Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB ESO
Capítulo 2:
Potencias y raíces. Logaritmos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042256

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:22:31.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

BOCM: – Logaritmos: definición y propiedades. Aplicación a contextos sencillos como la escala de pH o la escala Ritcher, valorando el concepto de orden de magnitud.

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

1.1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

1.2. POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. EJEMPLOS

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3.1. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. DEFINICIÓN

3.2. RADICALES. DEFINICION. EJEMPLOS

3.3. PROPIEDADES DE LOS RADICALES. EJEMPLOS

4.OPERACIONES CON RADICALES. RACIONALIZACION

4.1. OPERACIONES. DEFINICIÓN. EJEMPLOS

4.2. RACIONALIZACION. EJEMPLOS

4.3. EJEMPLOS PARA RESOLVER

5. NOTACION CIENTÍFICA

5.1. DEFINICIÓN. EJEMPLOS

5.2. OPERACIONES CON NOTACION CIENTÍFICA

6. LOGARITMOS

6.1. DEFINICIÓN

6.2. PROPIEDADES

En este capítulo vamos a estudiar las potencias de exponente natural y entero con sus propiedades. Aprenderemos a operar con las potencias aplicando sus propiedades.

Estudiaremos las potencias de exponente racional, que son los radicales, sus propiedades y así como las operaciones que podemos realizar con ellos. Nos detendremos en la racionalización, que es una operación muy utilizada en matemáticas que la necesitaremos para operar con radicales.

Estudiaremos la notación científica, las propiedades para poder operar con este tipo de notación y las ventajas de operar con esta notación.

Por último estudiaremos los logaritmos y sus propiedades, que facilitan las operaciones pues transforman, por ejemplo, los productos en sumas. Cuando no había calculadoras ni ordenadores y querían multiplicar números de más de diez cifras, ¿cómo hacían?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

1.1. Potencias de exponente natural

Recuerda que:

Dado *a,* un número cualquiera, y *n,* un número natural, la potencia a^n es el producto del número *a* por sí mismo *n* veces

En forma desarrollada, la potencia de base *a* y exponente *n* se escribe: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* veces, siendo *a* cualquier número y *n* un número natural

Ejemplo:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5 veces

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 veces.

La base *a* puede ser positiva o negativa. Cuando la base es positiva el resultado es siempre positivo. Cuando la base es negativa, si el exponente es par el resultado es positivo, pero si es impar el resultado es negativo.

Si calculamos los ejemplos de arriba tendremos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplico un número negativo un número impar de veces, por lo que el resultado es negativo. Cada vez que multiplicamos dos veces dos números negativos nos da uno positivo, como tenemos 5, quedaría un signo menos sin multiplicar, luego $(+) \cdot (-) = (-)$.

Recuerda que:

Base positiva: resultado siempre positivo.

Base negativa y exponente par: resultado positivo.

Base negativa y exponente impar: resultado negativo

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes potencias:*

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes potencias:

a) -3^3 b) $(2 + 1)^3$ c) $-(-2x)^2$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

1.2. Potencias de exponente negativo

Definición de potencia de exponente negativo $-n$ y base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$a^{-n} = 1/a^n$

Esto se justifica ya que se desea que se sigan verificando las propiedades de las potencias:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Ejemplo:

- 5^{-2} es lo mismo que $(1/5)^2$.

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. EJEMPLOS

Las propiedades de las potencias son:

a) El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ejemplo:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n . b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

c) La potencia de una potencia es igual a la potencia cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) El cociente de potencias de distinta base y el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el cociente de las bases y cuyo exponente es el mismo.

$$a^n/b^n = (a/b)^n$$

Ejemplo:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Todas estas propiedades de las potencias que se han citado para los exponentes naturales siguen siendo válidas para otros exponentes: negativos, fraccionarios…

Actividades resueltas

- *Calcula las siguientes operaciones con potencias:*

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propuestas

2. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3.1. Potencias de exponente racional. Definición.

Se define la potencia de exponente fraccionario y base *a* como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Ejemplo:

- *Exponentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Las propiedades citadas para las potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios

Ejemplo:

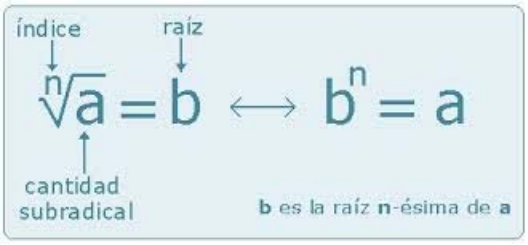
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Textos Marea Verde

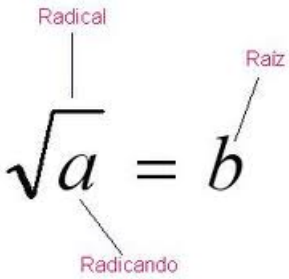
3.2. Radicales. Definición. Ejemplos

Se define **raíz *n*-sima** de un número *a*, como el número *b* que verifica la igualdad $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$



Siendo: *n* es el **índice**, *a* es la cantidad sub-radical o **radicando** y *b* es la raíz ***n*-sima** de *a*



Importante: *n* siempre es positivo. No existe la raíz –5.

La radicación de índice *n* es la operación inversa de la potenciación de exponente *n*.

Por la definición de raíz *n*-ésima de un número *a* se verifica que si *b* es raíz, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \boldsymbol{b^n = a}$$

Observa que se puede definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ya que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisface la misma propiedad que *b* deben ser considerados como el mismo número.

Ejemplos:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3. Propiedades de los radicales. Ejemplos

Las propiedades de las potencias enunciadas anteriormente para el caso de exponentes fraccionarios, también se pueden aplicar a las raíces:

a) Si multiplicamos el índice de una raíz *n* por un número *p*, y a la vez elevamos el radicando a ese número *p* el valor de la raíz no varía.

Se verifica $\forall p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n.p]{a^p} = a^{\frac{p}{p.n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$. Se verifica puesto que según acabamos de ver: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3.2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

Demostración:

Según las propiedades de las potencias de exponentes enteros se verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz del índice común.

Suponemos que $b \neq 0$ para que tenga sentido el cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Demostración:

Si escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Para elevar un radical a una potencia basta con elevar el radicando a dicha potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Esta propiedad la podemos demostrar como sigue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$m > 0 \; y \; m \in Z$

Textos Marea Verde

Demostración:

Se verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15}\cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15}\cdot y^{30}} = (x^{15}\cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}}\cdot(y^{30})^{\frac{1}{15}} = x\cdot y^2$

Actividades resueltas

- *Reduce a índice común* (6) *los siguientes radicales:* $\sqrt[3]{536}$; $\sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3\cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3\cdot 67)^2};$$

$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2\cdot 5\cdot 7} = \sqrt[6]{2^3\cdot 5^3\cdot 7^3}.$$

- *Saca factores fuera de la raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[2]{2^2\cdot 3^2\cdot 3} = 2\cdot 3\cdot\sqrt[2]{3} = 6\cdot\sqrt[2]{3}$$

- *Escribe los siguientes radicales como una sola raíz:*

$$\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}.\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}.3} = \sqrt[6]{\frac{3^3.2^4}{2^3.3}} = \sqrt[6]{2.3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propuestas

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6.b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Halla:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

Textos Marea Verde

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION

4.1. Operaciones. Definición. Ejemplos

Suma y resta de radicales

RECUERDA:

Para sumar y restar radicales estos deben de ser idénticos:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Para sumar estos radicales hay que sumar sus expresiones aproximadas.

Sin embargo la expresión:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si se puede sumar y restar puesto que sus radicales son idénticos

PARA PODER SUMAR O RESTAR RADICALES ES NECESARIO QUE TENGAN EL MISMO ÍNDICE Y EL MISMO RADICANDO.

SOLO CUANDO ESTO SUCEDE PODEMOS SUMAR O RESTAR LOS COEFICIENTES O PARTE NUMERICA DEJANDO EL MISMO RADICAL

Ejemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2.3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2.5^4}.$

Por las propiedades de los radicales podemos sacar factores del radical dejando que todos los radicales sean idénticos:

$$\sqrt{2\cdot3^2}+\sqrt{2^2\cdot2}+\sqrt{2\cdot5^2\cdot5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producto de radicales

Para multiplicar radicales debemos convertirlos en radicales de igual índice y multiplicar los radicandos:

1.- Calculamos el m.c.m.de los índices

2.- Dividimos el m.c.m entre cada índice y lo multiplicamos por el exponente del radicando y simplificamos

Ejemplo:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot7^5}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

División de radicales

Para dividir radicales debemos conseguir que tengan igual índice, como en el caso anterior y después dividir los radicales.

Ejemplo:

- $\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3.4^2}{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3.(2^2)^2}{2^3.3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3.2^4}{2^3.3}} = \sqrt[6]{3^2.2^1} = \sqrt[6]{18}$

Raíz de una raíz

Es la raíz cuyo índice es el producto de los índices (según se demostró en la propiedad e), y después simplificamos extrayendo factores fuera el radical si se puede.

Ejemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6 \cdot x^1 \cdot y^5} = x \cdot \sqrt[6]{x \cdot y^5}$

RECUERDA:

Para extraer factores del radical se debe cumplir que el exponente del radicando sea mayor que el índice de la raíz.

2 opciones:

- ✓ Se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz, el cociente indica el número de factores que extraigo y el resto los que se quedan dentro.
- ✓ Se descomponen los factores del radicando elevándolos al mismo índice de la raíz, cada exponente que coincida con el índice, saldrá el factor y los que sobren se quedan dentro

Ejemplo:

- *Extrae factores del radical:*

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt[2]{\frac{2^2 7 \cdot x^5}{3 \cdot 5^2 y^3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y}} =$$

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2}$
   $= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
   $= \sqrt{4} = 2$

Los factores que podríamos extraer serían el 2, *x*, *y* y el 5, de la siguiente manera:

Dividimos el exponente de la *x*, 5, entre 2, ya que el índice de la raíz es 2, y tenemos de cociente 2 y de resto 1, por lo que saldrán dos *x* y queda 1 dentro.

De igual forma para la *y*, dividimos 3 entre 2 y obtenemos 1 de cociente y uno de resto, por lo que sale 1 *y* y se queda otra dentro.

Veamos: $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^{2\cdot} \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y^1}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propuestas

6. Escribe bajo un solo radical y simplifica: $\sqrt[2]{2.\sqrt[2]{3.\sqrt[2]{4.\sqrt[2]{5.\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula y simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3.y^3}.\sqrt[3]{x^4.y^5}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$

8. Realiza la siguiente operación: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula y simplifica: $\sqrt[2]{\dfrac{3}{x}}.\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}}.\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$

4.2. Racionalización. Ejemplos

Racionalizar una fracción algebraica consiste en encontrar otra equivalente que no tenga radicales en el denominador.

Para ello, hay que multiplicar numerador y denominador por la expresión adecuada.

Cuando en la fracción solo hay monomios, se multiplica y divide la fracción por un mismo número para conseguir completar en el denominador una potencia del mismo exponente que el índice de la raíz.

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{\dfrac{6}{x^3}}$.

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt[4]{x}$ para obtener en el denominador una cuarta potencia y quitar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cuando en la fracción aparecen en el denominador binomios con raíces cuadradas, se multiplica y se divide por un factor que proporcione una diferencia de cuadrados, este factor es el factor conjugado del denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, su conjugado es: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Otro ejemplo: $(\sqrt{a}+b)$ su conjugado es: $(\sqrt{a}-b)$

Ejemplo:

- $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. *Multiplicamos por el conjugado del denominador que en este caso es:* $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Actividades propuestas

10. Racionaliza la expresión: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACION CIENTÍFICA

5.1. Definición. Ejemplos

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.

La ventaja que tiene sobre la notación decimal es que las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente.

Un número puesto en notación científica consta de:

- ✓ Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- ✓ El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- ✓ Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a,bcd...\cdot 10^n$$

siendo: a su parte entera (solo una cifra)

b c d… su parte decimal

10^n La potencia entera de base 10

Si *n* es positivo, el número *N* es "grande"

Y si *n* es negativo, entonces *N* es "pequeño"

Ejemplos:

- $2.48 \cdot 10^{14}$ (= 248 000 000 000 000): Número grande.
- $7.561 \cdot 10^{-18}$ (= 0.00000000000000007561): Número pequeño.

5.2. Operaciones con notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y, así poder sacar factor común.

Ejemplos:

a) $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = (5.24 \cdot 6.3) \cdot 10^{6+8} = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.3012 \cdot 10^{15}$

b) $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$

RECUERDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

c) $5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5.83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9 =$

$= 6\,862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$

RECUERDA:

- ✓ Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.
- ✓ Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.
- ✓ Por último si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

Actividades propuestas

13. Calcula:

a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3.10^{-5} + 7.10^{-4}}{10^6 - 5.10^5}$ b) $\frac{7.35.10^4}{5.10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$

15. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

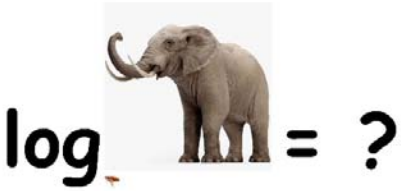
6. LOGARITMOS

6.1. Definición

La palabra **logaritmo** viene del griego, une los sustantivos logos (relación) y aritmos (número), refiriendo la relación entre dos números que se comparan. Uno de ellos hace de base o referencia, y el otro es el número que se somete a comparación.

¿Cuántas veces es más grande un elefante que una pulga?

Si fuéramos pulgas y avistáramos un elefante, ¿cuántas veces mayor que nosotros pensaríamos que es? ¿De qué magnitud es su masa respecto de una base numérica fijada? ¿Es del orden del picogramo (un picógramo es 10^{-12} gramos), del orden del nanogramo (son 10^{-9} gramos), del orden del kilogramo, del orden del miriagramo?



Puedes entrar en la página [The Scale of the Universe 2 (htwins.net)] y analizar diferentes órdenes de magnitud. ¿Cuánto mide una molécula de agua? ($2.8x10^{-10}$ m) ¿Cuánto mide el diámetro de la Luna? ($3.5x10^{6}$ m) ¿Y un cromosoma? ($4x10^{-6}$m)

El **logaritmo** de un número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva y distinta de uno, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Sobre los Logaritmos. ¿Para qué sirven LOS LOGARITMOS? ¿¡Por qué nos los explican en la escuela!?

https://www.youtube.com/watch?v=W_BZb_va6jY

Ejemplo:

Así, teniendo en cuenta que nosotros pensamos en base 10 y que el peso de una elefanta asiática hembra adulta es de 2 700 kilogramos, podríamos afirmar que el orden de su peso es aproximadamente 3.43, es decir que, $\log_{10} 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700$. Como quiera que, normalmente, trabajamos en base 10, por comodidad, nos permitimos el lujo de omitir este dato y escribimos:

$$\log 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700.$$

Ejemplo:

Mientras que si trabajamos en cualquier otra base numérica lo especificamos. Siguiendo con el mismo ejemplo, ahora en base 2, el orden de la misma elefanta es

$$\log_2 2\,700 = 11.3 \Leftrightarrow 2^{11.3} = 2\,700.$$

Si estamos preparando una base de datos para grabar las masas de una manada de elefantes en estudio, en el lugar del peso, habremos de guardar 11.3 dígitos, redondeando al alza para no perder información, habremos de reservar 12 posiciones de memoria.

Los logaritmos más utilizados son los **logaritmos decimales** o logaritmos de base 10 y los **logaritmos neperianos** (llamados así en honor a **Neper**) o logaritmos en base *e* (*e* es un número irracional cuyas primeras cifras son: *e* = 2.71828182…).

Ambos tienen una notación especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad\qquad \log_e m = \ln m$$

Pasemos a calcular algunos logaritmos:

Ejemplos:

- Si queremos conocer el logaritmo en base dos de dieciséis, $\log_2 16$, tendremos que pensar en qué exponente convierte un dos en dieciséis. Dado que $2^4 = 16$, tenemos que $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$. Formulado de otra forma, pensaremos en a qué número tengo que elevar la base, 2 en este caso, para obtener el valor en estudio, 16.
- ¿A qué número tengo que elevar tres, para obtener veintisiete?

$$\log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27.$$

Actividades resueltas:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 32 = 2^5$
- $\log_{1\,000} = 3 \Leftrightarrow 1\,000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** de la definición se deduce que:

✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

Demostración:

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a 1 = 0$

Ejemplos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

✓ El logaritmo de la base es 1.

Demostración:

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a a = 1$

Ejemplos:

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $\log_3 3^5 = 5$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un número irracional

Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un número negativo ni cero.

- $log_2 (-4)$ No existe
- $log_2 0$ No existe.
- $log\ 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\ 0.1 = -1 \Leftrightarrow 0.1 = 10^{-1}$.
- $log\ \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\ 2 = 0.301030\ldots$

Actividades resueltas

- $log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Actividades propuestas

1. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$log_2 1 = 0$	$log_5 5 = 1$	$log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$log_3 81 = 4$	$log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

2. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

3. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

4. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

5. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

6. Utiliza la calculadora para obtener a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

6.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se heredan de las propiedades de las potencias. Ya hemos visto que:

- Si cualquier número elevado a cero es uno, entonces el logaritmo en cualquier base de uno es cero. $log_3 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$.
- Si cualquier número elevado a uno es él mismo, entonces el logaritmo de cualquier número, tomado él mismo como base es uno. $log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$.

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
- ✓ El logaritmo de la base es 1.
- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos.

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y$$

Si cuando multiplicamos números con una misma base elevada a distintos exponentes los sumamos, entonces la suma de logaritmos de dos factores será el logaritmo del producto. Si $log_a b = x$, $log_a c = y$. Entonces $log_a b + log_a c = log_a b \cdot c \Leftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = log_a x$ y $B = log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos:

$$x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow log_a x \cdot y = A + B = log_a x + log_a y.$$

Ejemplo:

- $log_a(2 \cdot 7) = log_a 2 + log_a 7$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$log_a (x/y) = log_a x - log_a y$$

Si cuando Dividimos números con una misma base elevada a distintos exponentes los restamos, entonces la resta de logaritmos de dos factores será el logaritmo del cociente. Si $log_a b = x$, $log_a c = y$. Entonces $log_a b - log_a c = log_a \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos.

Demostración:

Llamamos $A = log_a x$ y $B = log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos:

$$x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y.$$

Ejemplo:

- $\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_a x^y = y.\log_a x$$

Si cuando elevamos una potencia a un exponente, multiplicamos los exponentes, entonces, el logaritmo de una potencia, será el producto del exponente por el logaritmo del número.

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$$

Ejemplo:

- $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

Si cuando hacemos la raíz de orden *n* de un número lo podemos expresar como el número elevado a uno partido del orden de la raíz, entonces el logaritmo de la raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el orden.

Demostración:

Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base *a* de un número *x* es igual al cociente de dividir el logaritmo en base *b* de *x* por el logaritmo en base *b* de *a*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ***"fórmula del cambio de base"***. Antaño, cuando no existían las calculadoras, se calculaban los logaritmos utilizando los valores recogidos en las tablas logarítmicas. Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

Ejemplo:

- $log_2 1\,1 = \frac{log\,11}{log\,2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162$

Actividades resueltas

- *Desarrollar las expresiones que se indican:*

$$\log_5\left[\frac{a^3\cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3\cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5\cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5\cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5\cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- *Escribe con un único logaritmo:*

$$3log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2\sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2\sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2\sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3\cdot\sqrt{x}\cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2}.2^4) = \log_2\left(\frac{a^3\cdot\sqrt{x}\cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2}\cdot 2^4}\right)$$

- *Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log2 =* 0.301030*:*

a) $4 \Rightarrow \log 4 = \log 2^2 = 2\cdot\log 2 = 2\cdot 0.301030 = 0.602060$

b) $1\,024 \Rightarrow \log 1024 = \log 2^{10} = 10\cdot\log 2 = 10\cdot 0.301030 = 3.01030$

Actividades propuestas

7. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3\cdot b^2}{c^4.d}\right)$

8. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

9. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$$

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$x = 26^{378} \Leftrightarrow log(x) = 378*log(26)$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534}\cdot 10^{0.86} = 10^{534}\cdot 7.24.$

Solución:

$$\mathbf{26^{378} = 7.24\cdot 10^{534}.}$$

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora es capaz de calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con $\mathbf{50^{200}}$ y comprueba que te sale $\mathbf{6.3\cdot 10^{339}}$.

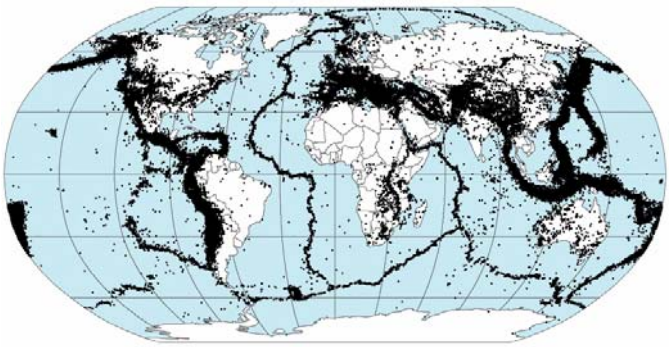
Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Escala sismológica de Richter

La escala sismológica de *Richter* es una escala logarítmica que asigna un número para cuantificar la energía que libera un terremoto. Debe su nombre a *Charles Francis Richter*.

La escala de magnitudes Richter está basada en una escala logarítmica decimal (de base 10). Por cada incremento de una unidad en la escala Richter la amplitud de la onda del terremoto se incrementa 10 veces (se multiplica por 10).

Los valores asignados aumentan de forma logarítmica, no de forma lineal. Por lo que un terremoto de intensidad 4 no libera el doble de energía que uno de intensidad 2, sino 100 veces más. Llega hasta los 12.



Localización de epicentros de terremotos

Los terremotos de menos de 4 apenas se perciben. Los de magnitud entre 4 y 5 se perciben pero en general no producen daños. Los de entre 5 y 6 causan daños menores, en, por ejemplo, los edificios antiguos. Los de entre 6 y 7 si causan daños a varios kilómetros alrededor. Los de entre 7 y 8 es un terremoto mayor y sí causa daños. Suele haber 18 al año. Los de entre 8 y 9 causan graves daños. Puede haber de 1 a 3 por año. Los de entre 9 y 10 son devastadores y puede haber 1 o 2 cada 20 años. De más de 10 aún no se ha registrado ninguno.

Se utiliza una fórmula para calcular la magnitud, que usa logaritmos decimales, la amplitud de las ondas medida en milímetros, tomada del sismograma, y el tiempo en segundos desde las ondas primarias hasta las secundarias. Hay un desplazamiento para que las medidas no salgan negativas.

La relación entre E, la energía liberada, y M a la magnitud del terremoto, es:

$$\log E = 11.8 + 1.5 \cdot M,$$

por lo que:

$$E = 10^{11.8 + 1.5\,M}$$

La energía crece de forma exponencial.

Escala de pH

El pH mide la acidez o alcalinidad de una solución.

Es el logaritmo negativo en base 10 de la concentración de iones hidrógeno:

$$pH = - \log_{10}[H^+]$$

Sorensen diseñó la **escala** para medir la acidez o alcalinidad de una substancia: las soluciones que recibían valores de **pH** de **0** eran las más ácidas, las de **14** las más alcalinas

Un pH 7 es neutro. Las disoluciones ácidas tienen una alta cantidad de iones hidrógeno, por lo que su pH es menor que 7. Las disoluciones alcalinas tienen un pH mayor que 7. El agua tiene un pH neutro (7). Por debajo de 7 tenemos los ácidos: la naranja, el café, el tomate, el vinagre y el limón. Por encima de 7, las bases: la sangre, el bicarbonato, el amoníaco, el jabón y la lejía.

Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

POTENCIAS DE 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incluidas entre los productos curiosos:

$11 \times 11 = 121$

$11 \times 11 \times 11 = 1\,331$

$11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14\,641$

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son elevados al cuadrado:

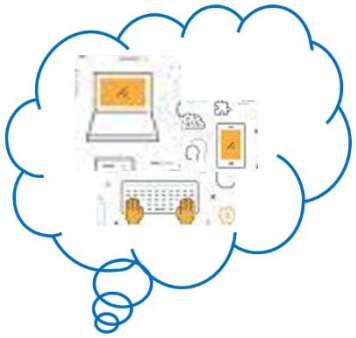
$9^2 = 81$

$99^2 = 9\,801$

$999^2 = 998\,001$

$9\,999^2 = 99\,980\,001$

Vale la pena observar que el número de nueves de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.



Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378*\log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$\log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

Solución:

$$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.$$

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora sabe calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con 50^{200} y comprueba que te sale $6.3 \cdot 10^{339}$.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

NÚMEROS GRANDES

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podemos tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abundancia, como son **las gotas del mar** (1×10^{25} gotas), **los granos de arena en todas las playas del mundo** (5.1×10^{23} granos) o el **número de estrellas de todo el Universo conocido** (3×10^{23} estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del universo (1×10^{80}) si queremos obtener un número más grande.

Si queremos hallar un número más grande **"Googol"**, acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que significa el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los **números primos de la forma de Mersenne**, que han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras. En 1952, el número primo de Mersenne más grande era $(2 \cdot 10^{17})-1$, un número primo con 39 dígitos, y el año 2024 las computadoras probaron que el número $(2 \cdot 10^{136279841})-1$ es también primo, con más de 41 millones de dígitos, siendo este mucho más grande que un Googol

10^100

Googol (10^{100})

10, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

RESUMEN

Potencias de exponente natural y entero	$a^{-n}= 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades de las potencias	$a^n.a^m=a^{m+n}$ $a^n:a^m=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n.m}$ $a^n.b^n=(a.b)^n$ $a^n/b^n=(a/b)^n$	$(-3)^3\cdot(-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3\cdot(-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de exponente racional. Radicales	$a^{r/s}= \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades de los radicales	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}$ $\quad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{5^2}} = \sqrt[6]{25}$ $\quad \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3\cdot2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\cdot2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicales	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} =$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Un número puesto en notación científica consta de una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades). El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal. Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número: $N = a,bcd...\cdot10^n$	$5.83\cdot10^9+6.932\cdot10^{12}-7.5\cdot10^{10}=$ $5.83\cdot10^9+6\,932\cdot10^9-75.10^9 = (5.83+6\,932-75)\cdot10^9 =$ $6\,862.83\cdot10^9 = 6.86283\cdot10^{12}$ $(5.24\cdot10^6)\cdot(6.3\cdot10^8) = 33.012\cdot10^{14} = 3.32012\cdot10^{15}$ $\frac{5.24\cdot10^6}{6.3\cdot10^{-8}} = (5.24:6.3)\cdot10^{6-(-8)}$ $= 0.8317\cdot10^{14}$ $= 8.317.10^{13}$
Logaritmos	*Si* $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y.\log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5\cdot\log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma exponencial:

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $(\frac{1}{z+1})^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicales

3. Expresar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) a. $\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propiedades de los radicales

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

7. Extraer factores del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introducir factores en el radical:

a) $2.\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3.\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2.\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Operaciones con radicales

9. Efectúa:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

10. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalizar

11. Racionaliza los denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}\cdot-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectúa y simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})$ (3+2· $\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Logaritmos

14. Desarrolla los siguientes logaritmos:

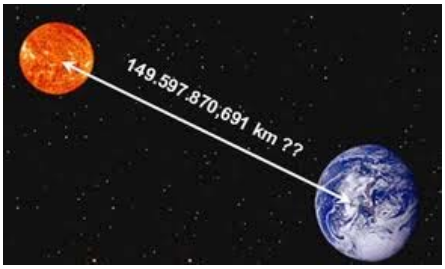
a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$; b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

15. Simplifica la siguiente expresión:

$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

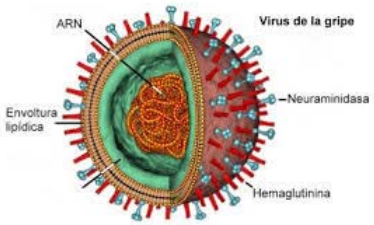
BY NC SA
Textos Marea Verde

Notación científica



16. La masa del Sol es 330 000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5.98 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.

17. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?



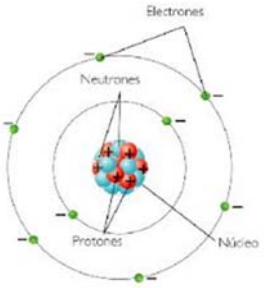
18. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2 en el año 1995, cantidad que representa el 53.5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

19. Expresa en notación científica:

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0.000000000066 m



20. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3.1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e) $(4 \cdot 10^{5})^{-2}$

21. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$ b) $\frac{0.000541 \cdot 10318000}{1520000 \cdot 0.00302}$ c) $(0.0073)^2 \cdot (0.0003)^2$ d) $\frac{2700000 - 13000000}{0.00003 - 0.00015}$

22. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^{6} - 5 \cdot 10^{5}}$ b) $\frac{7.35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^{7}$ c) $(4.3 \cdot 10^{3} - 7.2 \cdot 10^{5})$

23. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica:

$$(5.24 \cdot 10^{6}) \cdot (8.32 \cdot 10^{5}):$$

a) $4.35968 \cdot 10^{12}$ b) $43.5968 \cdot 10^{13}$ c) $4.35968 \cdot 10^{11}$ d) $4.35968 \cdot 10^{13}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. El resultado es:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6.b^7.c^6}}$

a) $5^3.a.b.c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2.c}$ b) $5\cdot a^2.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$ c) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^3.b^2.c^3}$ d) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}.a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3.a^{-2}$

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2.(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8.(x+2)^9.(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5.83\cdot10^9+6.932\cdot10^{12}-7.5\cdot10^{10}$

a) $6.86283.10^{12}$ b) $6.86283\cdot10^{13}$ c) $6.8623\cdot10^{11}$ d) $6.8628\cdot10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24\cdot10^{10}}{6.3\cdot10^{-7}}$

a) $0.8317.10^{17}$ b) $8.317\cdot10^{16}$ c) $8.317\cdot10^{15}$ d) $83.17.10^{16}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
www.apuntesmareaverde.org.es
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde