en la mesa si los jugadores se ven obligados (seguramente por la policía ya que el juego estaba prohibido) a finalizar la partida sin que exista un ganador?

A♣	K♣	Q♣	J♣	10♣	**Escalera Real**
7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	**Escalera Color**
9♥	9♠	9♣	9♦	3♦	**Póker**
6♦	6♠	6♥	3♠	3♣	**Full**
2♥	7♥	J♥	A♥	4♥	**Color**
3♦	4♣	5♦	6♠	7♥	**Escalera**
8♥	8♠	8♣	2♣	10♦	**Trío**
Q♦	Q♠	5♥	2♣	5♦	**Doble Pareja**
K♣	K♦	7♣	2♠	J♥	**Pareja**

En la actualidad uno de los juegos de cartas más extendido en sus diferentes variantes es el póker, un juego en el que se mezclan las matemáticas, la psicología y la intuición. En abril de 2010 el póker fue aceptado como deporte mental por la Asociación Internacional de Deportes Mentales.

Si conoces las reglas del póker sabrás que hay una serie de combinaciones de cartas, llamadas manos, con una determinada jerarquía. El objetivo del juego consiste en conseguir una mano de cartas con una jerarquía mayor que la que tengan el resto de los jugadores.

En la tabla de la izquierda tienes en orden decreciente de importancia las distintas manos del póker.

Averigua cuál es la probabilidad de obtener cada una de ellas, así como la de no obtener ninguna.

09 | Combinatoria. Regla de Laplace
Full de ases y reyes

MATERIALES

Calculadora CASIO fx 570/991SP X II Iberia

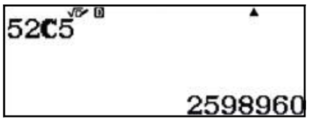
NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- En esta actividad se utiliza una baraja de 52 cartas (13 cartas por color y sin comodines). Se considerará solamente el caso de que salgan las diferentes manos la primera vez que se reparten las cartas.
- Para calcular con la calculadora las distintas combinaciones que aparecen, como por ejemplo $C_{52}^{5} = \binom{52}{5}$, se utiliza la siguiente secuencia de teclas:

5 2 SHIFT ÷ 5 =



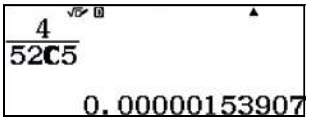
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

Para calcular las probabilidades de las manos de póker se observa que hay $C_{52}^{5} = \binom{52}{5}$ = 2 598 960 formas distintas de elegir 5 cartas de una baraja de 52. El cálculo de probabilidades se reduce a obtener las distintas formas en que puede ocurrir cada una de las manos.

Escalera real

La *escalera real* es una mano formada por cartas consecutivas todas del mismo palo, en la que la de más valor es el as. Solo hay cuatro posibles escaleras reales, una por cada palo, por lo que su probabilidad es:

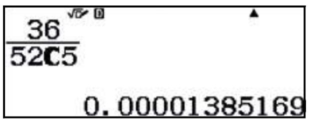
$$P(\textit{Escalera real}) = \frac{4}{2\,598\,960}$$



Escalera de color

La *escalera de color* es una mano formada por cartas consecutivas todas del mismo palo. Para averiguar el número de escaleras de color que se pueden formar es suficiente con pensar que en un conjunto ordenado de trece elementos solo hay 9 que tengan 5 elementos menores o iguales que ellos, en nuestro caso a esto se tiene que unir que hay cuatro palos distintos, por lo que el número de escaleras de color sería 9 · 4 = 36. La probabilidad de tener escalera de color al sacar cinco cartas de una baraja de póker es:

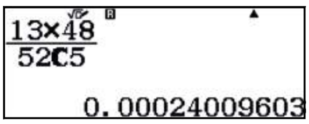
$$P(\textit{Escalera de color}) = \frac{36}{2\,598\,960}$$



Póker

Esta mano está formada por cuatro cartas de igual valor (aunque lógicamente serán de distinto palo) y una quinta carta distinta a las anteriores. El número de formas distintas de sacar un *póker* es igual a 13 · 48 = 624 (13 grupos de cuatro cartas del mismo valor y 48 cartas que se pueden utilizar para completar el quinteto):

$$P(\textit{Póker}) = \frac{13 \cdot 48}{2\,598\,960}$$

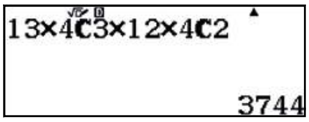


Full de ases y reyes

Full

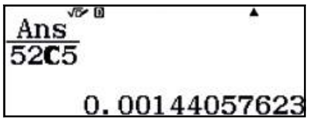
Un *full* se forma con dos grupos de cartas de igual valor, uno de tres cartas y otro de dos. Las distintas formas de sacar esta mano son:

$$13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 3\,744$$



Que corresponde a 13 grupos de cuatro cartas de igual valor que se tienen para elegir el trío, por las formas de sacar tres cartas de cuatro, por 12 grupos de cartas de igual valor (ya se habría utilizado uno) que se tienen para elegir las parejas, por las formas de sacar dos cartas de cuatro posibles. La probabilidad es:

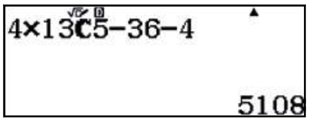
$$P(\mathit{Full}) = \frac{3\,744}{2\,598\,960}$$



Color

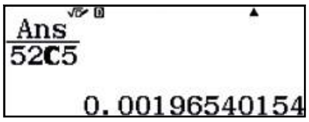
Todas las cartas deben ser del mismo palo, pero sin ser escalera real o de color. Por lo que el número de casos posibles es:

$$4 \cdot C_{13}^5 - 36 - 4 = 5\,108$$



La probabilidad de obtenerla es:

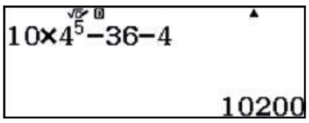
$$P(\mathit{Color}) = \frac{5\,108}{2\,598\,960}$$



Escalera

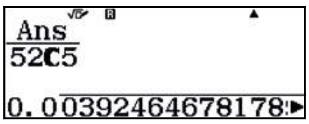
Cinco cartas de valor consecutivo de distinto palo. El número de casos favorables es:

$$10 \cdot VR_4^5 - 36 - 4 = 10\,200$$



La probabilidad de obtenerla:

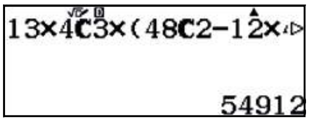
$$P(\mathit{Escalera}) = \frac{10\,200}{2\,598\,960}$$



Trío

Las distintas formas de sacar tres cartas del mismo valor junto con otras dos que no lo sean es:

$$13 \cdot C_4^3 \cdot (C_{48}^2 - 12 \cdot C_4^2) = 54\,912$$



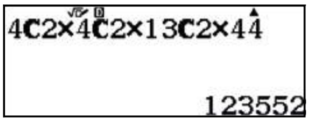
La probabilidad de obtenerla:

$$P(\text{Trío}) = \frac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}021$$

Doble Pareja

El número de formas distintas de obtener esta mano es:

$$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{13}^2 \cdot 44 = 123\,552$$



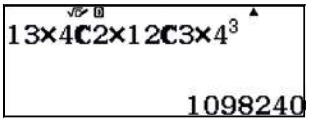
La probabilidad de obtenerla:

$$P(\text{Doble Pareja}) = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0{,}048$$

Pareja

Para calcular todas las formas posibles de obtener esta mano se procede como sigue:

$$13 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3 \cdot VR_4^3 = 1\,098\,240$$



La probabilidad de obtenerla:

$$P(\text{Pareja}) = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}423$$

Ninguna mano

El número de casos favorables se obtiene restando al número de casos posibles los casos de obtener alguna mano:

2 598 960 – (4 + 36 + 624 + 3 744 + 5 108 + 10 200 + 54 912 + 123 552 + 1 098 240) = 2 598 960 – 1 296 420 = 1 302 540

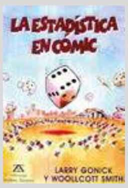
La probabilidad de no obtener mano alguna es:

$$P(\text{ninguna mano}) = \frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0{,}501$$

OBSERVACIÓN

Una opción para diversificar esta actividad puede ser comparar la probabilidad de ocurrencia de alguna de las manos con la probabilidad de obtener el máximo premio en otros juegos de azar como puede ser el caso de la Bonoloto o la lotería de Navidad. Resulta de especial interés utilizar ese tipo de actividades en clase para tratar el consumo responsable y la ludopatía, aunque sólo sea de manera tangencial. Existen datos, en el IX Informe Percepción Social sobre el juego de azar en España 2018 (realizado por la Fundación Codere y la Universidad Carlos III de Madrid), que afirman que solo en el ámbito del juego online, hubo un incremento de 120 000 personas en 2017, estimándose en 1,5 millones – el equivalente a 4,8% de la población entre 18 y 75 años– el número total de jugadores activos a este tipo de juegos, a finales de 2017. Este dato hace más importante que el alumnado aprenda, a través del concepto de probabilidad, a analizar los riesgos que tienen los juegos de azar.

10 | Cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada
Juego justo. El origen de la probabilidad



"En la vida, nada es seguro. En todas nuestras acciones, calculamos siempre las posibilidades de un buen resultado. Tanto en el mundo de los negocios como en la medicina o el clima. Sin embargo, en la historia de la humanidad, la probabilidad, el estudio formal de las leyes del azar, se ha utilizado para una sola cosa: el juego"

Larry Gonick y Woollcott Smith, 1993

1 El juego se remonta a tiempos ancestrales, durante la Edad Media los juegos de dados se hicieron muy populares. En el Renacimiento, el Caballero De Mére propuso el siguiente enigma matemático:

¿Qué es más probable, sacar un seis en cuatro tiradas con un solo dado o sacar al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados?

Y tú, ¿qué crees que es más probable?

2 Repite 20 veces cada juego, lanzando los dados o simulando los lanzamientos con tu calculadora, y recoge tus datos en una tabla.

	Sale 6	No sale 6
4 tiradas Dado cúbico		

	Sale doble 6	No sale doble 6
24 tiradas Dos dados cúbicos		

Pon en común tus resultados con el resto de la clase. ¿Qué crees ahora que es más probable? Justifica tu respuesta.

3 De Mére estaba hecho un lío, por una parte, justificó que la probabilidad de obtener una tirada ganadora era la misma en ambos juegos:

$P(\text{Sale 6}) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(\text{Sale un 6 en 4 tiradas}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$P(\text{Sale doble 6}) = \frac{1}{36}$ $\qquad P(\text{Sale doble 6 en 24 tiradas}) = 24 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3}$

Por otra parte, había observado que perdía más a menudo con la segunda apuesta.

Para salir de su embrollo, De Mére acudió a Blaise Pascal y este a su vez escribió a su amigo Pierre de Fermat y en el transcurso de la correspondencia que mantuvieron, ambos desarrollaron la teoría de la probabilidad. Con esta teoría pudieron resolver el conflicto de De Mére calculando la probabilidad de cada juego y demostrando que no tenían la misma probabilidad.

¿Cuál es la probabilidad de cada juego? Justifica tu respuesta.

Juego justo. El origen de la probabilidad

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede iniciar la probabilidad condicionada y revisar conceptos como sucesos equiprobables y sucesos independientes. El uso de árboles puede facilitar la comprensión de dichos conceptos.
- El uso de la calculadora favorece que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

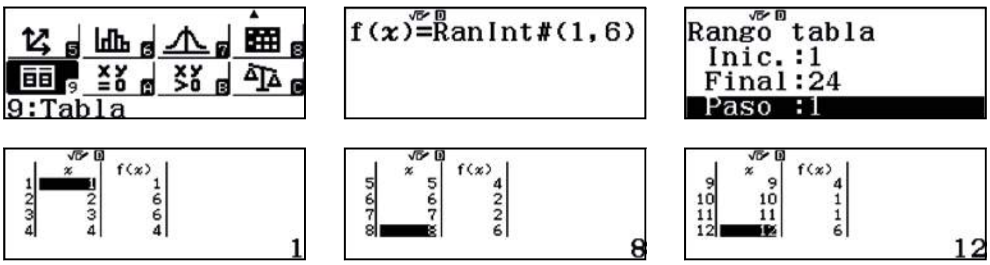
2

Respuesta abierta.

La simulación con la calculadora se puede hacer de varias maneras. En esta ocasión, se ha elegido el uso de las tablas.

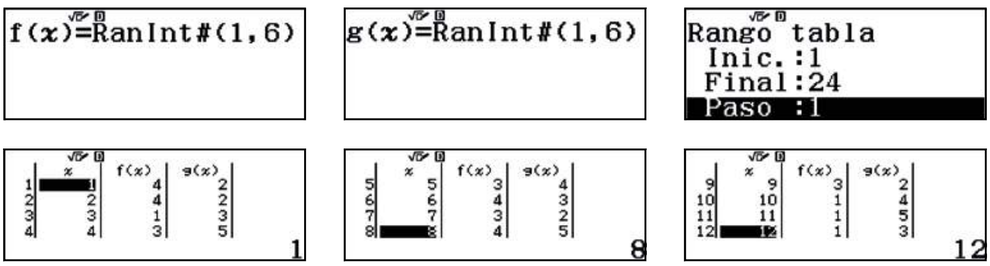
Lanzamiento de un dado cúbico:

MENU ▼ ▼ = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = = ▼ 2 4 = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



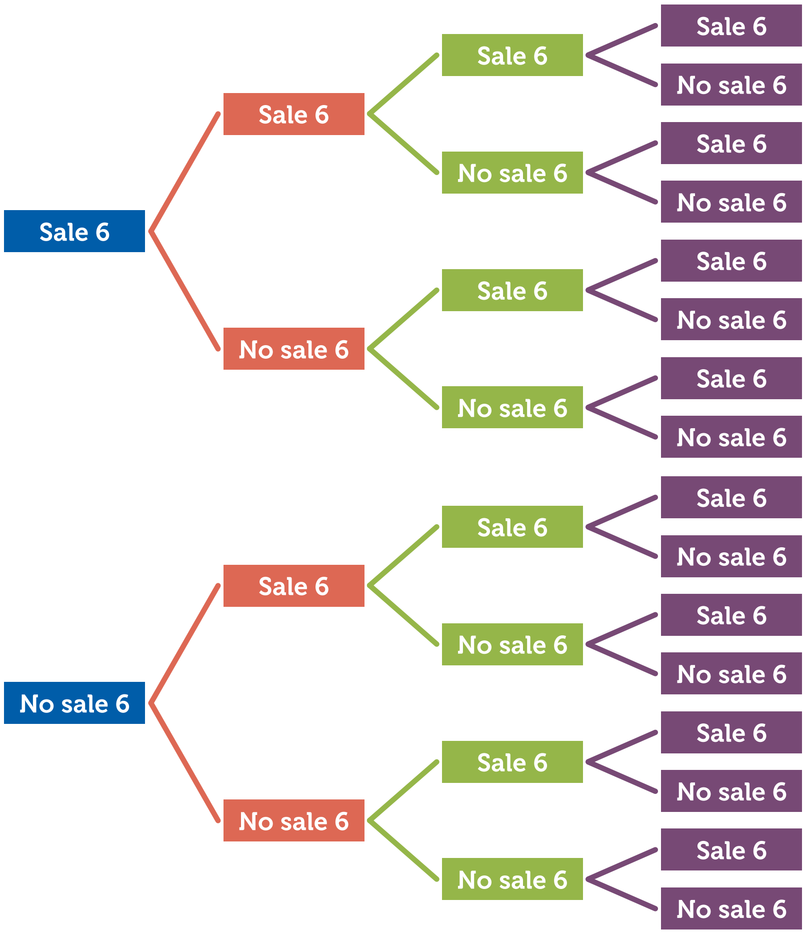
Lanzamiento de dos dados cúbicos:

MENU ▼ ▼ = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = ALPHA · 1 SHIFT) 6) = ▼ 2 4 = =
▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



3

Se puede calcular la probabilidad de ganar en el primer juego utilizando un diagrama de árbol:



En cada tirada se tiene:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{6}$$

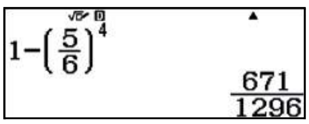
$$P(\textit{No sale 6}) = \frac{5}{6}$$

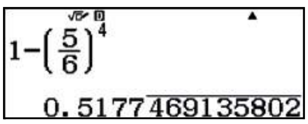
Lo más fácil es calcular la probabilidad de que no salga ningún 6 en cuatro tiradas:

$$P(\textit{No sale 6 en 4 tiradas}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un 6 en 4 tiradas}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$$





Razonando de la misma forma en el segundo juego, se obtiene en cada tirada:

$$P(\textit{Sale 6}) = \frac{1}{36}$$

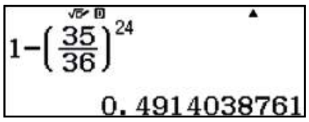
$$P(\textit{No sale doble 6}) = \frac{35}{36}$$

La probabilidad de que no salga ningún doble 6 en 24 tiradas:

$$P(\textit{No sale doble 6 en 24 tiradas}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Por tanto,

$$P(\textit{Sale al menos un doble 6 en 24 tiradas}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491$$



Aunque la diferencia de las probabilidades sea pequeña, es más probable que salga al menos un 6 en cuatro tiradas que un doble seis en 24. Ahora bien, para darse cuenta de la diferencia a través de la experimentación, se tienen que jugar muchas partidas y registrar los resultados. Por ello, no es descabellado pensar que De Mére era un gran jugador y, además, registraba los resultados de sus partidas.

Ampliación

Juego interrumpido.

Luisa y Antonio apuestan, respectivamente, a cara o cruz lanzando una moneda.

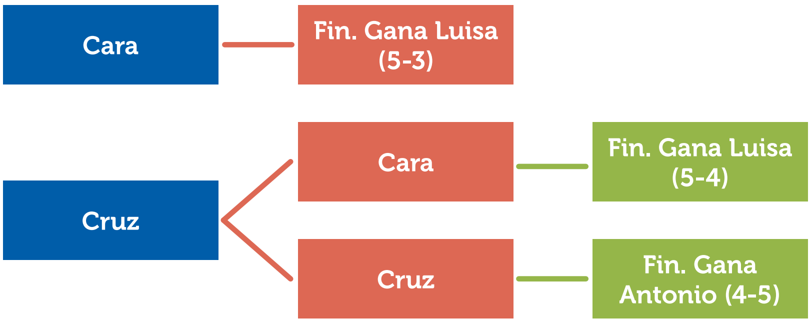
El primero que consigue cinco caras o cinco cruces gana la partida.

El juego se interrumpe cuando Luisa tiene 4 caras y Antonio 3 cruces.

Si cada uno ha apostado 5 €, ¿cómo deben repartir la cantidad apostada para que el juego sea justo?

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

En un diagrama de árbol se analizan las diferentes opciones de ganar si no se hubiera interrumpido el juego:



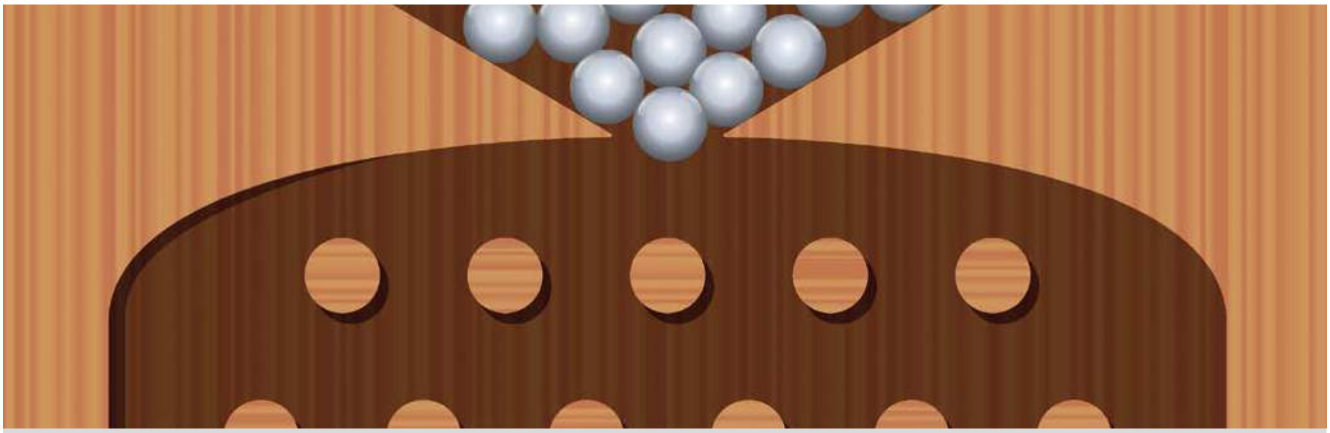
$$P(\textit{Gana Luisa}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(\textit{Gana Antonio}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

En consecuencia, Luisa ganaría 3 de cada 4 partidas y Antonio, 1 de cada 4. El reparto más justo es 3 a 1 a favor de Luisa.

Como la cantidad total apostada es de 10 euros, a Luisa le corresponden $\frac{3}{4}$ de 10 = 7,50 € y a Antonio $\frac{1}{4}$ de 10 = 2,50 €.

11 | Cálculo de probabilidades. Números combinatorios
La máquina de Galton o el Quincunx



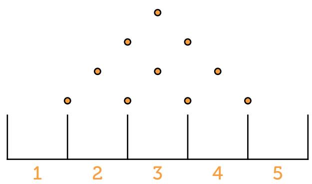
El aparato o màquina de Galton simula el siguiente experimento:

Soltamos por la máquina un gran número de bolas (cuanto mayor sea, más preciso es el experimento) de manera que cada una de ellas choca con un tope, se desplaza a izquierda o derecha de manera aleatoria, choca nuevamente y se desplaza de nuevo a izquierda o derecha. Así sucesivamente hasta que cae en un casillero situado al final del recorrido.

En cada choque, cada bola tiene la misma probabilidad de ir a izquierda o derecha.

1 Busca información sobre Galton y haz una pequeña reseña de su biografía y de su contribución a las matemáticas.

2 Si soltamos 2000 bolas en una máquina de Galton de 4 filas de topes, ¿cuántas bolas crees que se depositarán en cada casillero?



3 ¿Cuál es la probabilidad de que una bola se deposite en cada uno de los casilleros? Representa en un diagrama de barras las probabilidades que has obtenido.

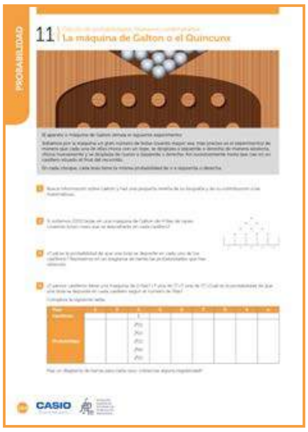
4 ¿Cuántos casilleros tiene una máquina de 2 filas? ¿Y una de 3? ¿Y una de 5? ¿Cuál es la probabilidad de que una bola se deposite en cada casillero según el número de filas?

Completa la siguiente tabla:

Filas	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Casilleros			5						
Probabilidad			$P(1)$ $P(2)$ $P(3)$ $P(4)$ $P(5)$						

Haz un diagrama de barras para cada caso, ¿observas alguna regularidad?

11 | Cálculo de probabilidades. Números combinatorios
La máquina de Galton o el Quincunx



MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP XII Iberia
Aplicación CASIO EDU+

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- Con esta actividad se analiza cómo se distribuyen teóricamente las bolas en una máquina de Galton. Con el proceso de resolución se pretende revisar o introducir diversos conceptos como sucesos equiprobables, sucesos independientes, probabilidad condicionada, números combinatorios y combinaciones.

- El uso de diagramas de árbol y del triángulo de Pascal facilita la comprensión de dichos conceptos. Por otra parte, el uso de la calculadora favorece que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

- En el ejemplo de solución, para compartir y combinar diferentes gráficos, se crea una clase en la aplicación CASIO EDU+ desde donde poder gestionar los gráficos obtenidos mediante el código *QR* de la calculadora.

  Antes de empezar a resolver esta actividad, es aconsejable crear la clase accediendo a:
  http://wes.casio.com/es-es/class

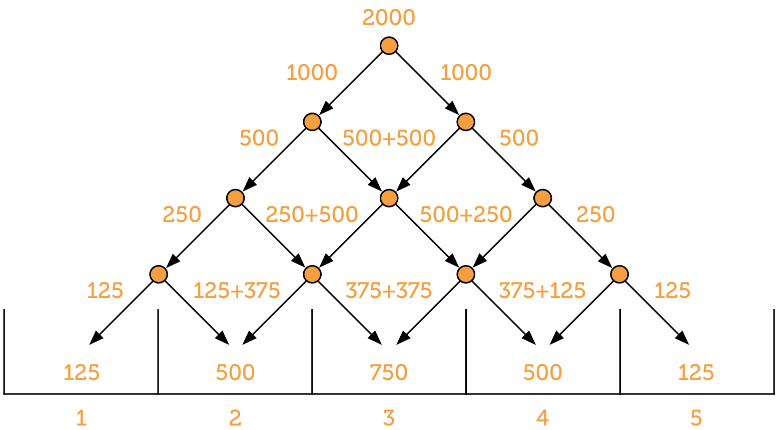
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Respuesta abierta.

2 **3**

Con el siguiente gráfico se calcula el número de bolas que se depositan en cada casillero y la probabilidad de que una bola se deposite en cada uno de ellos:



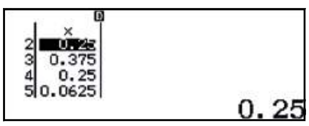
$\frac{125}{2000} = \frac{1}{16}$ $\quad \frac{500}{2000} = \frac{4}{16}$ $\quad \frac{750}{2000} = \frac{6}{16}$ $\quad \frac{500}{2000} = \frac{4}{16}$ $\quad \frac{125}{2000} = \frac{1}{16}$

$$p(1) = p(5) = \frac{1}{16}$$

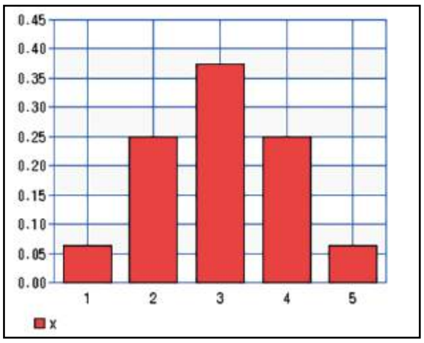
$$p(2) = p(4) = \frac{4}{16}$$

$$p(3) = \frac{6}{16}$$

Para representar el diagrama de barras se utiliza el menú *Estadística* y el código *QR*:



La máquina de Galton o el Quincunx

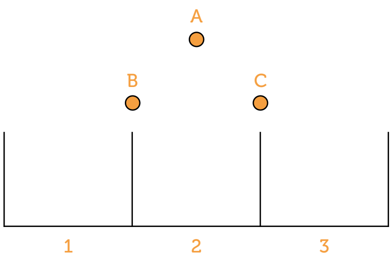


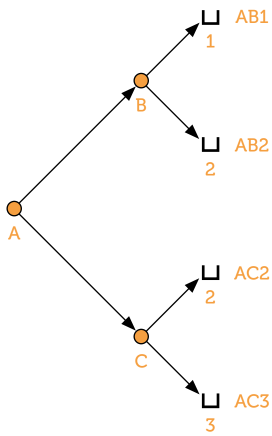
4

El número de casilleros según el número de filas y el cálculo de las diferentes probabilidades se recogen en la siguiente tabla:

Filas	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	***n***
Casilleros	3	4	5	6	7	8	9	10	$n+1$
Probabilidad	1/4 2/4 1/4	1/8 3/8 3/8 1/8	1/16 4/16 6/16 4/16 1/16	1/32 5/32 10/32 10/32 5/32 1/32	1/64 6/64 15/64 20/64 15/64 6/64 1/64	1/128 7/128 21/128 35/128 35/128 21/128 7/128 1/128	1/256 8/256 28/256 56/256 72/256 56/256 28/256 8/256 1/256	1/512 9/512 36/512 84/512 126/512 126/512 84/512 36/512 9/512 1/512	$P(i)=\binom{n}{i-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $1 \leq i \leq n+1$

Para calcular las probabilidades se pueden utilizar diagramas de árbol, por ejemplo:





$P(1)=\frac{1}{4}$

$P(2)=\frac{2}{4}$

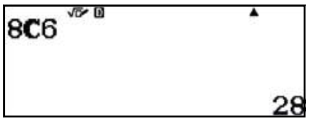
$P(3)=\frac{1}{4}$

La máquina de Galton o el Quincunx

Se agilizarán los cálculos con la calculadora, por ejemplo:

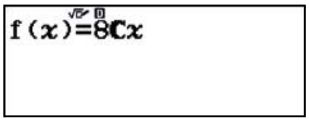
$$C_8^6 = \binom{8}{6}$$

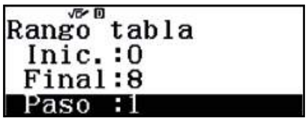
[8] [SHIFT] [÷] [6] [=]

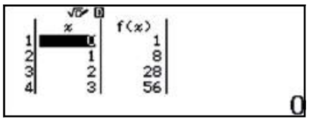


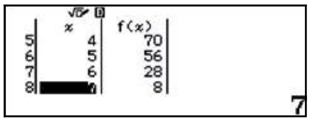
Para evitar la introducción de las combinaciones una a una se utiliza el menú *Tabla*:

[MENU] [9] [8] [SHIFT] [÷] [x] [=] [0] [=] [8] [=] [=]

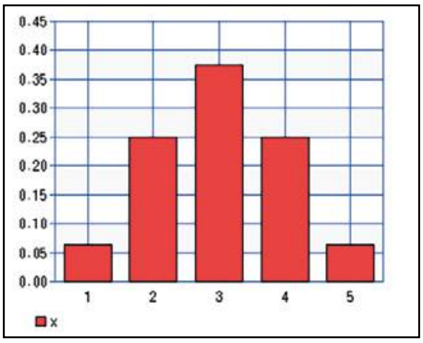


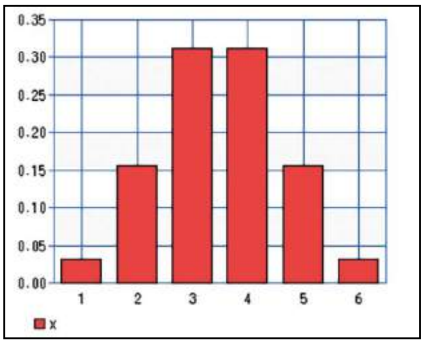


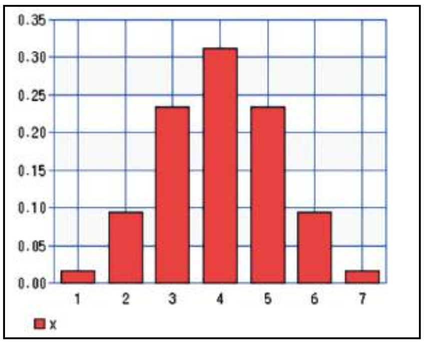




Para visualizar conjuntamente los diferentes diagramas se utiliza el menú *Estadística*, se genera el código *QR* y se comparte en la clase de la aplicación CASIO EDU+ creada con antelación. Los siguientes diagramas de barras corresponden a distribuciones de 5, 6 y 7 casilleros respectivamente:



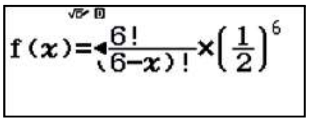


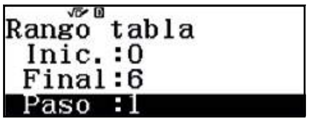


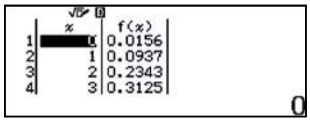
http://wes.casio.com/class/rQr6-4y8t-OzUO-VpR2

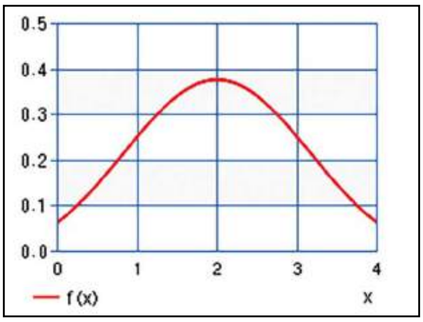
La comparación de los diagramas de barras permite introducir la distribución binomial.

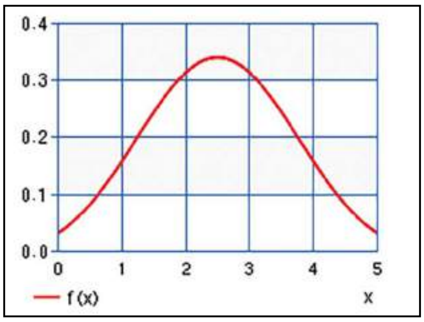
Se pueden comparar los resultados utilizando el menú *Tabla*:

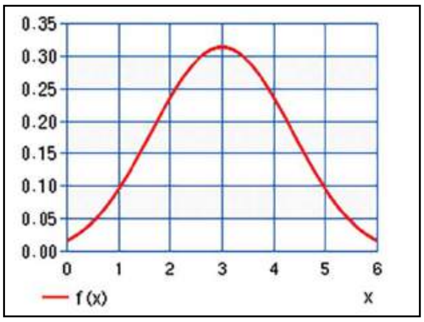












En las gráficas se observa que la distribución binomial es una aproximación a la distribución normal.

12 | Combinatoria
Selección de personal

Wihem Leibniz en su *Dissertartio de Arte Combinatoria* introdujo el término “combinatoria” (como lo conocemos ahora) y J. Bernouilli con su trabajo *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar) estableció las nociones básicas de probabilidad.

Con ambos trabajos se estableció la combinatoria como una rama de las matemáticas. Esta rama se encarga de contar sin enumerar directamente todos los casos. Para ello, es preciso conocer técnicas de ordenación, colocación, selección, etc., de objetos.

Las permutaciones, variaciones y combinaciones constituyen instrumentos eficaces de recuento.

Una empresa desea abrir una nueva sucursal. Necesita personas para ocupar algunos de los puestos de mayor responsabilidad. En el proceso de selección los candidatos tienen que resolver cuatro tareas entre quince propuestas diferentes.

1 ¿De cuántas formas un candidato puede elegir las cuatro tareas?

2 Si de las tareas hay tres de las que el candidato desconoce su resolución, ¿se reducen mucho las posibilidades de elección?

3 La empresa ha decidido que las personas más innovadoras en la resolución de las tareas ocuparán los 3 puestos de mayor responsabilidad (encargado, subencargado y supervisor).

¿De cuantas formas se pueden cubrir estos 3 puestos si hay 7 personas seleccionadas?

4 Si el puesto de encargado ya está asignado a uno de ellos, ¿de cuántas formas se pueden cubrir los otros dos puestos?

12 | Combinatoria
Selección de personal

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

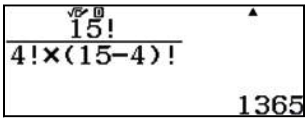
- Con esta actividad se pretende utilizar diferentes técnicas de recuento.
- Con las funciones nPr y nCr se pueden resolver combinaciones, variaciones o permutaciones sin repetición.

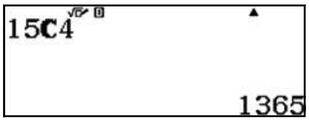
EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

Se eligen la tareas teniendo en cuenta que no influye el orden, $C_{15,4} = \binom{15}{4} = \frac{15!}{4!\,(15-4)!} = 1\,365$.

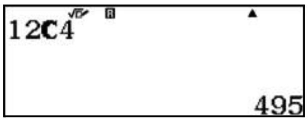
Se introducen los datos o se utiliza la función nCr:

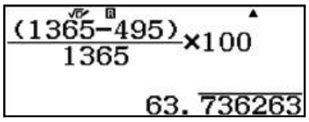




2

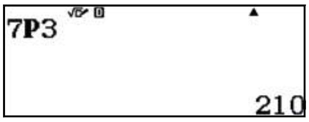
Hay $C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,(12-4)!} = 495$ formas de elegir las tareas. Por tanto, las posibilidades de elección se reducen casi al 64%:





3

Para cubrir los 3 puestos con 7 candidatos hay que tener en cuenta el orden, $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$:



Hay 210 formas de cubrir los 3 puestos de mayor responsabilidad.

4

Quedan 6 candidatos para cubrir los dos puestos restantes, $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$:

Los dos puestos restantes se pueden cubrir de 30 formas.

13 Regla de Laplace. Combinatoria

¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

Loterías y Apuestas del Estado

Son muchos los juegos de azar en los que se puede ganar un premio en metálico. Comprar un billete de lotería o tachar unos cuantos números en un boleto, son algunas de las opciones de participar en este tipo de juegos. La Sociedad Estatal de Loterías y Apuestas del Estado ofrece diferentes modalidades de juegos.

Se estudiarán los siguientes juegos de azar: La Primitiva, el Gordo de la Primitiva, la Lotería Nacional y la Quiniela de fútbol.

Se formarán grupos de dos o tres personas. Al final realizaremos una comparativa entre todos ellos.

1 ¿En qué consisten estos juegos? ¿Cuál es el precio de las apuestas?

2 ¿Cuál es la probabilidad de ganar el mayor premio en cada uno de estos juegos?

La actividad finalizará con una puesta en común con todos los grupos y posterior debate sobre las probabilidades que tienen los diferentes juegos de azar.

Juego	La Primitiva	El Gordo De la Primitiva	Lotería Nacional	La Quiniela
Probabilidad del mayor premio				
Precio de una apuesta				

13 Regla de Laplace. Combinatoria
¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350SP X II Iberia o superior

NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se pretende hacer un estudio de los diferentes juegos de azar que disponemos en nuestra sociedad y calcular su probabilidad. La actividad está planteada para que los alumnos realicen grupos de trabajo, cada uno dedicado al estudio completo de un juego de azar determinado. Aquí sólo se dan las orientaciones para la el cálculo de probabilidad del premio máximo. Sería muy interesante generar un debate sobre estos juegos de azar desde el punto de vista matemático y social.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1 **2**

La Primitiva

La categoría especial del juego consiste en acertar 6 números más el reintegro. Los 6 números se marcan en una matriz que contiene 49 números (del 1 al 49) y el reintegro, en una segunda matriz formada por 10 números (del 0 al 9). El precio de una apuesta es de 1 €.

Dado que el orden en el que aparecen los 6 números no importa, los casos posibles se calculan multiplicando las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6 por las 10 posibilidades de elegir el reintegro:

$$C_{49,6} \cdot C_{10,1} = \binom{49}{6} \cdot \binom{10}{1} = 139\ 838\ 160$$

```
49C6×10C1
                139838160
```

La probabilidad de ganar el premio máximo es:

$$P = \frac{1}{139\ 838\ 160} \approx 0{,}000\ 000\ 007$$

```
1÷Ans
           0.00000000715
```

El Gordo de la Primitiva

La primera categoría del juego consiste en acertar 5 números de 54 además de un número del 0 al 9, llamado número clave. El precio de una apuesta es de 1,50 €.

Los casos posibles son combinaciones de 54 números tomados de 5 en 5, ya que en este caso tampoco importa el orden. Para cada uno de estos casos se tienen 10 posibilidades, una por cada valor del número clave.

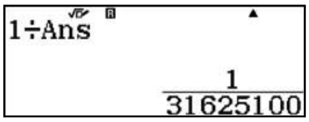
Por tanto, el número de combinaciones posibles es:

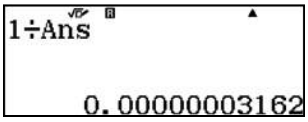
$$C_{54,5} \cdot C_{10,1} = \binom{54}{5} \cdot \binom{10}{1} = 31\ 625\ 100$$

```
54C5×10C1
                 31625100
```

La probabilidad del premio máximo es:

$$P = \frac{1}{31\,625\,100} \approx 0{,}000\,000\,032$$

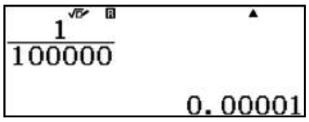




Lotería Nacional

Se juega comprando un décimo de Lotería Nacional. El premio de mayor cuantía consiste en acertar un número de cinco cifras que van de 00 000 a 99 999. Se realizan sorteos todos los jueves y sábados, el 22 de diciembre (Sorteo de Navidad) y el 5 de enero (Sorteo del Niño).

$$P = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$$



La Quiniela

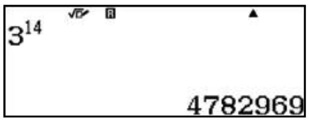
Una apuesta consiste en seleccionar el ganador de 14 partidos de la jornada de fútbol asociada, y el resultado exacto del partido 15: "Pleno al 15". En los primeros 14 partidos se marca el signo "1" si se pronostica que gana el equipo local, se marca con el signo "2" si se pronostica que gana el equipo visitante, y se marca el signo "X" si se pronostica un empate. En el "Pleno al 15" se marca para cada equipo el número de goles que se pronostica: "0" si el equipo no marca goles; "1" si el equipo marca 1 gol; "2" si marca 2 goles o "M" si se marca tres o más goles.

El precio, en 2019, de una apuesta es de 0,75 €; pero se debe hacer un mínimo de dos apuestas, 1,50 €.

Para calcular los casos posibles hay que considerar todas las formas de marcar los 14 partidos y el "Pleno al 15".

Para calcular todas las opciones de marcar los 14 partidos hay que tener en cuenta que son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$$

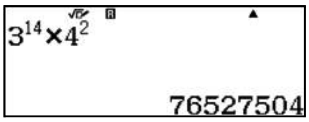


El "Pleno al 15" se puede rellenar de 16 formas diferentes:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

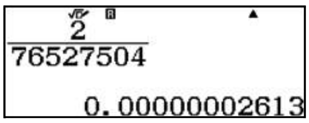
La cantidad de apuestas diferentes con las que se puede rellenar la quiniela se obtiene multiplicando los dos resultados anteriores:

$$VR_{3,14} \cdot VR_{4,2} = 3^{14} \cdot 4^2 = 76\,527\,504$$



Teniendo en cuenta que hay que hacer como mínimo 2 apuestas en la Quiniela, la probabilidad de obtener el premio de mayor cuantía es:

$$P = \frac{2}{76\,527\,504} \approx 0{,}000\,000\,026$$



¿Qué probabilidad tengo de que me toque la lotería?

En resumen,

Juego	La Primitiva	El Gordo De la Primitiva	Lotería Nacional	La Quiniela
Probabilidad del mayor premio	$P = \frac{1}{139\,838\,160}$ ≈ 0,000 000 007	$P = \frac{1}{31\,625\,100}$ ≈ 0,000 000 032	$P = \frac{1}{100\,000}$ ≈ 0,000 01	$P = \frac{2}{76\,527\,504}$ ≈ 0,000 000 026
Precio de una apuesta	1 €	1,50 €	Jueves: 3 € Sábado: 6, 12 o 15 € Navidad y Niño: 20 €	1,50 € (0,75 € x 2)

Ampliación

1 Tras la realización de esta actividad, ¿qué opinas sobre la lotería?

2 Si tuvieras que jugar, ¿qué lotería elegirías? ¿Por qué?

3 ¿Mejora mucho la probabilidad de obtener el premio mayor en El Gordo de la Primitiva si en lugar de realizar una apuesta se realizan dos? ¿Y en La Primitiva? ¿Y si se hacen 10 apuestas?

4 ¿Cuánto dinero hay que apostar en la quiniela para tener una probabilidad del 25% de conseguir el "Pleno al 15"?

14 | Estadística Unidimensional. Probabilidad
La caza de patos

En 1973 Maurice Glaymann y Tamas Varga publicaron *Les probabilités à l'ècole (Collection Formation des maîtres en mathematique, 9)*. En 1975 la editorial Teide publicó una traducción de Ricardo Pons de dicho libro: *Las probabilidades en la escuela*.

Uno de los ejemplos más conocido del libro sobre simulación con números aleatorios es:

La caza de patos

"Diez cazadores, todos ellos de élite, están dispuestos a cazar patos delante de unas rocas sobre las que se posan diez patos. Cada cazador sólo puede hacer un disparo y no puede saber a qué patos disparan los otros. Disparan todos al mismo tiempo, eligiendo cada uno a su víctima al azar. Si se repite a menudo esta experiencia, ¿cuántos patos sobrevivirán por término medio?"

1 Seis cazadores, que no fallan nunca, disparan sobre seis patos.

¿Cuántos patos se espera por término medio que sobrevivan a los disparos de los cazadores?

Haz una simulación para calcular el número de patos que sobrevivirán a los disparos de los cazadores.

2 Calcula, a partir de los datos de la simulación del **apartado 1**, la probabilidad de que:

a. No se salve ningún pato.

b. Se salve un pato.

c. Se salven dos, tres, cuatro o cinco patos.

14 | Estadística Unidimensional. Probabilidad
La caza de patos

MATERIALES
Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

NIVEL EDUCATIVO
4º de ESO

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS
- En esta actividad se simula con la calculadora un experimento aleatorio. Se realiza un recuento de los resultados obtenidos y con el menú *Estadística* se calculan las medidas de centralización de la simulación.
- En la ampliación de la actividad, se contrasta la probabilidad experimental con la teórica utilizando la regla de Laplace.

EJEMPLO DE SOLUCIÓN

1

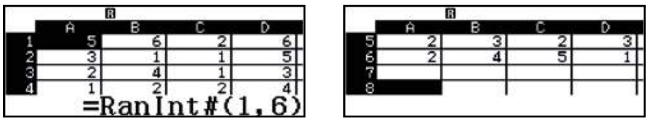
Se simula el experimento con la *Hoja de cálculo*. Cada fila representa a un cazador y cada columna cada vez que dispara. Por ejemplo, la celda 5B es el segundo disparo del quinto cazador. Se simularán 20 tandas de disparos y se hace el recuento del número de patos que sobreviven en cada tanda.

Se empieza completando 4 columnas (ya que son las que se pueden ver en pantalla) con seis números aleatorios entre 1 y 6, que representan los patos a los que se ha disparado. Después se hace el recuento de los patos que sobreviven y se repite 4 veces todo este proceso.

La celda A1 de la *Hoja de cálculo* se rellena con la fórmula *RanInt#*(1, 6), que genera un número aleatorio entre 1 y 6:

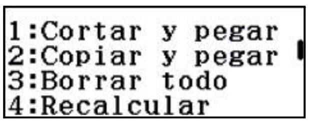
MENU 8 OPTN 1 ALPHA · 1 SHIFT) 6) = ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ DEL 6 =

Para completar las columnas B, C y D se repite la forma descrita anteriormente o se escribe en el rango "A1:D6":

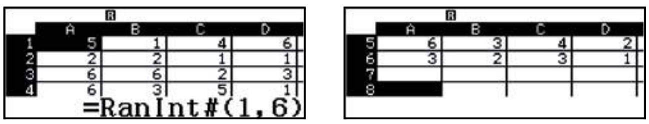


Se utiliza la opción *Recalcular* para repetir el proceso 4 veces y obtener las 16 simulaciones restantes de los tiros de cada cazador:

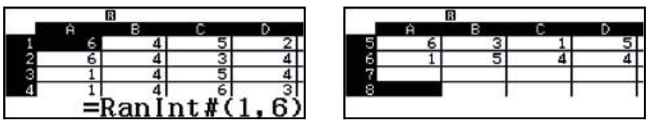
OPTN ▼ 4



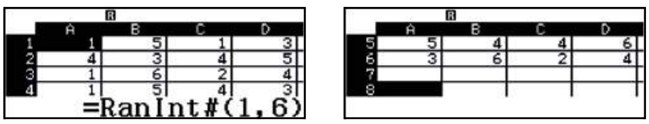
"Simulaciones de 5 a 8"



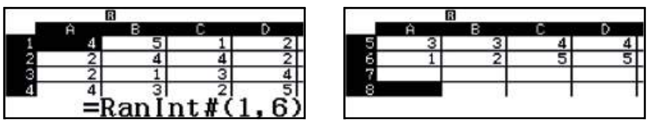
"Simulaciones de 9 a 12"



"Simulaciones de 13 a 16"



"Simulaciones de 17 a 20"

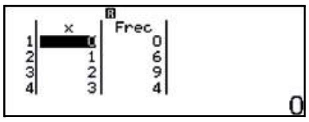


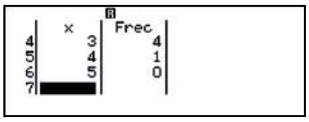
La caza de patos

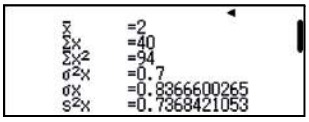
En la tabla se recoge el número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos:

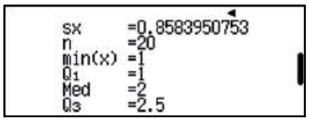
	Nº de pato disparado																			
nº tanda/ nº cazador	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	5	6	2	6	5	1	4	6	6	4	5	2	1	5	1	3	4	5	1	2
2	3	1	1	5	2	2	1	1	6	4	3	4	4	3	4	5	2	4	4	2
3	2	4	1	3	6	6	2	3	1	4	5	4	1	6	2	4	2	1	3	4
4	1	2	2	4	6	3	5	1	1	4	6	3	1	5	4	3	4	3	2	5
5	2	3	2	3	6	3	4	2	6	3	1	5	5	4	4	6	3	3	4	4
6	2	4	5	1	3	2	3	1	1	5	4	4	3	6	2	4	1	2	5	5
nº de patos vivos	2	1	3	1	2	2	1	2	4	3	1	2	2	2	3	2	2	1	1	3

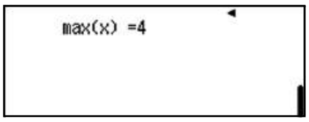
En el menú *Estadística* se introduce la frecuencia del número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos:





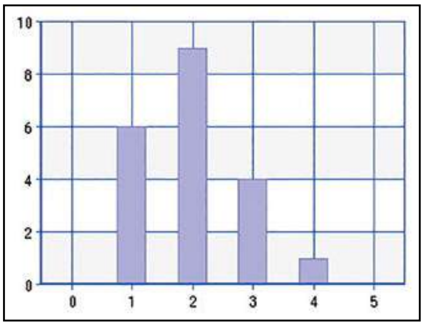






Se observa que la media, la mediana y la moda de patos que sobreviven es 2.

Con el código *QR* se representa el diagrama de barras de las frecuencias:



2

Se asignan probabilidades a partir de los datos obtenidos en la simulación, siendo x el número de patos vivos:

a) $P(\textit{no se salve ningún pato}) = P(x = 0) = 0$

b) $P(\textit{se salve un pato}) = P(x = 1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

c) $P(\textit{se salven dos patos}) = P(x = 2) = \frac{9}{20} = 0{,}45$

$P(\textit{se salven tres patos}) = P(x = 3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}20$

$P(\textit{se salven cuatro patos}) = P(x = 4) = \frac{1}{20} = 0{,}05$

$P(\textit{se salven cinco patos}) = P(x = 5) = 0$

Ampliación

1 Calcula, teóricamente, las probabilidades del **apartado 2**.

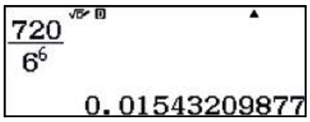
Los casos posibles del experimento son:

Los casos favorables al número de patos que sobreviven en cada tanda de disparos se recogen en la siguiente tabla, en la que cada letra representa un pato distinto:

x patos vivos	Tipo	Casos favorables
0	abcdef	$P_6 = 6!$
1	aabcde	$6 \cdot C_{5,4} \cdot P_6^2$
2	aaabcd	$6 \cdot C_{5,3} \cdot P_6^3$
	aabbcd	$C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot P_6^{2,2}$
3	aaaabc	$6 \cdot C_{5,2} \cdot P_6^4$
	aaabbc	$6 \cdot 5 \cdot C_{4,1} \cdot P_6^{3,2}$
	aabbcc	$C_{6,3} \cdot P_6^{2,2,2}$
4	aaaaab	$6 \cdot C_{5,1} \cdot P_6^5$
	aaaabb	$6 \cdot 5 \cdot P_6^{4,2}$
	aaabbb	$C_{6,2} \cdot P_6^{3,3}$
5	aaaaaa	6

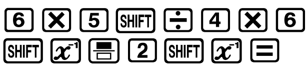
a) Los casos favorables para $x = 0$ son 720. La probabilidad de que *no se salve ningún pato* es:

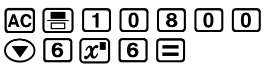
$$P(x = 0) = \frac{720}{6^6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}015$$

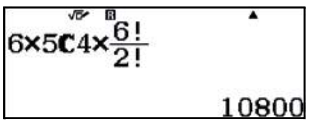


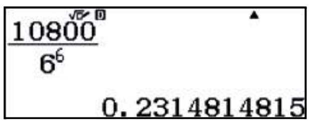
b) Los casos favorables para $x = 1$ son 10 800. La probabilidad de que *se salve un pato* es:

$$P(x = 1) = \frac{10\ 800}{6^6} = \frac{25}{108} \approx 0{,}231$$









La caza de patos

c) Los casos favorables para x = 2 son 23 400. La probabilidad de que *se salven dos patos* es:

$$P(x = 2) = \frac{23\,400}{6^6} = \frac{325}{648} \approx 0{,}502$$

$6\times5C3\times\frac{6!}{3!}$ → 7200

$6C2\times4C2\times\frac{6!}{2!\times2!}$ → 16200

$\frac{7200+16200}{6^6}$ → $\frac{325}{648}$

$\frac{7200+16200}{6^6}$ → 0.5015432099

d) Los casos favorables para x = 3 son 10 800. La probabilidad de que *se salven tres patos* es:

$$P(x = 3) = \frac{10\,800}{6^6} = \frac{25}{108} \approx 0{,}231$$

$6\times5C2\times\frac{6!}{4!}$ → 1800

$6\times5\times4C1\times\frac{6!}{3!\times2!}$ → 7200

$6C3\times\frac{6!}{2!\times2!\times2!}$ → 1800

$\frac{1800+7200+1800}{6^6}$ → $\frac{25}{108}$

$\frac{1800+7200+1800}{6^6}$ → 0.2314814815

e) Los casos favorables para x = 4 son 930. La probabilidad de que *se salven cuatro patos* es:

$$P(x = 4) = \frac{930}{6^6} = \frac{155}{7\,776} \approx 0{,}020$$

$6\times5C1\times\frac{6!}{5!}$ → 180

$6\times5\times\frac{6!}{4!\times2!}$ → 450

$6C2\times\frac{6!}{3!\times3!}$ → 300

$180+450+300$ → 930

$\frac{930}{6^6}$ → $\frac{155}{7776}$

$\frac{930}{6^6}$ → 0.01993312757

f) Los casos favorables para x = 5 son 6. La probabilidad de que *se salven cinco patos* es:

$$P(x = 5) = \frac{6}{6^6} = \frac{1}{7\,776} \approx 0{,}0001$$

$\frac{6}{6^6}$ → $\frac{1}{7776}$

$\frac{6}{6^6}$ → 0.00012860082

2 Calcula el número de patos que se espera que sobrevivan a los disparos de los cazadores en cada tanda.

La media se calcula en el menú *Estadística*:

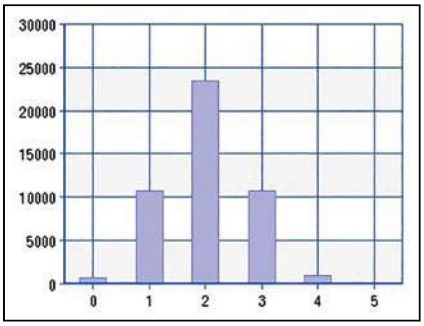
	x	Frec
1	0	720
2	1	10800
3	2	23400
4	3	10800
5	4	930
6	5	6
7		

$\bar{x}$ =2.00938786
Σx =93750
Σx^2 =216630
σ^2x =0.6054931438
σx =0.7781343996
s^2x =0.6055061219

Por tanto, la media es $\bar{x}$ = 2,00938786.

La caza de patos

Con el código *QR* se representa el diagrama de barras del experimento:

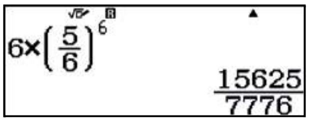


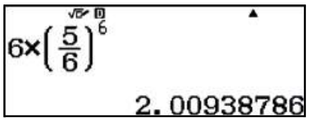
En general, se cumple que para n cazadores y p patos, la media de los patos que sobreviven es:

$$p \cdot \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

La media de patos que sobreviven para 6 cazadores y 6 patos es:

$$\overline{x} = 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6:$$





La media de patos que sobreviven para 10 cazadores y 10 patos es:

$$10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 3{,}487$$

Nota

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, factorial de un número.

$P_n = n!$, número de permutaciones.

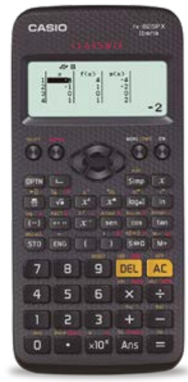
$P_n^{r,s,t} = \left(\frac{n!}{r! \cdot s! \cdot t!}\right)$, permutaciones con repetición de n elementos en los que tres elementos se repiten r, s, t, veces respectivamente.

$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(m-n)!}$, combinaciones de m elementos tomados de n en n.

$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \left(\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}\right)$, combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

Combinatoria y Probabilidad con la Calculadora ClassWiz

María José Fuente Somavilla
Profesora de Matemáticas del IES Augusto González de Linares, Peñacastillo-Santander, Cantabria



En este trabajo exponemos una serie de actividades acerca de combinatoria y probabilidad que hemos enmarcado dentro de cuarto curso de ESO, cuyo currículo recoge técnicas elementales de recuento y cálculo básico de probabilidades.

La Primitiva

Para la realización de los cálculos necesarios en la resolución de estas actividades hemos usado la calculadora ClassWiz. Todos los procesos se han realizado con la calculadora fx-82SP X, siendo válidos para los modelos fx-350SP X, fx-570SP X y fx-991SP X.

La combinatoria y la probabilidad son dos de los temas matemáticos que mejor se pueden contextualizar, pues son múltiples las situaciones próximas al estudiante que están relacionadas con los mismos. En este caso, hemos elegido el ámbito de La Lotería Primitiva para plantear una serie de actividades con los que tratar de captar la atención y el interés de los estudiantes por el estudio de los temas citados.

Para poder entender los enunciados propuestos, e interpretar las soluciones mostradas, vamos a indicar las características de ese juego de azar.

Digamos que La Primitiva es un juego que consiste en elegir seis números diferentes entre el 1 y el 49, con el objetivo de acertar la combinación ganadora en el sorteo correspondiente. En dicho sorteo se extraen los seis números que formarán la combinación ganadora y, adicionalmente, se extrae un séptimo número denominado "complementario". Existen varias categorías de premios dependiendo del número de aciertos. Algunas de estas categorías son las siguientes. 1ª categoría: acertar los seis números de la combinación ganadora. 2ª categoría: acertar cinco números de la combinación ganadora y el número complementario. 3ª categoría: acertar cinco números de la combinación ganadora. 4ª categoría: acertar cuatro números de la combinación ganadora. 5ª categoría: acertar tres números de la combinación ganadora.

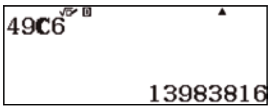
ACTIVIDADES

Curso: 4º de ESO.
Contenidos curriculares: Técnicas de recuento y cálculo de probabilidades.

1

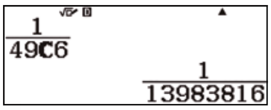
¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer en La Primitiva?
¿Cuál es la probabilidad de acertar los seis números de la combinación ganadora?

4 9 SHIFT ÷ 6 =

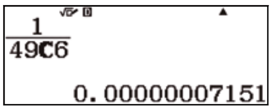


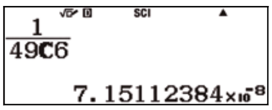
$C_{49,6} = 13\,983\,816$ apuestas

1 ▭ 4 9 SHIFT ÷ 6 =



S⇔D



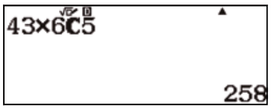


$$P = \frac{1}{C_{49,6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \cong 7{,}15112384 \cdot 10^{-8}$$

2

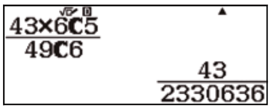
¿Cuántas apuestas distintas tienen cinco números de la combinación ganadora y el número complementario? ¿Cuál es la probabilidad de acertar cinco números más el complementario?

4 3 × 6 SHIFT ÷ 5 =

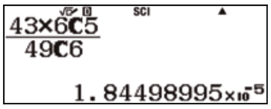


$43 \cdot C_{6,5} = 43 \cdot 6 = 258$ apuestas

$\frac{\square}{\square}$ 4 3 × 6 SHIFT ÷ 5 ▼
4 9 SHIFT ÷ 6 =



S⇔D

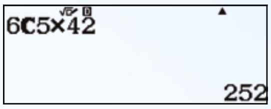


$$P = \frac{43 \cdot C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{258}{13\,983\,816} = \frac{43}{2\,330\,636} \cong 1{,}84498995 \cdot 10^{-5}$$

3

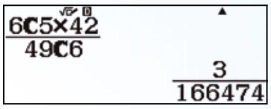
¿Cuántas apuestas distintas aciertan cinco números de la combinación ganadora y no aciertan el número complementario? ¿Cuál es la probabilidad de acertar cinco números y no acertar el complementario?

6 SHIFT ÷ 5 × 4 2 =

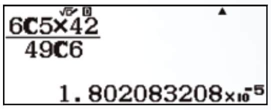


$C_{6,5} \cdot 42 = 252$ apuestas

$\frac{\square}{\square}$ 6 SHIFT ÷ 5 × 4 2 ▼
4 9 SHIFT ÷ 6 =



S⇔D

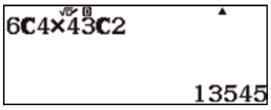


$$P = \frac{C_{6,5} \cdot 42}{C_{49,6}} = \frac{252}{13\,983\,816} = \frac{3}{166\,474} \cong 1{,}802083208 \cdot 10^{-5}$$

4

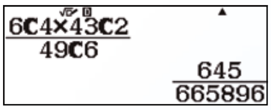
¿Cuántas apuestas distintas tienen cuatro números de la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de acertar cuatro números?

6 SHIFT ÷ 4 × 4 3 SHIFT ÷ 2 =

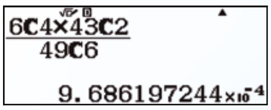


$C_{6,4} \cdot C_{43,2} = 13\,545$ apuestas

$\frac{\square}{\square}$ 6 SHIFT ÷ 4 × 4 3 SHIFT ÷ 2 ▼
4 9 SHIFT ÷ 6 =



S⇔D



$$P = \frac{C_{6,4} \cdot C_{43,2}}{C_{49,6}} = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = \frac{645}{665\,896} \cong 9{,}686197244 \cdot 10^{-4}$$

5

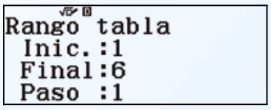
Ayúdate de la calculadora para conseguir una combinación de La Primitiva.

MENU 3

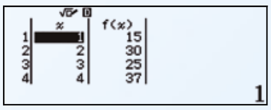
Nota: En los modelos fx-570SP X y fx-991SP X se debe escoger el modo tabla con MENU 9

ALPHA • 1 SHIFT) 4 9) = =

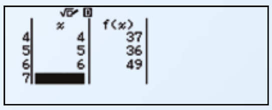
1 = 6 =



=



▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼



Si sale algún número repetido se debe proceder a la repetición de la tabla.