Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 9: Geometría

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. Su nombre significa "*medida de la Tierra*". Medir es calcular longitudes, áreas y volúmenes. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

Nos movemos en el espacio de dimensión tres, caminamos sobre una esfera (que por ser grande, consideramos plana), las casas son casi siempre ortoedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

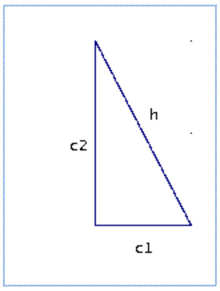
Muchas plantas distribuyen sus hojas buscando el máximo de iluminación y sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras en el plano

Ya sabes que:

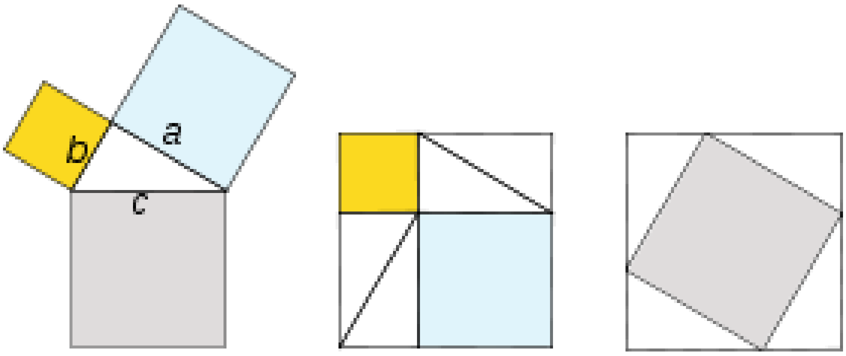


En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostración:



Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 *cm* y 8 *cm*, su hipotenusa vale 10 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \ cm.$$

Actividades resueltas

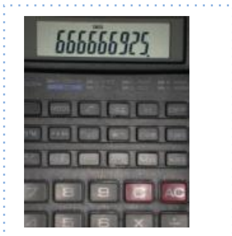
- *Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:*

  Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.



2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m*

c) 2 *dm* y 5 dm d) 23.5 *km* y 47.2 *km*.

Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m*

c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21.2 *km* y 11.9 *km*

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.

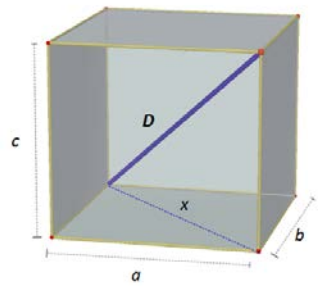
Teorema de Pitágoras en el espacio

Ya sabes que:

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.

Demostración:

Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a, b*.



Si *x* es la diagonal de este rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triángulo de lados *D, x, a* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$

Y teniendo en cuenta la relación que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resueltas

- *Calcula la longitud de la diagonal de un ortoedro de aristas 7, 9 y 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16.55$ cm.

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 7 cm y 9 cm y su altura 12 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 11 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11.4\text{cm}$

Luego la barra más corta cabe apoyada en la base.

La diagonal del ortoedro vimos en la actividad anterior que mide 16.55, luego la segunda barra si cabe, inclinada, pero la tercera, no.

Actividades propuestas

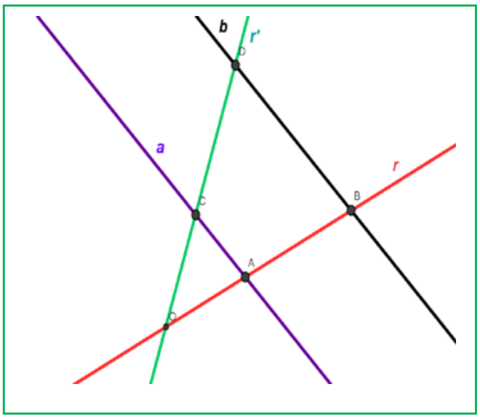
6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Teorema de Tales

Ya sabes que:



Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en posición *Tales*. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 20 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 5 cm y OC mide 3 cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos:

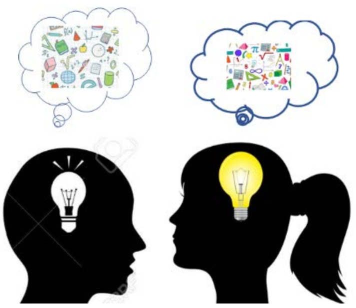
$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide 1 m, si la sombra de un árbol mide 12 m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide 0.8 m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0.8}{1} = \frac{12}{x}$. Por tanto *x* = 12/0.8 = 15 metros.

Actividades propuestas



8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1.5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0.2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?

9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

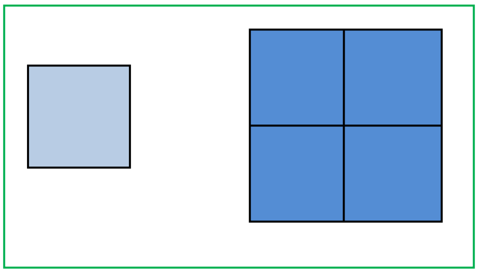
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se la llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

Ejemplo:

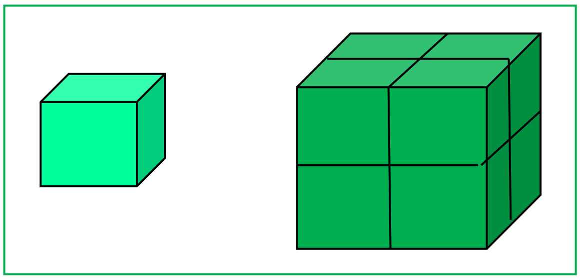


Observa la figura del margen. Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



Observa la figura del margen. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto, $k^3 = 8\,000\,000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1.5$ *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

12. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

13. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

14. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

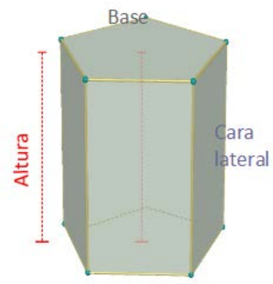
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2.1. Longitudes, áreas y volúmenes en prismas y cilindros

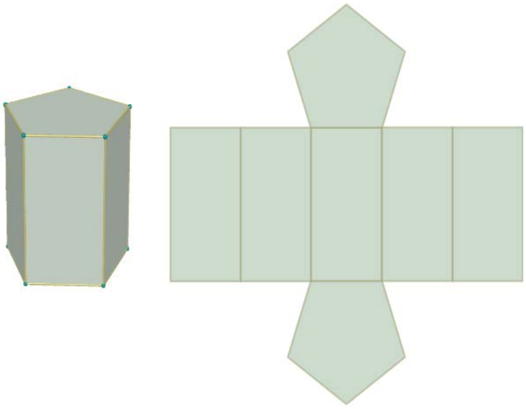
Recuerda que:

Prismas



Un ***prisma*** es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

Áreas lateral y total de un prisma



El **área lateral** de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.

Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =

= Perímetro de la base · altura del prisma.

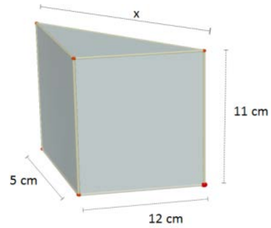
Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

El **área total** de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resueltas



- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*

  Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

  $$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

  $$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

  $$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Volumen de un cuerpo geométrico. Principio de *Cavalieri*

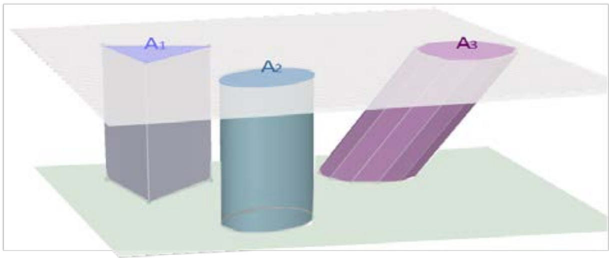
Recuerda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

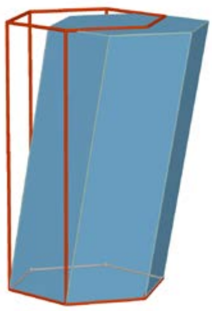
"Si dos cuerpos tiene la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.



Volumen de un prisma y de un cilindro



El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por *V* este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

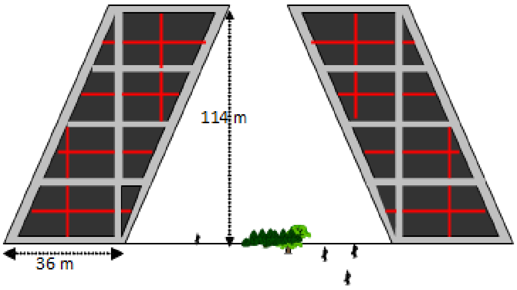
Volumen prisma = $V = A_B \cdot h$

También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

Volumen cilindro = $V = A_B \cdot h \quad = \quad \pi R^2 \cdot h$

Actividades resueltas

- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.*
  Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$$

Actividades propuestas

15. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.

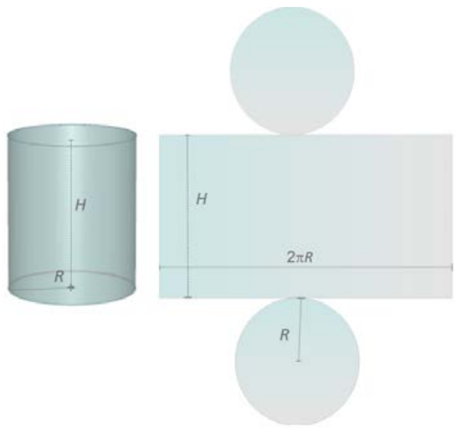
16. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Áreas lateral y total de un cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H\ = 2\pi RH$$

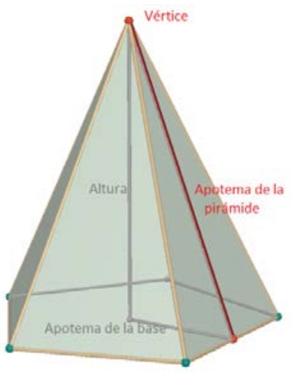
Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longitudes, áreas y volúmenes en pirámides y conos

Recuerda que:

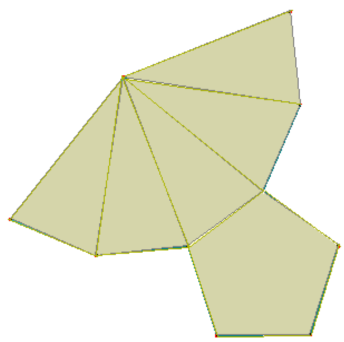
Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares



Una **pirámide** es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide b, la apotema de la pirámide es Ap y la base tiene n lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n\cdot\frac{b\cdot Ap}{2} = \frac{n\cdot b\cdot Ap}{2}$$

y como $n \cdot b$ = Perímetro de la base

$$A_L = \frac{\text{Perímetro de la base}\ .\ \text{Apotema de la pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base}}{2}\cdot \text{Apotema}$$

El área lateral de una pirámide es igual al semi-perímetro por la apotema.

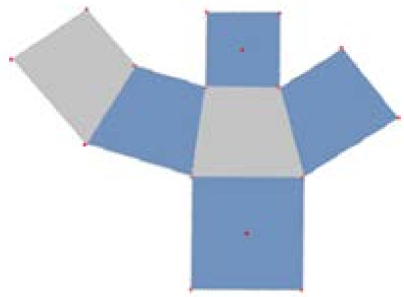
El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Área total = $A_T = A_L + A_B$

Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Si B es el lado del polígono de la base mayor, b el lado de la base menor, n el número de lados de las bases y Ap es la altura de una cara lateral o apotema

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{\text{Suma de perímetro de las bases} \cdot \text{Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

Área total = $A_T = A_L + A_B + A_b$

Actividades resueltas

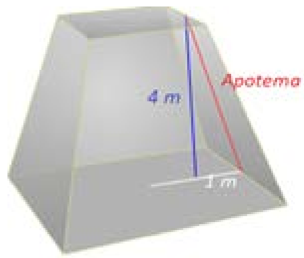
- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*

En primer lugar, calculamos el valor de la apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4.12}{2} = 49.44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 + 16 + 4 = 69.44\ m^2$$



Actividades propuestas

17. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.

18. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

19. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

20. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.

21. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2 y la arista de la base mide 4 cm, calcula la apotema de la pirámide y su altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Áreas lateral y total de un cono

Recuerda que:

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora *R* al radio de la base y *G* a la generatriz. El área lateral del cono es el área de sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A\ Lateral\ del\ cono}{Longitud\ de\ arco\ correspondiente\ al\ sector} = \frac{A\ total\ del\ círculo\ de\ radio\ G}{Longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi R G$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

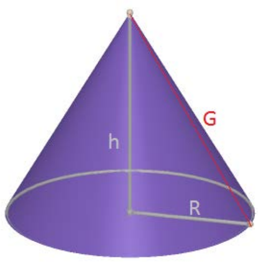
$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18.84 dm.* (*Toma 3.14 como valor de* π)

Calculamos en primer lugar el radio *R* de la base:

$$2\pi R = 18.84 \Rightarrow \quad R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3\ dm.$$



Calculamos ahora la generatriz *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37 dm.$$

Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx 144.79\ dm^2$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

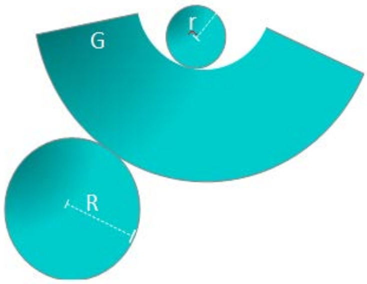
Áreas lateral y total de un tronco de cono

Recuerda que:

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando *R* y *r* a los radios de las bases y *G* a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

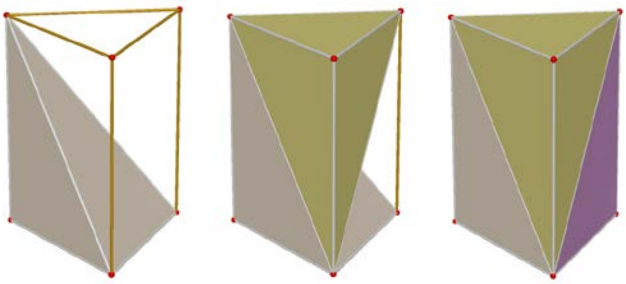
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volumen de una pirámide y de un cono

Recuerda que:

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.



$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

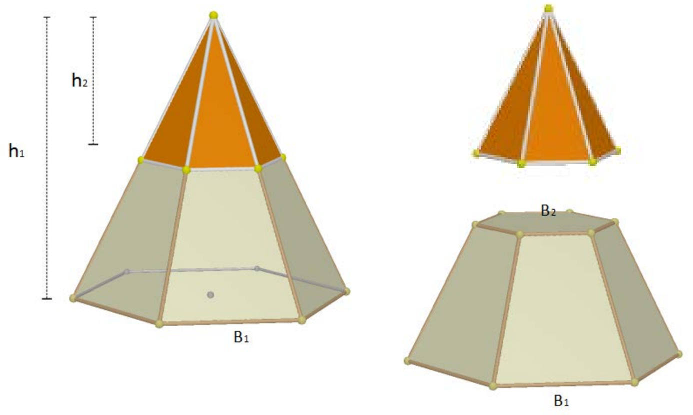
Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:

Volumen tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.*

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

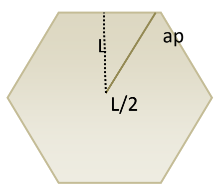


Figura 1

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $\boldsymbol{ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6\ cm;\ ap_2 = \frac{8\sqrt{3}}{2} \approx 6.1\ cm}$

Como segundo paso, calculamos la apotema del tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112.25} \approx 10.6\ cm$$

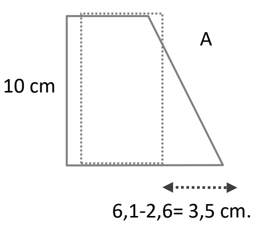


Figura 2

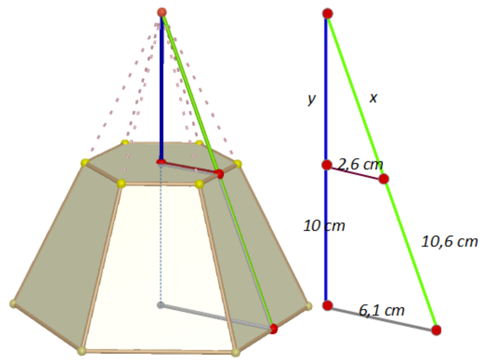


Figura 3

En tercer lugar, calculamos el valor de los segmentos *x*, *y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos. Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2.6} = \frac{10.6+x}{6.1} \Rightarrow \boldsymbol{6.1\ x = (10.6 + x)2.6} \Rightarrow$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

$$6.1\ x - 2.6x = 27.56 \Rightarrow x = \frac{27.56}{3.5} \approx\ 7.9\ cm$$

Entonces la apotema de la pirámide grande es 10.6 + 7.9 = 18.5 cm y el de la pequeña 7.9 *cm*. Y aplicando el teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5\ cm$$

Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 *cm* y 7,5 *cm.*

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} . \frac{48 \cdot 18.5 \cdot 17.5}{2} - \frac{1}{3} . \frac{18 \cdot 7.9 \cdot 7.5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412.25\ cm^3$$

Actividades propuestas

22. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?

23. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

24. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.

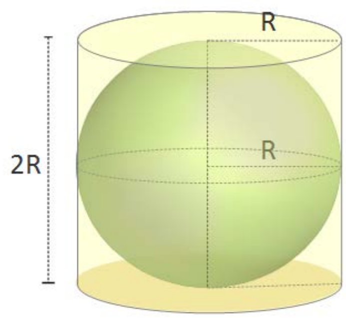
25. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.

2.3. Longitudes, áreas y volúmenes en la esfera

Recuerda que:

Área de una esfera

La esfera **no** es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.



Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.

Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

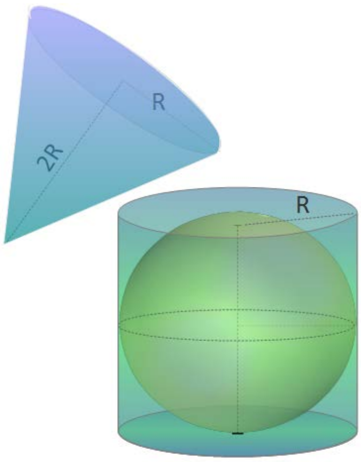
Actividades propuestas

26. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima;

b) El área de la esfera.

Volumen de la esfera



Volvamos a pensar en una esfera de radio *R* y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

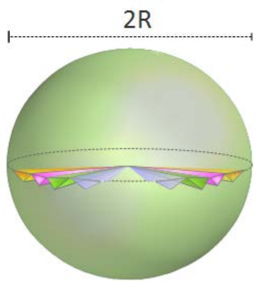
Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio *R* y del cono de altura *2R* y radio de la base *R*, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio *R*. Por tanto:

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \text{Volumen}_{\text{cilindro}} - \text{Volumen}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Área y Volumen de la ESFERA. Susi Profe

https://www.youtube.com/watch?v=70NIURnUufA



Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.

Actividades propuestas

27. El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

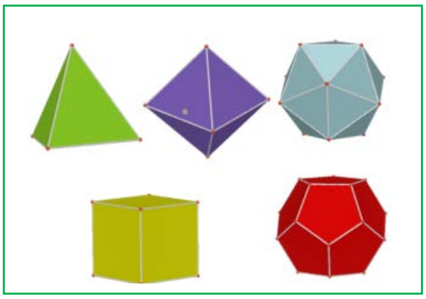
b. Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

28. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

2.4. Longitudes, áreas y volúmenes de poliedros regulares

Recuerda que:

Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales.

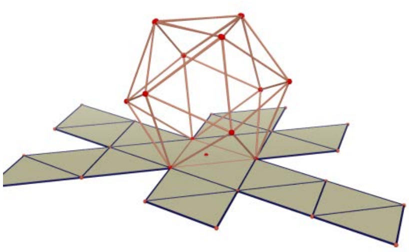


Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro

Área total de un poliedro regular

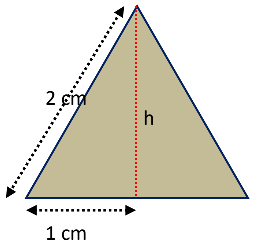
Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.

Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos la altura *h* que divide a la base en dos segmentos iguales



$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Luego el área de una cara es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ cm^2$$ y por tanto Área icosaedro = 20 $\sqrt{3}\ cm^2$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos y vectores

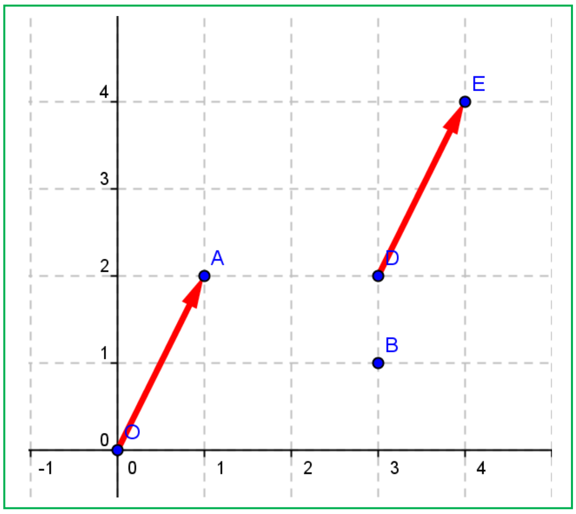
En el plano

Ya sabes que

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2)$ y $E(e_1, e_2)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por $\boldsymbol{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Ejemplo:

Las coordenadas de los puntos, de la figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) y *E*(4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son

$$\boldsymbol{DE} = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

Las componentes del vector ***OA*** son:

$$\boldsymbol{OA} = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2).$$

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2).

En el espacio de dimensión tres

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son una terna ordenada de números reales **(*x*, *y*, *z*)**, siendo "***z***" la altura sobre el plano *OXY*.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ y $E(e_1, e_2, e_3)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por $\boldsymbol{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Ejemplo:

Las coordenadas de puntos en el espacio son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son: $\boldsymbol{DE} = (4 - 3, 4 - 2, 4 - 1) = (1, 2, 3)$

Las componentes del vector ***OA*** son: $\boldsymbol{OA} = (1 - 0, 2 - 0, 3 - 0) = (1, 2, 3)$.

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2, 3)

Actividades propuestas

29. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: ***DE*** y ***OA***.

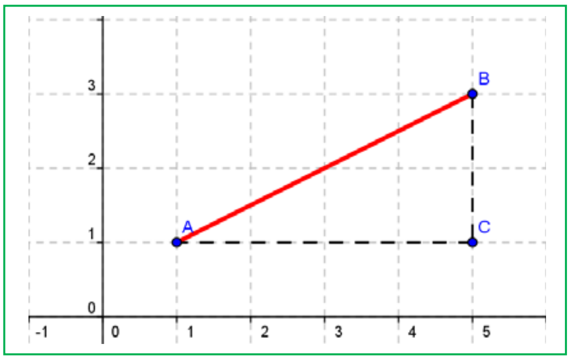
30. El vector de componentes $\boldsymbol{u} = (2, 3)$ y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

3.2. Distancia entre dos puntos

En el plano

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ejemplo:

Por el Teorema de *Pitágoras* sabemos que la distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (5, 3)$ es igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

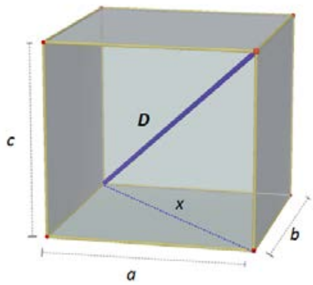
ya que el triángulo *ABC* es rectángulo de catetos 4 y 2.

Luego $D \approx 4.47$.

En el espacio de dimensión tres

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Ejemplo:

La distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (5, 3, 8)$ es igual, por el Teorema de *Pitágoras* en el espacio, a

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56.$$

Luego $D \approx 7,5$.

Actividades propuestas

31. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$.

32. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$.

33. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

34. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

35. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $O(0, 0)$ y $A(3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

36. Dibuja un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(3, 3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

37. Sea $X(x, y)$ un punto genérico del plano, y $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

38. Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del espacio, y $O(0, 0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

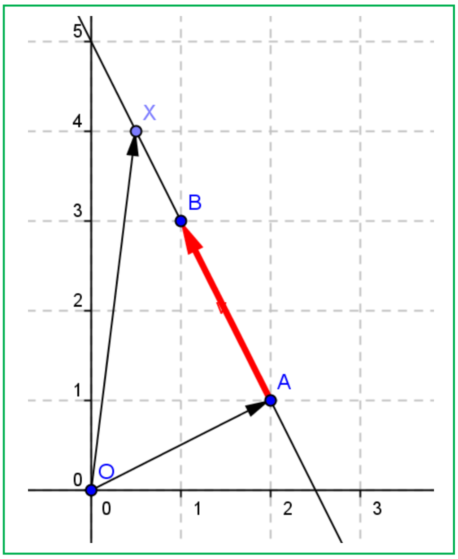
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Ecuaciones y rectas y planos

Ecuaciones de la recta en el plano.

Ya sabes que la **ecuación de una recta** en el plano es: $y = mx + n$. Es la expresión de una recta como función. Esta ecuación se denomina **ecuación explícita** de la recta.

Si pasamos todo al primer miembro de la ecuación, nos queda una ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** de la recta.



Ecuación vectorial: También una recta queda determinada si conocemos un punto: $A(a_1, a_2)$ y un vector de dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector ***OX*** puede escribirse como suma del vector ***OA*** y de un vector de la misma dirección que ***v***, $t\boldsymbol{v}$. Es decir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

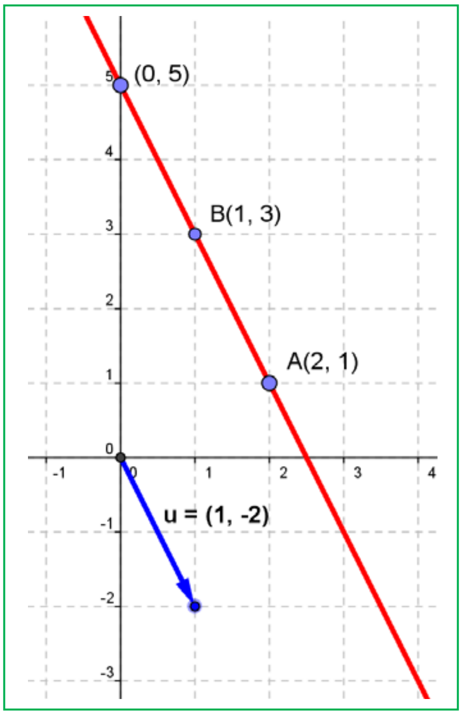
donde a t se le denomina parámetro. Para cada valor de t, se tiene un punto distinto de la recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

que es la **ecuación paramétrica** de la recta.

Paralelismo: Dos rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son paralelas si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, y dos rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ y r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son paralelas si $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$ pues en ambos casos, así tienen la misma dirección.

Perpendicularidad: Dos rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son perpendiculares si $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, y dos rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ y r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son perpendiculares si $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$, pues en esos casos puedes comprobar gráficamente que sus direcciones son ortogonales.



Actividades resueltas

- *De la recta de ecuación explícita $y = -2x + 5$*, conocemos la pendiente, -2, y la ordenada en el origen, 5. La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general $(1, m)$, y en este ejemplo: $(1, -2)$. La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el $(0, n)$, y en este ejemplo, $(0, 5)$. La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

Su ecuación implícita es: $-2x - y + 5 = 0$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

- *Escribe la ecuación paramétrica de la recta* que pasa por el punto *A*(2, 1) y tiene como vector de dirección ***v*** = (1, 2).

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación de la recta* que pasa por los puntos *A*(2, 1) y *B*(1, 3). Podemos tomar como vector de dirección el vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta es, en los tres ejemplos, la misma, la de la figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "*y*" llegamos a una única ecuación explícita.

Actividades propuestas

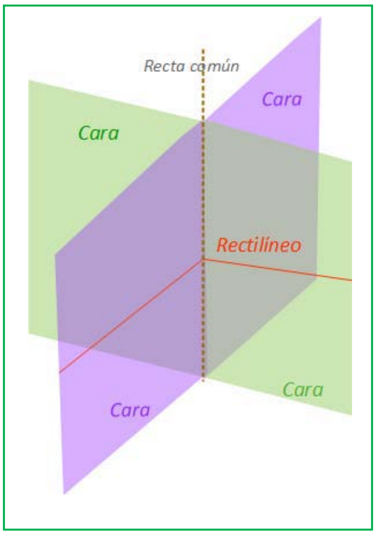
39. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

40. Representa gráficamente la recta *r*: –2*x* – *y* + 5 = 0. Comprueba que el vector (–2, –1) es perpendicular a la recta. Representa gráficamente la recta *s*: *x* – 2*y* = 0 y comprueba que es perpendicular a *r*.

41. Representa gráficamente la recta *r*: –2*x* – *y* + 5 = 0. Representa gráficamente las rectas: –2*x* – *y* = 0, –2*x* – *y* = 1, y comprueba que son paralelas a *r*.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

La ecuación **implícita de un plano** es: *ax* + *by* + *cz* + *d* = 0. Observa que es parecida a la ecuación implícita de la recta pero con una componente más.



La **ecuación vectorial de una recta** en el espacio es: ***OX*** = ***OA*** + *t**v***, aparentemente igual a la ecuación vectorial de una recta en el plano, pero al escribir las coordenadas, ahora puntos y vectores tiene tres componentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta también puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano.

Actividades resueltas

- *Escribe la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) y como punto, por ejemplo el *A*, entonces:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar las ecuaciones de dos planos que se corten en dicha recta, eliminando *t* en dos ecuaciones. Por ejemplo, sumando la primera con la tercera se tiene: $x + z = 4$. Multiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y restando, se tiene: $5x – 2y = 1$. Luego otra ecuación de la recta, como intersección de dos planos es:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B de la actividad anterior, y C(2, 6, 2).*

Imponemos a la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase por los puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0$.

Restamos a la segunda ecuación la primera, y a la tercera, también la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b – 2c = 0$

$a + 4b – c = 0$

Multiplicamos por 2 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b – c = 0$

$3b = 0$

Ya conocemos un coeficiente, $b = 0$. Lo sustituimos en las ecuaciones:

$a + 3c + d = 0$

$a \; – c = 0$

Vemos que $a = c$, que sustituido en la primera: $4c + d = 0$. Siempre, al tener 3 ecuaciones y 4 coeficientes, tendremos una situación como la actual, en que lo podemos resolver salvo un factor de proporcionalidad. Si $c = 1$, entonces $d = –4$. Luego $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = –4$. Es el plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que ya habíamos obtenido en la actividad anterior.

Actividades propuestas

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.

43. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

44. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

45. En el cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) y *A*(6, 6, 6) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

3.4. Algunas ecuaciones

Actividades resueltas

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

¡Depende! Depende de si estamos en un plano o en el espacio.

En el plano, podemos ver la ecuación como que el cuadrado de la distancia de un punto genérico *X*(*x*, *y*) al origen *O*(0, 0) es siempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar de todos los puntos del plano que distan 1 del origen es la circunferencia de centro *O*(0, 0) y radio 1.

En el espacio el punto genérico *X*(*x*, *y*, *z*) tiene tres coordenadas, y *O*(0, 0, 0), también. No es una circunferencia, ni una esfera. ¿Y qué es? Lo que está claro es que si cortamos por el plano *OXY*, ($z = 0$) tenemos la circunferencia anterior. ¿Y si cortamos por el plano $z = 3$? También una circunferencia. Es un cilindro. El cilindro de eje, el eje vertical, y de radio de la base 1.

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ahora sí. Sí podemos aplicar la distancia de un punto genérico *X*(*x*, *y*, *z*) al origen *O*(0, 0, 0),

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Es la ecuación de la superficie esférica de centro el origen y radio 1.

Actividades propuestas

46. Escribe la ecuación del cilindro de eje, el eje *OZ* y radio 2.

47. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

48. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.

49. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro *A*(2, 5) y radio 2.

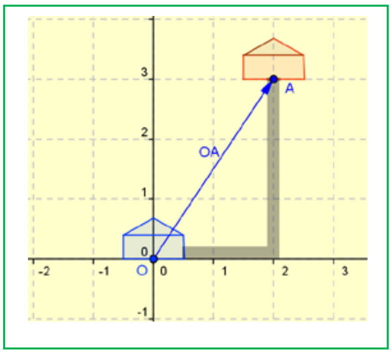
50. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

4. MOVIMIENTOS Y TRASNFORMACIONES

4.1. Traslaciones en el plano

Si Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris.



Llamamos *"O"* a la posición de la casa de Susana, y *"A"* a la posición de la casa de Nadia. Si Susana tuviera un helicóptero podría ir directamente en línea recta y seguiría la dirección *OA*. Lo representamos con una flecha y se denomina vector fijo.

Un vector fijo ***OA*** es un segmento orientado con origen en el punto *O* y extremo en el punto *A*. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde *O* hasta *A*, y una longitud, a la que llamamos módulo.

Un **vector fijo *OA***, de **origen** en *O* y **extremo** en el punto *A*, se caracteriza por:

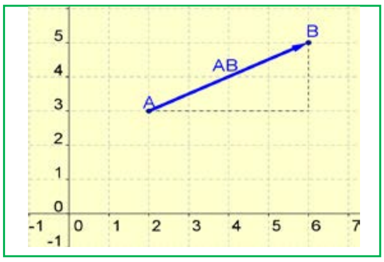
Su **módulo**, que es la longitud del segmento *OA* y que se escribe $|OA|$.

Su **dirección**, que es la recta que contiene al segmento.

Su **sentido** que va desde el origen *O* hasta el extremo *A*.

Las coordenadas o componentes de un vector vienen determinadas por su origen y su extremo.

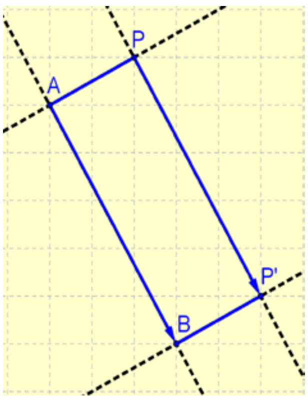
Ejemplo:



- Si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto final podemos calcular las coordenadas del vector. Observa el dibujo del margen y comprueba que si *A* (2, 3) y *B* (6, 5) las coordenadas del vector fijo ***AB*** son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a*, *b*) y *B* (*c*, *d*) entonces ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) tiene de módulo: $|\,\boldsymbol{u}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Un coche se mueve por la ciudad desde el domicilio del dueño hasta su trabajo, y se ha trasladado 4 calles hacia el norte y 3 calles hacia el este.

Es posible conocer una **traslación** si sabemos el punto de origen *A* y el de destino *B*. Estos dos puntos, *A* y *B*, determinan el **vector de traslación *AB***. ***AB*** es un vector fijo, representante del vector libre ***u*** de iguales coordenadas.

Para definir una **traslación** basta conocer su **vector de traslación**.

Si la traslación de vector libre ***u* = *AB*** transforma un punto del plano *P* en otro *P'*, entonces ***AB*** y ***PP'*** tienen igual módulo, dirección y sentido. Son el mismo vector libre. Tienen las mismas coordenadas.

Si con la traslación de vector ***AB*** trasladamos el punto *P* hasta el punto *P'* entonces *ABP'P* es un **paralelogramo**, y ***AB*** = ***PP'***

Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan. Como en una traslación todos los puntos se mueven sobre rectas paralelas y una misma distancia, se puede usar la escuadra y el cartabón para trazar las rectas paralelas y trasladar sobre ella algunos puntos de la figura, para lo que se debe medir siempre la misma distancia sobre la recta.

Actividades propuestas

51. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.

52. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?


Un friso en Camboya

53. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

54. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

4.2. Traslaciones en el espacio

Las traslaciones en el espacio tienen las mismas propiedades que las traslaciones en el plano.

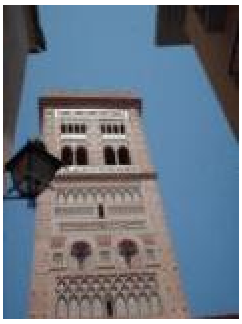
Imagina un avión que se mueve. El avión se traslada.
Una traslación en el espacio, igual que una traslación en el plano, es el movimiento que consiste en deslizar un objeto según una dirección. La traslación está determinada por la distancia que se traslada, la dirección de la recta sobre la que se traslada, y por su sentido. Por tanto:
Para determinar una traslación en el espacio basta conocer su **vector de traslación**.
La única diferencia es que ahora el vector de traslación tiene tres componentes: ***AB*** = (*a*, *b*, *c*).

Ejemplo:

- Para trasladar el punto *P* (2, 4, –1) mediante la traslación de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplemente sumamos las coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La traslación en el espacio no deja ningún punto invariante.



Actividades propuestas

55. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

56. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

4.3. Giros en el plano

Son las 4 en punto. Si retrasamos el reloj 15 minutos, la manecilla de los minutos ha girado un ángulo de 90° en sentido positivo.

Para determinar un **giro** o **rotación** es necesario conocer un punto, *O*, el **centro de giro**; un **ángulo** α y el **sentido** de giro de ese ángulo.

Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

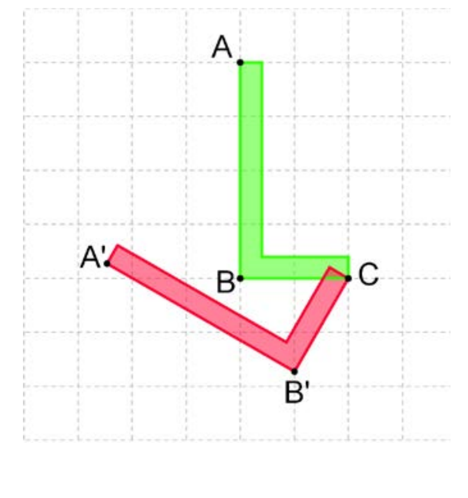
Si *A'* es el punto girado de *A*, con centro *O* y ángulo α, entonces: $|OA| = |OA'|$ y el segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*.

Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplo:

- Si han pasado 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90° (90° en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180°, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60°.

Actividades resueltas

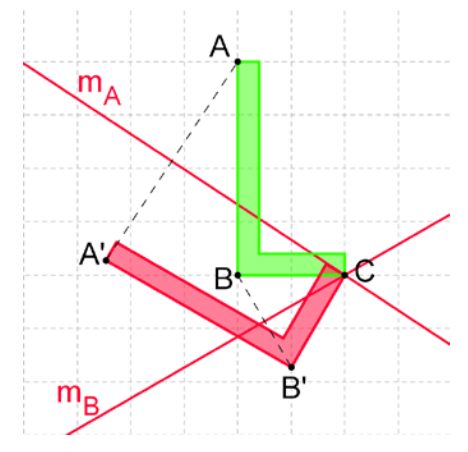


Para dibujar rotaciones en el cuaderno puedes utilizar un transportador de ángulos y un compás.

- Para girar la letra L según un giro de centro *C* y ángulo 60°, tomamos varios puntos de la figura, en este caso los puntos *A*, *B* y *C*. Con el compás haciendo centro en *C* trazamos arcos, y sobre ellos, utilizando el transportador, medimos 60°. Obtenemos los puntos *B'* y *A'*.

La nueva letra L mantiene las distancias: *BC* = *B'C* y *AB* = *A'B'*. También mantiene los ángulos: el ángulo *ABC* es recto, y el nuevo ángulo *A'B'C* también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. En general:

Los giros mantienen las distancias, por lo que son **isometrías** o movimientos. Mantienen los ángulos y el sentido de los ángulos, por lo que son **movimientos directos**.



Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el trasportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.

Actividades resueltas

- Trazamos el segmento *BB'* y su mediatriz. Trazamos el segmento *AA'* y su mediatriz. Ambas mediatrices se cortan en el punto *C*, que es el centro de giro. El ángulo que forman las mediatrices es de 60°.

Actividades propuestas

57. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado.

58. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA' y B'C' del giro de centro O y ángulo 60°.

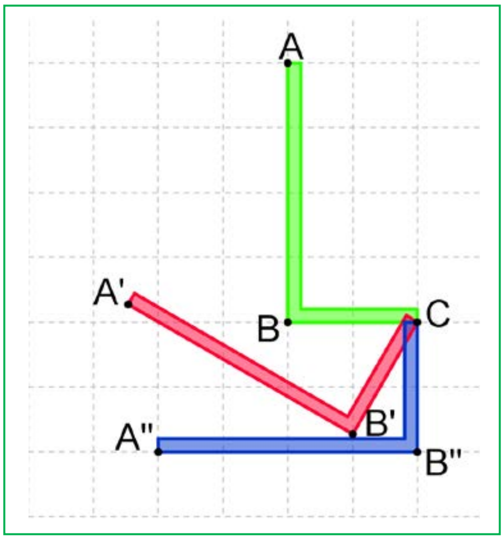
59. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B (3, –2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?

60. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

4.4. Composición de giros. Elementos invariantes

Ejemplo:

- Si giramos la letra L con centro *C*, 60° en sentido positivo y luego, también con centro *C*, 30° en sentido positivo, la figura obtenida está girada respecto a la primera 90° con el mismo centro de giro. En general:



La **composición** de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro y de ángulo, la suma de los ángulos de giro.

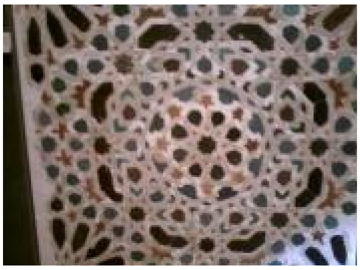
- Si una vez girada nuestra letra L 30° en sentido positivo, la giramos, con el mismo centro de giro, 30° en sentido negativo, ¿qué ocurre? En efecto, hemos vuelto a la posición inicial. Se dicen que son giros inversos y que al componerlos tenemos la identidad, ya que no nos movemos.

Un giro de centro *O* y ángulo α es el **giro inverso** al giro del mismo centro *O* y ángulo $-\alpha$.

Observa que la composición de giros de distinto centro no es conmutativa, pues depende del orden en que hagamos los giros.

Actividades resueltas

- Pensemos ahora en qué elementos deja invariantes un giro de centro *O* y ángulo de giro que no sea 0° ni 180°. ¿Deja alguna recta invariante? ¿Hay alguna recta del plano que no se mueva? No, todas giran. No hay rectas invariantes. ¿Y puntos? ¿Algún punto del plano no se mueve al girar? Si, el centro de giro queda invariante. El centro de giro se transforma en sí mismo.



En un giro de centro *O* y ángulo distinto de 0° y de 180°, el único elemento **invariante** es un punto, el **centro de giro.**

Centro de giro: Centro de giro es un punto de una figura plana tal que, al girar un cierto ángulo, la figura coincide consigo misma.

Observa que el rosetón del centro de este mosaico tiene un **centro de giro** de 60°. Si lo giramos 60°, vuelve a coincidir. También si lo giramos 120° o 180° o 240° o 300°.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

4.5. Simetría central en el plano. Centro de simetría

La simetría central de centro *O* en el plano es un giro de ese centro *O* y ángulo 180°. En el plano, la simetría central es, por tanto, un movimiento que ya conocemos. Observa que la simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro de simetría *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

Actividades resueltas

- Dos puntos *P* y *P’* son **simétricos respecto del origen de coordenadas** si tanto sus abscisas como sus ordenadas son opuestas. Así, el simétrico respecto del origen del punto (–2, 4) es el punto (2, –4).
- Construye el simétrico, respecto a una simetría central de centro (2, 3), de un polígono:

  El simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A’* (–4, 5). Has visto que se ha trazado la recta *OA*. Con centro en *O* y radio *OA* se traza un arco de circunferencia que corta a la recta *OA* en *A’*. Lo mismo para obtener el simétrico de los otros vértices del polígono. Si los otros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6), ¿cuáles son sus simétricos respecto a la simetría central de centro (2, 3)?

  - ¿Qué elementos deja invariantes una simetría central? Deja invariante el centro de simetría y todas las rectas que pasan por el centro de giro.

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura. La simetría central transforma la figura en ella misma.

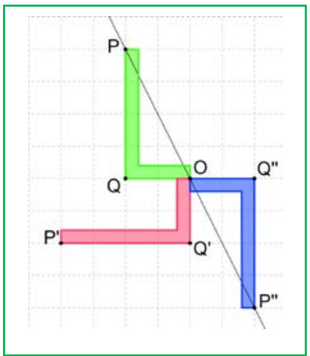
video

En la historia de las matemáticas los árabes ocupan un papel nada despreciable. A ellos les debemos algo tan fundamental en nuestra cultura como los símbolos de los números tal como los utilizamos en la actualidad, con la aportación del "cero" que llegó directamente desde India hasta Europa. En este capítulo veremos cómo la Alhambra de Granada es una de las manifestaciones más importantes del arte geométrico. Más por menos. La aventura del saber. Rafael Pérez

[Más por menos: La geometría se hace arte | RTVE Play]

Ejemplo:

- El mosaico de la Alhambra del margen tiene simetría central.
- El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.
- Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.
- El pentágono regular, no lo tiene.



Actividades resueltas

- Aplicamos a la letra L un giro de 90° y luego otro giro también de 90°. La composición de un giro de 90°, con otro del mismo centro y 90°, es un giro de 180°. El punto *P* primero se transforma en *P’* y luego en P’’. Si unimos cada punto de la figura con su transformado por la composición de los dos giros, la recta *OP* se transforma en la *OP”*, que es la misma recta. Los puntos *Q*, O y *Q’’* también están alineados. Las rectas que pasan por el centro de simetría son invariantes.

Actividades propuestas

61. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.

62. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?

63. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?

64. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

4.6. Giros en el espacio

Al abrir o cerrar una puerta, ésta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio necesitas, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. Recuerda, en el plano teníamos un centro de giro, un punto, ahora un eje de giro, una recta.

Piensa en otros ejemplos cotidianos de giros en el espacio.
Cuando giras una puerta, ¿cambia el sentido de sus ángulos? Naturalmente que no. Los giros en el espacio son movimientos directos.

- ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Eje de giro: Eje de giro de una figura, en el espacio, es una recta imaginaria tal, que al girar la figura un cierto ángulo, coincide consigo misma.

4.7. Simetría central en el espacio. Centro de simetría

Una figura tiene simetría central si al unir cada uno de sus puntos con el centro se obtiene otro punto de la figura.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

La simetría central en el espacio no es un giro. Además, solo deja un punto invariante, el centro (no una recta)

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura.

Ejemplos:

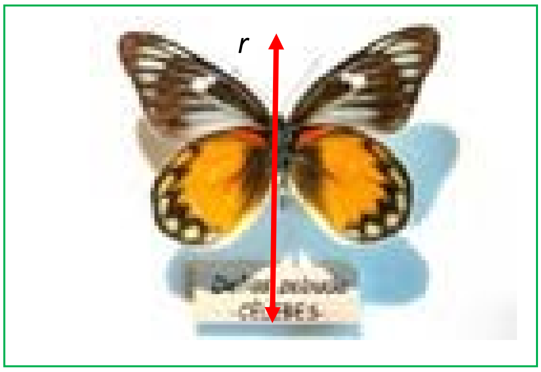
- La esfera, el cubo tienen centro de simetría, el tetraedro, no.
- El cilindro tiene centro de simetría. El cono no tiene centro de simetría.
- Un prisma regular tiene centro de simetría. Una pirámide, no.

Actividades propuestas

65. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

66. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

4.8. Simetrías axiales. Eje de simetría



- La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.

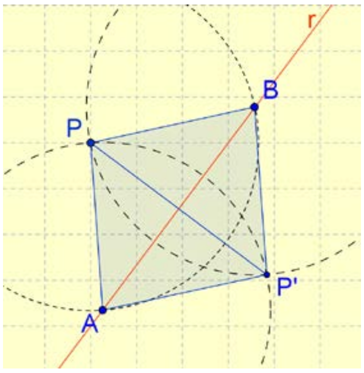
Para determinar una simetría (simetría axial) es necesario conocer el **eje de simetría**.

Si *P'* es el simétrico de *P* respecto de la **simetría axial** de eje *r*, entonces *r* es la **mediatriz** del segmento *PP'*.

La simetría axial conserva todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambia el sentido de estos. Por eso no es posible hacer coincidir una figura con su simétrica (a no ser que las propias figuras sean simétricas).

La simetría es por tanto un movimiento inverso.

Actividades resueltas



- Para hallar el simétrico del punto *P* respecto del eje de simetría *r*, utiliza un compás y haciendo centro en *P* con radio suficientemente grande traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dos puntos, *A* y *B*. Sin variar de radio y con centro en *A* y en *B* traza otros dos arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* es un rombo pues sus cuatro lados son iguales, por lo que sabemos que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
- Dibuja el punto simétrico de otro utilizando regla y escuadra:

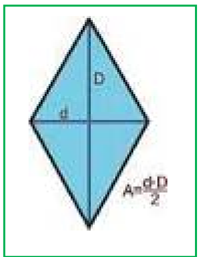
Tenemos el eje de simetría y queremos encontrar el simétrico del punto *P* (4, 1). Dibujamos el punto *P* (4, 1) en un sistema de coordenadas y tomamos la escuadra. Apoyamos la escuadra sobre el eje de simetría y hasta que toque al punto. Trazamos una recta auxiliar, perpendicular al eje y que pase por el punto *P*. Medimos la distancia del punto al eje y llevamos esa longitud sobre la recta auxiliar, y ya tenemos el punto simétrico.

- También puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.

Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.

Dos puntos **simétricos respecto del eje de ordenadas** tienen la misma ordenada y sus abscisas son opuestas. Dos puntos **simétricos respecto del eje de abscisas** tienen la misma abscisa y sus ordenadas son opuestas.

Eje de simetría de una figura



Si la recta *r* es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje *r* a otro punto de dicha figura.

Ejemplos:

- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

67. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

68. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

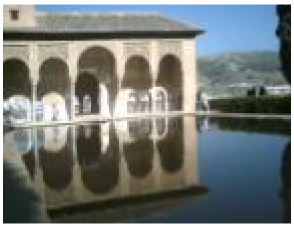
69. Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC.

70. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

71. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

4.9. Simetría especular en el espacio. Plano de simetría

Muchos muebles son simétricos: muchas mesas, muchas sillas… Muchos animales son casi simétricos. Los coches, los aviones, los trenes son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Muchos edificios son casi simétricos o tienen elementos de simetría.



Para determinar una simetría en el espacio es necesario conocer un plano, el **plano de simetría**.

Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría. Deja invariante las rectas ortogonales al plano de simetría, y deja invariante al plano de simetría.

Plano de simetría: El plano de simetría de una figura es un plano imaginario tal, que todo punto de la figura se transforma por la simetría respecto de ese plano en otro punto de dicha figura.

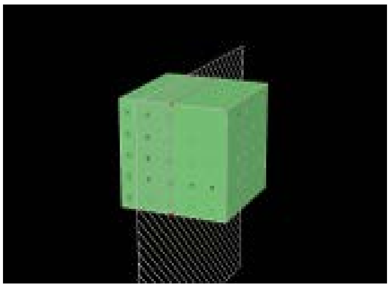
La torre con la puerta del margen tiene un plano de simetría.

Un plano de simetría es como un espejo que refleja exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

Actividades resueltas

Construye poliedros regulares, con cartulina, con pajitas, con …, para comprobar lo que sigue:

- Analizamos el plano de simetría del cubo de la ilustración del margen. Vemos que pasa por los puntos medios de las aristas. ¿Cuántos planos de simetría hay similares a este? Como el cubo tiene 12 aristas y cada plano pasa por 4 hay 3 de este tipo. Otro plano de simetría pasa por una diagonal de una cara, una arista, otra diagonal y otra arista. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas y tomamos 2, hay 6 de ese tipo.



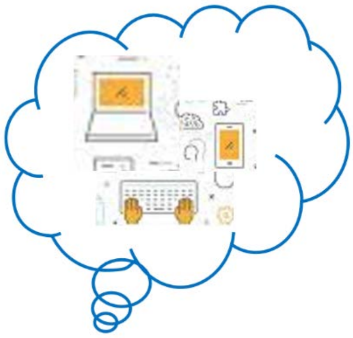
Actividades propuestas

72. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

4.10. Uso de GeoGebra para analizar las isometrías en el plano

Vamos a utilizar el programa **GeoGebra** para estudiar los movimientos en el plano. Estudiaremos las traslaciones y la simetría axial.

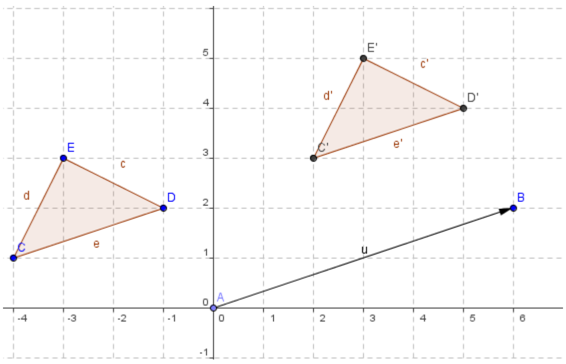


Actividades resueltas

Traslación

- *Utiliza GeoGebra para estudiar vectores y traslaciones.*

- En un archivo de *GeoGebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).



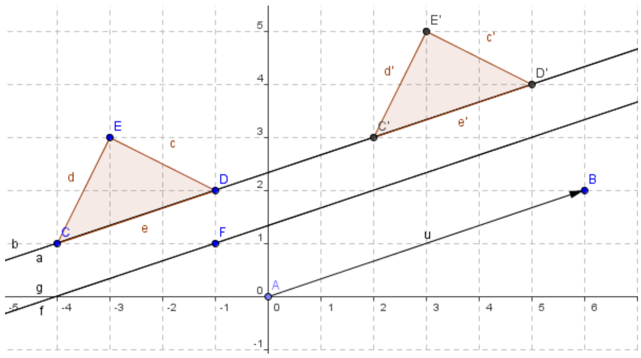
- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.

Actividades propuestas

73. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos *CDE* y *C'D'E'* coinciden



- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.

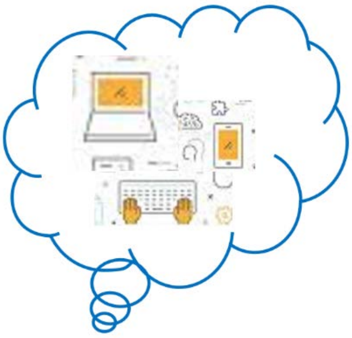
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

- *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*

- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo, la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.

Actividades propuestas

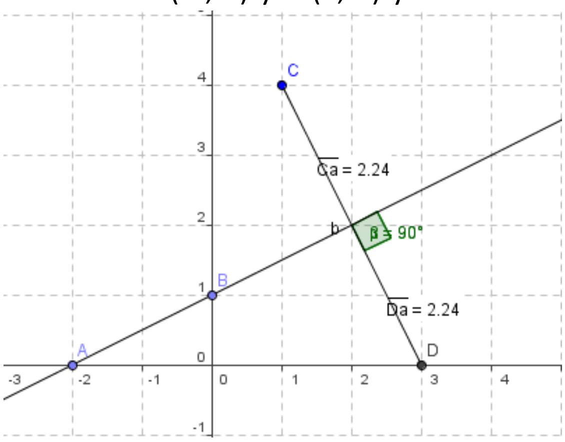
74. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.



Simetría axial

- *Utiliza Geogebra para estudiar las propiedades de la simetría axial.*

- Abre una nueva ventana de *Geogebra* y visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define *A* (-2, 0) y *B* (0, 1) y con **Recta que pasa por 2 puntos**, dibuja la recta *a* que pasa por *A* y *B*, que será el eje de simetría.



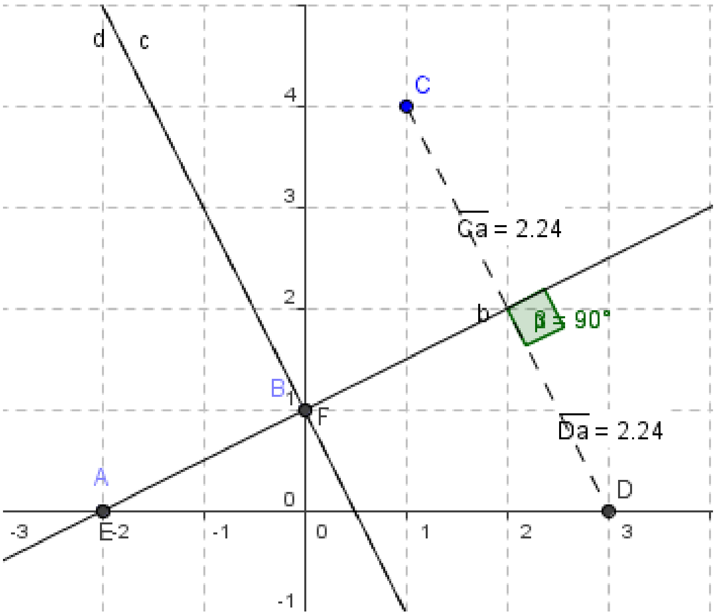
- Determina el punto *C* (1, 4) y con la herramienta **Refleja objeto en recta**, su simétrico con respecto a la recta *a*, que es el punto *D* (3, 0).
- Con la herramienta **Distancia** comprueba que la distancia del punto *C* a la recta *a* coincide con la del punto *D* a dicha recta.
- Dibuja con **Segmento entre dos puntos** el que une los puntos *C* y *D*.
- Con la herramienta **Angulo** calcula la medida del ángulo que forman el segmento *CD* y la recta *a* para verificar que son perpendiculares.

Las siguientes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan la simetría axial:

1ª: Las distancias de un punto y de su simétrico al eje de simetría coinciden.

2ª: El segmento que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.

- Con la herramienta **Refleja objeto en recta** halla el simétrico de los puntos *A* y *B* con respecto al eje *a* y comprueba que *A* y su simétrico de *E* coinciden lo mismo que *B* y *F*. Prueba con otros puntos de la recta *a* para verificar que todos los puntos del eje resultan invariantes mediante una simetría axial con respecto a este eje. Verifica, también, que el eje, la recta *a*, y su simétrica la recta *b* coinciden.



- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar la recta *c*, perpendicular al eje *a* que pasa por el punto *B*.
- Calcula la recta simétrica de la recta *c* con respecto al eje *a*, se obtiene la recta *d* que coincide con *c*.
- Mejora el aspecto de la construcción dibujando el segmento CD y las rectas *c* y *d* con trazo discontinuo. Haz clic con el botón derecho del ratón sobre el elemento o su ecuación y en **Propiedades**, **Estilo**, elige un trazo discontinuo.

Actividades propuestas

75. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

76. Utiliza la herramienta **Rota objeto** en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angu**lo** uno de 45°.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.

b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

77. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.

b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.

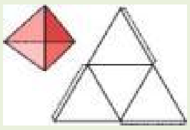
c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

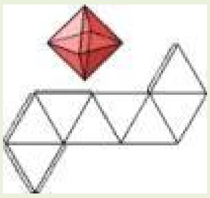
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

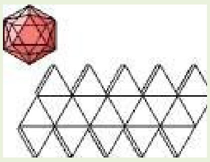
CURIOSIDADES. REVISTA

Problemas, problemas, problemas…

1. Deltaedros







En la trama de triángulos dibuja todos los diamantes-dos posibles, todos los diamantes-tres posibles y todos los diamantes-cuatro posibles. ¿Con cuáles puedo construir un cuerpo en el espacio? A estos cuerpos de caras triangulares vamos a llamarlos **DELTAEDROS**. Investiga y construye todos los deltaedros posibles. ¿Cuántos hay?

(Podemos restringir la búsqueda a deltaedros convexos)

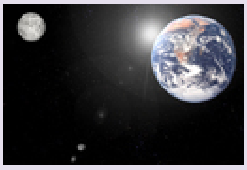
¿Cuáles son también poliedros regulares? ¿Qué orden tienen sus vértices?

¿Hay deltaedros con menos de cuatro caras? ¿Hay deltaedros convexos con un número impar de caras? ¿Hay deltaedros con más de veinte caras?

Haz un cuadro con los resultados obtenidos: Nº caras, Nº vértices, Nº aristas, Nº vértices de orden tres, de orden cuatro, de orden cinco, descripción de los posibles deltaedros: bipirámides, esquinas, bandas...

2. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

3. Construye figuras de cartulina que mediante un solo corte se puedan dividir en cuatro trozos iguales.



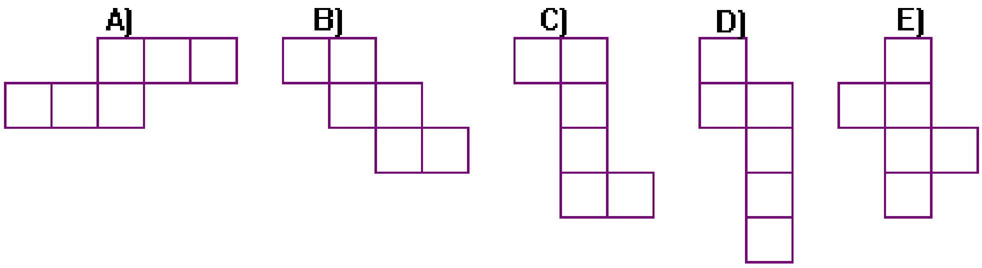
4. El radio de la Tierra es de 6 240 km aproximadamente. Rodeamos la Tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

Para empezar hazlo más fácil. Piensa en la Tierra como una manzana que tiene un radio de 3 cm.

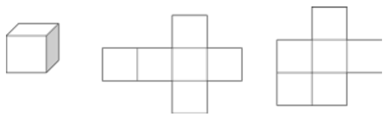
5. ¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

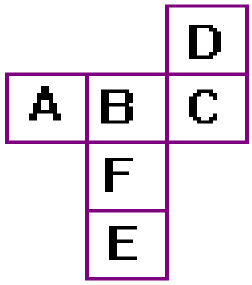
6. ¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



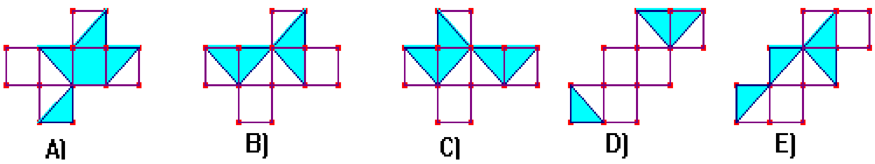
7. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo



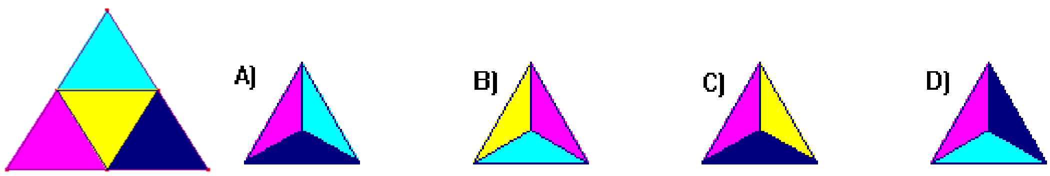
8. Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?



9. A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?

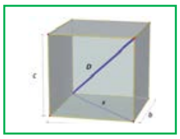
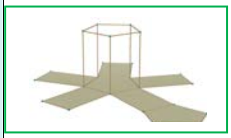
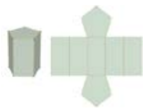
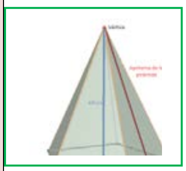


10. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

NOCIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLOS
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. Si la recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$; $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuaciones de la recta en el plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.	**Ecuación implícita de un plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica de una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.

2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.

3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.

4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.

5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?

7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?

8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.

9. Si un ascensor mide 1.2 *m* de ancho, 1.6 *m* de largo y 2.3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?

10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?

11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 *cm*.

12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.

13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?

14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Longitudes, áreas y volúmenes

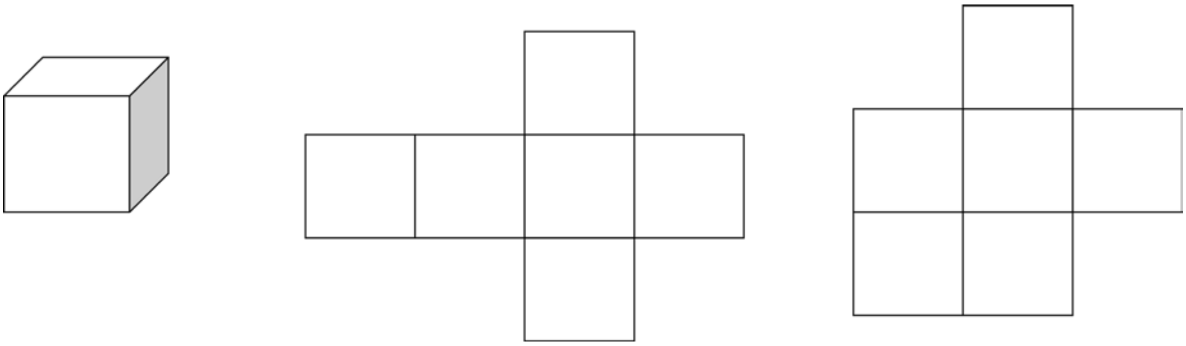
16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

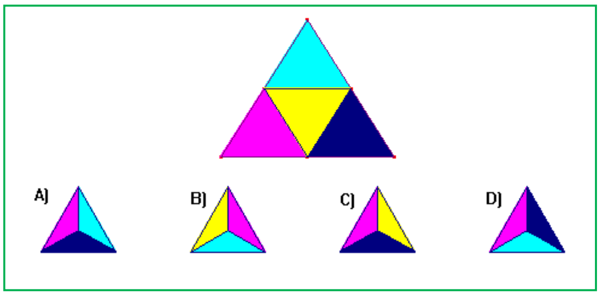
18. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

19. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

20. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2.7 *dm*, 6.2 *dm* y 80 *cm*.

26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.

27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

28. Calcula la apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.

29. Calcula la apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0.4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1.50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?

33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?

34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1.50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?

36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.

40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18.3 *m*.

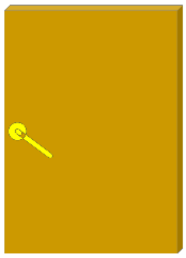
42. Un ortoedro tiene 0.7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.

44. Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

45. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

46. Una circunferencia de longitud 18.84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.



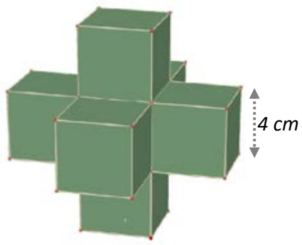
47. Una puerta mide 1.8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

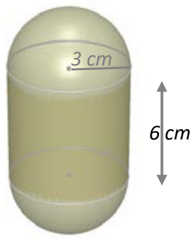
48. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

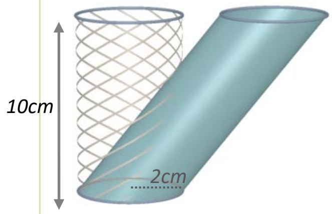
49. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

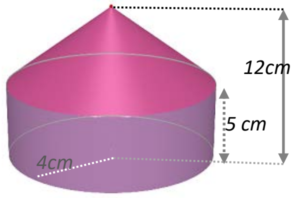
50. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251.2 *m*?

51. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

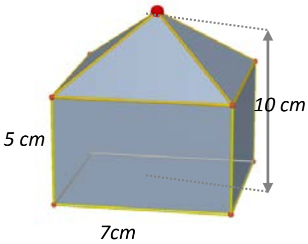




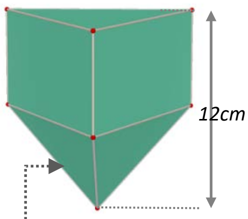




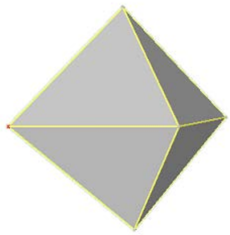
52. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista



Octaedro de 6cm de arista

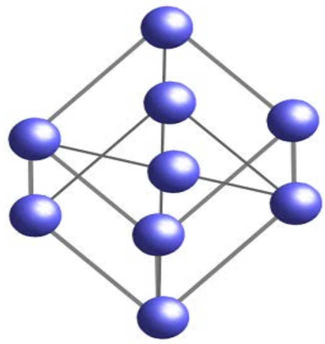
Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

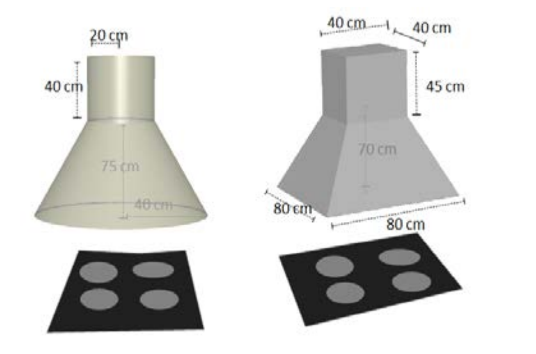


56. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2 €/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

57. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

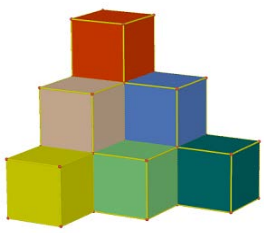


58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0.5 *m* el nivel del agua?

60. El precio de las tejas es de 12.6 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



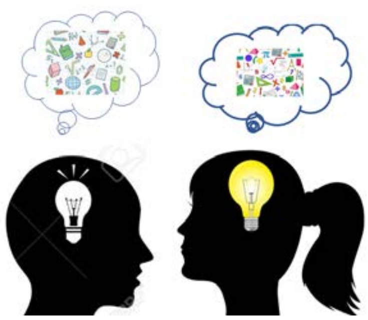
62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24 g/cm^3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus bases miden 2.5 *cm* y 1.2 *cm*, y su altura 3 *cm*?

66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.



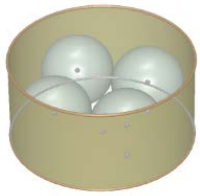
ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm^3, y de área lateral 240 cm^2.

69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.

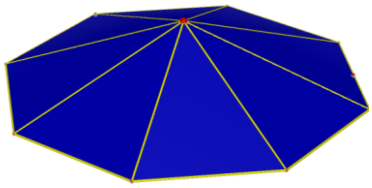
70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.



71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0.5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?



74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 5)$.

77. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3, 4)$ y $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

81. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $A(2, 3)$ y $C(5, 6)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $\boldsymbol{u} = (4, 5)$. Represéntala gráficamente.

87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.

89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.

91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.

92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.

93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.

94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Movimientos

95. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

96. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

97. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = x^4$ *d)* $y = x$

98. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

99. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

100. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

101. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

102. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240°, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240°? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

103. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90°?
- ¿Hay giros de 45°?
- ¿Hay traslaciones?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30\,000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2\,250}$ *cm*

8. Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF