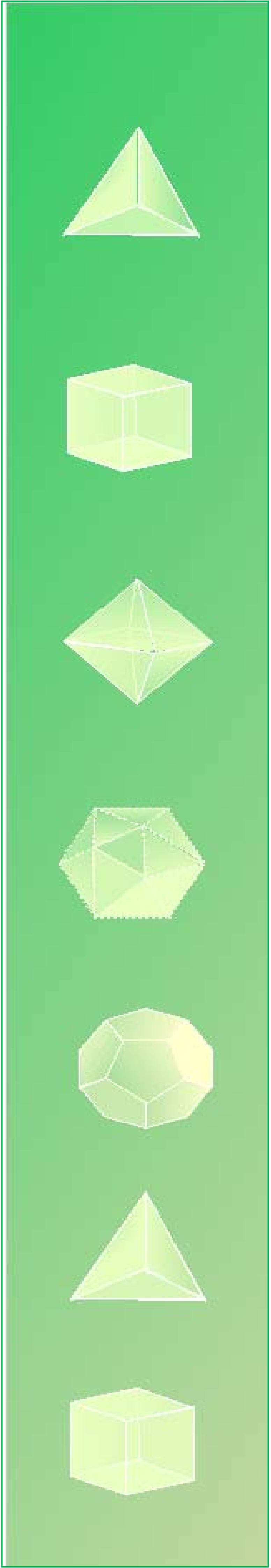


Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

4ºB de ESO

Capítulo 15: Combinatoria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero

Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Índice

Resumen

Saber contar es algo importante en Matemáticas. Ya Arquímedes en su libro "*Arenario*" se preguntaba cómo contar el número de granos de arena que había en la Tierra.

En este capítulo vamos a aprender técnicas que nos permitan contar. Vamos a aprender a reconocer las permutaciones, las variaciones y las combinaciones; y a utilizar los números combinatorios en distintas situaciones, como para desarrollar un binomio elevado a una potencia.

Estas técnicas de contar las utilizaremos en otras partes de las Matemáticas como en *Probabilidad* para contar el número de *casos posibles* o el número de *casos favorables*.

1. PERMUTACIONES

1.1. Diagramas en árbol

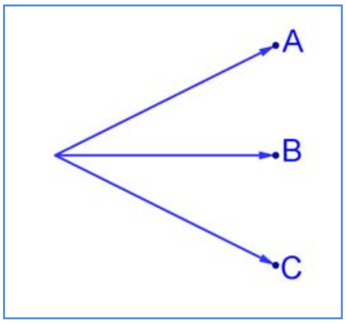
Actividades resueltas

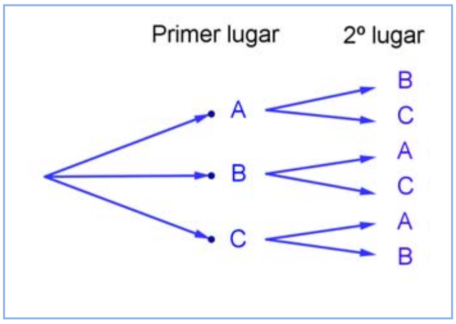
- *En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?*

Una técnica que puede ayudar mucho es confeccionar un **diagrama en árbol**. Consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.

Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

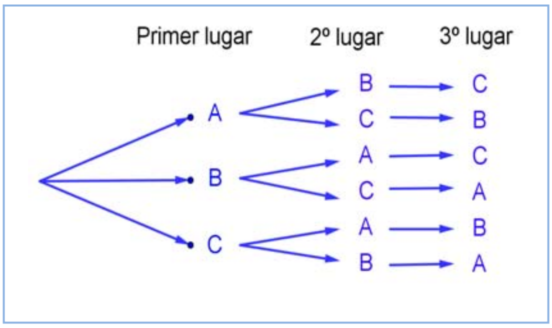
Primer nivel del árbol: En primer lugar, podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.





Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.

Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad



Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos.

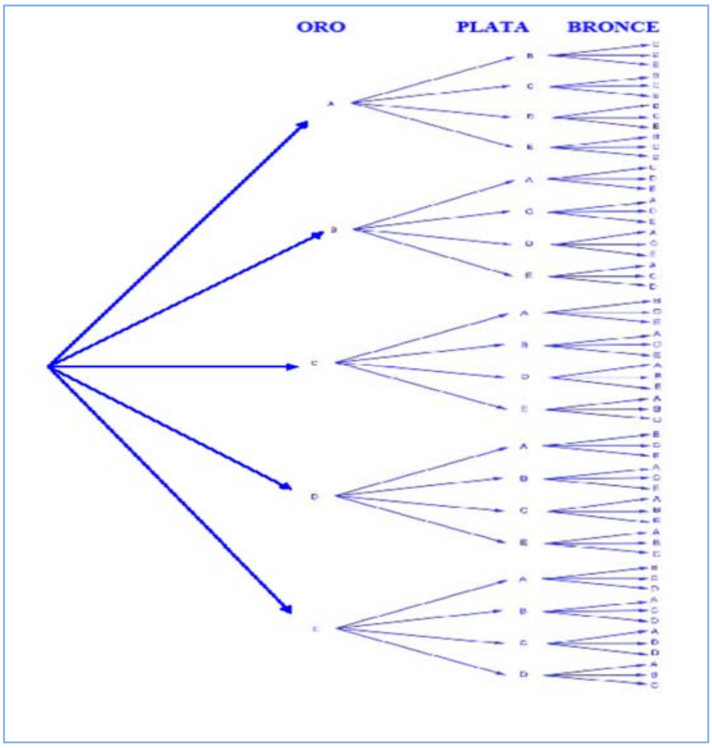
También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir al árbol: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *En una carrera compiten* 5 *corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce, ¿de cuántas formas distintas pueden repartirse?*

Hacemos el diagrama en árbol. El oro lo pueden ganar los cinco corredores que vamos a llamar A, B, C, D y E. Hacemos las cinco flechas del diagrama. Si el oro lo hubiese ganado el corredor A, la plata sólo la podría ganar alguno de los otros cuatro corredores: B, C, D o E. Si el oro lo hubiera ganado B también habría cuatro posibilidades para la medalla de plata: A, C, D y E. Y así con el resto.

Si suponemos que la medalla de oro la ha ganado A y la de plata B, entonces la medalla de bronce la pueden ganar C, D o E.

Por tanto, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas distintas de repartir las tres medallas entre los cinco jugadores.



Actividades propuestas

1. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C.

b) Cuántas palabras de tres letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar dos fichas idénticas, de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? *Sugerencia*: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si descartamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

1.2. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplos:

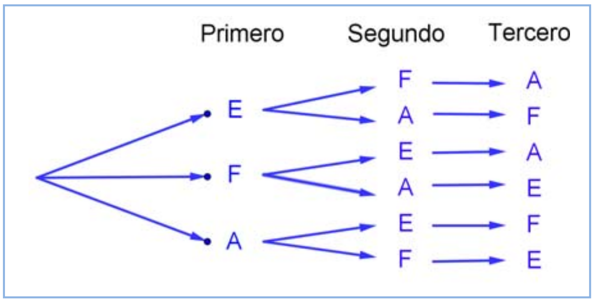
- *Son permutaciones:*
  - Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
  - Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.
  - Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

La actividad resuelta de los tres grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- *En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.*



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n - 1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a un árbol de n niveles con n, $n - 1$, $n - 2$, …, 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla $\boxed{!}$

Ejemplos:

- Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

- Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propuestas

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse cuatro personas, cuatro pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

5. En una carrera de caballos participan cinco caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

6. ¿De cuántas maneras puedes meter cuatro objetos distintos en cuatro cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo, por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

8. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

9. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Actividades resueltas

- *Cálculo de* $\dfrac{6!}{3!}$.

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

$$\text{Es } \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

- *Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{10!}{7!}$

b) $(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propuestas

10. Calcula: a) $\dfrac{6!}{4!}$; b) $\dfrac{7!}{3!}$; c) $\dfrac{8!}{5! \cdot 3!}$; d) $\dfrac{6!}{5!}$; e) $\dfrac{12!}{11!}$; f) $\dfrac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

13. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

15. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

2. VARIACIONES

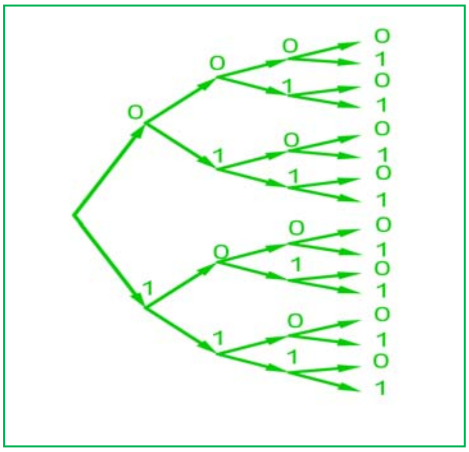
2.1. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen.

Actividades resueltas

- *Con dos símbolos,* 0 *y* 1*, ¿cuántas tiras de* 4 *símbolos se pueden escribir?*



Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol. Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto el número de tiras distintas que podemos formar es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Las diferentes secuencias de longitud *n* que se pueden formar con un conjunto de *m* elementos diferentes, se llaman **variaciones con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n*. El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $VR_{m,n}$. y se calcula con la fórmula:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

En la ***actividad resuelta*** anterior son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividad resuelta

- En el cálculo del *número de quinielas distintas,* los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto se trata de *variaciones con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969.$$

Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4 782 969 apuestas simples.

- *La probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es*, por tanto, $\frac{1}{4\,782\,969}$.

Actividades propuestas

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

17. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

18. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.

b) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.

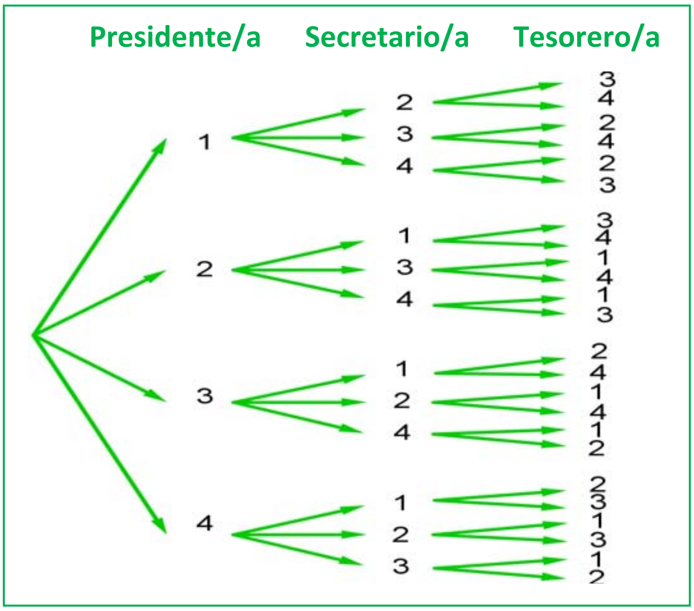
c) Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

21. ¿Cuántas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R?

2.2. Variaciones sin repetición

Actividades resueltas

- *Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos, presidencia, secretaría y tesorería. a) Si únicamente se presentan cuatro personas. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Si, antes de que empiece la votación, se presentan otros dos candidatos, ¿cuántas juntas diferentes podrán formarse ahora?*



a) Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos los candidatos del 1 al 4. A la presidencia pueden optar los 4 candidatos, pero si un determinado candidato ya ha sido elegido para la presidencia, no podrá optar a los otros dos cargos, por lo que desde cada una de las primeras cuatro ramas, sólo saldrán tres ramas. Una vez elegida una persona para la presidencia y la secretaría, para optar a la tesorería habrá únicamente dos opciones, por lo cual de cada una de las ramas del segundo nivel, salen dos ramas para el tercer nivel.

De este modo, multiplicando el número de ramificaciones en cada nivel, tenemos que la junta puede estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras.

b) Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

Estas agrupaciones de elementos, en que un elemento puede aparecer en cada grupo como máximo una vez, sin repetirse, y cada grupo se diferencia de los demás por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen se denominan *variaciones sin repetición*.

En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, se tienen en cuenta el **orden** y los **elementos** que forman el grupo. La diferencia es que en las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos y en las variaciones ordinarias no. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $V_{m,n}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots} \text{ (} n \text{ factores)}$$

Observaciones

1) m debe ser siempre mayor o igual que n.
2) Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- *Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor que se multiplica en el cálculo de las variaciones:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a $4 - 3 + 1$.

En b) $4 = 6 - 3 + 1$.

En c) $5 = 10 - 6 + 1$.

En d) $6 = 9 - 4 + 1$.

En general el último elemento es $(m - n + 1)$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}$$

Escribe la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales se debe dividir por $(m - n)!$.

$$\mathbf{V}_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para realizar esta operación con la *calculadora* se utiliza la tecla etiquetada ***nPr***

Actividades propuestas

22. Tres personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cuatro pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

23. Con los 10 dígitos se desean escribir números de cuatro cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

24. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

25. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

26. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$. Para que tenga sentido se asigna a 0! el valor de 1.

$$\mathbf{0! = 1.}$$

3. COMBINACIONES

3.1. Combinaciones

Actividades resueltas

- *En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?*

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (**elementos**) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación.

Se llama **combinaciones** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de *m* elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A	Paquetes sin A pero con B	Paquetes sin A ni B pero con C	
ABC	BCD	CDE	
ABD ACD	BCE BDE	CDF CEF	DEF
ABE ACE ADE	BCF BDF BEF		
ABF ACF ADF AEF			

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE,
BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE,
CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE,
DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE,
EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD,
FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

Y, en general, de acuerdo con el mismo razonamiento se calculan las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividiendo las variaciones entre las permutaciones, con la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla etiquetada ***nCr***

video

Toda la combinatoria en 9 minutos. Resumen de combinatoria, fórmulas y ejemplos de aplicación de cada caso. Variaciones con y sin repetición, permutaciones, con y sin repetición y combinaciones.

https://www.youtube.com/watch?v=g843LMUY5H0

Actividades resueltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas y para aprobar hay que responder* 6 *correctamente. ¿De cuántas formas se pueden elegir esas* 6 *preguntas?*

No importa en qué orden se elijan las preguntas, sino cuáles son las preguntas elegidas. No pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta). Únicamente influyen las preguntas (los elementos). Se trata de un problema de combinaciones, en que tenemos que formar grupos de 6, de un conjunto formado por 10 preguntas diferentes, luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- *Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevarnos tres para leerlos en vacaciones, ¿de cuántas maneras distintas podemos elegirlos?*

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tienes* 7 *monedas de euro que colocas en fila. Si* 3 *muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?*

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propuestas

29. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

30. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

31. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

3.2. Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** *m* sobre *n* se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Números combinatorios. En este vídeo explicamos cómo se calcula un número combinatorio.
https://www.youtube.com/watch?v=jD2h-3nkGEA

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{0}$, $\binom{4}{0}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{0}$ = 1, $\binom{5}{0}$ = 1, $\binom{9}{0}$ = 1 y $\binom{4}{0}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1$. Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{7}$ = 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 y $\binom{4}{4}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1$. Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{1}$ = 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 y $\binom{4}{1}$ = 4. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1}$ = *m*? En efecto: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m$.

- *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *e indica cuáles son iguales.*

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Habrás comprobado que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$. Pero antes lo comprobaremos con un problema.

- *Luis y Miriam se han casado y les han regalado seis objetos de adorno. Quieren poner tres en una estantería, pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. Sin embargo, a Luis no le gusta ese objeto, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. Uno de los dos se saldrá con la suya. Calcula cuantas son las posibilidades de cada uno.*

A Luis y Miriam les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Sin embargo a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprueba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *y que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general, $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

¿Te atreves a demostrarlo?

Para demostrarlo recurrimos a la definición y realizamos operaciones:

$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$ reducimos a común denominador

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$ Recuerda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Ponemos el denominador común y sumamos los numeradores

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ De nuevo usamos que $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}$.

Triángulo de Pascal o Triángulo de Tartaglia

A un matemático italiano del siglo XVI, llamado Tartaglia pues era tartamudo, se le ocurrió disponer a los números combinatorios así:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

....

O bien calculando sus valores correspondientes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

...

Los secretos del TRIÁNGULO DE PASCAL. El triángulo de Pascal contiene sorprendentes propiedades y curiosidades para disfrutar de las matemáticas, y en Derivando te vamos a contar algunas de ellas. Eduardo Sáenz de Cabezón

video

https://www.youtube.com/watch?v=DPxIbJ-Rbf4

A ambos triángulos se les llama **Triángulo de *Pascal*** o **Triángulo de *Tartaglia***.

Los valores que hay que poner en cada fila del triángulo se calculan, sin tener que usar la fórmula de los números combinatorios, de una forma más fácil basada en las propiedades de los números combinatorios que acabamos de probar:

Por la propiedad $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empieza y termina con 1.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que el *Triángulo de Tartaglia* es simétrico o sea que el primer elemento de cada fila coincide con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obtener las siguientes filas sumando términos de la anterior, ya que cada posición en una fila es la suma de las dos que tiene justo encima de la fila anterior.

De este modo el triángulo se construye secuencialmente, añadiendo filas por abajo hasta llegar a la que nos interesa. Si sólo necesitamos conocer un número combinatorio aislado, tal vez no valga la pena desarrollar todo el triángulo, pero en muchas ocasiones necesitamos conocer los valores de toda una fila del triángulo (por ejemplo cuando desarrollamos un binomio de Newton, o cuando resolvemos problemas de probabilidad).

Actividades propuestas

32. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

33. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila *m* es siempre igual a 2^m.

34. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

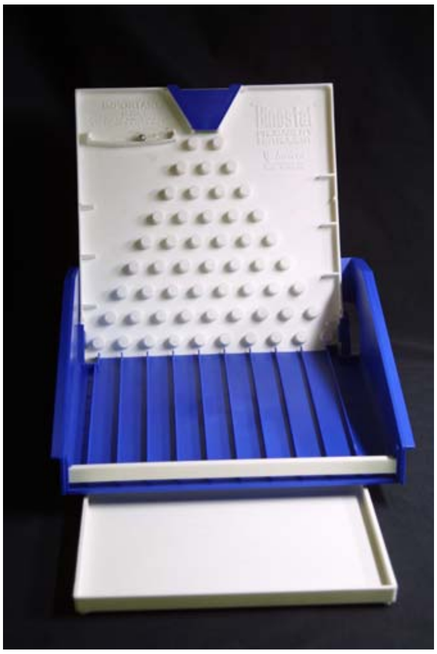
3.3. Distribución binomial

Recorridos aleatorios o caminatas al azar

Los números combinatorios sirven como modelo para resolver situaciones muy diversas.

Actividades resueltas

El dispositivo que aparece a la derecha se denomina *aparato de Galton*. Su funcionamiento es el siguiente: cuando se introduce una bola por el embudo superior, va cayendo por los huecos que existen en cada fila. En cada paso puede caer por el hueco que tiene a su derecha o por el que tiene a su izquierda con igual probabilidad, de forma que es imposible, cuando ponemos una bola en el embudo predecir en cuál de los carriles inferiores acabará cayendo.



- *Si introducimos muchas bolas por el agujero superior, por ejemplo* 1024, *¿crees que al llegar abajo se distribuirán uniformemente entre todos los carriles o habrá lugares a los que lleguen más bolas?*

Observa que, para llegar a la primera fila, sólo hay un camino posible, que es el que va siempre hacia la izquierda, y para llegar a la última, el único camino posible es el que va siempre a la derecha.

Mientras que para llegar a los huecos centrales de cada fila el número de caminos posibles es mayor. Por ejemplo, para llegar al segundo hueco de la segunda fila, hay dos caminos. En general, al primer hueco de cada fila sólo llega un camino, igual que al último y a cada uno de los otros huecos llegan tantos caminos como la suma de los caminos que llegan a los dos huecos que tiene justo encima. Comprueba que para llegar al hueco n de la fila m hay $\binom{m}{n}$ caminos.

En resumen, el número de caminos aleatorios que llegan a cada hueco se calcula igual que los números en el triángulo de *Tartaglia*. Si nuestro *aparato de Galton* tiene 9 filas, el número de caminos que llegan a cada uno de los compartimentos de salida es el que se obtiene con la novena fila del Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, de un total de 2^9 = 512 caminos diferentes que puede realizar la bola. Así que cuando echamos en el aparato 1024 bolas, habrá aproximadamente 2 bolas que hagan cada uno de los 512 recorridos posibles, ya que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por tanto, el número de bolas que podemos esperar que caigan en cada compartimento es el siguiente:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bolas	$\frac{1\,024}{512} = 2$	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2= 72	9·2 = 18	2

Vemos que no se deposita el mismo número de bolas en todos los compartimentos. Mientras que en los extremos habrá aproximadamente 2 bolas, en los centrales habrá unas 252.

De acuerdo con ley de los grandes números, los resultados experimentales serán más parecidos a los teóricos cuanto mayor sea el número de veces que se realiza el experimento (es decir, cuanto mayor sea el número de bolas). En *Youtube* buscando la expresión "*máquina de Galton*" puedes ver muchos vídeos en que se realiza el experimento y se verifica este hecho.

Número de éxitos

Actividades resueltas

- *En una sesión de tiro al plato se realizan sucesivamente 10 disparos. ¿Cuántas posibilidades habrá de acertar en el blanco exactamente tres veces (tener tres éxitos)?*

Son las $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumen

$\binom{m}{n}$ = Número de combinaciones de m elementos tomados de n en n

= Número de caminos posibles para llegar al hueco n de la fila m del aparato de *Galton*

= Número de subconjuntos de n elementos tomados en un conjunto de m elementos

= Número de sucesos en los que obtenemos n éxitos en m pruebas

= Números de muestras sin ordenar de tamaño n en una población de tamaño m.

3.4. Binomio de Newton

Vamos a calcular las sucesivas potencias de un binomio. Ya sabes que:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3\cdot(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 +$

$+ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$= \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observa que para hallar cada uno de los coeficientes de $(a + b)^4$, excepto el primero y el último que valen 1, se suman los coeficientes igual que en el triángulo de Tartaglia. Se obtiene cada elemento sumando los dos que tiene encima.

Actividades resueltas

- *¿Serías capaz de calcular $(a + b)^5$ sólo observando?*

Fíjate que siempre aparecen todos los posibles términos del grado que estamos calculando, por lo que para calcular la quinta potencia tendremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Los exponentes están ordenados de manera que los de a van descendiendo desde 5 hasta 0, y los de b van aumentando desde 0 hasta 5 (recuerda $a^0=1$).

El coeficiente del primer y último término es 1.

Los coeficientes se obtienen sumando los de los términos de la fila anterior, como en el Triángulo de *Tartaglia*. Son la quinta fila del Triángulo de *Tartaglia*.

Luego $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribirlo también utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Actividades propuestas

35. Desarrolla $(a + b)^6$

En general:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdad se denomina ***Binomio de Newton***.

Actividades resueltas

- *¿Cómo calcularías $(a - b)^n$?*

Basta aplica la fórmula del Binomio de Newton a $(a +(- b))^n$.

Recuerda $(-b)$ elevado a un exponente par tiene signo positivo y elevado a un exponente impar lo tiene negativo. Por tanto $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Los signos son alternativamente positivos y negativos.

Actividades propuestas

36. Desarrolla

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. Resolución de problemas

FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Recuerda: para resolver un problema es conveniente tener en cuenta las siguientes fases:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Léelo hasta asegurarte de haber comprendido el enunciado, ¿qué datos te dan?, ¿qué te piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Si el problema es de *Combinatoria* una posible buena estrategia puede ser analizar si es un problema de permutaciones, de variaciones o de combinaciones y, en ese caso, aplicar la fórmula que ya conoces. Esta estrategia podríamos llamarla:

Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Pero otra posible buena estrategia, que no excluye la anterior, es comenzar a hacer un diagrama en árbol. A esta estrategia podemos llamarla:

Experimenta, juega con el problema

O bien:

Haz un diagrama, un esquema, una tabla...

La fase siguiente a seguir es:

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Seguro que utilizando estas estrategias, resuelves el problema. Por último, cuando ya lo hayas resuelto:

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

4.2. Permutaciones circulares

Vamos a utilizar estas técnicas, u otras distintas, para resolver un problema:

Actividades resueltas

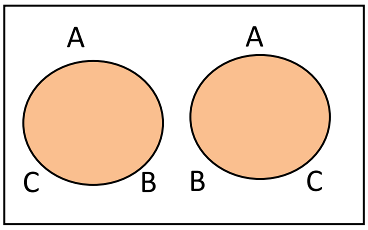
- *Diez amigos y amigas van a comer y en el restaurante les sientan en una mesa redonda. ¿De cuántas formas pueden sentarse?*

Si en lugar de una mesa fuera un banco, ya sabemos resolver el problema, es un problema de *Permutaciones*. La solución sería 10! formas distintas. Pero es una mesa redonda, no tiene un primer asiento ni un último asiento. Tampoco es sencillo, por el mismo motivo, diseñar el diagrama en árbol. ¿Qué hacemos? Piensa. Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia quizás sea:

Hazlo más fácil para empezar

Diez son muchos. Piensa en tres: A, B y C. Si fuera un banco, las posibilidades serían 3! = 6. Siéntalos ahora en una mesa redonda. La posibilidad ABC, es ahora la misma que BCA y que CAB. Nos quedan sólo dos formas distintas de sentarlos.



Llamamos PC a esa permutación circular.

Tenemos pues que $P_2 = 2! = 2$ y $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ y $PC_3 = 2$. ¿Cómo podemos sentar a 4 personas en una mesa circular? La permutación ABCD ahora es la misma que BCDA, y que CDAB y que DABC, luego si $P_4 = 4! = 24$, entonces $PC_4 = P_4/4 = 6$.

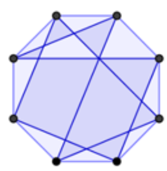
¿Sabemos ya resolver nuestro problema inicial?

Es $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Razona esta respuesta.

Actividades propuestas

39. Tres amigos “A”, “B” y “C” están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. “A” le pasa una carta al italiano. “B” se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? *Ayuda*: Haz un diagrama circular como el anterior.

40. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?



41. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

4.3. Permutaciones con repetición

Actividades resueltas

- *¿Cuántas palabras 8 letras, con sentido o sin él, se pueden formar on las letras de la palabra RASTREAR?*

Observamos que la letra "R" se repite tres veces y la letra "A", dos veces. Si las 8 letras fueran distintas el número de palabras que se podrían formar sería 8!, pero entre estas 40 320 palabras observamos que todas aquellas en las que están permutadas las dos letras "A" son iguales, por lo tanto tenemos la mitad de las palabras 20 160. Además al considerar las tres letras "R" que hemos considerado distintas y que son iguales tenemos que por cada palabra diferente hay 6, es decir 3!, que son iguales, por lo tanto el número de palabras diferentes es 3 360.

Por tanto, las permutaciones de 8 elementos de los que uno se repite 3 veces y otro 2 será:

$$PR_{8,3,2} = \frac{8!}{2!\ 3!} = 3\ 360.$$

Observa que el número de las permutaciones de dos elementos de los que uno se repite *k* veces y el otro *n* – *k* veces coincide con el número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Actividades propuestas

42. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

43. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

44. Tenemos dos fichas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos apilarlas? ¿En cuántas no quedan las dos fichas blancas juntas?

45. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que se puede poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner? ¿Cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? *Ayuda:* Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

4.4. Combinaciones con repetición

Actividades resueltas

- *Un grupo de 10 amigos se van de excursión y uno de ellos se encarga de comprar una bebida para cada uno, pudiendo elegir entre agua, batido o refresco. ¿De cuantas maneras diferentes puede realizarse el encargo?*

Para resolver este problema tenemos que formar una secuencia de 10 elementos, de un conjunto formado por los tres elementos A, B, R. Está claro que no importa el orden en que se compren las bebidas, por lo que se trata de combinaciones. Pero cada elemento puede aparecer en la combinación más de una vez. Por ejemplo una solución formada por dos de agua, tres de batido y cinco de refresco, se representaría AABBBRRRRR. Cualquier otra combinación tendrá que diferenciarse de ella por al menos un elemento de su composición. Así que viendo que cada secuencia empieza con una repetición del elemento A, sigue con otra del elemento B y termina con repeticiones del elemento R, siendo en total 10 los elementos que se toman, podemos representarlas por una serie de 10 huecos con dos guiones de separación entre ellos.

A A – B B B – R R R R R (Combinación que representa dos de agua, tres de batido y cinco de refresco)

– – R R R R R R R R R R (Combinación que representa sólo diez de refresco)

– B B B B – R R R R R R (Combinación que representa cuatro de batido y seis de refresco)

Así que cada una de las combinaciones se corresponde con **una forma de elegir dónde colocar los guiones**, es decir de 12 posibles posiciones elegir dos. Como no importa en qué orden se coloquen los guiones y no pueden estar los dos en la misma posición, ese número será igual a las combinaciones de 12 elementos tomados de 2 en 2, por lo tanto será:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

En general,

Se llama **combinaciones con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designan $CR_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de *m* elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman y con la posibilidad de que cada elemento aparezca más de una vez.

Coinciden con el número de secuencias que se pueden formar de *n* huecos y *m* – *1* guiones, por tanto:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$$

Observa que por propiedades de los números combinatorios se puede escribir la segunda expresión.

Actividades propuestas

46. En una caja hay bolas rojas, negras y azules. Si metemos la mano en la caja y sacamos 8 bolas, ¿de cuántas formas posibles puede realizarse la extracción?

47. ¿De cuántas maneras posibles se pueden comer cuatro amigos 10 caramelos iguales?

Problemas de ampliación

Actividad resuelta

- *Si n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos que son todos distintos, se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones? ¿Cuántos segmentos hay? ¿Cuántos puntos aparecen?*

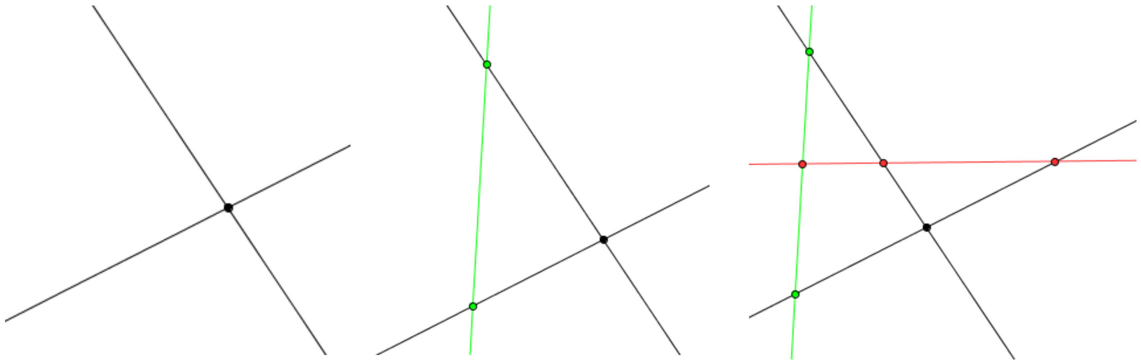
FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Para entender bien el problema dibuja rectas en el plano para ir contando puntos, regiones y segmentos

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia consiste en experimentar con casos particulares:



Se observa que:

Con 2 rectas hay 4 regiones, 1 punto y 4 segmentos infinitos (semirrectas).

Con 3 rectas: Al añadir la tercera recta

- Tres de las regiones se han dividido en dos: 4 + 3 = 7 regiones.
- Se añaden los 2 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 1 + 2 = 3.
- Se tienen 5 segmentos más: 3 finitos +2 semirrectas: 4 + 5 = 9.
    - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 4 + 2 = 6

Con 4 rectas: Al añadir la cuarta recta:

- Cuatro de las regiones se han dividido en dos: 7 + 4 = 11 regiones
- Se añaden los 3 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 3 + 3 = 6.
- Se tienen 7 segmentos más: 5 finitos + 2 semirrectas: 9 + 7 = 16.
    - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 6 + 2 = 8

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Otra buena estrategia es elaborar una tabla con los resultados obtenidos:

Rectas	Puntos	Regiones	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

En esta fase buscamos expresiones en función del número de rectas, *n*, para poder calcular el número de puntos, segmentos y regiones según los valores de *n*.

La fórmula para las **semirrectas** parece la más fácil de obtener porque aparentemente es el doble que el número de rectas y además cada vez que añadimos una recta tenemos 2 semirrectas más. Si llamamos SS_n al número de semirrectas que aparecen con *n* rectas tenemos que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Para calcular el número de **segmentos** (incluidas las semirrectas) que se obtienen con *n* rectas, a partir de los datos de la tabla, parece plausible sugerir que es el cuadrado del número de rectas, es decir, si S_n designa al el número de segmentos (los finitos y las semirrectas) entonces: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Para determinar el número de **puntos**, en la tabla se observa una ley de recurrencia, el número de puntos, para cualquier número de rectas, es igual al número de puntos anterior más el número de rectas también de la fila anterior. Si denominamos P_n al número de puntos que se tienen al cortarse *n* rectas entonces: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

Por otra parte observamos que si numeramos las rectas con 1, 2, 3, …, *n* y nombrando los puntos por el par de rectas que determina cada uno tenemos que son: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, *n*), (2, 3), (2, 4), … (2, *n*), (3, 4) …

El número de estos pares de elementos coincide con las combinaciones de *n* elementos tomados de 2 en 2, es decir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

La ley de recurrencia que nos sugiere la tabla para obtener el número de **regiones** que se obtienen cuando se cortan *n* rectas, es que el número de regiones de cualquier fila de la tabla es igual al número regiones de la fila anterior más el número de rectas de su fila, por tanto si R_n el número de regiones que se obtienen al cortarse *n* rectas entonces: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Para obtener una fórmula observamos que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumando $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, obtenemos que:

$$R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$$

y por lo tanto

Autores: Álvaro Garmendia y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

$$R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$

o bien

$$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

y por consiguiente

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

En esta fase se trata de justificar o demostrar que todas las conjeturas que hemos realizado son ciertas:

Con respecto al número de **semirrectas** es sencillo comprobar que es el doble del número de rectas ya que por cada recta tenemos dos semirrectas, es decir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

El número de **segmentos** es el cuadrado del número de rectas ya que como en cada una de las rectas hay $n - 1$ puntos tenemos n segmentos (finitos y semirrectas) y como hay n rectas se tiene que $\mathbf{S_n = n^2}$

Como cada **punto** es la intersección de dos rectas se tiene que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$, esta fórmula cumple la ley de recurrencia $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicando las propiedades de los números combinatorios:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecto a las **regiones** veamos que la hipótesis $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$, cumple la ley de recurrencia:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}.$$

Si $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, entonces $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$, y por las propiedades de los números combinatorios:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

En esta fase también se puede generalizar el problema: ¿Qué ocurriría si p de las n rectas fueran paralelas? ¿Y si q rectas de las n rectas convergen en un mismo punto?

Actividades propuestas

48. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? *Ayuda:* Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

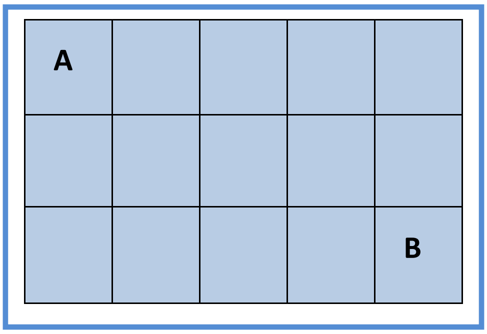
49. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? *Ayuda:* Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

50. ¿Cuántas formas hay de colocar el rey blanco y el rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente. ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

CURIOSIDADES. REVISTA

En el año 1494 aparece la primera obra impresa que tiene cuestiones sobre Combinatoria. Es “*Summa*” escrita por Luca Pacioli. (¿Te acuerdas del Número de Oro?). Uno de los problemas que plantea es el de calcular el número de formas distintas en que n personas pueden sentarse en una mesa redonda. Problema que ya hemos resuelto en el apartado 4.2.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro “*Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*”, uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?



Un gato se encuentra en A y un ratón en B. El gato avanza de centro de casilla en centro de casilla moviéndose hacia la derecha o hacia abajo, nunca retrocede. ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer el gato para cazar al ratón?

“Por esta razón de independencia, el amor al estudio es, de todas las pasiones, la que más contribuye a nuestra felicidad”.

Mme. de Châtelet

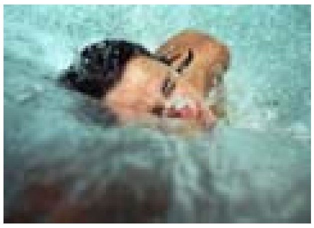
RESUMEN

NOCIÓN	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1; \binom{5}{2}=\binom{5}{3}=10;$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Los PowerPoint siguientes son un buen resumen: Variaciones y permutaciones; Combinaciones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Permutaciones



1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Variaciones

7. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? *Recuerda*: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

9. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. *Sugerencia*: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

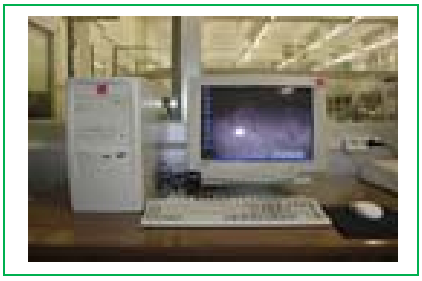
10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

11. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (*Observa:* Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

12. Con las letras de la palabra "ARQUETIPO" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.

13. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 o 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyó por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?



Combinaciones

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

23. Calcula:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

24. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sin calcular cada uno de los números combinatorios?

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

26. Una asignatura se compone de 20 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas. ¿Cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $(\frac{x}{2}-\sqrt{2x})^3$.

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

30. Escribe el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

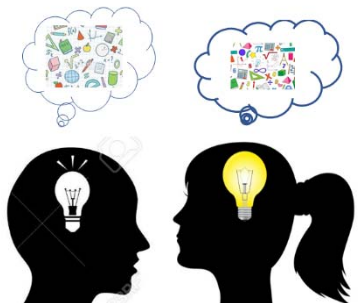
32. Halla el sexto término en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1 - 5x)^9$.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

35. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Problemas



36. En "*Curiosidades y Revista*" tienes el problema de *Buteo*. Con 7 discos y 6 letras en cada disco, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? *Ayuda:* En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formarse?

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

42. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes *n* rectas?

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

b) $VR_{2,4} = 2^4$ c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$

c) $C_{6,3} = 20$

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? *Ayuda*: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la *Relación de Euler*: C + V = A + 2

49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar?

51. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

52. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

53. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\dfrac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \dfrac{7}{3}$

54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

57. En un festival de cortometrajes con 15 participantes, se reparten 3 000 euros en premios. Indica el número de formas diferentes de realizar el reparto, según cada una de las tres modalidades propuestas.

a. *Modalidad A:* Se reparten tres premios de 1 000 euros a tres cortometrajes elegidos por un jurado.
b. Modalidad B: Se realiza una votación y se entregan 1 500 euros al más votado, 1 000 al segundo y 500 al tercero.
c. *Modalidad C*: Se entregan tres premios de 1 000 euros cada uno en tres categorías: mejor guion, mejor realización y mejor interpretación. Nota: Podría ocurrir que un cortometraje fuera el mejor en varias categorías.

58. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

59. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

60. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

61. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

62. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?
b) ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2?
c) Calcula la suma de todos estos últimos números.

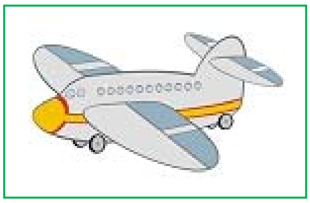
63. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "puerta" que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

65. Con las letras de la palabra "ARGUMENTO" ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.

66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?



68. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de *Luca Pacioli*, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

69. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

70. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

71. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

72. Con las letras de la palabra "SABER", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "CORTE", "PUERTA" y "ALBERTO".

73. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

74. Un joven tiene en su armario 10 camisetas, 5 pantalones y tres pares de zapatillas. Sabiendo que tiene que hacer el equipaje para un campamento y solo puede meter en la mochila cuatro camisetas, tres pantalones y dos pares de zapatillas, ¿de cuántas maneras diferentes podrá llenar la mochila?

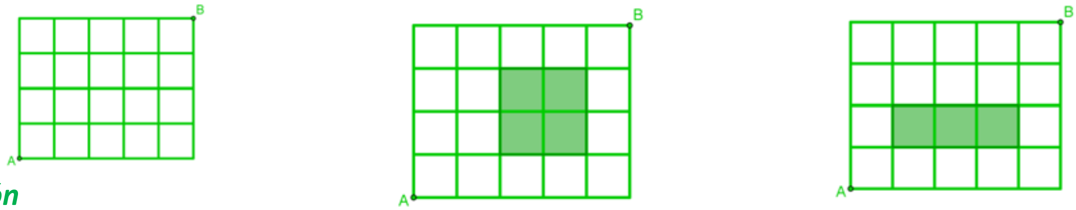
75. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

76. Caminos en una cuadrícula:

a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba?

b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?



Generalización

d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con *n* cuadrados en cada lado?

e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con *m* cuadrados verticales y *n* horizontales?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tienes nueve monedas iguales que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una compañía aérea hay diez auxiliares de vuelo, y un avión necesita llevar cuatro en su tripulación, ¿de cuántas formas se pueden elegir?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenemos cinco objetos distintos y queremos guardarlos en cinco cajas diferentes, poniendo un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutaciones de n+4 elementos dividido entre permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

6. Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

7. Indica qué afirmación es falsa

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}, \binom{9}{9}, \binom{4}{1}$ es:

a) 0, 1, y 1 b) 0, 9 y 4 c) 1, 1 y 4 d) 5, 9 y 4

9. El valor de x, distinto de 4, en la igualdad $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ es:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$