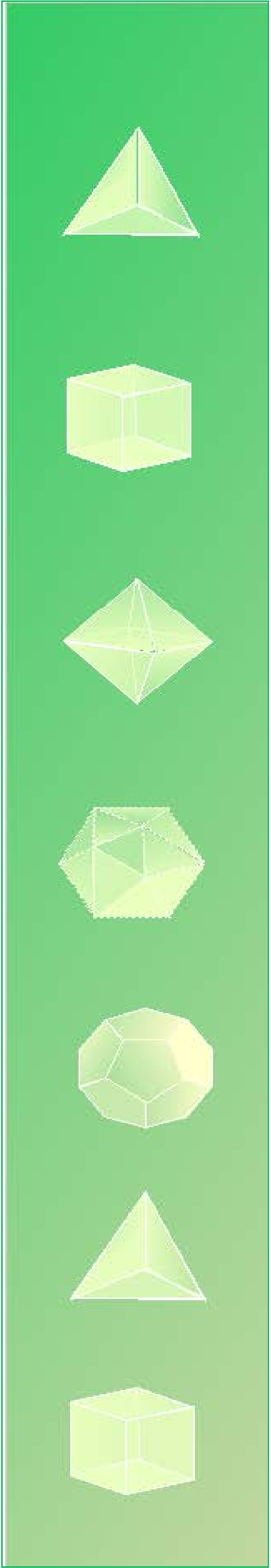


Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO

Capítulo 8: TRIGONOMETRÍA

BOCM: Razones trigonométricas completas y funciones trigonométricas **inversas**: **arcoseno, arcocoseno y arcotangente**

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Mª Fernanda Ramos Rodríguez y

Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF,

Mª Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Índice

Resumen

Etimológicamente *trigonometría* significa *medición de triángulos*. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que es imposible obtener por medición directa.

Inscripción babilónica. Museo Pérgamo de Berlín

En este capítulo estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.1. Sistema sexagesimal

Recordarás que, en el sistema sexagesimal de medida de ángulos, la unidad es el **grado sexagesimal** que se define como la trescientos sesenteava parte de un ángulo completo. Tiene dos divisores que son el **minuto** que es la sesenteava parte de un grado y el **segundo** que es la sesenteava parte de un minuto. Recuerda la notación que se emplea en este sistema:

1º = 1 grado sexagesimal; 1´ = 1 minuto sexagesimal; 1´´ = 1 segundo sexagesimal.

Como consecuencia de la definición:

1 ángulo completo = 360º; 1º = 60´; 1´ = 60´´.

1.2. Sistema internacional

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el **radián.**

El **radián** es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo.

Se denota por **rad.**

A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud $2\pi R$, a un radián un arco de longitud R, entonces:

Nº de radianes de un ángulo completo = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad**

Y la relación con el sistema sexagesimal la obtenemos a partir del ángulo completo:

1 ángulo completo = 360º = 2π rad ⇔ 1 ángulo llano = 180º = π rad

Por esta relación se obtiene que 1 rad ≅ 57, 216º ≅ 57º 12´ 58´´.

Actividades propuestas

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 45º, 150º, 210º, 315º.

2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{3\pi}{8}$ radianes.

3. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40º y $\frac{\pi}{3}$ radianes. Calcula en radianes lo que mide el tercer ángulo.

4. Un ángulo de un triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radianes. Calcula en radianes la medida de los otros dos.

5. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y expresa en radianes la medida de cada uno de sus ángulos.

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

2.1. Razones trigonométricas directas de un ángulo agudo

video

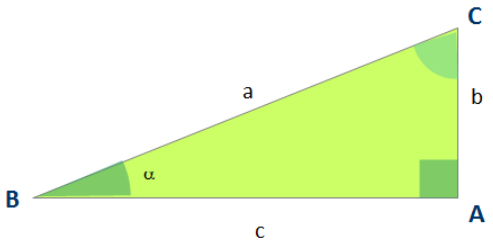
Razones Trigonométricas. Hallar la Altura de la Torre. En este video les comparto un ejercicio de Razones Trigonométricas. Aplicación de las razones trigonométricas o funciones trigonométricas para encontrar la medida de un lado en un triángulo rectángulo cuando conocemos la medida de un ángulo y un lado. Matemáticas con James

https://www.youtube.com/watch?v=ixmFqerPDmg

Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega α (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que α sea uno de sus ángulos.

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice *B*, el ángulo α.

Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo α: seno, coseno y tangente como:



$$\textit{seno de } \alpha = \textit{sen}\,\alpha = \textit{sen}\,\hat{B} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

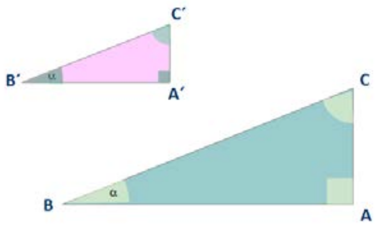
$$\textit{coseno de } \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\textit{tangente de } \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

También se utilizan las expresiones tg α y tag α como símbolos de la tangente de α.

A menudo se nombran los ángulos de un triángulo con la misma letra mayúscula que el vértice correspondiente.

Esta definición no depende del triángulo elegido. Vamos a demostrarlo. Para ello consideremos otro triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ con α en el vértice *B´*.



Según el segundo criterio de semejanza de triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales 90º y α. Por lo tanto los lados de ambos son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow & \textit{el seno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow & \textit{el coseno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow & \textit{la tangente es independiente del triángulo en que se mide} \end{cases}$$

Actividades resueltas

- *Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuyos catetos miden b = 30 cm y c = 40 cm.*

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500 \Rightarrow$ $a = \sqrt{2\,500} = 50$ cm.

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

$$sen\ \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ cos\ \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ tg\ \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ cos\ \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ tg\ \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

2.2. Relaciones fundamentales

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo α, es posible calcular las razones trigonométricas restantes, gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes:

PRIMERA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

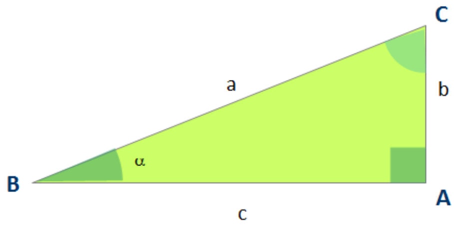
$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

que también verás escrita como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ dado que las potencias de las razones trigonométricas suelen escribirse con su exponente sobre la última letra de su notación y a continuación el nombre del ángulo

Demostración:

La demostración es sencilla. Volvamos al triángulo inicial del párrafo anterior: Por el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$. Dividamos a ambos miembros entre a^2:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \\ sen\ \alpha = \dfrac{b}{a} \\ cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2$$



SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Demostración:

En el mismo triángulo anterior: $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{b}{a} : \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}\dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{c} = tan\ \alpha.$

Actividades resueltas

- *Sabiendo que α es un ángulo agudo, calcula las restantes razones trigonométricas de α en los casos siguientes: a) $sen\ \alpha = \frac{1}{5}$ b) $\tan\alpha = 3$*

a. $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{25} + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow\ cos^2\ \alpha = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow\ cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{5} : \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{5}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b. $\left.\begin{array}{r} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ tan\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ sen\ \alpha = 3\ cos\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3\,cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow 10\,cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10},\ sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

2.3. Otras funciones trigonométricas. Otras relaciones

Otras razones trigonométricas de un ángulo α son la cosecante, la secante y la cotangente de α y sus notaciones son *cosec* α, *sec* α, *cotan* α.

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha};\ sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha};\ cotan\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha}.$$

Con su definición, aparecen nuevas identidades trigonométricas, entre las que destacan:

a) $sen\,\alpha \,.\, cosec\,\alpha = 1;\ cos\,\alpha \,.\, sec\,\alpha = 1;\ tan\,\alpha \,.\, cotan\,\alpha = 1.$

b) $sec^2\ \alpha = 1 + tan^2\alpha$

c) $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

La primera de ellas es evidente por definición. La segunda y la tercera tienen una demostración muy parecida por lo que encontrarás solo una de las dos y la otra como actividad propuesta

Demostración b):

A partir de $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, dividimos a ambos miembros entre $cos^2\ \alpha$:

$$\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \frac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \Rightarrow tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha.$$

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas son las funciones arco: arco seno, arco coseno, y arco tangente. Se definen:

$$arcsen(x) = y \Leftrightarrow x = sen(y)$$

$$arccos(x) = y \Leftrightarrow x = cos(y)$$

$$arctg(x) = y \Leftrightarrow x = tg(y)$$

Ta conoces otras funciones inversas, la función logaritmo es la función inversa de la función exponencial.

Actividades propuestas

6. Sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de α.

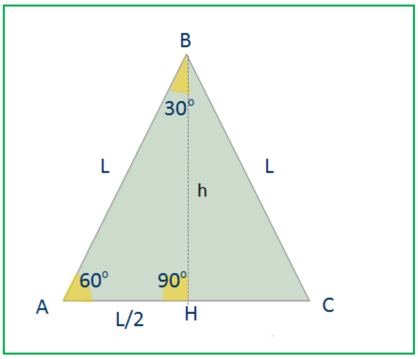
7. Si *cotan* α = 2, calcula las cinco razones trigonométricas del ángulo α.

8. Demuestra que $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

2.4. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º Y 60 º

Consideramos un triángulo equilátero de lado *L* Trazamos la altura correspondiente al lado sobre el que se apoya. Con ello queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90º, 30 º y 60 º. Además la hipotenusa mide *L* y uno de sus catetos L/2. Por el teorema de Pitágoras podemos obtener el que nos falta:



$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculamos las razones trigonométricas de 30º y 60 º en el triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$sen\,60^o = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\;L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\,30^o = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\;L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

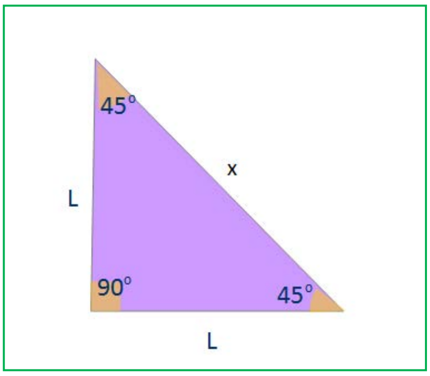
$$tag\,60^o = h : \frac{L}{2} = \frac{2\,h}{L} = \frac{2\sqrt{3}\,L}{2} : L = \frac{2\sqrt{3}\,L}{2\,L} = \sqrt{3}$$

$$tag\,30^o = \frac{L}{2} : h = \frac{L}{2} : \frac{\sqrt{3}\;L}{2} = \frac{2\,L}{2\sqrt{3}\,L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45º

Ahora vamos a trabajar con un triángulo rectángulo isósceles. Pongamos que los dos catetos tienen una longitud *L*. Utilizamos de nuevo el teorema de Pitágoras y obtenemos el valor de la hipotenusa *x* en función de *L*:

$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$



Ahora podemos calcular ya las razones trigonométricas de 45 º

$$sen\,45^o = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} := \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} := \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\,45^o = \frac{L}{L} = 1$$

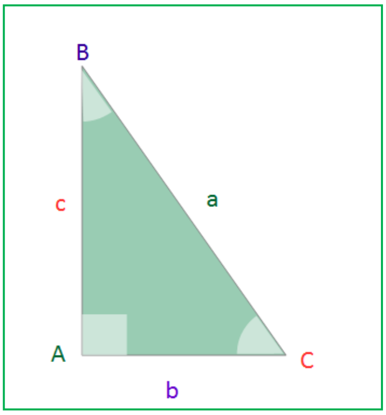
	Seno	**Coseno**	**Tangente**
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

2.5. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados.

En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:



Primer caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y la hipotenusa a:

Como $\hat{A}$ = 90º $\hat{C}$ = 90º – $\hat{B}$

Ahora a partir de las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$, obtenemos los lados que nos faltan. También cabe utilizar el teorema de Pitágoras cuando conozcamos uno de los dos catetos.

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,sen\,\hat{B}\,; \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$

Segundo caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y un cateto b:

Como $\hat{A}$ = 90º $\hat{C}$ = 90º – $\hat{B}$

También en este caso las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$ sirven para obtener al menos uno de los lados y puede utilizarse el teorema de Pitágoras cuando hallemos el valor de un lado más. Una forma de resolución es:

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\,\hat{B}}\,; \qquad sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Tercer caso: Se conocen dos lados:

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. Siguiendo con el triángulo de la figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas, por ejemplo $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ y para conocer el valor del ángulo, despejamos escribiendo:

$\hat{B} = arc\ sen\,\frac{b}{a}$, que significa "*ángulo cuyo seno es B*" y que se obtiene con la calculadora activando el comando ***sin^{-1}*** lo que conseguiremos con la secuencia  $\frac{b}{a}$.

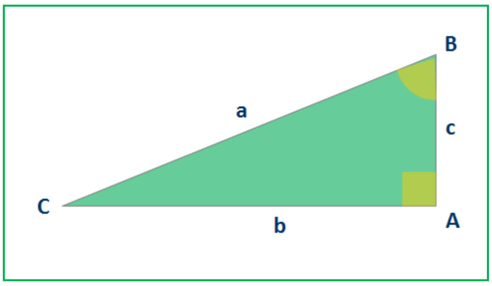
Análogamente, si partimos de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ o bien $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ el ángulo B es $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ o $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$ que obtendremos con las secuencias  $\frac{c}{a}$ o bien  $\frac{b}{c}$.

Actividades resueltas

- *Resolver el triángulo ABC con ángulo recto en A en los dos casos siguientes:*

  a) $\hat{B} = 42^o$ *y la hipotenusa a = 12 m.*

  b) Los catetos miden 12 dm y 5 dm.



a) Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Cálculo de los lados: $sen\ 42^o = \dfrac{b}{12} \Rightarrow b = 12\ sen\ 42^o \approx 8.03$ m.

$$cos\ 42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\ cos\ 42^o \approx 8.92 \text{ m.}$$

b) Cálculo de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\tan\dfrac{12}{5} = 67^o\ 22'\ 48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o\ 22'\ 48'' = 22^o\ 37'\ 12''$.

Trigonometría Discovery

https://www.youtube.com/watch?v=BZcteigGMu8

2.6. Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos al cálculo de distancias

Resolución de triángulos rectángulos

La resolución de triángulos rectángulos puede aplicarse directamente en algunos casos al cálculo de distancias.

Actividades resueltas

- Calcular la altura de un árbol sabiendo que determina una sombra de 3.5 metros cuando los rayos *de sol forman un ángulo de 30º con el suelo.*

La razón trigonométrica de 30º que relaciona el lado conocido y el que nos piden es la tangente:

$$tan\ \ 30^o = \frac{h}{3.5} \Rightarrow h = 3.5\ \ tan\ \ 30^o = 3.5\ .\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.02 \text{ m.}$$

Técnica de la doble observación

Se utiliza para calcular alturas de objetos a los que resulta difícil llegar como por ejemplo, edificios, montañas, objetos en el extremo opuesto de una calle, etc.

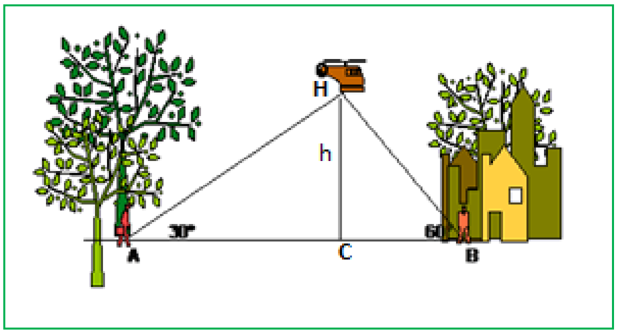
Precisamos de un instrumento para medir ángulos. Habitualmente se utiliza el llamado **teodolito**. La técnica consiste en tomar la medida del ángulo que forma una visual dirigida al punto más alto del objeto a medir con la horizontal, desde dos puntos distintos y situados a una distancia conocida para nosotros.

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Aparecen entonces dos triángulos rectángulos con un lado común que es la altura a medir. Es posible plantear un sistema de ecuaciones en cuyo planteamiento es clave la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- *Dos personas, separadas **30** metros ven un helicóptero. La persona situada en A dirige una visual a la base del mismo que forma con el suelo un ángulo de **30**°. También la persona situada en B dirige su vista al mismo punto obteniendo un ángulo de **60**°. ¿A qué altura vuela el helicóptero?*



Sea h esta altura. Las visuales y el suelo determinan dos triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AHC}$ y $\overset{\Delta}{BHC}$ en los que:

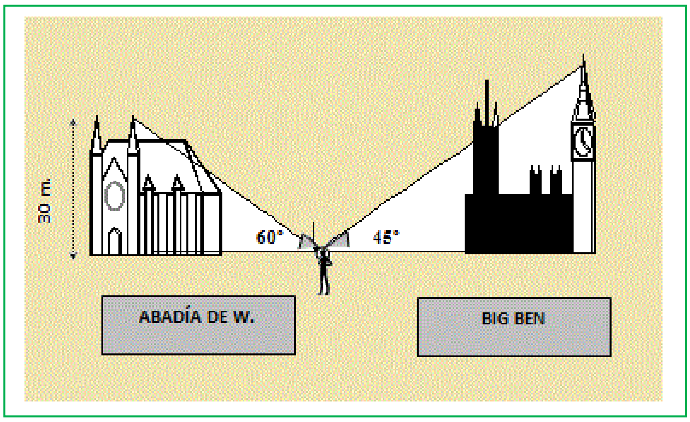
$AC + CB = 30 \Rightarrow CB = 30 - AC$ y si hacemos $AC = x$

$$\tan\ 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\ \tan\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x$$

$$\tan\ 60^\circ = \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\ \ \tan\ 60^\circ = \sqrt{3}\ (30-x) \Rightarrow x = (30-x).3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22.5\ m$. Sustituyendo, llegamos a la solución $h = \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 13\,m$

- *En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. (Ya sabes, siempre hay un teodolito a mano).*

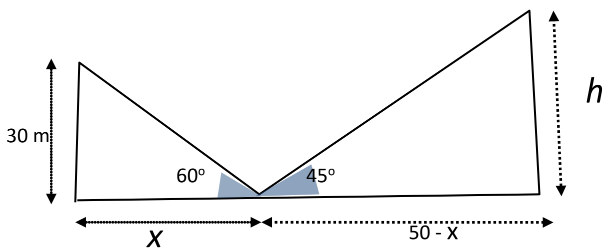


Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen **30** metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de **60**°**,** y el Big Ben con un ángulo de **45**°. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de **50** metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio? (Nota: Los datos son totalmente ficticios)

En el triángulo izquierdo determinado por la *Abadía*:

$$\tan\ 60^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{30}{\tan 60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$$



En el triángulo que determina el *Big Ben*:

$$\tan\ 45^\circ = \frac{h}{50-10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50-10\sqrt{3}\right)\tan 45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50 - 10\sqrt{3}\ \ m \approx 32.7\ \ m$$

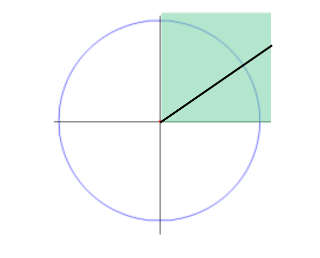
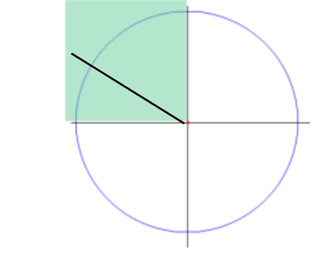
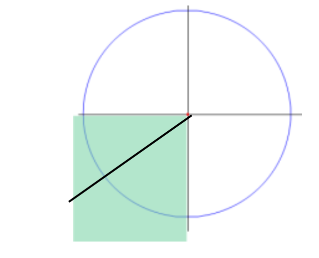
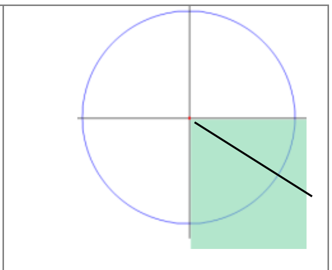
3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

3.1. Circunferencia trigonométrica. Cuadrantes

Se llama **circunferencia trigonométrica** o **goniométrica** a una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Es posible representar cualquier ángulo en la circunferencia trigonométrica. Para ello siempre se toma un lado fijo que es la semirrecta definida por la parte positiva del eje de abscisas; el segundo lado es la semirrecta variable que corresponda según su medida. El sentido de un ángulo se mide de OX^+ a la semirrecta variable que determina su amplitud. Se entiende que para un ángulo negativo coincide con el de las agujas de un reloj analógico y para un ángulo positivo, el contrario.

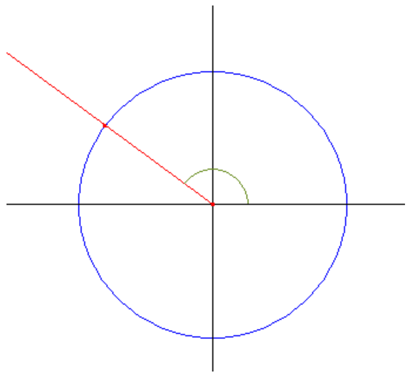
La circunferencia trigonométrica divide al plano en cuatro regiones que se denominan cuadrantes.

			
PRIMER CUADRANTE	SEGUNDO CUADRANTE	TERCER CUADRANTE	CUARTO CUADRANTE

3.2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

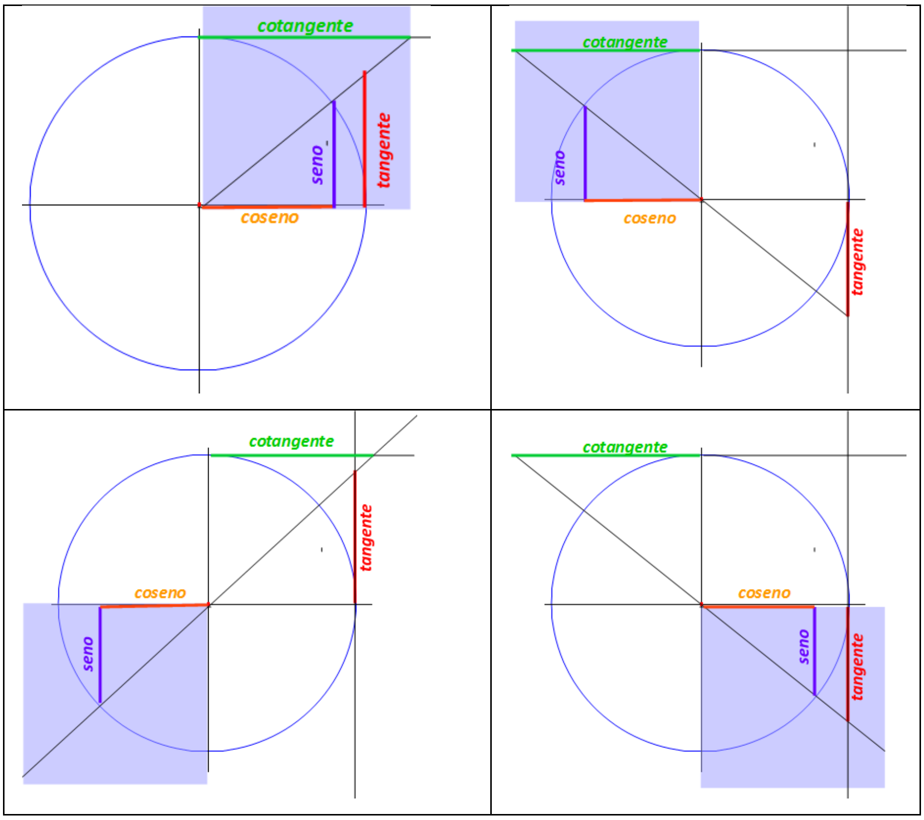
La semirrecta variable que define un ángulo α en la circunferencia trigonométrica es clave para la definición de un ángulo cualquiera. Dicha semirrecta corta a la circunferencia en un punto $P_\alpha\ (x_\alpha, y_\alpha)$ a partir del que se define:

$$sen\ \alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha\ ;\ cos\ \alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha\ ;\ tag\ \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$



Se conserva la definición para ángulos agudos que son ángulos del primer cuadrante y se amplía a ángulos de cualquier signo y amplitud.

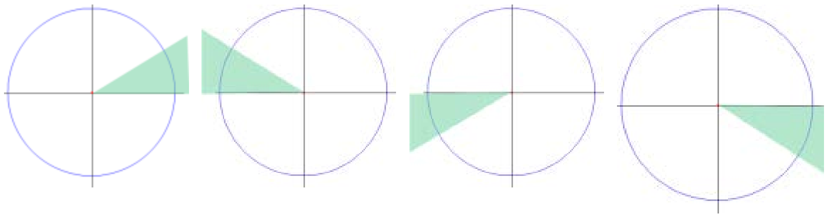
Además, esta definición permite tener una representación geométrica del seno y el coseno de un ángulo que coincide con los segmentos y_α , x_α, ordenada y abscisa del punto P_α. Las rectas tangentes a la circunferencia goniométrica en los puntos $(1, 0)$y $(0, 1)$ proporcionan también representaciones geométricas de la tangente y cotangente que son los segmentos determinados por estas tangentes geométricas, el eje OX y la semirrecta correspondiente a cada ángulo



3.3. Reducción al primer cuadrante

Los ángulos α de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos β que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos α iniciales.

Estas relaciones permiten obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo α en función de uno del primer cuadrante β. En cada caso calcularemos la amplitud de la zona sombreada.



En los casos en los que deseemos obtener qué ángulos corresponden a una razón trigonométrica dada, resulta especialmente importante ya que, aunque hagamos uso de la calculadora, ésta nos devolverá un único valor y, sin embargo, existen infinitos ángulos solución de este problema. Gracias a lo que describiremos en este epígrafe, podremos encontrarlos sin dificultad.

Debes pensar que los ángulos de estos cuadrantes no siempre son positivos ni tienen un valor absoluto menor que 360º.

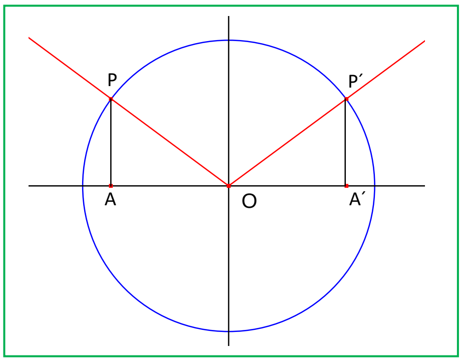
Observa que, si su valor absoluto es mayor que 360º, equivale al número de vueltas que te indique el cociente entero de la división de α entre 360º más el resto de la división.

El signo de un ángulo depende solo de la forma de recorrerlo (medido desde la parte positiva del eje *OX* hacia la semirrecta que lo define).

Para hacer más cómoda la explicación consideraremos que a partir de P se miden las razones trigonométricas del ángulo α y a partir de P´ las del ángulo β

ANGULOS DEL SEGUNDO CUADRANTE

Construimos los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A´* iguales de forma que la hipotenusa sea en ambos casos el radio de la circunferencia goniométrica y además β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



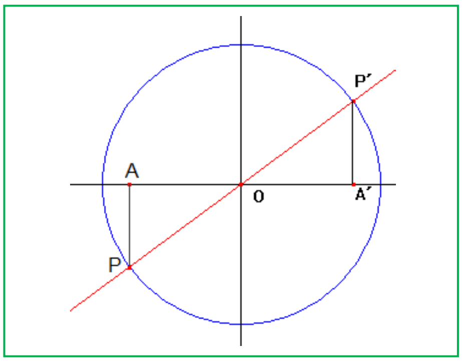
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{sen\,\beta}{-cos\,\beta} = -tan\,\beta$

ANGULOS DEL TERCER CUADRANTE

También en este caso los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A´* son iguales. Su hipotenusa es el radio de la circunferencia goniométrica y sus catetos los segmentos determinados por las coordenadas de los puntos *P* y *P´*. La construcción se realiza además de modo que β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



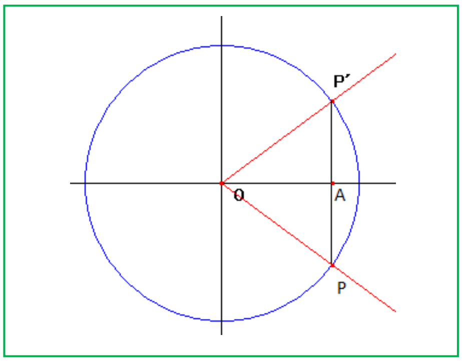
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-sen\,\beta}{-cos\,\beta} = tan\,\beta$

ANGULOS DEL CUARTO CUADRANTE

Por último, construimos los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A* iguales de modo análogo a lo descrito en los dos casos anteriores, observando que, en este caso *A* = *A´*.



$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = cos\,\beta \text{ en ambos casos}$$

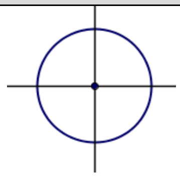
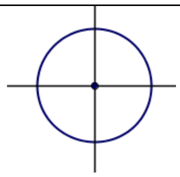
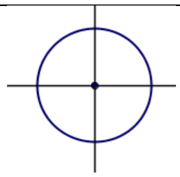
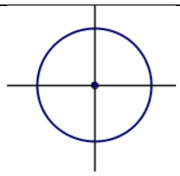
Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos:

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-sen\,\beta}{cos\,\beta} = -tan\,\beta$$

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Actividades propuestas

9. Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tangente*
165^o				
-230^o				
315^o				
$3\,625^o$				

10. Utiliza la calculadora y lo aprendido en este epígrafe para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360º cuyo seno es de 0.4.

11. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360º cuya tangente vale 2.

12. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360º y 720º cuyo coseno vale 0.5.

ANGULOS DETERMINADOS POR LOS SEMIEJES.

Los ángulos $0^o + 360^o n$; $90^o + 360^o n$; $180^o + 360^o n$; $270^o + 360^o n$ están determinados por semiejes de coordenadas y sus razones trigonométricas se miden a partir de puntos de los ejes. Estos puntos son, respectivamente $P_1\,(1, 0)$, $P_2\,(0, 1)$, $P_3\,(-1, 0)$ y $P_4\,(0, -1)$ con lo que se obtiene con facilidad:

$sen\,(0^o + 360^o n) = 0$; $cos\,(0^o + 360^o n) = 1$; $tan\,(0^o + 360^o n) = 0$.

$sen\,(90^o + 360^o n) = 1$; $cos\,(90^o + 360^o n) = 0$; $tan\,(90^o + 360^o n)$ no existe

$sen\,(180^o + 360^o n) = 0$; $cos\,(180^o + 360^o n) = -1$; $tan\,(180^o + 360^o n) = 0$

$sen\,(270^o + 360^o n) = -1$; $cos\,(270^o + 360^o n) = 0$; $tan\,(270^o + 360^o n)$ no existe

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

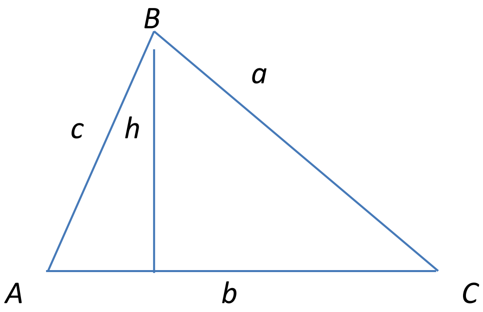
Las definiciones de seno, coseno y tangente que hemos aplicado en triángulos rectángulos no se pueden aplicar en triángulos no rectángulos. Para resolver triángulos no rectángulos se aplican dos teoremas muy importantes en trigonometría: el teorema de los senos y teorema de los cosenos.

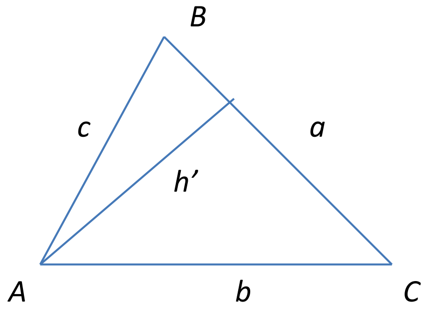
4.1. Teorema de los senos

El **teorema de los senos** afirma que en todo triángulo se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir,

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Consideremos el triángulo *ABC* y tracemos dos alturas cualesquiera *h* y *h´* que dividen al triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos.





Aplicando la definición de seno a los triángulos en los que interviene *h*:

$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{c} \longrightarrow h = c\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{a} \longrightarrow h = c\ sen\ \hat{C}$$

Por tanto:

$$c\,sen\ \hat{A} = a\,sen\ \hat{C} \longrightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Aplicando la definición de seno a los triángulos en los que interviene *h’*:

$$sen\,\hat{B} = \frac{h'}{c} \longrightarrow h' = c\,sen\,\hat{B}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h'}{b} \longrightarrow h' = b\,sen\,\hat{C}$$

Por tanto:

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

$$c\,sen\,\hat{B} = b\,sen\,\hat{C} \longrightarrow \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Entonces, se deduce que: $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$

Notas

Si el triángulo es obtusángulo, un razonamiento análogo nos lleva a las mismas fórmulas.

Podemos resolver fácilmente triángulos utilizando el teorema de los senos si conocemos:

a) dos ángulos (es decir, tres ángulos) y un lado
b) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

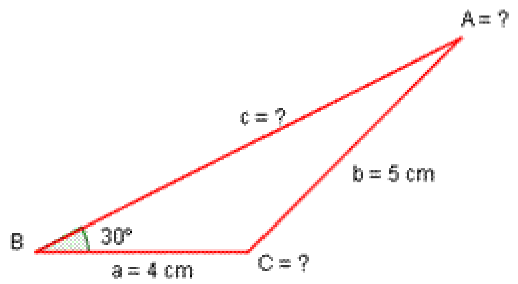
Actividades resueltas

- *Resolver el siguiente triángulo B = 30º, a = 4 cm y b = 5 cm.:*

Conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, *b*.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \longrightarrow \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{5}{sen\,30º} \longrightarrow$$

$$sen\hat{A} = \frac{4\cdot(1/2)}{5} = 0.4.$$



Por tanto: $\hat{A}$ = *arcsen* 0.4 = 23.58º

El ángulo $\hat{C}$ = 180º – (23.58º + 30º) = 126.42º.

Para calcular el lado *c* volvemos a aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \longrightarrow \frac{5}{sen\,30º} = \frac{c}{sen\,126'42º}$$

Entonces: $c = \dfrac{5\cdot sen\ 126{,}42º}{sen\,30º} = 8{,}1$ cm.

video

Trigonometría. Teorema del seno. Correspondiente a TRIGONOMETRIA de 4º de SECUNDARIA, resolveremos un triángulo, utilizando el TEOREMA DEL SENO. unicoos

https://www.youtube.com/watch?v=r2DZSxFLRK0

4.2. Teorema de los cosenos

El **teorema de los cosenos** afirma que en un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera se cumple que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ $\quad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

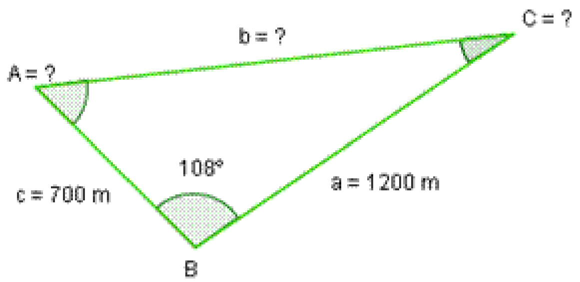
El próximo año estudiarás la demostración de este teorema. De momento solo veremos algunas de sus aplicaciones.

Notas

- Si te fijas, el teorema de los cosenos es una **generalización del teorema de Pitágoras**. Es decir, cuando el triángulo es rectángulo, el teorema de los cosenos y el teorema de Pitágoras es lo mismo.
- Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:
  a) los tres lados,
  b) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
  c) dos lados y el ángulo que forman.

Actividades resueltas

- *Resolver el siguiente triángulo del que conocemos B = 108 º, c = 700 m y a = 1 200 m:*



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ luego $b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108} \rightarrow$ b = 1 564.97 m.

Con *a, b* y *c* conocidos, calculamos el ángulo *C*:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \longrightarrow \widehat{\cos C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\cdot a\cdot b} = \frac{700^2 - 1\,200^2 - 1\,564.97^2}{-2\cdot 1\,200\cdot 1\,564.97} = 0.9 \longrightarrow$ $\hat{C}$ = 25.18º.

El ángulo $\hat{C}$ también se podría calcular utilizando el teorema de los senos.

Para calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$ = 180º – (108º + 25.18º) = 46.82º.

Actividades propuestas

13. Calcula la longitud del lado *a* de un triángulo, sabiendo que *C* = 25, *b* = 7 cm y *c* = 4 cm.

14. Calcula los ángulos del triángulo de lados: *a* = 6, *b* = 8 y *c* = 5.

4.3. Resolución de triángulos cualesquiera

Las herramientas básicas para resolver triángulos cualesquiera son los teoremas de los senos y los cosenos vistos anteriormente. El próximo curso se ampliará brevemente la resolución de estos triángulos, estudiando casos en los que no existirá solución o casos en los que haya dos soluciones.

También se plantearán problemas de cálculo de distancias entre puntos inaccesibles.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿NUESTROS SENTIDOS NOS ENGAÑAN?

La foto muestra un tramo de carretera hacia el horizonte. Todas las líneas son rectas, la fotografía no engaña, pero nuestros sentidos, sí. Según nuestra percepción, estas líneas se cortan en el punto del horizonte, aunque nosotros, cuando estamos en esa situación, sabemos que no es así. Entonces, ¿por qué lo vemos así? Por dos razones: porque la luz viaja en línea recta y porque nuestra percepción visual se basa en los ángulos, lo que hace que la anchura de la carretera disminuya con la distancia.

Pero ahora, que conoces las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo, sabrás razonar si los objetos disminuyen su tamaño de forma inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentran.

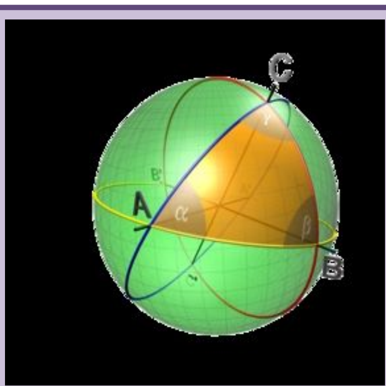
¿Sabías que…?

El teorema de los senos se utilizó en el siglo XIX para medir de forma precisa el meridiano de París y así poder definir el metro.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

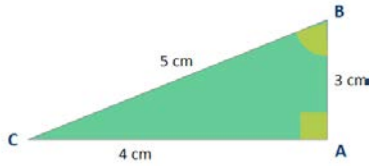
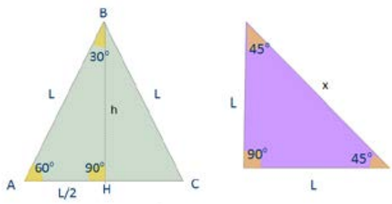
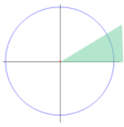
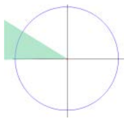
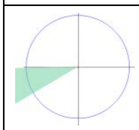
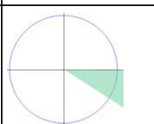
La trigonometría esférica estudia los triángulos que se forman sobre una superficie esférica

- **En la trigonometría esférica la distancia más corta entre dos puntos no es una recta, sino un arco.**
- **Los ángulos de un triángulo esférico suman más de 180º**
- **Es la base de la navegación y la astronomía. Curioso, ¿no?**



Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

RESUMEN

NOCIÓN	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Radián	Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad. Nº de radianes de un ángulo completo = 2π rad	90 º son $\pi/2$ rad 1 radian = 57.216 º = 57 º 12' 58 ''
Razones trigonométricas de un ángulo agudo	$sen\,\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$ $cos\,\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$ $tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{b}{c}$	 $sen\,C = \frac{3}{5}$, $cos\,C = \frac{4}{5}$
Relaciones fundamentales	$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \ \alpha)^2 = 1$ $tan\ \ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \ \alpha}$	$(sen\,30^o)^2 + (cos\,30^o)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
Otras razones trigonométricas	$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$ $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$ $cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$	*cosec* 90º = 1 sec 90º No existe cotan 45º = 1
Razones trigonométricas de 30º,45ºy 60º	| *seno* | *coseno* | *tangente* 30º | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 45 º | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 60º | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$	
Reducción al primer cuadrante	Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α pueden expresarse en función de las de un ángulo agudo β 2º CUADRANTE: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$ 3er CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$ 4º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\alpha = \cos\beta$	  $sen\,135^o = sen\,45^o$   $sen\,200^o = -sen\,20^o$ $cos(-60^o) = cos\,60^o$
Teorema de los senos	$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$	
Teorema de los cosenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,cosA;\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\,cosB;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cosC;$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes:

   a) 30º b) 60º c) 100º d) 330º

2. ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes:

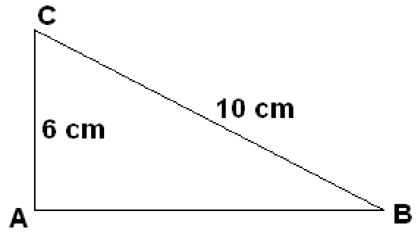
   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de :

   a) 28º b) 62º

¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

5. Halla el seno y el coseno de los ángulos *B* y *C* del dibujo. ¿Qué relación encuentras?



6. En un triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en *A*, si *tan B* = 1.2 y *b* = 3 cm, ¿cuánto mide *c*?

7. Trabajando con ángulos agudos, ¿es cierto que a mayor ángulo le corresponde mayor seno? ¿Y para el coseno?

8. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de 9º y 81º. ¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

9. Si *a* es un ángulo agudo y *cos a* = 0.1, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

10. Comprobar las relaciones trigonométricas fundamentales con 30º, 45º y 60º sin utilizar decimales ni calculadora.

11. Si *a* es un ángulo agudo y *tan a* = 0.4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

12. Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro sabiendo que α es un ángulo agudo.

$sen\ \alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$
	0.7	
1/3		
		2

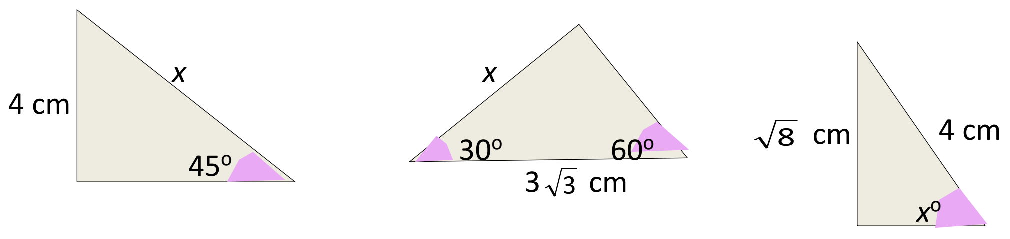
13. ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 12, 13 y 5 cm? En caso afirmativo determina el seno, coseno y tangente de los dos ángulos agudos.

14. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Qué amplitud tienen?

15. Si α es un ángulo agudo tal que $sen\ \alpha = \dfrac{1}{3}$, calcula:

i) Las restantes razones trigonométricas de α
ii) Las razones trigonométricas de 180° – α
iii) Las razones trigonométricas de 180° + α
iv) Las razones trigonométricas de 360° – α

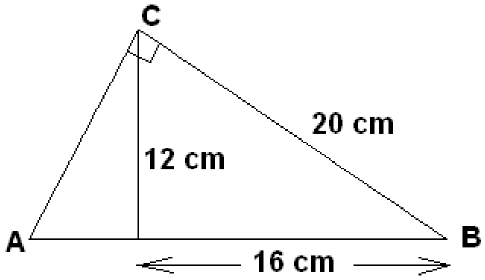
16. Sin utilizar calculadora, calcula el valor de *x* en los siguientes triángulos rectángulos:



17. Beatriz sujeta una cometa con una cuerda de 42 m. ¿A qué altura se encuentra ésta en el momento en que el cable tenso forma un ángulo de 52° 17' con el suelo?

Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

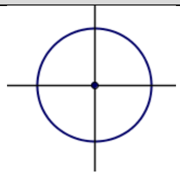
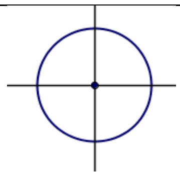
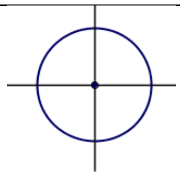
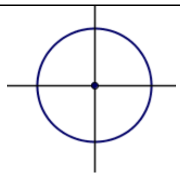
18. Calcula el seno, coseno y tangente del ángulo *A* en el siguiente dibujo:



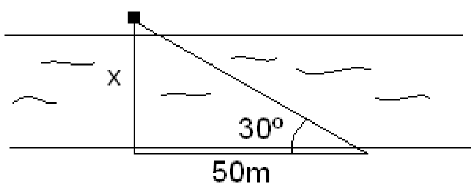
19. Si *a* es un ángulo del segundo cuadrante y *cos a* = –0.05, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

20. Si *a* es un ángulo obtuso y *sen a* = 0.4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

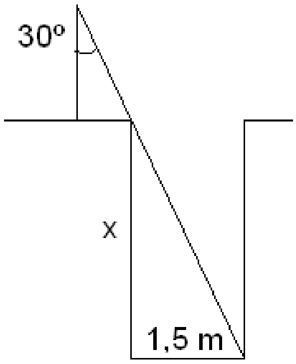
21. Dibuja en tu cuaderno la tabla siguiente y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente de los siguientes ángulos. Si puedes, calcúlalos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tangente*	*secante*	*cosecante*	*cotangente*
–225°							
150°							
–60°							
3645°							

22. Calcula la anchura del río representado en la figura siguiente:



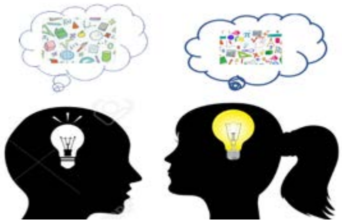
23. Averigua la altura de la torre de una iglesia si a una distancia de 80 m, y medido con un teodolito de altura 1.60 m, el ángulo de elevación del pararrayos que está en lo alto de la torre es de 23º.



24. Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm.

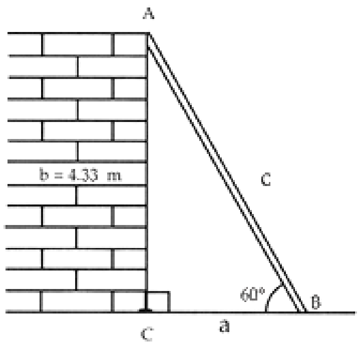
25. Calcula la profundidad de un pozo de 1.5 m de diámetro sabiendo el ángulo indicado en la figura de la derecha.

26. Cuál es la altura de una montaña cuya cima, si nos situamos a una distancia de 3 000 m del pie de su vertical y medimos con un teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49°.



27. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 25 m de altura proyecta una sombra de 10 m de longitud?

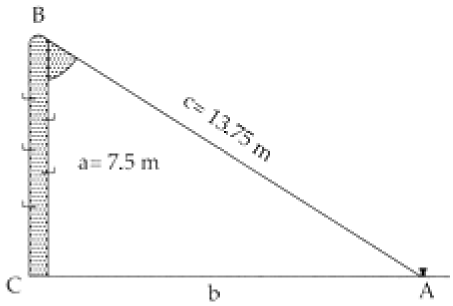
28. Halla la altura y el área de un triángulo isósceles cuya base mide 20 cm y cuyo ángulo desigual vale 26°.



29. Halla el área de un dodecágono regular de lado 16 cm.

30. Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60 º con respecto al suelo

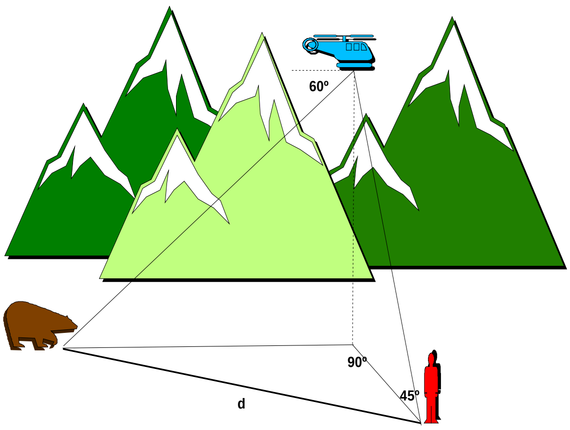
31. El hilo de una cometa totalmente extendida mide 150 m, y forma un ángulo con el suelo de 40° mientras lo sujeto a 1.5 m del suelo. ¿A qué altura del suelo está la cometa?



32. Para medir la altura de un campanario a cuya base no podemos acceder, tendemos una cuerda de 30 m de largo desde lo alto de la torre hasta tensarla en el suelo, formando con éste un ángulo de 60°. ¿Cuál es la altura del campanario?

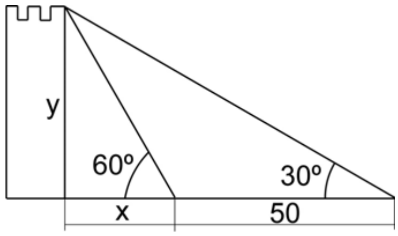
33. Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m

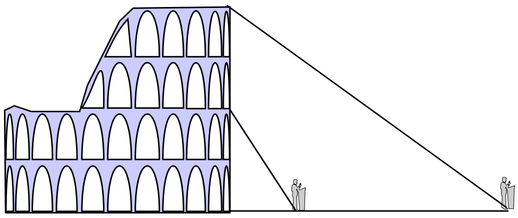
34. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45º y 60º. Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.



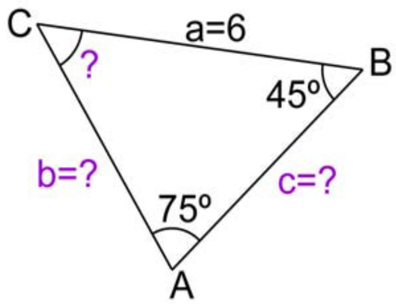
35. Un biólogo se encuentra en el puerto de Somiedo haciendo un seguimiento de los osos pardos. Cuenta con la ayuda de un cámara y un piloto que vuelan en un helicóptero, manteniéndose a una altura constante de $\mathbf{40}\sqrt{3}$ m. En el momento que describe la figura, el cámara ve desde el helicóptero al oso con un ángulo de depresión (ángulo que forma su visual con la horizontal marcado en el dibujo) de **60**°. El biólogo dirige una visual al helicóptero que forma con el suelo un ángulo de **45**°. Calcular la distancia **d** entre el biólogo y el oso.

36. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60°. Calcula la altura de la torre.





37. Con un teodolito de 1 metro de altura, dos personas pretenden medir la altura del *Coliseo de Roma.* Una de ellas se acerca al anfiteatro, separándose **40 m**. de la otra. Esta última obtiene que el ángulo de elevación del punto más alto es de **30**°**.** La otra no divisa el Coliseo completo por lo que mide el ángulo de elevación al punto que marca la base del tercer piso, obteniendo **60**° como resultado**.** Calcular la altura del Coliseo y la distancia de los dos observadores a la base del mismo.

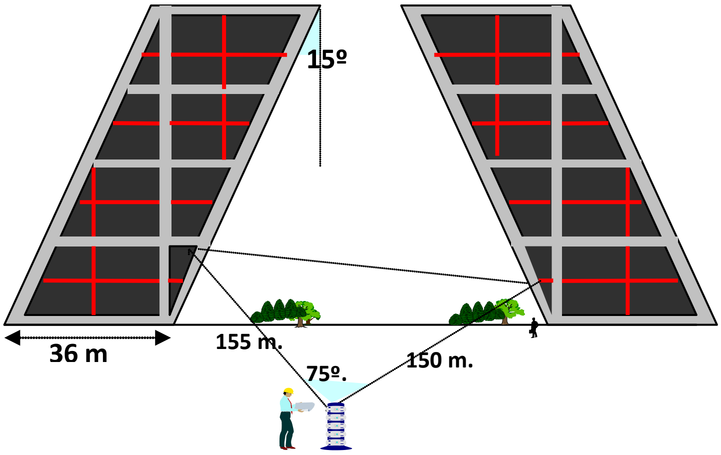


38. Resuelve el triángulo: $a = 6$; $B = 45°$; $A = 75°$

39. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?

40. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30°. Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60°. ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?

41. Las conocidas *torres Kio* de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.
    a. Con los datos que aparecen en la figura, determina su altura.
    b. Desde dos oficinas situadas en torres distintas se han extendido dos cables hasta un mismo punto que miden 155 y 150 metros y que forman un ángulo de 75° en su punto de encuentro. ¿Qué distancia en línea recta hay entre ambas?



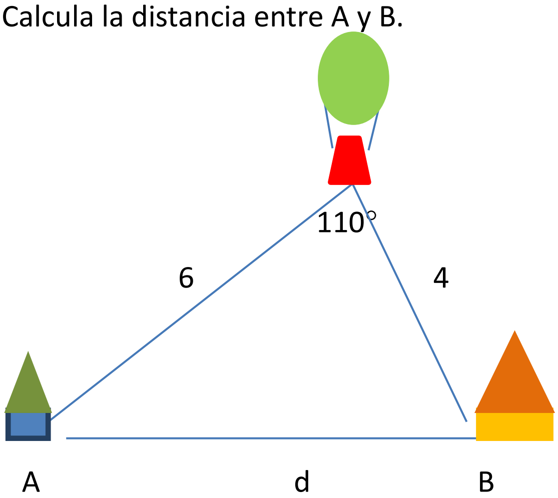
42. Tres pueblos están unidos por carreteras: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km y el ángulo formado por *AB* y *BC* es de 120°. Cuánto distan *A* y *C*.

43. Van a construir un túnel del punto *A* al punto *B*. Se toma como referencia una antena de telefonía (*C*) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia *AC* = 250 m. Sabiendo que el ángulo en *A* es de 53° y el ángulo *B* es de 45° calcula cuál será la longitud del túnel.

44. Calcula el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.

45. El punto más alto de un repetidor de televisión, situado en la cima de una montaña, se ve desde un punto del suelo *P* bajo un ángulo de 67°. Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70° y desde ese mismo punto vemos la cima de la montaña bajo un ángulo de 66°. Calcular la altura del repetidor.

46. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50°. Otro pueblo, B situado al lado y en línea recta se observa desde un ángulo de 60°. El globo se encuentra a 6 km del pueblo A y a 4 km de B. Calcula la distancia entre A y B.

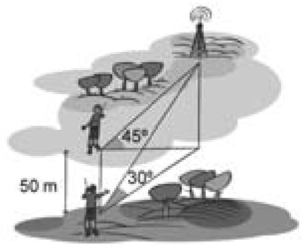


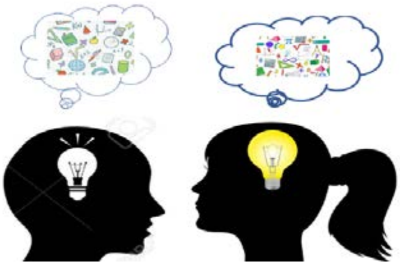
47. Utiliza la calculadora y resuelve los triángulos:
    a) a = 20 m; *B* = 45°; *C* = 65°
    b) *c* = 6 m, *A* = 105°, *B* = 35°
    c) *b* = 40 m; *c* = 30 m, *A* = 60°.

48. Dado el triángulo de vértices *A*, *B*, *C*, y sabiendo que *A* = 60°, *B* = 45° y que *b* = 20 m. Resolverlo y calcular su área.

49. Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 m. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37°.

50. Un triángulo isósceles con base 30 m tiene dos ángulos iguales de 80°. ¿Cuánto miden los otros dos lados?
51. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Álvaro y Bartolo hay 25 m y entre Bartolo y César, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de César es de 20°. Calcula la distancia entre Álvaro y César.
52. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.





53. Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

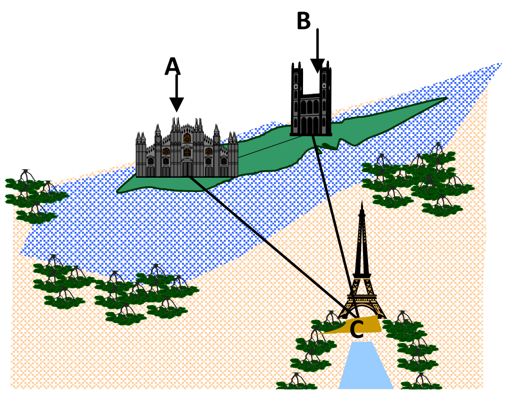
54. Escribe cuatro ángulos con el mismo seno que 135º.

55. Encuentra dos ángulos que tengan la tangente opuesta a la de 340º.

56. Busca dos ángulos con el mismo seno que 36º y coseno opuesto.

57. ¿Qué ángulos negativos, comprendidos entre –360º y 0º tienen el mismo seno que 60º?

58. En París y en *l' Île de la Cité* se encuentran *Nôtre Dame* y *la Sainte Chapelle* a una distancia de **200** metros. Imaginemos que un observador situado en *A* ve *B* y *C* con un ángulo de **56**° y que otro, situado en *B* ve *A* y *C* con un ángulo de **117**°**.** Calcular las distancias entre la torre *Eiffel* (*C*) y *Nôtre Dame* (*B*), asi como entre la torre *Eiffel* (*C)* y la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOEVALUACIÓN

1. La expresión en radianes de 65º es:

   a) 1.134 rad b) 1.134π rad c) 2.268 rad d) 2.268π rad

2. El valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25º y con uno de los catetos de 3 cm es:

   a) 3.3 cm b) 7.1 cm c) 6.4 cm d) 2.2 cm

3. Si α es un ángulo agudo y $sen\,\alpha$ = 0.8, la tangente de α es:

   a) 0.6 b) –0.6 c) –1.33 d) 1.33

4. Selecciona la opción correcta:

a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $sen\,\hat{A} = 2$ y $\cos\hat{A} = 3$

b) La secante de un ángulo siempre está comprendida entre –1 y 1

c) En el segundo y cuarto cuadrantes la tangente y cotangente de un ángulo tienen signo negativo

d) El seno de un ángulo es siempre menor que su tangente.

5. Si el seno de un ángulo del segundo cuadrante es $\frac{4}{5}$, entonces su tangente y secante son respectivamente:

   a) $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ y $\frac{-5}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$

6. La altura de un edificio es de 50 m, la medida de su sombra cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 30º con la horizontal es de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. El ángulo de -420º es un ángulo que se sitúa en

a) El primer cuadrante b) El segundo cuadrante c) El tercer cuadrante d) El cuarto cuadrante

8. Si α es un ángulo agudo y β es su suplementario, se cumple:

   a) $sen\,\alpha = -sen\,\beta$ y $\cos\alpha = \cos\beta$ b) $sen\,\alpha = sen\,\beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$

   c) $sen\,\alpha = sen\,\beta$ y $\cos\alpha = \cos\beta$ d) $sen\,\alpha = -sen\,\beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$

9. Para calcular la altura de una montaña se mide con un teodolito desde *A* el ángulo que forma la visual a la cima con la horizontal, que es $\hat{A}$ = 30 º. Avanzando 200 m, se vuelve a medir y el ángulo resulta ser $\hat{B}$ = 35.2º. La altura de la montaña es de:

   a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

10. Si el radio de un pentágono regular es 8 cm, su área mide

    a) 305.86 cm^2 b) 340.10 cm^2 c) 275.97 cm^2 d) 152.17 cm^2