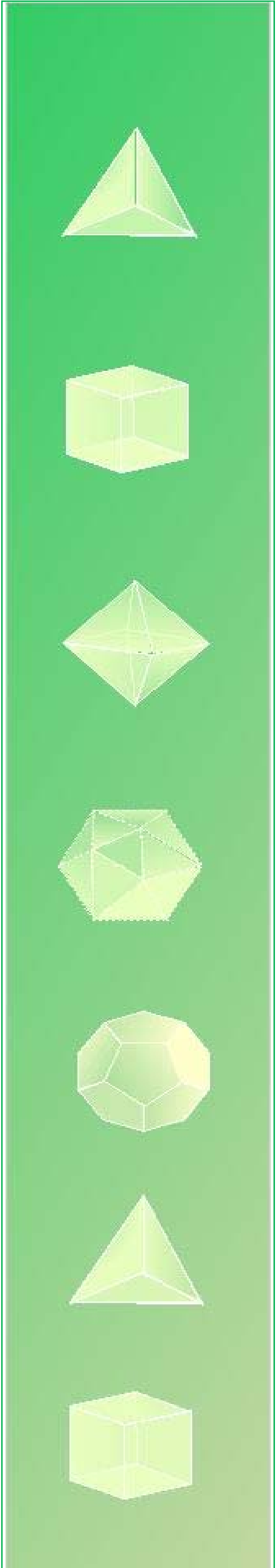


Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas:

4º A de ESO

Soluciones de Actividades y ejercicios

ÍNDICE:

Total: 131

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde de Matemáticas (VVAA).

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y VVAA (anteriores)

CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

Solución: El rajá tenía 6 hijas y les deja a cada una 6 perlas. Había 36 pelas.

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11ab + (+7) · (+6ab – 8ab) e) –7a^2b – [+4a^2b – (–6a^2b) : (+6)] f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

Solución: a) 2; b) –7; c) 26; d) –3ab; e) –12; f) 22;

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Solución: a. 11; b. –26; c. –79 d. –467.

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

Solución: a) –31/6; b) –13/63; c) –77/40; d) 43/8; e) 93/16; f) 469/48; g) 6; h) 6; i) 25.

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Solución: a) (15x + 3)/(2x); b) 1/(x – 1); c) x + 2; d) 2/a.

6. Realiza las operaciones:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

Solución: a) 37.27; b) 23.584; c) 6.71; d) 11.75; e) 45.344; f) 33.47;
g) 4.0832; h) 22.848; i) 33.0855; j) 21.64; k) 80.242; l) 14.937

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23; d) 2.353535…..

e) 87.2365656565….; f) 0.9999…..; g) 26.5735735735…..

Solución: a) 7.92835 = 992835/100000; b) 291.291835 = 291191835/1000000; c) 0.23 = 23/100; d) 2.353535… = 233/99;
e) 87.2365656565…. = 863642/9900; f) 0.999… = 1; g) 26.573573… = 26547/999.

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.

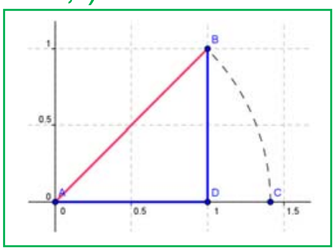
a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

Solución: a) Periódica; b) Exacta; c) Periódica; d) Exacta; e) Exacta; f) Periódica

9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

Solución: a) 1/3 = 0.33333… b) 7/5 = 1.4; c) 11/30 = 0.36666… d) 3/25 = 0.12; e) 9/8 = 1.125; f) 7/11 = 0.636363…

10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1.4, pues $(1.4)^2$ es distinto de 2; no 1.41 pues $(1.41)^2$ es distinto de 2; ni 1.414, pues $(1.414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.



Solución gráfica: $\sqrt{2}$ = 1.41421356….

11. Halla la expresión decimal de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

***Solución:** $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730950488016887242...*

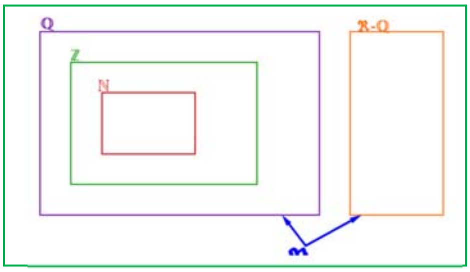
12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\Re$
–7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212…					
π					
1/2					
1.99999					

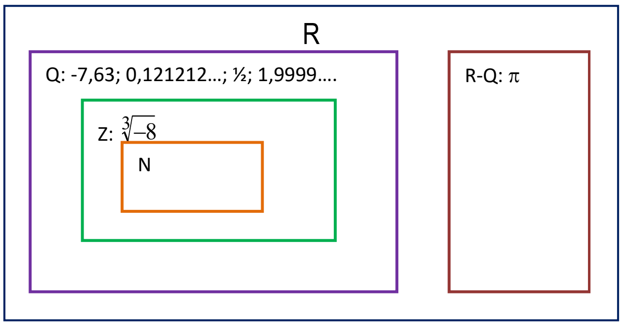
Solución:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\Re$
–7.63			X		X
$\sqrt[3]{-8}$		X	X		X
0.121212…			X		X
π				X	X
1/2			X		X
1.99999			X		X

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



Solución gráfica:



14. ¿Puedes demostrar que 4.99999… = 5?, ¿cuánto vale 2.5999…? Escríbelos en forma de fracción.

***Solución:** 10 x 4.9999... = 49.999...; 9 x 4.9999... = 49 – 4 = 45*

$\Rightarrow$ 4.999... = 45/9 = 5.

X = 2.5999...; 10X = 25.9999...; 100X = 259.999.... $\Rightarrow$ 90X = 259 – 25; $\Rightarrow$ X = 2.5999... = 234/90 = 13/5.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

***Solución:** 53.*

2. POTENCIAS

16. Calcula:

a) $(+1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

***Solución:** a) 1; b) –1; c) 16; d) –64; e) 1/8; f) 8.*

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot ((-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

***Solución:** a) $(-4/3)^{-3} = -(3/4)^3$; b) $(1/9)^{-3} = 9^3$; c) $(1/2)^8$; d) $2^{-4} = (1/2)^4$.*

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{\left(7^4\cdot(-2)^4\cdot 3^4\right)^3}{(9^2\cdot 4^2\cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2\cdot\frac{4^5}{9^5}}{(-2)\cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^6}$

Solución: a) 625/81; b) 40/16; c) 7^6 = 117649; d) –1/(2*3^8) = –1/13122; e) –2^5/3 = –32/3.

19. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

Solución: $\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{12/4} = 3^3 = 27$. $\sqrt[10]{9^{15}} = 9^{15/10} = 9^{3/2} = 3^3 = 27$.

20. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos

Solución: $\sqrt{484} = 22$; $\sqrt[3]{8000} = 20$.

21. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

Solución: 33.

22. Calcula $25^{0.5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

Solución: 5; $2^3\cdot 2^{3/5}$; 7^3.

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

Solución: a) $\sqrt[5]{5^4}$; b) $\sqrt[3]{3^3} = 3$; c) $\sqrt[3]{7^2}$

24. Escribe en notación científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0.0000001 e) 0.00000046

Solución: a) $4\cdot 10^8$; b) $4.5\cdot 10^7$; c) $3.45\cdot 10^{13}$; d) $1\cdot 10^{-7}$; e) $4.6\cdot 10^{-7}$;

25. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

Solución: 65600; 4303360000; 18518907289600000000

26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

Solución abierta:

27. Efectúa las operaciones en notación científica:

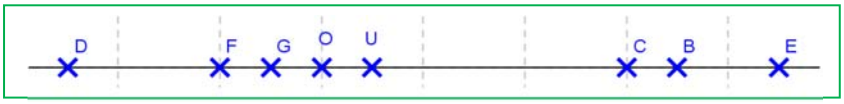
a) $0.000481 + 2.4\cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5.4\cdot 10^6 + 7.2\cdot 10^5$ c) $(2.9\cdot 10^5)\cdot(5.7\cdot 10^{-3})$
d) $(3.8\cdot 10^{-8})\cdot(3.5\cdot 10^6)\cdot(8.1\cdot 10^{-4})$ e) $(4.8\cdot 10^{-8}) : (3.2\cdot 10^{-3})$ f) $(6.28\cdot 10^{-5})\cdot(2.9\cdot 10^2) : (3.98\cdot 10^{-7})$

Solución: a) 0.000505; b) 295320000; c) 1653; d) 0.00010773; e) 0.000015; f) 45758.794

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

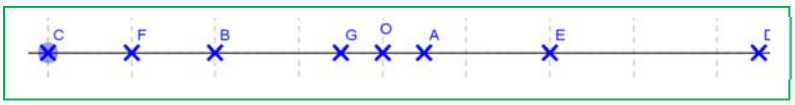
28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 y 0.

Solución gráfica: –9, –5, –2, –1, 0, 1, 6, 7, 9.



29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –8, –7

Solución gráfica: 9 > 4 > 1 > –4 > –6 > –7 > –8.

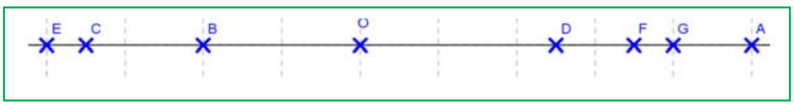


30. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 año a. C. y *Gauss* entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?

Solución: 24 siglos

31. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Solución gráfica: –8 < –7 < –6 < –4 < 0 < 5 < 7 < 8 < 10. Opuestos: −10, 4, 7, −5, 8, −7, 6, 0, −8. Valores absolutos: 10, 4, 7, 5, 8, 7, 6, 0, 8.

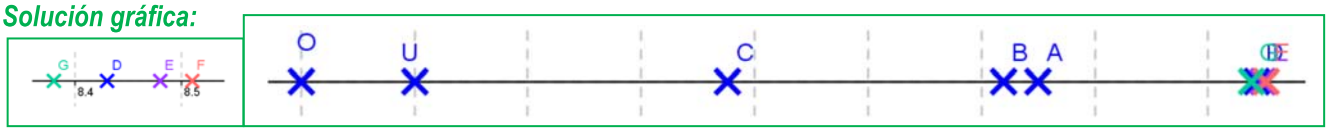


32. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: A = 7/6; B = -17/4; C = 2.375; D = -3.6666…

Solución gráfica:

33. Representa en la recta numérica A= 6.5; B = 6.2; C = 3.76; D = 8.43; E = 8.48; F = 8.51 y G = 8.38.

Solución gráfica:



34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1.47; –4.32; –4.8; +1.5; +1.409; 1.4, –4.308.

Solución: 1.5 > 1.47 > 1.409 > 1.47 > 1.4 > –4.308 > –4.32 > –4.8.

35. Busca rectángulo áureo y espiral áurea en Internet.

Solución abierta:

36. Ya de paso busca la relación entre el *Número de Oro* y la *Sucesión de Fibonacci*.

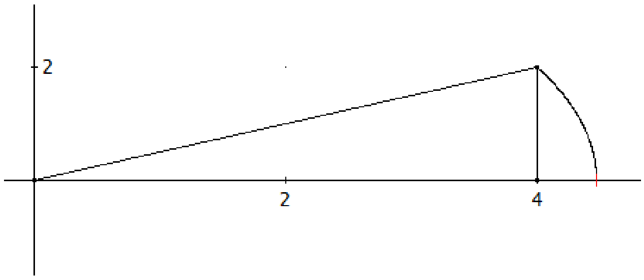
Solución abierta:

37. Busca en *youtube* "algo pasa con phi" y me cuentas.

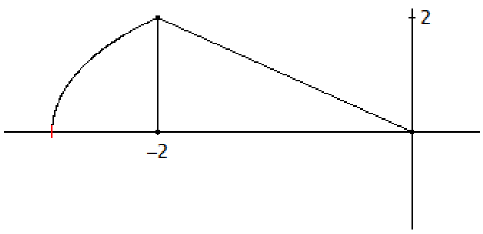
Solución abierta:

38. Representa en la recta numérica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

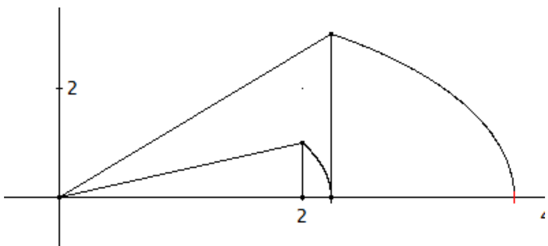
Solución: $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$

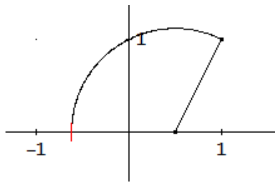


$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$



$\sqrt{14} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$





39. Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

Solución abierta: Por ejemplo: 1.62; 1.619; 1.7

40. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2} y 1.5$

Solución abierta: Por ejemplo: 1.42; 1.43; 1.44; 1.45 y 1.46.

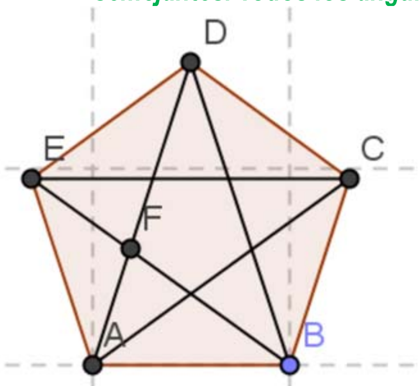
41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π

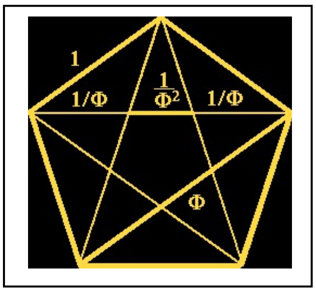
Solución: $\frac{3.14+\pi}{2} = \frac{157+50\,\pi}{100}$, $\frac{\frac{157+50\,\pi}{100}+\pi}{2} = \frac{157+150\,\pi}{200}$, $\frac{\frac{157+150\,\pi}{200}+\pi}{2} = \frac{157+350\,\pi}{400}$,

$\frac{\frac{157+350\,\pi}{400}+\pi}{2} = \frac{157+750\,\pi}{800}$, $\frac{\frac{157+750\,\pi}{800}+\pi}{2} = \frac{157+1550\,\pi}{1600}$.

42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.

Solución gráfica: En la figura adjunta utiliza la semejanza de triángulos para comprobar qué triángulos son semejantes. Todos los ángulos miden 36º, 72º o 108º.





El triángulo DAB es semejante al BAF (tienen los 3 ángulos iguales) por lo que los lados son proporcionales:

DA/AB = AB/FA.

Cómo el lado del pentágono AB = DF, se tiene que el todo (DA) es a la parte (DF) como la parte es a lo que queda (FA), luego se tiene una proporción áurea. En la estrella pitagórica el cociente entre dos longitudes consecutivas es siempre el número de oro.

Otra solución sólo para el profesorado: Si tomamos los vértices del pentágono como las raíces quintas de la unidad, tenemos que un lado lo forman los vértices $(1,0)$, $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, ***luego mide:***

$\sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)^2+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)}$ ***y una diagonal la forman los vértices*** $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$, ***luego mide:***

$\sqrt{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. ***Tenemos que las raíces quintas de la unidad son:***

$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right) i$, $k = 0, \ldots, 4$ ***por lo que*** $z_0+\ldots+z_4 = 0$ ***(coeficiente de*** x^4 ***en*** x^5-1***) y:***

$$Re(z_0+\ldots+z_4) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1\right)+1$$

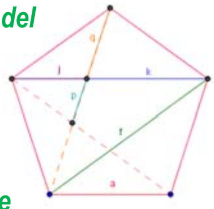
$$= 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-2+\sqrt{20}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ***(Tomamos la solución positiva al ser*** $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$***). Entonces:***

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ***y la razón es:***

$\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{2\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ***la proporción áurea.***

43. Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.



***Solución gráfica:** En un pentágono regular están en proporción áurea la diagonal y el lado del pentágono y los dos segmentos de una diagonal cortada por otra. De forma análoga se demuestra que los dos segmentos desiguales de una diagonal cortada por otras dos están también en proporción áurea. Por lo tanto* $\frac{p}{l}=\frac{d-l}{d} \Rightarrow \frac{p}{l}=1-\phi^{-1}$ *como Φ^{-1} = Φ -1 la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor es 2 – Φ. Por otra parte* $\frac{l}{p}=\frac{d}{d-l}$ *y ya que* $\frac{d}{d-l}=\frac{\frac{d}{l}}{\frac{d-l}{l}}=\frac{\phi}{\phi^{-1}}=\phi^2=\phi+1$*. La razón de semejanza que transforma el menor en el mayor es Φ^2 = Φ + 1.*

44. Comprueba que los triángulos ABD y ABF de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con Geogebra su razón de semejanza.

***Solución gráfica:** Los triángulos ABD y ABF son semejantes, por lo tanto las longitudes de sus lados son proporcionales:* $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BF}$ *y sea d la longitud de la diagonal y l la longitud del lado:*

BD = d, AB = l y BF = d – l

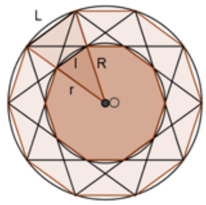
y sustituyendo en la proporción anterior: $\frac{d}{l}=\frac{l}{d-l}$ *lo que indica que la diagonal y el lado del pentágono están en proporción áurea y que la longitud de los dos segmentos de una diagonal cortada por otra l y d – l también están en proporción áurea.*

45. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

***Solución gráfica:** En el triángulo isósceles que se forma con el centro de las circunferencias, O, y dos vértices consecutivos del polígono inscrito en la circunferencia de radio R, el ángulo del vértice O mide 36º, ya que es un ángulo central de un decágono, el cociente entre r y R es Φ y por tanto la razón de semejanza entre las circunferencias de radios R y r es: 1/Φ = Φ - 1.*

La medida del radio r coincide con L, la longitud del lado del decágono inscrito en la circunferencia de radio R, y por lo tanto el cociente entre el radio de la circunferencia R y el lado L del decágono regular es Φ.

La razón de semejanza entre los dos decágonos no estrellados es la misma que entre r y R, es decir, Φ.



4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

46. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:
   a) Porcentaje superior al 15 %. b) Edad inferior o igual a 21 años.
   c) Números cuyo cubo sea superior a 27. d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.
   e) Temperatura inferior a 24 ºC. f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.
   g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

Solución: a) $(15, 100]$, $\{x \in \Re / 15 < x \le 100\}$

b) $[0, 21]$, $\{x \in \Re / 0 \le x \le 21\}$

c) (3, +∞); $\{x \in \Re / x^3 > 27\}$;

d) [10, 100); $\{x \in \Re / 10 \le x \le 100\}$

e) (–∞, 24); $\{x \in \Re / x < 24\}$

f) (–1, 5); $\{x \in \Re / -1 < x < 5\}$

g) (0, +∞); $\{x \in \Re / x > 0\}$

47. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos: a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

Solución: a) E(2, 7) = (–5, 9); b) E(–3, $\frac{8}{3}$) = (–3–$\frac{8}{3}$, –3+$\frac{8}{3}$) = (–17/3, –1/3);

c) E(–1; 0.001) = (–1– 0.001, –1+ 0.001) = (–1.001, –0.999).

48. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos: a) (1, 7) b) (–5 , –1) c) (–4 , 2)

Solución: a) E(4, 3); b) E(–3, 2); c) E(–1, 3).

49. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?

Solución: No se pueden poner como un intervalo, ya que sería el intervalo $(500, 1000)$, por lo que 600.222333€ sería un sueldo, y no puede serlo al tener más de dos decimales.

5. APROXIMACIONES Y ERRORES

50. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$	***3***	***3.2***	***3.16***	***3.162***
1/7	***0.1***	***0.14***	***0.143***	***0.1429***
95549	***100000***	***9600***	***95500***	***95550***
30000	***$3\cdot10^4$***	***$30\cdot10^3$***	***$300\cdot10^2$***	***3000·10***
1.9995	***2***	***2.0***	***2.00***	***2.000***
20.55	***20***	***21***	***20.6***	***20.55***

51. Prueba que 123.45 con EA = 0.005 y 0.12345 con EA = 0.000005 tienen el mismo ER.

Solución: Er = 4.05 · 10^{-3} %.

52. Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:

a) Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.

Solución: Depende del tipo de error. Si se considera el error relativo, F, pues cuánto más pequeña sea la medida, más difícil es medir y el error relativo es mayor. Pero si se trata de error absoluto, V, pues al ser menor la medida también será menor el valor del error.

b) No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes. F

c) Poner precios como 1.99 €/Kg es un intento de engaño. V

d) Comprar a 1.99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro. F

e) Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático. F

f) La precisión se mide por el número de cifras decimales. V

6. LOGARITMOS

53. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

Solución:

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow \log_2 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_2 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow \log_5 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_5 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow \log_2 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow \log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

54. Calcula utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

Solución: a) 5; b) 2; c) 41; d) 30.

55. Calcula utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

Solución: a) 3; b) 2; c) 2; d) –4.

56. Calcula *x* utilizando la definición de logaritmo: a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

Solución: a) x = 6; b) 1/16; c) 5.

57. Calcula utilizando la definición de logaritmo:
   a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$
   b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Solución: a) 1.5; b) –8.

58. Utiliza la calculadora para obtener a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

Solución: a) log 0.000142 = -3.8477117; b) log 142 = 2.15228834; c) log 9 + log 64 = 2.76042248

59. Desarrolla las expresiones que se indican: a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

Solución: a) 1/5(ln4 + 2 lnx – 3) b) 3 log a + 2 log b – 4 log c – log d

60. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212
   a) 81 b) 27 c) 59049

Solución: a) log81 = 4*(0.4771212); b) log27 = 3*(0.4771212); c) log59049 = 10*(0.4771212) = 4.771212.

61. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Solución: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$ ***= log(m^{1/2}) – log(t²) – log(p) + log(h^{5/2}) = log((m^{1/2} · h^{5/2})/ (t² ·p))***

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios y $\sqrt{2}$

1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos tres valores equivocados ☺)
2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

***Solución:** 1) Está mal el ancho de A2 (es 42.04) y el de A3 (es 29.73). Está también mal el área de A5 (es 312.5). 2) 16. 3) A6: 14.87 largo, 10.51 ancho. A7: 10.51 largo, 7.43 ancho.*

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm²)
A0	118.92	84.09	10000
A1	84.09	59.46	5000
A2	59.46	44.04	2500
A3	42.04	29.83	1250
A4	29.73	21.02	625
A5	21.02	14.87	415.2

El número de oro

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

F_n = Número de Fibonacci que ocupa el lugar n.

Φ = Número de oro.

a) Calcula F_{31} y F_{30} con la fórmula de Binet.

b) Haz el cociente y mira si es una buena aproximación del Número de Oro.

Busca en Internet al número de oro y a la sucesión de Fibonacci.

***Solución:** a) $F_{31} \approx 1346269$; $F_{30} \approx 832040$; b) F_{31}/F_{30} = 1.61803399.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

***Solución:** a) –43/14; b) –8/45; c) –19/24; d) 55/6; e) 161/12; f) 111/4; g) 15; h) 3/2; i) 25.*

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

***Solución:** a) (5a + 1)/a; b) 1/(x + 2); c) [(x + 3)/(x – 3)]²; d) 1.*

3. Realiza las operaciones: a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8

***Solución:** a) 101/056; b) 204.02; c) 152.20224.*

4. Halla el valor exacto de $\frac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sin calculadora.

***Solución:** 1.11111.....*

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$

***Solución:** Exacta: 9/40; 37/250; Periódica: 30/21; 21/15.*

6. Halla 3 fracciones a, b, c tal que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

***Solución abierta:** Por ejemplo: 3/4 < 752/1000 < 755/1000 < 757/1000 < 19/25.*

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

***Solución:** 7 decimales. La potencia máxima entre 2 y 5 es 7.*

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

***Solución:** $\frac{999999}{7} = 142857$ $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$ No es casualidad*

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

Solución: $\frac{999}{37} = 27, \frac{1}{37} = 0.027027\ldots$

No es casualidad, si $\frac{1}{b}$ es periódico puro, el periodo es p y p tiene n cifras, se cumple que $\frac{10^n-1}{b} = p$

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

2.73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100}; $\frac{102}{34}$; -2.5; 0.1223334444…

Solución: 2.73535... racional (pertenece al conjunto de los racionales, entendiendo que luego se repite 353535...);

$\pi-2$ irracional; $\sqrt[5]{-32}=-2$ entero; 10^{100} natural; $\frac{102}{34}$ racional; –2.5 racional; 0.1223334444… irracional

(infinitas cifras decimales no periódicas)

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $\mathbb{Q} \cap (\Re - \mathbb{Q}) = \{0\}$ b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$ e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

Solución: a) Falso, el 0 es racional, pero no es un número irracional.

b) Verdadero, ya que si $a \in Z$, entonces $a = \frac{a}{1}$ con $a \in Z$, $1 \in N$

c) Falso, ya que $\sqrt{4} = 2 \in Q$

d) Verdadero, ya que 7 no es un cuadrado perfecto y su raíz es un número irracional.

e) Verdadero, ya que 1/47 = 0.0212765957446808510638297872340425531914893617…

12. Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

Solución: a) $\sqrt{7}$ es irracional, $-\sqrt{7}$ es irracional, pero $\sqrt{7}+\left(-\sqrt{7}\right)=0 \in Q$

b) $\sqrt{7}$ es irracional, $\sqrt{7}$ es irracional, pero $\sqrt{7}\sqrt{7}=7 \in Q$, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1 \in Q$

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

Solución: Es un número irracional.

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

Solución: Sí: $\frac{1}{3} = 0.33\ldots$, $\frac{2}{3} = 0.66\ldots$ y $\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = 1 \in Z$

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

Solución: Área: $\sqrt{2}\sqrt{8}=4$ 4 m². Perímetro: $6\sqrt{2}$ m

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

Solución: Área: 2 m². Perímetro: $4\sqrt{2}$ m

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

Solución: Área: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ m². Perímetro: $6\sqrt{3}$ m

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

Solución: Área: $\pi\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10\pi$ m². Perímetro: $2\pi\sqrt{10}$ m

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

Solución: Área: $6\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = 6\,7^{\frac{2}{3}}$ *m². Volumen:* $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = 7$ *m³*

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

Solución: $k\,Bk\,h = k^2\,B\,h = 3\,B\,h \Rightarrow k^2 = 3 \Rightarrow k = \sqrt{3}$

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m²?

Solución: $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ m

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Solución: Si suponemos que la circunferencia es de radio R, está centrada en el origen, el hexágono es regular y uno de sus vértices es $(R, 0)$*, por lo que su lado mide R y el perímetro del hexágono es 6R. Perímetro de la circunferencia:* $2\pi R$*. Razón:* $\frac{2\pi R}{6R} = \frac{\pi}{3}$

Potencias

23. Calcula: a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

Solución: a) 128; b) –1; c) 25; d) –125; e) 1/27; f) 16.

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$ c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

Solución: a) $(-5/3)^{-1} = -3/5$*; b)* $(1/9)^{-11} = 9^{11}$*; c)* $(5/3)^8$*; d)* 2^{-4}*.*

25. Calcula: a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\frac{\left(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4\right)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot \frac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-25}{6}\right)^3}{\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6}$

Solución: a) 81/16; b) 25; c) $11^6 = 1771561$*; d)* $5^8/(3^8 \cdot 2^{10}) = 390625/3072$*; e)* $-(5^2 * 2^5)/3^3 = -800/27$*.*

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

Solución: a) $a^3 \cdot a^{1/4}$*; b)* $15^3 \cdot 5^{2/3}$*; c)* $2240 \cdot 7^{1/2}$*.*

27. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

Solución: a) $50^{1/6}$*; b)* $9^{1/12}$*.*

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

Solución: a) $5^{13/4}$*; b)* $3^{-2/3}$*.*

29. Simplifica la expresión: a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

Solución: a) $x^{1/3}$*; b)* $x^{101/30}$*.*

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km³ y el volumen de agua dulce es de 35000000 km³. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

Solución: Volumen agua de los océanos = $1.2856 \cdot 10^9$*; Volumen de agua dulce =* $3.5 \cdot 10^7$*; Proporción = 2.722 %.*

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

Solución: $9.018 \cdot 10^{-29}$ *kg.*

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm³. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Solución: $2.5 \cdot 10^{13}$ *glóbulos rojos.*

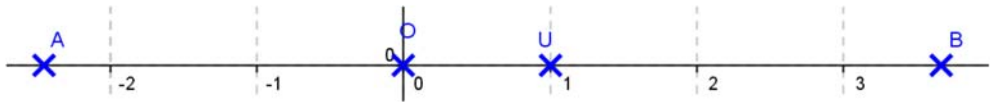
Representación en la recta real

33. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?

Solución: 475 + 1855 = 2330 años usando las fechas de la muerte.

34. Representa de forma exacta en la recta numérica: –2.45; 3.666…

Solución gráfica:



35. Sitúa en la recta real los números 0.5; 0.48; 0.51 y 0.505.

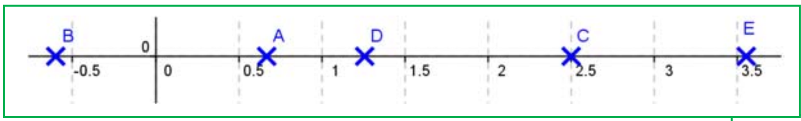
Solución gráfica:

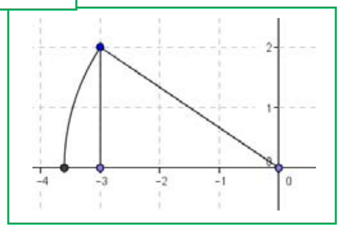
36. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2.4; –3.62; –3.6; 2.5; 2.409; –3.9999…

Solución: 2.5 > 2.409 > 2.4 > –3.6 > –3.62 > –3.9999.

37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números: $\frac{2}{3}$; $\frac{-3}{5}$; $\frac{5}{2}$; 1.256; $3.\hat{5}$

Solución gráfica:





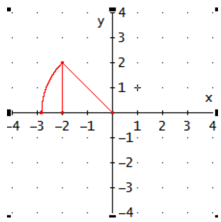
38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?

Solución: $-\sqrt{(-3)^2+2^2}=-\sqrt{13}$

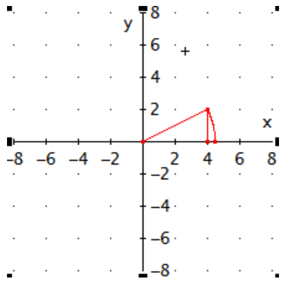
39. Representa de forma exacta en la recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\frac{\sqrt{10}}{2}$

Solución:

$$-\sqrt{8}=-\sqrt{(-2)^2+2^2}$$



$$2\sqrt{5}=\sqrt{20}=\sqrt{4^2+2^2}$$



$$\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

40. Halla 5 números racionales que estén entre 3.14 y π.

Solución abierta: Por ejemplo: 3.141; 3.1415, 1.14159, 3.1414; 3.14158.

Intervalos

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a. $(-5, 5]$ b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \le 7\}$. c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

***Solución:** a) Intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha de extremos –5 y 5; b) Intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha de extremos –2 y 7; c) Semirrecta abierta de origen 7; d) Semirrecta abierta de origen –3.*

42. Halla: a. $(2, 4] \cup (3, 5]$ b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

***Solución:** a. (2, 5]; b. (3, 4]; c. (–1, 1].*

43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

***Solución:** No. Un entorno necesita un centro.*

44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

a. $(0, 8)$ b. $(-6, -2)$ c. $(2, +\infty)$

***Solución:** a. $E_4(4)$; b. $E_2(-4)$; c. No se puede.*

45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. $E(1, 2)$ d. $E(0, 1)$

***Solución:** a. (4 – 2/3, 4 + 2/3) = (10/3, 14/3); b) (–7 – 1/2, –7 + 1/2) = (–15/2, –13/2); c. (–1, 3); d) (–1, 1).*

46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

***Solución:** $+\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$*

47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

***Solución:** $(-\sqrt{7}, +\sqrt{7})$*

48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

***Solución:** $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (+\sqrt{7}, +\infty)$*

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2.718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. Coge la calculadora y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, …
Apunta los resultados en una tabla.

Solución:

n	*1*	*2*	*10*	*100*	*1000*	*10000*	*100000*	*1000000*	*10000000*
	2	*2.25*	*2.59374246*	*2.70481383*	*2.71692393*	*2.71814593*	*2.71826824*	*2.71828047*	*2.71828169*

50. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón $9.11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra $5.983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol $1.99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna $7.3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

***Solución:** Masa de un electrón < Masa de la Luna < Masa de la Tierra < Masa del Sol.*

51. Otra forma de definir *e* es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? *Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

***Solución:** Basta llegar a n = 9.*

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
	2	*2.5*	*2.66666667*	*2.70833333*	*2.71666667*	*2.71805556*	*2.71825397*	*2.71827877*	*2.71828153*	*2.7182818*	*2.71828183*

52. Tomando $1.67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1.2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm^3 (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11.34 gramos).

***Solución:** a) $5.02655 \cdot 10^{-21}$ cm^3; b) $3.32236 \cdot 10^{-4}$ g; c) Pesa mucho menos.*

AUTOEVALUACIÓN

1) Indica qué afirmación es falsa. El número –0.3333333… es un número
 a) real b) racional c) irracional d) negativo

Solución: c)

2) Operando y simplificando la fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}$ se obtiene:
 a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a – 2$ d) $1/(a – 2)$

Solución: a)

3) La expresión decimal 0.63636363…. Se escribe en forma de fracción como
 a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

Solución: b)

4) Al simplificar $\sqrt{2}\,(7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ obtienes:
 a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\,(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

Solución: c)

5) Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:
 a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

Solución: a)

6) El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:
 a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, -2]$ c) $(-2, +\infty)$ d) $(-\infty, -2[$

Solución: d)

7) El entorno de centro –2 y radio 0.7 es el intervalo:
 a) (–3.7, –2.7) b) (–2.7, –1.3) c) (–3.3, –2.7) d) (–2.7, –1.3]

Solución: b)

8) El intervalo (–3, –2) es el entorno:
 a) E(–2.5; 1/2) b) E(–3.5; –0.5) c) (–3.5, 1/2) d) (–2.5; –0.5)

Solución: a)

9) Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:
 a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

Solución: b)

10) Al efectuar la operación $0.000078 + 2.4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:
 a) $3.6 \cdot 10^{-10}$ b) $1.8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10.2 \cdot 10^{-5}$ d) $18.72 \cdot 10^{-5}$

Solución: c).

CAPÍTULO 2: PROPORCIONALIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

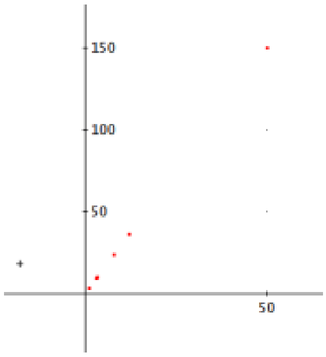
1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

Solución:

Litros	*12*	*7.82*	*3.09*	*1*	*3.33...*	*50*
Euros	*36*	*23.46*	*9.27*	*3*	*10*	*150*

La razón es 3. $y = 3x$



2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$

Solución: a) $x = \frac{3000}{24} = 125$ *b)* $x = \frac{80 \times 46}{12} = \frac{20 \times 46}{3} = \frac{920}{3} = 306.66\ldots$

c) $x = \frac{60 \times 3.6}{12.8} = \frac{15 \times 0.9}{0.8} = \frac{135}{8} = 16.875\ldots$

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

Solución: $x = \frac{420 \times 95}{350} = \frac{42 \times 19}{7} = 114$ *minutos (1 hora y 54 minutos).*

4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?

Solución: Si x es el número de kilogramos de azúcar, $x + 2x = 3x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{3} = 2.33\ldots$*...*

Kilogramos de fruta: $2\,\frac{7}{3} = \frac{14}{3} = 4.66\ldots$

5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?

Solución: $x = \frac{43 \times 12}{25} = \frac{516}{25} = 20.64$ *m.*

6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

Solución: $x = \frac{135 \times 8}{12} = 45 \times 2 = 90$ *l.*

7. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?

Solución: $x = \frac{1374\times 12}{100} = \frac{1374\times 3}{25} = \frac{4122}{25} = 164.88$ *l.*

8. Mi coche ha gastado 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5823 km?

Solución: $x = \frac{5823\times 67}{1250} = \frac{390141}{1250} \approx 164.88$ *l.*

9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

Solución: $x = \frac{420\times 127}{300} = \frac{889}{5} = 177.8$ *g.*

10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

Solución: $x = \frac{28\times 7}{2} = 14 \times 7 = 98$ *€.*

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones: a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

Solución: a) 27%. b) 50%. c) $x = \frac{52\times 100}{90} = \frac{520}{9} = 57.77\ldots$ *%*

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

Solución: $x = \frac{4\times 100}{16} = \frac{400}{16} = 25$ *alumnos*

13. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

Solución: $x = \frac{1036\times 100}{2000} = \frac{518}{10} = 51.8\%$

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

Solución: $x = \frac{30\times 30}{100} = 9$ *alumnos*

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.

Solución: $x = \frac{90\times 100}{130} = \frac{900}{13} = 69.23\ldots$ *Luego la fábrica tiene el 69.23...% de los obreros que tenía.*

16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.

Solución: Precio con IVA: $x = 520 + \frac{21}{100}\,520 = \frac{121}{100}\,520 = \frac{121}{5}\,26 = \frac{3146}{5} = 629.2.$

Precio final: $629.2 - \frac{18}{100}\,629.2 = \frac{41}{50}\,629.2 = \frac{41}{25}\,314.6 = \frac{12898.6}{25} = 515.94$ *€ (redondeado).*

17. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un ……… % de descuento

Solución: $1340 - 1340\,\frac{x}{100} = 1340\,\frac{100-x}{100} = 1200 \Rightarrow 67\,\frac{100-x}{100} = 60 \Rightarrow 700 = 67\,x \Rightarrow x = \frac{700}{67} = 10.44\ldots\,\%$

b) Me han descontado el 9 % de una factura de …………….. € y he pagado 280 €.

Solución: $x - \frac{9}{100}x = \frac{91}{100}x = 280 \Rightarrow x = \frac{28000}{91} = 307{,}69$ *€ (redondeado).*

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

Solución: $\frac{20}{100}x = \frac{1}{5}x = 100 \Rightarrow x = 500$ *€*

18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?

Solución: Primero: 500+50=550 €. Precio actual: $550-\frac{30}{100}550=550-165=385$ ***€.***

Porcentaje de descuento: $500-\frac{x}{100}500=5(100-x)=500-5x=385 \Rightarrow x=\frac{115}{5}=23$ ***%***

19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?

Solución: Principios de febrero: $\mathbf{10000+\frac{8}{100}\,10000=10800}$ ***€. Finales de febrero:***

$\mathbf{10800-\frac{16}{100}\,10800=10800-1728=9072}$ ***€. Porcentaje de disminución:***

$\mathbf{10000-\frac{x}{100}\,1000=10000-100\,x=9072 \Rightarrow x=\frac{10000-9072}{100}=\frac{928}{100}=9.28\%}$

20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.

Solución: Primera subida: 300+30=330 €. Segunda subida: $\mathbf{330+\frac{1}{4}\,330=\frac{5}{4}\,330=\frac{825}{2}=412.5}$ **€**

Precio actual: $\mathbf{412.5-412.5\,\frac{3}{10}=412.5\,\frac{7}{10}=\frac{2887.5}{10}=288.75}$ **€**

Variación porcentual: $\mathbf{300-300\,\frac{x}{100}=300\,\frac{100-x}{100}=300-3\,x=288.75 \Rightarrow x=\frac{300-288.75}{3}=3.75\%}$ ***de descuento.***

21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un 20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

Solución: Precio rebajado: $x-\frac{1}{4}x$ ***Precio con la carga:*** $x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{4}x\right)=x-\frac{10}{100}x$

Porcentaje de descuento: 10 % Artículo de 30 €: 30 – 3 = 27 €

Artículo por el que hemos pagado 36 euros: $x-\frac{10}{100}x=\frac{9}{10}x=36 \Rightarrow x=40$ ***€***

22. La distancia real entre dos pueblos es 28.6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

Solución: Aproximadamente a una escala de 1:4, a cada cm del mapa le corresponden aproximadamente 4 km de la realidad.

23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?

Solución: 16 m.

24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

Solución gráfica:

25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.

Solución: 350 cm, 1150 cm.

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

Solución:

Número de obreros	1	5	7	12	**20**	**56**	60
Horas de trabajo	**560**	**112**	80	**46.66…**	28	10	**9.33…**

K = 560; $y = \frac{560}{x}$

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?

Solución: Cantidad de madera: $5 \times 1.25 = 6.25$ m. ***Número de paneles:*** $\frac{6.25}{3} = 2.0833...$ ***(2 y sobra un poco de madera).***

28. En un huerto ecológico se utilizan 5000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

Solución: Cantidad de nitratos: $5000\frac{12}{100} = 600\text{ kg}$. ***Cantidad del nuevo abono:***

$$x\frac{15}{100} = 600 \Rightarrow x = \frac{600 \times 100}{15} = 4000\text{ kg}$$

29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1.7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2.3 kilogramos?

Solución: $\frac{200}{1.7} = 117.6...$ ***Como el número de cajas es entero, serían 118 y la última no iría llena***

$\frac{200}{2.3} = 86.9...$ ***Como el número de cajas es entero, serían 87 y la última no iría llena***

30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?

Solución: Cantidad de leche: $8 \times 100 = 800\text{l}$. ***Capacidad:*** $\frac{800}{20} = 40\text{ l}$.

31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0.07		8	
Magnitud B	0.25		5		6.4

Solución:

Magnitud A	40	0.07	2	8	1.5625
Magnitud B	0.25	142.85…	5	1.25	6.4

$$y = \frac{40 \times 0{,}25}{x} = \frac{10}{x}$$

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?

Solución: Lo que pagan en total por día: $\frac{40800}{12} = \frac{10200}{3} = 3400$ €

Lo que pagan en total por día y por persona: $\frac{3400}{6} = \frac{1700}{3}$. ***Pagarán:*** $\frac{1700}{3} \times 15 \times 4 = 34000$ €

33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

Solución: Gasto de las 16 bombillas por hora: $\frac{4500}{150} = \frac{90}{3} = 30$ €. ***Gasto de cada bombilla por hora:*** $\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$ ***Gasto pedido:*** $\frac{15}{8} 38 \times 45 \times 8 = 25650$ €

34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?

Solución: Alimento de las 6 vacas por día: $\frac{240}{17}$. ***Gasto de cada vaca por día:*** $\frac{240}{17 \times 6} = \frac{15}{8}$

Gasto pedido: $\frac{15}{8} 38 \times 45 \times 8 = 25650$ €

35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?

Solución: Metros de tapia construidos por los 12 hombres por hora: $\frac{40}{32}$. ***Metros de tapia construidos por hombre y por hora:*** $\frac{40}{32 \times 12} = \frac{5}{48}$. ***Horas diarias:*** $\frac{5}{48} 20 \times 15\, x = 180 \Rightarrow x = \frac{3 \times 48}{25} = 5.76$ ***horas.***

Tenemos que $0.76 \times 3600 = 2736$, ***luego son 5 horas y 2736 segundos. En minutos:*** $\frac{2736}{60} = 45.6$ ***minutos. Tenemos que*** $0.6 \times 60 = 36$, ***luego son 5 horas, 45 minutos y 36 segundos.***

36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?

Solución: cantidad consumida por cada animal durante los 50 días: 50 kg. Cantidad de pienso: $24 \times 50 = 1200$ ***kg.***

Número de días: $0{,}8\, x \times 100 = 1200 \Rightarrow x = \frac{12}{0{,}8} = 15$

37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?

Solución: Cantidad de litros que echan los 5 grifos en las 10 horas (capacidad del depósito. Suponemos que cada grifo echa 8 l. por minuto): $600 \times 40 = 24000$.

Tiempo: $\frac{24000}{70} \approx 342{,}85$ ***minutos.***

38. Si 4 máquinas fabrican 2400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7000 piezas durante 10 horas diarias?

Solución: Número de piezas por máquina cada día: $\frac{2400}{4} = 600$. ***Número de piezas fabricadas por máquina y por hora:*** $\frac{600}{8} = 75$. ***Número de máquinas:*** $75 \times 10x = 7000 \Rightarrow x = \frac{7000}{750} = \frac{28}{3} = 9{,}33...$

Como el número de máquinas es entero, 10 máquinas.

3. REPARTOS PROPORCIONALES

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Solución: Premio por participación: $\frac{18000}{40} = 450$ ***. Al primero:*** $450 \times 10 = 4500$***, al segundo:*** $450 \times 6 = 2700$***, al tercero:*** $450 \times 12 = 5400$***, al cuarto:*** $450 \times 7 = 3150$***, al quinto:*** $450 \times 5 = 2250$

40. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

Solución: Inversión total: 20000+34000+51000=105000. Beneficio por euro de inversión: $\frac{31500}{105000} = \frac{3}{10}$.

Al primero: $\frac{3}{10}20000 = 6000€$ ***, al segundo:*** $\frac{3}{10}34000 = 10200€$ ***, al tercero:*** $\frac{3}{10}51000 = 15300€$

41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?

Solución: Número total de habitantes: 60 + 46 + 10 = 116. Subvención por habitante: $\frac{48}{116}$ ***aproximadamente igual a 0.4.***

Al primero: 0.4*60 = 24.8 millones de €,
al segundo: 0.4* 46 = 19.1 millones de €,
al tercero: 0.4*10 = 4.1 millones de € (24.8 + 19.1 + 4.1 = 48 €)

42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.

Solución: Cantidad por unidad: $\frac{x}{2+5+8} = \frac{x}{15}$.

Cantidad de dinero: $\frac{5x}{15} = \frac{x}{3} = 675 \Rightarrow x = 3 \times 675 = 2025$.

Al primero: $\frac{2}{15}2025 = 2\frac{405}{3} = 270€$ ***, al tercero:*** $\frac{8}{15}2025 = 4 \times 270 = 1080€$

43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Solución***: Cantidad por año:*** $\frac{100}{12+14+16} = \frac{100}{42} = \frac{50}{21}$***. Al primero:*** $\frac{50}{21}\ 12 = \frac{200}{7} = 28,57$ ***€, al segundo:*** $\frac{50}{21}\ 14 = \frac{100}{3} = 33,33$ ***€, al tercero:*** $\frac{50}{21}\ 16 = \frac{800}{21} = 38,10$ ***€***

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 errores, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

Solución: Si al primero se le da x***, al segundo hay que darle*** $2\ x$ ***(mitad de errores), al tercero*** $5\ x$ ***(quinta parte de errores) y al cuarto*** $10\ x$ ***(décima parte de errores), con:***

$$x + 2\ x + 5\ x + 10\ x = 18\ x = 2500 \Rightarrow x = \frac{2500}{18} = \frac{1250}{9} = 138.88\ldots$$

Al primero: $138.88\ldots$ ***puntos,***
al segundo: $\frac{1250}{9}\ 2 = \frac{2500}{9} = 277.77\ldots$ ***puntos,***
al tercero: $\frac{1250}{9}\ 5 = \frac{6250}{9} = 694.44\ldots$ ***puntos,***
al cuarto: $\frac{1250}{9}\ 10 = \frac{12500}{9} = 1388.88\ldots$ ***puntos***

45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

***Solución:** Si al mayor le da x, al segundo hay que darle $\frac{18}{15}\ x = \frac{6}{5}\ x$ (tiene $\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ de la edad del mayor) y al pequeño $\frac{18}{12}\ x = \frac{3}{2}\ x$ (tiene $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ de la edad del mayor), con:*

$x + \frac{6}{5}\ x + \frac{3}{2}\ x = \frac{37}{10}\ x = 4500 \Rightarrow x = \frac{45000}{37} = 1216.1216\ldots$ *Al mayor: 1216.12 €, al segundo:* $\frac{45000}{37}\frac{6}{5} = \frac{54000}{37} = 1459.1459\ldots$*, luego hay que darle 1459.15 €, al pequeño:* $\frac{45000}{37}\frac{3}{2} = \frac{67500}{37} = 1824.032\ldots$*, luego hay que darle 1824.03 €. Quedarían por repartir 70 céntimos, que se podrían repartir también proporcionalmente:*

$x + \frac{6}{5}\ x + \frac{3}{2}\ x = \frac{37}{10}\ x = 70 \Rightarrow x = \frac{700}{37} = 18\ldots$ *Al mayor: 18 c, al segundo* $\frac{700}{37}\frac{6}{5} = \frac{840}{37} = 22,\ldots$*, luego hay que darle 22 c, al pequeño* $\frac{700}{37}\frac{3}{2} = \frac{1050}{37} = 28\ldots$*, luego hay que darle 28 c. Quedarían por repartir 2 céntimos, que se pierden. En total el mayor recibe 1216.30 €, el segundo 1459.37 €, el pequeño 1824.31 €*

46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

Solución: ***Al segundo le corresponden 1500 € (ya que es el doble que el menor) y al mayor 1000 € (ya que es el triple que el menor)***

47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

***Solución:** Si el mayor aporta x, el segundo aporta $\frac{25}{20}\ x = \frac{5}{4}\ x$ (tiene $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ de la edad del mayor) y el pequeño $\frac{25}{18}\ x$ (tiene $\frac{25}{18}$ de la edad del mayor), con:*

$x + \frac{5}{4}\ x + \frac{25}{18}\ x = \frac{131}{36}\ x = 6000 \Rightarrow x = \frac{216000}{131} = 1648.832\ldots$ *El mayor: 1648.83 €, el segundo:* $\frac{216000}{131}\frac{5}{4} = \frac{270000}{131} = 2061.068\ldots$*, luego aporta 2061.07 €, el pequeño:* $\frac{216000}{131}\frac{25}{18} = \frac{300000}{131} = 2290.076\ldots$*, luego aporta 2290.08 €. Quedan por aportar 2 c, que se pierden.*

48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

***Solución:** Si al mayor le da x, al menor le da $\frac{15}{10}x = \frac{3}{2}x$ (tiene $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ de la edad del mayor), con:*

$x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x = 50 \Rightarrow x = \frac{100}{5} = 20$. *Al mayor: 20 €, al segundo:* $\frac{3}{2}20 = \frac{60}{2} = 30€$

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg y 5.20 kg a 6 €/kg.

***Solución:** Precio total:* $3.5 \times 4.8 + 5.2 \times 6 = 48$ *€. Número de kilos:* $3.5 + 5.2 = 8.7$*. Precio del kilo:* $\frac{48}{8.7} = \frac{160}{29} = 5.172\ldots$ *Es por tanto* 5.17 *€*

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2.40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1.80 €/l para obtener una mezcla a 2.13 €/l?

Solución: Precio total: $x\,2.4 + 4 \times 1.8 = 2.4\,x + 7.2$. ***Número de litros:*** $x + 4$. ***Precio del litro:***
$\frac{2.4\,x+7.2}{x+4} = 2.13 \Rightarrow 2.4\,x + 7.2 = 2.13\,x + 8.52 \Rightarrow 0.27\,x = 1.32 \Rightarrow x = \frac{1.32}{0.27} = \frac{44}{9} = 4.88\ldots$ ***litros***

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.

Solución: $\frac{69}{87} = \frac{23}{29} = 0.79\ldots$

52. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

Solución: Aproximadamente 19 quilates.

4. INTERÉS

53. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.

Solución: $\frac{10000\times3\times750}{36000} = 625\ €$

54. ¿Qué capital hay que depositar al 1.80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777.6 €?

Solución: $\frac{C\times1.8\times6}{100} = 777.6 \Rightarrow C = \frac{77760}{1.8\times6} = \frac{77760}{1.8\times6} = \frac{129600}{18} = \frac{43200}{6} = 7200\ €$

55. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

Solución: $39500\left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 70936.30\ €$

CURIOSIDADES. REVISTA

Confecciona tu propia hoja de cálculo

1. La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

Solución: Mayor que un lápiz. Mediría 1.5 m

2. En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?

Solución: Área de la primera: $\pi\,10^2 = 100\,\pi$ ***Área de la segunda:*** $\pi\,20^2 = 400\,\pi$. ***Tiene mejor precio la segunda, porque tiene el cuádruple de tamaño de la primera y sólo vale el doble.***

3. Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

Solución: Al pesar el doble, medirá el doble: 80 cm.

4. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Solución: Suponemos que el abrigo necesario es directamente proporcional al tamaño, por lo que el padre necesitaría más abrigo y tendrá más frio.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	8.35		0.75	1.5	
euros		14	2.25		8

Solución: Razón de proporcionalidad: $\frac{2.25}{0.75} = 3$

litros	8.35	$\frac{14}{3} = 4.666\ldots$	0.75	1.5	$\frac{8}{3} = 2.666\ldots$
euros	**25.05**	14	2.25	**4.5**	8

2. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

Solución: Supongamos que caben 12. Entonces han ido $400 \times 12 = 4\,800$

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?

Solución: $48 \times 4 = 192$ *€.*

4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?

Solución: $\frac{85\times 23}{15} = \frac{17\times 23}{3} = 130.333\ldots$ *Entonces cuesta 130.33 €*

5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?

Solución: $\frac{5\times 10}{0.6} = \frac{500}{6} = 83.333\ldots$*: 83 sillas*

6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?

Solución: Kilos totales transportados: $300 \times 25 = 7500$*. Kilos por viaje:* $\frac{7500}{2} = 3750$*.*

Kilos totales a transportar: $950 \times 30 = 28500$*. Número de viajes:* $\frac{28500}{3750} = \frac{570}{75} = \frac{38}{5} = 7.6$*, es decir, 8 viajes.*

7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

Solución: Número de páginas totales primera edición: $300 \times 400 = 120000$*.*
Número de páginas totales segunda edición: $700 \times 140 = 98000$*.*
Peso segunda edición: $\frac{100\times 98000}{120000} = \frac{245}{3} = 81.66\ldots$ *kg.*

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15.9			0.01	
Magnitud B		6	0.1		10

Solución:

Magnitud A	15.9	*3.33…*	*0.055…*	0.01	*5.55…*
Magnitud B	*28.62*	6	0.1	*0.018*	10

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

Solución: Precio total: $285\ \frac{121}{100} = 57\ \frac{121}{20} = 344.85$. *Precio rebajado:*

$344.85 - 344.85\ \frac{15}{100} = 344.85\ \frac{85}{100} = 68.97\ \frac{17}{4} = 293.1225$, *es decir: 293.12 €*

10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?

Solución: $1500 + 1500\ \frac{12}{100} = 1500\ \frac{112}{100} = 15 \times 112 = 1680$ €

11. Si un litro de leche de 0.85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?

Solución: $0.85 + 0.85\ \frac{12}{100} = 0.85\ \frac{112}{100} = 0.17 \times 5.6 = 0.952$. *Vale 0.95 €*

12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?

Solución: $1900 - 1900\ \frac{x}{100} = 1900\ \frac{100-x}{100} = 19\ (100 - x) = 1200 \Rightarrow x = 100 - \frac{1200}{19} = \frac{700}{19} \approx 36.84\ \%$

13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?

Solución: $60 - 60\ \frac{15}{100} = 51$ €

14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

Solución: $x - x\ \frac{22}{100} = x\ \frac{78}{100} = x\ \frac{39}{50} = 483.60 \Rightarrow x = \frac{483.60 \times 50}{39} = 620$ €

15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?

Solución: $x - x\ \frac{20}{100} = x\ \frac{80}{100} = x\ \frac{4}{5} = 20 \Rightarrow x = \frac{20 \times 5}{4} = 25$ €

16. Por liquidar una deuda de 35000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

Solución: $35000 - 35000\ \frac{x}{100} = 35000\ \frac{100-x}{100} = 350\ (100 - x) = 30800 \Rightarrow x = 100 - \frac{30800}{350} = \frac{84}{7} = 12\ \%$

17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

Solución: 483.60 €.

18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?

Solución: $25 + 25\ \frac{x}{100} = 25\ \frac{100+x}{100} = \frac{100+x}{4} = 29 \Rightarrow x = 116 - 100 = 16\ \%$

19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?

Solución: $10000 + 10000\ \frac{x}{100} = 10000\ \frac{100+x}{100} = 100\ (100 + x) = 12000 \Rightarrow x = 120 - 100 = 20\ \%$

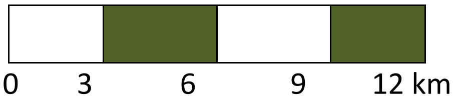
20. Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

Solución: $\frac{200}{800000} = \frac{1}{4000} = 0.00025\ km = 25\ \text{cm}$

21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

Solución: $\frac{340}{x} = 0.00012\ km \Rightarrow x = \frac{340}{0.00012} = 2833333.33\ldots$ *Escala* ***1 : 2833333.33... = 3 : 8 500 000***

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



Solución: ***Cada centímetro en la escala son 3 km en la realidad. Entonces 21 cm corresponden a*** $21 \times 3 = 63\ km$

23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

Solución:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho	***5 km largo y 1.25 km de ancho***	1 : 25000
10 cm	15 km	***1 : 150000***
1.5 cm	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7.5		3.5	
Magnitud B		12	0.15		10

Solución: Razón de proporcionalidad inversa: k = 12 x 7.5 = 90

Magnitud A	8	7.5	***600***	3.5	***9***
Magnitud B	***11.25***	12	0.15	***25.71...***	10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre
b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar
c) Talla de zapatos y precio de los mismos
d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen
e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado
f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse
g) Edad de una persona y estatura que tiene
h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla
i) Edad de una persona y número de amigos que tiene

Solución: a) Directa: a mayor velocidad, más espacio se recorre
b) Directa: cuanto más dinero tienes, más bolsas te puedes comprar
c) Directa: cuanto más grandes más cuestan, al tener más cuero.
d) Directa: cuanto más miembros tiene la familia más leche consumen (suponiendo que les guste la leche a todos por igual, en caso contrario no están en proporción)
e) Directa: cuanto más vendes, más recaudas.
f) Inversa: cuantos más grifos, más agua echan y menos tardan en llenarse.
g) No hay relación: la estatura primero aumenta con la edad y luego disminuye.
h) Inversa: cuantas más personas trabajen, más pronto terminan.
i) No hay relación: para el número de amigos no influye la edad.

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

Solución: $\frac{80\times 5.25}{4} = 105\ km/h$

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20		7		10.8
B		0.05		0.3	

Solución:

A	20	***100***	7	***16.66…***	10.8
B	***0.25***	0.05	0.71…	0.3	***0.46…***

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

Solución: $x = \frac{240\times 9}{180} = 12$ ***semanas;*** $x = \frac{240\times 9}{270} = 8$ ***semanas. Si les da la cuarta parte de la ración, le durará*** $4\times 9 = 36$ ***semanas. Si se interpreta como que les da las tres cuartas partes de la ración porque ha quitado un cuarto, le durará*** $\frac{4}{3}\times 9 = 12$ ***semanas.***

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

Solución: $x = \frac{65\times 25}{45} = \frac{325}{9} = 36.1\ldots$: ***36 días***

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2.7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

Solución: $x = \frac{15\times 4}{2.7} = \frac{600}{27} = 22.22\ldots$: ***23 paquetes***

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

Solución: ***Son inversamente proporcionales, porque cuanto menor es A mayor es B.***

A	24	8	0.4	6	**3.6**	50
B	3	9	180	**12**	20	**1.44**

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

Solución: $x = \frac{8\times 20}{7.5} = \frac{320}{15} = 21.33\ldots$: ***22 operarios***

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

Solución: ***Número total de raciones diarias para 100:*** $3 \times 100 = 300$. ***Número total de raciones diarias para 75:*** $2 \times 75 = 150$. ***Como son la mitad durarán el doble: 40 días.***

34. Si 15 operarios instalan 2500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5250 m de valla?

Solución: ***Metros de valla por día los 15 operarios:*** $\frac{2500}{7}$. ***Metros de valla por día los 12 operarios:*** $\frac{2500}{7}\frac{12}{15} = \frac{2000}{7}$. ***Días que tardan*** $\frac{5250}{\frac{2000}{7}} = \frac{147}{8} = 18.3\ldots$: ***19 días.***

35. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

Solución: El primero: $\frac{168000}{2} = 84000$ ***€. El segundo:*** $\frac{168000\times 78}{240} = 54600$ ***€. El tercero:*** $\frac{168000\times 42}{240} = 29400$ ***€***

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

Solución: El primero: $336\ \frac{160}{420} = 128$. ***El segundo:*** $336\ \frac{140}{420} = 112$. ***El tercero:*** $336\ \frac{120}{420} = 96$

37. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Solución: El primero: $3120\ \frac{22}{52} = 120 \times 11 = 1320$ ***€. El segundo:*** $3120\ \frac{16}{52} = 240 \times 4 = 960$ ***€.***

El tercero: $3120\ \frac{14}{52} = 120 \times 7 = 840$ ***€***

38. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

Solución: $\frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{15}{270} + \frac{9}{270} + \frac{6}{270}$. ***El primero:*** $4350\ \frac{15}{30} = \frac{4350}{2} = 2175$.

El segundo: $4350\ \frac{9}{30} = 4350\ \frac{3}{10} = 1305$. ***El tercero:*** $4350\ \frac{6}{30} = 435 \times 2 = 870$

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

Solución: Precio total: $3 \times 14 + 1.5 \times 6 + 1.75 \times 8 = 42 + 9 + 14 = 65$ ***€.***

Precio por kg: $\frac{65}{(3+1.5+1.75)} = \frac{65}{6.25} = 10.4$. ***Precio del paquete:*** $\frac{10.4}{4} = 2.6$ ***€; 2 € y 60 c.***

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

Solución: Precio total: $8 \times 2.5 + 15 \times 1.6 + 1.2 \times 5 = 20 + 24 + 6 = 50$ ***€.***

Precio por litro: $\frac{50}{(8+15+5)} = \frac{50}{28} = 1.785\ldots$: ***1.757… €.***

Precio de coste de la botella: $1.78 + \frac{1.78}{2} = 1.78 + 0.89 = 2.67$ ***= 2.678….***

Precio de la botella: 3.75 €

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4.2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

Solución: Precio total: $5 \times 18 + 19 \times 4.2 + 12 \times 8 = 90 + 79.8 + 96 = 265.8$ ***€.***

Precio por kg: $\frac{265.8}{(5+19+12)} = \frac{265.8}{36} = 7.3833\ldots$***: 7.38 €.***

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

Solución: Primero: $177.5\frac{3}{35} = 35.5\ \frac{3}{7} = 15.214\ldots$***: 15.21 €. Segundo:*** $177.5\frac{5}{35} = \frac{177.5}{7} = 25.357\ldots$***: 25.36 €.***

Tercero: $177.5\frac{7}{35} = \frac{177.5}{5} = 35.5$ ***€. Cuarto:*** $177.5\frac{8}{35} = 35.5\ \frac{8}{7} = 40.571\ldots$***: 40.57 €.***

43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

Solución: $\frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{15}{180} + \frac{20}{180} + \frac{12}{180}$. ***La primera:*** $2\ 350\ 000\ \frac{15}{47} = 50\ 000 \times 15 = 750\ 000$ ***€.***

La segunda: $2\ 350\ 000\ \frac{20}{47} = 50\ 000 \times 20 = 1\ 000\ 000$ ***€.***

La tercera: $2\ 350\ 000\ \frac{12}{47} = 50\ 000 \times 12 = 600\ 000$ ***€***

44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280.5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

Solución: $\frac{280.5}{340} = \frac{561}{680} = 0.82\ldots$

45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0.900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0.950 de ley y 20 g de 0.750 de ley?

Solución: $60 \times 0.95 + 20 \times 0.75 = 72\ g$ ***(Observa que no hace falta el dato de los 0.900 de ley, está implícito en lo siguiente)***

46. ¿Qué capital hay que depositar al 3.5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?

Solución: $810 = \frac{C\ 3.5\times5}{100} \Rightarrow C = \frac{81000}{3.5\times5} = 4\ 628.571\ldots$*: 4 628.57 €*

47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25 400 € al 1.4 % en 10 años?

Solución: Interés: $\frac{25400\times1.4\times10}{100} = 2540 \times 1.4 = 3556$. ***Capital final:*** $25400 + 3556 = 28956$ ***€***

48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74 500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?

Solución: $\frac{74500\times3\ t}{1200} = 2980 \Rightarrow t = \frac{2980\times1200}{74500\times3} = 16$ ***meses***.

49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63 338.5 €. ¿De qué capital se trata?

Solución: Supongo que se ha convertido al cabo de un año. Entonces:

$C + C\ \frac{3}{100} = \frac{103}{100}\ C = 63338.5 \Rightarrow C = \frac{63338.5\times100}{103} = 61493.689\ldots$***: 61 493.69 €***

50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

Solución: Supongo que se ha reconstruido el puente poniendo las 200 vigas a igual distancia. Entonces la distancia es $\frac{850}{200} = \frac{17}{4} = 4.25\ m$

51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otras dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

Solución: Los dos sin faltas: 150 € cada uno. Quedan por repartir: 500 – 300 = 200 €.

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$. ***El de una falta:*** $200\ \frac{4}{7} = \frac{800}{7} = 114.285\ldots$***: 114.29 €.***

El de dos faltas: $200\ \frac{2}{7} = \frac{400}{7} = 57.142\ldots$***: 57.14 €. El de cuatro faltas:*** $200\ \frac{1}{7} = \frac{200}{7} = 28.571\ldots$***: 28.57 €***

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

a) 2000; 0.025; 20; 20000 b) 2000; 0.25; 2; 20000 c) 1000; 0.025; 10; 10000

Solución: a) Constante: $\frac{50}{0,25}=\frac{50}{\frac{1}{4}}=200$

A	10	0.25	**0.025**	0.1	100
B	**2000**	50	5	**20**	**20000**

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.

Solución: c)

3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %

Solución: b)

4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio (no hace falta este dato). ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

Solución: d)

5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

a) 40; 200; 11.5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

Solución: c)

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:

a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t

Solución: a)

7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2.7 cm equivalen a 0.81 km es:

a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300

Solución: c)

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

Solución: b)

9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1.2 €/kg, 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.05 €

Solución: d)

10. La ley de una aleación es 0.855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d) 306 g

Solución: a)

CAPÍTULO 3: POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es: $(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N$ euros

***Solución:** Este mes hemos realizado N llamadas a 12 céntimos el establecimiento de llamada, con una duración total de M minutos, con un coste al minuto de 5 céntimos, por lo que el importe total es:* $(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N$ €.

2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.

Solución: πr^2.

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:
   a) La mitad del opuesto de su suma. b) La suma de sus cubos. c) El cubo de su suma
   d) El inverso de su suma. e) La suma de sus inversos

***Solución:** a)* $\frac{1}{2}(-(x+y))$ *b)* x^3+y^3 *c)* $(x+y)^3$ *d)* $\frac{1}{x+y}$ *e)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

***Solución:** a) El triple de un número más cuatro; b) La tercera parte de un número menos su cubo; c) La tercera parte de la suma de los cubos de tres números; d) La diferencia de los cuadrados de dos números entre el cuadrado de su diferencia*

5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

Solución: $x - \frac{20}{100}x = 0.8\,x$.

6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

***Solución:** El % de descuento será 20 + 5(n–1). En el caso de 10 artículos será por tanto 20 + 5*9 = 65 % de descuento.*

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:
   a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$. b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$. c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

***Solución:** a) – 12; b) – 24; c) 8.*

8. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$
   a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = 5$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

***Solución:** a) 80; b) 170; c) 20.*

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

9. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:
   a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

***Solución:** a) Coeficiente:* $\frac{3}{2}$. *Parte literal:* x^2y^3 *b) Coeficiente:* $\frac{7\times 4}{2} = 14$. *Parte literal:* $a^2\,b\,c$

c) Coeficiente: $\frac{2\times 5\times 9}{2} = 45$. *Parte literal:* $x\,z\,c$.

10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
   - $(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3)$
   - $-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6)$

Solución: $3x^3-4x^2-4x-1$; $-2x^4+5x^3-4x^2-5x+7$

11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$ b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$

c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$ d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$

Solución: a) $4x - 6$ **; b)** $2x^2 - 6x + 13$ **; c)** $-3a - 14b$ **; d)** $5a^2 - 4ab + 8b^2$ **.**

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2$

b) $9x$

c) $-2x^4 + 4x^2$

Solución: a) $-4x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 5x + 2$ **; b)** $-9x$ **; c)** $2x^4 - 4x^2$ **.**

13. Considera los polinomios $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, $q \equiv 2x^2 + 2x + 9$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

Solución: $p(-2)$ = $-2(-2)^3 - 6(-2) + 3 = 31$ **,** $q(-2) = 2(-2)^2 + 2(-2) + 9 = 13$ **;**

$s(x) = -2x^3 + 2x^2 - 4x + 12 \Rightarrow s(-2) = -2(-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 44$ **. Se cumple que:** $s(-2) = p(-2) + q(-2)$

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

Solución: $p(3)$ = $-2 \times 3^3 - 6 \times 3 + 3 = -69$ **;** $-p(3) = 69$ **.**

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3 + 3x) \cdot (-4x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) \cdot (-4x - 5)$

c) $(3x^3 + 2x^2 - 2x) \cdot (4x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (6x^3 - 3x^2 - 2x + 3)$

Solución: a) $20x^5 - 12x^3$ **; b)** $-12x^5 - 15x^4 - 8x^2 - 10x$

c) $(3x^3 + 2x^2 - 2x) \cdot (4x^2 - x) = 12x^5 - 3x^4 + 8x^4 - 2x^3 - 8x^3 + 2x^2 = 12x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 2x^2$

d) $-6x^3 + 3x^2 + 2x - 3$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3 + x) - (-2x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) - (-4x - 5)$ c) $(4x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x)$

Solución: a) $-3x^3 + 2x^2 + x$ **; b)** $3x^4 + 6x + 5$ **; c)** $-x^3 + 2x^2$ **.**

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $3x^3 - 2x^2 + x$ b) $-4x^4 + 2x - 5$ c) $-x^2 + 2x - 6$

Solución: a) 1/3; b) –1/4; c) –1; ya que

a) $\frac{1}{3}(3x^3 - 2x^2 + x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ **b)** $-\frac{1}{4}(-4x^4 + 2x - 5) = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

c) $(-1)(-x^2 + 2x - 6) = x^2 - 2x + 6$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Solución: a) $6x^3 + 12x^2 - 18x$; b) $12x^2 + 2x - 24$; c) $8a^2b - 6a^5 - 20b^2 + 15a^3b$; d) $-54a^3 + 336a^2 - 504a + 96$.

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$ b) $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

Solución: a) $-9x^7 - 12x^6 + 6x^5$ **; b)** $24x^4 + 36x^3 - 30x^2 - 32x^3 - 48x^2 + 40x$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x$ b) $60x^4 - 30x^2$

Solución: a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x$ **= $10x$(**$-2x^2 - 4x + 1$**); b)** $60x^4 - 30x^2$ **= $30x^2$(**$2x^2 - 1$**).**

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

Solución: Comprobado

22. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$

b) $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

c) $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$

d) $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$

e) $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$

Solución:

a)

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-2x^2-2x+6 & x^2-3x+5 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3+9x^2-15x} \quad & 3x+7 \\ 7x^2-17x+6 & \\ \underline{-7x^2+21x-35} & \\ 4x-29 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} -15x^3-3x^2+4x+5 & 5x^3-2x^2-2x+4 \\ \cline{2-2} \underline{15x^3-6x^2-6x+12} & -3 \\ -9x^2-2x+17 & \end{array}$$

c)

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4-7x^3+7x^2-4x-8 & -2x^2+2x+5 \\
\underline{-6x^4+6x^3+15x^2} & -3x^2+\frac{1}{2}x-\frac{21}{2} \\
-x^3+22x^2-4x-8 & \\
\underline{x^3-x^2-\frac{5}{2}x} & \\
21x^2-\frac{13}{2}x-8 & \\
\underline{-21x^2+21x+\frac{105}{2}} & \\
\frac{29}{2}x+\frac{89}{2} &
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{l|l}
-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6 & 4x^3+2x^2+x-2 \\
\underline{16x^5+8x^4+4x^3-8x^2} & -4x^2+\frac{5}{4}x+\frac{17}{8} \\
5x^4+11x^3-5x^2+4x+6 & \\
\underline{-5x^4-\frac{5}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x} & \\
\frac{17}{2}x^3-\frac{25}{4}x^2+\frac{13}{2}x+6 & \\
\underline{-\frac{17}{2}x^3-\frac{17}{4}x^2-\frac{17}{8}x+\frac{17}{4}} & \\
-\frac{21}{2}x^2+\frac{35}{8}x+\frac{41}{4} &
\end{array}
$$

e)

$$
\begin{array}{l|l}
-7x^5+3x^2+2 & x^2+4 \\
\underline{7x^5+28x^3} & -7x^3+28x+3 \\
28x^3+3x^2+2 & \\
\underline{-28x^3-112x} & \\
3x^2-112x+2 & \\
\underline{-3x^2-12} & \\
-112x-10 &
\end{array}
$$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

Solución abierta: Si tomamos como divisor p(x) =1, el dividendo será:

$$D(x)=p(x)q(x)+r(x)=x^2+2x-1-2x^2+3=-x^2+2x+2$$

24. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

Solución: a) $\frac{6x^2+4x+5x^2+5}{2x(x^2+1)}=\frac{11x^2+4x+5}{2x^3+2x}$ ***b)*** $\frac{x+2-3x+9}{(x-3)(x+2)}=\frac{-2x+11}{x^2-x-6}$

c) $\frac{-10x}{(5x^2+4x)(3x-2)}=\frac{-10x}{15x^3+2x^2-8x}$ ***d)*** $\frac{(x-4)(x+5)}{(x^2+5x)(x-4)}=\frac{1}{x}$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$ b) $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$

Solución: a) $\frac{-3x^2+2x-1+4x^2-x}{x^3}=\frac{x^2+x-1}{x^3}$; ***b)*** $\frac{x-1-6x}{x^2+5x}=\frac{-5x-1}{x^2+5x}$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$ b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$ c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\frac{3y^2+2y}{y-4}$ e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

Solución: Comprobado.

27. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$ b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$ d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

Solución: a) $3x^2-9x-6$; *b)* a^3-10a^2-3; *c)* $5x^2-2$; *d)* $3xy-8$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Solución: a) $\frac{3x(x-2)}{3(x^2+5)}=\frac{x^2-2x}{x^2+5}$; *b)* $\frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)}=\frac{a-5}{7a+4}$; *c)* $\frac{xy(x+3y)}{4xy}=\frac{x+3y}{4}$

d) $\frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)}=\frac{2ab+3}{a^2-1}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- $-3x^3+3x=-3x\cdot(\quad\quad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\quad\quad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\quad\quad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\quad\quad)$

Solución:

- $-3x^3+3x=-3x\cdot(x^2-1)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(-3x-2)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\ )$

No es posible, ya que el término en x^2 ha de ser $-3x^2$ para que el producto con el término en x^2 del otro polinomio dé $-6x^4$ y el término independiente ha de ser 6 para que el producto con el término independiente del otro polinomio dé 6 y el término en x ha de ser $9x$ para que el producto con el término en x del otro polinomio dé $-9x^2$ y se cancele con el $9x^2$ que queda al cruzar los términos cuadráticos con los términos independientes (el polinomio de la izquierda no tiene término en x^2). Pero entonces no cuadra el término en x^3.

- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(-3x^2+3)$
-

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $6x^4-x^3+3x^2-x$

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1 b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2 c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1 e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

Solución: a) $3^3-3\times3^2+1=1\neq0$*: no es raíz.* *b)* $(-2)^3+3(-2)^2+3(-2)+2=0$*: es raíz;*

c) $1^3-3\times1^2+1+1=0$*: es raíz;* *d)* $0^3-3\times0^2+1=1\neq0$*: no es raíz;*

e) $(-1)^3-3(-1)^2-(-1)+3=0$ *: es raíz.*

32. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

Solución: a) No necesariamente: $\alpha=0$ ***es una raíz de*** $p_1(x)=x$***, pero si*** $p_2(x)=1$***,*** $\alpha=0$ ***no es una raíz de*** $p_1(x)+p_2(x)=x+1$***; b) Sí, ya que*** $p_1(\alpha)\cdot p_2(\alpha)=0\cdot p_2(\alpha)=0$***; c) Son las mismas, ya que*** $p_1(\alpha)=0\Leftrightarrow 4\,p_1(\alpha)=0$***.***

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x\,(x-1)(x-2)=(x^2-x)(x-2)=x^3-3\,x^2+2\,x$***.***

34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x^2\,(x-1)=x^3-x^2$

35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = x^3

36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$ admite al número 0 como raíz.

Solución: a_0 = 0. Debe ser nulo el término independiente.

37. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$ admite al número 1 como raíz.

Solución: La suma de los coeficientes ha de ser 0, ya que: $a_n1^n+a_{n-1}1^{n-1}+......+a_11+a_0=a_n+a_{n-1}......+a_1+a_0=0$

38. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$ e) $-3x$

f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

Solución: a) $x+6$ ***; x = –6; b)*** $-x+4$ ***; x = –4; c)*** $2x-7$ ***; x = 7/2; d)*** $-4x-5$ ***; x = –5/4; e)*** $-3x$ ***; x = 0;***

f) x^2-5x ***; x =0, 5, ya que*** $x^2-5\,x=x\,(x-5)=0\Leftrightarrow x=0,\,x=5$ ***;***

g) $4x^2-x-3$ ***; x =*** $\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\dfrac{1\pm 7}{8}=1,-\dfrac{3}{4}$ ***; h)*** x^3-4x ***; x = 0, 2 y –2, ya que*** $x^3-4\,x=x\,(x^2-4)=0\Leftrightarrow x=0,\,x^2=4\Leftrightarrow x=0,\,x=\pm 2$ ***;***

i) x^3+4x ***; Raíces reales únicamente x = 0, ya que*** $x^3+4\,x=x\,(x^2+4)=0\Leftrightarrow x=0,\,x^2=-4$ ***, que no tiene raíces reales.***

39. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$ b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$ d) x^3-8x+2 entre $x-3$

Solución: a)

$$\begin{array}{r|rrr} & -3 & 2 & 2 \\ -1 & & 3 & -5 \\ \hline & -3 & 5 & -3 \end{array}$$

Cociente: $-3x+5$. ***Resto:*** -3

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -3 & 6 \\ -2 & & -2 & -2 & 10 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 16 \end{array}$$

Cociente: x^2+x-5. ***Resto: 16***

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & & 5 & 1 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Cociente: $5x^2+x+1$. ***Resto: –1***

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -8 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Cociente: x^2+3x+1. ***Resto: 5***

40. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ c) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

Solución: a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & & 3 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}$$

: No es raíz (no puede serlo al no dividir al término independiente)

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & & 2 & 0 & -2 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

: Es raíz

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \hline & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

: Es raíz (debe serlo al ser la suma de los coeficientes 0)

d) Es raíz

41. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & & -6 & -9 & -21 \\ \hline & -2 & -3 & -7 & -18 \end{array}$$

: –18

42. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Solución: Como $2x+6=2(x+3)$***, usamos la regla de Ruffini en*** $x=-3$ ***para dividir el polinomio por*** $x+3$ ***y el cociente que queda lo dividimos entre 2 para dividir el polinomio por*** $2x+6$***. El resto es el mismo ya que el divisor por el cociente queda igual en las 2 divisiones:***

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & & -3 & -9 & -21 \\ \hline & 1 & -3 & -7 & \boxed{-18} \end{array}$$

Cociente: $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$***. Resto: –18***

43. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2 b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$ c) $2x^3+x^2-18x-9$ d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

Solución: a) 1, -1***, 2 y*** -2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

1 es raíz y queda x^2+2***, que no tiene más raíces reales b) 1,*** -1***, 3 y*** -3

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & & -1 & -3 & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

-1 ***y*** -3 ***son raíces y queda*** x^2+1***, que no tiene más raíces reales c) 1,*** -1***, 3,*** -3***, 9 y*** -9

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -18 & -9 \\ 3 & & 6 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

3 y -3 ***son raíces y queda*** $2x+1$***, que no tiene más raíces enteras:*** $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

d) $x^4+2x^3+3x^2+6x=x(x^3+2x^2+3x+6)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ó } x^3+2x^2+3x+6=0$ ***por lo que las posibles raíces, además de 0, son 1,*** -1***, 2,*** -2***, 3,*** -3***, 6 y*** -6

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

0 y -2 ***son raíces y queda*** x^2+3***, que no tiene más raíces reales.***

44. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 1 & -18 & -9 \\
3 & & 6 & 21 & 9 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \lfloor 0 \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \lfloor 0 & \\
-\frac{1}{2} & & -1 & & \\
\hline
 & 2 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

Solución:

45. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2+4x+1$ b) $2x^3-9x^2+12x-4$

Solución: a) 1, -1, $\frac{1}{3}$ ***y*** $-\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & 4 & 1 \\
-1 & & -3 & -1 \\
\hline
 & 3 & 1 & \lfloor 0
\end{array}$$

-1 ***es raíz y queda*** $3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

b) 1, -1***, 2,*** -2***, 4,*** -4***,*** $\frac{1}{2}$ ***y*** $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -9 & 12 & -4 \\
2 & & 4 & -10 & 4 \\
\hline
 & 2 & -5 & 2 & \lfloor 0 \\
2 & & 4 & -2 & 4 \\
\hline
 & 2 & -1 & \lfloor 0 &
\end{array}$$

2 es raíz (doble) y queda:

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

46. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

Solución: a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -4 & & -4 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \lfloor 0 \end{array}$$

Entonces $x^3+3x^2-6x-8=(x+4)(x^2-x-2)$ **por lo que**

$$\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}=\frac{x(x+4)}{(x+4)(x^2-x-2)}=\frac{x}{x^2-x-2}$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & \lfloor 0 \end{array}$$

Entonces: $x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x^2+2x-8)$ **por lo que:**

$$\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x-8)}=\frac{x-1}{x^2+2x-8}$$

c) x^3+x^2-6x **no tiene las raíces 1 y** -1**, luego no se puede simplificar (lo único, sacar factor común a la x en el denominador)**

47. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

Solución: a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}=\dfrac{5}{-3(x-4)}+\dfrac{x+2}{x(x-4)}=\dfrac{5x-3(x+2)}{-3x(x-4)}=\dfrac{2x-6}{-3x^2+12x}$;

b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}=\dfrac{-x}{(x-1)^2}-\dfrac{3x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{-x(x+1)-(3x-1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{-4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+1)}$.

48. Realiza los cálculos:

a) $(1+4a)^2$ b) $(-x+5)^2$ c) $(-2x-3)^2$ d) $(x^2-1)^3$ e) $(5x+3)^3$

Solución: a) $(1+4a)^2=1+8a+16a^2$; **b)** $(-x+5)^2=x^2-10x+25$; **c)** $(-2x-3)^2=4x^2+12x+9$;

d) $(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$; **e)** $(5x+3)^3=125x^3+225x^2+135x+27$

49. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

Solución: a) $(a+b+c)^2$ **=** $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$; **b)** $(a+b-c)^2$ **=** $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

50. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x+3y)^2$ b) $(3x+y/3)^2$ c) $(5x-5/x)^2$

d) $(3a-5)^2$ e) $(a^2-b^2)^2$ f) $(3/5y-2/y)^2$

Solución: a) $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$; **b)** $(3x+\dfrac{y}{3})^2=9x^2+2xy+\dfrac{y^2}{9}$;

c) $(5x-\dfrac{5}{x})^2=25x^2-50+\dfrac{25}{x^2}$; **d)** $(3a-5)^2=9a^2-30a+25$;

e) $(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$; **f)** $(\dfrac{3}{5}y-\dfrac{2}{y})^2=\dfrac{9}{25}y^2-\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{y^2}$

51. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Solución: a) $(a+3)^2$; **b)** $(2x-1)^2$; **c)** $(b-5)^2$; **d)** $(2y+3)^2$; **e)** $(a^2-1)^2$; **f)** $(y^2+3)^2$.

52. Efectúa estos productos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$ b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$ c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Solución: a) $9x^2-4y^2$; **b)** $25x^4-1$; **c)** $4x^2-x^4$

53. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) x^2-4x+4 b) $3x^2+18x+27$ c) $3x^5-9x^3$

Solución: a) $(x-2)^2$; **b)** $3x^2+18x+27=3\left(x^2+6x+9\right)=3(x+3)^2$;

c) $3x^5-9x^3=3x^3\left(x^2-3\right)=3x^3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$

54. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

Solución: a) $9x^2-1$; **b)** $4a^2-9b^2$; **c)** x^4-25 ; **d)** $9a^4-25$

55. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

Solución: a) $(3x-5)(3x+5)$; **b)** $\left(2a^2-9b\right)\left(2a^2+9b\right)$; **c)** $(7-5x)(7+5x)$; **d)** $(10a-8)(10a+8)$

56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Solución: a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{3(x+1)}=\dfrac{x-1}{3}$

b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}=\dfrac{2\left(x^2+6x+9\right)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x+6}{x-3}$;

c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}=\dfrac{-3(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\dfrac{-3}{a+2}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es 2!

Analiza cómo tú, el mago, has podido conocer el resultado.

Pasatiempo

A B A
A B A
A B A
B C B

¿Cuánto valen A, B y C?

Solución: Sea x el número; (x*2 + 4) * 5 /10 – x = x + 20/10 – x = 2, ¡siempre 2!

Solución del pasatiempo: A = 1; B = 3; C = 9.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 3
   iii. Que al resultado anterior le sume 18
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que divida entre 6 la última cantidad
   vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
   vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

Solución: i) x; ii) 3x; iii) 3 x+18 iv) $2(3x+18)=6x+36$***; v)*** $\frac{6x+36}{6}=x+6$***; vi)*** $x+6-x=6$***. ¡Siempre 6!***

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.
   i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
   ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
   iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
   iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
   v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
   vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

Solución: i) x; y; ii) 4x; iii) $5\times 4x = 20x$***; iv)*** $5\times 20x = 100x$***; v)*** $100x + y$ ***; vi) El número de una cifra va multiplicado por 100, luego es la centena del número que te dicen, y el resto es el número de 2 cifras.***

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$ b) $\frac{-x}{x^2-6x+9}$ c) $\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

Solución: a) $(x+5)\cdot(2x-32)=0 \Leftrightarrow x+5=0$ ó $2x-32=0 \Leftrightarrow x=-5$ ó $x=16$;

b) $x^2-6x+9=(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$; **c)** $-2x^4-3x^2-4=-(2x^4+3x^2+4)<0$ **(ya que** $2x^4\geq 0$, $3x^2\geq 0$, $4>0$**). Entonces en todo número real la expresión puede ser evaluada;**

d) $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2=0, y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

Solución: Al final del primer año dispone de $2500+\frac{2}{100}2500=2550$**. Al cabo de dos años dispone de**

$$2550+\frac{2}{100}2550=2601\,€$$

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

Solución: En el primer año recuperamos $X+\frac{i}{100}X=\frac{100+i}{100}X$**. En el segundo año recuperamos:**

$\frac{100+i}{100}X+\frac{i}{100}\frac{100+i}{100}X=\left(\frac{100+i}{100}\right)^2X$**, ..., al cabo de** n **años recuperamos** $\left(\frac{100+i}{100}\right)^nX$

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5)=-2$.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x(x-5)-2=x^2-5x-2$

7. Consideremos los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-4x-3$, $q(x)=4x^4+3x^3-2x^2+x+8$ y $r(x)=5x^2+6x-2$. Realiza las siguientes operaciones:

$p+q+r$ $p-q$ $p\cdot r$ $p\cdot r-q$

Solución: a) $p(x)+q+r=4x^4+5x^2+3x+3$; **b)** $p(x)-q=-4x^4-6x^3+4x^2-5x-11$;

c)
$$p(x)\cdot r=(-3x^3+2x^2-4x-3)(5x^2+6x-2)=$$
$$=-15x^5-18x^4+6x^3+10x^4+12x^3-4x^2-20x^3-24x^2+8x-15x^2-18x+6=$$
$$=-15x^5-8x^4-2x^3-43x^2-10x+6$$

d)
$$p(x)\cdot r-q=-15x^5-8x^4-2x^3-43x^2-10x+6-(4x^4+3x^3-2x^2+x+8)=$$
$$=-15x^5-12x^4-5x^3-41x^2-11x-2$$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0.3*x* – 0.2*y* + 0.1*z*) · (0.1*x* + 0.2*y* – 0.3*z*) c) (*x* – 1) (*x* – *a*) (*x* – *b*)

Solución: a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)=-\frac{ax^2y}{18}+\frac{bxy^2}{12}$

b)
$$(0.3\,x-0.2\,y+0.1\,z)\cdot(0.1\,x+0.2\,y-0.3\,z)=$$
$$=0.03\,x^2+0.06\,x\,y-0.09\,x\,z-0.02\,x\,y-0.04\,y^2+0.06\,y\,z+0.01\,x\,z+0.02\,y\,z-0.03\,z^2=$$
$$=0.03\,x^2+0.04\,x\,y-0.08\,x\,z-0.04\,y^2+0.08\,y\,z-0.03\,z^2$$

c) $(x-1)\cdot(x-a)\cdot(x-b)=(x^2-(a+1)x+a)\cdot(x-b)=x^3-(a+1+b)x^2+(ab+a+b)x-ab$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

$3x^4-4x^3-9x^2+x-2$ entre $3x^2+4x-4$

$5x^5-6x^4+7x^3+3x^2-x-7$ entre x^3+3x+4

Solución:

a)	*b)*
$\begin{array}{l\|l} 3x^4-4x^3-9x^2+x-2 & 3x^2+4x-4 \\ \hline \underline{-3x^4-4x^3+4x^2} & x^2-\frac{8}{3}x+\frac{17}{9} \\ -8x^3-5x^2+x & \\ \underline{8x^3+\frac{32}{3}x^2-\frac{32}{3}x} & \\ \frac{17}{3}x^2-\frac{29}{3}x-2 & \\ \underline{-\frac{17}{3}x^2-\frac{68}{9}x+\frac{68}{9}} & \\ -\frac{155}{9}x+\frac{50}{9} & \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} 5x^5-6x^4+7x^3+3x^2-x-7 & x^3+3x+4 \\ \hline \underline{-5x^5\quad -15x^3-20x^2} & 5x^2-6x-8 \\ -6x^4-8x^3-17x^2-x & \\ \underline{6x^4\quad +18x^2+24x} & \\ -8x^3+x^2+23x & \\ \underline{8x^3\quad +24x+32} & \\ x^2+47x+32 & \end{array}$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

Solución: a) $(5x^4):(x^2) = 5x^2$; ***b)*** $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5) = 6xyz$; ***c)*** $(x^4 + 2x^2y + y^2) :(x^2 + y) = (x^2 + y)^2 : (x^2 + y) = x^2 + y$.

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-6x+9}$ b) $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{3x}{x^2-6x+9}$ c) $\frac{2x-3}{x^2-3x}\cdot\frac{3x}{x^2-6x+9}$; d) $\frac{2x-3}{x^2-3x}:\frac{3x}{x^2-6x+9}$

Solución: a) $\frac{2x-3}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-6x+9}=\frac{(2x-3)(x-3)+3x^2}{x^3-6x^2+9x}=\frac{5x^2-9x+9}{x^3-6x^2+9x}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{3x}{x^2-6x+9}=\frac{(2x-3)(x-3)-3x^2}{x^3-6x^2+9x}=\frac{-x^2-9x+9}{x^3-6x^2+9x}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x}\frac{3x}{x^2-6x+9}=\frac{(2x-3)3x}{x(x-3)(x-3)^2}=\frac{6x^2-9x}{x^4-9x^3+27x^2-27x}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x}:\frac{3x}{x^2-6x+9}=\frac{(2x-3)(x-3)^2}{3x^2(x-3)}=\frac{(2x-3)(x-3)}{3x^2}=\frac{2x^2-9x+9}{3x^2}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x(x+5)=x^2+5x$

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x\,(x-6)\,(x+3)=(x^2-6x)\,(x+3)=x^3-3x^2-18x$

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $(x^3-3x^2-18x)\,(x-2)=x^4-5x^3-12x^2+36x$

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $x(x-1)(x^2+1)=x^4-x^3+x^2-x$

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) =

$$(x-6)(x+3)(x-2)(x-4)(x-5)=(x^2-3x-18)(x^2-6x+8)(x-5)=$$
$$=(x^4-9x^3+8x^2+84x-144)(x-5)=x^5-14x^4+53x^3+44x^2-564x+720$$

17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=2x^4+x^3+3x^2+x+3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=x^2+x+1$.

Solución: q(x) = $p(x)-r(x)=2x^4+x^3+2x^2+2$

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$ b) $3x^3+2x^2+8x-3$ c) $3x^3+5x^2+x-1$ d) $2x^3+x^2-6x-3$

Solución: a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 11 & 5 & -3 \\ -1 & & -3 & -8 & 3 \\ \hline & 3 & 8 & -3 & 0 \\ -3 & & -9 & 3 & \\ \hline & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

Tiene las raíces –1, –3;

b) Probando con los divisores del término independiente, se ve que no tiene raíces enteras;

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & & -3 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & & -3 & 1 & \\ \hline & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

Tiene la raíz –1 (doble);

d) Probando con los divisores del término independiente, se ve que no tiene raíces enteras

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

Solución: a) Tiene las raíces –1, –3 y $3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 2 & 8 & -3 \\ \frac{1}{3} & & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 3 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

. Queda: $3x^2+3x+9=0 \Leftrightarrow x^2+x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}$

. Entonces la única raíz racional es $x=\frac{1}{3}$**.**

c) Tiene la raíz –1 (doble) y $3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -6 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 0 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

. Queda: $2x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$**. Entonces la única raíz racional es** $x=-\frac{1}{2}$

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

$3x^3+11x^2+5x-3$ $3x^3+5x^2+x-1$ $2x^3+x^2-6x-3$ $3x^3-6x^2+x-2$

Solución: $3x^3+11x^2+5x-3$ **=** $(x+1)(x+3)(3x-1)$

$3x^3+5x^2+x-1$ **=** $(x+1)^2\,(3x-1)$

$2x^3+x^2-6x-3$ **=** $\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6)$

$3x^3-6x^2+x-2$ **=** $(x-2)(3x^2+1)$

21. Calcula las potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

Solución: a) $(x-2y+z)^2 = (x-2y)^2 + z^2 + 2(x-2y)z = x^2 - 4xy + 4y^2 + z^2 + 2xz - 4yz$

b) $(3x-y)^3 = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$ **c)** $\left(\frac{1}{2}a + b^2\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^4 + a\,b^2$

d) $(x^3 - y^2)^2 = x^6 + y^4 - 2x^3y^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

$x^2 - 36$ $5x^2 + 1$ $5x^2 - 11$ $x^2 - 3y^2$ $x^2 - 6x + 9$

$x^4 - 8x^2 + 16$ $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$ $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

Solución: $x^2 - 36$ **= (x + 6)·(x – 6). Suma por diferencias**

$5x^2 + 1$**. No**

$5x^2 - 11$ **Suma por diferencias**

$x^2 - 3y^2$ **Suma por diferencias**

$x^2 - 6x + 9$ **= $(x - 3)^2$. Potencia de un binomio**

$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$**. Potencia de un binomio**

$x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2 = (x + \sqrt{5}\,y)^2$**. Potencia de un binomio**

$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$**. No**

$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$**. No**

23. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

Solución: a) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ **b)** $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

c) $x^2y^2 - z^2 = (xy - z)(xy + z)$ **d)** $x^4 - 2x^2y + y^2 = (x^2 - y)^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

Solución: a) Comprobado; b) $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

Solución: a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$ **b)** $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} = \dfrac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$

c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1} = \dfrac{x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2 - 1}$

Solución: a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)} = \dfrac{4 - 3x}{2x(5-x)} = \dfrac{4 - 3x}{10x - 2x^2}$

b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x-y)(x^2 + y^2)}{(x+y)(x-y)(x+y)} = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)^2}$ **c)** $\dfrac{2x+1}{4x^2 - 1} = \dfrac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{1}{2x-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{x^4-1}{x^7}:\frac{x^2+1}{x^8}$ b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)$

Solución: a) $\frac{x^4-1}{x^7}:\frac{x^2+1}{x^8}=\frac{(x^4-1)x^8}{(x^2+1)x^7}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)x}{x^2+1}=x^3-x$

b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x+4y}{2a-2b}=\frac{4x+6y-3x-4y}{2(a-b)}=\frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)=-4x+(1-x^2)(1+x^2)\frac{(x+1)^2-(1-x)^2}{1-x^2}=-4x+(1+x^2)4x=4x^3$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}$

Solución: a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2}:\frac{x^3+1}{x}=\frac{x^3-1}{x}$

b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}=\frac{(x-a)^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}:\frac{ab}{a+b}=\frac{4ab}{(a-b)ab}=\frac{4}{a-b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

Solución:

a) $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}=\frac{\frac{x+y-a}{a(x+y)}}{\frac{x+y+a}{a(x+y)}}:\frac{\frac{a+y-x}{x(a+y)}}{\frac{a+y+x}{x(a+y)}}=\frac{x+y-a}{x+y+a}:\frac{a+y-x}{a+y+x}=\frac{(x+y-a)(x+y+a)}{(a+y-x)(a+y+x)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy-a^2}{a^2+y^2+2ay-x^2}$$

b) $$\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^3}:\frac{x^2-3x-2}{x^3}=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^2-3x-2}$$

c) $$\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}=\frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y-3x}{xy}}\cdot\frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+5x}{xy}}=\frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y-3x)(3y+5x)}=\frac{6y^2+xy-2x^2}{3y^2-4xy-15x^2}$$

30. Confecciona una hoja de cálculo que te permita dividir un polinomio usando la Regla de Ruffini.

Solución manipulativa.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

Solución: a) 5, -8 ***, 3,*** -4 ***, 6,*** -7 ***;*** ***b)*** $-3, 2, -1, 4, -5$ ***;*** ***c)*** $7\cdot\sqrt{2}$ ***.***

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

Solución: c)

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ***tres***

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ***dos***

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ***cuatro***

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ***cuatro***

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

Solución: d)

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

Solución: b)

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) -3 y $\frac{1}{3}$ d) -3 y $\frac{3}{2}$

Solución: d)

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales. b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

Solución: b)

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

Solución: Sí, por ejemplo $x^2(x-1)(x-2)$ ***tiene 3 raíces: 0 (doble), 1 y 2***

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:
   a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.
   b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.
   c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.
   d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

Solución: a) Falso, el divisor ha de ser de grado 1;
b) Cierto, será raíz si al final sale un 0;
c) Falso, se puede usar para polinomios con coeficientes racionales, aunque es más lioso;
d) Falso, sólo las raíces racionales.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.

Solución: Puede haber polinomios de grado diez que no tenga ninguna raíz real (cuando estudies los números complejos verás que puede tener 5 raíces complejas y sus conjugadas. Por ejemplo $(x^2+1)^5$***.***

CAPÍTULO 4: ECUACIONES Y SISTEMAS LINEALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

ECUACIONES

1. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.

Solución abierta: Por ejemplo: 7 = 7xy + 4x; 7xy + 2x + 1 = 8 – 2x; 4xy + 5x + 2 = 9 – 3xy + x.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$

Solución: a) x = –9/35; b) x = 7/27; c) x = 85/32.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$

Solución: a) x = 85/162; b) x = 21/61; c) x = 82/87.

4. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ es $x = 6$.

Solución: 5/2 – 7/3 = 1/6. Comprobado.

5. Escribe tres ecuaciones de primer grado que tengan como solución 3, otras tres que tengan infinitas soluciones y tres que no tengan solución.

Solución abierta: Por ejemplo: 2x = 6; 2x + 3 = 2x + 3; 2x = 6 + 2x;

6. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y que su base es doble que su altura.

Solución: base = 10 cm y altura = 5 cm.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$

c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$ d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$

e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

Solución: a) x = –1/6; b) x = 3/46; c) x = –67/8; d) x = 39/70; e) x = 14/16; f) x = 10/13.

8. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2-\sqrt{2}x+8=0$ c) $3,2x^2 - 1,25 = 0$ e) $2x^2-\frac{3}{x}=0$

b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6,3x = 0$ f) $2x^2-3\sqrt{x}+4=0$

Solución: Son ecuaciones de segundo grado: a), c); No lo son: b), d), e), f).

9. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3.4x^2 + 7.8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1.25x^2 - 3.47x + 2.75 = 0$.

Solución: a) –8, 10 y 3; b) –3.4, 7.8, y 0; c) 6, 0 y –1; d) 1.25, –3.47, y 2.75.

10. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $2 - 7x^2 + 11x = 0$ b) $-2.3x^2 + 6.7x = 0$

c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9.1x^2 - 2.3x + 1.6 = 0$

Solución: a) –7, 11 y 2; b) –2.3, 6.7, y 0; c) 5, 0 y –9; d) 9.1, –2.3, y 1.6.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

Solución: a) 4 y 3; b) 2.5 y –3.2; c) 3.7 y 0.8; d) 5 y –2.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x-2\cdot\frac{x-1}{5}=x^2-\frac{10x+8}{5}$ b) $4\cdot\frac{x-3}{5}-\frac{7-4x}{x}=8$ c) $x(x-2)+3(x^2-7)+11=-11$

d) $6(x^2-7)+2(x^2-9)+3=2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x}-\frac{1}{3}=\frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x}-\frac{2}{5}=\frac{4x-2}{15}$

Solución: a) x = 6.9 y x = –2.3; b) x = 8.97 y x = –0.97; c) No tiene solución real; d) x = 2.7 y x = –2.7; e) x = –1 y x = 0.777…; f) x = 0.47 y x = –0.76.

13. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ d) $3x^2 - 8x + 6 = 0$

Solución: a) Sin soluciones reales; b) Sin soluciones reales; c) 6.65 y –1.65; d) Sin soluciones reales.

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

Solución: a) 0 y –6; b) 6 y –6: c) 7 y –7; d) 0 y 0.5; e) 2.5 y –2.5; f) 2 y 0.

15. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

Solución: a) 0 y –6; b) 2 y –4; c) 5 y –5; d) 5 y 4; e) 4 y –1; f) 7 y –3.

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

Solución abierta: Por ejemplo: $x^2 - 10x + 21 = 0$.

17. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm^2. Calcula sus dimensiones.

Solución: 5 cm y 3 cm.

18. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

Solución: $a = 2$.

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 6) \cdot (x - 3) \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x - 9) = 0$ b) $3(x - 4) \cdot (x - 8) \cdot (x + 5) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) = 0$

Solución: a) x = 6, 3, –7, 1 y 9; b) x = 4, 8, –5, 2 y 1.

20. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

Solución: a) 2, –2, 3 y –3; b) 2, –2, 5 y –5; c) 1, –1, 3 y –3; d) 1, –1, 5 y –5.

21. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\dfrac{2x-1+7x}{3x} = \dfrac{3}{x} - 2$ b) $\dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{2x-3}{x} + \dfrac{1}{x} = 1$

Solución: a) x = 10; b) x = 2 y x = –3; c) x = 2 y x = –0.5; d) x = 2.

22. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x + 2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x + 9$

Solución: a) x = 5 y x = 2; b) x = 11 y x = 3; c) No tiene solución real; d) x= 0 y x = –3.

23. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8$ b) $5^{3x} = \dfrac{1}{625}$ c) $2^{2x} \cdot 4^{x} = \dfrac{1}{16}$

Solución: a) x = –3; b) x = –4/3; c) x = –1.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

24. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

Solución: Son sistemas lineales: b), c); No lo son: a), d).

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

Solución gráfica: a) x = 1.4, y = 3.2 compatible determinado; d) Incompatible; c) Indeterminado.

26. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

Solución: a) x = 2, y = 3, compatible determinado; b) x = 5, y = 2, compatible determinado; c) x = –2, y = –3, compatible determinado.

27. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$, inventa un enunciado que resuelva dicho sistema

Solución abierta y creativa:

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

Solución: a) x = 6, y = 2; b) x = 7, y = 3; c) x =4, y = 2.

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=18 \\ -2x+3y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x+2y=26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

Solución: a) x = 5, y = 3; b) x = 4.75, y = 3.5; c) x = 2, y = 1.

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-5y=-23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 4x+y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = 5; b) x = 2, y = 3; c) x = 3, y = –2.

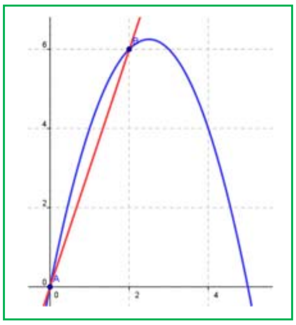
31. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ 2x^2-3y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+y^2=3 \\ 5x^2-2y^2=5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-4y=-3 \\ xy=1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x+y-\dfrac{y}{x}=1 \\ x+y=2 \end{matrix}\right\}$

Solución: a) x = 1, x = –1, y = 1, y = –1; b) x = 1, x = –1, y = 0; c) x = 1, y = 1/2 o bien x = 1/2, y = 1;
d) x = 1, y = 1; e) x = 1, y = 1.

32. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.



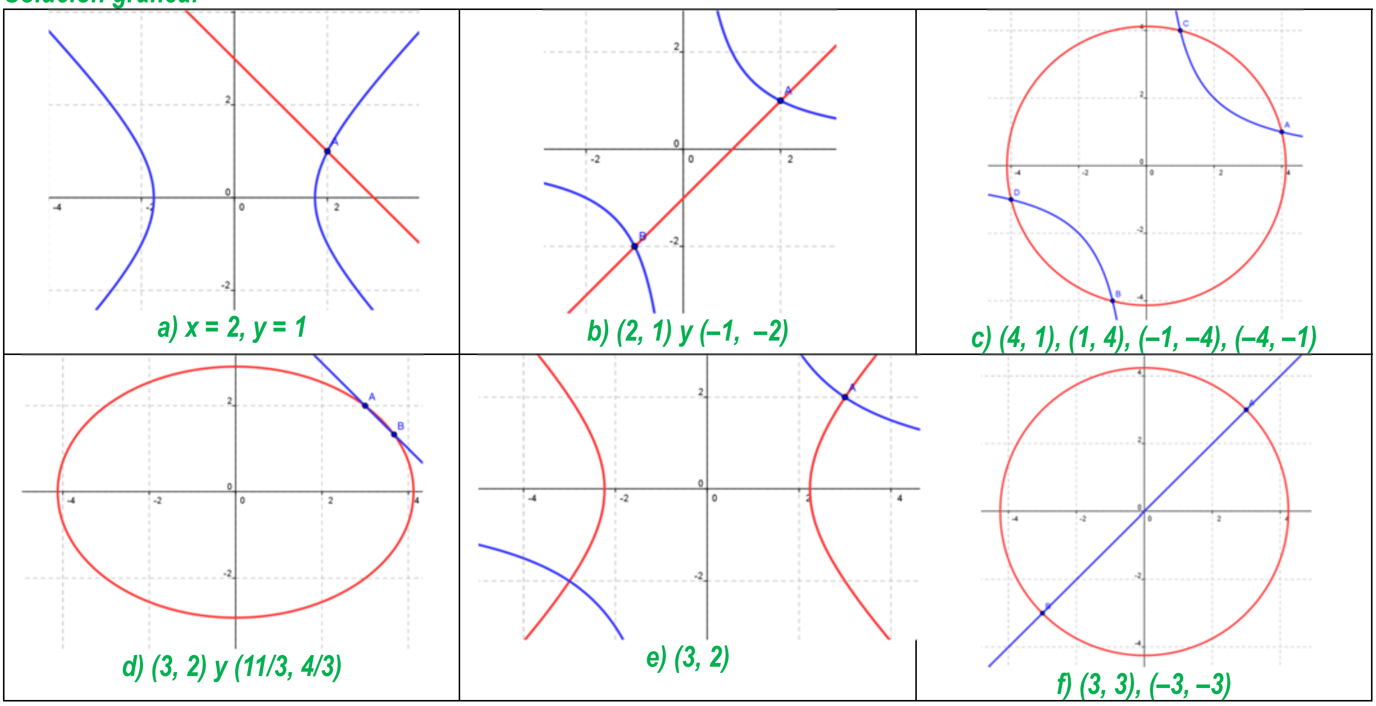
Solución gráfica: (0, 0) y (2, 6).

33. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

Solución gráfica:



a) x = 2, y = 1
b) (2, 1) y (–1, –2)
c) (4, 1), (1, 4), (–1, –4), (–4, –1)
d) (3, 2) y (11/3, 4/3)
e) (3, 2)
f) (3, 3), (–3, –3)

34. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ x+2y+2z=4 \\ 3x-2y-3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-2z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ x-2y-3z=-6 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = –1, z = 1; b) x = 2, y = 0, z = 1; c) x = 1, y = 2, z = 1.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

35. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

Solución: x = –1.

36. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

Solución: 20 alumnos.

37. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

Solución: 10, 11 y 12.

38. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

Solución: El margen mide 2 cm.

39. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Solución: 5 y –17/3.

40. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

Solución: Lado = 8 cm; Área = $4\sqrt{15}$ cm^2.

41. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

Solución: 12 cm.

42. Un padre dice: “El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años”. Calcula la edad del hijo.

Solución: El hijo tiene 10 años.

43. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

Solución: 3 m y 7 m.

44. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

Solución: 16 cm, 12 cm y 19 cm.

45. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

Solución: 14 y 16.

46. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

Solución: 5, 3 y 1.

47. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?

Solución: Alfonso tiene 45 años y María tiene 20 años.

48. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

Solución: Javier tiene 26 años y Mariló tiene 7 años.

49. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

Solución: 64 y 40.

50. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

Solución: Tiene 22 habitaciones individuales y 20 habitaciones dobles,

51. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

Solución: Los catetos miden 6 y 8 cm, el área = 24 cm^2.

52. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice “La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90”. Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

Solución: Un 9 y un 10.

53. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

Solución: Hay dos soluciones, el número 561 y el 237.

54. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:
El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.
El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.
El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.
Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

Solución: Habrá que tomar 19/60 dl del primer zumo, 5/12 dl del segundo y 53/120 dl del tercero.

55. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

Solución: Hay infinitas soluciones. Por ejemplo que se haya vendido 100 kg de trigo, 10 kg de cebada y 0 kg de mijo.

56. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1.2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

Solución: Debemos poner 60 kg de la harina de 2 €/kg y 240 kg de la harina de 1 €/kg.

57. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

Solución: Hay 10 juguetes del tipo A y 20 juguetes del tipo B.

58. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

Solución: El peatón lleva caminando 3/4 de hora, camina 3 km, el ciclista 12 km. Se cruzan a 12 km de B.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

Solución: a) 15/8; b) –19/32; c) 37/16.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-3x^2-5x-2=0$ b) $2x(-3+x)=5$ c) $3x^2=27x$
d) $5(3x+2)-4x(x+6)=3$ e) $4(x-9)+2x(2x-3)=6$ f) $10(2x^2-2)-5(3+2x)=-21$
g) $4(x+5)\cdot(x-1)=-2x-4$ h) $3x\cdot(5x+1)=99$ i) $2(3x^2-4x+2)-2x(3x-2)=-5$

Solución: a) –1 y –2/3; b) 3.7 y –0.7; c) 9 y 0; d) 0.6 y –2.86;
e) 7/2 y –3; f) 1.1 y –0.6; g) 0.76 y –5.26; h) 2.47 y –2.67; i) 9/4.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$

d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

Solución: a) 3.2 y —1.7; b) 3.6 y –1.6; c) 0.39 y –0.64; d) 5.8 y 0.17; e) Sin solución real; f) 1.57 y –2.07.

4. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-3x-10=0$ b) $x^2+3x-10=0$ c) $x^2+7x+10=0$
d) $x^2-7x+10=0$ e) $x(-1+x)=0$ f) $2x^2=50$
g) $x^2-5x+6=0$ h) $x^2-x-6=0$ i) $x^2+x-6=0$

Solución: a) 5 y –2; b) 2 y –5; c) –2 y –5; d) 5 y 2; e) 0 y 1; f) 5 y –5; g) 3 y 2; h) 3 y –2; i) 2 y –3.

5. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:
$2x^2-50=0 \Leftrightarrow 2(x+5)\cdot(x-5)=0$.
Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

Solución: a) (x + 2)·(x – 5) = 0; b) (x – 2)·(x + 5) = 0; c) (x + 2)· (x + 5) = 0; d) (x – 2)· (x – 5) = 0; e) x(x – 1) = 0;
f) 2(x + 5)·(x – 5) = 0; g) (x – 3)· (x – 2) = 0; h) (x – 3)· (x + 2) = 0; i) (x – 2)· (x + 3) = 0.

6. Cuando el coeficiente *b* es par (*b* = 2*B*), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Solución: a) x = 6 y x = 4; b) x = 7 y x = –1; c) x = 1 y x = –5.

7. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 3)\cdot(x - 7) = 0$ b) $(x + 2)\cdot(x - 4) = 0$ c) $(x - 8)\cdot(x - 4) = 0$

d) $(x - 2)\cdot(x + 5) = 0$ e) $(x + 6)\cdot(x - 3) = 0$ f) $(x - 5)\cdot(x + 3) = 0$

Solución: a) x = 3 y x = 7; b) x = –2 y x = 4; c) x = 8 y x = 4; d) x = 2 y x = –5; e) x = –6 y x = 3; f) x = 5 y x = –3.

8. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 5x - 2 = 0$ b) $5x^2 + 2x - 4 = 0$ c) $2x^2 + 4x + 11 = 0$

d) $2x^2 - 3x + 8 = 0$ e) $3x^2 - x - 5 = 0$ f) $4x^2 + 2x - 7 = 0$

Solución: a) D = 33, dos soluciones reales, x = 0.4 y x = –7.4; b) D = 84, dos soluciones reales, x = 0.7 y x = –1.1; c) D = –72, sin soluciones reales; d) D = –55, sin soluciones reales; e) D = 61, dos soluciones reales, x = 1.5 y x = –1.1; f) D = 116, dos soluciones reales, x = 1.1 y x = –1.6;

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

Solución abierta: Por ejemplo $x^2 + x + 2 = 0$; $x^2 + x + 3 = 0$; $x^2 + x + 4 = 0$.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

Solución abierta: Por ejemplo: $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x^2 - 2x + 1 = 0$.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

Solución abierta: Por ejemplo: $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x^2 - 6x - 7 = 0$; $x^2 - 2x - 8 = 0$.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

Solución: a) x = 0, x = 1, x = –1, x = 6, x = –6; b) x = 0, x = 4, x = –2; c) x = 0, x = 2, x = –3; d) $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$; e) x = 2, x = –2, $x=2\sqrt{3}$, $x=-2\sqrt{3}$; f) x = 0, x = 3, x = –3/2, x = 5/3

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

Solución: a) x = 1, x = –1, x = 3, x = –3; b) $x=2\sqrt{3}$, $x=-2\sqrt{3}$; c) x = –1, x = 2; d) x = –1, x = 1.

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $2x+\frac{3}{x}=5$ b) $\frac{3}{5x}+\frac{1}{2x}=x$ c) $\frac{1}{x-3}+2=\frac{5}{x-3}$ d) $\frac{2x}{3-2x}-5x=1$

e) $\frac{2}{x+1}=\frac{3(2x+1)}{x-1}+3$ f) $\frac{2x-3}{x+1}-\frac{4+5x}{x}=7$ g) $\frac{3x-2}{x+1}-\frac{2+3x}{x-1}=4$

h) $\frac{3}{1-x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x-x^2}$ i) $\frac{3x}{x-2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3x}{2}$ j) $\frac{1}{2}=\frac{x-5}{3-4x}$

Solución: a) $3x^2 - x + 2 = 0$, Sin soluciones reales; e) $7x^2 + 11x + 6 = 0$, Sin soluciones reales; h) x = 4/7;

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2}$ b) $\sqrt{25-x}=x-5$ c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0$ f) $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=5$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\frac{-2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x-1}}=1$ i) $\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}=4$

Solución: a) Sin soluciones reales; d) x = 9/4; g) x = 3.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3^{3x}=\frac{1}{81}$ b) $5^{2x}=\frac{1}{625}$

Solución: a) x = –4/3; b) x = –2.

Sistemas

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = 1; b) x = 2, y = 1; c) x = 2, y = 2.

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = 1; b) x = 1, y = 2; c) x = 2, y = 1.

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = 1; b) x = 2, y = 2; c) x = 2, y = 1.

20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

Solución gráfica: a) x = 5, y = 1; b) x = 1, y = 0; c) x = 1, y =2.

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{y-1}{5}=-1 \\ \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+3}{5}=-3 \\ 5x+2y=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-2}{3}=2 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

Solución: a) x = 0, y = 1; b) x = –12/5, y = 3/2; c) x = 13/36; y = 29/36.

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

Solución: Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (-6)x+3y=(-9) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (-5)x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(5) \\ (3)x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(-10)y=(85) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(2)y=-1 \\ (-2)x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (4)x+6y=(-4) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Solución: a) Incompatible; b) Compatible indeterminado; c) x = 7/2 y = –1/2.

Problemas

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

Solución: Hay 20 bicicletas y 31 triciclos.

25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

Solución: 20 años.

26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

Solución: 2 y 4.

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

Solución: 5 o bien –17/3.

28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

Solución: 13 y 15. (O bien, –13 y –15)

29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

Solución: El asno lleva 2 sacos y el mulo lleva 3 sacos.

30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Solución: 8. O bien: –5.

31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

Solución: 10, 11 y 12. O bien: –10, –11 y –12.

32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

Solución: 21 años.

33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

Solución: 16 y 18. O bien: –16 y –18.

34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

Solución: 12 y –7.

35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

Solución: Medio kilogramo de mazapanes y medio kilogramo de polvorones. Para 25 bandejas necesita 12,5 kg de cada cosa.

36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

Solución: 4 cm y 3 cm.

37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

Solución: 4 y 1. O bien: –4 y –1.

38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

Solución: 15 y 5.

39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

Solución: Hay 20 coches y 10 motos.

40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

Solución: Pedro tiene 15 años y Raquel 30 años.

41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

Solución: Hay 20 chicas y 15 chicos.

42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Solución: El abuelo tiene 53 años y el hermano 3.

43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

Solución: Un bocadillo cuesta 2 euros y un refresco cuesta 1 euro.

44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

Solución: Hay 33 pollos y 17 vacas.

45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Solución: Mide 54 cm de largo y 32 cm de ancho.

46. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

Solución: Hay 27 monedas de 1 € y 13 monedas de 2 €.

47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

Solución: Hay 34 arañas y 36 avispas.

48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

Solución: Hay 24 alumnos y 8 alumnas.

49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tienen?

Solución: Yolanda tiene 14 años y Pablo, 8 años.

50. Se mezclan 15 kg de maíz de 2.1 € el kilogramo con 27 kg de maíz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 3 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

Solución: 3.5 €.

51. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, el perímetro, 26 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.

Solución: La base menor mide 5 cm, la mayor, 11 cm, y el área, 27 cm^2.

52. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Valencia (que está a 350 km de Madrid) a las 8 de la mañana. Uno va a 100 km/h y el otro a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿Cuántos km han recorrido cada uno?

Solución: El que va a 100 km/h ha recorrido 159 km y el otro 191 km. Se cruzan a las 9 horas y 35 minutos y medio aproximadamente.

53. En un concurso se ganan 50 euros por cada respuesta acertada y se pierden 100 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Pilar lleva ganados 250 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

Solución: Pilar ha acertado 15 preguntas y fallado 5.

54. Juan ha comprado 6 zumos y 4 batidos por 4.6 €, luego ha comprado 4 zumos y 7 batidos y le han costado 4.8 €. Calcula los precios de ambas cosas.

Solución: Cada zumo cuesta 0.5 € y cada batido, 0.4 €.

55. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a $\frac{1}{2}$ cuando se suma 2 al denominador?

Solución: La fracción 3/4.

56. El cociente de una división es 3 y el resto es 2. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 2 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

Solución: Dividendo = 11; divisor = 3.

57. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?

Solución: La primera amiga tiene 7 peces y la segunda, 5 peces.

58. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 30 cm^2, y cuyo perímetro mide 26 cm.

Solución: 10 cm y 3 cm.

59. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 12 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?

Solución: El peatón lleva caminando una hora. Se cruzan a 8 km de B.

60. Se desea mezclar aceite de 3 €/l con otro aceite de 4.2 €/l de modo que la mezcla resulte a 3.50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

Solución: 116.7 litros del primero y 83.3 litros del segundo.

61. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 27 unidades mayor. Halla el número inicial.

Solución: Hay muchas soluciones: 41, 52, 63, 74, 85 y 96.

62. La diagonal de un rectángulo mide 30 cm, y el perímetro 84 cm. Halla los lados del rectángulo.

Solución: Miden 24 cm y 18 cm.

63. Una valla rodea un terreno rectangular de 1000 m^2. Si la valla mide 130 metros, calcula las dimensiones del terreno.

Solución: Mide 40 m x 25 m.

64. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 900 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan dos amigos más, con lo que cada uno toca a 15 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

Solución: Inicialmente son 10 amigos. Finalmente pagarán 75 €.

65. Las diagonales de un rombo se diferencian en 3 cm y su área es de 20 cm^2. Calcula su perímetro.

Solución: Miden 5 cm y 8 cm.

66. Un tren sale de Bilbao hacia Alcázar de San Juan a una velocidad de 140 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Alcázar de San Juan hacia Bilbao a 100 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 500 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Alcázar de San Juan?

Solución: A una distancia de Alcázar de San Juan de 150 km. Se cruzan aproximadamente a las 2 horas y media de que el primer tren inicie el viaje.

67. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 70 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?

Solución: A los 30 + 42 minutos, es decir a la hora y 12 minutos de de la salida del primer coche y a una distancia de 84 km.

68. Diseña una página de cálculo que resuelva ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Solución: Puedes verlo en Sistemas y ecuaciones.

69. Utiliza la Hoja de cálculo Ecuaciones y sistemas para comprobar las soluciones de los ejercicios de este capítulo.

Solución abierta y manipulativa

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3(x - 1) - 2(x - 2) = 5$ es:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

Solución: b)

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

Solución: b)

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{4x-1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{x^2}{2}$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

Solución: c)

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son:

a) 1, –1, 4, –4 b) 1, –1, 2, –2 c) 2, –2, 3, –3 d) 2, –2, 5, –5

Solución: b)

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

Solución: c)

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

Solución: a)

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

Solución: b)

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3 + 2x - 7 = x - 1 + y \\ 2x - 9y = 13 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = -1$ b) $x = -2$ e $y = 1$ c) $x = 1$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 1$

Solución: a)

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

Solución: a)

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 20 años b) 7 años c) 25 años d) 8 años

Solución: a)

CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA DEL PLANO Y DEL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.

Solución: La hipotenusa debe medir 20 cm.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m* c) 2 *dm* y 5 dm d) 23.5 *km* y 47.2 *km*.

Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.

Solución: a) 5 cm; b) $5\sqrt{2}$ ***m ≈ 7.071 m; c)*** $\sqrt{29}$ ***dm ≈ 5.39 dm; d)*** $\sqrt{2780.09}$ ***km ≈ 52.726559 km;***

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
   a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m*
   c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21.2 *km* y 11.9 *km*

Solución: a) $\sqrt{55}$ ***cm ≈ 7.42 cm; b) 12 m; c)*** $15\sqrt{5}$ ***dm ≈ 33.54 dm;***
d) $\sqrt{307.83}$ ***km ≈ 17.545085 km.***

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.

Solución: $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ ***m² ≈ 10.825 m².***

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.

Solución: $\frac{73}{2}\sqrt{3}$ ***cm² ≈ 127.31 cm².***

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

Solución: $3\sqrt{3}$ ***cm ≈ 5.2 cm.***

7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

Solución: $7\sqrt{2}$ ***m ≈ 9.899 m.***

8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1.5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0.2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?

Solución: 75 m.

9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

Solución: k = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

Solución: ON es la mitad de OB, OM es la mitad de OC y MN es la mitad de BC.
Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es 0.5.

11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Solución: La arista de la base mide 1.2 cm y la altura 4 cm.

12. Justifica que los triángulos *ABC* y *A''B''C''* son semejantes. Calcula la razón de semejanza y la razón entre sus áreas. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:

13. ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *A''B''C''*? Observa en la Ventana algebraica las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:

14. Dibuja distintos pentágonos y hexágonos que no sean regulares y con la herramienta Dilata objeto desde punto indicado, según factor, construye otros semejantes.
    a) Argumenta por qué son semejantes.
    b) Calcula en cada caso la razón de semejanza y la razón entre sus áreas.
    c) Investiga cómo puedes hallar la razón entre las áreas de polígonos semejantes a partir de la razón de semejanza.

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:

15. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

Solución: Si por "tres veces mayor" se entiende "triple", los volúmenes respectivos son $\frac{256\pi}{3}$ ***cm³ y*** $\frac{256\pi}{81}$ ***cm³. El primero es 27 veces el segundo.***
Si por "tres veces mayor" se entiende "tres veces y una más (que son cuatro veces)", los volúmenes respectivos son $\frac{256\pi}{3}$ ***cm³ y*** $\frac{4\pi}{3}$ ***cm³. El primero es 64 veces el segundo.***

16. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

Solución: El área de la mediana es 16/9 de la pequeña y la de la grande es el cuádruple que la de la pequeña. La mayor es más económica.

17. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Solución: Medio metro.

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

18. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.

Solución: $1080\sqrt{3}$ ***dm³ ≈ 1870.614872 dm³.***

19. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.

Solución: 3000 π ***cm³ ≈ 9424.778 cm³.***

20. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.

Solución: Área lateral: 360 cm²; Área total: $360+27\sqrt{3}$ ***dm² ≈ 406.7654 dm².***

21. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.

Solución: 1.6 m.

22. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

Solución: $\sqrt{\frac{2749}{12}}$ ***cm ≈ 15.1 cm.***

23. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.

Solución: 396 dm².

24. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2 y la arista de la base mide 4 cm, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

Solución: Apotema de la pirámide: 13 cm; altura de la pirámide: $\sqrt{165}$ ***cm ≈ 12.8 cm.***

25. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?

Solución: 17 500 π ***cm ≈ 54 977.9 cm.***

26. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

Solución: 294 π ***cm² ≈ 923.63 cm².***

27. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.

Solución: 186 π ***dm² ≈ 584.3362 dm².***

28. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.

Solución: Área lateral: 37.5 m²; Área total aproximada: 40.608 495 m².

29. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima;

b) El área de la esfera.

Solución: a) 8 π ***m ≈ 25.133 m. b) 64*** π ***m² ≈ 201.061 m².***

30. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

Solución: En el depósito caben 3.14 m^3. Par llenarlo faltan 3 m^3 = 3 000 l. Su precio es 800 €.

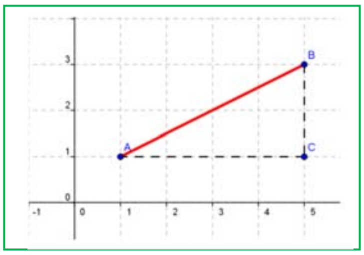
31. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

Solución: Ambos volúmenes son 128π dm^3.

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

32. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos: *O*(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: ***DE*** y ***OA***.

Solución gráfica:



33. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

Solución: B(3, 4).

34. Calcula la distancia entre los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9).

Solución: $\sqrt{58}$.

35. Calcula la distancia entre los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7).

Solución: $\sqrt{62}$.

36. Calcula la longitud del vector de componentes ***u*** = (3, 4)

Solución: 5.

37. Calcula la longitud del vector de componentes ***u*** = (3, 4, 1).

Solución: $\sqrt{26}$.

38. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto *O*(0, 0) y *A*(3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

Solución gráfica: Vértices: B(3, 0), C(0, 3); el lado mide 3 y la diagonal $3\sqrt{2}$.

39. Dibuja un cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) y *A*(3, 3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

Solución gráfica: Vértices: B(3, 0, 0), C(3, 3, 0), D(0, 3, 0), E(0, 0, 3), F(3, 0, 3), G(0, 3, 3); el lado mide 3, la diagonal de una cara $3\sqrt{2}$ ***y la diagonal del cubo*** $3\sqrt{3}$.

40. Sea *X*(*x*, *y*) un punto genérico del plano, y *O*(0, 0) el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos *X* que distan de *O* una distancia *D*.

Solución: $x^2 + y^2 = D^2$.

41. Sea *X*(*x*, *y*, *z*) un punto genérico del espacio, y *O*(0, 0, 0) el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos *X* que distan de *O* una distancia *D*.

Solución: $x^2 + y^2 + z^2 = D^2$.

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

Solución: $y = -\frac{7}{3}x + 16$, ***7x + 3y – 48 = 0;*** $\begin{cases} x = 6 - 3\lambda \\ y = 2 + 7\lambda \end{cases}$.

43. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.

Solución: $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{2}$; $\begin{cases} 7x + 3y - 48 = 0 \\ 2y - 7z + 31 = 0 \end{cases}$.

44. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

Solución: x = 0; y = 0; z = 0.

45. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

Solución: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

46. En el cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(6, 6, 6)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Solución: Caras: x = 0, y = 0, z = 0, x = 6, y = 6, z = 6.

Aristas: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} y=0 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} y=6 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} y=6 \\ z=6 \end{cases}.$

Vértices: A(0, 0, 0), B(6, 0, 0), C(6, 6, 0), D(0, 6, 0), E(0, 0, 6), F(6, 0, 6), G(0, 6, 6), H(6, 6, 6).

47. Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.

Solución: $x^2 + y^2 = 4$.

48. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

Solución: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

49. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.

Solución: $(y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

50. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(2, 5)$ y radio 2.

Solución: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

51. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro

Solución: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

4. MOVIMIENTOS Y TRANSFORMACIONES

52. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha

Solución abierta y gráfica:

53. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Solución manipulativa y gráfica: Las dos figuras tienen todas sus longitudes y ángulos iguales. Esas rectas son paralelas. Han seguido un vector libre.

54. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa: Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

Un friso en Camboya

55. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

Solución: Horizontal.

56. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

57. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Solución manipulativa y gráfica:

58. Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado.

Solución manipulativa y gráfica:

59. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA' y B'C' del giro de centro O y ángulo 60°.

Solución manipulativa y gráfica:

60. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B (3, -2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?

Solución manipulativa y gráfica: A' ***(–2, 4),*** B' ***(2, 3) y*** C' ***(0, 5)***

61. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante el giro la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

62. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P'. Encuentra su centro de simetría.

Solución manipulativa y gráfica:

63. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?

Solución manipulativa y gráfica:

64. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?

Solución manipulativa y gráfica: Ya sabes, la simetría central en el plano es un giro de 180º luego es un movimiento directo. Los lados y los ángulos de un triángulo y su girado 180º son iguales, y con el mismo sentido.

65. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

Solución: No tienen simetría central: B, P, T. ***Si la tienen:*** H, N, O, S, X, Z.

66. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

Solución abierta: Por ejemplo, una puerta, las patillas de unas gafas, un picaporte.

67. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: El plano se transforma en un plano, una esfera en una esfera igual, un cono en otro cono igual, los planos paralelos se transforman en planos paralelos y los ortogonales en planos ortogonales.

68. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

Solución: Eje de simetría horizontal: B, D***. Eje de simetría vertical:*** A, M, T, U, V, W***..***

69. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante una simetría la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

70. Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC.

Solución manipulativa y gráfica: El rectángulo tiene dos ejes de simetría, las mediatrices de los segmentos AB y BC.

71. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: El hexágono tiene 6 ejes de simetría, 3 van de vértice a vértice opuesto, y 3 van de centro de lado a centro de lado opuesto.

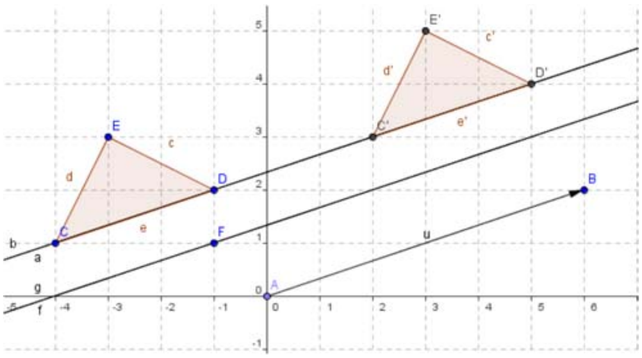
72. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: Tiene 5, que van de vértice a centro de lado.

73. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Solución abierta: Por ejemplo: mi silla, la mesa, mi ordenador, la lámpara, un lápiz.

74. Comprueba en la ventana algebraica que:
    - Las coordenadas de los puntos C', D' y E' se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos C, D, y E las coordenadas del vector u.
    - La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos CDE y C'D'E' coinciden



Solución manipulativa:

75. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Solución manipulativa: Los del eje de simetría. Rectas invariantes, además del eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, son rectas invariantes las rectas ortogonales al eje de simetría.

76. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45°.
    - Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman mediante este giro.
    - Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

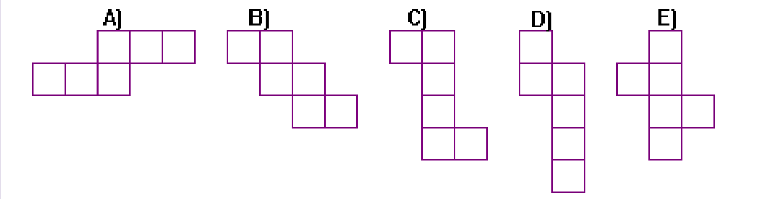
Solución manipulativa: El centro de giro es un punto invariante. No hay rectas invariantes (si el giro no es de 180º)

77. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.
    a) Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman por una simetría central.
    a) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.
    b) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Solución manipulativa: En la simetría central, el centro es un punto invariante, y las rectas que pasan por ese centro son rectas invariantes.

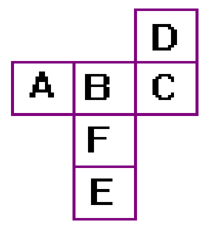
CURIOSIDADES. REVISTA

¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



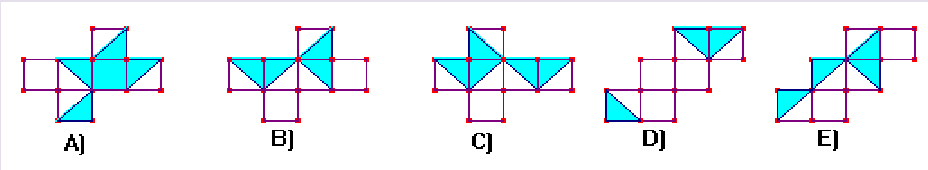
Solución: D

Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?

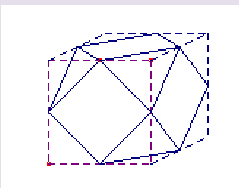


Solución: D

A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



Solución: D



Haz el desarrollo

Solución manipulativa:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de ***Pitágoras*** y teorema de ***Tales***

1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.

Solución: $\frac{7^3\sqrt{2}}{12}$ ***cm³ ≈ 40.423 cm³.***

2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.

Solución: $\sqrt{2}$ ***m ≈ 1.414 m.***

3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.

Solución: $3\sqrt{29}$ ***cm ≈ 16.2 cm.***

4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.

Solución: Construcción gráfica.

5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

Solución: $\sqrt{77}$ ***cm ≈ 8.8 cm.***

6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?

Solución: $2+\sqrt{185}$ ***cm ≈ 15.61 cm.***

7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?

Solución: La diagonal del ortoedro mide exactamente 13 cm. Un bolígrafo cilíndrico o prismático de 13 cm con radio mayor que cero no cabe en la caja. Podría caber un bolígrafo fusiforme de esa longitud.

8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.

Solución: $2\sqrt{34}$ ***cm ≈ 11.7 cm.***

9. Si un ascensor mide 1.2 *m* de ancho, 1.6 *m* de largo y 2.3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?

Solución: La diagonal del ortoedro es mayor que 3.04 m, así que la escalera no cabe.

10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?

Solución: $2\sqrt{29}$ ***m ≈ 10.770 m.***

11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 *cm*.

Solución: Aproximadamente 2 cm.

12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.

Solución: $\sqrt{149}$ ***cm ≈ 12.2 cm.***

13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?

Solución: En la primera nos dan $\frac{225\,\pi}{2}$ ***cm² de pizza por euro. En la segunda 320π cm² por euro. Tiene mejor precio la segunda.***

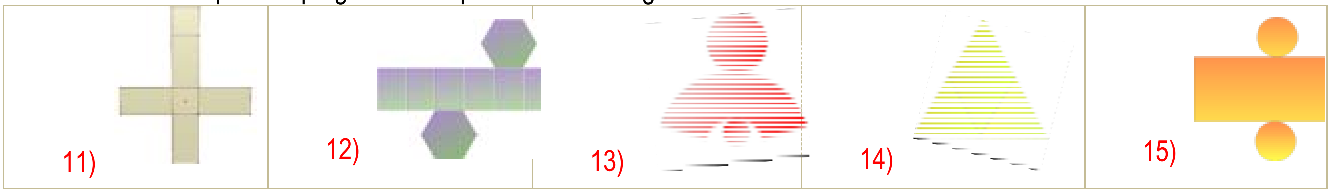
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

Solución: $30\sqrt[3]{2}$ ***cm ≈ 37.8 cm.***

15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Solución: Si van exactamente igual de abrigados y son exactamente igual de frioleros, ambos tendrán el mismo frío. Si los dos llevan la misma cantidad de ropa, tendrá menos frío el de menor volumen; es decir, el hijo.

16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



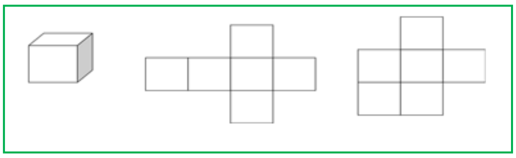
Solución: Prisma cuadrangular regular; prisma hexagonal regular; tronco de cono recto; Tetraedro (regular); cilindro recto.

17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

Solución: No porque los hexágonos tienen ángulos interiores de 120º. Si se juntan tres en un triedro, resulta un plano.

18. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

Solución: En el tetraedro no. En los otros poliedros regulares, si.

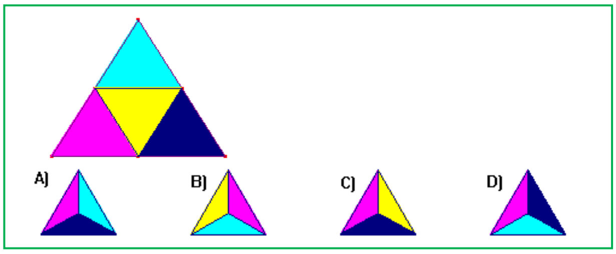


19. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo

Solución manipulativa:

20. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

Solución: En el cubo 4; en el octaedro, 3.



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?

Solución: C

22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

Solución: Área lateral: 96 dm^2. Área total: 108 dm^2.

23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura. Calcula las áreas de la base y total.

Solución: Área de la base: $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ ***$cm^3 \approx 23.38\ cm^3$. Área total:*** $27(6+\sqrt{3})$ ***$cm^2 \approx 208.77\ cm^2$.***

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

Solución: 450 cm^3.

25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2.7 *dm*, 6.2 *dm* y 80 *cm*.

Solución: 175.88 dm^2.

26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.

Solución: Área total: $2\pi 3\cdot 700 + 2\pi 9 = 4200\pi + 18\pi = 4218\pi\ cm^2 \approx 132{,}5124\ dm^2 = 13251{,}24\ cm^2$.

Volumen: $\pi 9\cdot 700\ cm^3 = 6300\pi\ cm^3 = 19792{,}034\ cm^3 = 6{,}3\pi\ dm^3 \approx 19{,}792034\ dm^3$.

27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.

Solución: Aproximadamente 615,75 cm^2.

28. Calcula la apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.

Solución: 12,5 cm.

29. Calcula la apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

Solución: Apotema de la pirámide: 9 dm. Área total: $54(3+\sqrt{3})$ ***$dm^2 \approx 255{,}5307\ dm^9$.***

Volumen: $324\sqrt{3}$ ***$dm^3 \approx 561{,}184462\ dm^3$.***

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

Solución: Área lateral: $320\pi \approx 1\,005.31\ cm^2$, Área total: $576\pi \approx 1\,809.56\ cm^2$, Volumen: $1\,024\pi \approx 3\,216.991\ cm^3$

31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0.4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

Solución: $2\sqrt[3]{11439}$ ***dm ≈ 45.06 dm.***

32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1.50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?

Solución: $\frac{135}{8}\pi$ ***m^3 ≈ 53.014 376 029 m^3.***

33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?

Solución: El área de la `pirámide es 531.732 cm^2.

34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

Solución: 200 π cm^3 ≈ 628.319 cm^3.

35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1.50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?

Solución: 9 dm.

36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

Solución: 2 513 274 envases.

37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

Solución: Una vez recortados todos los tetraedros, el área total es $10\sqrt{3}$ ***cm^2 ≈ 17.32 cm^2.***

38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

Solución: 93.819 dm^2.

39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.

Solución: El área total es $12(5+\sqrt{3})$ ***cm^2 ≈ 80.78 cm^2.Si lo queremos envolver con un rectángulo de papel, ha de medir 5 cm de largo y*** $2\sqrt{3}$ ***cm de ancho. Aproximadamente 5 por 3.5 cm.***

40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

Solución: $432\sqrt{3}$ ***dm^3 ≈ 748.245949 dm^3.***

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18.3 *m*.

Solución: Área: 448 m^2. Volumen: 512 m^3.

42. Un ortoedro tiene 0.7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

Solución: $\frac{7}{4}(2041-21\sqrt{3642})$ ***cm^3 ≈ 1 354.229 cm^3.***

43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.

Solución: $\sqrt{\frac{424}{15\pi}}$ ***cm ≈ 3.0 cm.***

44. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

Solución: 3π m^3 = 3 000 π L. Si tomamos π = 3.14, el volumen es 9 420 L.
Si utilizamos el valor de la calculadora, 9 424.778 L.

45. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

Solución: a) 1 L = 1 000 cm3; b) la altura del envase es 10 cm. (Se trata de un cubo.).

46. Una circunferencia de longitud 18.84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.

Solución: V = 112.925 cm³

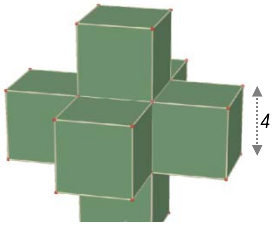
47. Una puerta mide 1.8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

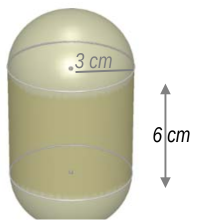
Solución: Coste de la madera: 10.58 €. Coste del barnizado: 12.6 €. Precio total: 123.18 €.

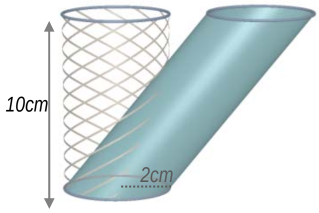
48. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251.2 *m*?

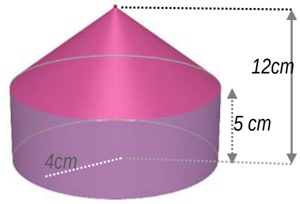
Solución: Aproximadamente 267 675.060 448 728 m^3.

49. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos









Solución:

Primera. Área: 480 cm^2. Volumen: 448 cm^3.

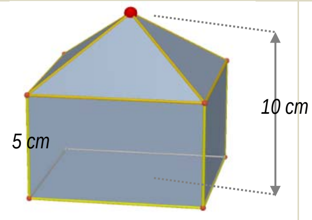
Segunda. Área: 72 π $cm^2 \approx 226.19$ cm^2. Volumen: 90 π $cm^3 \approx 282.743$ cm^3.

Tercera. El área depende de la inclinación. Volumen: 40 π $cm^3 \approx 125.664$ cm^3.

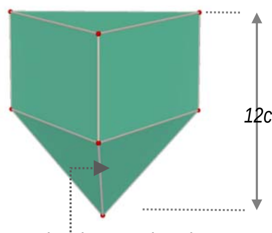
Cuarta. Área: $4\pi(14+\sqrt{65})$ ***$cm^2 \approx 277.24$ cm^2.***

Volumen: $\frac{352\pi}{3}$ ***$cm^3 \approx 368.614$ cm^3.***

50. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista


Octaedro de 6cm de arista


Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

Solución:

Primera. Área: $189+7\sqrt{149}$ ***$cm^2 \approx 274.45$ cm^2.***

Volumen: $\frac{980}{3}$ ***$cm^3 \approx 326.666$ cm^3.***

Segunda. Área: $(180-25\sqrt{6}+25\sqrt{3})$ ***$cm^2 \approx 162.06$ cm^2.***

Volumen: $\frac{2250\sqrt{2}-625\sqrt{3}}{18}$ ***$cm^3 \approx 116.636$ cm^3.***

Tercera. Área: $72\sqrt{3}$ ***$cm^2 \approx 124.71$ cm^2.***

Volumen: $72\sqrt{2}$ ***$cm^3 \approx 101.82$ cm^3.***

Cuarta. Área: $\frac{25}{2}(3+\sqrt{3})$ ***$dm^2 \approx 59.1506$ dm^2.***

Volumen: $\frac{125}{3}$ ***$dm^3 \approx$ 41.6 dm^3.***

51. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

Solución: 7 cm.

52. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

Solución: 14 cm de diámetro y 14 cm de altura.

El área es 196 π $cm^2 \approx 615.7522$ cm^2.

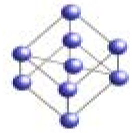
53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

Solución: Consideramos que 1 m es el radio del globo. Suponemos que se paga solo la lona del globo y no los recortes ni las costuras. La superficie de la esfera es 4π m². El precio sería 3 769.91 €.

54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.

Solución: Aproximadamente 2 dm.

55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



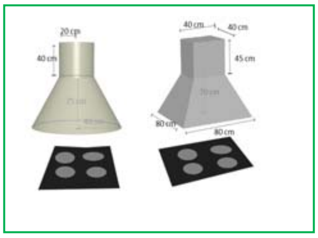
Solución: Aproximadamente 60.695 L.

56. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

Solución: a) 200 000 L; b) 4 000 €.

57. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

Solución: 659.73 €.



58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

Solución: El área de la circular es $100\pi(16+3\sqrt{41})$ ***cm².***

El área de la cuadrada es $2400(3+\sqrt{53})$ ***cm². Esta última es mayor.***

59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0.5 *m* el nivel del agua?

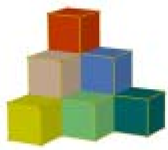
Solución: $\frac{9\pi}{8}$ ***m³ ≈ 3.534291735 m³.***

60. El precio de las tejas es de 12.6 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?

Solución: 2891.14 €.

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

Solución: Si hacemos coincidir los lados largos, el volumen es $\frac{6760}{\pi}$ ***cm³. Si hacemos coincidir los lados cortos, el volumen es*** $\frac{10400}{\pi}$ ***cm³. Este último es mayor.***



62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

Solución: 17 cubos.

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

Solución: $\frac{35\pi}{3}$ ***cm³ ≈ 36.652 cm³.***

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

Solución: 2 574 466.667 m³.

65. La densidad de un tapón de corcho es de 0.24 g/cm^3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus bases miden 2.5 *cm* y 1.2 *cm*, y su altura 3 *cm*?

Solución: 2 102.499 g.

66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.

Solución: $V_{esfera} = (4/3)\pi r^3$; $V_{cilindro} = \pi r^2\cdot(2r)$; $V_{cono} = (1/3)\,\pi r^2\cdot(2r) \Rightarrow V_{esfera} = V_{cilindro} + V_{cono}$

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.

Solución: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ***cm³ ≈ 3.771 cm³.***

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm^3, y de área lateral 240 cm^2.

Solución: La arista de la base ha de medir 4 cm y la arista lateral, 15 cm.

69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.

Solución: Área lateral: $300\pi\sqrt{17}$ ***cm² ≈ 3885.94 cm². Si las bases son de cristal, miden respectivamente 400π y 100π. En total serían aproximadamente 5 456.73 cm².***

70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

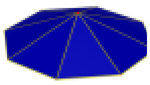
Solución: $\frac{20054\ \pi}{3}$ ***cm³ ≈ 21 000.500 cm³.***

71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

Solución: $\frac{160}{3\pi}$ ***cm ≈ 17.0 cm.***

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio. un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

Solución: $\frac{1}{2\pi}$ ***dm ≈ 0.16 dm = 1.6 cm.***



73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0.5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?

Solución: La sombra es igual al octógono de la base. El área de un octógono de lado a es $\frac{2a^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ ***. Si a = 40 cm, el área aproximada es 7 725.48 cm².***

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

Solución: 50 cm.

75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

Solución: Superficie de galleta: $4\pi\sqrt{37}$ ***cm² ≈ 76.44 cm². El volumen de helado es*** $\frac{80\ \pi}{3}$ ***cm³ ≈ 83.776 cm³.***

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3) y *B*(2, 5).

Solución: $\sqrt{29}$ ***.***

77. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3, 4) y *B*(2, 5, 8).

Solución: $3\sqrt{5}$ ***.***

78. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5).

Solución: $\sqrt{41}$ ***.***

79. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5, 0).

Solución: $\sqrt{41}$

80. El vector *u* = (4, 5) tiene el origen en el punto *A*(3, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

Solución: B(7, 12)

81. El vector *u* = (4, 5, 2) tiene el origen en el punto *A*(3, 7, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

Solución: B(7, 12, 7)

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto *A*(2, 3) y *C*(5, 6). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

Solución: B(5, 2), D(2, 6). La longitud del lado es 3 y la de la diagonal $3\sqrt{2}$ ***.***

83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

Solución: C(1, 1, 4), D(1, 4, 1), E(1, 4, 4), F(4, 1, 1), G(4, 1, 4), H(4, 4, 1). La longitud de la arista es 3; la diagonal de una cara, $3\sqrt{2}$ ***y la diagonal del cubo*** $3\sqrt{3}$.

84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

Solución: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$.

85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de los puntos X que distan de A una distancia 3.

Solución: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$.

86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $u = (4, 5)$. Represéntala gráficamente.

Solución: $\begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 7 + 5\lambda \end{cases}$

87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

Solución gráfica: $y = -x/2 + 8$; $x + 2y = 16$; $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 7 - \lambda \end{cases}$

88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.

Solución: $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-6}{2}$ $\quad \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 2x - 3z + 14 = 0 \end{cases}$.

89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Solución: Caras: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $x = 5$, $y = 5$, $z = 5$.

Aristas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} y = 5 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} y = 5 \\ z = 5 \end{cases}$

Vértices: C(1, 1, 5), D(1, 5, 1), E(1, 5, 5), F(5, 1, 1), G(5, 1, 5), H(5, 5, 1).

90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.

Solución: $x^2 + y^2 = 9$.

91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.

Solución: $(x-2)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 16$

92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.

Solución: $(y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$

93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.

Solución: $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$

94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Solución: $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$.

Movimientos

95. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

Solución manipulativa y gráfica: Si. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

96. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

97. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles

impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = x^4$ *d)* $y = x$

Solución: Son pares, con eje de simetría el eje de ordenadas: a) y c). Son impares, con centro de simetría el origen: b) y d).

98. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

Solución manipulativa y gráfica: cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.

99. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución manipulativa y gráfica: Tiene simetría central. Tres ejes de giro (de 180º) que pasan por el centro de una cara al centro de la cara opuesta. Planos de simetría que pasan por los ejes de giro y centros de las aristas.

100. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución: No tiene simetría central. Eje de giro de 120º que pasa por el vértice y el centro de la base. Tres planos de simetría que pasan por el eje de giro y un vértice de la base.

101. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	***No***	***Si***	***4, 120º***	***Si***	
Cubo	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Octaedro	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Dodecaedro	***Si***	***Si***		***Si***	
Icosaedro	***Si***	***Si***		***Si***	

102. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240°, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240°? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

Solución manipulativa y gráfica: a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ ***que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120º. Aplicamos ahora la simetría de vértice A:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$***. La composición transforma al triángulo en:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ ***que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría. d) Hacemos ahora el giro de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$***. Componemos el giro de 120º con el de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ ***y obtenemos la identidad. e) Componemos dos giros de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ ***y obtenemos el giro de 120º. La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).***

103. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90°?
- ¿Hay giros de 45°?
- ¿Hay traslaciones?

Solución manipulativa y gráfica: En el diseño de este mosaico hay simetrías de eje vertical, de eje horizontal, simetrías de ejes oblicuos, giros de 90º, giros de 45º y traslaciones.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:
   a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

Solución: b)

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:
   a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

Solución: b)

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:
   a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

Solución: a)

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. El volumen de agua que hay en él es:
   a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

Solución: d)

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:
   a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

Solución: a)

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 cm, está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:
   a) 55 cm b) 65 cm c) 75 cm d) 90 cm

Solución: d)

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:
   a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

Solución: b)

8. Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:
   a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

Solución: a)

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:
   a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

Solución: c)

10. La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es: a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$
    b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$ c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Solución: b)

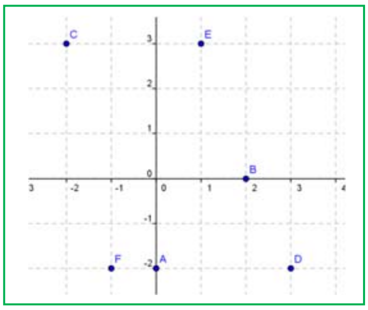
CAPÍTULO 6: FUNCIONES Y GRÁFICAS

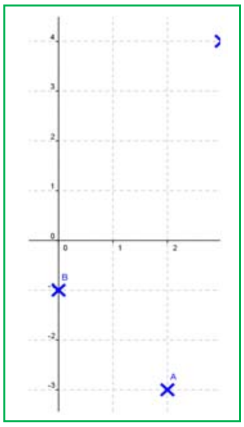
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FUNCIONES

1) Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

Solución: A(0, –2); B(2, 0); C(–2, 3); D(3, –2); E(1, 3); F(–1, –2).





2) Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: A (2, –3); B (0, –1); C (3, 4).

Solución GRÁFICA:

3) De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
b. Peso y edad de esa misma persona
c. Un número y su mitad
d. Un número y su cuadrado
e. Precio de la gasolina y el día del mes
f. Día del mes y precio de la gasolina

Solución: Funciones: a, c, d, f; No son funciones: b, e.

4) Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1.3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	x
$	2.6	6.5	13	35.1	2.3·x

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1.5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

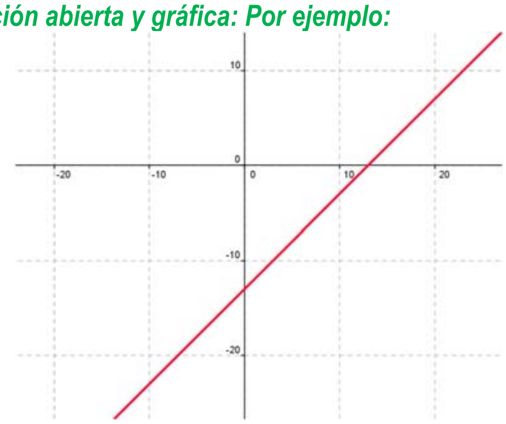
Solución:

€	*2*	*5*	*10*	*27*	*x*
$	*2.6*	*6.5*	*13*	*35.1*	*2.3·x*

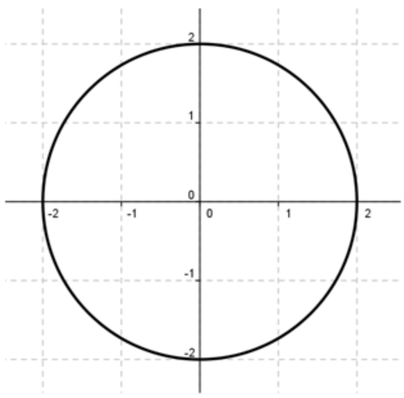
Es una función: y = 2.3x; Con comisión: y 2.3x + 1.5.

5) Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

Solución abierta y gráfica: Por ejemplo:



Es una función. A cada valor de la abscisa corresponde un único valor de la ordenada



No es una función pues a cada valor de la abscisa corresponden dos valores de la ordenada

6) Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
f(x)	–3	0	5	4	0

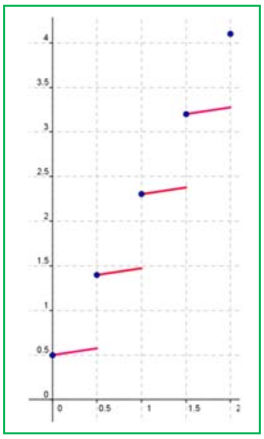
Solución: No corresponden a una función pues para el valor –10 corresponden dos valores distintos: –3 y 4.

7) Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

Solución: y = 10 + 4x. Como x es tiempo, no tiene sentido para valores negativos del tiempo.

8) En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

Solución manipulativa y gráfica: $y = x^2$; No tiene sentido que el lado tome un valor negativo.



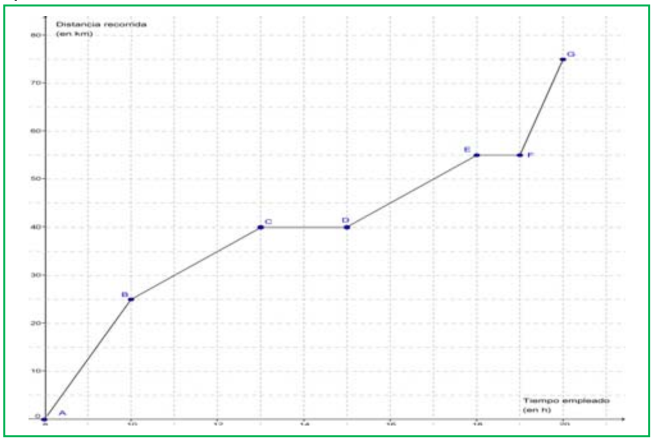
9) Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0.50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0.90 euros, y cada fracción, 0.05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

Solución gráfica:

10) Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

Solución: $V = 25\pi h$; $h = 4/\pi \approx 1.27$ cm.

11) La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida" ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

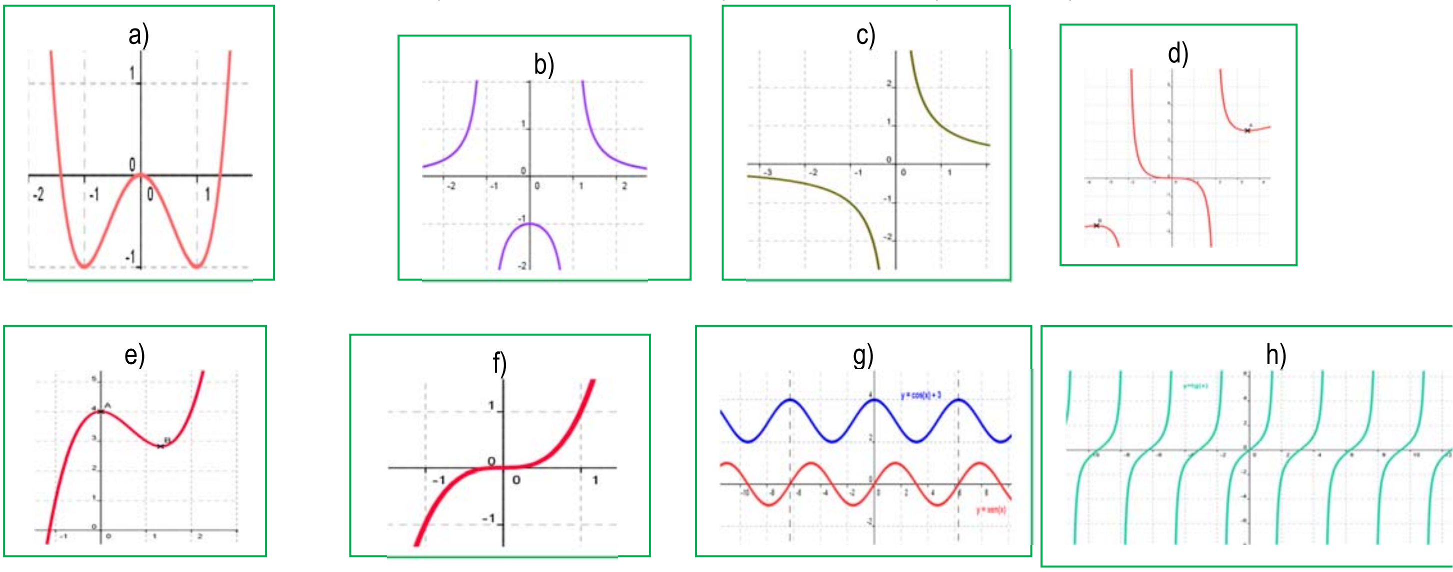
Solución: a) 20 horas; b) 2 horas a las 13 h, y una hora a las 18 h; c) 75 km; d) Entre las 0 y las 10 h, y entre las 19 y las 20 h.; g) No sería igual; nos falta conocer la distancia de partida.

12) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

Solución abierta: No porque con igual altura pueden tener distinta edad. Tampoco, pues dos jugadores con igual edad pueden tener distinta altura.

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

13) Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…



***Solución:* a) Dominio = $\Re$; Intersección con los ejes: (–1,5, 0), (0, 0), (1,5, 0); Máximo = (0, 0), mínimos: (–1, –1), (1, –1); Decreciente si x < 0, y 0 < x < 1; Creciente si –1 < x < 0 y x > 1. Simetría par.**

b) Dominio = $\Re$ – {–1, 1}; Máximo = (0, –1), Asíntotas: x = 1, x = –1, y = 0; Función par.

c) Dominio = $\Re$ – {0}; Asíntotas: x = 0, y = 0; Siempre decreciente Función impar.

d) Dominio = $\Re$ – {2, –2}; Asíntotas: x = 2, x = –2; c) Dominio = $\Re$ – {0}; Asíntotas: x = 0, y = 0; Función impar.

e) Dominio = $\Re$; Máximo = (0, 4); Mínimo = (1.3, 2.8); No tiene asíntotas. Crece si x < 0, decrece si 0 < x < 2.3. No tiene simetría.

f) Dominio = $\Re$; Siempre creciente. Función impar.

g) Dominio = $\Re$; Funciones periódicas de periodo 2π.

h) Función periódica con periodo π, asíntotas en π/2 + kπ. Siempre creciente. Función impar.

3. TIPOS DE FUNCIONES

14) El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

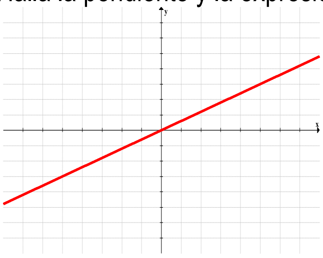
Solución gráfica: y = 1050x. Es una recta que pasa por el origen de pendiente m = 1050.

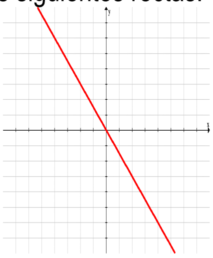
15) Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

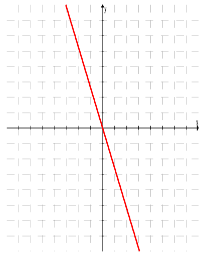
a) $y = 1.25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0.5 \cdot x$;

Solución: a) Dominio: $\Re$; No tiene ni máximos ni mínimos. Es una función impar.
b) Dominio: $\Re$; No tiene ni máximos ni mínimos. Es una función impar.
c) Dominio: $\Re$; No tiene ni máximos ni mínimos. Es una función impar.
d) Dominio: $\Re$; No tiene ni máximos ni mínimos. Es una función impar.
En los cuatro casos son rectas que pasan por el origen.

16) Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

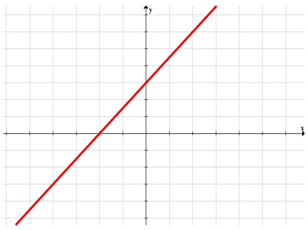
a. 

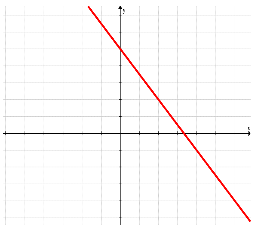
b. 

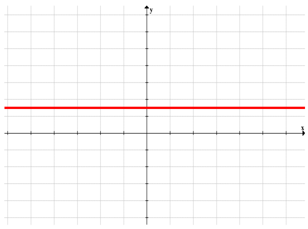
c. 

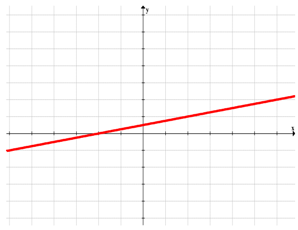
Solución: a) m = 0.75; y = 0.75x; b) m = –1.5; y = –1.5x; c) m = –3; y = –3x.

17) Halla la expresión de las siguientes rectas:

a. 

b. 

c. 

d. 

Solución: a) y = 3x/2 + 3; b) y = –3x/2 + 5; c) y = 3/2; d) y = (1/2)x + 1/2.

18) Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

Solución: y= 5x; y = –4x; y = (1/3)x.

19) ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

Solución: 45 º = π/4, y 135º = 3π/4.

20) ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

Solución: Paralelas

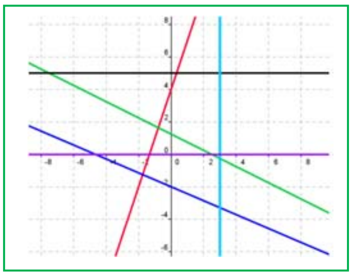
21) Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\dfrac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

Solución:

y = 3x + 4
y = -3/7 x – 2
2x + 4y = 5
d = 5
y = 0
x = 3

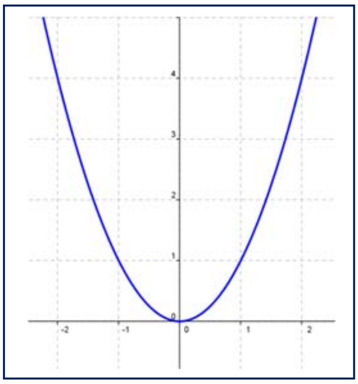


22) Un metro de cierta tela cuesta 2.05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15.2 m? ¿Cuánto cuestan "x" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

Solución: 14.35 €, 41 €, 31.16, y = 1.05x.

23) Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.



Solución manipulativa y gráfica:

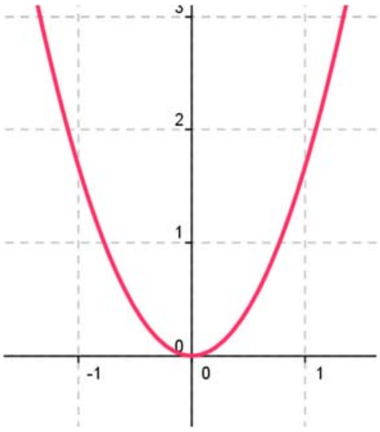
x	***–2***	***–1***	***0***	***1***	***2***	***3***
y	***4***	***1***	***0***	***1***	***4***	***6***

c) Para valores grandes de x la gráfica crece, tiende a +∞. Y para valores negativos grandes en valor absoluto, también crece, también tiende a +∞.
d) Es simétrica, con simetría par. Su eje de simetría es la recta x = 0.
e) Tiene un mínimo en (0, 0) que es el vértice de la parábola.

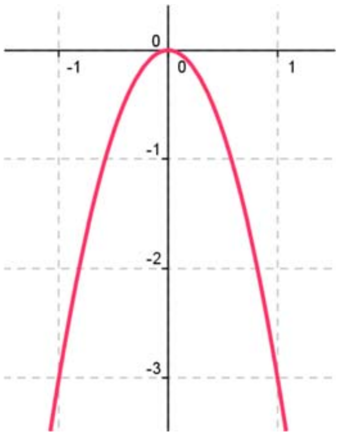
24) A partir de la parábola $y=x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y=\frac{5}{3}x^2$
b. $y=-3x^2$
c. $y=-\frac{15}{3}x^2$
d. $y = 4.12x^2$
e. $y=-\frac{6}{10}x^2$
f. $y=\frac{7}{8}x^2$

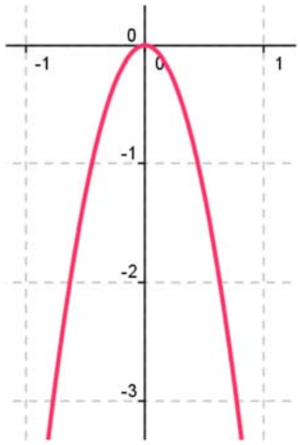
Solución:



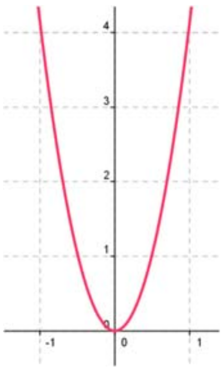
a)



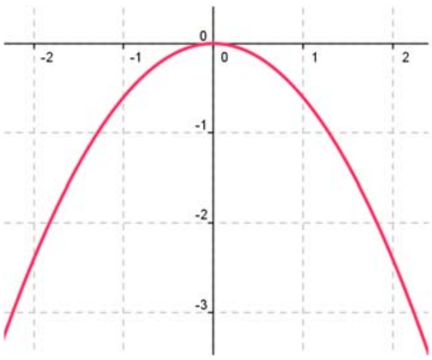
b)



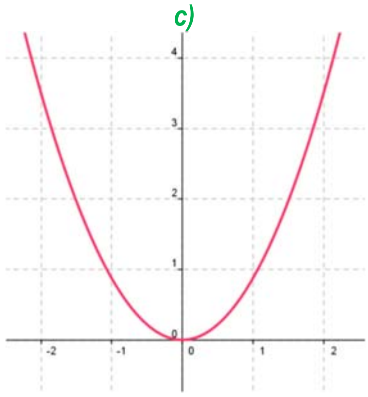
c)



d)



e)



f)

25) Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??

b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??

c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??

d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

Solución: Si a > 1 entonces la gráfica se estrecha

Si 0 < a < 1 entonces la gráfica se ensancha

Si a < –1 entonces la gráfica se estrecha, y las ramas de la parábola van hacia abajo.

Si –1 < a < 0 entonces la gráfica se ensancha, y las ramas de la parábola van hacia abajo.

26) Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

Solución: En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

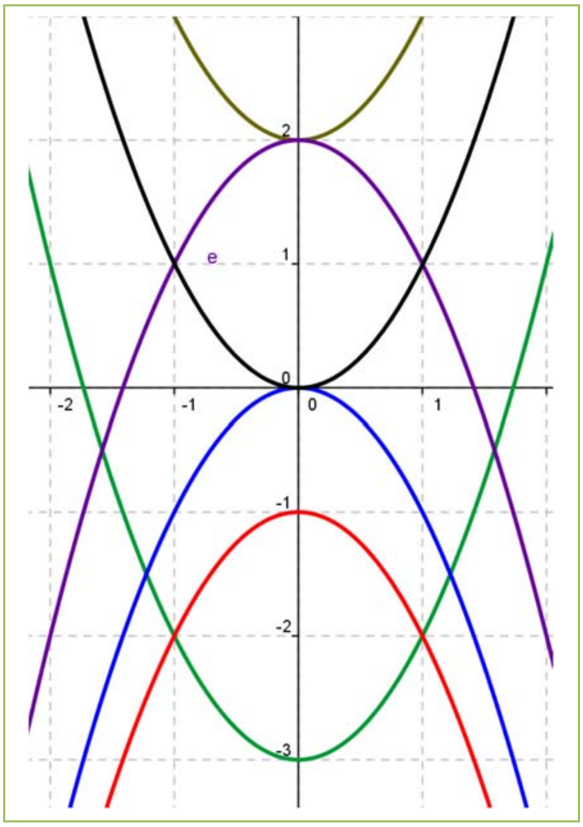
$y = x^2 + 2$;

$y = x^2 - 3$;

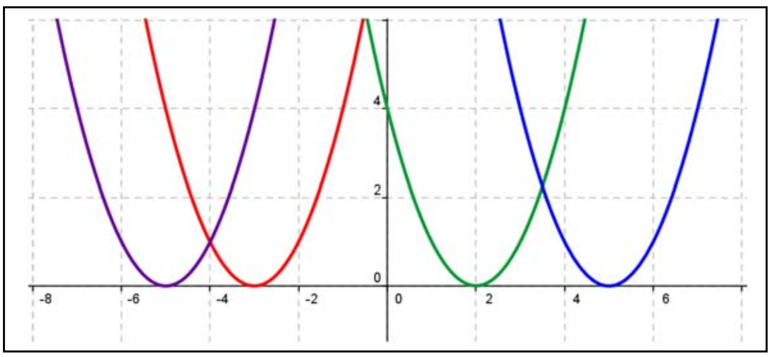
$y = -x^2$;

$y = -x^2 + 2$;

$y = x^2 - 1$.



27) Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.



Solución: En general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos $y = (x - q)^2$.

$y = (x + 3)^2$;

$y = (x - 2)^2$;

$y = (x + 5)^2$;

$y = (x - 5)^2$

28) Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

Solución: $y = (x - 7)^2 + 4$. V(7, 4).

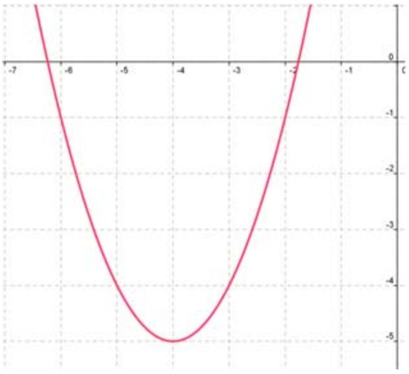
29) Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

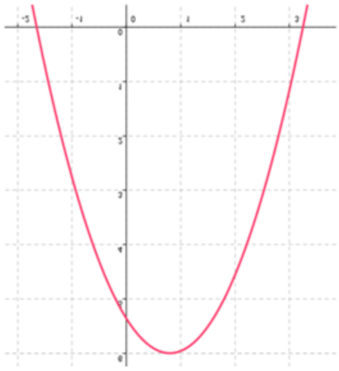
d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+1'$ h. $y=-x^2+2x-4$ i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

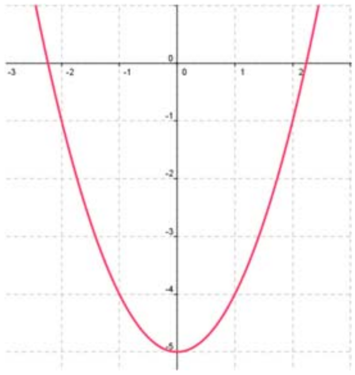
Solución:



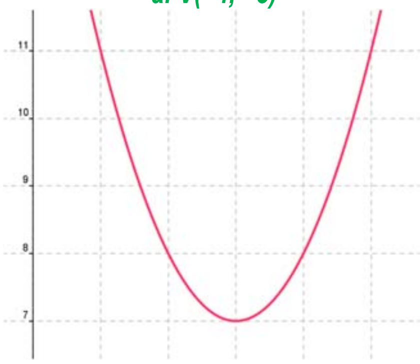
a. V(–4, –5)



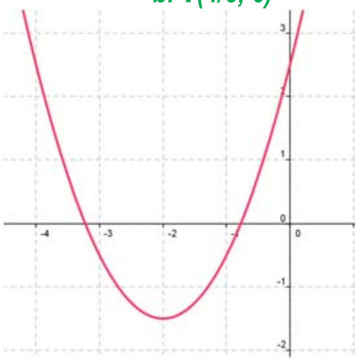
b. V(4/5, 6)



c. V(0, –5)



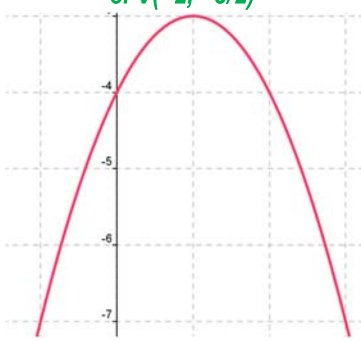
d. V(3, 7)



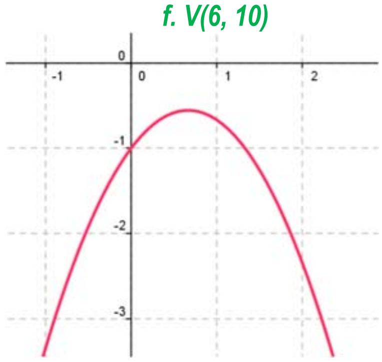
e. V(–2, –3/2)

f. V(6, 10)

g. V(5, –24)



h. V(1, –3)



i. V(2/3, –5/9)

30) Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

Solución gráfica: a) $y = (x - 3)^2 + 1$; $x = 3$; b) $y = (x + 4)^2 - 2$; $x = -4$.

31) Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

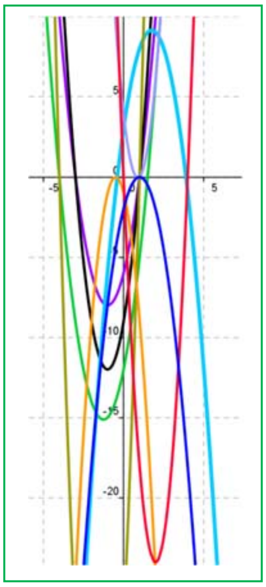
a) $y=2x^2+4x-6$ b) $y=6x^2-24x$ c) $y=-2x^2+4x-2$

d) $y=2x^2+5x-12$ e) $y=3x^2+6x-9$ f) $y=-2x^2+7x+3$

g) $y=7x^2+21x-28$ h) $y=5x^2-9x+4$ i) $y=-4x^2-4x-1$

Solución gráfica:

a) V(–1, –8)
b) V (2, –24)
c) V (1, 0)
d) V (–1.25, –15,125)
e) V(–1, –12)
f) V(1.75, 9,125)
g) V(–1.5, –43,75)
h) V(0.9, –0,05)
i) V(–0.5, 0)



32) Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntala gráficamente.
Solución: $y = x^2 + 3x + 10$

33) Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).
Solución: $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$.

34) Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.
Solución gráfica: $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

x	0	1	2	3	4	5
y	3	3	5	15	39	83
Diferencias primeras		***0***	***2***	***10***	***24***	***44***
Diferencias segundas			***2***	***8***	***14***	***20***
Diferencias terceras				***6***	***6***	***6***

Como las diferencias terceras son todas iguales, se ajusta con una función polinómica de tercer grado.

35) Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

Solución:

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325
Diferencias primeras		***100***	***75***	***55***	***40***	***30***	***25***
Diferencias segundas			***–25***	***–20***	***–15***	***–10***	***–5***
Diferencias terceras				***5***	***5***	***5***	***5***

Las diferencias terceras son constantes, luego existe una función polinómica de tercer grado que se ajusta a estos datos: $y = (-5/6)x^3 + 20x^2 + (665/6)x$.

36) En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3.6	8	18	25.3	39.2	57.6	81

Solución: Las diferencias sucesivas nunca se repiten, así que como tenemos 7 puntos podemos encontrar la función polinómica de grado 6 que pasa por dichos puntos.

37) Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1.53	4.65	7.78	10.89	14.01	17.13	20.29

Solución: Para que los datos se ajusten a una recta deben ser iguales las diferencias primeras:

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1.53	4.65	7.78	10.89	14.01	17.13	20.29
Diferencias primeras		***3.12***	***3.13***	***3.11***	***3.12***	***3.12***	***3.16***

No son iguales pero son parecidas salvo la última. Si suponemos que son errores de redondeo y las igualamos a 3.12 quedaría:

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	***1.53***	***4.65***	***7.77***	***10.89***	***14.01***	***17.13***	***20.25***
Diferencias primeras		***3.12***	***3.12***	***3.12***	***3.12***	***3.12***	***3.12***

La recta entonces es: y = 3.12 x – 1.59.

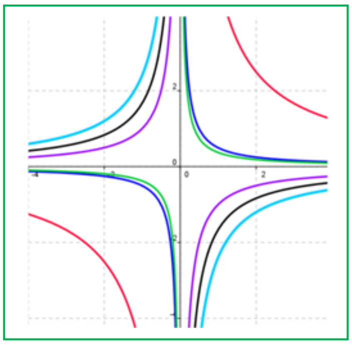
38) Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a) $y = \frac{-1}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

d) $y = \frac{3}{8x}$ e) $y = \frac{-5}{3x}$ f) $y = \frac{-12}{5x}$

Solución:

a) y = –1/x
b) y = 5/x
c) y = 1/(2x)
d) y = 3/(8x)
e) y = –5/(3x)
f) y = –12/(5x)



39) Describe lo que sucede cuando varía el valor de k. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

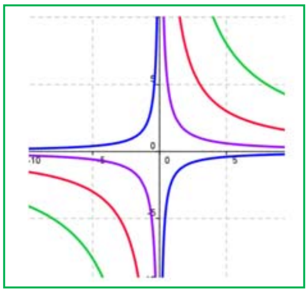
Solución: Si k es positivo la gráfica está en el primer y tercer cuadrante, y si es negativo, en el segundo y cuarto.

40) Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

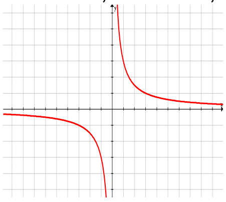
a) (1/2, 6)	b) (5, 3)	c) (2, –1)
d) (1, *b*)	e) (10, 4)	f) (*a*, 1)

Solución:

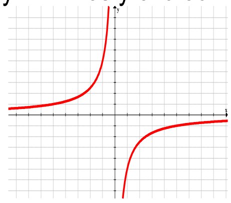
a) y = 3/x;
b) y = 15/x;
c) y = –2/x:
d) y = b/x;
e) y = 40/x:
f) y = a/x;



41) Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:



a.



b.

c. $y = \dfrac{9}{2x}$ d. $y = \dfrac{-5}{3x}$ e. $y = \dfrac{-0,3}{x}$

Solución: En todas, Dominio = ℜ–{0}; Recorrido = ℜ–{0}; No hay ni máximos ni mínimos; En a) y c) la función es siempre decreciente, y en b) d) y e) es siempre creciente.

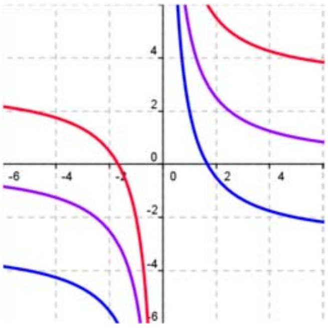
42) Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$y = \dfrac{5}{x}$ $\quad y = \dfrac{5}{x} + 3$ $\quad y = \dfrac{5}{x} - 3$

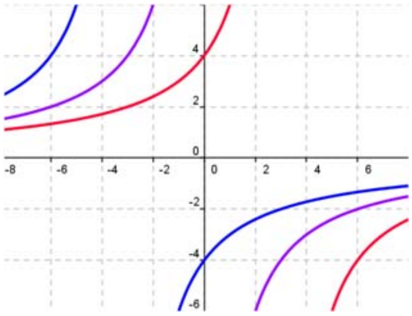
$y = \dfrac{-12}{x}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x-3}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x+3}$

$y = \dfrac{3}{x}$ $\quad y = \dfrac{3}{x-1} + 4$ $\quad y = \dfrac{5x-2}{x-1}$

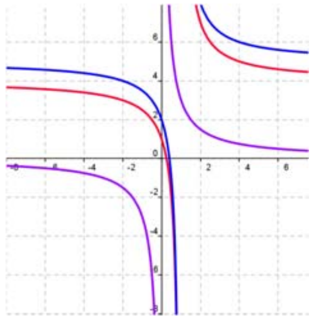
Solución:



y = 1/x; y = 1/x + 3; y = 1/x – 3



y = –12/ x; y = –12/(x–3); y = –12/(x + 3)



y = 3/x; y = 3/(x-1)+4; y = (5x-2)/(x-1)

43) Describe lo que sucede cuando varían los parámetros a y b en las hipérbolas del ejercicio anterior.

Solución: Las hipérbolas y = k/x tienen siempre cómo asíntota vertical la recta x = 0, si k > 0, es siempre decreciente y está en el primer y tercer cuadrante, y si k < 0, es creciente y está en el segundo y cuarto cuadrante.

La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$ es igual a y = k/x pero trasladada.

El valor de a desplaza horizontalmente a la hipérbola, si a > 0, a la derecha, y si a < 0, a la izquierda.

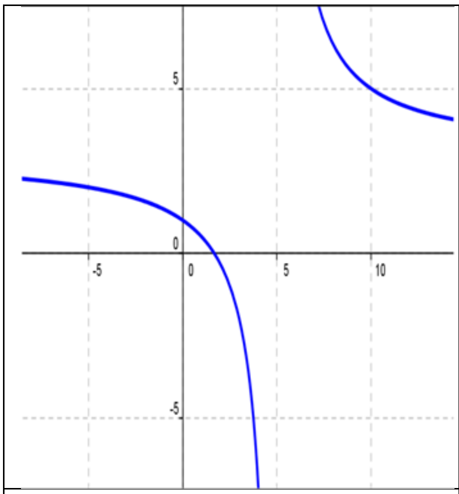
El valor de b desplaza a la hipérbola verticalmente, si b > 0, hacia arriba, y si b < 0, hacia abajo.

44) Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

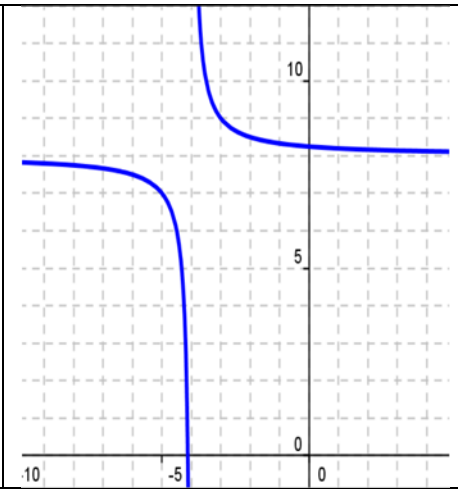
a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

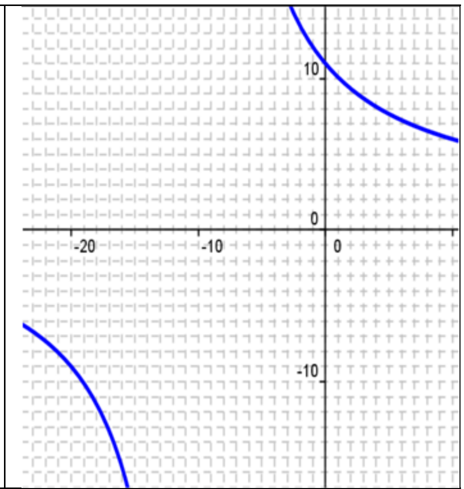
Solución:



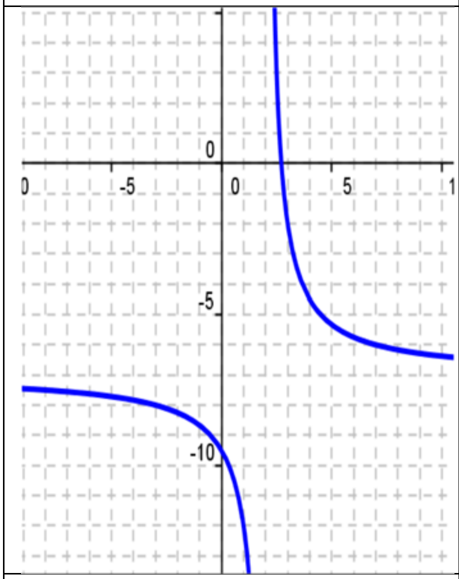
a) Dominio = $\Re$–{5}; Recorrido = $\Re$–{3}; Continua en $\Re$–{5}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = 5; Asíntota horizontal: y = 3; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre decreciente.



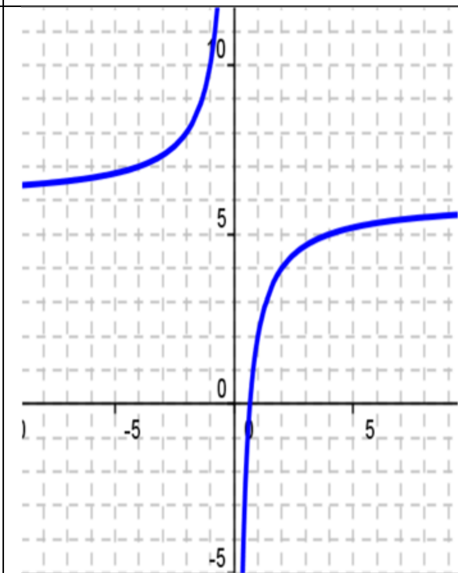
b) Dominio = $\Re$–{–4}; Recorrido = $\Re$–{8}; Continua en $\Re$–{–4}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = –4; Asíntota horizontal: y = 8; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre decreciente.



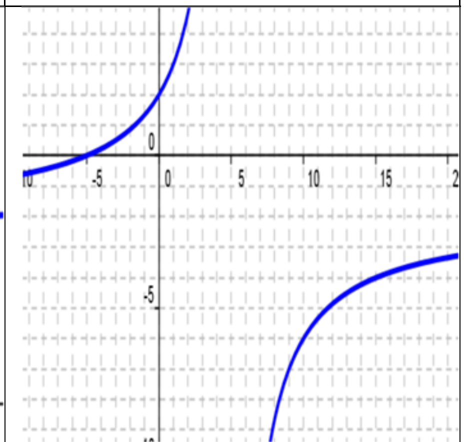
c) Dominio = $\Re$–{–10}; Recorrido = $\Re$–{1}; Continua en $\Re$–{–10}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = –10; Asíntota horizontal: y = 1; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre decreciente.



d) Dominio = $\Re$–{2}; Recorrido = $\Re$–{–7}; Continua en $\Re$–{2}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = 2; Asíntota horizontal: y = –7; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre decreciente.



e) Dominio = $\Re$–{0}; Recorrido = $\Re$–{6}; Continua en $\Re$–{0}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = 0; Asíntota horizontal: y = 6; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre creciente.



f) Dominio = $\Re$–{5}; Recorrido = $\Re$–{–2}; Continua en $\Re$–{5}; No es simétrica; Asíntota vertical: x = 5; Asíntota horizontal: y = –2; No hay ni máximos ni mínimos, es siempre creciente.

45) Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

Solución: Resuelto en la actividad anterior.

46) Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Solución: Las hipérbolas y = k/x tienen siempre cómo asíntota vertical la recta x = 0 y horizontal y = 0.

La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$ ***tiene asíntota vertical y = b y horizontal x = a***

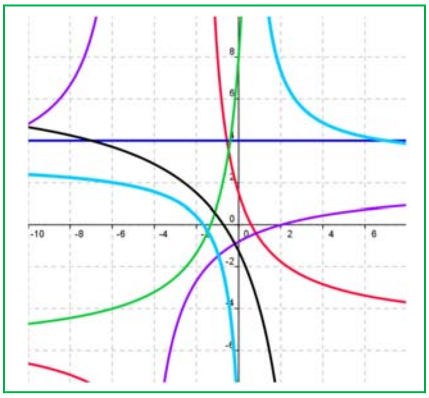
47) Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = \dfrac{2x-4}{x+5}$ b) $y = \dfrac{3-5x}{x+2}$ c) $y = \dfrac{4x-12}{x-3}$

d) $y = \dfrac{6x+8}{1-x}$ e) $y = \dfrac{7x+5}{x-4}$ f) $y = \dfrac{6x+10}{2x-1}$

Solución:

a)
b)
c)
d)
e)
f)

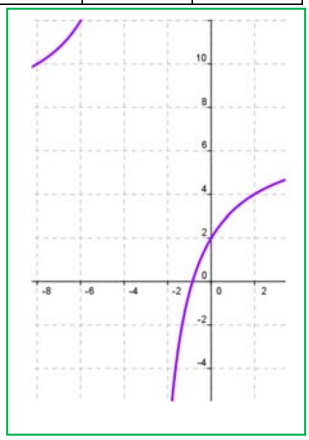


48) Representa la gráfica de la función: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, “*y*” tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): ***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): ***y***	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85

Solución:

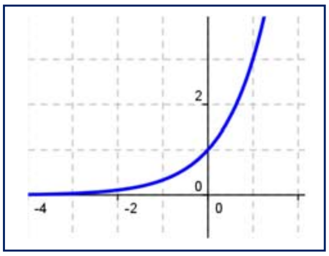
A) Tiene una asíntota horizontal y = 7; B) Tiene una asíntota vertical x = –3; C) Se ajusta perfectamente a los datos de la tabla.



49) Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1.4.

Solución: y = 2^x^.

Horas transcurridas (x)	Número de bacterias (y)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
…	…



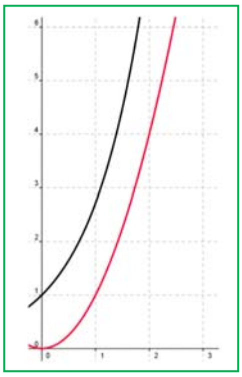
50) En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

Solución:

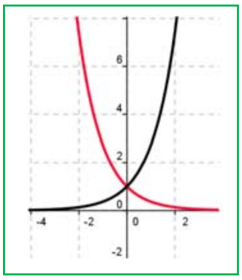
$y = x^2$

$y = e^x$

El crecimiento exponencial es mucho más rápido que el potencial.



51) Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.



Solución:

$y = e^{-x}$

$y = e^x$

52) Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Solución:

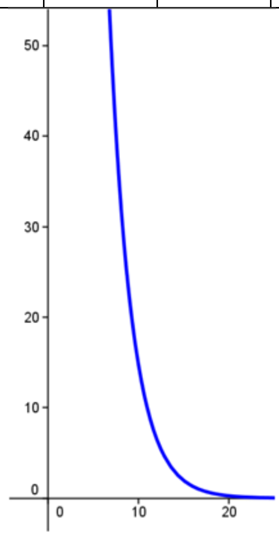
Años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capital	5000.00	5150.00	5304.50	5463.64	5627.54	5796.37	5970.26	6149.37	6333.85	6523.87	6719.58

b) $y = 5000(1.03)^x$

53) Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

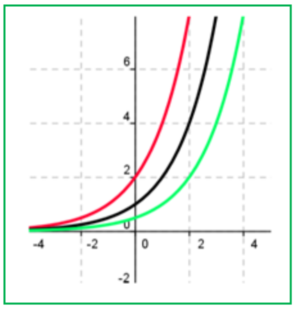
Solución: $y = 50*(2/3)^{x-7}$.

x (hora)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (millones de bacterias)	$50*(3/2)^4$	$50*(3/2)^3$	$50*(3/2)^2$	50/(2/3)	50	50*(2/3)	$50*(2/3)^2$	$50*(2/3)^3$	$50*(2/3)^4$	$50*(2/3)^5$



54) Represento en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

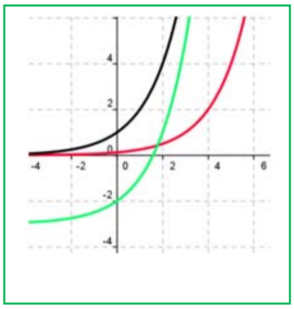
a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.



Solución: a) $y = 2^x$; b) $y = 2^{x+1}$; c) $y = 2^{x-1}$.

55) Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

Solución: a) $y = 2^x$; b) $y = 2^{x-3}$; c) $y = 2^x-3$.



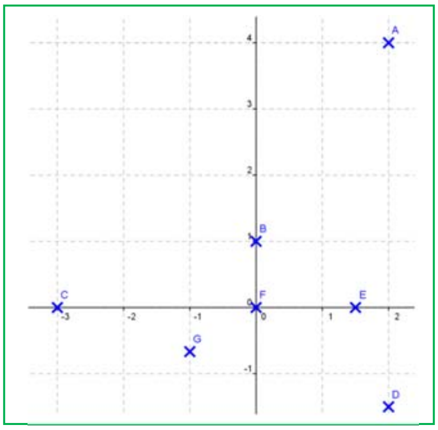
CURIOSIDADES. REVISTA

Utiliza el ordenador para dibujar funciones

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: *A*(2, 4); *B*(0, 1); *C*(–3, 0); *D*(2, –1.5); *E*(1.5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3).



Solución gráfica:

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

Solución abierta. Por ejemplo: (–3, –2); (–6, –1); (–4, –9).

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
A(0, 3); *B*(0, 1.7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). ¿Qué tienen en común todos ellos?

Solución gráfica: Todos están en el eje de ordenadas.

4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?

Solución abierta: Tienen de ordenada 0. Por ejemplo: (0, 0), (3, 0) y (5, 0).

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

Solución gráfica: A = O = (0, 0); B = (3, 0); C = (0, 4).

6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
   a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
   b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
   c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.

Solución: Funciones: b); No son funciones: a), c).

7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.
   a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
   b) Dibuja la gráfica.
   c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3.14).
   d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

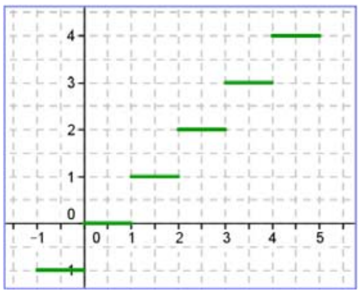
Solución: a) $d = 78\pi \cdot n$; b) Solución gráfica. Una recta que pasa por el origen y pendiente 78π;
c) $d = 78\pi 1000 \approx 245044$ cm = 2.45 km; d) 2856.6.

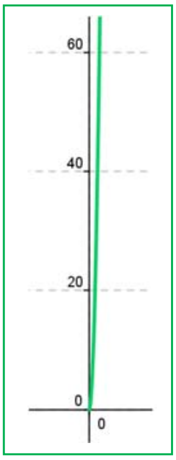
8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:
   a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
   b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?
   c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
   d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

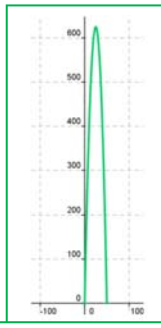
Solución: a) –7.6 º;

9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: *y* = *E*(*x*), que indica el número entero menor, más próximo a *x*, así, por ejemplo, E(2.3) = 2.

Solución gráfica:





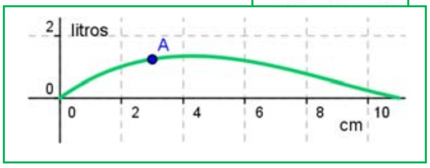


10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

Solución gráfica: $A = x\cdot(50 - x)$. ***Una parábola.***

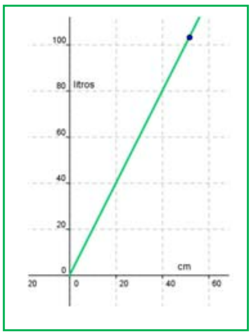
11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

Solución gráfica: $V = 20x^2$. ***Una parábola muy estrecha.***



12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

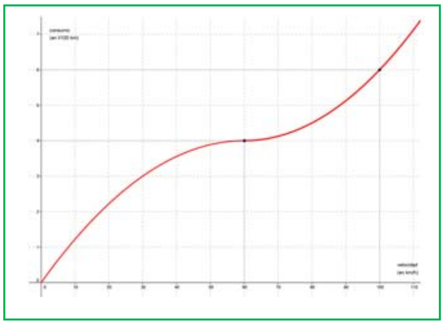
Solución gráfica: $V = (32 - 2x)\cdot(22 - 2x)\cdot x$; $V(3) = 1\,248$ cm^3.



13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1.5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.

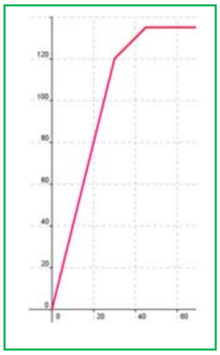
Solución: $V = 675\pi\cdot a$. $V(50) = 106\,028.75$ cm^3 = 106 l.

14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.



a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

Solución: El consumo aumenta con la velocidad; a) y b) La variable independiente es la velocidad a km/h, y la dependiente el consumo en l por cada 100 km; c) 4 litros cada 100 km; d) A 100 km/h.



15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo
b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
c) A partir del día 45: altura = 135.

Solución gráfica:

Tiempo (días)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*	*50*	*55*	*60*
Altura (cm)	*0*	*20*	*40*	*60*	*80*	*100*	*120*	*125*	*130*	*135*	*135*	*135*	*135*

Características de una función.

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

Solución: Dentro de 7 años cobrará 30 euros. Es una función escalonada, pues cobra lo mismo durante todo un año, y luego aumenta 5 euros: P = $\begin{cases} 20 & 1^{o}\text{ año} \\ 25 & 2^{o}\text{ año} \\ 30 & 3^{o}\text{ año} \\ \ldots & \\ 20+5(n-1) & \text{año } n \end{cases}$ ***)***

17. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1.20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?

b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

Solución gráfica:

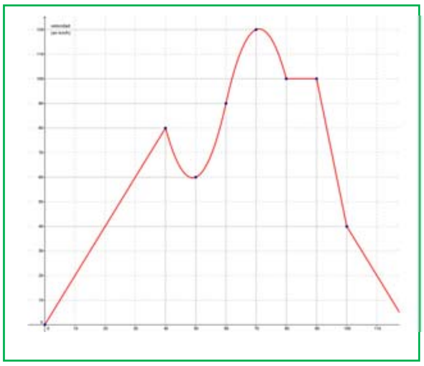
Tiempo (horas)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Cliente con tarjeta (€)	*0*	*0*	*1.2*	*2.4*	*3.6*	*4.8*	*6.0*	*7.2*	*8.4*	*9.6*	*10.8*	*12.0*
Cliente sin tarjeta (€)	*1.2*	*2.4*	*3.6*	*4.8*	*6.0*	*7.2*	*8.4*	*9.6*	*10.8*	*12.0*	*13.2*	*14.4*

a) La variable independiente toma todos los valores comprendidos entre 0 y 12 horas. La variable dependiente sólo los valores 0, 1.2, 2.4, …, 12 o bien hasta 13.2 y 14.4.

b) Los puntos no se pueden unir, es una función escalonada con tramos rectos constantes.

c) Con puntos de discontinuidad en 1.2, 2.4, ...10.8 …

18. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

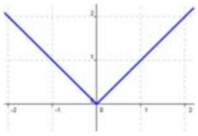
e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

Solución: a) Es funcional; b) Variable independiente el tiempo en minutos, y la variable dependiente, la velocidad en km/h; c) v = 90 km/h; t = 20 minutos; d) Aumenta en [0, 40), (50, 70), disminuye en (40, 50), (70, 80) (90, 120) y es constante en (80, 90) durante 10 minutos; e) Velocidad máxima 120 km/h que se alcanza a los 70 minutos; Durante la primera hora 80 km/h que se alcanza a los 40 minutos; f) La velocidad mínima, al iniciar el viaje y terminarlo de 0 km/h y de 60 km/h a los 50 minutos que es un mínimo relativo.

19. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.
   a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.
   b) Opuesto e inverso del número x: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

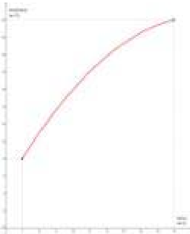
Solución:



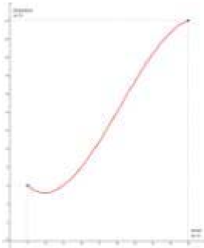
a)

b)

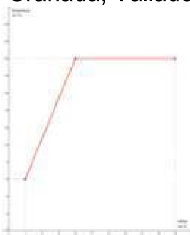
20. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



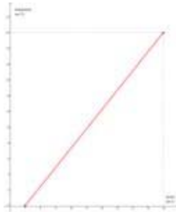
I



II



III



IV

a) Explica la monotonía de todas las gráficas.
b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?
c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?
d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

Solución: a) la temperatura en general sube a lo largo del día; b) No en todo el intervalo, pero la tercera indica que la temperatura se ha mantenido constante una parte del intervalo; c) Granada; d) Madrid = IV; Granada = II; Sevilla = III y Valladolid = I.

21. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.
   a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
   b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
   c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
   d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
   e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
   f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
   g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

Solución:

Tiempo (horas)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Distancia (km)	*1*	*3*	*5*	*4*	*4*	*7*	*10*

b) Es funcional
c) No presenta discontinuidades
d) A las 5 horas
f) Es creciente durante las dos primeras horas, y desde la cuarta hora a la sexta, es decreciente entre la segunda y la sexta hora, y es constante entre la tercera y la cuarta hora.
g) El máximo absoluto lo alcanza a las 6 horas con una distancia de 10 km, y el mínimo absoluto a las cero horas; En la segunda hora tiene un máximo relativo; entre las tercera y cuarta horas mínimos relativos.

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.

Solución: y = 5x + 6.

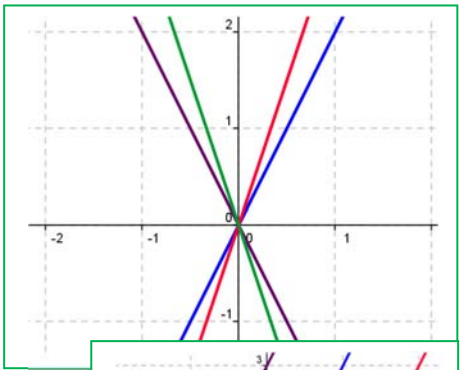
23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.

Solución: No están alineados. Los puntos B(6, 9) y C(12, 15) están en la recta y = x + 3, y el punto A(2, 4) no pertenece a esa recta.

24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas:

$y = 2x$; $y = –2x$; $y = 3x$; $y = –3x$.

Solución:

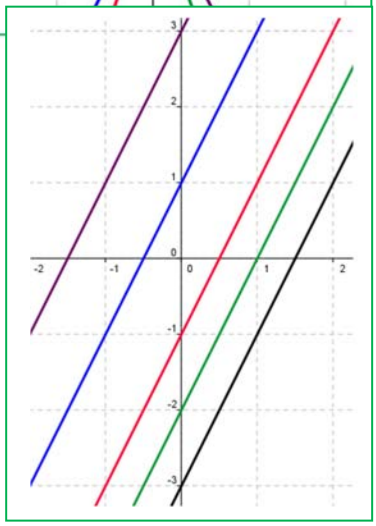


y = 2x; y = –2x; y = 3x; y = –3x

25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x – 1$; $y = 2x – 2$; $y = 2x – 3$. ¿Cómo son?

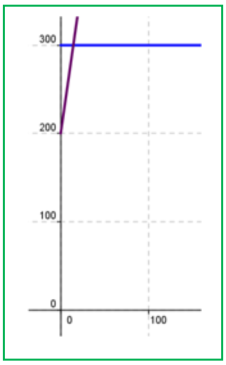
Solución:

Paralelas con pendiente m = 2 y distintas ordenadas en el origen.



y = 2x + 1; y = 2x + 3; y = 2x – 1; y = 2x – 2; y = 2x – 3.

26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.



Solución: Fórmula 1: y = 300d; Fórmula 2: y = 200d + 7x;

Coste Fórmula 1 = 3000 €; Coste Fórmula 2 = 2000 + 7000 = 9000 €.

En general es más barata la fórmula 1, pero si vamos a hacer menos de 14 km, nos sale mejor la fórmula 2.

27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.

b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.

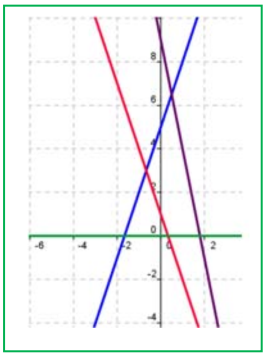
c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

d) Pasa por los puntos $C(–2, 7)$ y $D(–3, 10)$.

e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m.

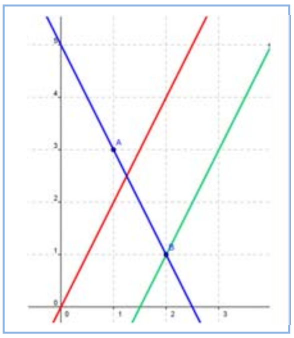
Solución gráfica:

a) y = 3x + 5; b) y = –5x + 9; c) y = 0; d) y = –3x + 1; e) y = b + m(x – a).

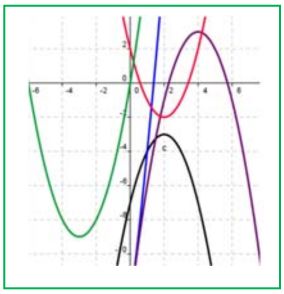


28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:
a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.
b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.
c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

Solución gráfica:



29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.
a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$



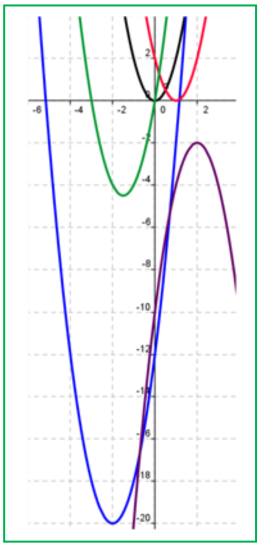
Solución: ***a) V(–4, –29), y = –4; (–5, 0); (1, 0); (0, –13); b) V(4, 3); y = 4; (2.3, 0), (5.7, 0), (0, –13);***
c) V(2, –2); y = 2; (0, 2); (3.4, 0); (0.6, 0); d) V(–3, –9); y = –3; (0, 0); (–6, 0);
e) V(2, –3); y = 2; (0, –7).

30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:
a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$.

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice (–2, –10)

Solución gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12 = 2((x + 2)^2 - 10)$; $V = (-2, -20)$;
b) $y = -2x^2 + 8x - 10 = -2((x - 2)^2 - 2)$; $V = (2, -2)$
c) $y = 2x^2 - 4x + 2 = 2((x - 1)^2)$; $V = (1, 0)$
d) $y = 2x^2 + 6x = 2((x + 3/2)^2 + 9/2$; $V = (-3/2, -9/2)$.
$y = 2x^2$



31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

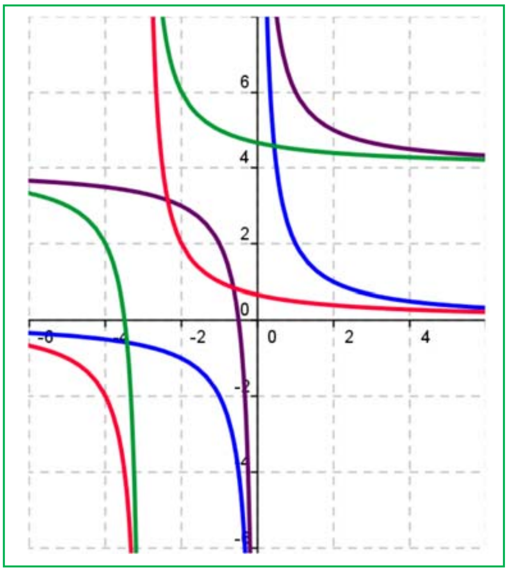
x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	1	5	11	19	29	41	55

Solución:

x:	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
y:	***1***	***5***	***11***	***19***	***29***	***41***	***55***
Diferencias primeras		***4***	***6***	***8***	***10***	***12***	***14***
Diferencias segundas			***2***	***2***	***2***	***2***	***2***

Es una parábola pues las diferencias segundas son constantes. Es $y = x^2 + 3x + 1$.

32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.



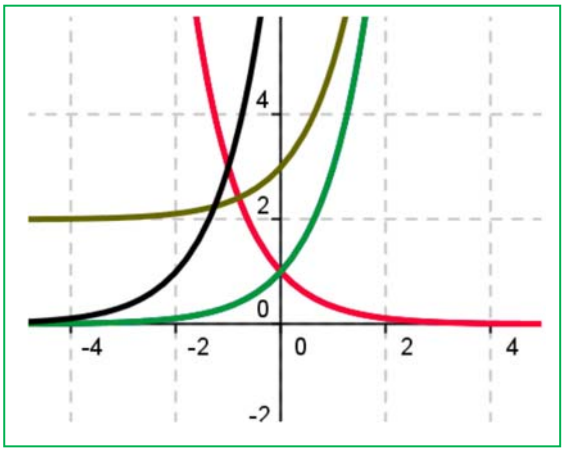
Solución:

$y = 2/x$; $x = 0$; $y = 0$.

$y = 4 + 2/x$; $x = 0$; $y = 4$.

$y = 2/(x + 3)$; $x = 3$; $y = 0$.

$y = 4 + 2/(x + 3)$; $x = 3$; $y = 4$



33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Solución:

Las funciones $y = 3^x$ ***y*** $(1/3)^{-x}$ ***son iguales***

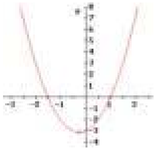
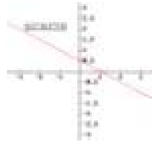
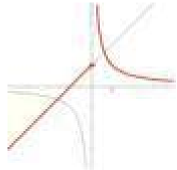
Las funciones $y = (1/3)^x$ ***y*** $y = 3^{-x}$ ***son iguales***

$y = 2 + 3^x$;

$y = 3^{x+2}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

Solución: b)

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

1)

x	*y*
0	5
1	7
2	32
3	41

2)

x	*y*
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

3)

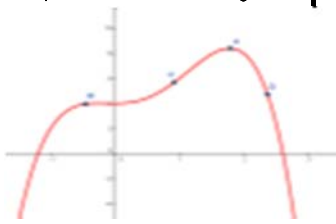
x	*y*
–3	1
–1	2
0	3
2	4

4)

x	*y*
0	1
1	2
4	3
0	4

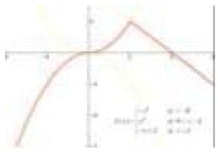
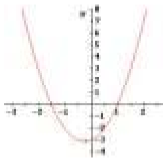
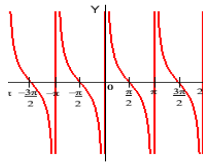
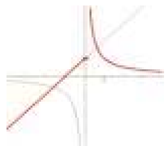
Solución: d)

3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:
   a) b) c) d



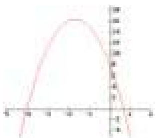
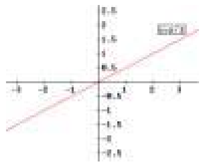
Solución: c)

4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

Solución: c)

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d)

Solución: b)

6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = –7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = –4x + 7$ d) $y = –6x – 9$

Solución: a)

7. La única función cuadrática es:

a) $y = –8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –2x^3 – 3x$

Solución: c)

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

a) $y = –2x^2$ b) $y = x^2 – 4x + 4$ c) $y = –2x^2 + 4x$ d) $y = –x^2 + 4x – 2$

Solución: b)

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x – 3)$ b) $y = 3 + 6/(x – 5)$ c) $y = –5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

Solución: a)

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

Solución: b)

CAPÍTULO 7: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA.

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

Solución: a) TVM[–3, 2] = 3, TVM[1, 5] = 3, TVM[0, 3] = 3; b) TVM[–3, 2] = –2, TVM[1, 5] = –2, TVM[0, 3] = –2; c) TVM[–3, 2] = 1, TVM[1, 5] = 1, TVM[0, 3] = 1. La tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre igual a la pendiente de la recta.

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

Solución: TVM[–3, 2] = –1, TVM[1, 5] = 6, TVM[0, 3] = 3. Ahora no es constante.

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

Solución: TVM[–3, 2] = 7, TVM[1, 5] = 31, TVM[0, 3] = 9.

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (*t*) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (*d*) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.
b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].
c) ¿Es constante?

Solución: a) v_m = 24.3 m/s; b) v_m [0, 6] = 38.3 m/s, v_m [2, 10] = 25 m/s; v_m [6, 14] = 13.7 m/s. c) No es constante. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].
b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?
c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

Solución: a) v_m [0, 40] = 18 m/s; b) v_m [15, 25] = 14 m/s; v_m [20, 30] = 13 m/s. No es constante; c) 120 Km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22,2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.

b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

Solución: a) Solución gráfica; b) $a_m(0, 10) = 25$ km/h²; c) $a_m(10, 90) = 0$ km/h²; d) $a_m(90, 100) = -25$ km/h².

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: B(x) = x2 + 7x + $\sqrt{x}$, donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.

Solución: TVM[0, 100] = 107.1; TVM[25, 100] = 132,2..

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = x + $\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

Solución: a) TVM[100, 2500] = 2600.9.

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

Solución: a) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 3; b) y'(1) = y'(3) = y'(5) = –2; c) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 0,5; d) y'(1) = y'(3) = y'(5) = 1. La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

Solución: y'(1) = 2; y'(3) = 6; y'(5) = 10. No es constante.

11. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

Solución: y'(1) = 3; y'(3) = 27; y'(5) = 75.

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x - 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.

Solución: 110.6 m/s.

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

Solución: Antes de x = 3 la velocidad es de 110 m/s, y después de 118.6 m/s.

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

Solución: y'(2) = m = 49.2.

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

Solución: d' = 1.2 t³; v(3) = 32.4 m/s; v(4) = 76.8 m/s; v(7) = 411.6 m/s; v(10) = 1200 m/s.

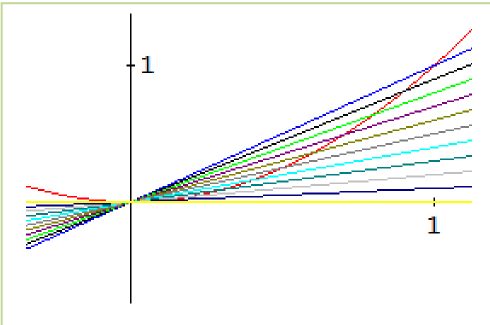
16. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3... a$. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

Solución gráfica: y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0. Igual le ocurre a y = b.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las abscisas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

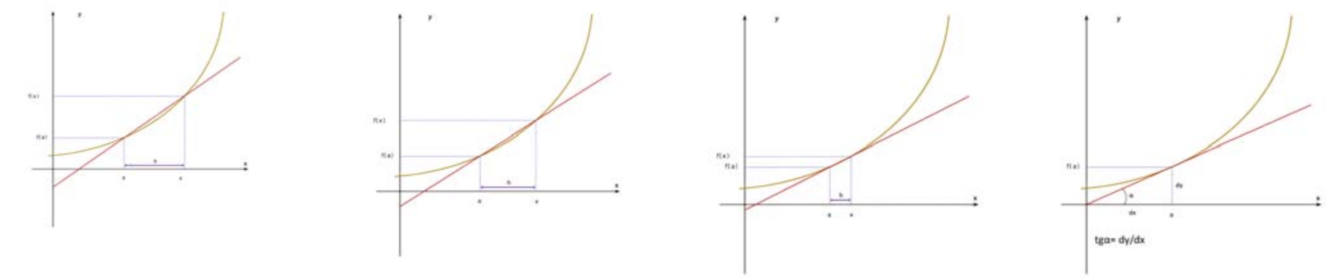
Solución manipulativa, gráfica y abierta:

Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).



18. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.

Solución gráfica:

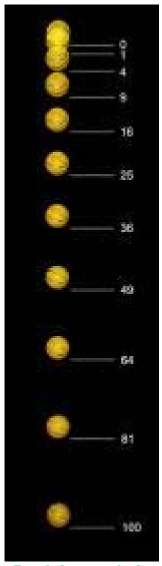


19. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

Solución: I'(x) = 2 + 2x; Es la tasa de variación instantánea de los ingresos por persona contratada.

20. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica[1], las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

Solución: $y = f(t) = t^2$; $y' = v = 2t$; $a = y'' = 2$.



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo, para t = 1, 2, 3, 4, 5 ...

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ y $f'(-7)$.

Solución: $y'(1) = 1$; $y'(a) = 2a - 1$; $f'(1) = 1$, $f'(2) = 3$, $f'(12) = 23$, $f'(5.43)= 9.86$ y $f'(-7) = -15$.

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada							

Solución:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =0$	$f'(x) =2x$	$f'(x) =1$	$f'(x) =0$	$f'(x) =2$	$f'(x) =4x+3$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Solución: La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

24. Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

Solución abierta: La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen, pero tiene un mínimo en dicho origen.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

Solución: a) $f'(x) = 24x^{23}$; b) $g'(x) = 60x^9$; c) $h'(x) = 78/7x^{12}$; d) $j'(x) = 12x^3 - 10x$; e) $p'(x) = 15x^2 - 1$.

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

Solución: a) $y' = 1 - 10x$; b) $y' = 12x - 7 + 15x^4$; c) $y' = 14/3x^6 + 8x^4 - 9x^3$; d) $y = 8x^7 - 1$.

27. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

Solución: $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(1) = 1/2$; $y'(4) = 1/4$; $y'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

Solución: a) $y' = 48x^7 + 101x^5 - 10x$; b) $y' = 245x^6 - 20x^3 + 84x^2$; c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(7x^3 - 15x)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$

Solución: a) $y' = \frac{4}{(x+3)^2}$; b) $y' = 2x + 5x^2 - 2$; c) $y' = \frac{-6x^2 + 30x - 5}{18x^4 - 12x^3 + 2x^2}$; d) $y' = \frac{\sqrt{x}(x/2+3)}{(x+2)^2}$

---

1 Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \dfrac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$.

Solución: a) $y' = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ ***; b) ;*** ***b)*** $y' = \dfrac{-11x^4 + 35x}{6\sqrt[6]{x^5}(x^3+5)^2}$ ***c)*** $y' = \frac{9}{4}\sqrt[4]{x^9} - \dfrac{3}{2\sqrt[4]{x^7}}$ ***;*** ***d)*** $y' = \dfrac{\frac{5}{6}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{11}{3}\sqrt[6]{x^5}}{(x+2)^2}$

31. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes $C(x)$ y de la función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

Solución: C'(x) = 1 + $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ***; B'(x) = 1 + 2x*** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ***. Son la tasa de variación instantánea.***

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Solución: a) $y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11} \cdot (5x^4 - 21x^2)$***;*** ***b)*** $y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6 \cdot (9x^2 - 10x)$***;***

c) $y' = \frac{5}{4}\sqrt{(4x^5 - 8x^3)^3} \cdot (20x^4 - 24x^2)$***;*** ***d)*** $y' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{2x^2 + 4x^7} \cdot (4x + 28x^6)$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\dfrac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}(x^4 - 6x^3)^2}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3 - 5}}$ c) $y = \sqrt{\left(\dfrac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3}$ d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \dfrac{2}{x^3}}}$

Solución: a) $y' = \dfrac{3(x-6)x^2(14x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 70x^2 - 441x + 490)|x|}{2|x-6|(2x^3+7)^2\sqrt{\dfrac{x(3x-5)}{2x^3+7}}}$ ***;*** ***b)*** $y' = \dfrac{x^6 + 4x^4 - 20x^3 + 63x^2 + 40x}{2\sqrt{x^2+3}(x^3-5)^2\sqrt{\dfrac{x^2-7}{x^3-5}}}$ ***;***

c) $y' = \dfrac{3(5x+3)^2(20x^2 + 24x - 3)}{x^4(4x-1)^4\sqrt{\dfrac{32(5x+3)^3}{x^3(4x-1)^3}}}$ ***d)*** $y' = \dfrac{1 + \dfrac{3}{x^4}}{6\sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{x - \dfrac{2}{x^3}}\right)^2} \cdot \sqrt{x - \dfrac{2}{x^3}}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

34. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$

Solución: y = 33x – 31.

35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

Solución: En x = 0, y = 0.05x; En x = 1, y = 0.03x + 0.01; En x = 2, y = 0.01x – 0.04: En x = 3, y = –0.01x + 0.09.

36. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$, donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

Solución: a) y'= 10t – 1.2 t², y'(3) = 30 – 10.8 > 0. Creciente. b) 10t – 1.2t² = 0 → t(10 – 1.2t) = 0 → t = 0, 10 = 1.2t → t = 8.333. Aproximadamente a poco más de los 8 meses empiezan a descender los ingresos.

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?

Solución: y = x³ + 3x es siempre creciente; y = x³ – 3x: (–∞, –1) creciente, (–1, 1) decreciente, (1, + ∞) creciente. En x = 0 es creciente, y en x = 2 y x = –2 es decreciente.

38. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

Solución: Es creciente.

39. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$; b) $y = 5x^4 - 2$; c) $y = 3x^3 + 1$; d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; e) $y = 7x^3 - 3x$.

Solución: a) (0, 3) máximo; b) (0, –2) mínimo; c) creciente siempre;

d) (0, 5) máximo; (1/2, 19/4) y (–1/2, 19/4) mínimos; e) $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Máximo,*** $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{-2}{\sqrt{7}}\right)$ ***Mínimo.***

40. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

Solución: Es un cubo de un dm de lado.

41. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

Solución: a) Siempre creciente; b) (1, 3) mínimo, (–1, 9) máximo; c) (4, 0) mínimo; d) No tiene máximos ni relativos ni absolutos, y hay infinitos mínimos (x, 3) para $-1 \le x \le 2$.

42. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

Solución: La función es creciente. En [–4, 3] tiene un mínimo en x = –4 y un máximo en x = 3. En [0, 5] la función tiene un mínimo para x = 0, y un máximo en x = 5. Son relativos y absolutos

43. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

Solución: Mínimo relativo y absoluto: (–2, 0). Máximo relativo: (–3, 1); Máximo relativo y absoluto: (5, 7).

44. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a R + x, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

Solución: x = 5/3 cm; Altura = 20/3 cm; r = $\frac{50\sqrt{2}}{3}$ ***cm.***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Definición de derivada

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.

Solución: y'(2) = 12

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

Solución: y'(1) = 1/2

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.

Solución: y'(4) = -1/32.

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: y'(1) = 1

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

Solución: y'(2) = 1.

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

Solución: a) $y' = 8x + 2$; ***b)*** $y' = 6x^2 - 6x + 7$; ***c)*** $y' = 2x - 5$; ***d)*** $y' = 56x^6 - 54x^5 - 15x^2$

7. Calcula:

a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

Solución: a) $10x + 28x^3 - 3$; ***b)*** $30x^4 - 16x + 7 + 15x^2$; ***c)*** $5x^4 - 28x^3 + 6x^2$; ***d)*** $9x^2 - 54x^5 - 16x^7$.

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)\cdot(x^2 - 5x + 2)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2 - 5)}$

Solución: a) $14x + 3 + 1/x^2$; ***b)*** $15x^2 - 4x + 1/(2\sqrt{x})$;

c) $y' = \frac{-5x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{2\sqrt{x}(x+3)^2\cdot(x^2 - 5x + 2)^2}$; ***d)*** $y = \frac{-x^3 - 15x^2 - 15x - 25}{2\sqrt{x}(x^2 - 5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$ b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$ c) $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

Solución: a) $14x/3 + 3/5 + 8/3x2$; b) $(15/2)x^2 - (4/3)x + 6/(10\sqrt{x})$; c) $(4/7)x^2 - 10/49 - 1/(2x\sqrt{x})$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-1)\cdot(2x-3)}{x+2}$ b) $y = \frac{(3x^2+4)\cdot(4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \frac{(8x+5x^2)\cdot(2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \frac{(x+9)\cdot(2x-3)}{(x+3)\cdot(x+2)}$

Solución: a) $y' = \frac{2x^2+8x-16}{(x+2)^2}$; b) $y' = (2(84x^3 - 39x^2 + 6x + 20))/(7x-1)^2$

c) $y' = (60x^7 + 185x^6 + 144x^5 - 35x^2 - 105x - 84)/(2x+3)^2$; d) $y' = (5x^2 - 78x - 225)/((x+2)^2(x+3)^2)$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5$ d) $y = (2x^2 + 5x)^9$

Solución: a) $y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$; b) $y' = (2x(3x+4))/(3(2x^3+4x^2-1)^{(2/3)})$;

c) $y' = 75x^2(5x^3+2)^4$; d) $y' = 9(2x^2+5x)^8(4x+5)$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^3+5}\cdot(x^7 + 3x^2)^6$ b) $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3 + 2)^5\cdot(x^5 - 6x^8)$ d) $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

Solución: a) $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}(x^7+3x^2)^6 + \sqrt{x^3+5}\cdot 6(x^7+3x^2)^5(7x^6+6x)$; b) $y' = (2x^2 + 8x + 3)/(3(x+1)^2\cdot(2x^3+4x^2-1)^{(2/3)})$;

c) $y' = 5(5x^3+2)^4\cdot(15x^2)(x^5-6x^8) + (5x^3+2)^5(5x^4-48x^7)$; d) $y' = (2x^{11}\cdot(2x-5)^8\cdot(133x^2-280x+150))/(7x-5)^3$;

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$ c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

Solución: a) $y' = e^{x^5+4x^3}(5x^4 + 12x^2)$; b) $y' = 7(e^{2x^3-7x^2})^7(6x^2 - 14x)$;

c) $y' = e^{(3x^5+5x^3)^5}5(3x^5 + 5x^3)^4(15x^4 + 15x^2)$; d) $y' = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}\cdot 2(6x^5-9x^8)(30x^4-72x^7)$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x^5 - 7x^3)\cdot\text{sen}(x^5 - 7x^3)$ b) $y = \cos^7(3x^3 - 5x^2)\cdot\text{sen}^5(3x^3 - 5x^2)$ c) $y = \cos(4x^5 - 8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos\left(2x^2+4x^7\right)^4}$

Solución: a)) $y' = (5x^4 - 21x^2)\cos(2(x^5 - 7x^3))$;

b) $y' = -x(9x-10)\cdot\cos(x^2\cdot(3x-5))^6\cdot\text{sen}(x^2\cdot(3x-5))^4\cdot(7\text{sen}(x^2(3x-5))^2 - 5\cos(x^2(3x-5))^2)$;

c) $y' = -\text{sen}(4x^5 - 8x^3)^5\cdot 5\cdot(4x^5 - 8x^3)^5\cdot(20x^4 - 24x^2)$;

d) $y' = -(128x^7(2x^5+1)^3\cdot(7x^5+1)\cdot\text{sen}(16x^8\cdot(2x^5+1)^4))/(3\cos(16x^8\cdot(2x^5+1)^4)^{(2/3)})$;

Aplicaciones de la derivada

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: x = 0: y = -3 x; x = 1: y = –2; x = 2: y = 9x – 16.

16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

Solución: a) y = 12x – 16; b) y = 8x – 7; c) y = 3.

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:
a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución: a) m = 30; b) m = –2; c) m = 2.

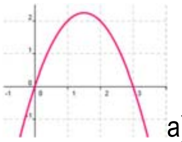
18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:
a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

Solución: a) (1, 0), (–1, 4); b) ($\sqrt{3}$, 2), (–$\sqrt{3}$, 2).

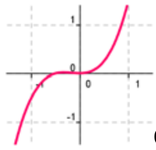
19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

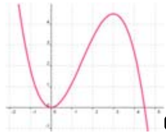
Solución: y = 0.

20. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?


a)


b)


c)


d)

Solución: d)

21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Solución: y = 12x – 16$\sqrt{2}$; y = 12x +16$\sqrt{2}$. La pendiente mínima es m = –12 que se alcanza en (0, 0).

22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

Solución: y = 2. Corta en (2, 2).

23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Solución: a = 1, b = 1, c = 0.

24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

Solución: a = 3, b = – 4, c = 1.

25. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Solución: a = 1/4.

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

Solución: (–∞, 0) creciente; (0, +∞) decreciente.

27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

Solución: La función es decreciente en toda la recta real.

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Solución: (–∞, -1) creciente; (–1, +1) decreciente; (1, +∞) creciente.

29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: (–∞, 1) creciente; (1, 3) decreciente; (3, +∞) creciente. (1, 10) máximo; (3, 6) mínimo.

30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: (–∞, 0) creciente; (0, +1) decreciente; (1, +∞) creciente. (0, 3) máximo, (1, 2) mínimo.

31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución gráfica: (–∞, $-\sqrt{3}$) creciente; ($-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$) decreciente; ($\sqrt{3}$, +∞) creciente.
($-\sqrt{3}$, 6$\sqrt{3}$) máximo, ($\sqrt{3}$, $-6\sqrt{3}$) mínimo.

32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–7, 2] y en el intervalo [0, 8].

Solución: La función es siempre creciente, por tanto tiene en [–7, 2] un mínimo relativo en (–7, –1 162) y un máximo relativo en (2, 152), y en [0, 8] tiene un mínimo relativo y absoluto en (0, 0), y un máximo relativo y absoluto en (8, 2 240).

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Solución: Nunca se anula la derivada. La función no es derivable en x = –3, f(–3) = 0. Tiene un mínimo absoluto en (–3, 0). No tiene máximos.

Problemas

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

Solución: v(0) = 15 m/s; v(5) = 23 m/s; t = 11.25 s.

35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

Solución: r' = 0.001 mm/grado. Es constante; T'(30) = 0.5555…; T'(90) = 0.062;
r'(10) = 0.005 mm/s; r'(30) = 0.000555…mm/s; r'(90) = 0.000062 mm/s.

36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

Solución: t = 3,4 s; d'(3.4) = 34 m/s; d'(4.8) = 48 m/s; d'(7.4) = 74 m/s.

37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 - 4t + 3$ b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $e = -t^2 + 4t + 3$ d) $e = (3t - 4)^2$

Solución: a) $v = 2t - 4$; $a = 2$ m/s²; b) $v = 6t^2 - 10t + 4$; $a = 12t - 10$; c) $v = -2t + 4$; $a = -2$; d) $v = 6(3t - 4)$; $a = 18$ m/s².

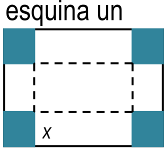
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Solución: v/2) = 0.012 m/min; v(5) = 0.012 m/min.

39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

Solución: v(2) = 0.92 m/s; v(4) = 2.08 m/s; v(7) = 4.27 m/s; v(15) = 12.75 m/s; A los 31 segundos pueden fallarle los frenos, luego debería de comenzar a frenar antes.

40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



Solución: $x \approx 3.7$ cm.

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Solución: $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$; $h = \dfrac{15}{2\pi\sqrt[3]{45}}$.

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

Solución: $y = 100 - 80/(x + 5) - 2x$; $y' = 80/(x^2 + 10x + 25) - 2$.

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

Solución: Aumenta un 5 % anual.

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

Solución: $y' = 9t^2 + 18t$.

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

Solución: Disminuye un 2 % anual.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim\limits_{b \to x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ d) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$

Solución: c)

2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

Solución: c)

3. La derivada de $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ es:

a) 15/11 b) –10/25 c) –16/121 d) 1/3

Solución: c)

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

Solución: a)

5. La derivada $y = cos(x^3)$ es:

a) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x^3)$ b) $y' = -sen(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -sen(x^3) \cdot cos(3x^2)$ d) $y' = 3(cos(x))^2 \cdot (-sen(x)$

Solución: b)

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

Solución: c)

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

Solución: d)

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

Solución: c)

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)\, x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

Solución: d)

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

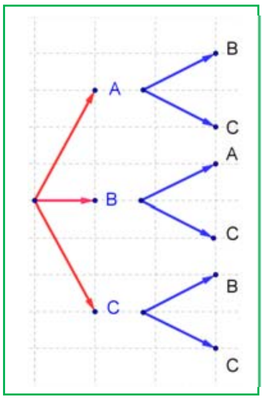
a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (–1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
c) (6, –324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

Solución: d)

CAPÍTULO 8: COMBINATORIA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERMUTACIONES



56. Haz diagramas en árbol y calcula:

a) Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B y C.

b) Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.

Solución gráfica: a) 6; b) Palabras de 3 letras: 5·25·22 = 2750.

57. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema

Solución gráfica: 5·3·4 = 60 modelos diferentes. Sólo repetirá modelo un día.

58. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? *Sugerencia*: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

Solución gráfica: 25 · 16 / 2 = 200

59. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?

Solución: P_4 = 4 · 3 · 2 · 1 = 24

60. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Solución gráfica: Cada uno de los 5 puede llegar el primero. Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, 3, y 5. Si la carrera no está amañada hay P_5 = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 formas distintas de llegar a la meta.

61. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Solución: P_4 = 4 · 3 · 2 · 1 = 24

62. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Solución: Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.

Se pueden ordenar de P_{28} = 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes.

63. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Solución: P_6 = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720.

64. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Solución: P_7 = 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5040.

65. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

Solución: a) 30; b) 5040; c) 56; d) 6; e) 12; f) 347.

66. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

Solución: a) n+1; b) n+4; c) n^2 +7n +12; d) n.

67. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

Solución: a) 5! / 2!; b) 13! / 9!; c) 8! /5!; d) 10! / 8!.

68. Expresa utilizando factoriales: a) (*n*+3)·(*n*+2)·(*n*+1); b) *n*·(*n*+1)·(*n*+2)·(*n*+3); c) *n*·(*n*+1)·(*n*+2)·… ·(*n*+*k*).

Solución: a) (n+3)! / n!; b) (n+3)! / (n−1)!; c) (n+k)! / (n−1)!

69. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.

Solución: P_{30} = 30!

70. Nueve amigos van en bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Solución: P_9 = 9! = 362 880

2. VARIACIONES

71. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

***Solución:** $9 \cdot VR_{10,5} = 900\,000$.*

72. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?

***Solución:** Suponemos que los números pueden empezar por 0: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 196\,830\,000$*

73. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

***Solución:** $VR_{2,8} = 256$*

74. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

***Solución:** a) 16; b) 256; c) 121; d) 2 048*

75. Expresa con una fórmula:

Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.

Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.

Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

***Solución:** a) $VR_{3,5} = 3^5$; b) $VR_{7,2} = 7^2$; c) $VR_{5,4} = 5^4$*

76. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?

***Solución:** $VR_{2,4} = 16$*

77. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

***Solución:** $22 \cdot 27 = 594$*

78. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

***Solución:** $V_{4,3} = 24$*

79. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

***Solución:** Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras. Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero pero no la colocada en primer lugar. Para la tercera 8 y para la cuarta 7, En total $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ posibilidades.*

80. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

***Solución:** $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$*

81. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

***Solución:** $V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$.*

82. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

***Solución:** $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$*

83. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

***Solución:** a) $V_{11,6} = 11*10*9*8*7*6 = 332640$; b) $V_{7,5} = 7*6*5*4*3 = 2520$; c) $V_{8,4} = 8*7*6*5 = 1680$.*

84. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

***Solución:** a) 840; b) 30; c) 90*

3. COMBINACIONES

85. Tenemos 5 bombones (iguales) y hay 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

***Solución:** $C_{7,5} = 21$*

86. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede organizar el regalo?

***Solución:** $C_{10,3} = 120$*

87. En el juego del póker se dan 5 cartas a cada jugador de las 52 que tiene la baraja, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden recibir?

***Solución:** $C_{52,5} = 1\,497\,000\,960$*

88. Añade al triángulo de Tartaglia del margen 3 filas más.

Solución:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

89. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de la fila *m* da siempre 2^m.

***Solución:** $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$; $64 = 2^6$.*

90. Sin calcularlo, mirando al triángulo, ¿cuánto vale $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$; $C_{5,5}$.

***Solución:** 10; 5; 10; 1.*

91. Desarrolla $(a + b)^6$

***Solución:** $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$*

92. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

***Solución:** a) $(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$; b) $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$; c) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$; d) $243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$.*

93. Calcula el coeficiente de x^7 del polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

***Solución:** $10\,(3x)^3(x^2/2)^2 = (270/4)\,x^7$. El coeficiente es $270/4 = 135/2$.*

94. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

***Solución:** $(\sqrt{2})^5 - 5(\sqrt{2})^4(x/2) + 10(\sqrt{2})^3(x/2)^2 - 10(\sqrt{2})^2(x/2)^3 + 5(\sqrt{2})(x/2)^4 - (x/2)^5 =$*

$4\sqrt{2} - 10x + 5\sqrt{2}\,x^2 - 5/2x^3 + (5\sqrt{2}/16)x^4 - x^5/32$.

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

95. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? *Ayuda*: Haz un diagrama circular como el anterior.

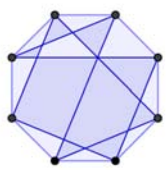
***Solución:** El español (A) tiene al italiano (B) a su derecha y al portugués (C) a su izquierda*

96. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?

***Solución:** Hay $P_7 = 5\,040$ formas de sentarse en la mesa. Hay $2 \cdot P_6 = 1\,440$ formas en las que están juntos Ana y Alejandro. Y tenemos $P_3 \cdot P_3 = 36$ formas en las que no hay dos chicas n dos chicos juntos.*

97. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

***Solución:** Hay $P_7 = 5\,040$ poligonales cerradas contando con el propio octógono.*



98. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

***Solución:** $PR_{7,3,2,2} = 7! / (3! \cdot 2! \cdot 2!) = 210$ números distintos.*

99. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

***Solución:** $PR_{9,4,2} = 9! / (4! \cdot 2!) = 7\,560$ palabras distintas.*

100. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?

Solución: Podemos ordenarlas de $PR_{9,4,3,2}$ = 9! / (4! · 3! · 2!) = 1 260 formas distintas.

Tienen dos blancas juntas $PR_{8,4,3}$ = 8! / (4! · 3!) = 280 formas. No tienen dos blancas juntas 1 260 − 280 = 980.

101. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? *Ayuda:* Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

Solución: El número de contraseñas posibles es $VR_{10,7}$ = 10 000 000. Tienen todos sus números distintos $V_{10,7}$ = 604 800 contraseñas. Tienen algún número repetido 10 000 000 − 604 800 = 9 395 200 contraseñas. Tienen el número 0 repetido sólo dos veces $C_{9,5}$ · $PR_{7,2}$ = 317 520 contraseñas, Tienen un número repetido sólo dos veces: 3 175 200 contraseñas.

102. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? *Ayuda:* Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

Solución: Hay $C_{6,4}$=15 maneras de colocar 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes. Si podemos dejar alguna caja vacía, tomamos las 7 bolas y 4 puntos que las dividen en 5 partes, en total 11 elementos, la solución es $C_{11,4}$ = 330. Observa que cada punto indica que las bolas que están a su izquierda están en una determinada caja,y que cuando hay dos puntos juntos es que hay una caja vacía.

103. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? *Ayuda:* Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

Solución: Supongamos que las pulseras no se pueden voltear: Si no fueran cerradas tendríamos $C_{10,4}$=210 pulseras diferentes. Al ser cerradas tenemos 210/10 = 21 pulseras distintas.

Si las pulseras se pueden voltear: Vamos a estudiar los casos a partir de la distancia entre las bolas blancas.

Si las 6 bolas rojas están unidas: Sólo hay 1 caso: 0-0-0-6

Si hay 5 bolas rojas unidas: Hay 2 casos posibles: 1-0-0-5 y 0-1-0-5.

Si hay 4 bolas rojas unidas: Hay 4 casos posibles: 1-1-0-4, 1-0-1-4, 0-0-2-4, 0-2-0-4

Si hay 3 bolas rojas unidas: Hay 6 casos posibles: 0-3-0-3, 3-0-0-3, 0-2-1-3, 0-1-2-3, 2-0-1-3, 1-1-1-3

Si hay 2 bolas rojas unidas: Hay 3 casos posibles: 2-1-1-2, 1-2-1-2, 0-2-2-2.

En total 16 casos.

104. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente? ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

Solución: El rey blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición. 1º) Si el rey blanco está en una esquina amenaza a 3 y excluyendo su posición hay 60 casillas para colocar al rey negro y como hay 4 esquinas en total hay 240 formas. 2º) Si el rey blanco está en una de las 24 casillas del borde amenaza 5 casillas y excluyendo la suya tenemos 58, en total 58·24 = 1392 formas. 3º) Si el rey blanco está en una posición central, hay 36 casillas de este tipo, amenaza 8 casillas que incluyendo la suya no amenaza a 55, en total 55·36 = 1980. Por último 240 + 1392 + 1980 = 3612.

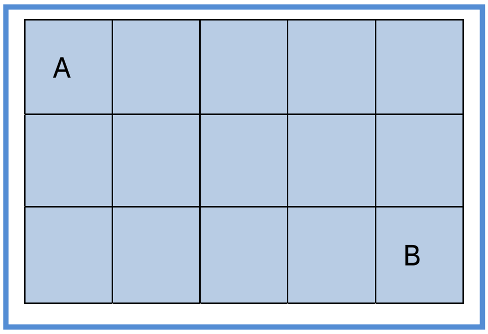
CURIOSIDADES. REVISTA

En el año 1494 aparece la primera obra impresa que tiene cuestiones sobre Combinatoria. Es “*Summa*” escrita por Luca Pacioli. (¿Te acuerdas del Número de Oro?). Uno de los problemas que plantea es el de calcular el número de formas distintas en que *n* personas pueden sentarse en una mesa redonda. Problema que ya hemos resuelto en el apartado 4.2.

Solución: $PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro “*Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*”, uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?

Solución: Se pueden hacer 6^7 combinaciones distintas, es decir, 279 936 formas diferentes.



Un gato se encuentra en A y un ratón en B. El gato avanza de centro de casilla en centro de casilla moviéndose hacia la derecha o hacia abajo, nunca retrocede. ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer el gato para cazar al ratón?

Solución: 15 caminos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Permutaciones

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Solución: $P_3 = 6$; $P_8 = 8! = 40\ 320$

2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Solución: Hay 24 maneras de hacerse la fotografía. Y hay $2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 8$ ***maneras de hacerse la fotografia alternando chicos y chicas***

3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Solución: $P_6 = 720$ ***maneras de introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes.***

4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

Solución: $P_5 = 120$ ***órdenes distintos de llegar a la parada. La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/120.***

5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Solución: $P_7 = 5040$ ***formas de llegar a la meta. La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040***

6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Solución: Hay $P_5 = 120$ ***números distintos de 5 cifras diferentes. Si empiezan por 5 hay*** $P_4 = 24$ ***números. Si empiezan por 5 y terminan por 7 hay*** $P_3 = 6$ ***números.***

Variaciones

7. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? Recuerda: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

Solución: Hay $V_{6,4} = 360$ ***números de 4 cifras distintas. Son impares 180. Para calcular los múltiplos de 4 analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64. En total tenemos*** $7 \cdot V_{4,2} = 84$ ***múltiplos de 4.***

8. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. Sugerencia: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

Solución: Hay $VR_{6,4} = 1296$ ***números de 4 cifras. Ordenados de menor a mayor el primero es 1 111 y el último 6 666 su suma es 7777, como esta suma coincide entre el segundo 1 112 y el penúltimo 6 665 y así sucesivamente su suma es:*** $7\ 777 \cdot 1296 /2 = 5\ 039\ 496$

9. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

Solución: Se pueden formar $P_3 = 6$ ***banderas distintas con 3 franjas y 3 colores. Con 5 colores se pueden formar*** $V_{5,3} = 60$ ***banderas distintas con tres franjas. Y si no es preciso que las franjas tengan colores distintos tenemos*** $VR_{5,3} = 125$ ***banderas diferentes.***

10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

Solución: Mario tiene $V_{7,6} = 5\ 040$ ***para ordenar las películas entre los 7 días de la semana. Si sólo va 3 días al cine el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.***

11. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

Solución: Tenemos $V_{6,4} = 360$ ***números con 4 dígitos formados por las 6 cifras, como hay 60 que empiezan por 0 tenemos 300 números de cuatro cifras. Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir 120 números.***

12. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

Solución: El menor número de tres cifras es 100, el mayor 999, en total hay 900. Mayores que 123 hay $900 - 24 = 876$.

13. Con las letras de la palabra "arquetipo" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.

Solución: a) Empieza por vocal: $V_{5,3} \cdot V_{4,3} = 1\ 440$ ***palabras y por consonante las mismas. En total 2 880 palabras.***
b) Si las letras se pueden repetir tenemos $2 \cdot VR_{5,3} \cdot VR_{4,3} = 54\ 000$ ***palabras.***

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Solución: Con una secuencia de 8 dígitos se pueden formar $VR_{2,8}$ = 256 bytes. Con una secuencia de 16 dígitos se pueden formar $VR_{2,16}$ = 65 536 bytes. Y con solo 4 dígitos sólo podríamos formar 16 bytes, no podemos escribir las letras del alfabeto.

Combinaciones

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

Solución abierta: Por ejemplo: $\binom{6}{3} = \binom{20}{1}$ ***y*** $\binom{8}{5} \neq \binom{47}{47}$

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

Solución: $\binom{7}{4}$ ***= 35.***

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

Solución: Se pueden hacer $C_{5,3}$ = 10 mezclas diferentes.

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

Solución: a) 20; b) 42; c) 20; d) 1; e) 1.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

Solución: a) 84; b) 219; c) 105; d) 20; e) 47.

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Solución: Hay $C_{30,4}$ = 27 405 maneras de elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30. Solución abierta.

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Solución: Hay $C_{5,3}$ = 10 productos. Sólo uno es entero. Hay $C_{3,2}$ = 3 productos cuyo resultado es un número racional y $C_{4,2}$ = 6 productos cuyo resultado es un número irracional.

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?

Solución: $C_{7,3}$ = 35.

23. Calcula: a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

Solución: a) 2^4 = 16, b) 2^5 = 32

24. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$ sin calcular cada uno de los números combinatorios?

Solución: Utilizar el binomio de Newton: la formula anterior coincide con $(1 + 1)^8 = 2^8$.

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

Solución: Hay $C_{10,3}$ = 120 formas.

26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Solución: Hay $C_{20,\,2}$ = 190 posibilidades. Hay $C_{4,2}$ = 6 posibilidades de que no te sepas ninguno de los dos temas y la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas es 6/190 = 3/95. La probabilidad de que te toque sólo un tema que no te sepas 128/380 = 32/95.

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

Solución: Si una actividad se puede quedar sin alumnos hay 2^{10} = 1024 formas de formar los grupos. Si ninguna actividad se puede quedar sin alumnos hay dos menos, es decir 1022 formas.

28. Desarrolla el binomio a) $(4 – x)^5$; b) $(3 –2x)^4$; c) $(2ab – 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$.

Solución: ***a) 256 – 640x + 640x2 – 160x3 + 20x4 – x5;***

b) $81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$;

c) $64a^6b^6 - 576a^5b^5c + 2160a^4b^4c^2 - 4320a^3b^3c^3 + 4860a^2b^2c^4 - 2916abc^5 + 729c^6$;

d) $x^3/8 - (3/4)x^2\sqrt{2x} + 3x^2 - 2x\sqrt{2x}$

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ b) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$ c) $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$ d) $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

Solución: a) x = 5; b) 2x + 2 = 10 => x = 4; c) x = 5; d) x = 5.

30. Escribe el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$

Solución: a) x = 1; b) x = 4; c) x=3; d) x = 4; e) x = 6; f) x = 2

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2} + n$ c) $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$

Solución: a) $\binom{n+1}{4}$; ***b)*** $\binom{n+1}{2}$; ***c)*** $\binom{n+2}{3}$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

Solución: $(63/2)\sqrt{2}a^5/x^5$.

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(–1 – 5x)^9$.

Solución: – 1800.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Solución: $C_{7,4} = 35$ ***opciones***

35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Solución: Hay $C_{12,4} = 495$ ***sucesos en los que se obtienen 4 éxitos y de estos en*** $C_{11,3} = 165$ ***se tiene éxito en el último tiro.***

Problemas

36. En "*Curiosidades y Revista*" tienes el problema de *Buteo*. Con 7 discos y 6 letras en cada disco, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? Ayuda: En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

Solución: Se pueden hacer 6^7 ***combinaciones distintas.***

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

Solución: El menú se puede combinar de 120 formas diferentes.

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Solución: Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener 12 resultados. Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos 24 resultados. Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos 288 resultados.

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?

Solución: Se pueden formar 48 parejas distintas.

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

Solución: La caja consta de 18 piezas.

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

Solución: Para que 40x > 365 el número de postres x debe ser mayor que 9,125. Con 10 postres sería suficiente.

42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?

Solución: Si hubo 91 apretones $C_{x,2}$ =91 y había 14 personas. Si hubo 45 apretones había 10 personas.

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

Solución: Hay P_5 = 120 maneras de introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes. Si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos distribuimos las 5 cajas en 5 lugares ordenados simbolizados por los objetos, así C1-C1-C1-C1-C2 indica que los 4 primeros objetos están en la caja 1, el quinto en la caja 2 y el resto de las cajas están vacías, por lo tanto hay $VR_{5,5}$ = 3 125 formas diferentes de colocarlos. La probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto es 1024/3125.

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Solución: Con 4 cifras podemos formar $VR_{10,4}$ = 10 000 contraseñas. No tienen ningún número repetido $V_{10,4}$ =5 040, por lo tanto tienen algún número repetido 4 960 contraseñas. Tienen el número 0 repetido dos veces $C_{9,2} \cdot PR_{4,2}$ = 432 contraseñas y cualquier número repetido dos veces 4 320 contraseñas.

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?

Solución: El número de puntos de intersección entre 10 rectas es $C_{10,2}$ = 45. Con 15 rectas se tienen $C_{15,2}$ = 105 puntos y con n rectas tenemos $n\cdot(n-1)/2$ puntos.

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

Solución: Un octógono regular tiene $C_{8,2} - 8$ = 28 diagonales. Un polígono de 20 lados tiene 190 diagonales.

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

b) $VR_{2,4} = 2^4$ c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$ d) $C_{6,3} = 20$

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? Ayuda: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler: C + V = A + 2

Solución: Un icosaedro regular tiene 12 vértices y 30 aristas por lo tanto tiene $C_{12,2}$ – 30 = 36 diagonales. Un dodecaedro tiene 20 vértices, 30 aristas y cada una de las 12 caras pentagonales tienen 5 diagonales, por lo tanto un dodecaedro tiene $C_{20,2}$ – 30 – 60 = 100 diagonales.

49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

Solución: Hay P_5 = 120 números diferentes de 5 cifras distintas. Hay 24 que terminan en 5, por lo tanto, son múltiplos de 5. También hay 24 que empiezan por 2. Y hay 6 que empiezan por 2 y terminan en 7.

50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?

Solución: Si hay 5 bolas tenemos 2 bolas de un color, 2 bolas de otro y 1 bola del tercer color. El número de filas que se puede formar con estas bolas es $PR_{5,2,2}$ = 30. Y pulseras hay 3.

51. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

Solución: Con estos dígitos hay $V_{5,5}$ = 120 números de cinco cifras distintas Ordenados de menor a mayor se observa que el primero más el ultimo suman 66 666 lo mismo que el segundo más el penúltimo y así sucesivamente por lo que la suma de estos 120 números es 66 666 · 60 = 399 996.

52. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

Solución: a) x = 5/2; b) 6, (la solución 1 no tiene sentido); c) (x+1)(x-2)(x-3)…(x-12) = 1/3*13!.

53. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Solución: Con M 123456 había 1 000 000 matrículas diferentes, con M 1234 A había $VR_{10,4}$*28 = 280 000 distintas, y con 1234 ABC hay $VR_{10,4}$*$VR_{28,2}$ = 18 000 000.

54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

Solución: 5; 16.

55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Solución: El número del teléfono está entre $V_{5,4}$ = 120 números diferentes.

56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Solución: El equipo puede estar formado de $C_{7,3} \cdot C_{4,2}$ = 210 formas diferentes. Si un experto está fijo hay $C_{6,2} \cdot C_{4,2}$ = 90 formas distintas.

57. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

Solución: a) $V_{8,2}$ = 56; b) $C_{8,2}$ = 28.

58. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Solución: De cada 6 días 1 no podrá ninguno de los dos padres ir a la guardería. Suponiendo que trabajan los sábados, pero no los domingos habrá aproximadamente 52 días.

59. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Solución: Las luces se pueden encender de $V_{10,3}$ + $V_{10,2}$ + $V_{10,2}$ +1 = 821 formas diferentes. Si el primer tiro falla hay 101 formas distintas.

60. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Solución: Antonio tiene $C_{6,4}$ = 15 formas de elegir pareja en cuatro bailes.

61. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar? ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2? Calcula la suma de todos estos últimos números.

Solución: Hay $VR_{6,5}$ = 7 776 formas de formar números de 5 dígitos. Hay 1 296 que empiezan por 0 por lo que hay 6 480 números de cinco cifras. Hay $PR_{5,2,3}$ = 10 números con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2. La suma de estos 10 números es 167 165.

62. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra “puerta” que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

Solución: Hay $P_3 \cdot P_3$ = 36 palabras que empiezan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante. En total 72 palabras.

63. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

Solución: Se pueden realizar $C_{10,3}$ = 120 guardias diferentes. Alejandro estará en $C_{9,2}$ = 36 guardias y no estará en $C_{9,3}$ = 84.

64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

Solución: Hay 9 números capicúas de dos cifras. Hay 90 números capicúas de tres cifras. Y de cuatro cifras también 90 capicúas.

65. Con las letras de la palabra “argumento” ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.

Solución: a) Comienzan y terminan por vocal $V_{5,2} \cdot V_{4,3}$ = 480. Comienzan y terminan por consonante: $V_{5,3} \cdot V_{4,2}$ = 720. En total 1200 palabras. b) Comienzan y terminan por vocal $VR_{5,2} \cdot VR_{4,3}$ = 1 600. Comienzan y terminan por consonante: $VR_{5,3} \cdot VR_{4,2}$ = 2000. En total 3 600 palabras.

66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

Solución: Hay 3 · $V_{9,3}$ =1 296 números con todas sus cifras distintas.

67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?

Solución: Hay $C_{8,4}$ = 70 muestrarios distintos de cuatro juguetes y en $C_{7,3}$ =35 de ellos está el último modelo de juguete.

68. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

Solución: Si hay tres resguardos equivocados se tienen $C_{5,3}$ = 10 formas distintas de elegir tres resguardos equivocados, para cada una de estas elecciones hay 2 en las que ninguno de los tres resguardos coincide con el bolso respectivo. En total 20 formas diferentes. Si son dos los resguardos equivocados se tienen también $C_{5,2}$ = 10 formas distintas de elegir dos resguardos equivocados pero ahora sólo hay una forma en la que los dos resguardos no coincide con el bolso respectivo. En total 10 formas diferentes.

69. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es “Summa” de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

Solución: Hay P_3 = 6 formas de colocar a cuatro personas en una mesa circular.

70. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

Solución: Hay 9 000 números de cuatro cifras de estos no tienen ningún cinco $VR_{9,4} - VR_{8,3}$ = 6 049, por lo tanto tienen algún cinco: 2 951 números.

71. Con las letras de la palabra “saber”, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras “corte”, “puerta” y “Alberto”.

Solución: Con las letras de la palabra “saber” se pueden formar $P_3 \cdot P_2$ = 12 palabras, las mismas que con las letras de la palabra “corte”. Con las de la palabra “puerta” hay $P_3 \cdot P_3$ = 36 que comienzan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante, en total 72. Con las de la palabra “Alberto” hay $P_4 \cdot P_3$ = 144 palabras.

72. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, … ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?

Solución: Ley de recurrencia: $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + n$. Su término general $a_n = \binom{n+1}{2}$, se verifica la ley de recurrencia $a_1 = 1$ y $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$.

73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

Solución: Con una cifra hay 3. Con dos cifras hay $VR_{3,2}$ = 9. Con tres cifras hay $VR_{3,3}$ = 27 y con cuatro cifras hay $VR_{3,4}$ = 81. En total 120 números.

74. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

Solución: En total se tienen $VR_{5,5}$ = 3 125 palabras con letras repetidas o no. Entre estas hay P_5 = 120 con las cinco letras distintas por lo tanto hay 3 005 palabras con alguna letra repetida.

75. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?

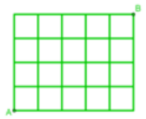
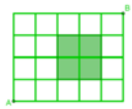
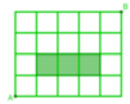
Solución: El número de casos posibles es VR40, 5= 102 400 000. Obtenemos 4 ases en 36 · VR4,4 = 9 216 casos y tenemos 5 ases en VR4,5 = 1024 casos en total tenemos 10 240 casos favorables.

La probabilidad de obtener más de 3 ases es 10 240/102 400 000 = 1/10 000 y la probabilidad de obtener menos de cuatro ases 9999/10 000.

76. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba?

b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con n caminos en cada lado?

e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales?

Solución: a) Hay $\binom{9}{4}$ = 189 caminos diferentes. b) En este caso tenemos 6 caminos. c) En este caso tenemos 7 caminos

d) En una cuadrícula con n caminos en cada lado hay n – 1 cuadrados en cada lado y el número de caminos es $\binom{2n-2}{n-1}$

e) En una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales hay $\binom{n+m-2}{n-1}$caminos.

AUTOEVALUACIÓN

1) Tienes **nueve** monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?: a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

Solución: c)

2) En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?: a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

Solución: c)

3) ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

Solución: c)

4) Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?: a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

Solución: b)

5) Permutaciones de n+4 elementos dividido por permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/C_{n+4,n+1}$

Solución: a)

6) Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

Solución: b)

7) Indica qué afirmación es falsa; a) 0! = 1; b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

Solución: b)

8) El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ es: a) 0, 1, y 1; b) 0, 9 y 4; c) 1, 1 y 4; d) 5, 9 y 4

Solución: c)

9) El valor de x, distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es: a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

Solución: a)

10) El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ es: a) $\binom{7}{3}$; b) 1; c) $\binom{7}{4}$; d) $V_{7,4}$

Solución: a)

CAPÍTULO 9: ESTADÍSTICA. AZAR Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA

1) Queremos realizar un estudio estadístico sobre el tiempo dedicado al estudio por el alumnado de ESO de Madrid. Para ello se seleccionan adecuadamente 100 alumnos. Indica cuál es la población, cuál la muestra, qué tamaño tiene la muestra y quién sería un individuo.

Solución: Población: Alumnado de ESO de la Comunidad de Madrid. Muestra: Los 100 alumnos seleccionados. Tamaño = 100.

2) Quieres pasar una encuesta para conocer, lo mismo que en el problema anterior, el tiempo dedicado al estudio, en este caso el de los compañeros y compañeras de tu centro escolar. ¿Se la pasarías sólo a las chicas? ¿Sólo a los chicos? ¿Preguntarías a los mejores de la clase? ¿A los de peores notas? Indica el criterio que seguirías para seleccionar la muestra a la que preguntar.

Solución: Ni sólo a las chicas, ni sólo a los chicos, ni a los mejores, ni a los peores de una clase. Para que la muestra sea representativa no debe estar sesgada. Una forma podría ser numerar al alumnado y elegir una lista de números aleatorios.

3) Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de frecuencias absolutas de los valores obtenidos al tirar un dado con las frecuencias relativas y porcentajes, y con frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

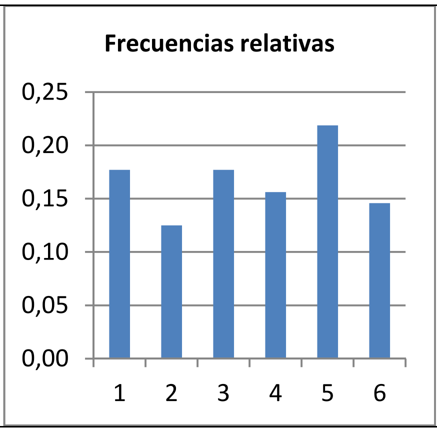
Resultados	Frecuencias absolutas
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

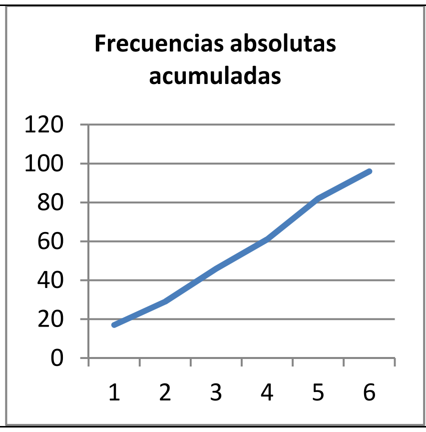
Solución:

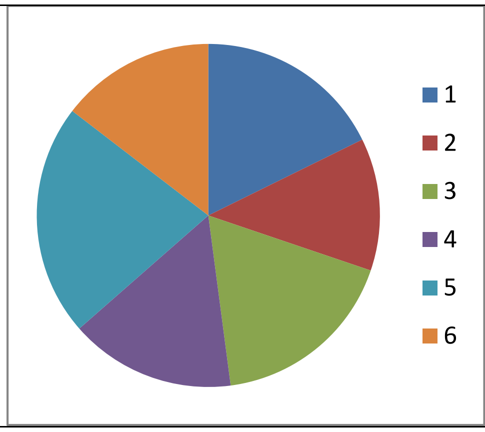
Resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentajes	Frecuencias absolutas acumuladas	Frecuencias relativas acumuladas
1	*17*	*0.18*	*17.71*	*17*	*0.18*
2	*12*	*0.13*	*12.50*	*29*	*0.30*
3	*17*	*0.18*	*17.71*	*46*	*0.48*
4	*15*	*0.16*	*15.63*	*61*	*0.64*
5	*21*	*0.22*	*21.88*	*82*	*0.85*
6	*14*	*0.15*	*14.58*	*96*	*1.00*

4) Con la tabla de valores del ejercicio anterior, dibuja en tu cuaderno el diagrama de frecuencias relativas, el polígono de frecuencias absolutas acumuladas y el diagrama de sectores.

Solución:







5) Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

Solución abierta y manipulativa:

6) Selecciona una muestra entre tus compañeros y compañeras y realiza un estudio estadístico sobre el deporte que más le gusta a cada uno. Haz la representación que sea más sencilla de interpretar.

Solución abierta y manipulativa:

7) Dadas las temperaturas en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a) Calcula la temperatura media, la moda y la mediana.
b) Utiliza el ordenador para comprobar el resultado.

Solución:

Media	*Moda*	*Mediana*
12.67	*9*	*10*

8) Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:
a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200
Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.
Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos. ¿Influyen en la moda? ¿Y en la mediana? ¿Y en la media?

Solución:

	Media	*Mediana*	*Moda*
a)	*116.11*	*6*	*9*
b)	*6.11*	*6*	*9*
c)	*34.00*	*6.5*	*0 y 9*

Los valores extremos influyen en la media.

9) Se ha lanzado un dado 100 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

a) Calcula la media, moda y mediana.
b) Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

Solución:

Media	*Mediana*	*Moda*
3.56	*3.625*	*6*

10) Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Calcula la media, la mediana y la moda.
b) Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.
c) Repite tú los lanzamientos, ahora sólo diez veces, y calcula de nuevo la media, mediana y moda.

Solución:

Media	*Mediana*	*Moda*
7.032	*6.98*	*7*

c) Solución manipulativa y abierta

11) Utiliza el ordenador para calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente tabla de frecuencias absolutas, que indica el número de hijos que tienen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

Solución:

Media	*Mediana*	*Moda*
2.025	*1.78*	*1*

12) Dadas las temperatura en una ciudad de un ejercicio anterior:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a. Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.
b. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

Solución:

Recorrido	*Varianza*	*Desviación Típica*	*Q1*	*Q3*	*Intervalo intercuartil*

35	269	16.4	7.25	15.75	8.5

13) Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil. de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

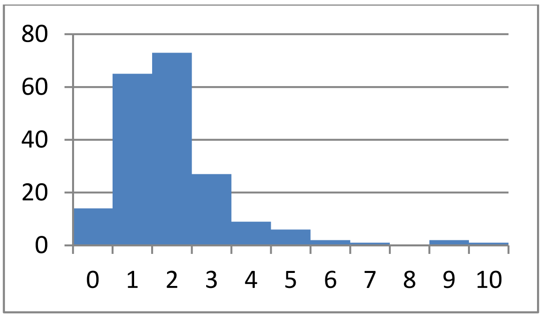
Utiliza el ordenador para comprobar los resultados.

Solución:

Recorrido	Varianza	Desviación Típica	Q1	Q3	Intervalo intercuartil
998	109870.61	331.47	4	9	5
8	8.11	2.85	4	9	5
200	4303.11	65.60	4.2	9	4.75

14) Utiliza el ordenador para dibujar el histograma de la actividad 11.

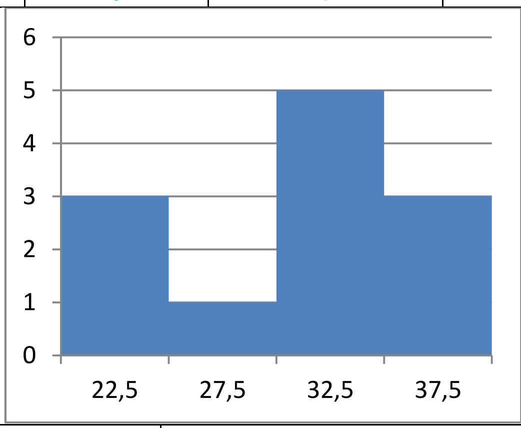
Solución:



15) Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m³/semana durante 12 semanas de una urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas con cuatro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) y [35, 40). Calcula las marcas de clase. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas. Calcula la media y la desviación típica. Calcula gráficamente la mediana y los cuartiles.

Solución:

Intervalo	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
Marcas de clase	22.5	27.5	32.5	37.5
Frecuencias	3	1	5	3



Media	Desviación Típica
30.83	29.53

Solución gráfica: Mediana = 27; Cuartil 1 = 22.5; Cuartil 3 = 32.5.

16) Haz un estudio estadístico preguntando a tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y represéntala en un diagrama de rectángulos, un polígono de frecuencias y un diagrama de sectores.

Solución abierta y manipulativa:

2. DATOS BIDIMENSIONALES

17) Con la tabla de valores del ejemplo, construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la variable *X* (“Color de pelo”) y la variable *Y* (“Color de ojos”) por separado, como variables unidimensionales.

Solución:

Color del pelo	Fr. Absolutas	Fr. Relativas	Color de ojos	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Relativas
Moreno	5	0.625	Marrones	4	0.5
Rubio	3	0.375	Verdes	2	0.25
			Azules	2	0.25

18) Completa la siguiente tabla y exprésala en forma de tabla de doble entrada, primero con frecuencias relativas y luego con frecuencias absolutas.

(x_i, y_i)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
(0, 1)	12	
(1, 2)	14	
(2, 3)	14	

Solución:

(x_i, y_i)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
(0, 1)	12	0.3
(1, 2)	14	0.35
(2, 3)	14	0.35

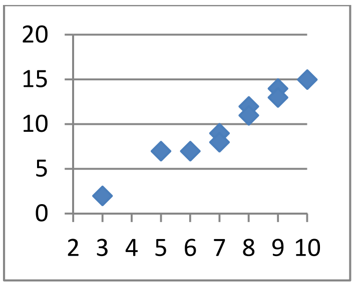
19) Completa la siguiente tabla de frecuencias conjunta y exprésala en frecuencias de pares (x_i, y_i), tanto con frecuencias relativas como absolutas.

Solución:

	0	1	2
1	12	0	0
2	0	14	0
3	0	0	14

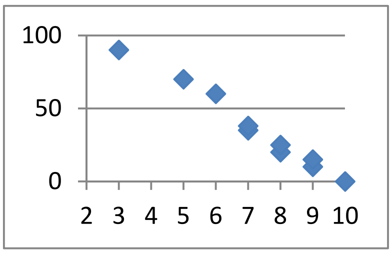
	0	1	2
1	0.3	0	0
2	0	0.35	0
3	0	0	0.35

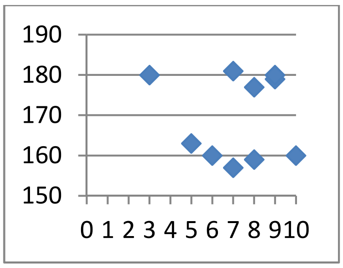
20) María ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0.05, 0.98 y –0.99, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudarla a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?



A

B





C

Solución: A: 0.98; B: –0.99; C: –0.05.

21) Haz una encuesta entre tus compañeros de clase. Con ella vas a realizar un trabajo de investigación y presentar un informe. Elige con cuidado las preguntas. Vas a preguntar a cada uno de tus compañeros seleccionados, la muestra, dos preguntas, como por ejemplo lo que mide su mano y su nota en lengua, pero a ti pueden interesarte otras cuestiones muy distintas.

Lo primero que vas a hacer es tabular las respuestas y confeccionar dos tablas de frecuencias absolutas. Luego completa esas mismas tablas con las frecuencias relativas y las frecuencias acumuladas. Haz representaciones gráficas de esas frecuencias: de barras, de líneas, de sectores. Calcula las medias, modas y medianas así como recorrido, desviación típica, cuartiles, intervalo intercuartílico… Representa los datos en una tabla de doble entrada y dibuja la nube de puntos. Calcula el coeficiente de correlación. Presenta un informe de este trabajo.

Solución abierta y manipulativa:

3. AZAR Y PROBABILIDAD

22) Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las comunidades autónomas españolas.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Solución: Son fenómenos aleatorios: b), d), e); No lo son: a), c).

23) Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

Solución: {A, E, I, O, U}.

24) Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

Solución: {Punta, No}

25) Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

Solución abierta: Por ejemplo: S1 = Las dos sean caras; S2 = Ninguna sea cara.

26) En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

Solución abierta: Por ejemplo: S1 = Sea par. S2 = Sea mayor que 7.

27) Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Solución abierta: Por ejemplo: S1 = Sea un oro; S2 = Sea un caballo; S3 Sea una figura.

28) Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

Solución: 10/40 = 1/4.

29) Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Por el estudio de las frecuencias relativas.

30) ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

Solución: 5/6. 4/6. 5/6.

31) Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Solución: 1/4; 3/4; 1/4 + 3/4 =1.

32) En tu cuaderno, haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción (noA = no sacarlo), y B = *sacar un as* en la segunda extracción (no B = no sacarlo). ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

Solución gráfica: 4/39; 35/39; 12/1460; 288/1460.

33) En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen 2 ases*" y la de "*no sale ningún as*".

Solución: 1 – (12/1460) = 1448/1460.

34) En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Solución: Con reemplazo: $(4/40)^3$; Sin reemplazo: (4/40)*(3/39)*(2/38)

35) Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

Solución: $(1/6)^2$ = 1/36.

36) Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

Solución: 1 – $(5/6)^2$ = 11/36.

37) Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que p(A) = 5/36 (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que p(B) = 8/36 ((1,3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: p(A y B); p(A o B); p(A y noB); p(noA y B); p(noA y noB). c) Calcula p(A/B); p(A/noB); p(noA/B).

Solución: a) A = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}. P(A) = 5/36;
B = {(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)}; P(B) = 8/36;
b) A y B = { (3, 5), (5, 3)}. P(A y B) = 2/36; P(A o B) = (5 + 8 – 2)/ 36 = 11/36;
P(A y noB) = 3/36; P(noA y B) = 6/36;
P(noA y noB) = 25/36.

38) Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo p(I) = 0.7.

Solución gráfica: 1 – P(ninguno intencionado) = 1 – $(0.3)^3$ = 0.973.

39) En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: p(A) = 0.95; p(B) = 0.97 y p(C) = 0.98. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

Solución: a) 0.00003; b) 0.99997.

40) Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.5 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Solución: P(fallo) = 0.005; a) 0.000025; b) 2(0.995*0.005) = 0.00995; c) P(ninguna) = 0.995*0.995 = 0.99;
d) P(sólo la tercera) = 0.995*0.995*0.005*0.995 = 0.0049.

41) Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Solución: A) 1/4 + 1/4 = 1/2; B) 2(1/8) = 1/4; C) 2(1/16) = 1/8; D) 1/2 +1/4 + 1/8 = 7/8.

42) Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: p(V y C); p(V y U); p(M y C); p(M y U); p(V); p(M); p(C) y p(U).

c) Calcula p(U/V); p(C/V); p(V/U); p(V/C). ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

Solución:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	***0.27***	***0.29***	***0.56***
Accidente con sólo daños materiales (M)	***0.31***	***0.13***	***0.44***
Totales	***0.58***	***0.42***	***1***

b) p(V y C) = 0.27; p(V y U) = 0.29; p(M y C) = 0.31; p(M y U) = 0.13; p(V) = 0.56; p(M) = 0.44; p(C) = 0.58; p(U) = 0.42

c) p(U/V) = 0.517857143 $\neq$ 0.42; p(C/V) = 0.482142857 $\neq$ 0.58; p(V/U) = 0.69047619 $\neq$ 0.56; p(V/C) = 0.465517241 $\neq$ 0.56
Son sucesos dependientes

43) Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Solución abierta:

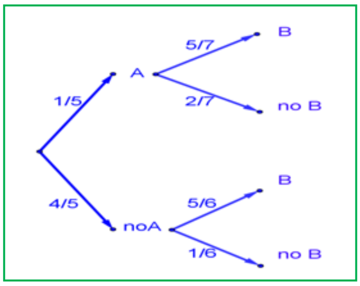
	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Leves (L)			
Graves (G)			
Mortales (M)			

44) Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A	
B	0.4	0.2	0.6
No B	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

Solución gráfica:

45) Dado el diagrama de árbol, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



Solución gráfica:

	A	No A	
B	***5/35***	***20/30***	***17/21***
No B	***2/35***	***4/30***	***4/21***
	7/35	***24/30***	***1***

46) Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

Solución: P(A/negra) = 1/4.

47) Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: p(M/C)

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: p(noM/C).

Solución: a) p(M/C) = 50/80 = 5/8; b) p(noM/C) = 30/80 = 3/8.

CURIOSIDADES Y REVISTA

Caballero de la Meré

Calcula las probabilidades de: A) "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado". B) Al tirar dos dados "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas"

Solución:

Al Caballero de la Meré le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tú ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de sacar al menos un 6 en 4 tiradas, calcula la probabilidad de no sacar un 6, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto, la probabilidad de sacar al menos un 6 en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar al menos un seis doble al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de no sacar ningún seis doble: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Galileo

Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9? Calcula las probabilidades de cada una de las sumas y la de sacar 10 y de sacar 9.

Solución:

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216; y la suma 6 + 3 + 1 puede salir en (6, 3, 1), (6, 1, 3), (3, 6, 1), /3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), luego su probabilidad es 6/216.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística

1. En una clase se mira el color de los ojos de cada alumno y alumna y se obtiene lo siguiente:

N := negro; A := azul y V := verde.

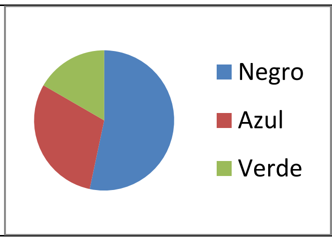
N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Haz una tabla de frecuencias absolutas, representa los valores en un diagrama de sectores y calcula la moda.

Solución:

Moda = Negro.

Negro	*16*
Azul	*9*
Verde	*5*



2. Las notas de un conjunto de alumnos de 4º son:

2 10 7 8 1 0 3 5 6 9 2 4 1 6 9 10 5 6 7 8 3 1 0 1 5 9 10 9 8 7.

Haz una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas. Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula la desviación típica y los cuartiles.

Solución:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Frecuencia Absoluta	*2*	*4*	*2*	*2*	*1*	*3*	*3*	*3*	*3*	*4*	*3*
Frecuencia Relativa	*0.07*	*0.13*	*0.07*	*0.07*	*0.03*	*0.1*	*0.1*	*0.1*	*0.1*	*0.13*	*0*
Frecuencia Absoluta Acumulada	*2*	*6*	*8*	*10*	*11*	*14*	*17*	*20*	*23*	*27*	*30*
Frecuencia Relativa Acumulada	*0.07*	*0.2*	*0.27*	*0.33*	*0.37*	*0.47*	*0.6*	*0.7*	*0.77*	*0.9*	*1*

Media = 5.4; Mediana = 6; Moda = 1 y 9; Desviación típica = 3.25; Cuartil 1 = 2; Cuartil 3 = 8.

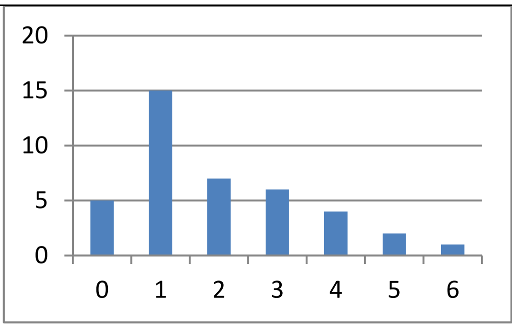
3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

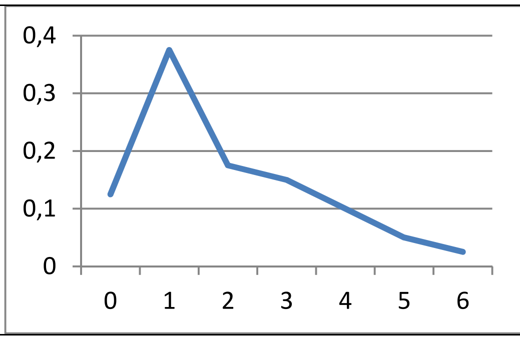
Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

Calcula la media, la mediana y la moda.

Solución:





Media: 1.975; Mediana = 1; Moda = 1 hermano.

4. Se han lanzado cuatro monedas 100 veces y anotado el número de veces que ha salido cara. Los resultados están reflejados en la tabla siguiente:

Número de caras	0	1	2	3	4
Número de veces	7	25	36	26	6

Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

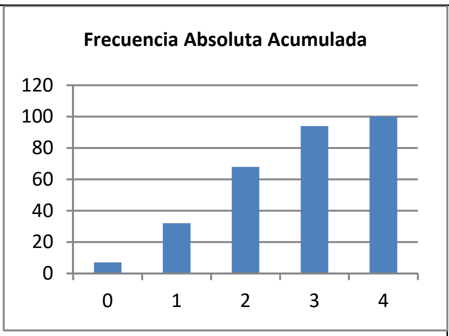
Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas acumuladas, un diagrama de líneas de frecuencias relativas y un diagrama de sectores de frecuencias absolutas.

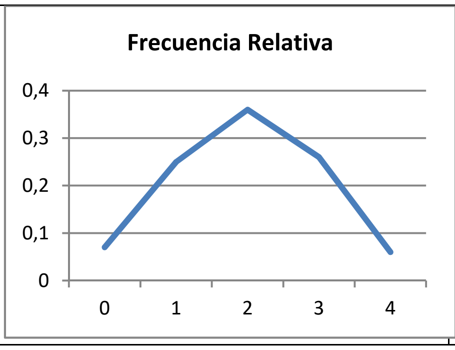
Calcula la media y la desviación típica.

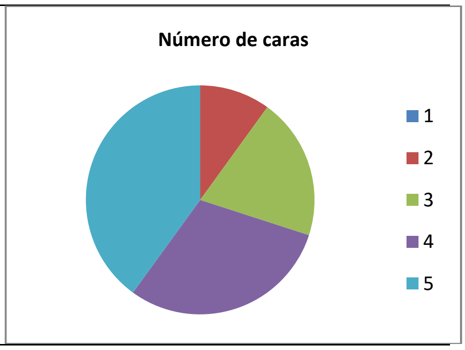
Calcula la mediana y los cuartiles.

Solución:

Número de caras	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Frecuencia Absoluta	*7*	*25*	*36*	*26*	*6*
Frecuencia Relativa	*0.07*	*0.25*	*0.36*	*0.26*	*0.06*
Frecuencia Absoluta Acumulada	*7*	*32*	*68*	*94*	*100*
Frecuencia Relativa Acumulada	*0.07*	*0.32*	*0.68*	*0.94*	*1*







Media = 1.99; Desviación típica = 1.015; Mediana = 2; Cuartil 1 = 1; Cuartil 3 = 3.

5. Para conocer la distribución de un cierto país de las personas según su edad se ha recogido una muestra de diez mil personas y los valores obtenidos vienen reflejados en la tabla siguiente:

Edades	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,100)
Número de personas	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

Utiliza las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Representa un histograma de frecuencias absolutas. Cuidado: Los intervalos no son todos iguales. Recuerda: El área de los rectángulos debe ser proporcional a las frecuencias.

Calcula la media y la desviación típica.

Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

Solución:

Marcas de clase	*2.5*	*7.5*	*12.5*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*82.5*
Frecuencias Absolutas	*900*	*1000*	*900*	*1500*	*1300*	*1200*	*1300*	*900*	*1000*
Frecuencias Relativas	*0.09*	*0.1*	*0.09*	*0.15*	*0.13*	*0.12*	*0.13*	*0.09*	*0.1*
Frecuencias Acumuladas Absolutas	*900*	*1900*	*2800*	*4300*	*5600*	*6800*	*8100*	*9000*	*10000*
Frecuencias Acumuladas Relativas	*0.09*	*0.19*	*0.28*	*0.43*	*0.56*	*0.68*	*0.81*	*0.9*	*1*

Solución gráfica

Media = 33.95; Desviación Típica ≈ 23.8; Mediana = 30.38; Cuartil 1º = 13.3; Cuartil 3º = 50.38.

6. Con los datos del problema anterior calcula el intervalo [media – desviación típica, media + desviación típica]. ¿Cuántas personas están en dicho intervalo? ¿Qué porcentaje? Calcula también el intervalo [media – 2*desviación típica, media + 2*desviación típica] y [media – 3*desviación típica, media + 3*desviación típica]. Si la distribución fuera normal habría en el primer intervalo un 68 % de la muestra, en el segundo un 95 % y en el tercero más de un 99.7 %. Compara tus resultados con éstos.

Solución: [m–s, m+s] = [9.7, 57.8] ≈ [10, 55) con 6200 personas, un 62 %. [m–2s, m+2s] = [0, 81] ≈ [0, 82.5) con 9500 personas, un 95 %. [m–3s, m+3s] = [0, 100] ≈ [0, 100] con 10000 personas, un 100 %. Se ajustan bastante a una normal.

7. Con los mismos datos calcula el intervalo intercuartil, e indica cuántas personas están en dicho intervalo y qué porcentaje.

Solución: Cuartil 1º = 13.3; Cuartil 3º = 50.38. Intervalo intercuartil = 37. En dicho intervalo hay unas 5100 personas, es decir, un 51 %.

8. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 200 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	40	30	20	40	50	20

Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Representa un histograma de frecuencias relativas. Cuidado: Los intervalos no son todos iguales.

Calcula la media y la desviación típica.

Calcula la mediana y los cuartiles de forma gráfica usando un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

Solución:

Marcas de clase	*50*	*150*	*300*	*500*	*700*	*1900*
Frecuencias absolutas	*40*	*30*	*20*	*40*	*50*	*20*
Frecuencias relativas	*0.2*	*0.15*	*0.1*	*0.2*	*0.25*	*0.1*
Frecuencias absolutas acumuladas	*40*	*70*	*90*	*130*	*180*	*200*
Frecuencias relativas acumuladas	*0.2*	*0.35*	*0.45*	*0.65*	*0.9*	*1*

Solución gráfica

Media = 527.5; Desviación típica: 518; Mediana = 450; Cuartil 1º = 133; Cuartil 3º = 680.

9. Dos fabricantes de baterías de coches ofrecen su producto a una fábrica al mismo precio. La fábrica quiere elegir la mejor. Para ello escoge una muestra de 60 baterías de cada marca y obtiene de cada una los meses que ha funcionado sin estropearse. Obtiene la siguiente tabla:

Vida de la batería en meses	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

¿Qué marca crees que elegirá?

Para tomar la decisión, calcula la media, la moda y la mediana para cada marca.

Si aún no te decides, calcula el recorrido, la desviación típica, el intervalo [*m* – *s*, *m* + *s*] y el intervalo intercuartil.

Solución: Tienen ambas marcas prácticamente la misma media, mediana y moda = 26, El mismo recorrido, La desviación típica de la marca A (22.25) es mayor que la de la marca B (21.66). Por eso seleccionaría la marca B.

10. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Hazles una pregunta con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calzan, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música… Representa los datos obtenidos en una tabla. Y haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:

Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.

Dibuja un diagrama de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

Calcula la media, la mediana y la moda

Calcula la varianza y la desviación típica

Calcula los cuartiles y el intervalo intercuartil.

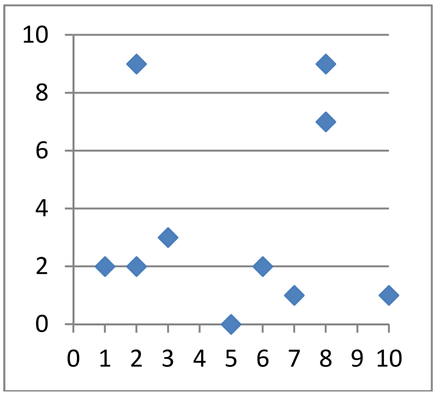
Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Solución abierta:

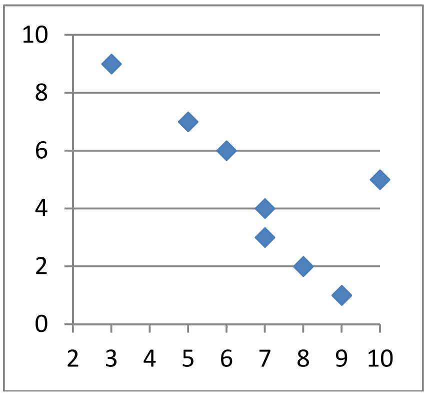
Coeficiente de correlación

11. Andrés ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: –0.8, 0.85 y 0.03, pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?

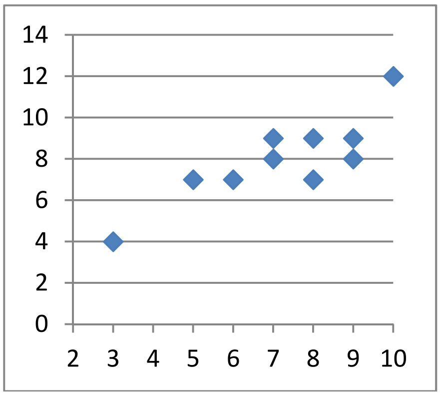
A



B



C



Solución: A = 0.03; ***B = –0.8;*** ***C = 0.85.***

Probabilidad

12. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

Solución: Estudian francés e inglés 20 estudiantes. No estudian ni francés ni inglés 20 estudiantes.

13. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

Solución: a) 1/2; b) 5/6; c) 1/2; d) 1/6; e) 5/6.

14. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

Solución: P(chico y azules) = 8/38; P(chico o azules) = 31/38.

15. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

Solución: P(Juan o Jorge) = 3/5.

16. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

Solución: A) 1/2. B) 1/2. C) 3/4. D) 1/4. E) 1/2.

17. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

Solución: A) $(1/2)^3$ = 1/8; B) 7/8; C) 3/8.

18. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

Solución: P(1) = 0; P(2) = 1/36; P(3) = 2/36; P(4) = 3/36; P(5) = 4/36; P(6) = 5/36; P(7) = 6/36; P(8) = 5/36; P(9) = 4/36; P(10) = 3/36; P(11) = 2/36; P(12) = 1/36.

19. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	*10 = 4 + 3 + 3*
9 = 4 + 3 + 2	*10 = 4 + 4 + 2*
9 = 4 + 4 + 1	*10 = 5 + 3 + 2*
9 = 5 + 2 + 2	*10 = 5 + 4 + 1*
9 = 5 + 3 + 1	*10 = 6 + 2 + 2*
9 = 6 + 2 + 2	*10 = 6 + 3 + 1*

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216; y la suma 6 + 3 + 1 puede salir en (6, 3, 1), (6, 1, 3), (3, 6, 1), /3, 1, 6), (1, 6, 3), (1, 3, 6), luego su probabilidad es 6/216.

P(9) = (1 + 6 + 3 + 3 + 6 + 3)/216 = 22/216. P(10) = (3 + 3 + 6 + 6+ 3 + 6)/216 = 27/216.

20. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

Solución: P(A) = 1/4; P(B) = 1/4; P(C) = 1/2 pues números primos son el 2, 3 y 5.

21. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes, cruz? Razona la respuesta.

Solución: Es igualmente probable. Son ambos sucesos de probabilidad $(1/2)^{50}$.

22. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

Solución: P(cruz) = 1/3; P(cara) = 2/3.

23. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

Solución: 3/7.

24. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

Solución: a) 7/13; b) 1/13; c) 63/143; d) 80/143.

25. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

Solución: P(2) = 1/9; P(1) = 2/9; A) P(impar) = 6/9; B) P(primo) = (1 + 2 + 2)/9 = 5/9; C) P = 4/9; D) P(primo o impar) = 7/9.

26. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

Solución: A) P = 1/22; B) P = 5/11; C) P = 6/11; D) P = 9/22.

27. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

Solución: A) 1/6; B) 1/6; C) 1/4.

28. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

Solución: A) 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8; B) $1/2^9 + 1/2^{10} + ... = 1 – 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/2^4 + ... 1/2^8 = 1 – 255/256 = 1/256$.

29. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

Solución: P = 18/20 · 17/19 · 16/18 · 15/17 = 12/19.

30. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Solución: 1/3.

31. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

Solución: P(negra) = 1/3 * 4/10 + 1/3 * 1/6 + 1/3 * 3/8 = 113/360.

32. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

Solución: 1/2.

33. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

Solución:

	Fabricado Correcto (FC)	***Fabricado Defectuoso (FD)***	
Dispositivo Correcto (DC)	***0.9702***	***0.002***	***0.9722***
Dispositivo Defectuoso (DD)	***0.0098***	***0.018***	***0.0278***
	0.98	***0.02***	***1***

A) P(FC/DD) = 0.0098/0.0278 = 49/139; ***B) P(FD/DC) = 0.002/0.9722 = 10/4861***

AUTOEVALUACIÓN

Con los datos siguientes: 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. La media:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

Solución: b)

2. La mediana:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

Solución: b)

3. La moda:

a) 5 b) 5.5 c) 6 d) 7

Solución: d)

4. La desviación típica:

a) 2 b) 2.3 c) 2.5 d) 2.6

Solución: d)

5. El intervalo intercuartil

a) 3 b) 2.75 c) 4 d) 2

Solución: b)

6. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

Solución: b)

7. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: a)

8. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: d)

9. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

Solución: a)

10. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) P(A) + P(noA) = 1

b) P(A y B) = P(A) · P(B)

c) P(A o B) = P(A) + P(B)

Solución: a)