Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

RESPUESTAS

4ºA de ESO

LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLGEBRA

1. Números reales 3

2. Proporcionalidad 35

3. Polinomios. Fracciones algebraicas 57

4. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones 80

GEOMETRÍA

5. Geometría del plano y del espacio. Longitudes, áreas y volúmenes. Movimientos y transformaciones 123

FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

6. Funciones 170

7. Derivadas *190

8. Combinatoria 223

9. Estadística. Azar y probabilidad *

Matemáticas aplicadas

4ºA E.S.O.

Capítulo 1: Números Reales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Sara, Víctor, Enrique, Mario, Álvaro, Ángel y Héctor

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

**1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibi-
ría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?**

Nº de perlas: x

1ª hija recibe: $1 + \frac{1}{7}(x - 1)$

2ª hija recibe: $2 + \frac{1}{7}\left[1 + \frac{1}{7}(x - 1) - 2\right]$

Como todas reciben lo mismo: $1 + \frac{1}{7}(x - 1) = 2 + \frac{1}{7}\left[1 + \frac{1}{7}(x - 1) - 2\right]$

$1 + \left(\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}\right) = 2 + \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{49}(x - 1) - \frac{2}{7}\right]$

$1 + \frac{1}{7}x - \frac{1}{7} = 2 + \left[\frac{1}{7} + \frac{1}{49}x - \frac{1}{49} - \frac{2}{7}\right]$

$\frac{1}{7}x + \frac{6}{7} = \frac{1}{49}x + \frac{90}{49}$ multiplicamos por 49

7x + 42 = x + 90 ; 6x = 48 x = 8 ; cada hija recibe 8 perlas, tenía 6 hijas.

2. Realiza las siguientes operaciones:

a. +8 + (–1) · (+6) = +8 + (-6) = +2

b. –6 + (–7) : (+7) = -6 + (-1) = -7

c. +28 – (–36) : (–9–9) = +28 - (-36) : (-18) = +28 + (+2) = +30

d. +11ab + (+7) · (+6ab – 8ab) = +11ab + (+7) · (-2ab) = +11ab + (-14ab) = -3ab

e. $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ = $-7a^2b - [+4a^2b + 6a^2b \div 6] = -7a^2b - [4a^2b + a^2b] =$

$= -7a^2b - 5a^2b = -12a^2b$

f. +9 + [+5 + (–8) · (–1)] = +9 + [+5 + (+8)] +9 + 13 = +22

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 = –30 + 21 + 20 = +11

b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50 = –40 –36 + 50 = –26

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) = –27 – 42 –10 = –79

d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7) = +6 · (–72) + 35 = –397

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{31}{6}$

b) $\frac{4}{7} + \frac{-7}{9} = -\frac{13}{63}$

c) $\frac{-9}{5} + \frac{-1}{8} = -\frac{77}{40}$

d) $\frac{7}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8}\right) = \frac{43}{8}$

e) $\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{9}{8} = \frac{93}{16}$

f) $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{8}\right) = \frac{469}{48}$

g) $\frac{15}{2} : \frac{5}{4} = 6$

h) $\frac{6}{5} : \frac{1}{5} = 6$

i) $15 : \frac{3}{5} = 25$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{3(x-1)}{6} + \frac{2(x+2)}{6} = \frac{3x-3}{6} + \frac{2x+4}{6} = \frac{3x-3+2x+4}{6} = \frac{5x+1}{6}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3} : \frac{x-3}{x+2} = \frac{(x-3)(x-3)}{x-3} : \frac{x-3}{x+2} = (x-3) : \frac{x-3}{x+2} = (x-3) \cdot \frac{x+2}{x-3} = x + 2$

d) $\frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right) = \frac{(a+2)(a-2)}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right) = (a+2) \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right) =$
$= (a+2) \cdot \frac{a-2+a+2}{(a+2)(a-2)} = (a+2) \cdot \frac{2a}{(a+2)(a-2)} = \frac{(a+2) \cdot 2a}{(a+2)(a-2)} = \frac{2a}{a-2}$

6. Realiza las operaciones:

a) 31.3 + 5.97 = 37.27

b) 3.52 · 6.7 = 23.584

c) 11.51 - 4.8 = 6.71

d) 19.1 - 7.35 = 11.75

e) 4.32 + 32.8 + 8.224 = 37.12 + 8.224 = 45.344

f) 46.77 - 15.6 + 2.3 = 31.17 + 2.3 = 33.47

g) 1.16 · 3.52 = 4.0832

h) 3.2 · 5.1 · 1.4 = 16.32 · 1.4 = 22.848

i) 2.3 · 4.11 · 3.5 = 9.453 · 3.5 = 33.0855

j) 4 · (3.01 + 2.04) = 4 · (5. 05) = 20.2

k) 5.3 · (12 + 3.14) = 5.3 · (15.14) = 80.242

l) 3.9 · (25.8 - 21.97) = 3.9 · (3.83) = 14.934

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7.92835 = $\frac{158567}{20000}$

b) 291.291835 = $\frac{291291835}{1000000}$

c) 0.23 = $\frac{23}{100}$

d) 2.353535… = $\frac{21.181818}{9}$

e) 87.23656565 = $\frac{8723656565}{100000000}$

f) 0.9999… = $\frac{9999}{10000}$

g) 26.573573573 = $\frac{26573573573}{1000000000}$

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.

a) 1/3 – decimal periódico

b) 7/5 – decimal puro

c) 11/30 – d. periódico

d) 3/25 – d. puro

e) 9/8 – d. puro

f) 7/11 – d. periódico

9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

a) 1/3 –--------- $0.\hat{3}$

b) 7/5 –--------- 1.4

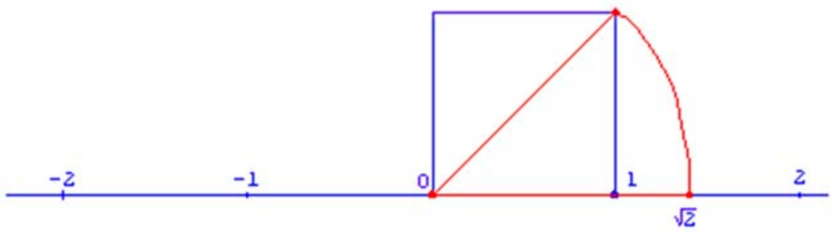
c) 11/30 –------- $0.3\hat{6}$

d) 3/25 –-------- 0.12

e) 9/8 –--------- 1.125

f) 7/11 –-------- $0.\widehat{63}$

10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1.4, pues $(1.4)^2$ es distinto de 2; no es1.41 pues $(1.41)^2$ es distinto de 2; ni es 1.414, pues $(1.414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $\sqrt{2}^2$ = 2.



11. Utiliza la calculadora para hallar la expresión decimal aproximada de 2.

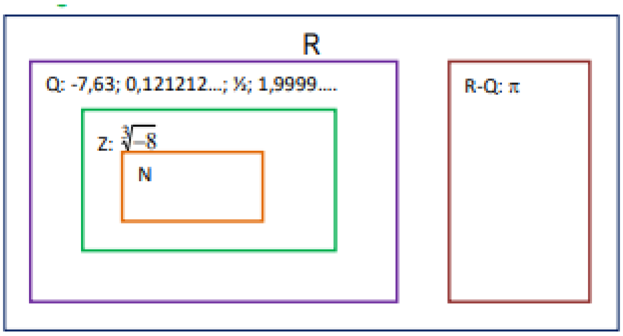
Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

El resultado decimal de $\sqrt{2} = 1.414213562$.

12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números.

Número	**N**	**Z**	**Q**	**I**	**$\Re$**
-7.63			x		x
$\sqrt[3]{-8}$		x	x		x
0.1212212…			x		x
π		x		x	x
1/2			x		x
1.999999…			x		x

13.Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



14.¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2.5999…? Escríbelos en forma de fracción

Si consideramos el número decimal periódico 4.99999... como x. Entonces tenemos:

x = 4,99999...

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Multiplicando ambos lados de la ecuación por 10, obtenemos:

10x = 49,99999...

Restando la ecuación original de esta nueva ecuación, tenemos:

10x - x = 49,99999... - 4,99999...

Simplificando, tenemos:

9x = 45

Dividiendo ambos lados de la ecuación por 9, obtenemos:

x = 5

Por lo tanto, 4.99999... es igual a 5.

La fracción equivalente de 4.999999... es 5/1, que se puede simplificar a 5.

¿Cuánto vale 2,59999…?

x = 2,5999...

Multiplicando ambos lados de la ecuación por 10, obtenemos:

10x = 25,9999...

Restando la ecuación original de esta nueva ecuación, tenemos:

10x - x = 25,9999... - 2,5999...

Simplificando, tenemos:

9x = 23,4

Dividiendo ambos lados de la ecuación por 9, obtenemos:

x = 2,6

Por lo tanto, 2.5999... es igual a 2.6.

La fracción equivalente de 2.5999... es 26/10, que se puede simplificar a 13/5.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de 1/53?

El intervalo máximo del número 1/53 puede tener 52 cifras. Esto se debe a que 1/53 es un número decimal periódico, con un período de longitud 52. Después de estas 52 cifras decimales, el período se repite indefinidamente.

16. Calcula:

a) $(\mathbf{1})^{\mathbf{7345}}$

Cualquier número elevado a la potencia 1 es igual a sí mismo, el resultado será 1.

1^{7345}=1

b) (-$\mathbf{1})^{\mathbf{7345}}$

La potencia de un número negativo elevado a un exponente impar siempre será negativa.

$(-1)^{7345}$= -1

c) $(-4)^2$

-4^2 = (-4) · (-4) = 16.

d) $(-4)^3$

$(-4)^3$= (-4) · (-4) · (-4) = -256

e) $(\frac{1}{2})^3$

$(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

f) $\left(\sqrt{2}\right)^6$

Primero elevamos 2 a la potencia 6 y luego calculamos la raíz cuadrada del resultado.

2^6= 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 64

Luego, calculamos la raíz cuadrada de 64:

$\sqrt{64}$=8

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$

Si multiplicamos una potencia con la misma base y distinto exponente la base sigue igual y se suman o restan los exponentes.

$(-\frac{4}{3})^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8} = (-4/3)^{3+2-8} = (-4/3)^{-3} = -\frac{27}{64}$

b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

$$(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2} = (1/9)^{-5+4-2} = (1/9)^{-3} = 729$$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$

$(5/4)^8 \cdot (2/3)^8 \cdot (3/5)^8$ (una base elevada a un número para equivale a un positivo).

Multiplica los términos con exponentes iguales, multiplicando sus bases.

$$\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)^8$$

Como hay un 5 y un 3 multiplicando y un 5 y un 3 dividiendo podemos simplificarlos.

Por lo que nos quedamos únicamente con $(2/4)^8$=$(\frac{1}{2})^8$=$\frac{1}{256}$

d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4}(-5/4)^{-4}$

Base negativa elevada a potencia par equivale a positivo.

$$(3/5 \cdot 8\,/3 \cdot 5/4)^{-4}$$

Simplificamos las expresiones.

Como hay un 3 y un 5 multiplicando y un 3 y un 5 dividiendo podemos simplificarlos.

$\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{8}{4}\right)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

18. Calcula:

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}$

Convertimos el exponente en positivo cambiando el denominador por el numerador.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{4}$

Elevamos la fracción al exponente, el exponente al ser par convierte la base en positiva.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4} = \frac{625}{81}$

b) $(\frac{-4}{7})^{-2}$

Convertimos el exponente en positivo cambiando el denominador por el numerador.

$(\frac{-4}{7})^{-2} =(\frac{-7}{4})^{2}$

Elevamos la fracción al exponente, el exponente al ser par convierte la base en positiva.

$(\frac{-4}{7})^{-2} = \frac{49}{16}$

c) $\frac{(7^4\cdot(-2)^4\cdot3^4)^3}{(9^2.4^2\cdot7^2)^3}$

Una base negativa elevada a potencia par equivale a positivo.

$\frac{(7^4\cdot(-2)^4\cdot3^4)^3}{(9^2.4^2\cdot7^2)^3}=\frac{(7^4\cdot(2)^4\cdot3^4)^3}{(9^2.4^2\cdot7^2)^3} = \frac{((7\cdot(-2)\cdot3)^4)^3}{((9\cdot4\cdot7)^2)^3}$

Calculamos el producto. $\frac{((42)^4)^3}{((252)^2)^3}$

Multiplicamos los exponentes. $\frac{(42)^{12}}{(252)^6}$

Factorizamos el denominador. $\frac{(42)^{12}}{(6)^6\cdot42^6}$

Simplificamos. $\frac{(42)^{12}}{(6)^6\cdot42^6}=\frac{(42)^6}{(6)^6}$

Factorizamos el numerador. $\frac{(7)^6\cdot(6)^6}{(6)^6}$

Simplificamos. $\frac{(7)^6\cdot(6)^6}{(6)^6}=7^6 = 117649.$

d) $\frac{3^2.\frac{4^5}{9^5}}{(-2)\cdot4^5}$

Factorizamos el 9. $\frac{3^2\cdot\frac{4^5}{(3^2)^5}}{(-2)\cdot4^5} = \frac{3^2\cdot\frac{4^5}{3^{10}}}{(-2)\cdot4^5}$

Simplificamos el 3. $\dfrac{\frac{3^2\cdot 4^5}{3^{10}}}{(-2)\cdot 4^5} = \dfrac{\frac{4^5}{3^8}}{(-2)\cdot 4^5}$

Simplificamos el 4. $\dfrac{\frac{4^5}{3^8}}{(-2)\cdot 4^5} = \dfrac{3^8}{(-2)}$

Pasa el 3 multiplicando al 2 y aplicamos el signo negativo del 2 en toda la fracción.

$\dfrac{\frac{3^8}{1}}{(-2)} = -\dfrac{1}{2\cdot 3^8} = -\dfrac{1}{13122}$

e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^6} = \dfrac{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \dfrac{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{-27}{8}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \dfrac{-\frac{4}{9}\cdot\frac{27}{8}}{\frac{9}{64}} = \dfrac{-\frac{4}{9}\cdot\frac{27}{8}}{\frac{9}{64}} = \dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{9}{64}}$

Ahora dividimos las fracciones. $-\frac{3}{2} \div \frac{9}{64}$

Dividir es igual que multiplicar por el recíproco. $= -\frac{3}{2}\cdot\frac{64}{9}$

Simplificamos todo lo posible (64 entre 2 y 9 entre 3). $= -\frac{32}{3}$

19. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

$\sqrt[4]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{4}} = 3^4$

$\sqrt[10]{9^{15}} = 9^{\frac{15}{10}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

20. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos.

$\sqrt{484} = \sqrt{(2\cdot 11)^2} = 22$

$\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{2^6\cdot 5^3} = 2^2\cdot 5 = 20$

21. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\left(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right)$.

Agrupamos los términos semejantes. $\sqrt{3}\cdot(11\sqrt{3}) = 3\cdot 11 = 33$.

22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$.

$25^{0,5} = (5^2)^{0,5} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

$64^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{64^3} = \sqrt[5]{(2^6)^3} = \sqrt[5]{2^{18}}$

$\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 7^{6\cdot\frac{1}{2}} = 7^3 = 343$.

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{\frac{4}{5}}$ $b)\ 27^{\frac{1}{3}}$ $c)\ 7^{\frac{2}{3}}$

a) $(-5)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(-5)^4}$

b) $27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}}. = 3$

$c)\ 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$

24. **Escribe en notación científica:**

a) 400 000 000 = 4 · 10^8

b) 45 000 000 = 4,5 · 10^7

c) 34 500 000 000 = 3,45 · 10^{10}

d) 0.0000001 = 1 · 10^{-7}

e) 0.00000046 = 4,6 · 10^{-7}

25. Utiliza tu calculadora para obtener $2^{16}, 2^{32} y\ 2^{64}$ y observa cómo da el resultado.

2^{16} = 65536

2^{32} = 4294967296

2^{64} = 1.844674407 · 10^{19}

26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

16 años 5 meses y 4 días =

= 16·365·24·60·60 + 5· 30·24·60·60 + 4·24·60·60 = 505461600 = 5,05461600 · 10^8 segundos

27. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) 0.000481 + 2.4 · 10^{-5} = 5.05 · 10^{-4}

b) 300 000 000 – 7.2 ·10^6+ 7.2 · 10^5 = 293520000

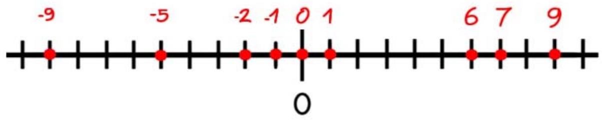
c) (2.9 · 10^5) · (5.7 · 10^{-3}) = 1653

d) (3.8 · 10^{-8}) · (3.5 · 10^6) · (8.1 · 10^{-4}) = 1.0773 · 10^{-4}

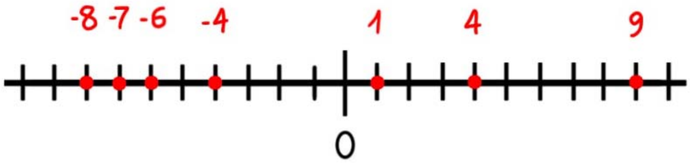
e) (4.8 · 10^{-8}) : (3.2 · 10^{-3}) = 1.5 · 10^{-5}

f) (6.28 · 10^{-5}) · (2.9 · 10^2) : (3.98 · 10^{-7}) = 45758.79397

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: -9, 7, 6, -5, 9, -2, -1, 1 y 0.



29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, -4, -8, +9, +4, -6, -7.



30.Pitágoras vivió entre el 569 a. C. y el 475 a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?

Para calcular el tiempo que ha pasado entre la muerte de Pitágoras y el nacimiento de Gauss tenemos que sumar los valores absolutos de las fechas (en el caso de que sea antes de cristo los años serian negativos)

$|-475| + |1777| = 2252$

Después de calcular la diferencia en años, dividiremos el resultado entre cien para obtener siglos

2252÷100=22,52 Siglos

Entonces sabremos el tiempo que paso entre la muerte de Pitágoras y el nacimiento de Gauss.

31.Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absoluto s de los siguientes números enteros: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Primero vamos a representar los números en la gráfica tomando como referencia el número 0, que está en medio, y luego vamos a ir colocando los números de menor a mayor.

		-8	-7	-6						0				5		7	8		10

Para calcular sus opuestas o les cambiamos el símbolo

10→-10

-4→4

-7→7

5→-5

-8→8

7→-7

-6→6

0→0 (El cero no tiene opuesto porque no tiene signo)

8→-8

Para calcular el valor absoluto, ponemos a los números en el símbolo del valor absoluto

|10|→10

|-4|→4

|-7|→7

|5|→5

|-8|→8

|7|→7

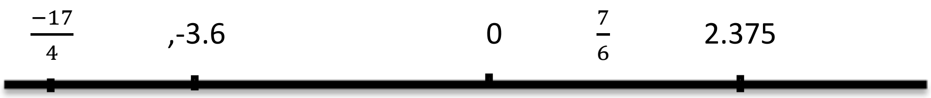
|-6|→6

|0|→0

|8|→8

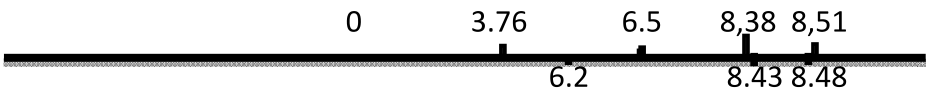
32. Representa en la recta numérica los siguientes números: $\frac{7}{6}$;$\frac{-17}{4}$; 2.375,-3.6

Para colocar los números, los ponemos en la recta numérica respeto al 0



33. Representa en la recta numérica 6.5; 6.2; 3.76; 8.43; 8.48; 8.51 y 8.38

Para colocar los números, los ponemos en la recta numérica respeto al 0



34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1.47; –4.32;

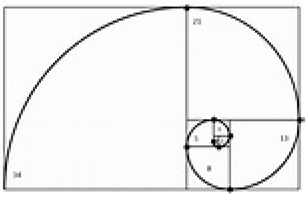
–4.8; +1.5; +1.409; 1.4; –4.308.

Para ordenar los números, los colocamos de mayor a menor en relación a su valor absoluto si son positivos y de menor a mayor si son negativos.

1.5; 1.47; 1.409; 1.4; –4.308; –4.32; –4.8

35. Busca rectángulo áureo y espiral áurea en Internet.

El rectángulo áureo es un rectángulo que posee una relación proporcionalidad entre sus lados igual a la relación aurea.



La espiral aurea es una espiral logarítmica asociada a las propiedades geométricas del rectángulo dorado.

36. Ya de paso busca la relación entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci.

El número de oro s un número irracional representado por la letra griega ϕ

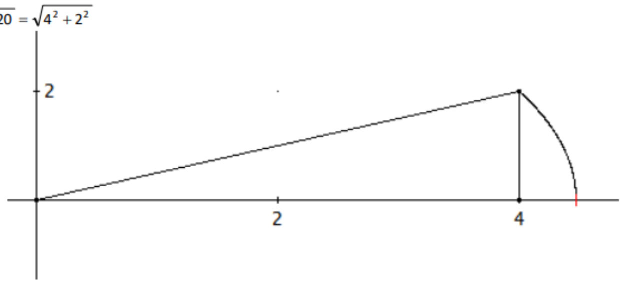
La sucesión de Fibonacci es una sucesión infinita de números naturales que se utiliza 3para hacer una aproximación de la espiral áurea para dar solución a problemas de crecimiento exponencial.

37. Busca en YouTube "algo pasa con phi" y me cuentas.

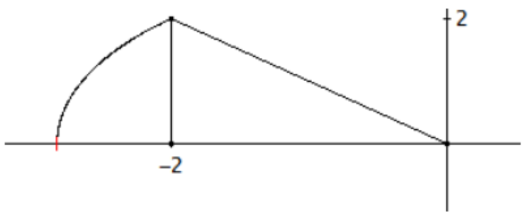
En el vídeo, se presenta un rectángulo regular por lo que todos sus ángulos tienen la misma longitud. Si unimos todas sus puntas de otra manera, obtenemos un pentagrama (estrella de cinco puntas), este aparece en muchos símbolos y sitios. Las líneas que unen la estrella miden Φ (phi).

38. Representa en la recta numérica de forma exacta:

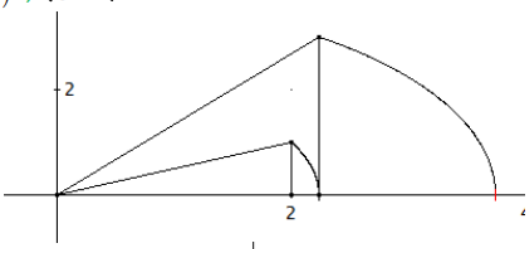
$\sqrt{20} = \sqrt{4^2+2^2}$



$\sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$



$\sqrt{14} = \sqrt{3^2+(\sqrt{5})^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$



39. Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

Para calcular números entre dos números, hacemos su promedio, por medio de la siguiente formula, y luego seguimos repitiendo entre el número que nos salga y uno de los anteriores hasta tener todos los números que necesitemos:

$$\frac{a+b}{2} \rightarrow \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4}+1}{2} = \frac{7+\sqrt{5}}{8}$$

$$\frac{\frac{7+\sqrt{5}}{8}+1}{2} = \frac{15+\sqrt{5}}{16}$$

40. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}\ y\ 1,5$

Para calcular números entre dos números, calcularemos números, por medio de la formula, entre $\sqrt{2}\ y$ 1,5 que sean racionales, y descartaremos aquellos que no sean números racionales.

$$\frac{\sqrt{2}+7.5}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

Por medio de esta fórmula vamos sacando diferentes números hasta tener los 5, por ejemplo→

Solución: 1,42;1,43;1,44;1,45,1,46

41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π

Para calcular números entre dos números, calculamos números entre ambos, y elegiremos solo los números irracionales, es decir, que no puedan ser expresados como fracciones.

$$\frac{3{,}14+\pi}{2} = 3{,}140796327$$

$$\frac{3{,}140796327+\pi}{2} = 3{,}14119449$$

$$\frac{3{,}14119449+\pi}{2} = 3{,}141393572$$

$$\frac{3{,}141393572+\pi}{2} = 3{,}141542883$$

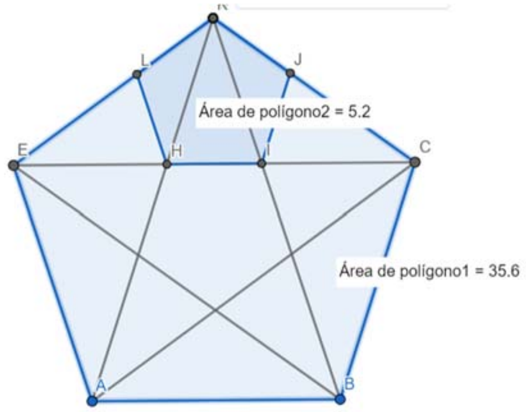
$$\frac{3{,}141542883+\pi}{2} = 3{,}141567768$$

42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.

Para un pentágono regular (un polígono con cinco lados de igual longitud y cinco ángulos iguales), puedes calcular la relación entre la longitud del lado y la longitud de la diagonal utilizando la proporción áurea.

Longitud de la diagonal=Longitud del lado·ϕ

43. Calcula con GeoGebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.



Al dividir el área del polígono central entre la del polígono grande sale una proporción de $\frac{13}{89}$

44. Comprueba que los triángulos ABD y ABF de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con GeoGebra su razón de semejanza

Los triángulos ABD y ABF son semejantes, por lo tanto las longitudes de sus lados son proporcionales: $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BF}$ y sea d la longitud de la diagonal y l la longitud del lado:

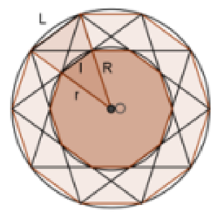
BD = d, AB = l y BF = d – l

y sustituyendo en la proporción anterior: $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$ lo que indica que la diagonal y el lado del pentágono están en proporción áurea y que la longitud de los dos segmentos de una diagonal cortada por otra l y d – l también están en proporción áurea.

Los triángulos son semejantes, por que comparten los mismos ángulos, y su razón de semejanza es de $\frac{159}{61}$

45. Calcula con Geogebra el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

En el triángulo isósceles que se forma con el centro de las circunferencias, O, y dos vértices consecutivos del polígono inscrito en la circunferencia de radio R, el ángulo del vértice O mide 36º, ya que es un ángulo central de un decágono, el cociente entre r y R es Φ y por tanto la razón de semejanza entre las circunferencias de radios R y r es: 1/Φ = Φ - 1. La medida del radio r coincide con L, la longitud del lado del decágono inscrito en la circunferencia de radio R, y por lo tanto el cociente entre el radio de la circunferencia R y el lado L del decágono regular es Φ.
La razón de semejanza entre los dos decágonos no estrellados es la misma que entre r y R, es decir, Φ.



46-Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 15 %. Intervalo (15,100]

b) Edad inferior o igual a 21 años. Intervalo (−∞,21]

c) Números cuyo cubo sea superior a 27. (3 ,∞)

d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras. [10 ,99]

e) Temperatura inferior a 24 ºC. (− ∞ ,24)

f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3. Intervalo (−∞,−1)U[5,∞)

g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real). [0 ,∞)

47-Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

Para pasar de un entorno a un intervalo tienes que restar el primer número menos el segundo y luego sumar el primero más el segundo.

a) E(2, 7)-> (2-7, 2+7) = (-5, 9)

b) E(-3, 8/3)-> (-3 – 8/3 , -3 + 8/3) = (-17/3, -1/3)

c) E(-1; 0.001)-> (-1 – 0.001 , -1 + 0.001) = (-1'001, -0'999)

48-Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

Para pasar de un intervalo a un entorno hay que averiguar el centro del entorno de la siguiente manera: sumas los dos dígitos del intervalo y los divides entre dos y tendrás el centro; y el siguiente paso es hallar el radio que se consigue restando los dos dígitos del intervalo, tomas el valor absoluto del resultado y lo divides entre dos, y ya tendrás el entorno.

a) (1, 7)-> E($\frac{1+7}{2}$, $\left|\frac{1-7}{2}\right|$) $=$ E(4, 3)

b) (-5, -1)-> E($\frac{-5-1}{2}$, $\left|\frac{-5-(-1)}{2}\right|$) $=$ E(-3,2)

c) (-4, 2)-> E($\frac{-4+2}{2}$, $\left|\frac{-4-2}{2}\right|$) $=$ E(-1, 3)

49- ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? *Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

No se podría poner como intervalo porque gracias a la pista que nos da el enunciado una persona no puede pagar de manera tan exacta dichos dígitos decimales que serían los céntimos.

50- Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log^5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log^2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log^2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log^2 1 = 0$	$\log^5 5 = 1$	$\log^5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log^3 81 = 4$	$\log^2 16 = 4$	$3^4 = 81$

$2^5 = 32 \to \mathbf{log_2\, 32 = 5}$ $2^4 = 16 \to \mathbf{log_2\, 16 = 4}$ $5^2 = 25 \to \mathbf{log_5\, 25 = 2}$

$5^1 = 5 \to \mathbf{log_5\, 5 = 1}$ $2^0 = 1 \to \mathbf{log_2\, 1 = 0}$ $3^4 = 81 \to \mathbf{log_3\, 81 = 4}$

$2^1 = 2 \to \mathbf{log_2\, 2 = 1}$ $5^0 = 1 \to \mathbf{log_5\, 1 = 0}$

51- Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5 = 5$

b) $\log_5 25 = 2$

c) $\log_2 2^{41} = 41$

d) $\log_5 5^{30} = 30$

52- Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27 = 3$

b) $\log_{10} 100 = 2$

c) $\log^1/_2 \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_{10} 0{,}0001 = -4$

53- Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x \to x = 6$

b) $\log^1/_2\ x = 4 \to x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

c) $\log_x 25 = 2 \to x^2 = 25; x = \sqrt{25} = 5$

54- Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 64 + \log_2 1 - \log_2 4 - \log_3 9 - \frac{1}{2}\log_2 2 =$

$\log_2 2^6 + \log_2 1 - \log_2 2^2 - \log_3 3^2 - \frac{1}{2}\log_2 2 = = 6 + 0 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 = \log_2 1 - \log_2 32 + \log_3 1 - \log_3 27 - \log_2 1 = 0 - 5 + 0 - 3 - 0 = -8$

55- Utiliza la calculadora para obtener:

a) log 0.000142=-3’847711656

b) log 142=2’152288344

c) log 9 + log 64=2’760422483

56- Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}} = \ln\left(\frac{4x^2}{e^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4x^2}{e^3}\right) = \frac{1}{5}[\ln(4x^2) - \ln(e^3)] = \frac{1}{5}[2\ln(4x)] - 3$

b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d}\right) = \log(a^3 \cdot b^2) - \log(c^4 \cdot d) = \log(a^3) + \log(b^2) - [\log(c^4) + \log(d)] =$

$3\log a + 2\log b - 4\log c - \log d$

57- Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 log81 = log 3^4 = 4·log3 = 4· 0,4771212 = 1,9084848

b) 27 log27 = log 3^3 = 3·log3 = 3· 0,4771212 = 1,4313636

c) 59 049 log59049 = log 3^{10} = 10·log3 = 10· 0,4771212 = 4,771212

58- Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h = \log\sqrt{m} - \log(t^2) - \log p + \log\sqrt{h^5} = \log\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{h^5}}{t^2\cdot p}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$ e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$

f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15\cdot\frac{3}{5}$

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}=-\frac{8}{14}-\frac{35}{14}=\frac{43}{14}$

b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}=\frac{3}{5}-\frac{7}{9}=\frac{8}{45}$

c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{8}=-\frac{19}{24}$

d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)=\frac{5}{3}+\frac{15}{2}=\frac{55}{6}$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}=\frac{23}{6}\cdot\frac{5}{2}=\frac{115}{12}$

f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{2}\cdot\frac{37}{6}=\frac{111}{4}$

g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}=\frac{225}{15}=15$

h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}=\frac{63}{42}=\frac{3}{2}$

i) $15\cdot\frac{3}{5}=\frac{25}{1}=25$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}=\frac{5a+1}{6}\cdot\frac{6}{a}=\frac{5a+1}{a}$

b) $\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$

c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x^2+6x+9)(x+3)}{(x-3)(x^2-9)}=\frac{x^2+6x+9}{(x-3)^2}$

d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)=\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\frac{2a}{(a+2)(a-2)}=\frac{(a^2-4)\cdot 2a}{a\cdot a\cdot(a+2)(a-2)}=\frac{(a^2-4)\cdot 2}{a\cdot(a+2)(a-2)}=$

$=\frac{(a+2)(a-2)\cdot 2}{a\cdot(a+2)(a-2)}=\frac{(a-2)\cdot 2}{a\cdot(a-2)}=\frac{2}{a}$

3. Realiza las operaciones:

a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8

a)101.056 b)204.02 c)152.20224

4.Halla el valor exacto de $\frac{0.\overline{4}}{0.4}$ sin calculadora.

Un número dividido entre si mismo es igual a 1. Entonces, un número periódico dividido entre sí mismo no periódico es igual a $1.\overline{1}$.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$\frac{9}{40}$; $\frac{30}{21}$; $\frac{37}{250}$; $\frac{21}{15}$

a) $\frac{9}{40}$: exacta b) $\frac{30}{21}$: periódica c)$\frac{37}{250}$: exacta d)$\frac{21}{15}$: exacta

6. Halla 3 fracciones a, b, c tal que $\frac{3}{4}$< a < b < c < $\frac{19}{25}$

I. Buscamos un múltiplo común para 4 y 25, como 1000.

II. Convertimos $\frac{3}{4}$ y $\frac{19}{25}$ a fracciones con denominador 1000:

- $\frac{3}{4}$ en términos de 1000 es $\frac{750}{1000}$
- $\frac{19}{25}$ en términos de 1000 es $\frac{760}{1000}$

III. Elegimos fracciones intermedias entre $\frac{750}{1000}$ y $\frac{760}{1000}$:

- a = 750/1000 + 1/1000 = 751/1000
- b = 750/1000+ 2/1000 = 752/1000
- c = 750/1000 + 3/1000 = 753/1000

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 * 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

La fracción $\frac{1}{2^7 * 5^4}$ tiene 7 decimales. Porque $\frac{1}{2^7 * 5^4}$ es igual a $\frac{1}{80000}$ que da 0.0000125 que tiene 7 decimales.

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

Cuando divides 999,999 entre 7 da 142,857. Cuando divides 1 entre 7 da 0.142857142857...

No es casualidad que estos resultados sean similares, porque 1/7 es un número decimal periódico, lo que significa que repite el mismo grupo de dígitos (142857) infinitamente.

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

Cuando divides 999 entre 37 da 27. Cuando divides 1 entre 37 da 0.027027027027...

Cuando divides 1 entre 37, los dígitos se repiten porque 1 dividido por 37 tiene un patrón que se repite.

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes

2.73535...; $\pi - 2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; -2.5 ;

Naturales	10^{100}
Enteros	$\sqrt[5]{-32}$
Racionales	$\frac{102}{34}$; -2.5 ; 2.73535...
Irracionales	$\pi - 2$;
Complejos	

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $Q \cap (\Re - Q) = \{0\}$. Verdadero. El conjunto intersección ($Q \cap (\mathbb{Q} - Q)$) representa la intersección entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números racionales complementarios. Dado que el complemento de $\mathbb{Q}$ contiene los números irracionales y el único número que está en ambos conjuntos es el número 0 (que es un número racional), la intersección es igual al conjunto {0}.

b) $Z \subset Q$. Verdadero. Los números enteros (Z) son un subconjunto de los números racionales (Q) porque todos los enteros son números racionales. Entonces, Z está contenido en Q.

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional. Falso. La raíz cuadrada de un número natural puede ser un número irracional.

d) $\sqrt{7} \notin Q$. $\sqrt{7}$ es un número irracional,

e) 1/47 tiene expresión decimal periódica. Falso. 1/47 no tiene una expresión decimal periódica.

12.Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional. $\sqrt{2} - \sqrt{2}$

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional. $(\sqrt{3}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1$

13.¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

La suma de un número racional con un número irracional en su expresión decimal será un número irracional. Por ejemplo, si sumas 0.5 (racional) y π (irracional), el resultado sería un número irracional con una expansión decimal infinita y no periódica.

14.La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

Sí, la suma de dos números con expresiones decimales periódicas puede ser un entero.

Por ejemplo: 0.333... + 0.666... = 0.999... = 1

15.Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

- Área:

A = Largo x Ancho

$\sqrt{8}$ es igual a $\sqrt{(4 \cdot 2)}$ que es igual a $2\sqrt{2}$

A = $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$

A = $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

A = $2\sqrt{(2 \cdot 2)}$

A = $2\sqrt{4}$

A = 2 ·2

A = 4 metros cuadrados

- Perímetro:

P = 2(Largo) + 2(Ancho)

P = $2\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$

P = $2\sqrt{2} + 2(2\sqrt{2})$

P = $(2 + 4)\sqrt{2}$

P = $6\sqrt{2}$ metros

16.Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

1. Hallar la longitud de un lado del cuadrado a partir de la diagonal:

La diagonal de un cuadrado divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos. Utilizamos el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de un lado del cuadrado.

$l^2 + l^2 = d^2$ $2l^2 = d^2$ $l^2 = \frac{d^2}{2}$ $l = \sqrt{\frac{d^2}{2}}$ $l = \sqrt{\frac{2^2}{2}}$ $l = \sqrt{\frac{4}{2}}$ $l = \sqrt{2}$

2. Área de un cuadrado:

A = Lado · Lado A = $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ A = 2 m^2

3. Perímetro de un cuadrado:

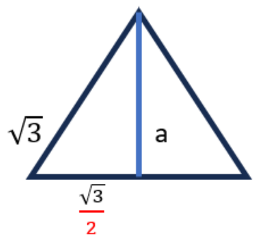
P = Lado + Lado + Lado + Lado P = $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ P = $4\sqrt{2}$ m

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

Perímetro:

P = 6 · l P = 6 · $\sqrt{3}$ P = $6\sqrt{3}$ m P = 10.3923048454 m

Área = $\frac{P \cdot apot}{2}$ debemos calcular la apotema, los triángulos que se forman en un hexágono son equiláteros, la apotema es un cateto del triángulo rectángulo



$$a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 \quad ; \quad a^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad ; \quad a = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Área = $\frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ m^2$ Área = 7.79422863406 m^2

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m

Área:

Área = π · $\left(\sqrt{10}\right)^2$

Área = 10π m^2

Área = 31.4159265359 m^2

Perímetro:

Perímetro = 2 · π · radio

Perímetro = $2\pi\sqrt{10}$ m

Perímetro = 19.8691765316 m

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m

Área:

Área de una cara = (lado)^2

Área de una cara = $(\sqrt[3]{7})^2$

Área de una cara = 3.6593

Área total = 6 · (Área de una cara)

Área total = 6 · 3.6593

Área total = 21.9558 m^2

Volumen:

Volumen = (lado)^3

Volumen = $(\sqrt[3]{7})^3$

Volumen = 7 m^3

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

Área = L · A

3 · Área = x · L · x · A $\qquad x^2 = 3$, luego $x = \sqrt{3}$

Largo nuevo = L · $\sqrt{3}$

Ancho nuevo = A · $\sqrt{3}$

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

El área de un círculo se calcula mediante la fórmula $A = \pi r^2$, donde "A" es el área y "r" es el radio del círculo.

1 m^2 = πr^2

r^2 = 1 m^2 / π

$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ m^2 ; $r \approx 0.564$ m

el radio de un círculo cuyo área es igual a 1 metro cuadrado es aproximadamente 0.564 metros.

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente).

P = 2 ·π · r
Perímetro Hexágono = 6 · L
Razón = (2 · π · r) / (6 · r)
Razón = (π/3)
Entonces, la razón entre los perímetros de la circunferencia y el hexágono regular inscrito es π/3, lo cual es aproximadamente igual a 3.14159/3, o alrededor de 1.0472.

23.Calcula

a) 2^7= 128

b) $(-1)^{9345}$= -1

c) $(-5)^2$= 25

d) $(-5)^3$= -125

e) $(\frac{1}{3})^3$= 1/27

f) $\sqrt{2^8}$= 16

24. Expresa como única potencia:

a) $(--\frac{5}{3})^4 \cdot (-\frac{5}{3})^3 \cdot (-\frac{5}{3})^{-8} = (-\frac{5}{3})^{-1}$ **b)** $(\frac{1}{9})^5 : (\frac{1}{9})^4 \cdot (\frac{1}{9})^{-2} = (\frac{1}{9})^{-3}$

Se suman o se restan exponentes en multiplicaciones o divisiones de misma base.

c) $(\frac{2}{3})^8 \cdot (-\frac{3}{2})^8 : (-\frac{3}{5})^8 = (\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} : \frac{-3}{5})^8 = (-1 : \frac{-3}{5})^8 = (\frac{5}{3})^8$

d) $(-\frac{3}{5})^{-4} \cdot (-\frac{8}{3})^{-4} : (-\frac{5}{4})^{-4} = (\frac{-3}{5} \cdot \frac{-8}{3} : \frac{-5}{4})^{-4} = \left(\frac{8}{5} : \frac{-5}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{-32}{25}\right)^{-4} = \left(\frac{25}{32}\right)^4$

25. Calcula:

a) $(-\frac{2}{3})^{-4} = \frac{81}{16}$ **b)** $(-\frac{1}{5})^{-2} = 25$ **c)** $\frac{(11^4 \times (-2)^4 \times 5^4)^3}{(25^2 \times 4^2 \times 11^2)^3} = \frac{(-110)^{12}}{1100^6}$

d) $\frac{3^2 \times \frac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \times 4^5} = \frac{9}{(-5)^2 \times 4^5}$

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6} = a^3 \cdot b\sqrt[4]{a \cdot b}$

b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$; $15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (3 \cdot 5)^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$

$\sqrt[3]{(3^5 \cdot 3^4) \cdot (5^5 \cdot 5^6)} = \sqrt[3]{3^5 \cdot 3^4} \cdot \sqrt[3]{5^5 \cdot 5^6} \rightarrow$

$\sqrt[3]{3^5 \times 3^4} = \sqrt[3]{3^{5+4}} = \sqrt[3]{3^9}$; $\sqrt[3]{5^5 \times 5^6} = \sqrt[3]{5^{5+6}} = \sqrt[3]{5^{11}} \rightarrow \sqrt[3]{3^9} \cdot \sqrt[3]{5^{11}} \rightarrow$

$\sqrt[3]{3^9} = 3^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{11}} = 5^3 \cdot \sqrt[3]{5^2}$

$\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6} = 3^3 \cdot 5^3 \cdot \sqrt[3]{5^2}$

c) $\sqrt[2]{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$; $25 = 5^2 \rightarrow 16^3 = (2^4)^3 = 2^{12} \rightarrow \sqrt[2]{5^2 \cdot 2^{12} \cdot 7^3} = 5 \cdot 2^6 \cdot 7 \cdot \sqrt{7}$

27. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{50}} = \sqrt[6]{50}$ **b)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[12]{9}$

28. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[2]{5^5} = 5^{3/4} . 5^{5/2} = 5^{3/4+5/2} = 5^{\frac{13}{4}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[2]{3^3}} = 3^{1/3} . 3^{2/4} : 3^{3/2}$; $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-8}{12} \rightarrow 3^{\frac{-8}{12}} = 3^{\frac{-2}{3}}$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1 285 600 000 km³ y el volumen de agua dulce es de 35 000 000 km³. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

Primero, expresaremos los volúmenes en notación científica:

1. Volumen total de agua en los océanos: 1,285,600,000 km³ = $1.2856 \cdot 10^9$ km³
2. Volumen de agua dulce: 35,000,000 km³ = $3.5 \cdot 10^7$ km³

Ahora, para calcular la proporción de agua dulce con respecto al volumen total de agua en los océanos, simplemente dividimos el volumen de agua dulce entre el volumen total de agua y multiplicamos por 100 para expresar el resultado en porcentaje:

Proporción = (Volumen de agua dulce / Volumen total de agua) · 100

Proporción = ($3.5 \cdot 10^7$ km³ / $1.2856 \cdot 10^9$ km³) · 100

Proporción ≈ ($2.723 \cdot 10^{-2}$) · 100 ≈ 2.723%

Por lo tanto, la proporción de agua dulce con respecto al volumen total de agua en los océanos es aproximadamente 2.723%.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de 9.109 · 10-31 kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (Recuerda: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

Para determinar la masa del núcleo de un átomo de hidrógeno, primero debemos calcular la masa del protón, ya que el hidrógeno tiene un protón en su núcleo. Luego, podemos utilizar la información de que el núcleo del átomo de hidrógeno constituye el 99% de su masa para encontrar la masa del núcleo. La masa del protón es de aproximadamente 1.673 x 10^-27 kilogramos. Ahora, utilizaremos esta información para calcular la masa del núcleo de un átomo de hidrógeno.

Masa del núcleo = (99% de la masa total del átomo de hidrógeno)

Masa del núcleo = 0.99 ·(masa del protón + masa del electrón)

Masa del núcleo ≈ 0.99 · ($1.673 \cdot 10^{-27}$ kg + $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg)

Masa del núcleo ≈ 0.99 · $1.674 \cdot 10^{-27}$ kg

Masa del núcleo ≈ $1.656 \cdot 10^{-27}$ kg

Entonces, la masa del núcleo de un átomo de hidrógeno es aproximadamente $1.656 \cdot 10^{-27}$ kilogramos.

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Para expresar el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan en notación científica, primero debemos convertir 5 litros a milímetros cúbicos, ya que la densidad de glóbulos rojos se da en glóbulos por mm³.

1 litro = 1,000,000 mm³

Entonces, 5 litros equivalen a:

5 litros · 1,000,000 mm³/litro = 5,000,000 mm³

Ahora, sabiendo que tiene 5 millones (5,000,000) de glóbulos rojos por mm³, podemos calcular el número total de glóbulos rojos multiplicando el volumen de sangre en mm³ por la densidad de glóbulos rojos:

Número total de glóbulos rojos = 5,000,000 mm³ · 5,000,000 glóbulos rojos/mm³ = 25,000,000,000,000 glóbulos rojos

Para expresar esto en notación científica, contamos los lugares que movemos el punto decimal para que quede un solo dígito a la izquierda del punto decimal:

25,000,000,000,000 = $2.5 \cdot 10^{13}$

Entonces, Juan tiene aproximadamente $2.5 \cdot 10^{13}$ glóbulos rojos en su sangre.

33. Pitágoras vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?

Para calcular la diferencia de años entre las fechas de Pitágoras y Gauss, simplemente restamos el año en que vivió Pitágoras al año en que vivió Gauss:

Diferencia = Año de Gauss - Año de Pitágoras

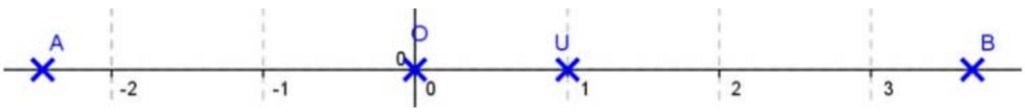
Diferencia = 1855 - 569

Diferencia = 1286 años

Por lo tanto, hay una diferencia de 1286 años entre las fechas en que vivió Pitágoras y Gauss.

34. Representa de forma exacta en la recta numérica: -2.45; 3.666…

La recta numérica se vería aproximadamente de la siguiente manera:



35. Sitúa en la recta real los números 0.5; 0.48; 0.51 y 0.505.

Para ubicar los números 0.5, 0.48, 0.51 y 0.505 en la recta real, primero coloquemos los números en orden:

0.48, 0.5, 0.505, 0.51

La recta real se vería aproximadamente de la siguiente manera:

36. Ordena los siguientes números de mayor a menor: 2.4; –3.62; –3.6; 2.5; 2.409; –3.9999…

2.5, 2.4, 2.409, -3.6, -3.62, -3.9999

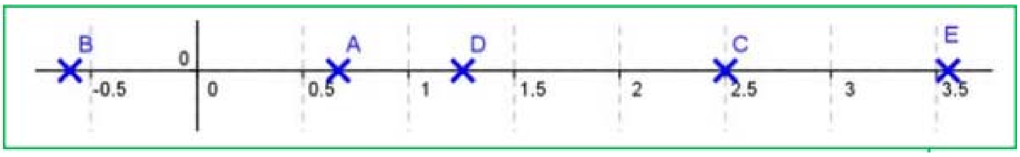
IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números:

A. ½ B. -3/5 C. 5/2 D. 1.256 E. 3.5....

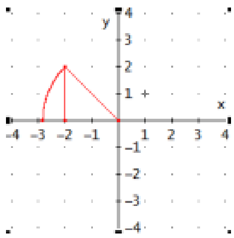


38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?

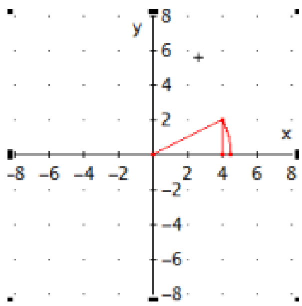
$-\sqrt{3^2+2^2}=$-$\sqrt{13}$

39. Representa de forma exacta en la recta numérica: $-\sqrt{8}$, $2\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$

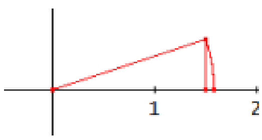
$$-\sqrt{8}=-\sqrt{(-2)^2+2^2}$$



$$2\sqrt{5}=\sqrt{20}=\sqrt{4^2+2^2}$$



$$\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$



40. Halla 5 números racionales que estén entre 3.14 y π.

3.142;3.1416;3.1416;3.14159;3.14159;3.141593

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a. $(-5, 5]$ Intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha -5 y 5

b. $\{x \in \Re \mid -2$ Intervalo abierto a la izquierda y cerrado a la derecha -2 y 7

c. . $\{x \in \Re \mid x > 7\}$ Semirrecta abierta origen 7

d. $(-3, +\infty)$ abierta origen -3

42.Halla

a. (2, 4] U (3, 5] = (2,5]

El intervalo (2,4](2,4] incluye todos los números mayores que 2 y menores o iguales a 4. El intervalo (3,5](3,5] incluye todos los números mayores que 3 y menores o iguales a 5.

La unión de estos dos intervalos sería el conjunto de números que pertenecen a al menos uno de los intervalos. Al combinar los dos intervalos, obtenemos el intervalo (2,5](2,5], que incluye todos los números mayores que 2 y menores o iguales a 5.

b. $(2, 4] \cap (3, 5] = (3,4]$

El intervalo (2,4](2,4] incluye todos los números mayores que 2 y menores o iguales a 4, mientras que (3,5](3,5] incluye todos los números mayores que 3 y menores o iguales a 5.

La intersección de estos dos intervalos sería el conjunto de valores que pertenecen a ambos intervalos. En este caso, los números que son mayores que 3 y menores o iguales a 4 cumplen con esta condición.

c. $(-\infty,1] \cap(-1,+\infty) =(-1,1]$

Dado que (−1,+∞)(−1,+∞) excluye -1 y (−∞,1](−∞,1] incluye 1, el intervalo de intersección será (−1,1](−1,1]. En este intervalo, -1 no está incluido, pero 1 sí lo está

43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

No, debido a que un entorno necesita un centro

44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

A. (0, 8)

c=20+8=4

longitud=8−0=8

r=2longitud=28=4

(0,8)=*N*(4,4)

$E_4(4)$

B. (−6, −2)

(−6,−2)=(*a*−*r*,*a*+*r*)

$a=(-6)/2+(-2)/2=-8/2=-4$

$(-6,-2)=(-4-2,-4+2)=(-6,-2)$

E_2 (-4)

C. (2, $+\infty$)

No se puede

45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:
a. $E_{2/3}$(4) : (4-2/3,4+2/3) = (10/3, 14/3)
b. $E_{1/2}$(−7) : (-7-1/2,-7+1/2) = (-15/2,-13/2)
c. E(1, 2): (1 – 2, 1 + 2) = (-1, 3)
d. E(0, 1) : (0 – 1, 0 + 1) = (-1, 1)

46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?
$-\sqrt{7}\ \ y\ \ \sqrt{7}$

47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?
$(-\sqrt{7},\ \sqrt{7})$

48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?
(-∞,-$\sqrt{7}$) U (+$\sqrt{7}$,+ ∞)

49. Un número irracional tan importante como Pi es el número "e" e=2.718281828... que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace muy, pero que muy grande. Coge la calculadora y dale a n valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, … Apunta los resultados en una tabla.

10	2.5937424601
100	2.7048138294
1000	2.7169239322
10000	2.7181459268
100000	2.7182682372

50. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

1. Masa de un electrón: $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Kilogramos

2.Masa de la luna: $7{,}3 \cdot 10^{22}$ Kilogramos

3.Masa de la tierra : $5{,}983 \cdot 10^{24}$ Kilogramos

4.Masa del sol: $1{,}99 \cdot 10^{22}$ Kilogramos

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué afirmación es falsa. El número 0.3333333… es un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

Solución: c)y d). El número es real (a) y racional (b).

2. Operando y simplificando la fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}$ se obtiene:

a) a + 3 b) 1/(a + 3) c) a – 2 d) 1/(a – 2)

Solución: a)

$$\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}=\frac{(a-2)^2}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}=\frac{(a-2)^2(a+3)}{(a-2)(a-2)}=a+3$$

3. La expresión decimal 0.63636363…. Se escribe en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

1) 0.63636363... = $0.\overline{63}$

2)63-0=63

3) (Tantos 9 como decimales después de la coma): $\frac{63}{99}=\frac{7}{11}$

Solución: b)

4. Al simplificar $\sqrt{2}(7-5\sqrt{2}+4\sqrt{2})$ obtienes:

a)$6\sqrt{2}$ b)$\sqrt{2}(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

Solución: d)

$$\sqrt{2}(7-5\sqrt{2}+4\sqrt{2})=\sqrt{2}(7-\sqrt{2})=7\sqrt{2}-2=8$$

5.Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones $\frac{4}{7};\frac{9}{150};\frac{7}{50}$ tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

Solución: c)

6. El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a)$(-\infty,2)$ b)$(-\infty,2]$ c)$(-2,+\infty)$ d)$(-\infty,-2]$

Solución: b)

7.El entorno de centro -2 y radio 0.7 es el intervalo:

a) (-3.7, -2.7) b) (-2.7, -1.3) c) (-3.3, -2.7) d) (-2.7, -1.3]

Solución: b)

1) -2-0.7=-2.7
2) -2+0.7=-1.3

8.El intervalo (-3, -2) es el entorno:

a) E(-2.5; 1/2) b) E(-3.5; -0,5) c) (3.5, 1/2) d) (-2.5; -0,5)

Solución: d)

1) Hallamos el punto medio o centro del entorno: $\frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$
2) Hallamos el radio: $\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$
3) Por tanto (-3,-2)= E(-2.5;-0.5)

9. Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a)$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b)$\frac{25}{4}$ c)$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d)$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

Solución: b)

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{1}{3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

10. Al efectuar la operación 0 000078 + 2.4 · 10 $^{-5}$ se obtiene:

a) 3.6 · 10 $^{-10}$ b) 1.8912 · 10 $^{-10}$ c) 10.2 · 10 $^{-5}$ d) 18.72 · 10 $^{-5}$

Solución: c)

1) Pasamos 0.000078 a notación científica: $0.000078 = 7.8 \cdot 10^{-5}$
2) Una vez hecho esto operamos:
3) $0.000078 + 2.4 \cdot 10^{-5} = 7.8 \cdot 10^{-5} + 2.4 \cdot 10^{-5} = 10.2 \cdot 10^{-5}$

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 2: Proporcionalidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

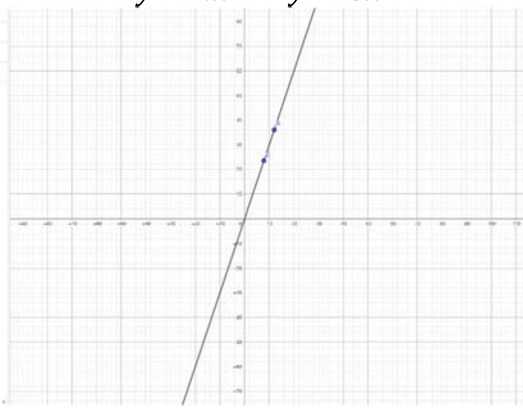
1. Copia en tu cuerno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82	**3,09**	1	**3,33…**	50
Euros	36	**23,46**	9,27	**3**	10	**150**

k = 36/12 = 3

36/12 = x/7,82 = 9,27/x = 3/1 = 10/x = x/50 = 3

$$y = kx \rightarrow y = 3x$$



2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) 24/100 = 30/x ; x = 100·30:24 = 125

b) x/80 = 46/12 ; x = 80·46:12 = 306,6

c) 3,6/12,8 = x/60 ; x = 60·3,6:12,8 = 16,8

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

1 hora y 35 minutos son 60 + 35 = 95 minutos; 95 : 60 = 1,58 h

$$\begin{matrix} 1{,}58\ h \rightarrow & 350\ km \\ x\ h \rightarrow & 420\ km \end{matrix}$$ proporcionalidad directa (PD)

$1{,}58 \cdot 420 = 350x \rightarrow x = \frac{1{,}58 \cdot 420}{350} = 1{,}9\ h$; 0,9 · 60 = 54 ;

Tarda 1 hora y 54 minutos.

4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?

El peso del azúcar más la mermelada es x + 2x = 3x, donde x son kg.

Para conseguir 7kg de mermelada, será: 3x = 7, x = 7/3 = 2,33

Luego necesitamos 2,33kg de azúcar y 2·2,33 = 4,66kg de fruta

5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43m?

$12\ m\ de\ altura \rightarrow \quad 25\ m\ de\ sombra$

$x\ m\ de\ altura \rightarrow \quad 43\ m\ de\ sombra$

$$\frac{12}{x} = \frac{25}{43} \rightarrow 25x = 516 \rightarrow x = \frac{516}{25} = 20{,}64\ m\ de\ altura$$

También: y = kx, 25 = k·12, k = 25/12, y = 25/12 x, 43 = 25/12 · x, x = 43·12/25 ,

x = 20,64 m de altura

6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

$12\ litros \rightarrow \quad 8\ minutos$

$135\ litros \rightarrow \quad x\ minutos$

$$\frac{12}{135} = \frac{8}{x} \rightarrow 12x = 1080 \rightarrow x = \frac{1080}{12} = 90\ min$$

7.Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?

$12\ litros \rightarrow \quad 100\ km$

$x\ litros \rightarrow \quad 1374\ km$

$$\frac{12}{x} = \frac{100}{1374} \rightarrow 100x = 16488 \rightarrow x = \frac{16488}{100} = 164{,}88\ litros$$

8. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5 823 km?

$67\ litros \rightarrow \quad 1250\ km$

$x\ litros \rightarrow \quad 5823\ kilometros$

$$\frac{67}{x} = \frac{1250}{5823} \rightarrow 1250x = 390141 \rightarrow x = \frac{390141}{1250} = 312{,}11\ litros$$

9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

$127\ gramos \rightarrow \quad 300\ páginas$

$x\ gramos \rightarrow \quad 420\ páginas$

$$\frac{127}{x} = \frac{300}{420} \rightarrow 300x = 53340 \rightarrow x = \frac{53340}{300} = 117{,}8\ gramos$$

10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

$2\ pantalones \rightarrow \quad 28\ euros$

$7\ pantalones \rightarrow \quad x\ euros$

$$\frac{2}{7} = \frac{28}{x} \rightarrow 2x = 196 \rightarrow x = \frac{196}{2} = 98\ euros$$

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) 27/100 = 27% b) "1 de cada 2" = 50% c) 52/90 = 57%

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16% y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

$4\ alumnos\ rubios \rightarrow \quad 16\%$

$x\ alumnos \rightarrow \quad 100\%$

$$\frac{4}{x} = \frac{16}{100} \rightarrow 16x = 400 \rightarrow x = \frac{400}{16} = 25\, alumnos$$

13. Un depósito de 2 000 litros de capacidad contiene en este momento 1 036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

% = (1036l/2000l) · 100 = 51,8%

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70%. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido

$30\, alumnos \rightarrow \quad 100\%$

$x\, alumnos \rightarrow \quad 70\%$

$$\frac{30}{x} = \frac{100}{70} \rightarrow 100x = 210 \rightarrow x = \frac{210}{100} = 21\, alumnos$$

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.

$130\, obreros \rightarrow \quad 100\%$

$90\, obreros \rightarrow \quad x\,\%$

$$\frac{130}{90} = \frac{100}{x} \rightarrow 130x = 9000 \rightarrow x = \frac{9000}{130} = 69{,}2\%$$

100 – 69,2 = 30,08 , ha disminuido un 30,08%

16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 más un 21% de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %, sigue estos pasos:

21% de 520€ = 0,21 · 520€ = 109,20€

520€ + 109,20€ = 629,20€

18% de 629,20€ = 0,18 · 629,20€ = 113,06€

629,20€ - 113,06€ = 516,14€

17. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un 10,56% de descuento.

$1340€ \rightarrow \quad 100\%$

$1200€ \rightarrow \quad x\,\%$

$$\frac{1340}{1200} = \frac{100}{x} \rightarrow 1340x = 120000 \rightarrow x = \frac{120000}{1340} = 89{,}55\% \rightarrow 100\% - 89{,}55\% = 10{,}55\%$$

b) Me han descontado el 9% de una factura de 307,69 € y he pagado 280€

$x\,€ \rightarrow \quad 100\%$

$280€ \rightarrow \quad 91\%$

$$\frac{x}{280} = \frac{100}{91} \rightarrow 91x = 28000 \rightarrow x = \frac{28000}{91} = 307{,}69€$$

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20% y me he ahorrado 100. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

$x\,€ \rightarrow \quad 100\%$

$100€ \rightarrow \quad 20\,\%$

$$\frac{x}{100} = \frac{100}{20} \rightarrow 20x = 10000 \rightarrow x = \frac{10000}{20} = 500€$$

18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10% y después bajó un 30%. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?

El incremento del 10%   500 · 0,1 = 50   500 + 50 = 550

Disminución del 30%   550 · 0,3 = 165   550 – 165 = 385

Ha bajado 500 – 385 = 115, hemos tenido una rebaja de 115/500 = 0,23 , 23% de descuento.

También: 1,1 · 0,7 = 0,77 , 1 – 0,77 = 0,23

19. Una persona compró acciones de bolsa en enero por 10.000. De enero a febrero estas acciones aumentaron un 8%, pero en febrero han disminuido un 16% ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?

Aumento del 8% de enero a febrero:

$$Vfebrero_1 = Venero \cdot (1 + 0.08) = 10\,000 \cdot 1.08 = 10\,800€$$

Disminución del 16% en febrero:

$$Vfebrero_{final} = Vfebrero_1 \cdot (1 - 0.16) = 10\,800 \cdot 0.84 = 9\,072€$$

El valor de las acciones a finales de febrero es 9 072 €.

$$Varación\, porcentual = \left(\frac{Valor\, final - Valor\, inicial}{Valor\, inicial}\right) \cdot 100 = \left(\frac{9\,072 - 10\,000}{10\,000}\right) \cdot 100 =$$

$$= \left(-\frac{928}{10000}\right) \cdot 100 = -9{,}28\%$$

Por lo tanto, las acciones han disminuido en un 9,28% desde enero hasta finales de febrero.

También: 1,08 · 0,84 = 0,9072 , 1 – 0,9072 = 0,0928 , ha disminuido un 9,28%.

20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10%, luego un 25% y después bajó un 30%. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.

Subida del 10%:

$$300 + (300 \cdot 0.10) = 300 + 30 = 330€$$

Subida del 25%:

$$330 + (330 \cdot 0.25) = 330 + 82.50 = 412.50€$$

Bajada del 30%:

$$412.5 - (412{,}5 \cdot 0{,}3) = 412.5 - 123{,}75 = 288{,}75€$$

$$Variación\, porcentual = \left(\frac{Pfinal - Pinicial}{Pinicial}\right) \cdot 100 = \left(\frac{288.75 - 300}{300}\right) \cdot 100 =$$

$$= \left(-\frac{11{,}25}{300}\right) \cdot 100 \approx -3{,}75\%$$

La variación porcentual total es aproximadamente -3.75%

El precio actual es de 288,75€

21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25% , pero luego cargan en la factura un 20% de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros?¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

0,25 · 30 = 7,5 euros   30 – 7,5 = 22,5
0,20 · 22,5 = 4,5 euros   22,5 + 4,5 = 27   tendremos que pagar 27 euros
(27 – 30) / 30 = -0,1   hay un descuento del 10%
Si hemos pagado 36 euros, x · (1 – 0,1) = 36 , luego x = 36/0,9 = 40, el artículo costaba 40 euros.

22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

$$28{,}6km = 28{,}6 \cdot 100\,000cm = 2\,860\,000cm$$

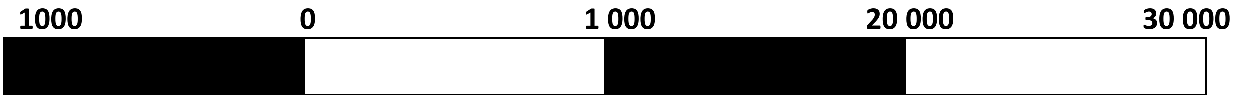
$$Escala = \frac{Espacio\ en\ el\ mapa}{Espacio\ real} = \frac{7}{2\,860\,000} = \frac{1}{408\,571{,}43}$$

La escala del mapa es aproximadamente 1:408,571

23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1: 200 presenta una altura de 8 cm?

Altura real = 8cm · 200 = 1600cm
Altura real = 1600cm/100 = 16m

24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.



25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1:50, calcula sus medidas reales.

Medida Real(ancho) = 7cm · 50 = 350cm
Medida Real(largo) = 23cm · 50 = 1 150cm
Ancho real = 350cm/100 = 3,5m
Largo real = 1150cm/100 = 11,5m

PROPORCIONALIDAD INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12	**20**	**56**	60
Horas de trabajo	**560**	**112**	80	**46,6**	28	10	**9,3**

Proporcionalidad inversa

$$A \cdot B = 7 \cdot 80 = 560$$

1·x = 560, x = 560;   5·x = 560, x = 112;   12·x = 560, x = 46,6;   28·x = 560, x = 20 ; ….

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 \rightarrow 5 \cdot 1{,}25 = A_2 \cdot 3 \rightarrow A_2 = \frac{5 \cdot 1{,}25}{3} = 2{,}08\,paneles$$

Como son paneles conseguiremos 2 paneles de 3 metros de largos y nos queda un poco madera.

28. En un huerto ecológico se utilizan 5 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

5000 · 0,12 (12%) = 600kg
600/0,15 (15%) = 4000kg

29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?

200/1,7 = 117,6 cajas, es decir, 118 cajas y una iría incompleta.
200/2,3 = 86,9 cajas, 87 cajas y una sin llenar.

30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?

8 · 100 = 800L
800/20 = 40L por recipiente

31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07	**2**	8	**1,5625**
Magnitud B	0,25	**142,85**	5	**1,25**	25

40· 0,25 = 10 $y = \frac{10}{x}$; $y = \frac{10}{0{,}07} = 142{,}85$; $y = \frac{10}{2} = 5$; …

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?

días	euros	personas
12	40 800	6
4	x	15

Dividimos el gasto entre el total de días y personas:

40 800/(6 · 12) = 40 800/72 = 566,67 euros por persona y día

Multiplicamos el precio por persona y día por el total de personas y días:

566,67 · (15 · 4) = 34000 euros pagarán en total.

33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4 500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

bombillas	euros	días	horas
16	4 500	30	5
38	x	45	8

4500/(16 · 30 · 5) = 1,875 euros por bombilla, día y hora.

1,875 · (38 · 45 · 8) = 25650 euros en total.

34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?

vacas	días	kg
6	17	240
29	53	x

240/(6 · 17) = 2,35 kg por vaca y día
2,35·(29 · 53) = 3 616,47kg en total.

35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?

hombres	m	días	horas
12	40	4	8
20	180	15	x

Metros de tapia realizados por hombre por hora y día 40/8·4·12 = 5/48
Si x es el número de horas, $\frac{5}{48} \cdot 20 \cdot 15 \cdot x = 180$, $x = \frac{180 \cdot 48}{5 \cdot 20 \cdot 15} = 5{,}76\ horas$

36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?

animales	días	kg
24	50	1
100	x	0,8

Cantidad consumida por cada animal durante los 50 días: 50 kg.
Cantidad de pienso: 24 × 50 = 1200 kg.
Número de días, x : 0,8x · 100 = 1200 ⇒ x = 1200/100 · 0,8 = 15

37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?

grifos	litros	horas
5	8	10
7	10	x

Litros por minuto: 5 · 8 = 40l/min

En 10 horas: 40 · 60 · 10 = 24000l

24000/(7 · 10) = 24000/70 = 342,86 min ; 342,86/60 = 5,7143 ; 5 horas y 43 minutos.

38. Si 4 máquinas fabrican 2 400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7 000 piezas durante 10 horas Diarias?

máquinas	piezas	horas
4	2 400	8
x	7 000	10

Piezas que fabrica cada máquina: 2400/4 = 600 piezas por máquina
Piezas por cada hora: 600/8 = 75 piezas por hora y máquina
Máquinas necesarias, x; trabajando 10 horas: 75·10·x = 7000 ; x = 7000/750 = 9,33..
Necesitaremos 10 máquinas.

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

10 + 6 + 12 + 7 + 5 = 40
(10/40) · 18000 = 450 euros
(6/40) · 18000 = 2700 euros
(12/40) · 18000 = 5400 euros
(7/40) · 18000 = 3150 euros
(5/40) · 18000 = 2250 euros

40. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?

20000 + 34000 + 51000 = 105000 euros
(20000/105000) · 31500 = 6000 euros
(34000/105000) · 31500 = 10200 euros
(51000/105000) · 31500 = 15300 euros

41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?

60 millones + 46 millones + 10 millones = 116 millones
(60 millones/116 millones) · 48 000 000 = 24 827 586,21
(46 millones/116 millones) · 480 000 00 = 19 172 413,79
(10 millones/116 millones) · 48 000 000 = 4 000 000

42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.

2 + 5 + 8 = 15 ; cantidad de dinero x;
(5/15) · x = 675 ; x = 675 · 15/5 = 2025 es el total.
Al primero: (2/15) · 2025 = 270
Al tercero: (8/15) · 2025 = 1080

43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

12 + 14 + 16 = 42 años
(12/42) · 100 = 28,57 euros
(14/42) · 100 = 33,33 euros
(16/42) · 100 = 38,09 euros

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1+2+5+10}{10}=\frac{18}{10}$ también: 0,1 + 0,2 + 0,5 + 1,0 = 1,8 y repartimos proporcionalmente:
(0,1/1,8) · 22500 = 138,89 puntos
(0,2/1,8) · 2500 = 277,78 puntos
(0,5/1,8) · 2500 = 694,44 puntos
(1.0/1,8) · 2500 = 1 388.89 puntos

45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

m.c.m. (12, 15, 18) = 180 ; (1/12) = (**15**/180) ; (1/15) = (**12**/180) ; (1/18) = (**10**/180)
(15/180) + (12/180) + (10/180) = (37/180)
(15/37) · 4500 = 1824,32€ para el de 12 años
(12/37) · 4500 = 1459,46€ para el de 15 años
(10/37) · 4500 = 1216,22€ para el de 18 años.

46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3 000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

Al segundo le corresponden 1500 € (ya que es el doble que el menor) y al mayor 1000 € (ya que es el triple que el menor)

47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

m.c.m. (18, 20, 25) = 900 ; (1/18) = (50/900) ; (1/20) = (45/900) ; (1/25) = (36/900)
(50/900) + (45/900) + (36/900) = (131/900)
(50/131) · 6000 = 2290,08 euros el de 18 años
(45/131) · 6000 = 2061,07 euros el de 20 años
(36/131) · 6000 = 1648,85 euros el de 25 años

48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

m.c.m. (15, 10) = 30 ; (1/15) = (2/30) ; (1/10) = (3/30)
(2/30) + (3/30) = (5/30)
(2/5) · 50 = 20 euros la de 15 años
(3/5) · 50 = 30 euros la de 10 años

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

Precio total: 3,5 · 4,8 + 5,20 · 6 = 48€
Peso total: 3,5 + 5,2 = 8,7
Precio del kg: 48/8,7 = 5,52€

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?

(2,40·x + 1,80·4)/(x + 4) = 2,13 ; 2,40x + 7,20 = 2,13·(x + 4)
2,40x + 7,20 = 2,13x + 8,52 ; 0,27x + 7,20 = 8,52
0,27x = 1,32 ; x = 1,32/0,27 = 4,89 l

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

(69/87) ; 0,7931 de ley

52. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.

(10000 · 0,03 · 750)/360 = 625 €

53. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

$\frac{C \cdot 1{,}8 \cdot 6}{100} = 777{,}6 \rightarrow C = \frac{77\,760}{1{,}8 \cdot 6} = 7200$ hay que depositar 7200€

54. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

100 + 5 = 105 $C = 39500 \cdot \left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 70\,936{,}3€$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

Litros (x)	8,35	**4,66**	0,75	1,5	**2,66**
Euros (y)	**25,05**	14	2,25	**4,5**	8

$\frac{2,25}{0,75} = 3$; y = 3x ;

2. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

Suponemos que en un metro caben 12 personas: 400·12=4800 personas

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?

48·4 = 192 euros

4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?

euros	metros
85	15
x	23

$\frac{85}{x} = \frac{15}{23}$; x = 85·23 : 15 = 130,67 euros

5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?

10m/0,6m por silla = 16,67 sillas

6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?

300·25 = 7500 kg ha transportado en 2 viajes, en 1 viaje 7500/2 = 3750 kg por viaje
950·30 = 28500 kg quiere transportar
28500/3750 = 7,6 ; necesita 8 viajes.

7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

libros	páginas	kg
400	300	100
700	140	x

400·300 = 120 000 páginas ; 100/120 000 = 0,0083kg por página
700·140·0,0083 = 82,6kg

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9	3,33	**0,055**	0,01	**5,55**
Magnitud B	**28,62**	6	0,1	**0,018**	10

y = 1,8x

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

Descuento = 285·0,15 = 42,75 euros
285 - 42,75 = 242,25 euros
242,25·0,21 = 50,77 euros
242,25 + 50,77 = 293,02 euros

10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1 500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?

1500·0,12 = 180 euros
1500 + 180 = 1,680 euros

11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?

0,85·0,12 = 0,102 euros
0,85 + 0,102 = 0,952 euros

12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?

1900 – 1200 = 700
(700/1900)·100 = 36,84%

13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?

60·0,15 = 9 euros
60 – 9 = 51 euros

14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

483,60/(1 - 0,22) = 483,60/0,78 = 620 euros

15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?

20/(1 - 0,20) = 20/0,80 = 25 euros

16. Por liquidar una deuda de 35 000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30 800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

((35000 – 30800)/35000)·100 , (4200/35000)·100 = 12%

17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

500/(1+(21/100)) = 500/1,21 = 413,22 euros

18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?

((29-25)·100 = (4/25)·100 = 16%

19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?

((12000-10000)/10000)·100 = (2000/10000)·100 = 20%

20. Un mapa está dibujado a escala 1:800 000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

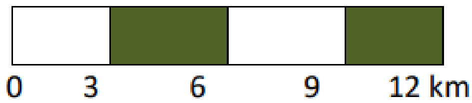
200km/800000 = 20 000 000cm/800 000 = 25cm

21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

12/(340·100000) = 12/34000000

Escala = 1/2 833 333,33

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



Cada cm en la escala son 3 km en la realidad.

Entonces 21 cm corresponden a 21·3 = 63 km

23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho	**5 km largo y 1,25 km de ancho**	1:25000
10cm	15 km	**1:150 000**
1,5 cm	450m	1:30000

* 20·25000 = 500 000 cm = 5 km ; 5·25 000 = 125 000 cm = 1,25 km
* 10/1 500 000 = 1/150 000
* 450m/30 000 = 45 000cm/30 000 = 1,5 cm

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5	**600**	3,5	**9**
Magnitud B	**11,25**	12	0,15	**25,71…**	10

12·7,5 = 90

8·x = 90 , x = 11,25 ; 0,15·x = 90 , x = 600 ; 3,5·x = 90 , x = 25,71… ; 10·x = 90 , x = 9 .

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre. Proporción directa, a mayor velocidad, se recorre mayor espacio.

b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar. Proporción directa, ya que a medida que tienes más dinero, puedes comprar más bolsas de almendras.

c) Talla de zapatos y precio de los mismos. En general, no siguen una proporción directa o inversa clara, ya que el precio de los zapatos puede variar independientemente de la talla

d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen. Proporción directa, generalmente, a más miembros en la familia, se consume más litros de leche.

e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado. Proporción directa, ya que a medida que se venden más entradas, se recauda más dinero.

f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse. Proporción inversa, más grifos reducen el tiempo necesario para llenar la piscina.

g) Edad de una persona y estatura que tiene. En general, no siguen una proporción directa o inversa clara, ya que la estatura puede variar independientemente de la edad

h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla. Proporción inversa, más trabajadores reducen el tiempo necesario para hacer la valla.

i) Edad de una persona y número de amigos que tiene. No siguen una proporción directa o inversa clara, ya que el número de amigos puede variar independientemente de la edad.

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

velocidad	horas
x	4
80 km/h	5h 15 min

5 + (15/60) = 5,25 horas

80 · 5,25 = 420 km

420/4 = 105 km/h

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20	**100**	7	**0,06**	10,8
B	**0,25**	0,05	**1,4**	0,3	**2,16**

A·B = 5; 20x = 5, x = 0,25 ; 0,05x = 5, x = 100 ; 7x = 5, x = 1,4 ; 0,3x = 5, x = 0,06 ; 10,8x = 5, x = 2,16

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

240 – 60 = 180 cerdos ; 240 + 30 = 270 cerdos ; proporcionalidad inversa.

cerdos	semanas
240	9
180	x
270	y
240	z (75%)

240·9 = 2160 , 180x = 2160 , x = 2160/180 = 12 semanas
270y = 2160 , y = 2160/270 = 8 semanas
Si 1 ración dura 9 semanas, ¾ de ración dura z semanas, ¾ z = 1 · 9 , z = 4/3 · 9 = 12 semanas

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

gallinas	días
65	25
45	x

65 – 20 = 45
65 · 25 = 1625
1625/45 = 36,11 ; 36 días.

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2.7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

gallinas	kg	paquetes
150	4	15
150	2,7	x

15 · 4 = 60kg
60/2.7 = 22,22 ; 23 paquetes.

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6	**3,6**	50
B	3	9	180	**12**	20	**6,25**

Inversamente proporcionales, 24·3 = 72 ; 8·9 = 72 ; 0,4·180 = 72 ;
6x = 72 , x = 72/6 = 12 ; 20x = 72 , x = 72/20 = 3,6 ; 50x = 72 , x = 72/50 = 1,44

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

8 - 0,5 = 7,5 ; 8 · 20 = 160 ; inversamente proporcional

Horas	operarios
8	20
7,5	x

160/7,5 = 21,33

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

personas	días	raciones
100	20	3
75	x	2

100·20·3 = 60000 raciones totales

60000/(75·2) = 400 días

34. Si 15 operarios instalan 2 500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valla?

operarios	días	metros
15	7	2500
12	x	5250

2500/7 = metros/día los 15 operarios (2500/7) / 15 = 11,9m por operario en un día

5250/11,9 = 441,18 días

35. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

120 + 78 + 42 = 240

(120/240) · 168000 = 60 000 euros

(78/240) · 168000 = 54 600 euros

(42/240) · 168000 = 29 400 euros

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

160 + 140 + 120 = 420

(160/420) · 336 = 128

(140/420) · 336 = 112

(120/420) · 336 = 96

37. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

22 + 16 + 14 = 52
(22/52) · 3 120 = 1 320
(16/52) · 3 120 = 960
(14/52) · 3 120 = 840

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

m.c.m. (18, 30, 45) = 90 ; 1/18 = 5/90 ; 1/30 = 3/90 ; 1/45 = 2/90.
(5/90) + (3/90) + (2/90) = 10/90
(5/10) · 4 350 = 2 175 para 18
(3/10) · 4 350 = 1 305 para 30
(2/10) · 4 350 = 870 para 45

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final de paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

3 · 14 = 42 euros

1,5 · 6 = 9 euros

1,75 · 8 = 14 euros

42 + 9 + 14 = 65 euros

3 + 1,5 + 1,75 = 6,25 kg

65/6,25 = 10,40

250 gramos = 0,25 kg , 10,40 · 0,25 = 2,60 euros el paquete.

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

8 · 2,5 = 20 euros
15 · 1,6 = 24 euros
5 · 1,2 = 6 euros
20 + 24 + 6 = 50 euros
8 + 15 + 5 = 28L
50/28 = 1,79 euros el litro, medio litro 0,895
1,0 + 0,4 = 1,4 ; (1,79 + 0,895)·1,4 = 3,74 euros el litro y medio debe venderse.

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

5 · 18 = 90 euros

19 · 4,2 = 79,8 euros

12 · 8 = 96 euros

90 + 79,8 + 96 = 265,8 euros

5 + 19 + 12 = 36 kg

265,8/36 = 7,38 euros el kg.

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

157,5 + 20 = 177,5 euros

3 + 5 + 7 + 8 + 12 = 35 km

177,5/35 = 5,07 euros el km

3 · 5,07 = 15,21 euros

5 · 5,07 = 25,35 euros

7 · 5,07 = 35,49 euros

8 · 5,07 = 40,56 euros

12 · 5,07 = 60,84 euros

43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

Ha de hacerse un reparto inversamente proporcional

m.cm.(12, 9, 15) = 180 ; 1/12 = 15/180 ; 1/9 = 20/180 ; 1/15 = 12/180

15 + 20 + 12 = 47

(15/47) · 2 350 000 = 750 000 euros para la que contamina un 12%

(20/47) · 2350000 = 1 000 000 euros para la que contamina un 9%

(12/47) · 2350000 = 600 000 euros para la que contamina un 15%

44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

(280,5/340) · 100 = (0,825) · 100 = 82,5%

45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?

0,950 · 60 = 57g

0,750 · 20 = 15g

57 + 15 = 72g

72/0,900 = 80g

46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?

$i = \frac{C \cdot 3,5 \cdot 5}{100}$; $810 = \frac{C \cdot 3,5 \cdot 5}{100}$; $C = \frac{810 \cdot 100}{3,5 \cdot 5} = 4628,57$ €

47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25 400 € al 1,4 % en 10 años?

$i = \frac{25400 \cdot 1,4 \cdot 10}{100} = 3556$ C = 25 400 + 3 556 = 28 956 euros.

48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74 500€ al 3% para obtener un interés de 2 980€?

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100}\ ;\ t = \frac{12 \cdot 100 \cdot i}{C \cdot r} = \frac{12 \cdot 100 \cdot 2980}{74500 \cdot 0,03} = 16\ meses$$

49. Al 3% de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63 338,5€. ¿De qué capital se trata?

Suponemos que se trata de un año.

Capital final = $C + 0,3 \cdot C = 1,03C = 63\,338,5$;

$C = \frac{63\,338,5}{1,03} = 61\,493,69$ euros era el capital inicial.

50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

850/(150 + 50) = 850/200 = 4,25m

51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

1/0 = no cometió faltas

1/1 = 1

1/2 = 0,5

1/4 = 0,25

0 + 1 + 0,5 + 0,25 = 1,75

0 faltas: 500 euros

1 falta: 1,75 · 500 = 875 euros

2 faltas: 3,5 · 500 = 1750 euros

4 faltas: 7 · 500 = 3500 euros

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 2000; 0,025; 20; 20000 b) 2000; 0,25; 2; 20000 c) 1000; 0,025; 10; 10000

Constante: 50/0,25 = 200

x/10 = 200, x = 2000 ; 5/x = 200 , x = 0,025 ; x/0,1 = 200 , x = 20 ; x/100 = 100 , x = 20000

Respuesta: a) 2000; 0,025; 20; 20000

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €

500/10 = 50 ; 50·36 = 1 800

Respuesta: c) 1 800 €

3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %

(2000 – 1750)/ 2000 = 0,125 ; 0,125·100 = 12,5%

Respuesta: b) 12,5%

4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

510:(3/4) = 680

Respuesta: d) 680 botellas

5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

Constante: 20·5,5 = 110

10x = 110 , x = 11 ; 0,5x = 110 , x = 220 ; 11x = 110 , x = 10 ; 0,1x = 110 , x = 1 100

Respuesta: c) 11; 220; 10; 1100

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirá:

a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t

15 + 12 + 10 = 37

(15/37) · x = 30 , x = 74 , la cosecha es de 74 t

La segunda, (12/37) · 74 = 24 t ; la tercera, (10/37) · 74 = 20 t

Respuesta : a) 24t y 20t

7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:

a) 1 : 34 000 b) 1 : 3 000 c) 1 : 30 000 d) 1 : 300

0,81 km = 81 000 ; 81 000/2,7 = 30 000

Respuesta c) 1 : 30 000

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

4 · 5 = 20 m en total ; 20/32 = 0,625 m por libro

0,625 · 16 = 10 m necesitamos ; 10/2 = 5 rollos

Respuesta: b) 5 rollos

9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€

5 · 1,2 = 6 €

2,8 · 0,85 = 2,38 €

4 · 1 = 4 €

Total 6 + 2,38 + 4 = 12,38 €

5 + 2,8 + 4 = 11,8 kg

12,38/ 11,8 = 1,049 €/kg

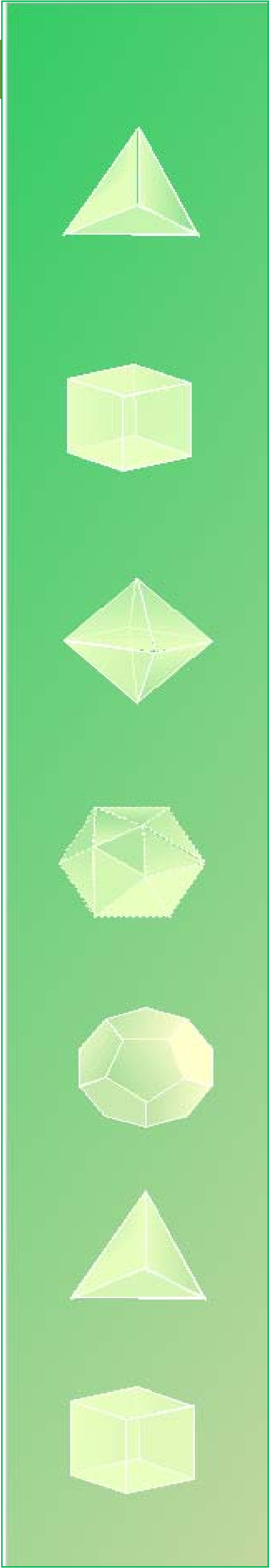
Respuesta: d) 1,049

10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

304 · 0,855 = 259,92

Respuesta: a) 259,92 g



Matemáticas aplicadas
4ºA E.S.O.
Capítulo 3: Expresiones algebraicas. Polinomios. Identidades

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Hugo Bastante Gómez-Limón

Pilar Paramio Barrigas

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (*N*) así como la cantidad total de minutos de conversación (*M*). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

(0,05·M) +(0,12·N) = 0,05·M + 0,12·N euros

Multiplicamos por 0,05 los minutos de conversación, por 0, 12 el número de llamadas y el resultado lo sumamos.

2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.

Área = $\pi \cdot r^2$

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: x e y:

a) La mitad del opuesto de su suma. $-\frac{1}{2}(x+y)$

b) La suma de sus cubos. x^3+y^3

c) El cubo de su suma. $(x+y)^3$

d) El inverso de su suma. $\frac{1}{(x+y)}$

e) La suma de sus inversos. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) 3x+4 => El triple de un número más cuatro

b) $\frac{x}{3}-x^3$ => La tercera parte de un número menos su cubo

c) $\frac{(x^3+y^3+z^3)}{3}$ => La tercera parte de la suma de los cubos de tres números

d) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$ => La diferencia de los cuadrados de dos números entre el cuadrado de su diferencia.

5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

Final = Precio original- descuento, si el precio en etiqueta es x

Precio final = x – (0,15 ·x)   Precio final= x – 0,15·x   Precio final= 0,85·x

6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

El % de descuento será 20 + 5(n–1). En el caso de 10 artículos será por tanto 20 + 5·9 = 65 % de descuento.

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $\boldsymbol{x^2+7x-12\ para\ x=0} \rightarrow 0^2+7\cdot(0)-12\ =\ -12$

b)$\boldsymbol{(a+b)^2-(a^2+b^2)\ para\ a=-3\ \ y\ \ b=4} \rightarrow \left((-3)+(4)\right)^2-((-3)^2+(4)^2)\ =-24$

c) $\boldsymbol{a^2-5a+2para\ a=-1} \rightarrow (-1)^2-5\cdot(-1)+2=8$

8. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: 10x + 20y + 30z.

a) x = 1, y = 2, z = 1.$\rightarrow 10(1)+20(2)+30(1)=80$

b) x = 2, y = 0, z = 5.$\rightarrow 10(2)+20(0)+30(5)=170$

c) x = 0, y = 1, z = 0.$\rightarrow 10(0)+20(1)+30(0)=20$

9. Indica el coeficiente y la parte literal de los siguientes monomios:

a) $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}\right)x^2y^3} \rightarrow$ **coeficiente** $\frac{3}{2}$**,** **parte literal** x^2y^3

b) $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)a^27b4c} \rightarrow$ **coeficiente** $\frac{7\cdot 4}{2}=14$**,** **parte literal** $a^2\ b\ c$

c) $\boldsymbol{\frac{(2x5z9c)}{2}} \rightarrow$ **coeficiente** $\frac{2\cdot 5\cdot 9}{2}=45$ **,** **parte literal** $x\ z\ c$

10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

.$(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3) \rightarrow$
$(2x^2-3x^2-3x^2)+(-2x-4x+2x)+(0+2-3) \rightarrow -4x^2-4x-1$

$-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6) \rightarrow$
$(-2x^4)+(2x^3+3x^3)+(3x-6x-2x)+(-4x^2)+(-4+5+6) \rightarrow$
$-2x^4+5x^3-5x^2-5x+7$

11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) 3x –4 – (3x + 2) + 4x $\rightarrow 3x-4-3x-2+4x \rightarrow\ (3x-3x+4x)+(-4-2) \rightarrow$
$\rightarrow 4x+(-6) \rightarrow 4x-6$

b)$3(x^2-4x+6)-(x^2-6x+5)\ \rightarrow 3x^2-12x+18-x^2+6x-5 \rightarrow$
$\rightarrow (3x^2-x^2)+(-12x+6x)+(18-5) \rightarrow 2x^2-6x+13$

c) (–3)(2a + 4b) – (2b – 3a)$\rightarrow -6a-12b-(2b-3a) \rightarrow -6a-12b-2b+3a \rightarrow$
$\rightarrow (-6a+3a)+(-12b-2b) \rightarrow -3a-14b$

d)$4(2a^2-2ab+2b^2)-(3a^2-4ab) \rightarrow 8a^2-8ab+8b^2-(3a^2-4ab) \rightarrow$
$\rightarrow 8a^2-8ab+8b^2-3a^2+4ab \rightarrow (8a^2-3a^2)+(-8ab+4ab)+8b^2 \rightarrow 5a^2-4ab+8b^2$

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a)$4x^4+6x^3+2x^2+5x-2 \rightarrow -4x^4-6x^3-2x^2-5x+2$

b)$9x\ \rightarrow -9x$

c)$-2x^4+4x^2 \rightarrow 2x^4-4x^2$

13. Considera los polinomios $p\ \equiv -2x^3-6x+3,\ \ q\ \equiv\ 2x^2+2x+9$**, así como el polinomio suma** $s\ \equiv\ p+q$ **Halla los valores que adopta cada uno de ellos para,** $x=-2$ **es decir, calcula** $p\,(-2),\ q(-2),\ s(-2)$**. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores:**

$p(-2)=\ -2(-2)^3-6(-2)+3=\ -2(-8)+12+3=\ -16+15=-1$

$q(-2) = 2\,(-2)^2 + 2(-2) + 9 = \ 2(4) - 4 + 9 = 8 + 5 = 13$
$s(-2) = 13 - 1 = 12$
Se cumple que: s (– 2) = p(– 2) + q(– 2)

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, en $x = 3$ ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$

$p(3) = \ -2(3)^3 - 6(3) + 3 = \ -2(27) - 18 + 3 = -54 - 15 = -69$
$-p(x) = 2x^3 + 6x - 3; \quad -p(3) = \ 2(3)^3 + 6(3) - 3 = \ 2(27) + 18 - 3 = \ 54 + 15 = 69$

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(\boldsymbol{-5x^3 + 3x})(\boldsymbol{-4x^2}) \to -5x^3 \cdot -4x^2 = 20x^5 \to 3x \cdot -4x^2 = -12x^3 \to 20x^5 - 12x^3$

b) $(\boldsymbol{3x^4 + 2x})(\boldsymbol{-4x - 5}) \ \to 3x^4 \cdot (-4x) = -12x^5 \to 3x^4 \cdot (-5) = -15x^4 \to$
$\to 2x \cdot (-4x) = -8x^2 \to 2x \cdot (-5) = -10x \ \to -12x^5 - 15x^4 - 8x^2 - 10x$

c) $(\boldsymbol{3x^3 + 2x^2 - 2x})(\boldsymbol{4x^2 - x}) \ \to 3x^3 \cdot 4x^4 = 12x^7 \to 3x^3 \cdot (-x) = -3x^4 \to$
$\to 3x^3 \cdot (-x) = -3x^4 \to 2x^2 \cdot (-x) = -2x^3 \to -2x \cdot 4x^4 = -8x^5 \to -2x \cdot (-x) = 2x^2$
$\to 12x^7 - 3x^4 + 8x^6 - 2x^3 - 8x^5 + 2x^2$

d) $(\boldsymbol{-1})(\boldsymbol{6x^3 - 3x^2 - 2x + 3}) \to -1 \cdot 6x^3 = -6x^3 \to -1 \cdot (-3x^2) = 3x^2 \to$
$-1 \cdot (-2x) = 2x \to -1 \cdot 3 = -3 \ \to -6x^3 + 3x^2 + 2x - 3$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(\boldsymbol{-3x^3 + x}) \boldsymbol{— 2x^2} \to (-3x^3 + x) — 2x^2 = -3x^3 + x + 2x^2 = -3x^3 + 2x^2 + x \to$
$-3x^3 + 2x^2 + x$

b) $(\boldsymbol{3x^4 + 2x}) \boldsymbol{— 4x - 5} \to (3x^4 + 2x) - (-4x - 5) = 3x^4 + 2x + 4x + 5 \to$
$3x^4 + 6x + 5$
c) $(\boldsymbol{4x^2 - 2x}) - (\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 2x}) \to (4x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x) =$
$= 4x^2 - 2x - x^3 - 2x^2 + 2x \to 4x^2 - 2x^2 - x^3 - 2x + 2x = (4 - 2)x^2 - x^3 = 2x^2 - x^3$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $\boldsymbol{3x^3 - 2x^2 + x} \to \ \frac{1}{3}(3x^3 - 2x^2 + x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ solución = $\frac{1}{3}$

b) $\boldsymbol{-4x^4 + 2x - 5} \to -\frac{1}{4}(-4x^4 + 2x - 5) = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ solución = $-\frac{1}{4}$

c) $\boldsymbol{-x^2 + 2x - 6} \to (-1)(-x^2 + 2x - 6) = x^2 - 2x + 6$ solución = -1

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $\boldsymbol{3x(2x^2 + 4x - 6)} \to 3x \cdot 2x^2 + 3x \cdot 4x - 3x \cdot 6 \to 6x^3 + 12x^2 - 18x$

b) $(\boldsymbol{3x - 4})(\boldsymbol{4x + 6}) \to (3x - 4)(4x + 6) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot 6 - 4 \cdot 4x - 4 \cdot 6 \to$
$\to 12x^2 + 18x - 16x - 24 \to 12x^2 + (18x - 16x) - 24 \to 12x^2 + 2x - 24$

c) $(2a^2-5b)(4b-3a^3) \rightarrow$
$(2a^2-5b)(4b-3a^3) \rightarrow 2a^2 \cdot 4b - 2a^2 \cdot 3a^3 - 5b \cdot 4b - 5b \cdot (-3a^3) \rightarrow$
$\rightarrow 8a^2b - 6a^5b - 20b^2 + 15a^3b \rightarrow 8a^2b - 6a^5b - 20b^2 + 15a^3b$

d) $(3a-6)(8-2a)(9a-2) \rightarrow (-6a^2 + +24a + 12a - 48)(9a-2) \rightarrow$
$\rightarrow (-6a^2+36a-48)(9a-2) - 54a^3 + 324a^2 - 432a - 12a^2 + 72a - 96 \rightarrow$
$\rightarrow -54a^3 + 312a^2 - 360a - 96$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2(-3x^2-4x+2) \cdot 3x^3 \rightarrow -9x^7 - 12x^6 + 6x^5$

b) $(3x-4)(-4x^2-6x+5)(-2x) \rightarrow 24x^4 + 36x^3 - 30x^2 - 32x^3 - 48x^2 + 40$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x = 10x(-2x^2 - 4x + 1)$

b) $60x^4 - 30x^2 = 30x^2(2x^2 - 1)$

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) \equiv 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ **entre el polinomio** $q(x) \equiv 2x^2 - x + 3$

Primera etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

22. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ **entre** $x^2 - 3x + 5$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-2x^2-2x+6 & x^2-3x+5 \\ \cline{2-2} \underline{-3x^3+9x^2-15x} & 3x+7 \\ \quad 7x^2-17x+6 & \\ \quad \underline{-7x^2+21x-35} & \\ \qquad 4x-29 & \end{array}$$

b) $-15x^3-3x^2+4x+5$ **entre** $5x^3-2x^2-2x+4$

$$\begin{array}{l|l} -15x^3-3x^2+4x+5 & 5x^3-2x^2-2x+4 \\ \cline{2-2} \underline{15x^3-6x^2-6x+12} & -3 \\ \quad -9x^2-2x+17 & \end{array}$$

c) $6x^4-7x^3+3x^2+4x+6$ **entre** $-2x^2+2x+5$

$$\begin{array}{l|l} 6x^4-7x^3+7x^2-4x-8 & -2x^2+2x+5 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+6x^3+15x^2} & -3x^2+\frac{1}{2}x-\frac{21}{2} \\ \quad -x^3+22x^2-4x-8 & \\ \quad \underline{x^3-x^2 \quad -\frac{5}{2}x} & \\ \qquad 21x^2-\frac{13}{2}x-8 & \\ \qquad \underline{-21x^2+21x+\frac{105}{2}} & \\ \qquad\qquad \frac{29}{2}x+\frac{89}{2} & \end{array}$$

d) $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ **entre** $4x^3+2x^2+x-2$

$$\begin{array}{l|l} -16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6 & 4x^3+2x^2+x-2 \\ \cline{2-2} \underline{16x^5+8x^4+4x^3-8x^2} & -4x^2+\frac{5}{4}x+\frac{17}{8} \\ \quad 5x^4+11x^3-5x^2+4x+6 & \\ \quad \underline{-5x^4-\frac{5}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x} & \\ \qquad \frac{17}{2}x^3-\frac{25}{4}x^2+\frac{13}{2}x+6 & \\ \qquad \underline{-\frac{17}{2}x^3-\frac{17}{4}x^2-\frac{17}{8}x+\frac{17}{4}} & \\ \qquad\qquad -\frac{21}{2}x^2+\frac{35}{8}x+\frac{41}{4} & \end{array}$$

e) $-7x^5+3x^2+2$ **entre** x^2+4

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{array}{l|l} -7x^5+3x^2+2 & x^2+4 \\ \cline{2-2} \underline{7x^5+28x^3} & -7x^3+28x+3 \\ 28x^3+3x^2+2 & \\ \underline{-28x^3-112x} & \\ 3x^2-112x+2 & \\ \underline{-3x^2-12} & \\ -112x-10 & \end{array}$$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) \equiv x^2 + 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = -2x^2 + 3$ como resto.

Solución abierta: Si tomamos como divisor p(x) = x, el dividendo será:

$D(x) = p(x)q(x) + r(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot x - 2x^2 + 3 = x^3 - x + 3$

24. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1} + \frac{5}{2x} = \frac{3x+2}{(x+1)(x-1)} + \frac{5}{2x} = \frac{(3x+2)(2x)}{2x\,(x^2-1)} + \frac{5(x^2-1)}{2x(x^2-1)} = \frac{6x^2+4x+5x^2-5}{2x(x^2-1)} = \frac{11x^2+4x-5}{2x^3-2x}$

b) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} - \frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x+2-(3x-9)}{(x+2)(x-3)} = \frac{-2x-7}{(x+2)(x-3)}$

c) $\frac{-2x}{5x^2+4x} \cdot \frac{5}{3x-2} = \frac{-2x}{x(5x+4)} \cdot \frac{5}{3x-2} = -\frac{10x}{x(5x+4)(3x-2)} = \frac{-10}{(5x+4)(3x-2)}$

d) $\frac{x-4}{x^2+5x} : \frac{x-4}{x+5} = \frac{x-4}{x(x+5)} : \frac{x-4}{x+5} = \frac{(x-4)(x+5)}{x(x+5)(x-4)} = \frac{1}{x}$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3} + \frac{4x-1}{x^2} = \frac{-3x^2+2x-1}{x^3} + \frac{(4x-1)\cdot x}{x^2\cdot x} = \frac{-3x^2+2x-1+4x^2-x}{x^3} = \frac{x^2+x-1}{x^3}$

b) $\frac{x-1}{x^2+5x} - \frac{6}{x+5} = \frac{x-1}{x^2+5x} - \frac{6\cdot x}{(x+5)\cdot x} = \frac{x-1-6x}{x^2+5x} = \frac{-5x-1}{x^2+5x}$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy} = \frac{xy(4x^2y-3y)}{2xy} = \frac{4x^2y-3y}{2} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{3(x^2-3x)}{3(2x+4)} = \frac{x^2-3x}{2x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y} = \frac{2y(3y^2+2y)}{2y(y-4)} = \frac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b} = \frac{2ab(3ab^2+a^2-2)}{2ab(b+4a)}\ \frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(\mathbf{3x^3-9x^2-6x}):\ \mathbf{3x} = (x^2-3x-2)$

b) $(\mathbf{7a^3-70a^2-21}):\ \mathbf{7} = (a^3-10a^2-3)$

c) $(\mathbf{25x^4-10x^2}):\ \mathbf{5x^2} = (5x^2-2)$

d) $(\mathbf{3x^2y^3-8xy^2}):\ \mathbf{xy^2} = (3x-8)$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15} = \frac{3x(x-2)}{3(3x^2+5)} = \frac{x(x-2)}{(3x^2+5)}$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2} = \frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)} = \frac{a-5}{7a+4}$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy} = \frac{xy(x+3y)}{4xy} = \frac{x+3y}{4}$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab} = \frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)} = \frac{2ab+3}{a^2-1}$

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $\mathbf{-3x^3+3x} = -3x(x^2-1)$

b) $\mathbf{-6x^2+5x+6} = (2x-3)(-3x-2)$

c) $\mathbf{-6x^4+3x^3-3x+6} = (2x^2-x+1)(-3x+3)$

d) $\mathbf{-6x^4+3x^3-3x+6} = (2x^2-x+2)(-3x^2-2x-3)$

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$

Solución abierta: Por ejemplo $p(x) = 6x^4-x^3+3x^2-x$

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $\mathbf{x^3-3x^2+1\ de\ x=3}$; No es raíz

$$P(3) = 3^3-3(3)^2+1 = 1$$

b) $\mathbf{x^3+3x^2+3x+2\ de\ x=-2}$; Sí es raíz

$$P(-2) = (-2)^3+3(-2)^2+3x(-2)+2 = 0$$

c) $\mathbf{x^3-3x^2+x+1\ de\ x=1}$; Sí es raíz

$$P(1) = 1^3-3(1)^2+1+1 = 0$$

d) $\mathbf{x^3-3x^2+1\ de\ x=0}$; No es raíz

$$P(0) = 0^3-3(0)^2+1 = 1$$

e) $\mathbf{x^3-3x^2-x+3\ de\ x=-1}$; Sí es raíz

$$P(-1) = (-1)^3-3(-1)^2-1(-1)+3 = 0$$

32. Supongamos que tenemos dos polinomios $\boldsymbol{p_1(x)\ y\ p_2(x)}$, y un número real $\boldsymbol{\alpha}$.

a) Si $\boldsymbol{\alpha}$ es una raíz de $\boldsymbol{p_1(x)}$, ¿también es raíz del polinomio suma $\boldsymbol{p_1(x)+p_2(x)}$

No necesariamente: $\alpha = 0$ es una raíz de $p_1(x) = x$, pero sí $p_2(x) = 1$; $\alpha = 0$ No es una raíz de $p_1(x)+p_2(x)=x+1$

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot\ p_2(x)$

Sí, ya que $p_1(\alpha)\cdot p_2(\alpha)=0\ \ al\ ser\ \ p_1(\alpha)=0$

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$, y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$,

Son las mismas ya que $p_1(\alpha)=0\leftrightarrow\quad 4p_1(\alpha)=0$

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$$
$$P(x)=(x^2+x-2)(x-3)\rightarrow P(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

$$P(x)=(x-2)^2(x-1)$$
$$P(x)=(x^2-4x+4)(x-1)\rightarrow P(x)=x^3-5x^2+8x-4$$

35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

$$P(x)=(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$$

36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\ldots.+a_1x+a_0$ admite al número 0 como raíz.

Solución: $a_0=0$. Debe ser nulo el término independiente.

37. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\ldots\ldots+a_1x+a_0$ admite al número 1 como raíz.

La suma de los coeficientes ha de ser 0, ya que:

$$a_n1^n+a_{n-1}1^{n-1}+\cdots\ldots\ldots+a_11+a_0=a_n+a_{n-1}+\cdots\ldots\ldots+a_1+a_0=0$$

38. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $\boldsymbol{x+6}\ \rightarrow\ x+6=0\ \rightarrow\ x=-6$

b) $\boldsymbol{-x+4}\ \rightarrow\ -x+4=0\ \rightarrow\ -x=-4\ \rightarrow\ x=4$

c) $\boldsymbol{2x-7}\ \rightarrow\ 2x-7=0\rightarrow\ 2x=7\ \rightarrow\ x=\frac{7}{2}$

d) $\boldsymbol{-4x-5}\ \rightarrow\ -4x-5=0\ \rightarrow\ -4x=5\rightarrow\ x=-\frac{5}{4}$

e) $\boldsymbol{-3x}\ \rightarrow -3x=0\ \rightarrow\ x=0$

f) $\boldsymbol{x^2-5x}\rightarrow\ x^2-5x=0\ \rightarrow\ x(x-5)\rightarrow\ x_1=0\ \ x_2=5$

g) $\boldsymbol{4x^2-x-3}\rightarrow\ 4x^2-x-3=0\ \rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4(4)(-3)}}{2(4)}=\ \frac{1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{1\pm7}{8}\ \ ;x_1=1\,;\ \ x_2=\ \frac{3}{4}$

h) $\boldsymbol{x^3-4x}\rightarrow\ x^3-4x=0\ \rightarrow x(x^2-4)=0\ \rightarrow\ x_1=0\,,\ x_2=2\,,\ x_3=-2$

i)$\boldsymbol{x^3+4x} \rightarrow x^3+4x=0 \rightarrow x(x^2+4)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x^2+4 \quad No\, tiene\, raices\, reales$

39. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $\boldsymbol{-3x^2+2x+2\ entre\ x+1}$ $\rightarrow$ cociente: $-3x+5$ y resto: -3

$$\begin{array}{r|rrr} & -3 & 2 & 2 \\ -1 & & 3 & -5 \\ \hline & -3 & 5 & \underline{|-3} \end{array}$$

b) $\boldsymbol{x^3+3x^2-3x+6\ entre\ x+2} \rightarrow$ cociente: x^2+x-5 y resto: 16

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -3 & 6 \\ -2 & & -2 & -2 & 10 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & \underline{|16} \end{array}$$

c) $\boldsymbol{5x^3-4x^2-2\ entre\ x-1}$ $\rightarrow$ cociente: x^2+3x+1 y resto: -5

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & & 5 & 1 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & 1 & \underline{|-1} \end{array}$$

d) $\boldsymbol{x^3-8x+2\ entre\ x-3}$ $\rightarrow$ cociente: x^2+3x+1 y resto: 5

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -8 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & \underline{|5} \end{array}$$

40. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\boldsymbol{\alpha = 3\ de\ x^3-4x^2+5}$ $\rightarrow$ No es raíz (no puede serlo al no dividir al término independiente)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & & 3 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \underline{|-4} \end{array}$$

b) $\boldsymbol{\beta = -2\ de\ -x^3-2x^2+x+2}$ $\rightarrow$ Es raíz

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{array}{r|rrr}
-2 & 2 & 0 & -2 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & \underline{|0}
\end{array}$$

c) $\gamma = 1 \ \ de \ \ -2x^4 + x + 1$ → Es raíz (debe serlo al ser la suma de los coeficientes 0)

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & & -2 & -2 & -2 \quad -1 \\
\hline
-2 & -2 & -2 & -1 & \underline{|0}
\end{array}$$

d) $\sigma = -1 \ \ de \ \ 2x^3 + 2x^2$ → Es raíz

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
 & & -2 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

41. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio$-2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \ en \ x = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -2 & 3 & 2 & 3 \\
3 & & -6 & -9 & -21 \\
\hline
 & -2 & -3 & -7 & \underline{|-18}
\end{array}$$

Solución: -18

42. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir

$\mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \ entre \ 2x + 6.}$

Como 2x+6 = 2(x+3) , usamos la regla de Ruffini en x = – 3 para dividir el polinomio por x + 3 y el cociente que queda lo dividimos entre 2 para dividir el polinomio por 2x + 6. El resto es el mismo ya que el divisor por el cociente queda igual en las 2 divisiones:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 3 & 2 \\
-3 & & -3 & -9 & -21 \\
\hline
 & 1 & -3 & -7 & \underline{|-18}
\end{array}$$

Cociente: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$. *Resto: –18*

43. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ → Solución:$1, -1, 2 \ \ y - 2$ 1 es raíz y queda $x^2 + 2$ que no tiene más.

$$\begin{array}{r|rrr}
1 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 0 & 2 & \underline{|0}
\end{array}$$

b) $\boldsymbol{x^4+4x^3+4x^2+4x+3}$ → raíces reales $-1\ y\ -3$ son raíces y queda x^2+1 que no tiene más raíces reales.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\
-1 & & -1 & -3 & -1 & -3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & \underline{|0} \\
-3 & & -3 & 0 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \underline{|0} &
\end{array}$$

c) $\boldsymbol{2x^3+x^2-18x-9}$ → $1,\ 3, -3,\ 9\ y\ -9;$ $3\ y\ -3$ son raíces y queda $2x+1$ y no tiene más raíces enteras: $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 1 & -18 & -9 \\
3 & & 6 & 21 & 9 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \underline{|0} \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \underline{|0} &
\end{array}$$

d) $\boldsymbol{x^4+2x^3+3x^2+6x}$ solución: $x^4+2x^3+3x^2+6x = x(x^3+2x^2+3x+6)=0$

$\Leftrightarrow x=0\ \ o\ \ x^3+2x^2+3x+6=0$ por lo que las posibles raíces, además de 0, son

$1, -1,\ 2-2, 3, -3,\ 6,\ -6\ ;\quad 0\ \ y\ -2$ son raíces y queda x^2+3, que no tiene más raíces reales.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & 3 & 6 \\
-2 & & -2 & 0 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 3 & \underline{|0}
\end{array}$$

44. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ **es raíz del polinomio** $\boldsymbol{2x^3+3x^2-11x-6}$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 1 & -18 & -9 \\
3 & & 6 & 21 & 9 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & \underline{|0} \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \underline{|0} & \\
-\frac{1}{2} & & -1 & & \\
\hline
 & 2 & \underline{|0} & &
\end{array}$$

45. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $\mathbf{3x^2+4x+1}$ Los posibles candidatos a raíces racionales son: ± 1; $\pm\frac{1}{3}$

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero

$3(1)^2+4(1)+1=3+4+1=8$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

$3(-1)^2+4(-1)+1=3-4+1=0$ $(igual\ a\ 0)$

$3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)+1=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+1=2$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

$3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+4\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1=0$ $(es\ igual\ a\ 0)$

Por lo tanto, las raíces racionales son $x=-1\ y\ \ x=\frac{1}{3}$

b) $\mathbf{2x^3-9x^2+12x-4}$ Los posibles candidatos a raíces racionales son: 1, -1, 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero

$2(1)^3-9(1)^2+12(1)-4=2-9+12-4=1$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

$2(-1)^3-9(-1)^2+12(-1)-4=-2-9-12-4=-27$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

$2(2)^3-9(2)^2+12(2)-4=16-36+24-4=0$ $(es\ igual\ a\ 0)$ (raíz doble)

$2(-2)^3-9(-2)^2+12(-2)-4=-16-36-24-4=-80$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

$2\left(\frac{1}{2}\right)^3-9\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\left(\frac{1}{2}\right)-4=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+6-4=0$ $(es\ igual\ a\ 0)$

$2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-9\left(-\frac{1}{2}\right)^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)-4=-\frac{1}{4}-\frac{9}{4}-6-4=-\frac{21}{2}$ $(no\ es\ igual\ a\ 0)$

Por lo tanto, las raíces racionales son $\mathrm{x}=2\ \ \mathrm{y}\ \ \mathrm{x}=\frac{1}{2}$

46. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{\mathbf{x^2+4x}}{\mathbf{x^3+3x^2-6x-8}}=\frac{x(x+4)}{(x+4)(x-2)(x+1)}=\frac{x}{(x-2)(x+1)}$

b) $\frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{x^3+3x^2-6x-8}}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+4)(x-2)(x-1)}=\frac{x+1}{(x+4)(x-2)}$

c) $\frac{\mathbf{x^2-1}}{\mathbf{x^3+3x^2-6x}}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+3x-6)}$

47. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{-3x+12}}+\frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{x^2-4x}}=\frac{5}{-3(x-4)}+\frac{x+2}{x(x-4)}=\frac{-5x+3(x+2)}{3x(x-4)}=\frac{-5x+6x+2}{3x(x-4)}=\frac{x+2}{3x(x-4)}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{-x}{(x-1)^2}-\frac{(3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{-x^2-x-(3x^2-4x+1)}{(x+1)(x-1)^2}=$

$=\frac{-4x^2-5x+1}{(x+1)(x-1)^2}$

48. Realiza los cálculos:

a)$(\mathbf{1+4a})^2=1+8a+16a^2$

b)$(-\mathbf{x+5})^2=x^2-10x+25$

c)$(-\mathbf{2x-3})^2=4x^2+12x+9$

d) $(\mathbf{x^2-1})^3=\ x^6-3x^4+3x^2-1$

e) $(\mathbf{5x+3})^3$ = $125x^3+225x^2+135x+27$

49. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(\mathbf{a+b+c})^2=\ a^2+b^2+c^2+2ab+ac+2bc$

$(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c)=$

$a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2=$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

b) $(\mathbf{a+b-c})^2=\ a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$(a+b-c)^2=(a+b-c)\cdot(a+b-c)=$

$a^2+ab-ac+ba+b^2-bc-ca-cb+c^2=$

$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

50. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(\mathbf{2x+3y})^2=\ 4x^2+12xy+9y^2$

b) $\left(\mathbf{3x+\frac{y}{3}}\right)^2=\ 9x^2+\frac{6y}{3}+\frac{y^2}{9}=\ 9x^2+2y+\frac{y^2}{9}$

c) $\left(\mathbf{5x-\frac{5}{x}}\right)^2=\ 25x^2-\frac{50x}{x}+\frac{25}{x^2}=\ 25x^2-50+\frac{25}{x^2}$

d) $(\mathbf{3a-5}\,)^2=\ 9a^2-30a+25$

e) $(\mathbf{a^2-b^2}\,)^2=\ a^4-2a^2b^2+b^4$

f)$\left(\frac{3}{5y}-\frac{2}{y}\right)^2=\ \frac{9}{25y^2}-\frac{12}{5y^2}+\frac{4}{y^2}=\frac{9}{25y^2}-\frac{12}{5y^2}+\frac{4}{y^2}$

51. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\mathbf{a^2+6a+9}=(a+3)^2$

b) $\mathbf{4x^2-4x+1}=(2x-1)^2$

c) $\mathbf{b^2-10b+25}=(b-5)^2$

d) $\mathbf{4y^2+12y+9}=(2y+3)^2$

e) $\mathbf{a^4+2a^2+1}=(a^2+1)^2$

f) $\mathbf{y^4+6y^2+9}=(y^2+3)^2$

52. Efectúa estos productos:

a)$(\mathbf{3x+2y})(\mathbf{3x-2y})=\ 9x^2-4y^2$

b)$(\mathbf{5x^2+1})(\mathbf{5x^2-1})=\ 25x^4-1$

c) $(-\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{2x})(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{2x}) = 4x^2 - x^4$

53. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) $\boldsymbol{x^2-4x+4} = (x-2)^2$

b) $\boldsymbol{3x^2+18x+27} = 3(x^2+6x+9) = 3(x+3)^2$

c) $\boldsymbol{3x^5-9x^3} = 3x^3(x^2-3) = 3x^3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

54. Calcula los siguientes productos:

a)$(\boldsymbol{3x+1})(\boldsymbol{3x-1}) = 9x^2-1$

b) $(\boldsymbol{2a-3b})(\boldsymbol{2a+3b}) = 4a^2-9b^2$

c) $(\boldsymbol{x^2-5})(\boldsymbol{x^2+5}) = x^4-25$

d) $(\boldsymbol{3a^2+5})(\boldsymbol{3a^2-5}) = 9a^4-25$

55. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones:

a)$(\boldsymbol{9x^2-25}) = (3x+5)(3x-5)$

b)$(\boldsymbol{4a^4-81b^2}) = (2a^2+9b)(2a^2-9b)$

c)$(\boldsymbol{49-25x^2}) = (7+5x)(7-5x)$

d) $(\boldsymbol{100a^2-64}) = (10a+8)(10a-8)$

56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{3x+3}} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x+1)} = \frac{x-1}{3}$

b)$\frac{\boldsymbol{2x^2+12x+18}}{\boldsymbol{x^2-9}} = \frac{2(x^2+6+9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+3)}{x-3} = \frac{2x+6}{x-3}$

c) $\frac{\boldsymbol{6-3a}}{\boldsymbol{a^2-4}} = \frac{-3(a-2)}{(a+2)(a-2)} = -\frac{3}{a+2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se presentará un truco con el que adivinaremos el número tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre.

Número inicial: x

ii. Que lo multiplique por 3.

$$3x$$

iii. Que al resultado anterior le sume 18.

$$3x + 18$$

iv. Que multiplique por 2 lo obtenido.

$$2(3x + 18) = 6x + 36$$

v. Que divida entre 6 la última cantidad.

$$\frac{6x + 36}{6} = x + 6$$

vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió.

$$(x + 6) - x = 6$$

vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

El número es 6

2. En este otro ejercicio vamos a adivinar dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99).

Numero de una cifra: a

Numero de dos cifras: b

ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra.

$$4a$$

iii. Que multiplique por 5 lo obtenido.

$$5(4a) = 20a$$

iv. Que multiplique el resultado precedente por 5.

$$5(20a) = 100a$$

v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió.

$$100a + b$$

vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{7x-9}{(x+5)(2x-32)} \rightarrow (x+5)(2x-32) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ o } 2x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ o } x = 16$

b) $\frac{-x}{x^2-6x+9} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

c) $\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$ En todo número real la expresión puede ser evaluada, $-2x^4 - 3x^2 - 4 \neq 0$

d) $\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$ $\rightarrow x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2=0,\ y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

4. Una persona tiene ahorrados 2 500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

$$A=2500(1+0{,}02)^{1\cdot 2} \rightarrow A=2500(1+0{,}02)^2 \rightarrow A=2500(1{,}02)^2 \rightarrow A=2500(1{,}040)$$

$$A=\ 2601€$$

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

El primer año recuperamos: $x+\frac{i}{100}x=\ \frac{100+i}{100}x$

El segundo año recuperamos: $\frac{100+i}{100}x+\frac{i}{100}\ \frac{100+i}{100}x=\ \left(\frac{100+i}{100}\right)^2 x$

Al cabo de n años: $\left(\frac{100+i}{100}\right)^n x$

6. Construye un polinomio de grado 2, $\mathbf{p(x)}$, $\textbf{tal que } \mathbf{p(5)=\ -2}$

$p(x)\equiv x^2-6x+3 \quad p(5)\equiv 5^2-6\cdot 5+3=25-30+3=-2$

7. Consideremos los polinomios $\boldsymbol{p(x)\equiv\ -3x^3+2x^2-4x-3,\ q(x)\equiv\ 4x^4+3x^3-2x^2+x+8}$ **y** $\boldsymbol{r(x)\equiv 5x^2+6x-2}$

a) $\boldsymbol{p+q+r}\ \equiv\ (-3x^3+2x^2-4x-3)+(4x^4+3x^3-2x^2+x+8)+(5x^2+6x-2)=$
$=4x^4+5x^2+3x+3$

b) $\boldsymbol{p-q}\ \equiv(-3x^3+2x^2-4x-3)-(4x^4+3x^3-2x^2+x+8)=$
$=-4x^4-6x^3+4x^2-5x-11$

c) $\boldsymbol{p\cdot r}\ \equiv\ (-3x^3+2x^2-4x-3)(5x^2+6x-2)=$
$=-15x^5-18x^4+6x^3+10x^4+12x^3-4x^2-20x^3-24x^2+5x^3+8x-15x^2-18x+6=$
$=-15x^5-8x^4-2x^3-43x^2-10x+6$

d) $\boldsymbol{p\cdot r-q}\ \equiv\ (4x^4+3x^3-2x^2+x+8)(5x^2+6x-2)-(4x^4+3x^3-2x^2+x+8)=$
$=-15x^5-8x^4-2x^3-43x^2-10x+6-(4x^4+3x^3-2x^2+x+8)=$
$=-15x^5-12x^4-5x^3-41x^2-11x-2$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\left(-\frac{xy}{6}\right)=\left(\frac{2ax-3by}{6}\right)\left(-\frac{xy}{6}\right)=-\frac{ax^2y}{18}+\frac{bxy^2}{12}$

b) $\boldsymbol{(0,3x-0,2y+0,1z)(0,1x+0,2y-0,3z)}=\ 0{,}03x^2+0{,}06xy-0{,}09xz-0{,}02xy-0{,}04y^2$

c) $\boldsymbol{(x-1)(x-a)(x-b)}=\ (x^2-xa-x+a)(x-b)=(x^2-x(a+1)+a)(x-b)=$
$=x^3-(a+1)x^2+ax-x^2b+x(a+1)b-ab=x^3-(a+1+b)x^2+(ab+a+b)x-ab$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 - 2$ *entre* $3x^2 + 4x - 4$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2 & 3x^2 + 4x - 4 \\ \hline
\underline{-3x^4 - 4x^3 + 4x^2} & x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{17}{9} \\
-8x^3 - 5x^2 + x & \\
\underline{8x^3 + \frac{32}{3}x^2 - \frac{32}{3}x} & \\
\frac{17}{3}x^2 - \frac{29}{3}x - 2 & \\
\underline{-\frac{17}{3}x^2 - \frac{68}{9}x + \frac{68}{9}} & \\
-\frac{155}{9}x + \frac{50}{9} &
\end{array}
$$

b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2$ *entre* $x^3 + 3x + 4$

$$
\begin{array}{l|l}
5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7 & x^3 + 3x + 4 \\ \hline
\underline{-5x^5 \qquad -15x^3 - 20x^2} & 5x^2 - 6x - 8 \\
-6x^4 - 8x^3 - 17x^2 - x & \\
\underline{6x^4 \qquad +18x^2 + 24x} & \\
-8x^3 + x^2 + 23x & \\
\underline{8x^3 \qquad + 24x + 32} & \\
x^2 + 47x + 32 &
\end{array}
$$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2) = 5x^{4-2} = 5x^2$

b) $(3x^2y^4z^6):\left(\left(\frac{1}{2}\right)xy^3z^5\right) = 3x^2y^4z^6\ \frac{2}{xy^3z^5} = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} \cdot y^{4-3} \cdot z^{6-5} = 6xyz$

c) $(x^4 + 2x^2y + y^2):(x^2 + y) = (x^2+y)^2:(x^2+y) = (x^2+y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9} = \frac{2x-3}{x(x-3)} + \frac{3x}{(x-3)^2} = \frac{(2x-3)(x-3)}{x(x-3)^2} + \frac{3x(x)}{x(x-3)^2} = \frac{(2x^2-6x-3x+9)+3x^2}{x(x-3)^2} = \frac{5x^2-9x+9}{x(x-3)^2}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9} = \frac{2x-3}{x(x-3)} - \frac{3x}{(x-3)^2} = \frac{(2x-3)(x-3)}{x(x-3)^2} - \frac{3x(x)}{x(x-3)^2} = \frac{(2x^2-6x-3x+9)-3x^2}{x(x-3)^2} = \frac{-x^2-9x+9}{x(x-3)^2}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9} = \frac{2x-3}{x(x-3)} \cdot \frac{3x}{(x-3)^2} = \frac{(2x-3)3x}{x(x-3)(x-3)^2} = \frac{3(2x-3)}{(x-3)^3} = \frac{6x-9}{(x-3)^3}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9} = \frac{2x-3}{x(x-3)} : \frac{3x}{(x-2)^2} = \frac{(2x-3)(x-3)^2}{3x \cdot x(x-3)} = \frac{(2x-3)(x-3)}{3x^2}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número − 5 sea raíz suya.

El polinomio cuadrático que tiene −5 como una de sus raíces es:

$$(x+5)\cdot(x+2)=x^2+7x+10$$

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, − 3 y 0.

El polinomio de grado 3 cuyas raíces son 6, −3, y 0 es:

$$x\cdot(x-6)\cdot(x+3)=x^3-3x^2-18x$$

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6 , − 3 , 2 y 0 .

El polinomio de grado 4 cuyas raíces son 6, −3, -2, y 0 es:

$$x\cdot(x-6)\cdot(x+3)\cdot(x+2)=x^4-5x^3-12x^2+36x$$

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

Solución abierta: $x(x-1)(x^2+1)=x^4-x^3+x^2-x$

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, − 3, 2, 4 y 5.

El polinomio de grado 5 cuyas raíces son 6, −3, 2, 4, y 5 es:

$$(x-6)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x+3)=x^5-14x^4+53x^3+44x^2-546x+720$$

17. Encuentra un polinomio q(x) tal que al dividir $\boldsymbol{p(x)\equiv 2x^4+x^3+3x^2+x+3}$ entre $\boldsymbol{q(x)}$ se obtenga como polinomio resto $\boldsymbol{r(x)\equiv x^2+x+1}$

$$p(x)=q(x)\cdot a(x)+r(x)\rightarrow\ 2x^4+x^3+3x^2+x+3=q(x)\cdot a(x)+x^2+x+1\ \rightarrow$$
$$\rightarrow(2x^4+x^3+3x^2+x+3)-(x^2+x+1)=q(x)\cdot a(x)\rightarrow$$
$$\rightarrow\ 2x^4+x^3+2x^2+2=q(x)\cdot a(x)$$

q(x) ha de ser al menos de grado 3, pues el resto es de grado 2.

Lo más fácil es que a(x) = 1, de donde $q(x)=2x^4+x^3+2x^2+2$

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

Probando con la regla de Ruffini

- **a)** $\boldsymbol{3x^3+11x^2+5x-3}$ raíces x = - 1 y x = -3
- **b)** $\boldsymbol{3x^3+5x^2+x-1}$ $No\ tiene\ raices\ enteras$
- **c)** $\boldsymbol{2x^3+x^2-6x-3}$ x = - 1 doble
- **d)** $\boldsymbol{3x^3-6x^2-6x-3}$ $No\ tiene\ raices\ enteras$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

a) $Tiene\ las\ raices\ \ -1\ \ y\ \ -3\ \ y\ \ 3x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{3}$

b) $Tiene\ raíz\ 1(doble)\ y\ \ 3x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{3}$

c) $La\ única\ raíz\ racional\ es\ x=-\frac{1}{2}$

d) $No\ tiene\ raíz\ racional$

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- **a)** $\boldsymbol{3x^3+11x^2+5x-3}=\ (x+1)(x+3)(3x-1)$
- **b)**$\boldsymbol{3x^3+5x^2+x-1}=(x+1)^2(3x-1)$
- **c)** $\boldsymbol{2x^3+x^2-6x-3}\rightarrow 2x^3+x^2-6x-3=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6)$
- **d)**$\boldsymbol{3x^3-6x^2+x-2}=\ (x-2)(3x^2+1)$

21. Calcula las potencias:

a) $(\boldsymbol{x-2y+z})^2 = x^2 - 4xy + 2xz - 4y^2 + 4yz + z^2$

b) $(\boldsymbol{3x-y})^3 = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$

c) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^2\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab^2 + b^4$

d) $(\boldsymbol{x}^3-\boldsymbol{y}^2)^2 = x^6 - 2x^3y^2 + y^4$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a)$\boldsymbol{x^2-36} \rightarrow (x+6)\cdot(x-6).\ Suma\ por\ diferencia$

b)$\boldsymbol{5x^2+1} \rightarrow no$

c)$\boldsymbol{5x^2-11} \rightarrow (\sqrt{5}x-\sqrt{11})(\sqrt{5}x+\sqrt{11})suma\ por\ diferencia$

d)$\boldsymbol{x^2-3y} \rightarrow (x+\sqrt{3y})(x-\sqrt{3y})suma\ por\ diferencia$

e)$\boldsymbol{x^2-6x+9} \rightarrow (x-3)^2 Potencia\ de\ un\ binomio$

f)$\boldsymbol{x^4-8x^2+16} \rightarrow (x^2-4)^2 Potencia\ de\ un\ binomio$

g)$\boldsymbol{x^2+\sqrt{20xy}+5y^2} \rightarrow (x+\sqrt{5}y)^2.\ Potencia\ de\ un\ binomio$

h)$\boldsymbol{x^4+2x^3+x^2+2x+1} \rightarrow no.$

i)$\boldsymbol{x^4-2x^3+x^2+2x+1} \rightarrow no.$

23. Descompón en factores:

a)$(\boldsymbol{x^4-1}) = (x^2+1)(x^2-1)$

b)$(\boldsymbol{x^2-y^2}) = (x+y)(x-y)$

c)$(\boldsymbol{x^2y^2-z^2}) = (xy-z)(xy+z)$

d)$(\boldsymbol{x^4-2x^2y+y^2}) = (x^2-y)^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$

$$(x^2-2)(x^2-3) = x^4-3x^2-2x^2+6 = x^4-5x^2+6$$

b) Determina todas las raíces del polinomio x^4-5x^2+6

$$(x^2-2)=0 \quad , \quad (x^2-3)=0$$

Las raíces de este polinomio son las siguientes: $\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\frac{\boldsymbol{x^2-2x+1}}{\boldsymbol{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{\boldsymbol{x^4+2x^2y^2+y^4}}{\boldsymbol{x^2+y^2}} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$

c) $\frac{\boldsymbol{x^3-x}}{\boldsymbol{x^4-1}} = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x}{x^2+1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x(5-x)}} - \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2(5-x)}} = \frac{2(2)}{2x(5-x)} - \frac{3x}{2x(5-x)} = \frac{4-3x}{2x(5-x)}$

b) $\frac{x-y}{x+y}\cdot\ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)\cdot(x^2+y^2)}{(x+y)\cdot(x^2-y^2)} = \frac{(x-y)\cdot(x^2+y^2)}{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$

c) $\frac{x^3-x}{x^4-1} = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x}{x^2+1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{x-y}{x+y}\cdot\ \frac{x^2y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)\cdot(x^2y^2)}{(x+y)\cdot(x^2-y^2)} = \frac{(x-y)\cdot(x^2y^2)}{(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)} = \frac{(x^2y^2)}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{(x^2y^2)}{(x^2-y^2)}$

b) $\frac{2x+3y}{a-b} - \frac{3x+4y}{2a-2b} = \frac{2(2x+3y)-3x-4y}{2(a-b)} = \frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $-4x + (1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) = -4x + (1-x^2)(1+x^2)\ \frac{(x+1)^2-(1-x)^2}{1-x^2} =$
$= -4x + (1+x^2)4x = 4x^3$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \frac{(x^6-1)}{x^2} : \frac{x^3+1}{x} = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2} : \frac{x^3+1}{x} = \frac{(x^3-1)(x^3+1)\cdot x}{x^2\cdot(x^3+1)} = \frac{x^3-1}{x}$

b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a} = \frac{(x-a)^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a} = \frac{(x-a)^3(x+a)}{(x+a)\cdot(x-a)} = (x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} : \frac{ab}{a+b} = \frac{4ab\cdot(a+b)}{(a-b)(a+b)\cdot ab} = \frac{4ab}{(a-b)ab} = \frac{4}{a-b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}} = \frac{\frac{x+y-a}{a(x+y)}}{\frac{x+y+a}{a(x+y)}} : \frac{\frac{a+y-x}{x(a+y)}}{\frac{a+y+x}{x(a+y)}} = \frac{x+y-a}{x+y+a} : \frac{a+y-x}{a+y+x} = \frac{(x+y-a)(a+y+x)}{(x+y+a)(a+y-x)} = \frac{(x+y-a)}{(a+y-x)}$

b) $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \frac{x^3-x^2+3x+2}{x^3} : \frac{x^2-3x-2}{x^3} = \frac{x^3\cdot(x^3-x^2+3x+2)}{x^3\cdot(x^2-3x-2)} = \frac{x^3-x^2+3x+2}{x^2-3x-2}$

c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}} \cdot \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}} = \frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y-3x}{xy}} \cdot \frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+5x}{xy}} = \frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y-3x)(3y+5x)} = \frac{6y^2+xy-2x^2}{3y^2-4xy-15x^2}$

30. Confecciona una hoja de cálculo que te permita dividir un polinomio usando la Regla de Ruffini.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ **;** **b)** $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ **; c)** $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

a) 5, -8 , 3 , -4 6, -7 ; b) -3 , 2, -1 , 4 , -5 ; c) $7\sqrt{2}$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy-\frac{6}{z}$ $en\; x=2,\; y=1,\; z=1\; es$:

a) 17 **b) 15** **c) -3** **d) 5**

$$\frac{3\cdot 2-7}{2-3\cdot 1^2}+5\cdot 2\cdot 1-\frac{6}{1}$$

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ………. Tres

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ………. dos

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ………. Cuatro

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado …. Cuatro

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ $entre$ $q(x)=3x^2+5x+8$ **el polinomio resto resultante:**

a) debe ser de grado 3.
b) puede ser de grado 2.
c) debe ser de grado 1.
d) debe ser de grado menor que 2

5. Considera el polinomio $5x^5+6x^4-8x^3+4x^2-6x+2$ **¿Cuáles de los siguientes números enteros son razonables candidatos para ser una raíz suya?**

a) 3 **b) 2** **c) 4** **d) 7**

Solución: b)

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$ **¿Cuáles de los siguientes números racionales son razonables candidatos para ser una de sus raíces?**

a) − 3 **b) 2 y 2 / −1** **c) −3 y 3/ 1** **d) −3 y 2/ 3**

Solución: d)

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres:

a) tiene tres raíces reales; b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

Solución: b)

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

Si, por ejemplo $x^2(x-1)(x-2)$ tiene3 raíces: 0 (doble), 1 y 2

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.
Falso, el divisor ha de ser de grado 1;

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio
Cierto, será raíz si al sale un 0;

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.
Falso, se puede usar para polinomios con coeficientes racionales, aunque es más lioso;

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.
Falso, sólo las raíces racionales.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.
Puede haber polinomios de grado diez que no tenga ninguna raíz real. $(x^2+1)^5$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Matemáticas aplicadas
4ºA E.S.O.
Capítulo 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Hugo Bastante Gómez-Limón
Pilar Paramio Barrigas
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $4x - 5y + 7 - 2y = 8x$

$4x - 5y + 7 - 2y = 8x \rightarrow 4x - 7y + 7 = 8x \rightarrow 7y = 4x - 8x + 7 \rightarrow y = \frac{7-4x}{7}$

$4x - 5y - 2y + 7 = 8x \rightarrow 4x - 7y + 7 = 8x \rightarrow -7y + 7 = 4x$

$4x - 5y - 2y + 7 = 8x \rightarrow -5y - 2y = 8x - 4x - 7 \rightarrow -7y = 4x - 7 \rightarrow y = \frac{4x-7}{-7}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{5(7x+6) = 21} \rightarrow 35x + 30 = 21 \rightarrow 35x = -9 \rightarrow x = -\frac{9}{35}$

b) $\mathbf{-2x + 7 = -7(3x-2) - 8x} \rightarrow -2x + 7 = -21x + 14 - 8x \rightarrow$
$-2x + 7 = -29x + 14 \rightarrow 29x - 2x = 14 - 7 \rightarrow 27x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{27}$

c) $\mathbf{2x - 6(9+5x) = 4(x+6) + 7} \rightarrow 2x - 54 - 30x = 4x + 24 + 7 \rightarrow$
$-28x - 4x = 24 + 7 + 54 \quad -32x = 85 \rightarrow x = -\frac{85}{32}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{9(2-3x) + \frac{4}{5}(x-3) = 4x - \frac{7-3x}{5}} \rightarrow 18 - 27x + \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 4x - \frac{7-3x}{5} \rightarrow$
$\rightarrow 5(18-27x) + 4x - 12 = 20x - (7-3x) \rightarrow 90 - 135x + 4x - 12 = 20x - 7 + 3x \rightarrow$
$-131x - 23x = -7 + 12 - 90 \rightarrow -154x = -85 \rightarrow x = \frac{85}{154}$

b) $\mathbf{6 - \left(8 - 4\left(3x - \frac{3}{7}\right)\right) = 2x - \frac{5-9x}{7}} \rightarrow 6 - 8 + 4\left(3x - \frac{3}{7}\right) = 2x - \frac{5-9x}{7} \rightarrow$ m.c.m.: 7
$7\left[-2 + 4\left(3x - \frac{3}{7}\right) = 2x - \frac{5-9x}{7}\right] \rightarrow -14 + 28\left(3x - \frac{3}{7}\right) = 14x - (5-9x) \rightarrow$
$-14 + 84x - 12 = 14x - 5 + 9x \rightarrow 84x - 14x - 9x = -5 + 14 + 12 \rightarrow 61x = 21 \rightarrow x = \frac{21}{61}$

c) $\mathbf{8(3x-5) = 7(6-9x)} \rightarrow 24x - 40 = 42 - 63x \rightarrow 24x + 63x = 40 + 42 \rightarrow$
$87x = 82 \rightarrow x = \frac{82}{87}$

4. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$ es $x = 6$

$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 3(x-1) - 2(x+1) = 1 \rightarrow 3x - 3 - 2x - 2 = 1 \rightarrow 3x - 2x = 5 + 1 \rightarrow x = 6$

5. Escribe tres ecuaciones de primer grado que tengan como solución 3, otras tres que tengan infinitas soluciones y tres que no tengan solución.

Tres ecuaciones de primer grado que tenga como solución 3:

$x + 2 = 5$; $2x - 3 = 3$; $4x - 2 = 10$

Tres ecuaciones de primer grado que tengan infinitas soluciones:

$x + 2 = x + 3 - 1$; $2x - 4 + 2 = 2x - 2$; $x + 5 - 3 = x - 1 + 3$

Tres ecuaciones de primer grado que no tenga solución:

$x + 2 = x + 3$; $2x - 4 = 2x - 2$; $x + 5 - 3 = x - 1 + 2$

6. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y que su base es doble que su altura.

$P = 2b + 2h \rightarrow 30 = 2b + 2h \quad ; \quad b = 2h$

$30 = 2b + 2h \rightarrow 30 = 2(2h) + 2h \rightarrow 30 = 4h + 2h \rightarrow 30 = 6h \rightarrow h = \frac{30}{6} \rightarrow$

$h = 5\ cm \qquad b = 2(5) \rightarrow b = 10cm$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{2(3x+4) = 7} \rightarrow 6x + 8 = 7 \rightarrow 6x = 7 - 8 \rightarrow x = -\frac{1}{6}$

b) $\mathbf{-4x + 6 = -9(5x-1) - 5x} \rightarrow -4x + 6 = -45x + 9 - 5x \rightarrow$

$-4x + 45x + 5x = 9 - 6 \rightarrow 46x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{46}$

c) $\mathbf{4x - 7(11 + 2x) = 6(x+8) + 9} \rightarrow 4x - 77 + 14x = 6x + 48 + 9 \rightarrow$

$4x - 77 + 14x = 6x + 57 \rightarrow 14x + 4x - 6x = 57 + 77 \rightarrow 12x = 134 \rightarrow$

$x = \frac{134}{12} \rightarrow x = \frac{67}{6}$

d) $\mathbf{2(3-4x) + \frac{4}{7}(x-2) = 2x - \frac{5-4x}{7}} \rightarrow 6 - 8x + \frac{4}{7}x - \frac{8}{7} = 2x - \frac{5-4x}{7} \rightarrow$

$\rightarrow 7(6-8x) + 4x - 8 = 14x - (5-4x) \rightarrow 42 - 56x + 4x - 8 = 14x - 5 + 4x \rightarrow$

$\rightarrow 34 - 52x = 18x - 5 \rightarrow 52x + 18x = 34 + 5 \rightarrow 70x = 39 \rightarrow x = \frac{39}{70}$

e) $\mathbf{2 - \left(7 - 5\left(2x - \frac{1}{3}\right)\right) = 4x - \frac{6-2x}{3}} \rightarrow 2 - 7 + 5\left(2x - \frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{6-2x}{3}$

multiplicamos la ecuación por 3, nos queda, $-15 + 15\left(2x - \frac{1}{3}\right) = 12x - (6-2x) \rightarrow$

$-15 + 30x - 5 = 12x - 6 + 2x \rightarrow 30x - 12x - 2x = -6 + 15 + 5 \rightarrow 16x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

f) $\mathbf{3(7x-1) = 9(3-2x)} \rightarrow 21x - 3 = 27 - 18x \rightarrow 21x + 18x = 27 + 3 \rightarrow 39x = 30 \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{30}{39} \rightarrow x = \frac{10}{13}$

8. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2x} + 8 = 0$ Sí es ecuación de segundo grado

b) $5xy^2 - 8 = 0$ No es una ecuación de segundo grado

c) $3{,}2x^2 - 1{,}25 = 0$ Sí es una ecuación de segundo grado

d) $28 - 6{,}3x = 0$ No es una ecuación de segundo grado

e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$ No es una ecuación de segundo grado

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$ No es una ecuación de segundo grado

9. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0 \rightarrow a = -8 \quad b = 10 \quad c = 3$

b) $-3{,}4x^2 + 7{,}8x = 0 \rightarrow a = -3{,}4 \quad b = 7{,}8 \quad c = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0 \rightarrow a = 6 \quad b = 0 \quad c = -1$

d) $1{,}25x^2 - 3{,}47x + 2{,}75 = 0 \rightarrow a = 1{,}25 \quad b = -3{,}47 \quad c = 2{,}75$

10. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c

a) $2-\mathbf{7x^2+11x=0} \rightarrow \quad a=-7 \;\; b=11 \;\; c=2$

b) $\mathbf{-2,3x^2+6,7x=0} \rightarrow \quad a=-2{,}3 \quad b=6{,}7 \quad c=0$

c) $\mathbf{5x^2-9=0} \rightarrow \quad a=5 \quad b=0 \quad c=-9$

d) $\mathbf{9,1x^2-2,3x+1,6=0} \rightarrow a=9{,}1 \quad b=-2{,}3 \quad c=1{,}6$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $\mathbf{x^2-7x+12=0} \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(12)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2} \rightarrow x_1=4 \quad x_2=3$

b) $\mathbf{3x^2+2x-24=0} \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(3)(-24)}}{2\,(3)}=\frac{-2\pm\sqrt{292}}{6} \rightarrow x_1=2{,}51 \quad x_2=-3{,}18$

c) $\mathbf{2x^2-9x+6=0} \rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4(2)(6)}}{2(2)}=\frac{9\pm\sqrt{33}}{4} \rightarrow x_1=3{,}68 \quad x_2=0{,}81$

d) $\mathbf{x^2-3x-10=0} \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(-10)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm7}{2} \rightarrow x_1=5 \;\; x_2=-2$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{5x-2\,\frac{x-1}{5}=x^2-\frac{10x+8}{5}} \rightarrow 5x-\frac{2x-2}{5}=x^2-\frac{10x+8}{5} \rightarrow 25x-2x+2=x^2-10x-8 \rightarrow$

$23x+2=x^2-10x-8 \rightarrow 5x^2-33x-10=0 \rightarrow x=\frac{33\pm\sqrt{33^2-4(-10)}}{2}=\frac{33\pm\sqrt{1289}}{2} \rightarrow$

$x_1=\;6{,}9 \quad x_2=-2{,}3$

b) $\mathbf{4\,\frac{x-3}{5}-\frac{7-4x}{x}=8} \rightarrow \frac{4x-12}{5}-\frac{7-4x}{x}=8 \rightarrow 5x\cdot\left(\frac{4x-12}{5}-\frac{7-4x}{x}\right)=40x$

$4x^2-12x-35+20x=40x=0 \rightarrow 4x^2+8x-35-40x=0 \rightarrow 4x^2-32x-35=0$

$x=\frac{32\pm\sqrt{32^2-4(4)(-35)}}{2(4)}=\frac{32\pm\sqrt{1584}}{8} \rightarrow x_1=8{,}97 \quad x_2=-0{,}97$

c) $\mathbf{x(x-2)+3(x^2-7)+11=-11} \rightarrow x^2-2x+3x^2-21+11=-11 \rightarrow$

$4x^2-2x-10=-11 \rightarrow \;\rightarrow 4x^2-2x+1=0 \rightarrow$

$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(4)(1)}}{2(4)}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{8}$ No tiene solución real

d) $\mathbf{6(x^2-7)+2(x^2-9)+3=2} \rightarrow 6x^2-42+2x^2-18+3=2 \rightarrow 8x^2-57+3=2 \rightarrow$

$\rightarrow 8x^2=56 \rightarrow x^2=\frac{56}{8} \rightarrow x=\pm\sqrt{7}$

e) $\mathbf{\frac{3-6x^2}{2x}-\frac{1}{3}=\frac{2x-5}{6}} \rightarrow \frac{9-18x^2-2x}{6x}=\frac{2x-5}{6} \rightarrow 9-18x^2-2x=(2x-5)x \rightarrow$

$9-18x^2-2x=2x^2-5x \rightarrow 20x^2-3x-9 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(20)(-9)}}{2(20)}=\frac{3\pm\sqrt{729}}{40} \rightarrow$

$x_1=\frac{3}{4} \quad x_2=-\frac{3}{5}$

f) $\mathbf{\frac{1-2x^2}{3x}-\frac{2}{5}=\frac{4x-2}{15}} \rightarrow \frac{5(1-2x^2)}{15x}-\frac{2(3x)}{15x}=\frac{x(4x-2)}{15x} \rightarrow \frac{5-10x^2}{15x}-\frac{6x}{15x}=\frac{4x^2-2x}{15x} \rightarrow$

$\rightarrow 5-10x^2-6x=4x^2-2x \rightarrow 10x^2+4x^2+6x-2x-5=0 \rightarrow 14x^2+4x-5 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(14)(-5)}}{2(14)}=\frac{-4\pm\sqrt{296}}{28} \rightarrow x_1=0{,}47 \quad x_2=-0{,}75$

13. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{5x^2+2x+4=0} \rightarrow \sqrt{2^2-4(5)(4)} = \sqrt{4-80} \rightarrow \sqrt{-76}\ Ninguna\ solución\ real$

b) $\mathbf{2x^2-7x+8=0} \rightarrow \sqrt{7^2-4(2)(8)} = \sqrt{49-64} = \sqrt{-13}\ Ninguna\ solución\ real$

c) $\mathbf{x^2-5x-11=0} \rightarrow \sqrt{5^2-4(-11)} = \sqrt{25+44} \rightarrow \sqrt{64}\ Dos\ soluciones$

d) $\mathbf{3x^2-8x+6=0} \rightarrow \sqrt{8^2-4(3)(8)} = \sqrt{64-96} = \sqrt{-32}\ Ninguna\ solución\ real$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a)$\mathbf{3x^2+18x=0} \rightarrow 3x(x+6) \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-6$

b) $\mathbf{5x^2-180=0} \rightarrow 5x^2=180 \rightarrow x=\sqrt{\frac{180}{5}}=\sqrt{36}=\pm 6$

c) $\mathbf{x^2-49=0} \rightarrow x^2=49 \rightarrow x=\sqrt{49}=\pm 7$

d)$\mathbf{2x^2+x=0} \rightarrow x(2x+1) \rightarrow x_1=0 \ \ x_2= -\frac{1}{2}$

e) $\mathbf{4x^2-25=0} \rightarrow 4x^2=25 \rightarrow x=\sqrt{\frac{25}{4}}= \ \pm\frac{5}{2}$

f) $\mathbf{5x^2-10x=0} \rightarrow 5x(x-2) \rightarrow x_1=0 \quad x_2= \ 2$

15. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{x^2+6x=0} \rightarrow x(x+6)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-6$

b) $\mathbf{x^2+2x-8=0} \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-8)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2} \rightarrow x_1=2 \ \ x_2=-4$

c) $\mathbf{x^2-25=0} \rightarrow (x+5)(x-5)$

d) $\mathbf{x^2-9x+20=0} \rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4(20)}}{2}=\frac{9\pm 1}{2} \rightarrow x_1=5 \ \ x_2=4$

e) $\mathbf{x^2-3x-4=0} \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-4)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \rightarrow x_1=4 \quad x_2=-1$

f) $\mathbf{x^2-4x-21=0} \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(-21)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{4\pm 10}{2} \rightarrow x_1=7 \ \ x_2= \ -3$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

$$(x-3)(x-7)= x^2-7x-3x+21 \rightarrow x^2-10x+21$$

17. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.

$$P=2(b+a) \rightarrow 16=2(b+a) \rightarrow 8=b+a \rightarrow b=8-a$$

$$A=l\cdot a \rightarrow 15= \ l\cdot a \ \rightarrow 15=(8-a)\cdot a \rightarrow 15= \ 8a-a^2 \rightarrow a^2-8a+15=0$$

$a=3,\ \ a=5$, luego la base 5 cm y la altura 3 cm o viceversa.

18. Si 3 es solución de $x^2-5x+a=0$ ¿cuánto vale a?

$$(3)^2-5(3)+a=9-15+a=-6+a=0 \rightarrow a=6$$

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\mathbf{(x-6)(x-3)(x+7)(x-1)(x-9)=0}$

$x-6=0 \rightarrow x=6\ ;\ x-3=0 \rightarrow x=3\ ;\ x+7=0 \rightarrow x=-7\ ;\ x-1=0 \rightarrow x=1;$

$x-9=0 \rightarrow x=9$

b) $\mathbf{3(x-4)(x-8)(x+5)(x-2)(x-1)=0}$ $\ 3(x-4)=0 \rightarrow 3x-12=0 \rightarrow$

$x=\frac{12}{3} \rightarrow x=4\ ;\ x-8=0 \rightarrow x=8;\ x+5=0 \rightarrow x=-5\ \ ;\ \ x-2=0 \rightarrow x=2;$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$x-1=0 \rightarrow x=1$

20. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $\boldsymbol{x^4-13x^2+36=0} \qquad \boldsymbol{x^2=t} \ ; \quad \boldsymbol{x^4=t^2}$

$\rightarrow t^2-13t+36=0 \rightarrow t=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4(36)}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=9,\ t_2=4 \rightarrow x_1=\sqrt{9}=\pm3 \ , \ x_2=\sqrt{4}=\pm2$

b) $\boldsymbol{x^4-29x^2+100=0} \rightarrow t^2-29t+100=0 \rightarrow t=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4(100)}}{2}=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}=$

$=\frac{29\pm21}{2} \rightarrow\rightarrow t_1=25 \ , \ t_2=4 \ ; \ x_1=\sqrt{25}=\ \pm5 \ , \ x_2=\sqrt{4}=\ \pm2$

c) $\boldsymbol{x^4-10x^2+9=0} \rightarrow t^2-10t+9=0 \rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4(1)(9)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=9 \ , t_2=1 \ ; x_1=\sqrt{9}=\pm3 \ , \ x_2=\sqrt{1}=\pm1$

d) $\boldsymbol{x^4-26x^2+25=0} \rightarrow t^2-26t+25=0 \rightarrow t=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4(25)}}{2}=\frac{26\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{26\pm24}{2} \rightarrow$

$\rightarrow t_1=25 \ , t_2=1 \ ; x_1=\sqrt{25}=\pm5 \ , \ x_2=\sqrt{1}=\ \pm1$

21. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\boldsymbol{\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2} \rightarrow \frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{9-6x}{3x} \rightarrow 9x-1=9-6x \rightarrow 9x+6x=9+1 \rightarrow$

$\rightarrow 15x=10 \rightarrow x=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{3(x-2)}{3x(x-2)}+\frac{3x(x-2)}{3x(x-2)}-\frac{3x}{3x(x-2)}=\frac{x(x-2)}{3x(x-2)} \rightarrow$

$3(x-2)+3x(x-2)-3x=x(x-2) \rightarrow 3x-6+3x^2-6x-3x=x^2-2x \rightarrow$

$3x^2-x^2-6x-3x+2x-6=0 \rightarrow 2x^2-7x-6=0 \rightarrow$

$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(-6)\cdot2}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{97}}{4} \rightarrow x_1=\ 2{,}71 \quad x_2=\ -2{,}21$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{3(x+1)}{3\,(x-1)(x+1)}+\frac{3(x-1)}{3\,(x-1)(x+1)}=\frac{4\,(x^2-1)}{3\,(x-1)(x+1)} \rightarrow$

$\rightarrow 3(x+1)+3(x-1)=4\,(x^2-1) \rightarrow 3x+3+3x-3=4\,x^2-4 \rightarrow$

$\rightarrow 4\,x^2-6x-4=0 \rightarrow 2x^2-3x-2=0$

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{3^2-4\cdot(2)\cdot(-2)}}{2\cdot(2)}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4} \qquad \mathbf{x_1=2} \ ; \ \mathbf{x_2=-\frac{1}{2}}$

d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1 \rightarrow 2x-3+1=x \rightarrow \mathbf{x=2}$

22. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $\boldsymbol{5+\sqrt{x-1}=x+2}$

$\sqrt{x-1}=x+2-5 \rightarrow \sqrt{x-1}=x-3 \rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-3)^2 \rightarrow$

$x-1=x^2+3^2-(2\cdot x\cdot 3) \rightarrow x^2+9-6x-x+1=0 \rightarrow x^2-7x+10=0 \rightarrow$

$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1} \rightarrow \quad x=\frac{7+\sqrt{9}}{2}=\mathbf{5}; \quad x=\frac{7-\sqrt{9}}{2}=\mathbf{2}$

b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$

$\left(\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}\right)^2=(x+1)^2 \to x-2+9(x-2)+2\cdot\sqrt{x-2}\cdot 3\sqrt{x-2}=\mathrm{x}^2+2x+1 \to$

$x-2+9x-18+6\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}=\mathrm{x}^2+2x+1 \to 10x-20+6\cdot\sqrt{x-2}^2=\mathrm{x}^2+2x+1$

$10x-20+6\cdot(x-2)=\mathrm{x}^2+2x+1 \to \mathrm{x}^2+2x+1-10x+20-6x+12=0 \to$

$\mathrm{x}^2-14x+33=0 \to x=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot(1)\cdot(33)}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{64}}{2} \to \mathrm{x}=\frac{14+8}{2}=\mathbf{11};\ \mathrm{x}=\frac{14-8}{2}=\mathbf{3}$

c) $\sqrt{x}-4=x-1$

$\sqrt{\mathrm{x}}=\mathrm{x}-1+4 \to \sqrt{\mathrm{x}}=\mathrm{x}+3 \to \left(\sqrt{\mathrm{x}}\right)^2=(\mathrm{x}+3)^2 \to \mathrm{x}=\mathrm{x}^2+9+2\cdot\mathrm{x}\cdot 3 \to$

$\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+9=0 \ \to x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(1)\cdot(9)}}{2(1)}=\frac{-5\pm\sqrt{-11}}{2}$, no tiene solución real.

d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

$7+\sqrt{\mathrm{x}+4}=\mathrm{x}+9 \to \sqrt{\mathrm{x}+4}=\mathrm{x}+9-7 \to \sqrt{\mathrm{x}+4}=\mathrm{x}+2 \to \left(\sqrt{\mathrm{x}+4}\right)^2=(\mathrm{x}+2)^2 \to$

$\mathrm{x}+4=\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+4 \to \mathrm{x}^2+3\mathrm{x}=0 \to x(x+3)=0\ ;\quad \boldsymbol{x=0}\ ,\ \boldsymbol{x=-3}$

23. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $\mathbf{2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8}$; $2^{\mathrm{x}+5}\cdot 2^{\mathrm{x}+4}\cdot 2^{\mathrm{x}+3}=2^3$; $\quad x+5+x+4+x+3=3$;

$3x+9=0 \quad ; \ \boldsymbol{x=-3}$

b) $\mathbf{5^{3x}=\frac{1}{625}}$; $5^{3x}=\frac{1}{5^4}$; $5^{3x}=5^{-4}$; $3\mathrm{x}=-4$; $\mathbf{x=\frac{-4}{3}}$

c) $\mathbf{2^{2x}\cdot 4^x=\frac{1}{16}}$; $2^{2x}\cdot(2^2)^x=\frac{1}{2^4}$; $2^{2x}2^{2x}=2^{-4}$; $2^{4x}=2^{-4}$; $4x=-4$; $\boldsymbol{x=-1}$

24. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $\mathbf{2+3x}<x+1 \ \to\ 2+3x-x<1 \ \to\ 2+2x<1 \ \to\ 2x<-1 \ \to\ x<-\frac{1}{2}$

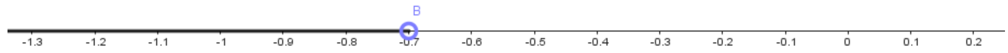
b) $\mathbf{5+2x}<7\boldsymbol{x}+\mathbf{4} \ \to\ 5<7x+4-2x \ \to\ 5<5x+4 \ \to\ 5-4<5x \ \to\ 1<5x \ \to\ x>\frac{1}{5}$

c) $\mathbf{6+5x}<6\boldsymbol{x}+\mathbf{4} \ \to\ 6<6x+4-5x \ \to\ 6<x+4 \ \to\ 6-4<x \ \to\ 2<x \ \to\ x>2$

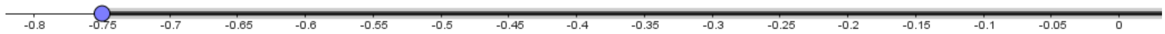
d) $\mathbf{4+8x}<2\boldsymbol{x}+\mathbf{9} \ \to\ 4+8x-2x<9 \ \to\ 4+6x<9 \ \to\ 6x<9-4 \ \to\ 6x<5 \ \to\ x<\frac{5}{6}$

25. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $\mathbf{3(2+3x) < -(x+1)} \;\rightarrow\; 6+9x < -x-1 \;\rightarrow\; 10x < -1-6 \;\rightarrow\; x < -\frac{7}{10}$



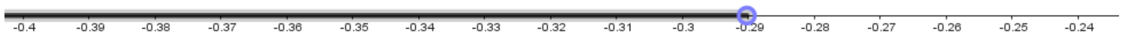
b) $\mathbf{5(1+2x) \leq 2(7x+4)} \;\rightarrow\; 5+10x \leq 14x+8 \;\rightarrow\; 5-8 \leq 14x-10x \;\rightarrow\; -3 \leq 4x \;\rightarrow$
$-\frac{3}{4} \leq x \;\rightarrow\; x \geq -\frac{3}{4}$



c) $\mathbf{2(6+5x)+3(x-1) > 2(6x+4)} \;\rightarrow 12+10x+3x-3 > 12x+8 \;\rightarrow$
$9+13x > 12x+8 \;\rightarrow 13x-12x > 8-9 \;\rightarrow\; x > -1$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

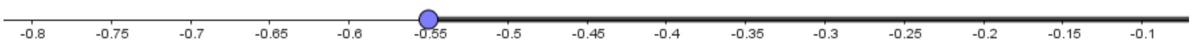
a) $\mathbf{3+4x < \frac{x}{2}+2} \;\rightarrow\; 2(3+4x) < 2\left(\frac{x}{2}\right)+2\cdot 2 \;\rightarrow\; 6+8x < x+4 \;\rightarrow\; 6+8x-x < 4 \rightarrow$
$6+7x < 4 \;\rightarrow\; 7x < 4-6 \;\rightarrow\; 7x < -2 \;\rightarrow\; x < -\frac{2}{7} \approx -029$



b) $\mathbf{4+\frac{4x}{3} \leq \frac{7x}{2}+5} \;\rightarrow\; 6\left(4+\frac{4x}{3}\right) \leq\; 6\left(\frac{7x}{2}+5\right) \;\rightarrow 6\cdot 4+6\cdot\;\frac{4x}{3} \leq 6\cdot\;\frac{7x}{2}+6\cdot 5 \;\rightarrow$
$24+8x \leq 21x+30 \rightarrow\; 24 \leq 21x+30-8x \;\rightarrow\; 24 \leq 13x+30 \;\rightarrow\; 24-30 \leq 13x \;\rightarrow$
$-6 \leq 13x \;\rightarrow\; \;\rightarrow\; -\frac{6}{13} \leq x \;\rightarrow\; x \geq -\frac{6}{13} \approx -0{,}46$

c) $\mathbf{\frac{(5+7x)}{3} > 8x+2} \;\rightarrow\; 3\cdot\frac{5+7x}{3} > 3\cdot(8x+2) \;\rightarrow\; 5+7x > 24x+6 \;\rightarrow\; 5+7x-24x > 6 \;\rightarrow$
$5-17x > 6 \;\rightarrow -17x > 6-5 \;\rightarrow -17x > 1 \;\rightarrow x < -\frac{1}{17} \approx -0{,}06$

d) $\mathbf{(4+8x)5+3 \geq \frac{2x+9}{7}} \;\rightarrow\; 20+40x+3 \geq \frac{2x+9}{7} \rightarrow\; 7(23+40x) \geq 2x+9 \;\rightarrow$
$161+280x-2x \geq 9 \;\rightarrow 278x \geq 9-161 \;\rightarrow\; 278x \geq -152 \;\rightarrow\; x \geq \frac{-152}{278} \;\rightarrow\; x \geq -\frac{76}{139} \approx -0{,}55$



27. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $\mathbf{[1,\infty)} \;\rightarrow\; 2x-3 \geq -1$

b) $\mathbf{(-\infty,5)} \;\rightarrow\; 2x-7 < 3$

c) $(\mathbf{2},\infty) \rightarrow\ 3x - 1\ > 5$

d) $(-\infty, \mathbf{6})\ \rightarrow\ 3x - 8 < 10$

28. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{3x-5}}\ \rightarrow\ 3x - 5 \geq 0\ \rightarrow\ 3x \geq 5\ \rightarrow\ x \geq \frac{5}{3}$

b) $\sqrt{-\mathbf{x}-\mathbf{12}} \rightarrow\ -x - 12 \geq 0\ \rightarrow\ -x \geq 12\ \rightarrow\ x \leq -12$

c) $\sqrt{\mathbf{3-5x}} \rightarrow\ 3 - 5x \geq 0\ \rightarrow\ -5x \geq -3\ \rightarrow\ x \leq \frac{3}{5}$

d) $\sqrt{-\mathbf{3x}+\mathbf{12}}\ \rightarrow\ -3x + 12 \geq 0\ \rightarrow\ -3x \geq -12\ \rightarrow\ x \leq \frac{12}{3} \rightarrow\ x \leq 4$

29. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{3xy + y = 5} \\ \mathbf{5x - 4y = 2} \end{cases}$ No es un sistema de ecuaciones lineales

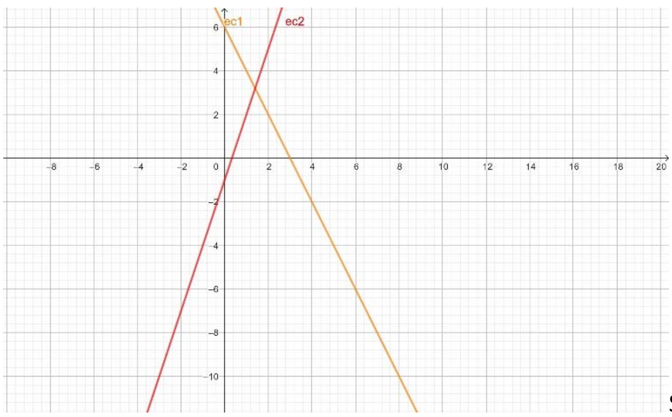
b) $\begin{cases} \mathbf{6y - 4x = 3} \\ \mathbf{x - 7y = -8} \end{cases}$ Sí es un sistema de ecuaciones lineales

c) $\begin{cases} \mathbf{5x - 3 = 2y} \\ \mathbf{4x + 6y = 3} \end{cases}$ Sí es un sistema de ecuaciones lineales

d) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y = 2} \\ \mathbf{3x + y^2 = 4} \end{cases}$ No es un sistema de ecuaciones lineales

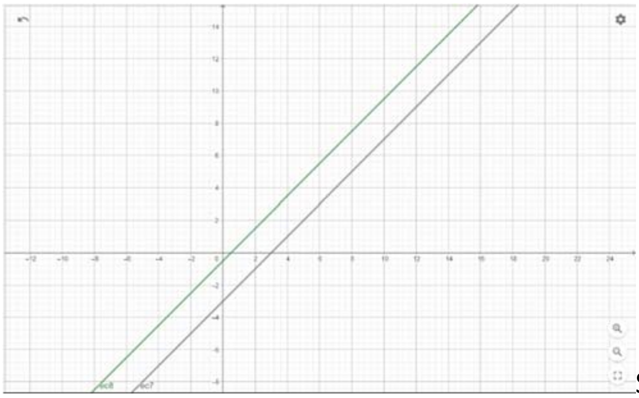
30. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{2x + y = 6} \\ \mathbf{-3x + y = -1} \end{matrix}\right\}$



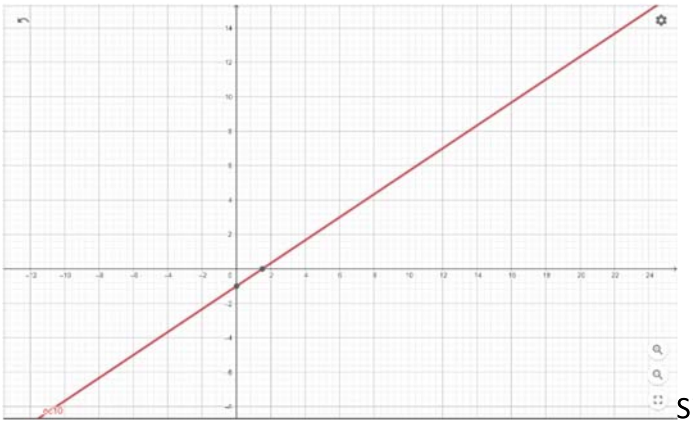
Sistema compatible determinado

b) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{x - y = 3} \\ \mathbf{-2y + 2x = 1} \end{matrix}\right\}$



Sistema Incompatible

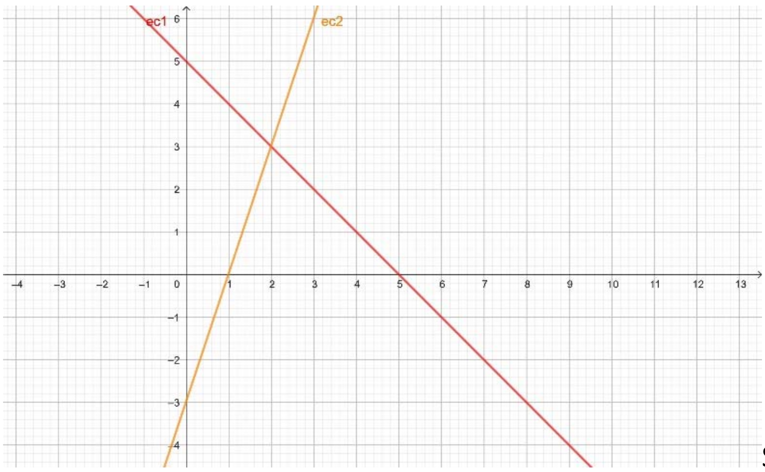
c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$



Sistema compatible indeterminado

31. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$

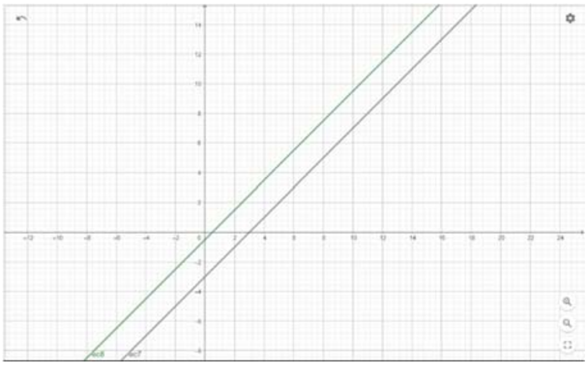


Sistema compatible determinado

Solución: x = 2, y = 3

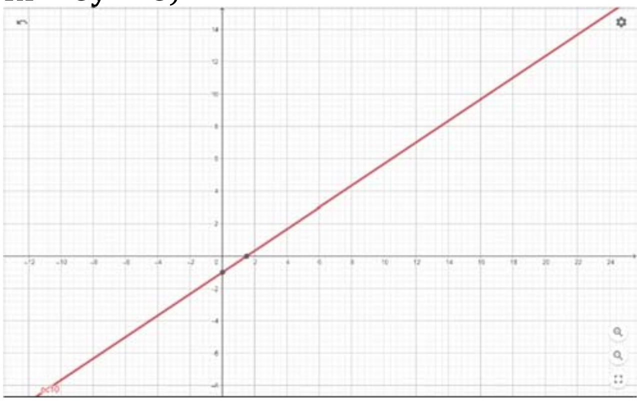
b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Sistema Incompatible

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$



Sistema compatible indeterminado

32. Dado el sistema de ecuaciones. Inventa un enunciado que resuelva dicho sistema:

$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$

La suma de las edades de dos niñas es 5 y la resta del triple de la edad de una menos el doble de la otra también 5. ¿Calcula las edades de cada una de las niñas.

33. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ despejamos x en la 2ª ecuación, $x = 2 + 2y$

sustituimos en la 1ª $3\,(2 + 2y) + 4y = 26 \ \rightarrow\ 6 + 6y + 4y = 26 \ \rightarrow\ 10y = 20 \ \rightarrow\ \mathbf{y = 2}$

$$x = 2 + 2(2) \ \rightarrow\ \mathbf{x = 6}$$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ despejamos y en la 2ª ecuación, $y = 24 - 3x$

sustituimos en la 1ª $2x + 4\,(24 - 3x) = 26 \ \rightarrow\ 2x + 96 - 12x = 26 \ \rightarrow\ -10x = -60 \ \rightarrow\ \mathbf{x = 6}$

$$y = 24 - 3(6) \ \rightarrow\ \mathbf{y = 6}$$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$ despejamos y en la 2ª ecuación, $y = \frac{14-2x}{3}$

sustituimos en la 1ª $3x - 2\left(\frac{14-2x}{3}\right) = 8 \ \rightarrow\ 3x - \frac{28-4x}{3} = 8 \ \rightarrow\ 9x - 28 + 4x = 24 \ \rightarrow 13x = 52 \ \rightarrow$

$$\boldsymbol{x} = \frac{52}{13} = \mathbf{4} \quad ; \quad y = \frac{14 - 2\,(4)}{3} \quad ; \ \boldsymbol{y = 2}$$

34. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 18} \\ \mathbf{-2x + 3y = -1} \end{cases}$

$y = 18 - 3x$; $y = \frac{-1+2x}{3}$ $\rightarrow$ $18 - 3x = \frac{-1+2x}{3}$ $\rightarrow$ $3(18 - 3x) = -1 + 2x$ $\rightarrow$

$54 - 9x = -1 + 2x \rightarrow 55 = 11x \rightarrow x = \frac{55}{11} \rightarrow \boldsymbol{x = 5}$; $y = 18 - 3(5) \rightarrow \boldsymbol{y = 3}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = -1} \\ \mathbf{4x + 2y = 26} \end{cases}$

$$x = \frac{-1+3y}{2} \; ; \; x = \frac{26-2y}{4} \rightarrow \frac{-1+3y}{2} = \frac{26-2y}{4} \rightarrow 2(-1+3y) = 26 - 2y \rightarrow$$

$\rightarrow -2 + 6y = 26 - 2y \rightarrow 6y + 2y = 26 + 2 \rightarrow 8y = 28 \rightarrow y = \frac{28}{8} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{7}{2}}$;

; $x_1 = \frac{-1+3\frac{7}{2}}{2} = \frac{-1+\frac{21}{2}}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{19}{4}}$

c) $\begin{cases} \mathbf{7x - 4y = 10} \\ \mathbf{3x + 2y = 8} \end{cases}$

$x = \frac{10+4y}{7}$; $x = \frac{8-2y}{3}$ $\rightarrow$ $\frac{10+4y}{7} = \frac{8-2y}{3}$ $\rightarrow 3(10 + 4y) = 7(8 - 2y) \rightarrow 30 + 12y = 56 - 14y \rightarrow$

$14y + 12y = 56 - 30 \rightarrow 26y = 26 \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$; $x = \frac{10+4}{7} \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

35. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 8} \\ \mathbf{2x - 5y = -23} \end{cases}$ $\quad 5 \cdot 1^{\underline{a}}\, ec \quad$ $\begin{cases} 15x + 5y = 40 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$

$(15x + 5y) + (2x - 5y) = 40 - 23 \rightarrow 17x = 17 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$;

$y = 3(1) + y = 8 \rightarrow 3 + y = 8 \rightarrow \boldsymbol{y = 5}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ $\quad -3 \cdot 2^{\underline{a}}\, ec \quad$ $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ -12x - 3y = -33 \end{cases}$

$(-12x - 3y) + (5x + 3y) = -33 + 19 \rightarrow -7x = -14 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$;

$y = 4(2) + y = 11 \rightarrow 8 + y = 11 \rightarrow \boldsymbol{y = 3}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 0} \\ \mathbf{3x - 2y = 13} \end{cases}$ $\quad 3 \cdot 1^{\underline{a}}\, ec; \quad -2 \cdot 2^{\underline{a}}\, ec \quad$ $\begin{cases} 6x + 9y = 0 \\ -6x + 4y = -26 \end{cases}$

$(6x + 9y) + (-6x + 4y) = -26 \rightarrow 13y = -26 \rightarrow \boldsymbol{y = -2}$;

$2x + 3(-2) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow \rightarrow 2x = 6 \rightarrow \boldsymbol{x = 3}$

36. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 5y^2 = -2} \\ \mathbf{2x^2 - 3y^2 = -1} \end{cases}$ $\quad 2 \cdot 1^{\underline{a}}\, ec\,; \quad -3 \cdot 2^{\underline{a}}\, ec \quad$ $\begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = -4 \\ -6x^2 + 9y^2 = 3 \end{cases}$

$(6x^2 - 10y^2) + (-6x^2 + 9y^2) = -4 + 3 \rightarrow -10y^2 + 9y^2 = -1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{y = \pm 1}$

$3x^2 - 5(1)^2 = -2 \rightarrow 3x^2 - 5 = -2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{x} = \sqrt{1} = \boldsymbol{\pm 1}$

b) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 + y^2 = 3} \\ \mathbf{5x^2 - 2y^2 = 5} \end{cases}$

$y^2 = 3 - 3x^2 \rightarrow 5x^2 - 2(3 - 3x^2) = 5 \rightarrow 5x^2 - 6 + 6x^2 = 5 \rightarrow 11x^2 = 11 \rightarrow$

$\boldsymbol{x} = \sqrt{1} = \boldsymbol{\pm 1} \rightarrow y^2 = 3 - 3(1)^2 \rightarrow \boldsymbol{y = 0}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{xy = \frac{1}{2}} \\ \mathbf{x + y = \frac{3}{2}} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} y = \frac{1}{2x} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{Bmatrix}$

$x + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2} \to 2x^2 + 1 = 3x \to 2x^2 - 3x + 1 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\,(2)}}{2(2)} = \frac{3 \pm 1}{4} \to$

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$; $y_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

d) $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x^2 - 4y = -3} \\ \mathbf{xy = 1} \end{Bmatrix}$

$x^2 - 4y = -3$; $y = \frac{x^2+3}{4}$; sustituimos en la 2ª $xy = 1$; $x \cdot \frac{x^2+3}{4} = 1$

$x^3 + 3x^2 = 4$; $x = 1$, *resto no reales*, sustituimos $y = \frac{x^2+3}{4}$; $y = \frac{1^2+3}{4} = 1$ Solución: (1, 1)

e) $\begin{Bmatrix} \mathbf{x + y - \frac{y}{x} = 1} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x = 2 - y \end{Bmatrix}$ $x + y - \frac{y}{x} = 1 \to x^2 + xy - y = x$

$x = 2 - y$, sustituimos en la 1ª ecuación

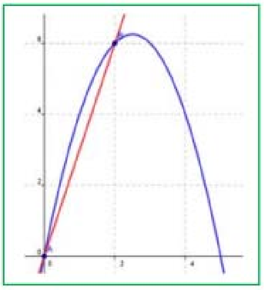
$(2-y)^2 + (2-y)y - y - (2-y) = 0 \to (y^2 + 4 - 4y) + 2y - y^2 - y - 2 + y = 0 \to$

$-2y + 2 = 0$; $\mathbf{y = 1}$; $x = 2 - y$; $x = 2 - 1 \to \mathbf{x = 1}$

37. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: y = 3x. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

$y = 3x \to -x^2 + 5x = 3x \to -x^2 + 5x - 3x = 0 \to x^2 - 2x = 0 \to$

$\to x(x-2)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y = 3x \to y_1 = 0$; $y = 3(2) \to y_2 = 6$

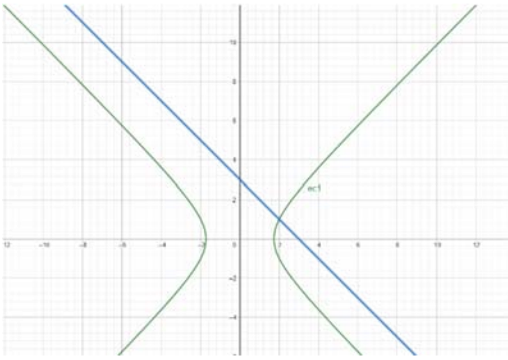


38. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{x^2 - y^2 = 3} \\ \mathbf{x + y = 3} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x^2 - y^2 = 3 \\ x = 3 - y \end{Bmatrix}$

$(3-y)^2 - y^2 = 3 \to y^2 + 9 - 6y - y^2 = 3 \to -6y = -9 + 3 \to -6y = -6 \to$

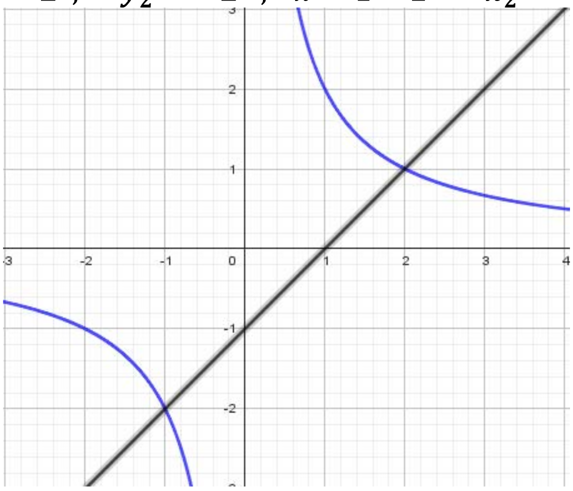
$\mathbf{y = 1}$; $x = 3 - 1 \to \mathbf{x = 2}$



b) $\begin{cases} \boldsymbol{x-y=1} \\ \boldsymbol{xy=2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+y \\ xy=2 \end{cases}$

$(1+y)\,y=2 \;\rightarrow\; y^2+y-2=0 \;\rightarrow\; y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm3}{2} \;\rightarrow\; y_1=1\;;\; y_2=-2$

$\boldsymbol{y_1=1}$; $x=1+1 \rightarrow \boldsymbol{x_1=2}$; $\boldsymbol{y_2=-2}$; $x=1-2 \rightarrow \boldsymbol{x_2=-1}$

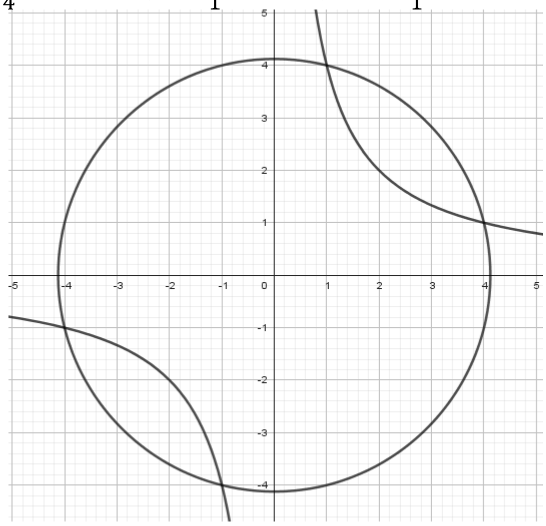


c) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2=17} \\ \boldsymbol{xy=4} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$

$x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=-17 \;\rightarrow\; x^2+\frac{16}{x^2}-17=0 \;\rightarrow\; x^4+16-17x^2=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow\; t^2-17t+16=0$

$\rightarrow t_1=16;\;\; t_2=1\;;x_1=\pm\sqrt{16}=\;\pm4;\;\; x_2=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$y=\frac{4}{4}=1 \;\rightarrow\; y_1=1\;;\; y=-\frac{4}{4}=-1 \qquad y=\frac{4}{1}=4\;\;;\; y=-\frac{4}{1}=-4$

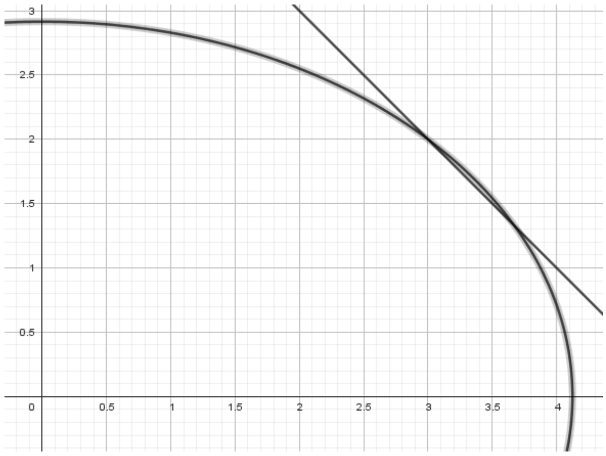


d) $\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2y^2=17} \\ \boldsymbol{x+y=5} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x=5-y \end{cases}$

$(5-y)^2+2y^2=17 \;\rightarrow\; (25+y^2-10y)+2y-17=0 \;\rightarrow\; 3y^2-10y+8=0$

$y=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\,(3)(8)}}{2\,3}=\frac{10\pm2}{6} \;\rightarrow\; y_1=2\;;\; y_2=\frac{4}{3}$

$\mathbf{y_1=2}$; $x=5-2 \rightarrow \mathbf{x_1=3}$; $\mathbf{y_2=\frac{4}{3}}$; $x=5-\frac{4}{3} \rightarrow \mathbf{x_2=\frac{11}{3}}$

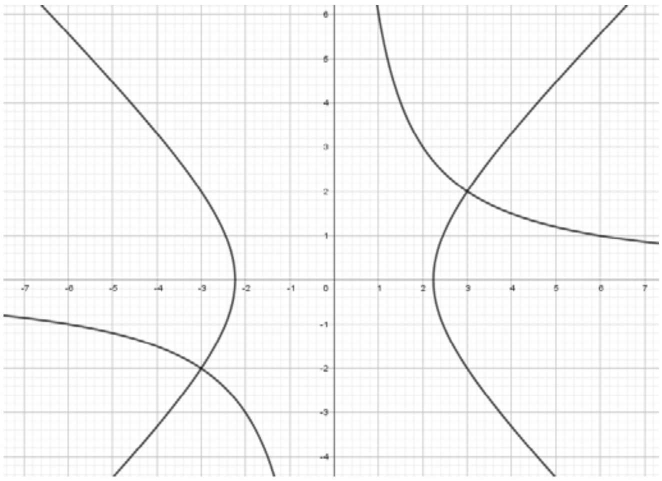


e) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{x^2 - y^2 = 5} \\ \mathbf{xy = 6} \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{matrix}\right\}$

$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 - 5 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} - 5 = 0 \rightarrow x^4 - 36 - 5x^2 = 0 \rightarrow t^2 - 5t - 36 = 0$

$t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-36)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{180}}{2} \rightarrow t_1 = 9$; $t_2 = -4$; $t_1 = 9$; $x^2 = 9$;

$\boldsymbol{x_1 = 3}$; $\boldsymbol{x_2 = -3}$ $y = \frac{6}{3} \rightarrow \boldsymbol{y_1 = 2}$; $y_2 = -\frac{6}{3}$; $\boldsymbol{y_2 = -2}$;



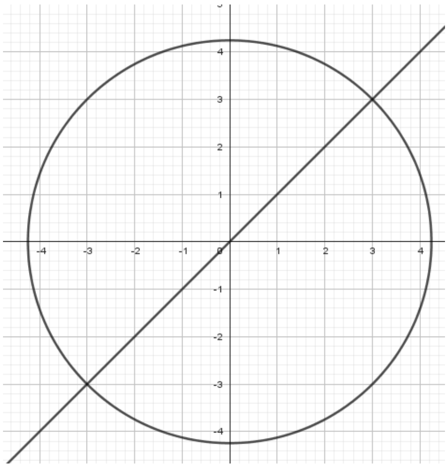
f) $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x^2 + y^2 = 18} \\ \boldsymbol{y = x} \end{matrix}\right\}$

$x^2 + x^2 = 18 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow$

$\mathbf{x_1 = 3}$; $\mathbf{x_2 = -3}$; $\mathbf{y_1 = 3}$; $\mathbf{y_2 = -3}$

$x^2 + x^2 = 18 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow$

$\mathbf{x_1 = 3}$; $\mathbf{x_2 = -3}$; $\mathbf{y_1 = 3}$; $\mathbf{y_2 = -3}$



39. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x+y-3z=-2} \\ \mathbf{x+2y+z=0} \\ \mathbf{3x+4y-2z=-3} \end{cases}$ *Cambiamos la Ec1 y la Ec2* $\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ 2x+y-3z=-2 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = -2Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = -3Ec_1 + Ec_3 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ -3y-5z=-2 \\ -2y-5z=-3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} E''c_1 = E'c_1 \\ E''c_2 = E'c_2 \\ E''c_3 = -E'c_2 + E'c_3 \end{array}$ $\left\{\begin{array}{c} x+2y+z=0 \\ -3y-5z=-2 \\ y=-1 \end{array}\right\}$ $\boldsymbol{y=-1}$; $\quad -3y-5z=-2$

$-3(-1)-5z=-2$; $3-5z=-2$; $-5z=-5$; $\mathbf{z=1}$;

$x+2y+z=0$; $x+2(-1)+1=0$; $\mathbf{x=1}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x+y+2z=6} \\ \mathbf{x+2y+2z=4} \\ \mathbf{3x-2y-3z=3} \end{cases}$ *Cambiamos la Ec1 y la Ec2* $\left\{\begin{array}{c} x+2y+2z=4 \\ 2x+y+2z=6 \\ 3x-2y-3z=3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = -2Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = -3Ec_1 + Ec_3 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{c} x+2y+2z=4 \\ -3y-2z=-2 \\ -8y-9z=-9 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} E''c_1 = E'c_1 \\ E''c_2 = E'c_2 \\ E''c_3 = -8E'c_2 + 3E'c_3 \end{array}$ $\left\{\begin{array}{c} x+2y+2z=4 \\ -3y-2z=-2 \\ -11z=-11 \end{array}\right\}$ $\boldsymbol{z=1}$

$-3y-2z=-2$; $-3y-2\cdot 1=-2$; $-3y-2=-2$; $-3y=0$; $\boldsymbol{y=0}$

$x+2y+2z=4$; $x+2\cdot 0+2\cdot 1=4$; $x+0+2=4$ **;** $\boldsymbol{x=2}$

c) $\begin{cases} \mathbf{3x+2y-2z=5} \\ \mathbf{x-2y+2z=-1} \\ \mathbf{x-2y-3z=-6} \end{cases}$ *Pasamos la 1ª columna a la 3ª* $\left\{\begin{array}{c} 2y-2z+3x=5 \\ -2y+2z+x=-1 \\ -2y-3z+x=-6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = Ec_1 + Ec_3 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{r} 2y-2z+3x=5 \\ 4x=4 \\ -5z+4x=-1 \end{array}\right\}$ $\boldsymbol{x=1}$;

$-5z+4x=-1$; $-5z+4(1)=-1 \rightarrow -5z+4=-1 \rightarrow -5z=-5 \rightarrow \boldsymbol{z=1}$

$2y-2z+3x=5$; $2y-2(1)+3(1)=5 \rightarrow 2y-2+3=5 \rightarrow 2y=4 \rightarrow \boldsymbol{y=2}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

40. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

Sea x el número, $4x = x^2 - 5 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,(-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \rightarrow$
$x_1 = 5\,;\; x_2 = -1$ **Solución: El número es 5 o -1.**

41. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.
Sea x el número de alumnos, (x-1) número de cartas que escribe cada alumno $x\,(x - 1) = 380 \rightarrow$
$x^2 - x - 380 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\,(-380)}}{2} = \frac{1 \pm 39}{2} \rightarrow x_1 = 20\,;\; x_2 = -19$
Solución: Hay 20 alumnos en la clase

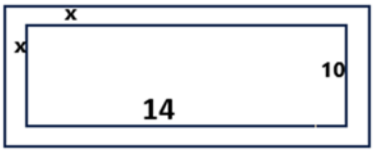
42. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

$$(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 365 \rightarrow n^2 + 1 - 2n + n^2 + n^2 + 1 + 2n = 365$$

$$3n^2 = 362 \rightarrow n^2 = \frac{363}{3} \rightarrow n = \sqrt{121} \rightarrow n = 11$$

Solución: 11, 12, 13

43. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm²



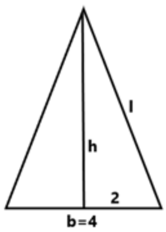
$$(14 + 2x) \cdot (10 + 2x) = 252\,;\; 4x^2 + 48x + 140 - 252 = 0\;;\; 4x^2 + 48x - 112 = 0$$

$x^2 + 12x - 28 = 0;\;\; x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-28)}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2} \rightarrow x_1 = 2\;;\; x_2 = -14$
Solución: El ancho del margen es de 2 cm

44. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Sea x el número, $3x^2 + 2x = 85 \rightarrow 3x^2 + 2x - 85 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(3)(-85)}}{2\;3} = \frac{-2 \pm 32}{6} \rightarrow$
$x_1 = 5\;;\; x_2 = -\frac{17}{3}$
Solución: El número es: 5 o $-\frac{17}{3}$

45. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.



Lado desigual del triángulo: $l = \frac{20 - 4}{2} = 8\text{ cm}$

$h = \sqrt{8^2 - 2^2} \rightarrow h = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} = 7,\ 75\text{ cm}$

Área del triángulo: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15} = 15{,}19\text{ cm}^2$

46. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm² ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Longitud de un lado de la hoja es x cm, cuando se dobla por la mitad, este tiene una longitud x y una anchura $\frac{x}{2}$.

$\text{Área} = \text{Longitud} \cdot \text{Anchura}$ En este caso, el área es de 8cm^2

$$8 = x \cdot \frac{x}{2} \rightarrow 16 = x^2 \rightarrow x = 4$$

La longitud original de un lado de la hoja es de 4cm.La longitud es de 4cm y su anchura es de $\frac{4}{2}$ = 2cm

El perímetro de un rectángulo se calcula sumando la longitud de todos los lados:

$$\text{Perímetro} = 2(\text{longitud} + \text{Anchura}) \rightarrow \text{Longitud} = 2(4+2) = 2 \cdot 6 = 12\text{cm}$$

47. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.

Edad del hijo x años. $(x-5)(x-3) = 35 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 35 \rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-20)}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2} \; ; \; x_1 = 10 \; ; \; x_2 = -2$$

Solución: La edad del hijo es de 10 años

48. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m², sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

$$\begin{Bmatrix} xy = 21 \\ x - y = 4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} xy = 21 \\ x = 4 + y \end{Bmatrix} \qquad (4+y)\,y = 21 \rightarrow 4y + y^2 - 21 = 0 \rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(21)}}{2\,1} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

$$y_1 = 3 \; ; \; y_2 = -7 \quad ; \quad x = 4 + 3 \rightarrow x = 7$$

Solución: Las dimensiones del rectángulo son 7 metros y 3 metros

49. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

$$\begin{Bmatrix} y = z - 4 \\ y = x + 4 \\ y^2 + x^2 = z^2 \end{Bmatrix}$$ y, x catetos; z hipotenusa.

De la 1ª y 2ª ecuación, $z - 4 = x + 4 \rightarrow z = x + 8$

$$(x+4)^2 + x^2 = (x+8)^2 \rightarrow x^2 + 8x + 16 + x^2 = x^2 + 16x + 64 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} \rightarrow x_1 = \mathbf{12} \; ; \; x_2 = -4$$

$$y = 20 - 4 \rightarrow y = \mathbf{16} \qquad \rightarrow z = 12 + 8 \rightarrow \boldsymbol{z} = \mathbf{20}$$

50. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

$$x\,(x+2) = 224 \rightarrow x^2 + 2x - 224 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(-224)}}{2} = \frac{-2 \pm 30}{2} \rightarrow x_1 = 14 \; ; \; x_2 = 16$$

Solución: Los dos números pares consecutivos son 14 y 16

51. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

$$(x+4)^2 - x^2 - (x+2)^2 = 15 \rightarrow x^2 + 8x + 16 - x^2 - x^2 - 4x - 4 = 15 \rightarrow -x^2 + 4x + 12 = 15$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} \rightarrow x_1 = 3 \; ; \; x_2 = -1$$

Solución: Los números impares consecutivos son: 3 ; 5 ; 7

52. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?

$\begin{Bmatrix} x+y=65 \\ y-\frac{x}{2}=35 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x+y=65 \\ y=35+\frac{x}{2} \end{Bmatrix}$ x edad de maría, y edad de Alfonso

Sustituyendo en la 1ª ecuación $x+\left(35+\frac{x}{2}\right)=65 \rightarrow 2x+(70+x)=130 \rightarrow 3x+70=130 \rightarrow$

$3x=60 \rightarrow x=20$ $y=35+\frac{20}{2} \rightarrow y=45$

María 20 años, Alfonso 45 años.

53. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

$\begin{Bmatrix} x+y=32 \\ y+7=x+7+20 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x=32-y \\ y+7=x+27 \end{Bmatrix}$ x edad de Mariló, y edad de Javier

$y+7=(32-y)+27 \rightarrow y+7=59-y \rightarrow 2y=52 \rightarrow y=26 \; ; \; x=32-26 \rightarrow x=6$

Solución: La edad de Mariló es 6 años y la de Javier 26

54. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

$\begin{Bmatrix} x-y=24 \\ x+y=104 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x=24+y \\ x+y=104 \end{Bmatrix}$

$$(24+y)+y=104 \rightarrow 24+2y=104 \rightarrow 2y=60 \rightarrow y=30 \; ; \; x=24+30 \rightarrow x=54$$

Solución: Los números son 54 y 30

55. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

$\begin{Bmatrix} x+y=42 \\ x+2y=62 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x=42-y \\ x+2y=62 \end{Bmatrix}$

$$(42-y)+2y=62 \rightarrow 42+y=62 \rightarrow y=20 \; ; \; x=42-20 \rightarrow x=22$$

Solución: hay 22 habitaciones individuales y 20 habitaciones dobles

56. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

$$x^2+(14-x)^2=10^2 \rightarrow x^2+(x^2+196-28x)-100=0 \rightarrow 2x^2-28x+96=0$$

$$x^2-14x+48=0x=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\,(48)}}{2}=\frac{14\pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 8 \; ; \; x_2=6$$

Área del triángulo: $\frac{8+6}{2} = \mathbf{7\ cm^2}$

57. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

$\begin{Bmatrix} x+y=19 \\ xy=90 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} x=19-y \\ xy=90 \end{Bmatrix}$ *suma y producto de las soluciones de una ecuación de 2º grado,*

$$y^2-19y+90=0 \rightarrow y=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\,(90)}}{2}=\frac{19\pm 1}{2} x_1=10 \; ; \; x_2=9$$

Solución: Las calificaciones que obtuvo son 10 y 9

58. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

Número es x y z $\left\{\begin{matrix} x+y+z=12 \\ x^2+y^2+z^2=61 \\ y=x+1 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x+y+z=12 \\ y=x+1 \\ x+x+1+z=12 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} y=x+1 \\ x^2+y^2+z^2=61 \\ z=11-2x \end{matrix}\right\}$

$$x^2+(x+1)^2+(11-2x)^2=61 \rightarrow x^2+x^2+2x+1+121+4x^2-44x=61$$
$$\rightarrow 6x^2-42x+61=0$$
$$6x^2-42x+61=0 \rightarrow x_1 = 5 \; ; \; x_2 = 2$$

$Si\; x=5 \;\; ; \;\; z=11-2(5) \rightarrow z=1 \; ; \;\; y=5+1 \rightarrow y=6$ Número 561

$Si\; x=2 \;\; ; \;\; z=11-2(2) \rightarrow z=7 \; ; \;\; y=2+1 \rightarrow y=3$ Número 237

59. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:
El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.
El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.
El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.
Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

$\left\{\begin{matrix} 40x+30y+20z=34 \\ 50x+30y+40z=46 \\ 90x+50y+40z=67 \end{matrix}\right\}$ $Dividiendo\; entre\; 2, las\; ec\; 1\; y\; 2, y\; cambiando\; de\; orden\; las\; incógnitas$

$\left\{\begin{matrix} 10z+20x+15y=17 \\ 20z+25x+15y=23 \\ 40z+40x+50y=67 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} E'c_1=Ec_1 \\ E'c_2=-2Ec_1+Ec_2 \\ E'c_3=-4Ec_1+Ec_3 \end{matrix}$ $\left\{\begin{matrix} 10z+20x+15y=17 \\ -15x-15y=-11 \\ 10x-10y=-1 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} E''c_1=E'c_1 \\ E''c_2=E'c_2 \\ E''c_3=2E'c_2+3E'c_3 \end{matrix}$

$\left\{\begin{matrix} 10z+20x+15y=17 \\ -15x-15y=-11 \\ -60y=-25 \end{matrix}\right\}$ $\boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}$; $\quad -15x-15y=-11\;, \quad -15x-15\left(\frac{5}{12}\right)=-11 \rightarrow$

$-15x-\frac{75}{12}=-11\,;-180x-75=-132\,;\;180x=132-75\;;\;180x=57\,;\;x=\frac{57}{180}\;;\;\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{60}}$

$10z+20x+15y=17 \;\; ; \;\; 10z+20\left(\frac{19}{60}\right)+15\left(\frac{5}{12}\right)=17 \rightarrow 10z+\frac{380}{60}+\frac{75}{12}=17 \rightarrow$

$60z+380+375=1020\;;\;\; 60z+755=1020 \rightarrow 60z=1020-755 \rightarrow 60z=265 \rightarrow \boldsymbol{z}=\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{12}}$

60. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

$\left\{\begin{matrix} x+y+z=200 \\ 2x+y+0{,}5z=300 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x=200-y-z \\ 2x+y+0{,}5z=300 \end{matrix}\right\}$

$2\,(200-y-z)+y+0{,}5z=300 \rightarrow 400-2y-2z+y+0{,}5z=300 \rightarrow -y=-100+1{,}5z$

$\boldsymbol{y=100-1{,}5z}$

$x=200-(100-1{,}5z)-z \rightarrow x=200-100+1{,}5z-z \rightarrow \boldsymbol{x=100+0{,}5z}$

$\boldsymbol{z=z}$

Hay infinitas soluciones.

Por ejemplo, que se haya vendido 100 kg de trigo, 100 kg de cebada y 0 kg de mijo.

61. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1.2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

$x\ los\ kg\ de\ harina\ de\ 2€,\qquad y\ los\ kg\ de\ harina\ de\ 1€\ \left\{\begin{matrix} \mathrm{x}+\mathrm{y}=300 \\ 2\cdot x+1\cdot y=300\cdot 1{,}2\end{matrix}\right\}$

$\mathrm{y}=300-\mathrm{x}\ \ ;\ \ 2\cdot x+300-x=300\cdot 1{,}2\ \ \boldsymbol{;x=60}\ \ ;\ \mathrm{y}=300-\mathrm{x}\ ;\mathbf{y}=300-60=\mathbf{240}$

60 kg de harina de 2€ y 240kg de harina de 1€

62. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

$\left\{\begin{matrix} \mathrm{x}+\mathrm{y}=30 \\ 2\mathrm{x}+5\mathrm{y}=120\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \mathrm{x}=30-\mathrm{y} \\ 2\mathrm{x}+5\mathrm{y}=120\end{matrix}\right\}$

$2(30-\mathrm{y})+5\mathrm{y}=120\ \rightarrow\ 60-2\mathrm{y}\ +\ 5\mathrm{y}=120\ \rightarrow\ 3\mathrm{y}=60\ \rightarrow\ \mathrm{y}=20\ ;\ \mathrm{x}=30-20\ \rightarrow\ \mathrm{x}=10$

Solución: hay 10 tipos del tipo A y 20 del tipo B

63. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

Sumamos las velocidades: $4+16=20\mathrm{km/h}$

Tiempo que se tarda: $\frac{15}{20}=\ 0{,}75\ \mathrm{horas}\ (45\ min)$ cada uno

Distancia a la que está de B: $0{,}75\cdot 16=\ 12\ \mathrm{km}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\mathbf{4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}}$ $\rightarrow 12-8x+\frac{30x-10}{7}=2x-\frac{1-9x}{7} \rightarrow$
$\rightarrow 7(12-8x)+(30x-10)=14x-1+9x \rightarrow 84-56x+30x-10=14x-1+9x \rightarrow$
$\rightarrow 74-26x=23x-1 \rightarrow 75=49x \rightarrow x=\frac{75}{49}$

b) $\mathbf{4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}}$ $\rightarrow 4-\left(3-10x+\frac{5}{6}\right)=3x-\frac{4-5x}{3} \rightarrow$
$4-\left(\frac{23}{6}-10x\right)=3x-\frac{4-5x}{3} \rightarrow 4-\frac{23}{6}+10x=3x-\frac{4-5x}{3} \rightarrow \frac{1}{6}+10x=3x-\frac{4-5x}{3} \rightarrow$
$\frac{1}{6}+10x=3x-\left(\frac{4}{3}-\frac{5x}{3}\right) \rightarrow 6\left(\frac{1}{6}+10x\right)=6\left(3x-\left(\frac{4}{3}-\frac{5x}{3}\right)\right) \rightarrow$
$1+60x=18x-8+10x \rightarrow 1+60x=28x-8 \rightarrow 32x=-9 \rightarrow x=-\frac{9}{32}$

c) $\mathbf{4(2x-5)=6(9-4x)}$ $\rightarrow 8x-20=54-24x \rightarrow 32x-20=54 \rightarrow 32x=74 \rightarrow$
$x=\frac{74}{32} \rightarrow x=\frac{37}{16}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{-3x^2-5x-2=0}$ $\rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(-3)(-2)}}{2(-3)}=\frac{5\pm1}{-6} \rightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=-\frac{2}{3}$

b) $\mathbf{2x(-3+x)=5}$ $\rightarrow 2x^2-6x=5 \rightarrow 2x^2-6x-5=0 \rightarrow$
$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4(2)(-5)}}{2\cdot2}=\frac{6\pm\sqrt{76}}{4} \rightarrow\rightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{19}}{2}\quad,\quad x_2=\frac{3-\sqrt{19}}{2}$

c) $\mathbf{3x^2=27x}$ $\rightarrow 3x^2-27x=0 \rightarrow x^2-9x=0 \rightarrow x(x-9)=0 \rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=9$

d) $5(3x+2)-4x(x+6)=3 \rightarrow 15x+10-4x^2-24x=3 \rightarrow$
$-4x^2+15x-24x+10=3 \rightarrow -4x^2-9x+7=0 \rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4(-4)(7)}}{2\,(-4)}=\frac{9\pm\sqrt{193}}{-8} \rightarrow$
$x_1=-\frac{9+\sqrt{193}}{8}\ ,\ x_2=-\frac{9+\sqrt{193}}{8}$

e) $\mathbf{4(x-9)+2x(2x-3)=6}$ $\rightarrow 4x-36+4x^2-6x=6 \rightarrow 4x^2-2x-42=0 \rightarrow$
$2x^2-x-21=0 \rightarrow\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4(2)(-21)}}{2(2)}=\frac{1\pm\sqrt{169}}{4}=\frac{1\pm13}{4} \rightarrow x_1=3{,}5\quad x_2=-3$

f) $\mathbf{10(2x^2-2)-5(3+2x)=-21}$ $\rightarrow 20x^2-20-15-10x=-21 \rightarrow$
$20x^2-10x-14=0 \rightarrow\rightarrow 10x^2-5x-7=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(10)(-7)}}{2(10)}=\frac{5\pm\sqrt{305}}{20} \rightarrow$
$x_1=\frac{5+\sqrt{305}}{20}\quad x_2=\frac{5-\sqrt{305}}{20}$

g) $\mathbf{4(x+5)(x-1)=-2x-4}$ $\rightarrow 4x^2+16x-20=-2x-4 \rightarrow 4x^2+18x-16=0 \rightarrow$
$\rightarrow x=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4(4)(-16)}}{2(4)}=\frac{-18\pm\sqrt{580}}{8} \rightarrow x_1=-\frac{9+\sqrt{145}}{4}\quad x_2=-\frac{9-\sqrt{145}}{4}$

h) $\mathbf{3x(5x+1)=99} \rightarrow 15x^2+3x=99 \rightarrow 15x^2+3x-99=0 \rightarrow 5x^2+x-33=0 \rightarrow$
$\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(5)(-33)}}{2(5)}=\frac{-1\pm\sqrt{661}}{10}=x_1=2{,}47 \quad x_2=-2{,}67$

i) $\mathbf{2(3x^2-4x+2)-2x(3x-2)=-5} \rightarrow 6x^2-8x+4-6x^2+4x=-5 \rightarrow$
$-4x+4=-5 \rightarrow -4x=-9 \rightarrow x=\frac{9}{4}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\mathbf{\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1} \rightarrow 2(x^2-1)-3(x+1)=6 \rightarrow 2x^2-2-3x-3=6 \rightarrow$
$2x^2-3x-11=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(2)(-11)}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{97}}{4} \rightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{97}}{4} \quad x_2=\frac{3-\sqrt{97}}{4}$

b) $\mathbf{\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2} \rightarrow x^2-3+x^2-4x+1=10 \rightarrow 2x^2-4x-12=0 \rightarrow$
$x^2-2x-6=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(-6)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2} \rightarrow x_1=1+\sqrt{7} \quad x_2=1-\sqrt{7}$

c) $\mathbf{\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2} \rightarrow 2(2x^2+3)+x+5=12 \rightarrow 4x^2+6+x+5=12 \rightarrow$
$4x^2+x-1 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(4)(-1)}}{2(4)}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{8} \rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{8} \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}$

d) $\mathbf{\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}} \rightarrow 2(1-x^2)+3(4x-1)=1 \rightarrow 2-2x^2+12x-3=1 \rightarrow$
$2x^2-12x+2=0 \rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4(2)(2)}}{2(2)}=\frac{12\pm\sqrt{128}}{4} \rightarrow x_1=\frac{12+\sqrt{128}}{4} \quad x_2=\frac{12-\sqrt{128}}{4}$

e) $\mathbf{\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5} \rightarrow 2(x^2-3)-(3x-7)=4(2x-5) \rightarrow 2x^2-6-3x+8=8x-20 \rightarrow$
$2x^2-11x+21=0 \rightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4(2)(21)}}{2(2)}=\frac{11\pm\sqrt{-47}}{4} \rightarrow No\ tiene\ soluciones\ reales$

f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2 \rightarrow 2(3x+2x^2)-(4x-7)=20 \rightarrow 6x+4x^2-4x+7=20 \rightarrow$
$4x^2+2x-13=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(4)(-13)}}{2(4)}=\frac{-2\pm\sqrt{212}}{8} \rightarrow x_1=\frac{-1+\sqrt{212}}{4} \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{212}}{4}$

4. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2-3x-10=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(-10)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm7}{2} \rightarrow x_1=5 \quad x_2=-2$
b) $x^2+3x-10=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-10)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-3\pm7}{2} \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-5$
c) $x^2+7x+10=0 \rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(10)}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-7\pm3}{2} \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=-5$
d) $x^2-7x+10=0 \rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(10)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm3}{2} \rightarrow x_1=2 \quad x_2=5$
e) $x(-1+x)=0 \rightarrow x_1=0 \quad -1+x=0 \rightarrow x_2=1$
f) $2x^2=50 \rightarrow x^2=\frac{50}{2} \rightarrow x=\sqrt{25}=\pm5$
g) $x^2-5x+6=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(6)}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \rightarrow x_1=3 \quad x_2=2$
h) $x^2-x-6=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4(-6)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2} \rightarrow x_1=3 \quad x_2=-2$

i) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -3$

5. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0$
b) $x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow (x-2)(x+5) = 0$
c) $x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow (x+2)(x+5) = 0$
d) $x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow (x-2)(x-5) = 0$
e) $x(-1+x) = 0 \rightarrow x(x-1) = 0$
f) $2x^2 = 50 \rightarrow (x+5)(x-5) = 0$
g) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x-2) = 0$
h) $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x+2) = 0$
i) $x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x+3) = 0$

6. Cuando el coeficiente b es par (b = 2B), puedes simplificar la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Utiliza esa expresión para resolver:

a)$\boldsymbol{x^2 - 10x + 24 = 0} \rightarrow \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 24}}{1} = 10 \pm \sqrt{76} \rightarrow x_1 = 10 + 2\sqrt{19} \rightarrow x_2 = 10 - 2\sqrt{19}$
b) $\mathbf{x^2 - 6x - 7 = 0} \rightarrow \mathrm{x} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - (1)(-7)}}{1} = 3 \pm \sqrt{16} \rightarrow \mathbf{x_1 = 7}\,; \mathbf{x_2 = -1}$
c) $\boldsymbol{x^2 + 4x - 5 = 0} \rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow \frac{-4 \pm 6}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1 \quad x_2 = -5}$

7. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a)$(x-3)(x-7) = 0\,; x - 3 = 0 \rightarrow x = 3\ ; x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$
b)$(x+2)(x-4) = 0\,; x + 2 = 0 \rightarrow x = -2\ ; x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
c) $(x-8)(x-4) = 0\,; x - 8 = 0 \rightarrow x = 8\ ; x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$
d) $(x-2)(x+5) = 0\,; x - 2 = 0 \rightarrow x = 2\ ; x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$
e) $(x+6)(x-3) = 0\,; x + 6 = 0 \rightarrow x = -6\ ; x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
f) $(x-5)(x+3) = 0\,; x - 5 = 0 \rightarrow x = 5\ ; x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

8. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $\boldsymbol{x^2 + 5x - 2 = 0} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2} \rightarrow x_1 = 0{,}4 \quad x_2 = -7{,}4$
$\Delta = 5^2 - 4(1)(-2) = 25 + 8 = 33\,;\ \textit{Dos soluciones reales}$

b)$\boldsymbol{5x^2 + 2x - 4 = 0} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-4)(5)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{10} \rightarrow x_1 = 0{,}7 \quad x_2 = -1{,}1$
$\Delta = 2^2 - 4(5)(-4) = 4 + 80 = 84;\ \textit{Dos soluciones reales}$

c)$\boldsymbol{2x^2 + 4x + 11 = 0} \rightarrow \textit{Sin soluciones reales}$
$\Delta = 4^2 - 4(2)(11) = 16 - 88 = -72$

d)$\boldsymbol{2x^2 - 3x + 8 = 0} \rightarrow \textit{Sin soluciones reales}$
$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(8) = 9 - 64 = -55$

e) $\mathbf{3x^2 - x - 5 = 0} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6} \rightarrow x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = -1{,}1$

$\Delta = 1^2 - 4(3)(-5) = 1 + 60 = 61$

f) $\mathbf{4x^2 + 2x - 7 = 0} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(4)(-7)}}{2(4)} = \frac{-2 \pm \sqrt{116}}{8} \rightarrow x_1 = 1{,}1 \quad x_2 = -1{,}6$

$\Delta = 2^2 - 4(4)(-7) = 4 + 112 = 116$

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. Ayuda: Utiliza el discriminante.

a) $\mathbf{x^2 + 4 = 0} \rightarrow 0^2 - 4\,(1)(4) = -16$

b) $\mathbf{x^2 + 9 = 0} \rightarrow 0^2 - 4\,(1)(9) = -36$

c) $\mathbf{x^2 + 16 = 0} \rightarrow 0^2 - 4\,(1)(16) = -64$

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

a) $\mathbf{x^2 - 4x + 4 = 0} \rightarrow 4^2 - 4\,(1)(4) = 0 \quad ; \quad (x-2)^2$

b) $\mathbf{3x^2 - 6x + 3 = 0} \rightarrow 6^2 - 4\,(3)(3) = 0 \quad ; \quad 3(x-1)^2$

c) $\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 0} \rightarrow 6^2 - 4\,(1)(9) = 0 \quad ; \quad (x-3)^2$

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

a) $\mathbf{(x-3)\cdot(x-2) = 0}$; $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\,(1)(6)}}{2\,1} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 3\ ;\ x_2 = 2$

b) $\mathbf{(x+1)\cdot(x-5) = 0}$; $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,(1)(-5)}}{2\,1} = \frac{4 \pm 6}{2} \rightarrow x_1 = 5\ ;\ x_2 = -1$

c) $\mathbf{(x+2)\cdot(x+4) = 0}$**;** $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\,(1)(8)}}{2\,1} = \frac{-6 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = -2\ ;\ x_2 = -4$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $\boldsymbol{x^5 - 37x^3 + 36x = 0} \rightarrow x\cdot(x^4 - 37x^2 + 36) = 0 \rightarrow x\cdot(x^4 - x^2 - 36x^2 + 36) = 0$

$\rightarrow x\cdot(x^2\cdot(x^2-1) - 36x^2 + 36) = 0 \rightarrow x\cdot\left(x^2\cdot(x^2-1) - 36(x^2-1)\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-36) = 0 \rightarrow x = 0;\ x^2 - 1 = 0; x^2 - 36 = 0;$

$\mathbf{x = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ x = -6,\ x = 6}$

b) $\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 8x = 0} \quad x\cdot(x^2 - 2x - 8) = 0 \rightarrow x\cdot(x^2 + 2x - 4x - 8) = 0 \rightarrow$

$x\cdot(x\cdot(x+2) - 4x - 8) = 0 \rightarrow x\cdot\left(x\cdot(x+2) - 4(x+2)\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x\cdot(x+2)\cdot(x-4) = 0 \rightarrow x = 0; x+2 = 0; x-4 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = -2,\ x = 0,\ x = 4}$

c) $\boldsymbol{2x^3 + 2x^2 - 12x = 0} \rightarrow 2x\cdot(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow 2x\cdot(x^2 + 3x - 2x - 6) = 0 \rightarrow$

$2x\cdot(x\cdot(x+3) - 2x - 6) = 0 \rightarrow 2x\cdot\left(x\cdot(x+3) - 2(x+3)\right) = 0 \quad 2x\cdot(x+3)\cdot(x-2) = 0$

$\rightarrow x\cdot(x+3)\cdot(x-2) = 0 \rightarrow x = 0; x+3 = 0; x-2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = -3,\ x = 0,\ x = 2}$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow$

$t_1 = 3 \quad t_2 = 2 \quad ; \quad x_1 = \pm\sqrt{2} \quad x_2 = \pm\sqrt{3}$

e) $2x^4 = 32x^2 - 96 \rightarrow x^4 - 16x^2 + 48 = 0 \rightarrow t^2 - 16t + 48 = 0 \rightarrow$

$t = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4(48)}}{2} = \ = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{16 \pm 8}{2} \rightarrow t_1 = 12 \quad t_2 = 4\,; \quad x_1 = \pm\sqrt{12} \quad x_2 = \sqrt{4} = \pm 2$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

f) $\boldsymbol{x(x-3)(2x+3)(3x-5)=0} \to x=0;\;\; x-3=0;\;\; 2x+3=0;\;\; 3x-5=0$ **=>**
$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2},\;\; x=0,\;\; x=-\frac{5}{3},\;\; x=3}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $\boldsymbol{x^8+81=82x^4} \to x^8-82x^4+81=0 \to t^2-82t+81=0 \to$
$t=\frac{82\pm\sqrt{81^2-4(81)}}{2}=\frac{82\pm\sqrt{6400}}{2} \to \frac{82\pm80}{2} \to t_1=81\;\; t_2=1 \to x_1=\sqrt{81}=\pm9\;\;\; x_2=\sqrt{1}=\;\pm1$

b) $\boldsymbol{x^4-24x^2+144=0} \to (x^2-12)^2=0 \to x^2-12=0 \to x^2-12=0 \to \boldsymbol{x=\pm2\sqrt{3}}$

c) $\boldsymbol{x^6-7x^3-8=0} \to t^2-7t-8=0 \to t=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(8)}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{7\pm9}{2} \to$
$t_1=8\;\; t_2=-1 \;\to\; \mathrm{x}=\pm\sqrt{8}$

d) $\boldsymbol{x^4+8x^2-9=0} \to t=x^2 \to t^2+8t-9 \to t=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1} \to t=-9\;y\;t=1 \to$
$x^2=-9; x^2=1 \to \boldsymbol{x=1, x=-1}$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\boldsymbol{2x+\frac{3}{x}=5} \to 2x^2+3=5x \to 2x^2-5x+3=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(2)(3)}}{2(2)}=\frac{5\pm1}{4} \to$
$x_1=\frac{3}{2}\;\;\; x_2=1$

b) $\boldsymbol{\frac{3}{5x}+\frac{1}{2x}=x} \to \frac{6}{10x}+\frac{5}{10x}=x \to x^2=\frac{11}{10} \to x=\pm\sqrt{\frac{11}{10}}$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{x-3}+2=\frac{5}{x-3}} \to 2=\frac{5}{x-3}-\frac{1}{x-3} \to 2=\frac{4}{x-3} \to 2(x-3)=4 \to 2x-6=4 \to$
$2x=10 \;\;\to x=5$

d) $\boldsymbol{\frac{2x}{3-2x}-5x=1} \to \frac{2x}{3-2x}=5x+1 \to 2x=(5x+1)(3-2x) \to$
$2x=15x-10x^2+3-2x \to 10x^2-13x+3=0 \to$
$x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4(10)(3)}}{2(10)}=\frac{13\pm\sqrt{49}}{20}=\frac{13\pm7}{20} \to x_1=1\;\;\; x_2=\frac{3}{10}$

e) $\boldsymbol{\frac{2}{x+1}=\frac{3(2x+1)}{x-1}+3} \to \frac{2}{x+1}-3=\frac{3(2x+1)}{x-1} \to 2(x\pm1)-3(x+1)=3(2x+1)(x+1) \to$
$2x-2-3x^2+3=6x^2+3x+3 \to 9x^2-5x+2=0 \to x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(9)(2)}}{2(9)} \to$
$\to \textit{No tiene soluciones reales}$

f) $\boldsymbol{\frac{2x-3}{x+1}-\frac{4+5x}{x}=7} \to \frac{(2x-3)x-(4+5x)(x+1)}{x(x+1)}=7 \to (2x-3)x-(4+5x)(x+1)=7x(x+1) \to$
$\to 2x^2-3x-4x^2-5x-4=7x^2+7x \to 13x^2+15x+4=0 \to$
$x=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4(13)(4)}}{2(13)}= \;=\frac{-15\pm\sqrt{17}}{26} \to x_1=\;-0{,}41\;\;\; x_2=\;-0{,}73$

g) $\boldsymbol{\frac{3x-2}{x+1}-\frac{2+3x}{x-1}=4} \to \frac{(3x-2)(x-1)-(2+3x)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=4 \to$
$(3x-2)(x-1)-(2+3x)(x+1)=4(x-1)(x+1) \to$

$3x^2-3x-2-2x^2-3x-2=4x^2-4 \rightarrow -3x^2-6x=0 \rightarrow x(-3x-6)=0 \rightarrow$
$x_1=0 \quad x_2=-2$

h) $\frac{3}{1-x}=\frac{5}{x}+\frac{2}{x-x^2} \rightarrow \frac{3}{1-x}=\frac{5(1-x)+2}{x(1-x)} \rightarrow 3=\frac{5(1-x)+2}{x} \rightarrow$
$\rightarrow 3x=5(1-x)+2 \rightarrow 3x=5-5x+2 \rightarrow 8x=7 \rightarrow x=\frac{7}{8}$

i) $\frac{3x}{x-2}-\frac{5x}{x^2-4}=\frac{3x}{2} \rightarrow \frac{3x}{x-2}-\frac{5x}{(x+2)(x-2)}=\frac{3x}{2} \rightarrow \frac{3x(x+1)-5x}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x}{2} \rightarrow \frac{3x^2+x}{x^2-4}=\frac{3x}{2} \rightarrow$
$6x^2+2x=3x^3-12x \rightarrow 3x^3-6x^2+14x=0 \rightarrow x(3x^2-6x+14)=0 \rightarrow$
$x=0 \;,\; x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4(14)(3)}}{2(14)}=\frac{6\pm\sqrt{-132}}{28} \rightarrow No\ tiene\ solución\ real$

j) $\frac{1}{2}=\frac{x-5}{3-4x} \rightarrow 2(x-5)=3-4x \rightarrow 2x-10=3-4x \rightarrow 6x=13 \rightarrow x=\frac{13}{6}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2} \rightarrow x+3=\sqrt{5+2x^2} \rightarrow 5+2x^2=x^2+6x+9 \rightarrow x^2-6x-4=0$
$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4(-4)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{52}}{2} \rightarrow x_1=3+\sqrt{13} \quad x_2=3-\sqrt{13}$

b) $\sqrt{25-x}=x-5 \rightarrow \left(\sqrt{25-x}\right)^2=(x-5)^2 \rightarrow 25-x=x^2-10x+25 \rightarrow x^2-9x=0$
$x(x-9)=0 \;;\; x_1=0,\; x-9=0 \rightarrow x_2=9$

c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x \rightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=3x-7 \rightarrow \left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2=(3x-7)^2 \rightarrow$
$x^2-3x+2=9x^2-42x+49 \rightarrow 8x^2-39x+47=0 \rightarrow x=\frac{39\pm\sqrt{39^2-4(8)(47)}}{2(8)}=\frac{39\pm\sqrt{17}}{16} \rightarrow$
$x_1=2{,}69 \quad x_2=2{,}17$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1 \rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x-2}+1 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow x=1+2\sqrt{x-2}+x-2 \rightarrow 2\sqrt{x-2}=1 \rightarrow \sqrt{x-2}=\frac{1}{2} \rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$
$\rightarrow x-2=\frac{1}{4} \rightarrow x=2+\frac{1}{4} \rightarrow x=\frac{9}{4}$

e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0 \rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}-1 \rightarrow 1-x=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \rightarrow$
$\left(x-2\sqrt{x+1}+2\right)=1-x \rightarrow 2x-2\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}=0 \rightarrow \sqrt{x+1}=x-\frac{1}{2} \rightarrow$
$x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \rightarrow x+1=x^2-x+\frac{1}{4} \rightarrow x^2-2x-\frac{3}{4}=0 \rightarrow$
$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\left(-\frac{3}{4}\right)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{2} \rightarrow x_1=2{,}32 \quad x_2=0{,}32$

f) $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=5 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-3=5\sqrt{x} \rightarrow (x-3)^2=\left(5\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow x^2-6x+9=25x \rightarrow$
$x^2-31x+9=0 \rightarrow x=\frac{31\pm\sqrt{31^2-4(9)}}{2}=\frac{31\pm\sqrt{925}}{2} \rightarrow x_1=30{,}7 \quad x_2=0{,}29$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\frac{-2}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 3\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}=-2 \rightarrow$

$\left(3\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\right)^2=\left(4\sqrt{x+1}-2\right)^2 \rightarrow 9(x-2)(x+1)=16(x+1)+4-16\sqrt{x+1} \rightarrow$
$9x^2-9x-18=16x+16+4-16\sqrt{x+1} \rightarrow 9x^2-25x-38=-16\sqrt{x+1} \rightarrow$
$(9x^2-25x-38)^2=\left(-16\sqrt{x+1}\right)^2 \rightarrow 81x^4-450x^3-59x^2+1900x+1444=256x+256 \rightarrow$
$81x^4-450x^3-59x^2+1644x+1184=0 \rightarrow x_1=3 \;\;,\;\; x_2=4{,}61$; y no reales.

h) $\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}}=\mathbf{1} \rightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}-1\right)-2=\sqrt{x}-1 \rightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}-1\right)=\sqrt{x}+1 \rightarrow$
$\left[\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}-1\right)\right]^2=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \rightarrow (x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \rightarrow$
$(x-1)\left(x+1-2\sqrt{x}\right)=x+1+2\sqrt{x} \rightarrow x^2+x-2x\sqrt{x}-x-1+2\sqrt{x}=x+1+2\sqrt{x} \rightarrow$
$x^2-x-2=2x\sqrt{x} \rightarrow (x^2-x-2)^2=\left(2x\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow x^4-2x^3-3x^2+4x+4=4x^3 \rightarrow$
$x^4-6x^3-3x^2+4x+4=0 \rightarrow \quad x_1=1{,}6 \quad , \quad x_2=6{,}36$

i) $\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}}=\mathbf{4} \rightarrow \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}+1=4\sqrt{x-3} \rightarrow \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}=4\sqrt{x-3}-1 \rightarrow$
$\left(\sqrt{x+2}\sqrt{x-3}\right)^2=\left(4\sqrt{x-3}-1\right)^2 \rightarrow (x+2)(x-3)=16(x-3)+1-8\sqrt{x-3} \rightarrow$
$x^2-x-6=16x-48+1-8\sqrt{x-3} \rightarrow x^2-17x+39=-8\sqrt{x-3} \rightarrow$
$(x^2-17x+39)^2=\left(-8\sqrt{x-3}\right)^2 \rightarrow x^4-34x^3+367x^2-1326x+1521=64x-192 \rightarrow$
$x^4-34x^3+367x^2-1390x+1713=0 \rightarrow \quad x_1=11{,}62 \quad , \quad x_2=16{,}4$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3^{3x}=\frac{1}{81} \rightarrow 3^{3x}=\frac{1}{3^4} \rightarrow 3^{3x}=3^{-4} \rightarrow 3x=-4 \rightarrow x=-\frac{4}{3}$

b) $5^{2x}=\frac{1}{625} \rightarrow 5^{2x}=\frac{1}{5^4} \rightarrow 5^{2x}=5^{-4} \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-\frac{4}{2} \rightarrow x=-2$

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{4x-3y=1} \\ \mathbf{3x-y=2} \end{Bmatrix}$ $\quad y=-2+3x \quad$ Ec2; sustituimos en la 1ª ecuación

$4x-3(-2+3x)=1 \rightarrow 4x+6-9x=1 \rightarrow -5x=-5 \rightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{1}$;

$y=-2+3\cdot 1=1 \rightarrow \boldsymbol{y}=\mathbf{1}$

b) $\begin{Bmatrix} \mathbf{x+4y=6} \\ \mathbf{2x+5y=9} \end{Bmatrix}$

$x=6-4y \rightarrow 2(6-4y)+5y=6 \rightarrow 12-8y+5y=9 \rightarrow 3y=3 \rightarrow \boldsymbol{y}=\mathbf{1}$

$x=6-4y \rightarrow x=6-4(1) \rightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{2}$

c) $\begin{Bmatrix} \mathbf{2x+3y=10} \\ \mathbf{x+y=4} \end{Bmatrix}$

$x=4-y \rightarrow 2(4-y)+3y=10 \rightarrow 8-2y+3y=10 \rightarrow \boldsymbol{y}=\mathbf{2}$

$x=4-y \rightarrow x=4-2 \rightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{2}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{-3x+2y=-1} \\ \mathbf{3x-y=2} \end{Bmatrix}$ $\quad y=\frac{-1+3x}{2} \quad$ Ec1; $\quad y=-2+3x \quad$ Ec2

$\frac{-1+3x}{2}=-2+3x \rightarrow \frac{-1+3x}{2}=\frac{-4+6x}{2} \rightarrow -1+3x=-4+6x \rightarrow +3x-6x=-4+1 \rightarrow$

$-3x=-3 \rightarrow x=\frac{-3}{-3}=1 \rightarrow y=-2+3\cdot 1 \rightarrow y=1$; $\boldsymbol{x}=\mathbf{1},\ \boldsymbol{y}=\mathbf{1}$

b) $\begin{Bmatrix} \mathbf{5x - 2y = 1} \\ \mathbf{4x - y = 2} \end{Bmatrix}$ $y = \frac{5x-1}{2}$ Ec1 ; $y = -2 + 4x$ Ec2

$\frac{5x-1}{2} = -2 + 4x \rightarrow 5x - 1 = -4 + 8x \rightarrow 5x - 8x = -4 + 1 \rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = 1$;

$y = -2 + 4 \cdot 1 = 2$; $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 2}$

c) $\begin{Bmatrix} \mathbf{7x - 4y = 10} \\ \mathbf{-8x + 3y = -13} \end{Bmatrix}$ $y = \frac{7x-10}{4}$ Ec1 ; $y = \frac{8x-13}{3}$ Ec2

$\frac{7x-10}{4} = \frac{8x-13}{3} \rightarrow 21x - 30 = 32x - 52 \rightarrow 21x - 32x = -52 + 30 \rightarrow -11x = -22 \rightarrow$

$x = 2$; $y = \frac{8 \cdot 2 - 13}{3} = 1$; $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = 1}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{7x - 2y = 5} \\ \mathbf{2x + y = 3} \end{Bmatrix}$ $2 \cdot Ec2$ $\begin{Bmatrix} 7x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 6 \end{Bmatrix}$

$7x - 2y + 4x + 2y = 5 + 6 \rightarrow 11x = 11 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

$2(1) + y = 3 \rightarrow y = 3 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$

b) $\begin{Bmatrix} \mathbf{3x + 2y = 10} \\ \mathbf{-x - 6y = -14} \end{Bmatrix}$ $3 \cdot Ec2$ $\begin{Bmatrix} 3x + 2y = 10 \\ -3x - 18y = -42 \end{Bmatrix}$

$3x + 2y - 3x - 18y = 10 - 42 \rightarrow -16y = -32 \rightarrow \boldsymbol{y = 2}$

$-x - 6(2) = -14 \rightarrow -x - 12 = -14 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

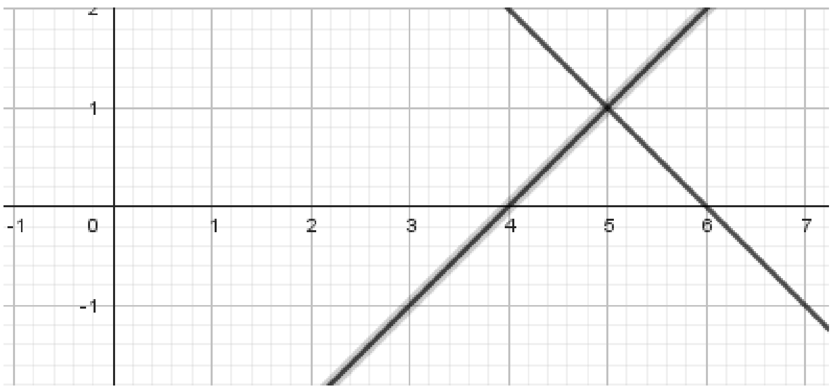
c) $\begin{Bmatrix} \mathbf{3x - 6y = 0} \\ \mathbf{-7x + 5y = -9} \end{Bmatrix}$ $7 \cdot Ec1$, $3 \cdot Ec2$ $\begin{Bmatrix} 21x - 42y = 0 \\ -21x + 15y = 27 \end{Bmatrix}$

$21x - 42y - 21x + 15y = 0 + 27 \rightarrow -27y = 27 \rightarrow \boldsymbol{y = -1}$

$3x - 6(-1) = 0 \rightarrow 3x + 6 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = -2}$

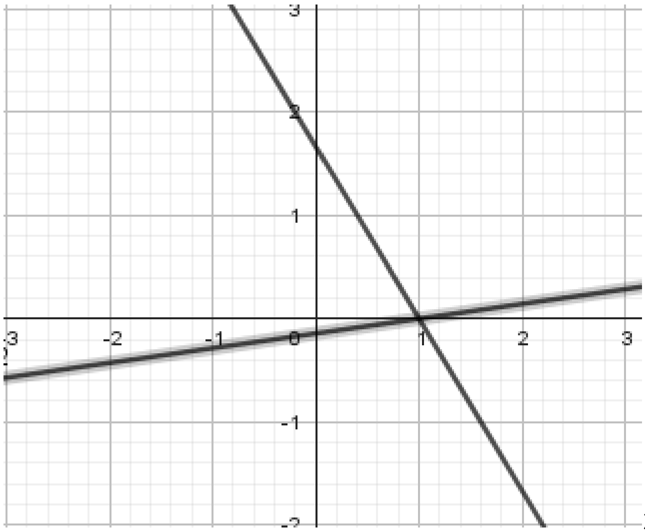
20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{x + y = 6} \\ \mathbf{x - y = 4} \end{Bmatrix}$



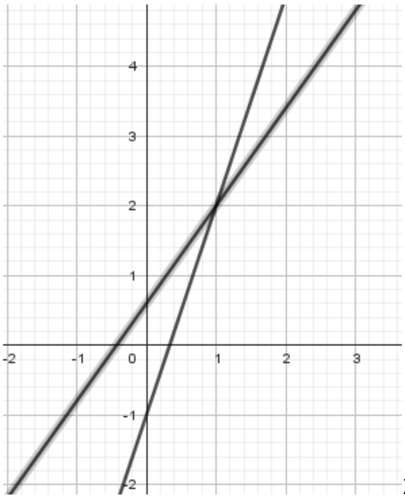
x =5, y = 1

b) $\begin{Bmatrix} \mathbf{5x + 3y = 5} \\ \mathbf{x - 7y = 1} \end{Bmatrix}$



x = 1 , y = 0

c) $\begin{cases} \mathbf{3x - y = 1} \\ \mathbf{-7x + 5y = 3} \end{cases}$



x = 1 , y = 2

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{y-1}}{\mathbf{5}} = \mathbf{-1} \\ \frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3y-1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{2} \end{cases}$ $\begin{matrix} mcm\ 15 \\ mcm\ 4 \end{matrix}$ $\begin{cases} 10x - 15 - 3y + 3 = -15 \\ 4x + 6 + 3y - 1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x - 3y = -3 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$

sumamos las ecuaciones: $(10x - 3y) + (4x + 3y) = -3 + 3 \rightarrow 14x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

$10(0) - 3y = -3 \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$

b) $\begin{cases} \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{2y+3}}{\mathbf{5}} = \mathbf{-3} \\ \mathbf{5x + 2y = -10} \end{cases}$ $mcm: 10$ $\begin{cases} 5x - 5 + 4y + 6 = -30 \\ 5x + 2y = -10 \end{cases}$ $\begin{cases} -5x - 4y = +31 \\ 10x + 4y = -20 \end{cases}$

$10x + 4y + (-5x - 4y) = -20 + 31 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow 5x = 11 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{11}{5}}$

$5\left(\frac{11}{5}\right) + 2y = -10 \rightarrow 11 + 2y = -10 \rightarrow 2y = -21 \rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{21}{2}}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $\begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{3y-2}{3} = 2 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$ $mcm: 6$ $\begin{cases} 6x - 9 + 6y - 4 = 12 \\ 7x - y = 1 \end{cases}$ $6 \cdot Ec2$ $\begin{cases} 6x + 6y = 25 \\ 42x - 6y = 6 \end{cases}$

$6x + 6y + 42x - 6y = 25 + 6 \rightarrow 48x = 31 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{31}{48}}$

$7\left(\frac{31}{48}\right) - y = 1 \rightarrow \frac{217}{48} - 1 = y \rightarrow y = \frac{217}{48} - \frac{48}{48} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{169}{48}}$

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno

a) $\begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} -6x + 3y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**

b) $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ -5x + y = 6 \end{cases}$ ***Incompatible***

c) $\begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + y = 7 \end{cases}$ **Su solución sea x = 2 e y = 1** (sustituyendo)

d) $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x - 10y = 5 \end{cases}$ ***Incompatible***

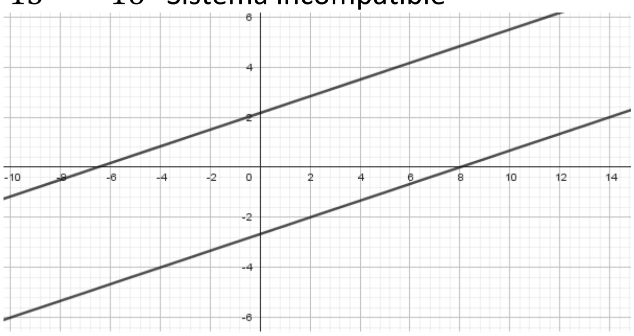
e) $\begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$ **Su solución sea x = -1 e y = 1** (sustituyendo)

f) $\begin{cases} ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{13-6y}{-2} \\ x = 8 + 3y \end{cases} \rightarrow \frac{13-6y}{-2} = 8 + 3y \rightarrow 13 - 6y = -2(8 + 3y) \rightarrow$

$13 - 6y = -16 - 6y \rightarrow 13 = -16$ Sistema incompatible

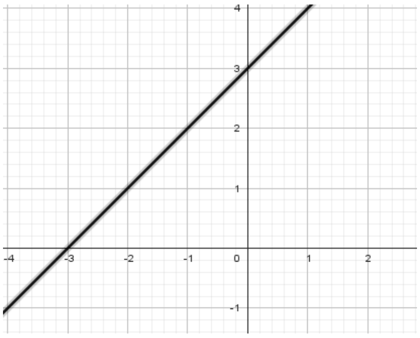


b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ x = \frac{-12+4y}{4} \end{cases} \rightarrow y - 3 = \frac{-12+4y}{4} \rightarrow 4(y - 3) = -12 + 4y \rightarrow$

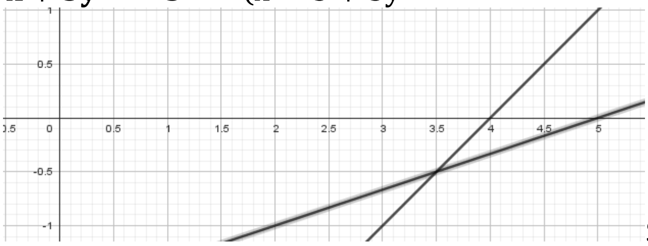
$4y - 12 = -12 + 4y \rightarrow 0 = 0$ *Sistema Compatible Indeterminado.*

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



c) $\begin{cases} \mathbf{x-y=4} \\ \mathbf{-x+3y=-5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=4+y \\ x=5+3y \end{cases}$; $4+y=5+3y$; $\mathbf{y=-\frac{1}{2}}$; $x=4+y$; $\mathbf{x}=4-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{7}{2}}$



Sistema compatible determinado

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

x: bicicletas, y: triciclos $\begin{cases} x+y=51 \\ 2x+3y=133 \end{cases}$ $x=51-y$

$2(51-y)+3y=133 \rightarrow 102-2y+3y=133 \rightarrow 102+y=133 \rightarrow y=31$

$\rightarrow x = 51-31 \rightarrow x=20$

Tienen 20 bicicletas y 31 triciclos.

25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

x: edad de la persona. $15x=x^2-100 \rightarrow x^2-15x-100=0 \rightarrow$

$x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4(-100)}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{625}}{2}=\frac{15\pm25}{2} \rightarrow x=20$ (solución negativa no es válida)

Tiene 20 años.

26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6.

Un factor a y otro 6 – a . $a\cdot(6-a)=8 \rightarrow 6a-a^2=8 \rightarrow -a^2+6a-8=0 \rightarrow$

$a^2-6a+8=0 \rightarrow a=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4(8)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2} \rightarrow$ a = 4 6 – a = 2

Los factores son 2 y 4.

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

x: número. $3x^2+2x=85 \rightarrow 3x^2+2x-85=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(800)}}{2(3)}=\frac{-2\pm\sqrt{1024}}{6}=\frac{-2\pm32}{6} \rightarrow$

$\boldsymbol{x_1=5}$; $\boldsymbol{x_2=-\frac{17}{3}}$ **, son las 2 soluciones.**

28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

Un número: x, siguiente impar: x + 2.

$x^2 + (x+2)^2 = 394 \rightarrow x^2 + (x^2 + 4x + 4) = 394 \rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 394 \rightarrow$

$2x^2 + 4x - 390 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 195 = 0 x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-195)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-2 \pm 28}{2} \rightarrow$

$x_1 = 13 \quad x_2 = -15$

Los números son, 13 y 15, o -15 y -13.

29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevará uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

a = nº sacos del asno y m= nº de sasos del mulo

1) $m + 1 = 2(a - 1)$

2) $a + 1 = (m - 1)$

De 1) $m + 1 = 2(a - 1) \quad m + 1 = 2a - 2 \;;\; m = 2a - 3$

De 2) $a + 1 = (2a - 3 - 1) \rightarrow a = (2a - 4) - 1 \rightarrow a = 2a - 5 \rightarrow \boldsymbol{a = 5}$

De $m = 2a - 3 \quad m = 2(5) - 3 \rightarrow m = 10 - 3 \rightarrow \boldsymbol{m = 7}$

Solución: asno lleva 5 sacos y el mulo 7 sacos.

30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Número: x

$3x = x^2 - 40 \rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(40)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} \rightarrow x_1 = 8 \quad x_2 = -5$

El número es 8 o -5.

31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365.

Números consecutivos: x – 1, x, x + 1

$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 365 \rightarrow (x^2 - 2x + 1) + x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 365 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 365 \rightarrow 3x^2 + 2 = 365 \rightarrow 3x^2 = 363 \rightarrow x = \sqrt{\frac{363}{3}} = \pm 11$

Los números son los siguientes; 10, 11, 12 o -12, -11, -10.

32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

Edad de Mario: x , dentro de 11 años: x + 11, hace 13 años: x – 13

$x + 11 = \frac{1}{2}(x - 13)^2 \rightarrow 2(x + 11) = (x - 13)^2 \rightarrow 2x + 22 = x^2 - 26x + 169 \rightarrow$

$x^2 - 28x + 147 = 0 x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4(147)}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{28 \pm 14}{2} \rightarrow x_1 = 21 \;,\; x_2 = 7$

La solución es 21 años, pues a 7 no podemos restar 13.

33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

Un número: y, otro número: y + 2.

$(y+2)^2 + y^2 = 580 \rightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 = 580 \rightarrow 2y^2 + 4y + 4 = 580 \rightarrow$

$2y^2 + 4y - 576 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 288 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-288)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{-2 \pm 34}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = 16 \quad x_2 = -18$

Los números son: 16 y 18 o -18 y – 16

34. La suma de dos números es 5 y su producto es -84. ¿De qué números se trata?

Un número: x,   otro número: y.

$\begin{Bmatrix} x+y=5 \\ xy=-84 \end{Bmatrix}$ $y=5-x$, $x(5-x)=-84 \to 5x-x^2=-84 \to x^2-5x-84=0 \to$

$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4(-84)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{5\pm 19}{2}$ $x_1=12$, $x_2=-7$

Los números son: 12 y -7.

35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones les cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

kg de polvorones: p , kg de mazapán: m , en las bandejas, $\begin{Bmatrix} p+m=1 \\ 5p+7m=6 \end{Bmatrix}$ $p=1-m$

$5(1-m)+7m=6 \to 5-5m+7m=6 \to 5+2m=6 \to 2m=1 \to m=\frac{1}{2}$

$p=1-m \to p=1-\frac{1}{2} \to p=\frac{1}{2}$, **hay que poner ½ kg de cada producto en las bandejas**.

Cantidad de polvorones = $25\cdot\frac{1}{2}=12{,}5\ kg$

Cantidad de mazapanes = $25\cdot\frac{1}{2}=12{,}5\ kg$

36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

Un cateto: b, otro cateto: c $\begin{Bmatrix} b+c=7 \\ b^2+c^2=5^2 \end{Bmatrix}$ $c=7-b$

$b^2+(7-b)^2=25 \to b^2+(49-14b+b^2)=25 \to 2b^2-14b+49=25 \to$

$2b^2-14b+24=0 \to b^2-7b+12=0 \to b=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4(12)}}{2}=\frac{7\pm 1}{2} \to b_1=4 \quad b_2=3$

Un cateto 4cm y el otro 3cm.

37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

Un número: x ,   otro número: y $\begin{Bmatrix} x^2+y^2=17 \\ xy=4 \end{Bmatrix}$

$y=\frac{4}{x} \to x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=17 \to x^2+\frac{16}{x^2}=17 \to x^4+16=17x^2 \to x^4-17x^2+16=0 \to$

$t^2-17t+16=0 \to t=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4(16)}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{17\pm 15}{2} \to$

$t_1=16$, $t_2=1$; $x_1=\sqrt{16}=\pm 4$, $x_2=\sqrt{1}=\pm 1$

Los números son 4 y 1 o -4 y -1.

38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata

Un número: x ,   otro número: y $\begin{Bmatrix} x+y=20 \\ 2x+3y=45 \end{Bmatrix}$

$x=20-y \to 2(20-y)+3y=45 \to 40-2y+3y=45 \to 40+y=45 \to$

$y=5$, $x=20-y \to x=20-5 \to x=15$

Los números son 15 y 5.

39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y

motos hay en el garaje?

Número de coches: x , número de motos: y $\begin{cases} x+y=30 \\ 4x+2y=100 \end{cases}$

$x=30-y \rightarrow 4(30-y)+2y=100 \rightarrow 120-4y+2y=100 \rightarrow -2y=-20 \rightarrow y=10$

$x=30-y \rightarrow x=30-10 \rightarrow x=20$

Hay 20 coches y 10 motos.

40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

Edad actual de Pedro: x, ídem Raquel: y Hace 10 años, Pedro: x – 10 , Raquel : y – 10

$\begin{cases} x=2y \\ (x+10)+(y+10)=65 \end{cases}$ $(x+10)+(y+10)=65 \rightarrow x+y+20=65 \rightarrow x+y=45$

Sustituyendo la Ec1 en la Ec2 $\rightarrow 2y+y=45 \rightarrow 3y=45 \rightarrow y=15$;

$x=2y \rightarrow x=2(15) \rightarrow x=30$

Edad de Pedro: 30 años, edad de Raquel: 15 años.

41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos somos en clase?

Número de chicas: x, número de chicos: y $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+y=55 \end{cases}$

$x=35-y \rightarrow 2(35-y)+y=55 \rightarrow 70-2y+y=55 \rightarrow y=25$

$x=35-y \rightarrow x=35-25 \rightarrow x=10$

Hay 10 chicas y 25 chicos.

42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Edad del hermano: x, edad del abuelo: x + 50

$x+(x+50)=56 \rightarrow 2x+50=56 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3 \rightarrow x=50+6 \rightarrow x=56$

El hermano tiene 3 años y el abuelo tiene 56 años

43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

Precio del bocadillo: x €, precio del refresco: y € $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

$y=5-2x \rightarrow 3x+2(5-2x)=5 \rightarrow 3x+10-4x=8 \rightarrow -x=-2 \rightarrow x=2$

$y=5-2x \rightarrow y=5-2(2) \rightarrow y=1$

El precio del bocadillo es de 2€ y el del refresco 1€

44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

Número de pollos: x , número de vacas: y $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+4y=134 \end{cases}$

$x=50-y \rightarrow 2(50-y)+4y=134 \rightarrow 100-2y+4y=134 \rightarrow 2y=34 \rightarrow y=17$

$x=50-y \rightarrow x=50-17 \rightarrow x=33$

Hay 33 pollos y 17 vacas.

45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho,

¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
Largo: x , ancho: y ; x = y + 22

$$P = 2x + 2y \rightarrow 172 = 2x + 2y \rightarrow 172 = 2(y + 22) + 2y \rightarrow 172 = 2y + 44 + 2y \rightarrow$$

$$4y = 128 \rightarrow\rightarrow y = 32 \ ; x = y + 22 \rightarrow x = 32 + 22 \rightarrow x = 54$$

El largo mide 54 metros y el ancho 32 metros.

46. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

Cantidad de monedas de 1€: x , cantidad de monedas de 2€: y $\begin{Bmatrix} x + y = 40 \\ x + 2y = 53 \end{Bmatrix}$

$$x = 40 - y \rightarrow 40 - y + 2y = 53 \rightarrow y = 13\,; \quad x = 40 - 13 \rightarrow x = 27$$

Hay 27 monedas de 1€ y 13 monedas de 2€.

47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

Número de arañas: x , número de avispas: y $\begin{Bmatrix} x + y = 70 \\ 8x + 6y = 488 \end{Bmatrix}$

$$x = 70 - y \rightarrow 8(70 - y) + 6y = 488 \rightarrow 560 - 8y + 6y = 488 \rightarrow -2y = -72 \rightarrow$$

$$y = 36 \rightarrow x = 70 - y = 70 - 36 = 34$$

Hay 34 arañas y 36 avispas.

48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos hay?

Número de chicas: x , número de chicos: y $\begin{Bmatrix} x + y = 32 \\ y = 3x \end{Bmatrix}$

$$x + y = 32 \rightarrow x + 3x = 32 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8 \ ; \ y = 3x \rightarrow y = 3 \cdot 8 = 24$$

Hay 8 chicas y 24 chicos.

49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tienen?

Edad de la madre: 50 , edad de Yolanda: x , edad de Pablo: y
Dentro de 2 años, edad de Yolanda: x +2 , edad de Pablo: y + 2 , edad de la madre: 50 + 2 = 52

$$\begin{Bmatrix} x = y + 6 \\ 52 = 2(x + 2 + y + 2) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = y + 6 \\ 52 = 2x + 2y + 8 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = y + 6 \\ 2x + 2y = 44 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = y + 6 \\ x + y = 22 \end{Bmatrix}$$

$$y + 6 + y = 22 \rightarrow 2y = 16 \rightarrow y = 8 \ ; \quad x = y + 6 = 8 + 6 = 14$$

Yolanda tiene 14 años y Pablo 8 años.

50. Se mezclan 15 kg de maíz de 2.1 € el kilogramo con 27 kg de maíz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 3 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

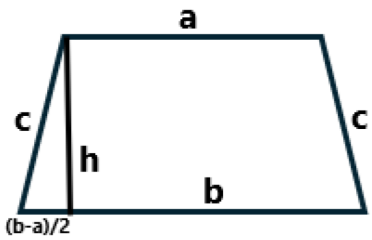
Precio del segundo maíz: x

$$15 \cdot 2{,}1 + 27 \cdot x = (15 + 27) \cdot 3 \rightarrow 31{,}5 + 27x = 126 \rightarrow 27x = 94{,}5 \rightarrow x = 3{,}5$$

El segundo maíz tenía un precio de 3,5€ el kilo.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

51. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, el perímetro, 24 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.



$P = a + b + 2c$; c=a ; $P = a + b + 2a = 3a + b$; $3a + b = 24$

$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + h^2 = c^2 \to c = a \to \frac{(b-a)^2}{4} + 4^2 = a^2 \to \frac{(b-a)^2}{4} + 16 = a^2 \to (b-a)^2 + 64 = 4a^2 \to$

$(b-a)^2 = 4a^2 - 64 \to b - a = \sqrt{4a^2 - 64}$

$\begin{cases} b = 24 - 3a \\ b - a = \sqrt{4a^2 - 64} \end{cases} \to (24 - 3a) - a = \sqrt{4a^2 - 64} \to (24 - 4a) = \sqrt{4a^2 - 64} \to$

$(24 - 4a)^2 = 4a^2 - 64 \to 576 + 16a^2 - 192a = 4a^2 - 64 \to 12a^2 - 192a + 640 = 0 \to$

$a = 11{,}27 \;\; y \;\; a = 4{,}73$; $\boldsymbol{a = 4{,}27cm}$ pues el otro valor haría el perímetro mayor de 24

$$b = 24 - 3a = 24 - 3 \cdot 4{,}27 = 11{,}19, \qquad \boldsymbol{b = 11{,}19cm}$$

$$área = \frac{b + a}{2} \cdot h = \frac{11{,}19 + 4{,}27}{2} \cdot 4 = 30{,}92 \;; \qquad \boldsymbol{área = 30{,}92cm^2}$$

52. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Valencia (que está a 350 km de Madrid) a las 8 de la mañana. Uno va a 100 km/h y el otro a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿Cuántos km han recorrido cada uno?

$$v1 \cdot t + v2 \cdot t = d$$

$$100 \cdot t + 120 \cdot t = 350 \to 220 \cdot t = 350 \to t = \frac{350}{220} = 1{,}591$$

$\boldsymbol{t = 1{,}591}$ **horas = 1 hora y 35,5 minutos.**

$$8:00am + 1hora\ 35{,}5\ minutos = 9horas\ 35{,}5\ minutos$$

$$d1 = v1 \cdot t = 100 \cdot 1{,}591 = 159{,}1km$$

$$d2 = v2 \cdot t = 120 \cdot 1{,}591 = 190{,}9km$$

$$159{,}1km + 190{,}9k = 350km$$

El que va a 100 km/h ha recorrido 159,1 km y el otro 190,9 km. Se cruzan a las 9 horas y 35,5 min.

53. En un concurso se ganan 50 euros por cada respuesta acertada y se pierden 100 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Pilar lleva ganados 250 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

Número de respuestas acertadas: a , número de respuestas falladas: f

$$a + f = 20$$

$$50a - 100f = 250 \to a - 2f = 5$$

$\begin{cases} a + f = 20 \\ a - 2f = 5 \end{cases}$ restamos las ecuaciones: $(a + f) - (a - 2f) = 20 - 5 \to a + f - a + 2f = 15 \to$

$$3f = 15 \to f = 5 \to a + 5 = 20 \to a = 15$$

Solución: Pilar ha acertado 15 preguntas y ha fallado 5.

54. Juan ha comprado 6 zumos y 4 batidos por 4.6 €, luego ha comprado 4 zumos y 7 batidos y le han costado 4.8 €. Calcula los precios de ambas cosas.

Precio del zumo: x€ , precio del batido: y€

1ª ecuación: $6x + 4y = 4.6 \rightarrow x = \frac{4.6-4y}{6}$; 2ª ecuación: $4x + 7y = 4.8$, sustituimos

$4\left(\frac{4.6-4y}{6}\right) + 7y = 4.8 \rightarrow \frac{18.4-16y}{6} + 7y = 4.8 \rightarrow \frac{18.4-16y+42y}{6} = 4.8 \rightarrow \frac{18.4+26y}{6} = 4.8 \rightarrow$

$18.4 + 26y = 4.8 \cdot 6 \rightarrow 18.4 + 26y = 28.8 \rightarrow 26y = 28.8 - 18.4 \rightarrow 26y = 10.4 \rightarrow$

$y = 0.4$, $x = \frac{4.6-4\cdot 0.4}{6} \rightarrow x = 0.5$

Solución: Cada zumo cuesta 0.5 € y cada batido 0.4 €.

55. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a 1/2 cuando se suma 2 al denominador?

Fracción: $\frac{a+1}{b}$ $\frac{a+1}{b} = 1 \rightarrow a + 1 = b \rightarrow a = b - 1$

$\frac{a}{b+2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = b + 2 \rightarrow 2a = b + 2$

$2(b-1) = b + 2 \rightarrow 2b - 2 = b + 2 \rightarrow 2b - b - 2 = 2 \rightarrow b - 2 = 2 \rightarrow b = 4$

$a = b - 1 \rightarrow a = 4 - 1 \rightarrow a = 3$

Solución: La fracción es: $\frac{3}{4}$

56. El cociente de una división es 3 y el resto es 2. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 2 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

$$D = 3d + 2$$
$$D = (3+2)(d-1) + 1$$
$$D = 5(d-1) + 1 \rightarrow D = 5d - 5 + 1 \rightarrow D = 5d - 4$$

Dos ecuaciones:

$D = 3d + 2$

$D = 5d - 4$ igualando, $3d + 2 = 5d - 4 \rightarrow 2 = 2d - 4 \rightarrow 6 = 2d \rightarrow d = 3$

$D = 3d + 2 \rightarrow D = 3(3) + 2 \rightarrow D = 9 + 2 \rightarrow D = 11$

Dividendo = 11; divisor = 3.

57. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?

Número de peces una amiga: A ; número de peces de la otra: B

$A + 1 = 2(B-1) \rightarrow A + 1 = 2B - 2 \rightarrow A = 2B - 3$

$B + 1 = A - 1 \rightarrow B + 2 = A$

Dos ecuaciones:

$A = 2B - 3$

$A = B + 2$, igualando, $2B - 3 = B + 2 \rightarrow 2B - B - 3 = 2 \rightarrow B - 3 = 2 \rightarrow B = 5$

$A = 5 + 2 \rightarrow A = 7$

Comprobamos, según la 2ª amiga:

- La primera amiga tendrá $7-1=6$ peces.
- La segunda amiga tendrá $5+1=6$ peces

Según la 1ª amiga:

- La primera amiga tendrá $7+1=8$ peces.
- La segunda amiga tendrá $5-1=4$ peces.

La primera amiga tiene 7 peces y la segunda, 5 peces

58. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 30 cm^2, y cuyo perímetro mide 26 cm.

Área: $l \cdot a = 30$

Perímetro: $2l + 2a = 26 \ \rightarrow l + a = 13 \ \rightarrow a = 13 - l$

$\rightarrow l \cdot (13 - l) = 30 \rightarrow 13l - l^2 = 30 \rightarrow l^2 - 13l + 30 = 0 \rightarrow l = \frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot1\cdot30}}{2\cdot1} = \frac{13\pm\sqrt{49}}{2} \rightarrow$

$l = 10 \; y \; l = 3$

Solución: 10 cm y 3 cm

59. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 12 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?

t: tiempo caminando el peatón, espacio recorrido por el peatón: $4t \ km$

espacio recorrido por el ciclista: $16(t-0.5)km$, la suma de los espacios es el total, 12km

$4t + 16(t-0.5) = 12 \rightarrow 4t + 16t - 8 = 12 \ \rightarrow 20t - 8 = 12 \ \rightarrow 20t = 20 \ \rightarrow t = 1$

$$16(t-0.5) = 16(1-0.5) = 16 \cdot 0.5 = 8km$$

El peatón lleva caminando una hora. Se cruzan a 8 km de B.

60. Se desea mezclar aceite de 3 €/l con otro aceite de 4.2 €/l de modo que la mezcla resulte a 3.50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

Litros aceite 3€: x , litros aceite 4.2€: y

$$x + y = 200$$
$$3x + 4.2y = 3.5 \cdot 200 \ \rightarrow 3x + 4.2y = 700$$

Sistema de ecuaciones:

$x + y = 200 \ \rightarrow y = 200 - x$ **,** sustituimos en la segunda ecuación

$3x + 4.2(200 - x) = 700 \rightarrow 3x + 840 - 4.2x = 700 \ \rightarrow 3x - 4.2x + 840 = 700 \ \rightarrow$

$-1.2x + 840 = 700 \ \rightarrow -1.2x = 700 - 840 \ \rightarrow -1.2x = -140 \ \rightarrow x = \frac{140}{1.2} \rightarrow x = 116.67$

(sustituimos en una de las ecuaciones) $y = 200 - 116.67 \rightarrow y = 83.33$

116.7 litros del primero y 83.3 litros del segundo.

61. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 27 unidades mayor. Halla el número inicial.

Número: xy = 10x + y ; yx = 10y + x ; 10x + y + 27 = 10y + x ; 9x – 9y = –27 ; x – y = – 3 ; y = x + 3.

La solución es todas las cifras que se diferencien en 3: (1, 4) (2, 5) (3, 6) (4, 7) (5, 8) y (6, 9)

14, 41, 25, 52, 36, 63, 47, 74, 58, 85, 69, y 96.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

62. La diagonal de un rectángulo mide 30 cm, y el perímetro 84 cm. Halla los lados del rectángulo.
Longitud de un lado: a y del otro: b
La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b.
$\sqrt{a^2+b^2}=30$
Perímetro: $2a+2b=84$ ….. $a+b=42$; $b=42-a$
$\sqrt{a^2+(42-a)^2}=30$; $a^2+(42-a)^2=900\rightarrow$
$a^2+(42-a)^2=a^2+(422-2\cdot 42\cdot a+a^2)=a^2+1764-84a+a^2=900$
$2a^2-84a+1764=900\rightarrow 2a^2-84a+864=0\rightarrow a^2-42a+432=0\rightarrow$
$a=\frac{-(-42)\pm\sqrt{(-42)^2-4\cdot 1\cdot 432}}{2\cdot 1}\rightarrow\frac{42\pm\sqrt{36}}{2}\rightarrow a1=24\ \ y\ \ a2=18$
Miden 24 cm y 18 cm.

63. Una valla rodea un terreno rectangular de 1000 m². Si la valla mide 130 metros, calcula las dimensiones del terreno.
Longitud de un lado: a y del otro: b
$a\cdot b=1000m^2$ Área
$2a+2b=130m$ Perímetro ; $a+b=65$
Sistema de dos ecuaciones:
1)$a\cdot b=1000$
2)$a+b=65\rightarrow b=65-a\rightarrow a\cdot(65-a)=1000\rightarrow 65a-a^2=1000\rightarrow a^2-65a+1000=0$
$\rightarrow a=\frac{-(-65)\pm\sqrt{(-65)^2-4(1)\cdot(1000)}}{2(1)}\rightarrow a=\frac{65\pm 15}{2\cdot 1}\rightarrow a=\frac{65+15}{2\cdot 1}=40\rightarrow a=\frac{65-15}{2\cdot 1}=25$
Mide 40 m x 25 m.

64. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 900 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan dos amigos más, con lo que cada uno toca a 15 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?
Si son “n” amigos tocan a: $\frac{900}{n}\ euros$
Si son 2 amigos más, “n+2” amigos tocan a: $\frac{900}{n+2}\ euros$ la diferencia es 15€, luego
$\frac{900}{n}-\frac{900}{n+2}=15\rightarrow 900(n+2)-900n=15n(n+2)\rightarrow 900n+1800-900n=15n^2+30n\rightarrow$
$1800=15n^2+30n\rightarrow 120=n^2+2n\rightarrow n^2+2n-120=0\rightarrow$
$n=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-120)}}{2\cdot 1}\rightarrow\frac{-2\pm 22}{2}\rightarrow n1=10$, $n2=-12$; $\frac{900}{12}=75euros$
Inicialmente son 10 amigos. Finalmente pagarán 75 €

65. Las diagonales de un rombo se diferencian en 3 cm y su área es de 20 cm². Calcula su perímetro.
$d1=d2+3$
$Área=\frac{1}{2}\cdot d1\cdot d2$; $20=\frac{1}{2}\cdot d1\cdot d2$; $40=d1\cdot d2$
$40=(d2+3)\cdot d2$; $40=d2^2+3d2\rightarrow d2^2+3d2-40=0\rightarrow$
$d=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-40)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-3\pm 13}{2}$ $d_1=5$; $d_2=8$
Miden 5 cm y 8 cm.

66. Un tren sale de Bilbao hacia Alcázar de San Juan a una velocidad de 140 km/h. Una hora más

tarde sale otro tren de Alcázar de San Juan hacia Bilbao a 100 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 500 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Alcázar de San Juan?

Distancia recorrida por el primer tren en 1 h =120 $\frac{km}{h}\cdot 1h = 140km$

$$500km - 140km = 360km$$

Velocidad=$140\frac{km}{h} + 100\ \frac{km}{h} = \ 240\frac{km}{h}$

Sabemos que t = d/v→ $\frac{360km}{240\frac{km}{h}} = 1.5h$

Distancia recorrida por el segundo tren=$100\ \frac{km}{h}\cdot 1.5h = 150km$

A una distancia de Alcázar de San Juan de 150 km. Se cruzan a las 2 horas y media de que el primer tren inicie el viaje.

67. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 70 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?

Distancia recorrida por el primer coche: $70\ \frac{km}{h}\cdot (t+0.5)h$

Distancia recorrida por el segundo coche: $120\ \frac{km}{h}\cdot t\ h$

Como la distancia recorrida es la misma: $70(t+0.5) = 120t \rightarrow\ 70t + 35 = 120t\ \rightarrow$

$35 = 120t - 70t\ \rightarrow 35 = 50t\ \rightarrow t =\ \frac{35}{50} \rightarrow 0.7h$

Distancia= $120\ \frac{km}{h}\cdot 0.7h = \ 84km$

A los 30 + 42 minutos, es decir a la hora y 12 minutos de la salida del primer coche y a una distancia de 84 km.

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3(x-1)-2(x-2)=5$ es:

a) x = 2 b) x = 4 c) x = –2/3 d) x = 3

$3(x-1)-2(x-2)=5 \to 3x-3-2x+4=5 \to x+1=5 \to x=4$

2. Las soluciones de la ecuación $156=x(x-1)$ son:

a) x = 11 y x = –13 b) x = 13 y x = –12 c) x = 10 y x = 14 d) x = –12 y x = –11

$156=x(x-1) \to 156=x^2-x \to x^2-x-156=0 \to \ \ x=13,\ x=-12.$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}$ son:

a) x = 2 y x = 2/3 b) x = 1/3 y x = 4 c) x = 1 y x = 4/3 d) x = 5/3 y x = 3

$\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2} \to 6\cdot\left(\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}\right) \to 2\cdot(4x-1)-(x+2)=3x^2 \to$

$8x-2-x-2=3x^2 \to 3x^2-7x+4=0 \to x=1\ ,\ x=\frac{4}{3}$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4-5x^2+4=0$ son:

a) 1, –1, 4, –4 b) 1, –1, 2, –2 c) 2, –2, 3, –3 d) 2, –2, 5, –5

$x^4-5x^2+4=0 \to (x^2=t) \to t^2-5t+4=0 \to t=1\ , t=4; x=1, x=-1, x=2, x=-2$

5. Las soluciones de la ecuación $2(x+2)-x(2-x)=0$ son:

a) Infinitas b) x = 9 y x = 5 c) no tiene solución d) x = 1 y x = 4

$2(x+2)-x(2-x)=0 \to 2x+4-2x+x^2=0 \to x^2+4=0$

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

Multiplicamos los coeficientes de x e y cruzados: 1·6 = 3·2 , paralelas o coincidentes, 1·4 = 2·2

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ es:

a) x = 2 e y = 1 b) x = 1 e y = 1 c) x = 3 e y = 2 d) No tiene solución

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases} \to \begin{matrix} 2\cdot Ec1 \\ 3\cdot Ec2 \end{matrix} \to \begin{cases} 6x-4y=2 \\ -6x+9y=3 \end{cases} sumamos\ 5y=5 \to y=1,\ \ x=1$

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases}$ es:

a) x = 2 e y = –1 b) x = –2 e y = 1 c) x = 1 e y = 0 d) x = 3 e y = 1

$\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases} \to \begin{cases} x-y=3 \\ 2x-9y=13 \end{cases} \to (-2)\cdot Ec1 \to \begin{cases} -2x+2y=-6 \\ 2x-9y=13 \end{cases} sumamos \to$

$-7y=7 \to y=-1\ ,\ x=2$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

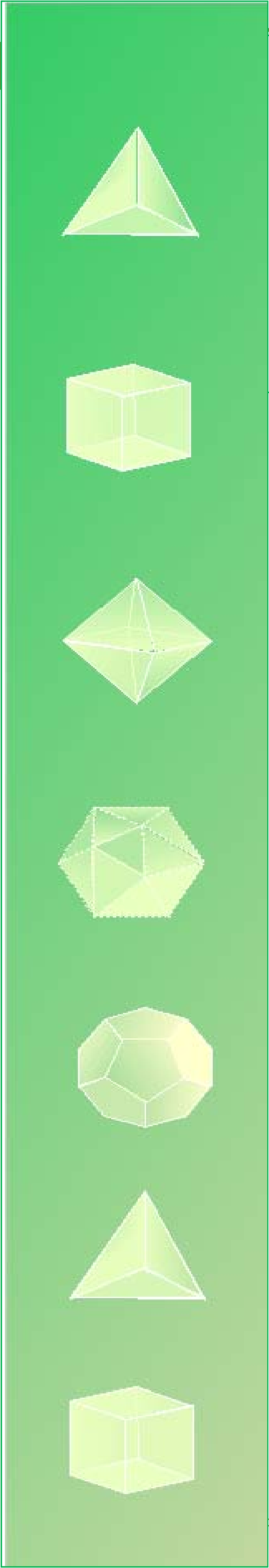
Número de pollos: x , número de cerdos: y

$\begin{cases} x + y = 27 \\ 2x + 4y = 76 \end{cases} \rightarrow (-2) \cdot Ec1 \rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -54 \\ 2x + 4y = 76 \end{cases}$ $sumamos\ 2y = 22 \rightarrow y = 11,\ \ x = 16$

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 20 años b) 7 años c) 25 años d) 8 años

Edad de la persona: x ; $15x + 100 = x^2 \rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0,\ x = 20\ ,\ \ x = -5$



Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 5: Geometría del plano y del espacio. Longitudes, áreas y volúmenes. Movimientos

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1. **¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 cm y su hipotenusa 30 cm? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 cm.**
   No, ya que aplicando el teorema de Pitágoras ($h^2 = a^2 + b^2$), $30^2 \neq 12^2 + 16^2$; $900 \neq 400$
   $h^2 = 400$; $\sqrt{400} = 20$.
   Para que los catetos de un triángulo rectángulo midan 12 y 16 cm, la hipotenusa debe medir 20 cm.

2. **Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:**

   a) **4 cm y 3 cm**
   $\mathrm{h}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$
   b) **1 m y 7 m**
   $\mathrm{h}^2 = 1^2 + 7^2 = 50 = \sqrt{50} = 7{,}071 \text{ m}$
   c) **2 dm y 5 dm**
   $\mathrm{h}^2 = 2^2 + 5^2 = 29 = \sqrt{29} = 5{,}39 \text{ dm}$
   d) **23.5 km y 47.2 km.**
   $\mathrm{h}^2 = 23{,}5^2 + 47{,}2^2 = 2780{,}09 = \sqrt{2780{,}09} = 52{,}72 \text{ km}$

3. **Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:**

   a) **8 cm y 3 cm**
   $8^2 = 3^2 + x^2$
   $64 = 9 + x^2$
   $x^2 = 64 - 9 = 55$
   $x = \sqrt{55} = 7.41 \text{ cm}$
   b) **15 m y 9 m**
   $15^2 = 9^2 + x^2$
   $225 = 81 + x^2$
   $x^2 = 225 - 81 = 144$
   $x = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$
   c) **35 dm y 10 dm**
   $35^2 = 10^2 + x^2$
   $1225 = 100 + x^2$
   $x^2 = 1125$
   $x = \sqrt{1125} = 33{,}5 \text{ dm}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

d) 21.2 km y 11.9 km

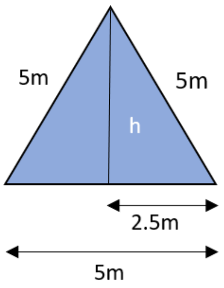
$21.2^2 = 11.9^2 + x^2$

$449.44 = 141.61 + x^2$

$x^2 = 307.83$

$x = \sqrt{307.83} = 17{,}54 \text{ km}$

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 m.



$5^2 = h^2 + 2.5^2$

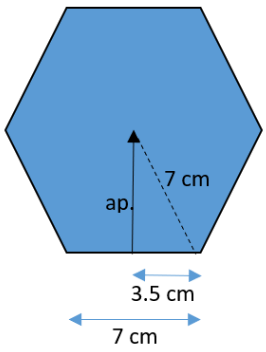
$25 = h^2 + 6.25$

$h^2 = 25 - 6.25 = 18.75$

$h = \sqrt{18.75} = 4.33\text{m}$

$A = \frac{base\,.\,altura}{2}$, $A = \frac{5\,.\,4.33}{2} = 10.825 \text{ m}^2$

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm.



$7^2 = 3.5^2 + ap^2$

$49 = 12.25 + ap^2$

$Ap^2 = 49 - 12.25 = 36.75$

$ap = \sqrt{36.75} = 6.06\ m$

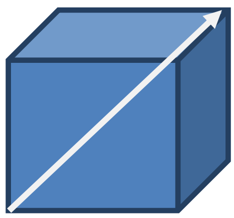
$P = 7 \cdot 6 = 42$ m

$A = \frac{perímetro\,.\,apotema}{2}$

$A = 127.26 \text{ m}^2$

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 cm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

$D^2 = a^2 + a^2 + a^2$ $D^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$ $D = \sqrt{27} = 3\cdot\sqrt{3} = 5.19$ cm



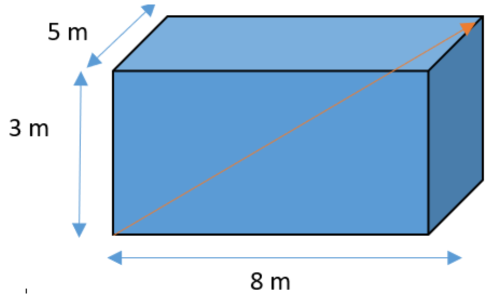
7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$D^2 = 8^2 + 3^2 + 5^2$

$D^2 = 64 + 9 + 25 = 98$

$D = \sqrt{98} = 9.89\ m$

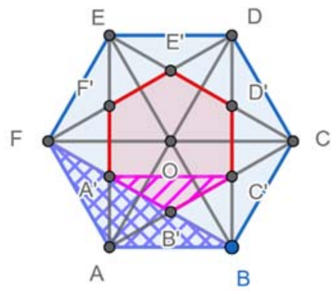


8. **En una foto hay un niño,que sabemos que mide 1.5 m,y un edificio. Medimos la a ltura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0.2 cm y 10 cm. ¿Qué altura tiene el edificio?**

$\frac{0.2}{1.5} = \frac{10}{h}$

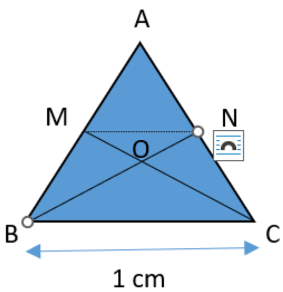
h = 1.5 · 10/0.2 = 75m mide el edificio

9. **Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágo no regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.**



$K = \frac{\sqrt{3}}{6}$

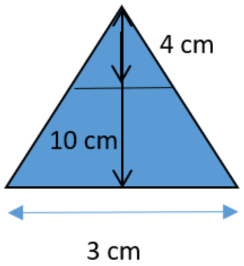
10. **En un triángulo regular ABC de lado, 1 cm, trazamos los puntos medios, M y N, de dos de sus lados. Trazamos las rectas BN y CM que se cortan en un punto O. ¿Son semejante s los triángu-los MON y COB?**



Sí, son semejantes, ya que sus ángulos son iguales, sus lados proporcionales y sus bases paralelas

La razón de semejanza es 0.5 y el lado MN, por tanto, mide 0.5 cm

11. **Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 cm y altura 10 cm, se corta p or un plano a una distancia de 4 cm del vértice,con lo que se obtiene una nueva p irámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?**



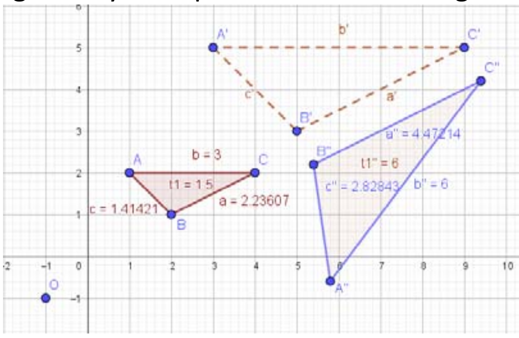
$$\frac{x}{3} = \frac{4}{10}$$

x = (3 · 4)/ 10 = 1.2

El lado de la nueva base mide 1.2 cm y la altura 4 cm

12. Justifica que los triángulos ABC y A’’B’’C’’ son semejantes. Calcula la razón de semejanza y la razón entre sus áreas. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:



- Sí son semejantes pues le hemos hecho una ampliación de factor 2
- La razón de semejanza es la ampliación: 2
- Para las áreas dividimos, 6 : 1.5 = 4 = 2^2, la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

13. ¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y A’’B’’C’’? Observa en la Ventana algebraica las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:

Explicado en el ejercicio 12 y se puede comprobar con la imagen.

14. Dibuja distintos pentágonos y hexágonos que no sean regulares y con la herramienta Dilata objeto desde punto indicado, según factor, construye otros semejantes.

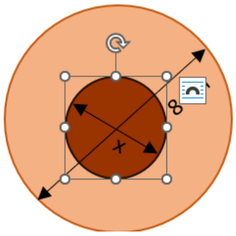
a) Argumenta por qué son semejantes.

b) Calcula en cada caso la razón de semejanza y la razón entre sus áreas.

c) Investiga cómo puedes hallar la razón entre las áreas de polígonos semejantes a partir de la razón de semejanza.

Solución gráfica y manipulativa. Utiliza Geogebra:

15. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mi- de 8 cm. Calcu- la el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, tambi én esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?



VMELOCOTÓN = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3$=268.08cm³

V$_{HUESO}$ = $\frac{268.08}{3} = 89.36$ cm³

K = $\frac{268.08}{89.36} = 3$

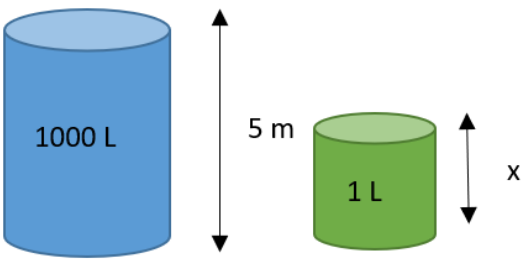
16. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas piz-zas son: 15 cm,20 cm y 30 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

$A_1 = \pi \cdot 15^2 = 706.5$ cm²
$A_2 = \pi \cdot 20^2 = 1256.64$cm²
$A_3 = \pi \cdot 30^2 = 2827.44$cm²

$$\frac{706.5}{1};\ \frac{1256.64}{2};\ \frac{2827.44}{3};\ \ 706.5 \neq 628.32 \neq 942.48$$

Resulta más económica la de 30 cm

17. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?



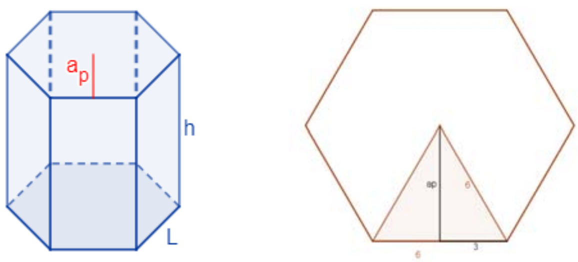
$k^3 = \frac{1000}{1} = 1000;\ k = 10$, razón = 10

$\frac{5}{x} = 10; x = \frac{5}{10} = 0.5$

La maqueta debe tener 0.5 m de altura.

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

18. Calcla el volu men de un prisma recto de 20 dm de altura cuya base es un hexá-gono de 6 dm de lado.



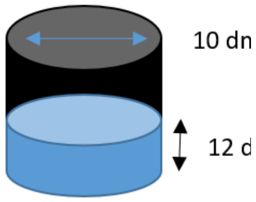
V = $A_b \cdot h$

$A_b = \frac{p \cdot ap}{2}$; $p = 6 \cdot 6 = 36;\ ap = x;$ $6^2 = x^2 + 3^2$; $36 = x^2 + 9$; $x^2 = 27$; $x = \sqrt{27} = 5.19\ dm$

$A_b = \frac{36 \cdot 5.19}{2} = 93.42\ dm^2$

V = 93.42 · 20 = 1868.4 dm^3

19. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 cm de diámetro y que el agua alcanza 12 dm de altura.



V= Ab x h

A$_b$ $= \pi x r^2 = \pi x 5^2 = 78.53 dm^2$

V = 78.53 x 12 = 942.36 dm^3/ L

20. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 cm y cada arista lateral 2 dm.

A$_l$ = P$_b$ · h

P$_b$ = 3 · 6 = 18 cm

H = 2 dm = 20 cm

A$_l$ = 18 · 20 = 360 cm^2

A$_b$ = $\frac{p \cdot ap}{2}$; $p = 18$; $ap = x$; 1.5^2 = x^2 + 0,75^2; 2.25 = x^2 + 0.56; x^2 = 2.81; x = $\sqrt{2.81} = 1.67\ cm$

A$_b$ = $\frac{18 \cdot 1.67}{2} = 30.06\ cm^2$

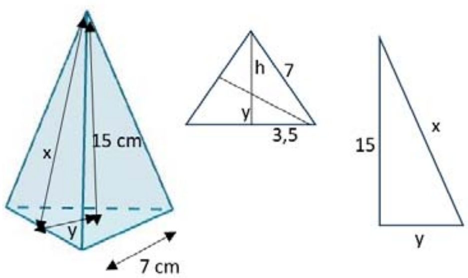
A$_T$ = A$_L$ + 2 · A$_b$ = 360 + 2. 30.06 = 420.12 cm^2

21. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 m de alt ura. Calcula el perímetro de la base.

A$_l$ = P$_b$ · h

16 = P$_b$ · 10; P$_b$ = 1.6m

22. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 cm y la altura de la pi rámide 15 cm. Calcula la apotema de la pirámide y su área total.



7^2 = h^2 + 3.5^2

h^2 = 49 - 12.25 = 36.75

h = $\sqrt{36.75} = 6.06 cm\ (altura\ base)$

y = h/3 = 6.06/3 = 2.02

$x^2 = y^2 + 15^2$

$x^2 = 2.02^2 + 15^2 = 229.08$

x = $\sqrt{229.08} = \mathbf{15.13}$ Apotema de la pirámide

$A_T = A_L + A_b = 165.69 + 42.42 = 208.11cm^2$

$A_b = \frac{7 \cdot 6.06}{2} = 21.21cm^2$

$A_L = \frac{perimetro\ de\ la\ base \cdot apotema\ de\ la\ piramide}{2} = \frac{perimetro\ de\ la\ base}{2} \cdot apotema =$

$= \frac{42}{2} \cdot 15.13 = 107.73cm^2$

$A_T = A_L + A_b = 107.73 + 21.21 = 128.94cm^2$

$\mathbf{A_T = 128.94cm^2}$

23. Calcu-
la el área lateral de un tronco de pirámide regular,sabiendo que sus bases son do
s
octógonos regulares de lados 3 y 8 dm y que la altura de cada cara lateral es de 9 dm.

Ap = 9 dm, es la altura de cada cara lateral
$P_B = 8 \cdot 8 = 64$
$P_b = 3 \cdot 8 = 24$
$Al = \frac{(P_B + P_b) \cdot ap}{2} = \frac{(64+24) \cdot 9}{2} = 396\ dm^2$

24. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm² y la arista de la base mide 4 cm, calcula la apotema de la pirámide y su altura.

$A_l = \frac{perimetro\ de\ la\ base}{2} \cdot apotema;$ $104 = \frac{16}{2} \cdot ap;$ 104 = 8 · ap; $ap = \frac{104}{8} =$ 13cm

$13^2 = h^2 + 2^2$, $169 = h^2 + 4$, $169 - 4 = h^2$

h = $\sqrt{165} = 12.84\ cm$

25. Una columna cilíndrica tiene 35 cm de diámetro y 5 m de altura. ¿Cuál es su área l ateral?

5m = 500cm ; 35cm diámetro = 17,5cm de radio

A_L = Longitud de la base · Altura = (2π R) · h = 2π· (17,5)·(500)=54977,87144 cm² = 549,778 m²

26. El radio de la base de un cilindro es de 7 cm y la altura es el triple del diámetro. C alcula su área total.

Diámetro = 7·2 = 14cm; altura = 3·14 = 42cm

$A_t = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\cdot(7)\cdot(42) + 2\pi\cdot(7)2 = 147.25 + 307,87 = 455,12$ cm^2

27. Calcula el área de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 dm y su radio de la base 6 dm.

$A_l = \pi RG = \pi\cdot(6)\cdot(25) = 471,23$ cm^2

28. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 m y su generatriz 12 m. Calcula el área total.

$2\pi r = 6,25$; $r = \frac{6,25}{2\pi} = 0.99$ m

$A_T = A_L + \pi\cdot R^2 = \pi\cdot R\cdot G + \pi\cdot R^2 = \pi\cdot(0.99)\cdot(12) + \pi\cdot(0,99)^2 = 37,32 + 3,07 = 40,39$m^2

29. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima

$2\pi r = 2\pi\cdot(4) = 25,1$ m mide la longitud de la circunferencia máxima

b) El área de la esfera.

$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2 = 4\pi\cdot(4)2 = 201,06$ m^2

30. El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro.

Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a) ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

1m = 10dm , 2m = 20dm

$V = Ab\cdot h = \pi\, r^2\cdot h = \pi\,(10)^2\cdot 10 = 3140$ dm^3

b) Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

3140 dm^3 = 3140 l; 3140 – 140 = 3000

3000 · 0,80 = 2400 € tiene que pagar la madre de Irene

31. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 dm de altura y 4 dm de radio de la base.

Volumen cilindro = Volumen esfera + Volumen cono

Volumen esfera = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 4^3 = 85,33\,\pi$ dm^3

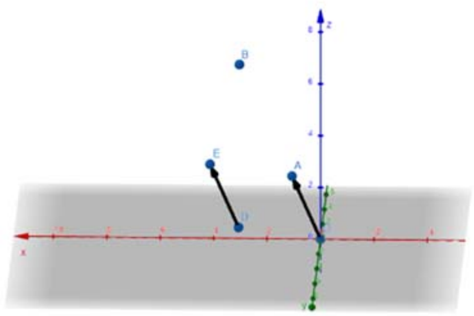
Volumen cilindro = $\pi r^2 h = \pi\cdot(4)^2\cdot(8) = 128\,\pi$ dm^3

Volumen cono = $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 4^2 8}{3} = 42,67\pi$ dm^3

$128\,\pi$ dm^3 = $85,33\,\pi$ dm^3 + $42,67\pi$ dm^3

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

32. Represen-ta en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos: O(0, 0, 0), A(1, 2, 3), B(3, 1, 7), D(3, 2, 1) y E(4, 4, 4) y vectores: DE y OA.



33. El vector de componentes u = (2, 3) y origen A = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

Extremo = B = (B_1, B_2)
(2, 3) = (B_1-1, B_2-1)
B_1-1 = 2; B_1 = 2 + 1 = 3
B_2-1 = 3; B_2 = 3 + 1 = 4
B = (3, 4)

34. Calcula la distancia entre los puntos A (6, 2) y B (3, 9).

D = $\sqrt{(3-6)^2+(9-2)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

35. Calcula la distancia entre los puntos A (6, 2, 5) y B (3, 9, 7).

D = $\sqrt{(3-6)^2+(9-2)^2+(7-5)^2} = \sqrt{9+49+4} = \sqrt{62}$

36. Calcula la longitud del vector de componentes u = (3, 4)

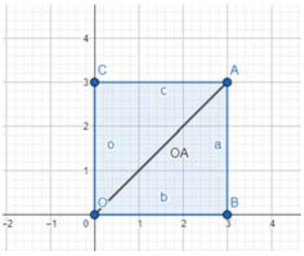
L = $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

37. Calcula la longitud del vector de componentes u = (3, 4, 1).

L = $\sqrt{3^2+4^2+1^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

38. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto O(0, 0) y A(3, 3). ¿Qué coordenadas tie-nen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



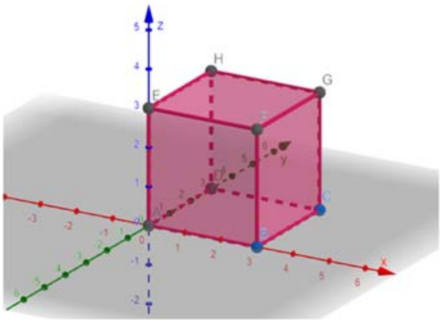
C (0,3)

B (3,0)

Longitud del lado: 3

Diagonal:$\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

39. Dibuja un cubo de diagonal O(0, 0, 0) y A(3, 3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo



B (3, 0, 0), C (3, 3, 0), D (0, 3, 0),

E (0, 0, 3), F (3, 0, 3), G (0, 3, 3)

Arista: 3

Diagonal de una cara: $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Diagonal del cubo: $\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{9+9+9}=$

$=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$

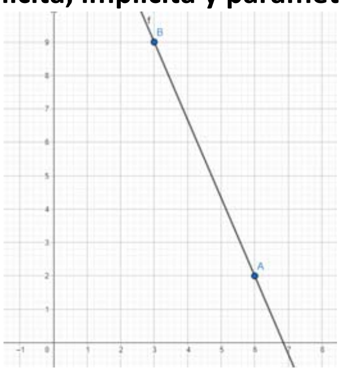
40. Sea X(x, y) un punto genérico del plano, y O(0, 0) el origen de coordenadas escrib e la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

$$D^2=x^2+y^2$$

41. Sea X(x, y, z) un punto genérico del espacio, y O(0,0,0) el origen de coordenadas escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

$$D^2=x^2+y^2+z^2$$

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(6, 2) y B(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente



AB = (3-6, 9-2) = (-3, 7) , $\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{7}\rightarrow 7x-42=-3y+6$

IMPLÍCITA: ax + by + c = 0; 7x + 3y – 48 =0

EXPLÍCITA: y = mx + n ; $y=\frac{-7x+48}{3}\rightarrow$ y = $-\frac{7}{3}x+16$

PARAMÉTRICA:$\begin{cases}x=a_1+tv_1\\ y=a_2+tv_2\end{cases}=\begin{cases}x=\ 6-3t\\ y=2+7t\end{cases}$

43. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (6, 2, 5) y B (3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.

AB = (3-6, 9-2, 7-5) = (-3, 7, 2)

EXPLÍCITA: $\frac{x-6}{-3}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-5}{2}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

INTERSECCION DE DOS PLANOS: $\begin{cases} \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{7} \\ \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x + 3y - 48 = 0 \\ 2y - 7z + 31 = 0 \end{cases}$

44. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

x = 0, y = 0, z = 0

45. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

$Eje\ Z \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad Eje\ Y \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad Eje\ X \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

46. En el cubo de diagonal O(0, 0, 0) y A(6, 6, 6) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Caras: x = 0; y = 0; z = 0; x = 6; y = 6; z = 6.

Aristas:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ z = 6 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ z = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 6 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ z = 6 \end{cases}, \begin{cases} y = 6 \\ z = 6 \end{cases}$

Vértices: A (0, 0, 0), B (6, 0, 0), C (6, 6, 0), D (0, 6, 0), E (0, 0, 6), F (6, 0, 6), G (0, 6, 6), H (6, 6, 6).

47. Escribe la ecuación del cilindro de eje, el eje OZ y radio 2.

La ecuación de un cilindro con eje OZ y radio r se puede expresar como: $x^2 + y^2 = r^2$

En este caso r = 2; $4 = x^2 + y^2$

48. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

En este caso r = 2; $4 = x^2 + y^2 + z^2$

49. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + t} \\ \boldsymbol{y = 2} \\ \boldsymbol{z = 3} \end{cases}$ y radio 1

1 = $(y - 2)^2 + (z - 3)^2$

50. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro A (2, 5) y radio 2.

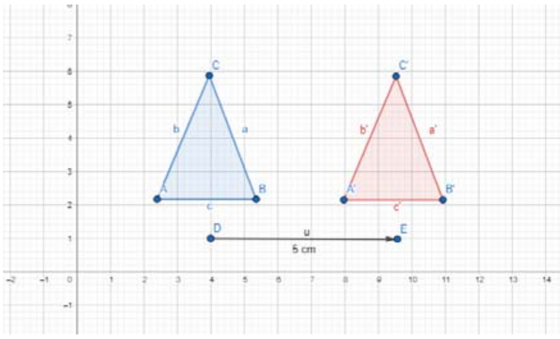
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 2^2$; $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

51. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$

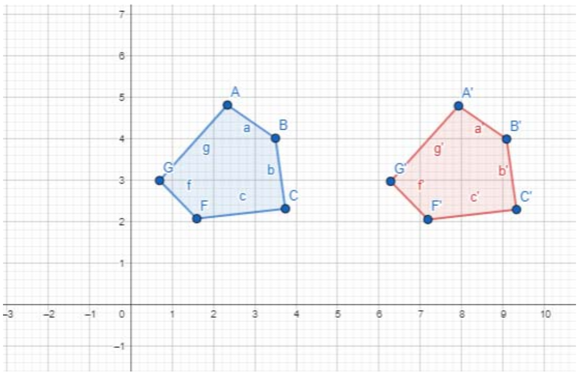
4. MOVIMIENTOS Y TRANSFORMACIONES

52. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.



53. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Las dos figuras tienen sus longitudes y ángulos iguales. Esas rectas son paralelas. La trayectoria ha sido libre



54. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa: Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares

55. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

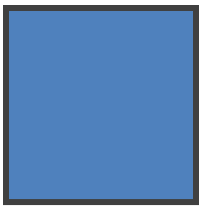
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra


Un friso en Camboya

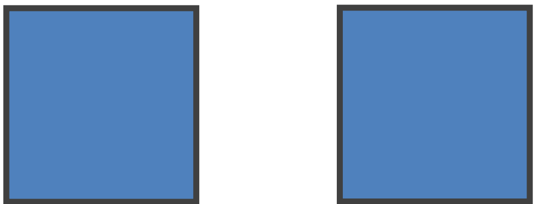
Tiene dirección horizontal va de izquierda a derecha y viceversa

56. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

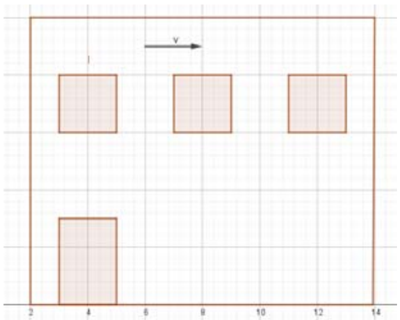
Sí, en un edificio las ventanas son elementos que a menudo se disponen en patrones regulares y pueden ser generados mediante traslaciones. Imaginemos una ventana rectangular como se muestra a continuación:



Supongamos que queremos obtener otra ventana diferente a partir de esta mediante una traslación. Podemos trasladar la ventana original horizontalmente para obtener una nueva ventana adyacente, manteniendo la misma forma y tamaño. El resultado sería algo como esto:



Ambas ventanas tienen la misma forma y tamaño, pero están ubicadas en posiciones diferentes debido a la traslación horizontal. Esta es una forma común en la que se utilizan las traslaciones en edificación para crear patrones repetitivos de elementos arquitectónicos como ventanas, puertas y azulejos.



57. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro me-

diante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Hay dos ventanas rectangulares con traslación vertical, dos arcos con traslación horizontal y conjuntos de arcos con traslación vertical del conjunto.

58. Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A’ el punto girado.

1. Dibuja un punto O: Este será el centro de tu rotación.
2. Dibuja un punto A: Colócalo en cualquier lugar en el papel, distinto de O. Este será el punto que vas a rotar.
3. Usa un transportador para medir un ángulo de 30 grados: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con la línea que conecta O y A, y marca el punto donde el borde inclinado del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto A'.
4. Conecta O, A y A': Dibuja líneas que conecten los puntos O, A y A'.

Ahora tendrás tres puntos: O, A y A', donde A' es el resultado de rotar el punto A 30 grados en sentido positivo alrededor de O.

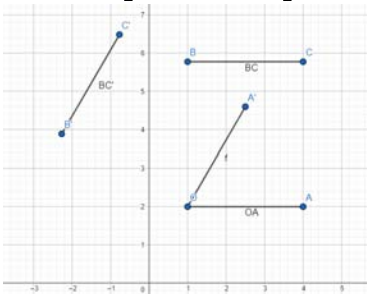
59. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA’ y B’C’ del giro de centro O y ángulo 60°.

1. Dibuja un punto O en el papel.
2. Dibuja un segmento OA que pase por O: Esto significa que el extremo A del segmento debe estar en el punto O.
3. Dibuja otro segmento BC que no pase por O: Coloca el extremo B de este segmento en un lugar diferente en el papel, sin estar en O.
4. Usa un transportador para medir un ángulo de 60 grados: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con el segmento OA y marca el punto donde el borde inclinado

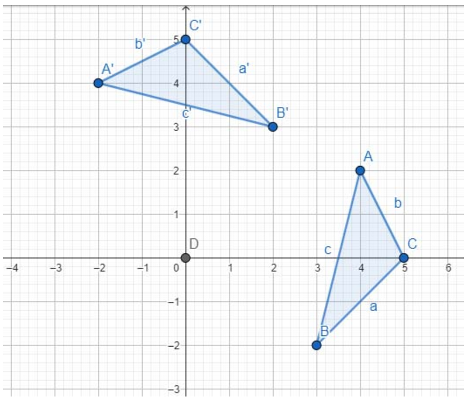
del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto A'.

5. Usa el mismo ángulo de 60 grados con el transportador: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con el segmento BC y marca el punto donde el borde inclinado del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto B'.
6. Conecta O con A' y O con B': Dibuja líneas que conecten los puntos O, A' y B'. Estos serán los segmentos girados OA' y B'C' respectivamente.

Ahora tendrás los segmentos originales OA y BC, junto con los segmentos girados OA' y B'C' después de un giro de 60 grados alrededor del punto O.



60. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B (3, −2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?



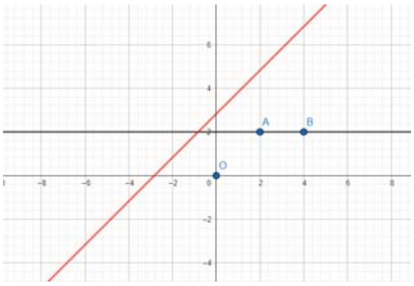
A' (-2,4)

B' (2,3)

C' (0,5)

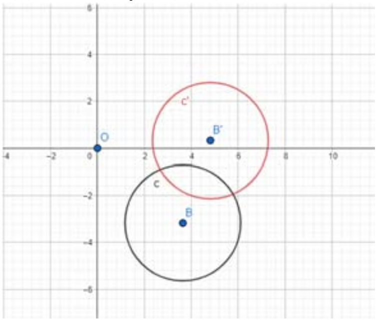
61. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

- Recta:
  La ecuación de la recta se mantiene igual, pero los puntos en la recta se transforman aplicando las fórmulas de rotación.



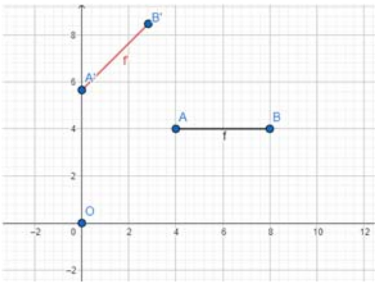
- Circunferencia:

  La circunferencia se mantiene igual, pero los puntos en la circunferencia se transforman aplicando las fórmulas de rotación.



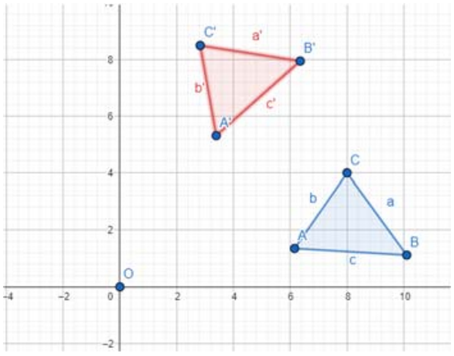
- Segmento:

  Los puntos del segmento se transforman aplicando las fórmulas de rotación.



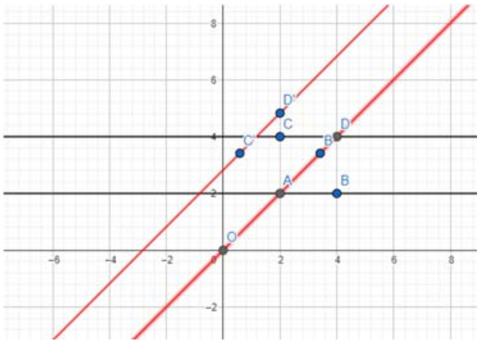
- Triángulo:

  Cada vértice del triángulo se transforma aplicando las fórmulas de rotación.

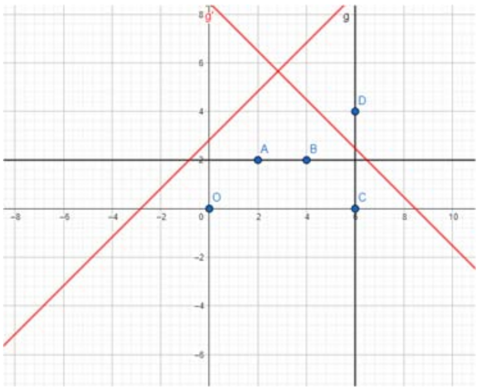


- Dos Rectas Paralelas:

  Las dos rectas paralelas se mantendrán paralelas después de la rotación, pero los puntos individuales en las rectas se transformarán.

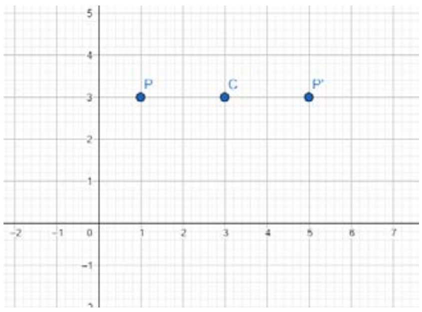


- Dos Rectas Perpendiculares:
  Las dos rectas perpendiculares se mantendrán perpendiculares después de la rotación, pero los puntos individuales en las rectas se transformarán.



62. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P'. Encuentra su centro de simetría.

P(x, y) , P'(x', y') , $C(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$



63. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?

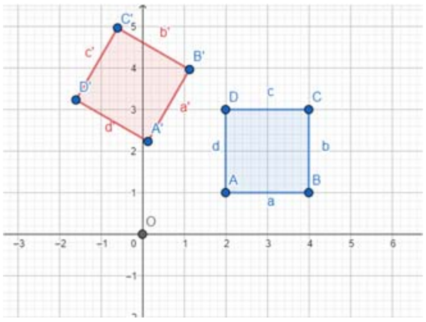
- Giro de 60°:

¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura?

La figura se rotará 60° en sentido antihorario alrededor del centro de giro.

¿Hay rectas invariantes?

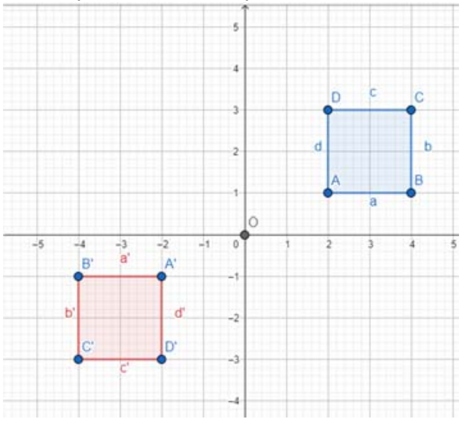
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes, lo que significa que permanecen en la misma posición después de la rotación.



- Giro de 180°:

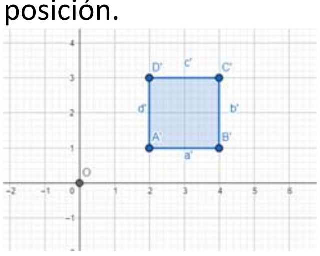
¿Qué ocurre al aplicar un giro de 180° a una figura?
La figura se invertirá, es decir, cada punto se moverá 180° alrededor del centro de giro.

¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes; permanecen en la misma posición después de la rotación.



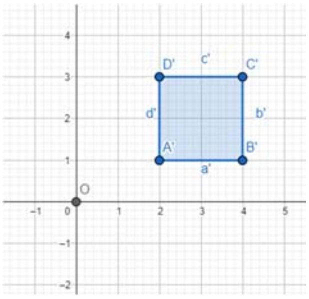
- Giro de 0°:

¿Qué ocurre al aplicar un giro de 0° a una figura?
La figura permanece en la misma posición; no hay ningún movimiento.
¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes. En un giro de 0°, todas las líneas, incluyendo las que pasan por el centro de giro, permanecen en la misma posición.

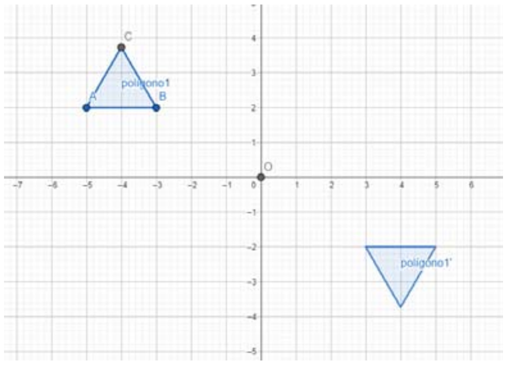


- Giro de 360°:

¿Qué ocurre al aplicar un giro de 360° a una figura?
La figura vuelve a su posición original; no hay cambio en la posición de los puntos.
¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes. En un giro de 360°, todas las líneas, incluyendo las que pasan por el centro de giro, permanecen en la misma posición.



64. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?



Los lados son iguales y los ángulos también, el sentido de los ángulos se mantiene y el movimiento es directo

65. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

B = no tiene simetría central

H = tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la línea central de la letra.

N = sí tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la diagonal.

O = sí tiene simetría central, el centro de simetría seria el centro del circulo

P = no tiene simetría central

S = tiene simetría central, el centro de simetría seria el centro de la curva diagonal.

T = no tiene simetría central

X = tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto de corte de las diagonales

Z = tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la diagonal

66. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

Tiovivo, rueda, trompo, ventilador, tambor de lavadora

67. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Plano:

Transformación por Giro: Si giras un plano en el espacio alrededor de una línea en el mismo plano, el plano se mantiene igual. No se transforma. Cada punto del plano gira alrededor de la línea, pero el plano en sí mismo sigue siendo el mismo.

Esfera:

Transformación por Giro: Si giras una esfera en el espacio alrededor de un eje que pasa por su centro, la esfera se mantiene igual. No se transforma. Cada punto de la esfera gira alrededor del eje, pero la esfera en sí misma permanece sin cambios.

Cono:

Transformación por Giro: Si giras un cono en el espacio alrededor de su eje central, el cono se mantiene igual. No se transforma. Cada punto del cono gira alrededor del eje, pero el cono en sí mismo sigue siendo el mismo.

Dos Planos Paralelos:

Transformación por Giro: Si giras dos planos paralelos en el espacio alrededor de una línea que es paralela a ellos, los planos se mantienen iguales. No se transforman. Cada punto de los planos gira alrededor de la línea paralela, pero los planos en sí mismos permanecen sin cambios.

Dos Planos Ortogonales (Perpendiculares):

Transformación por Giro: Si giras dos planos ortogonales en el espacio alrededor de su línea de intersección (la línea donde se cruzan), los planos se mantienen iguales. No se transforman. Cada punto de los planos gira alrededor de la línea de intersección, pero los planos en sí mismos siguen siendo los mismos.

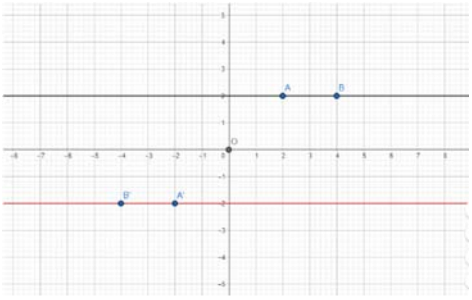
68. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

- Letras mayúsculas simétricas respecto a un eje vertical: A, M, T, U, V, W.
- Letras mayúsculas simétricas respecto a un eje horizontal: B, D.
- Letras mayúsculas no simétricas: F, K, N, R, Z.

69. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

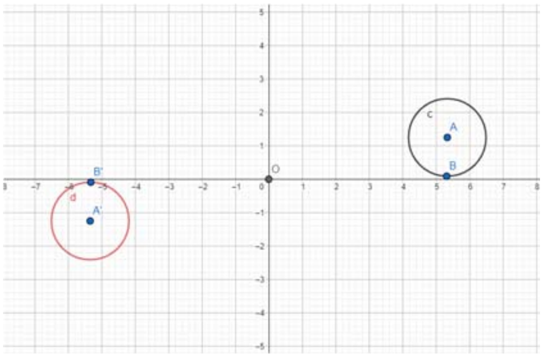
Recta:

Transformación: Una recta se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a otra recta. Esto se debe a que cada punto en la recta tiene un punto correspondiente a la misma distancia perpendicular a la línea de simetría.



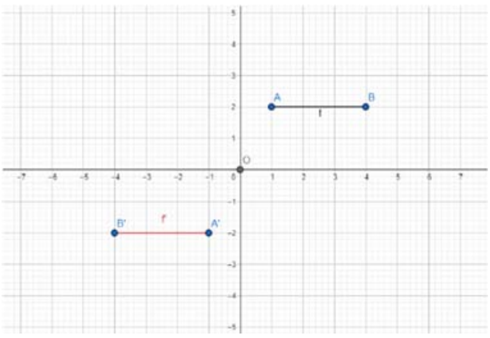
Circunferencia:

Transformación: Una circunferencia se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su centro. Cada punto en la circunferencia tiene un punto correspondiente a la misma distancia del centro, pero en el lado opuesto.



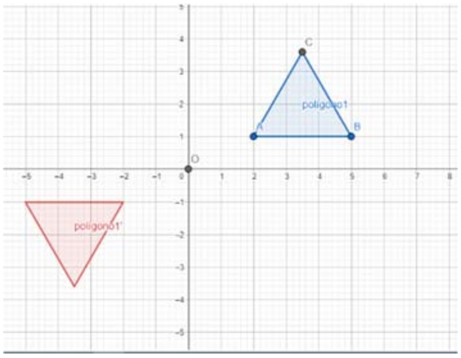
Segmento:

Transformación: Un segmento de línea se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su punto medio. Cada punto en el segmento tiene un punto correspondiente a la misma distancia del punto medio, pero en el lado opuesto.

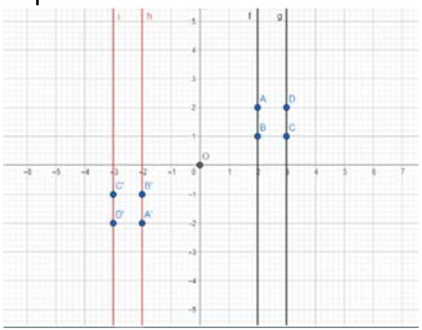


Triángulo:

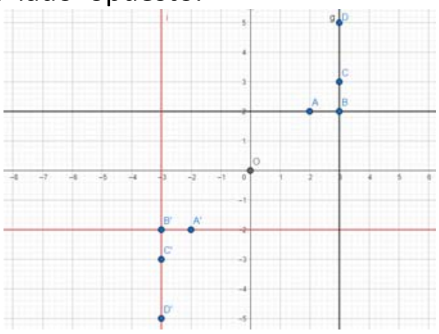
Transformación: Un triángulo se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su punto de intersección de medianas (centro de). Cada punto en el triángulo tiene un punto correspondiente a la misma distancia del centro de, pero en el lado opuesto.



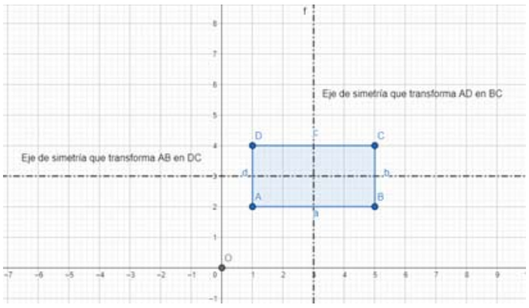
Dos Rectas Paralelas:
Transformación: Dos rectas paralelas se mantienen invariables al aplicar una simetría respecto a una tercera recta que sea perpendicular a ellas. Esto se debe a que cada punto en una de las rectas tiene un punto correspondiente a la misma distancia perpendicular a la línea de simetría.



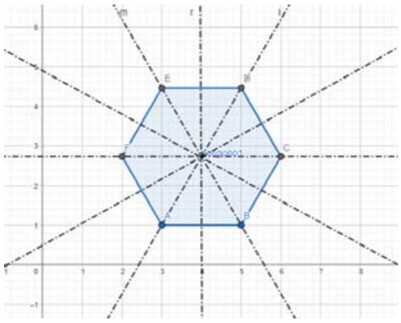
Dos Rectas Perpendiculares:
Transformación: Dos rectas perpendiculares se mantienen invariables al aplicar una simetría respecto al punto de intersección. Cada punto en una de las rectas tiene un punto correspondiente a la misma distancia del punto de intersección, pero en el lado opuesto.



70. Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC.

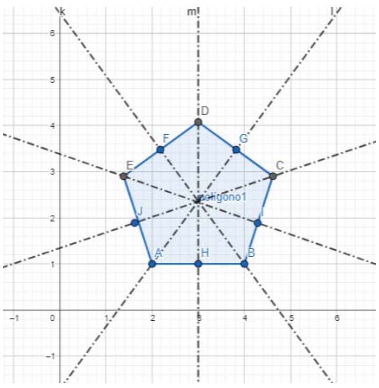


71. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.



Tiene 6 ejes de simetría; todo ellos pasan por el centro de la figura, 3 de ellos cortan a la figura por sus vértices y 3 de ellos van del vértice a la mitad del lado opuesto

72. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.



Tiene 5 ejes de simetría que van desde cada vértice a la mitad del lado opuesto.

73. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

1.Libros: su eje de simetría es el lomo

2. reloj de pared: su eje de simetría es el centro que divide el reloj en dos partes simétricas

3.Pantallas de ordenador: suelen tener forma rectangular y el eje de simetría es el centro de dicho rectángulo

Sillas: Algunas sillas tienen simetría, el plano de simetría pasa por el centro de la silla desde la mitad del respaldo hasta la mitad del asiento quedando dos patas en cada parte de la simetría.

Lámparas; son simétricas tanto si son circulares, cuadradas o de cualquier forma geométrica regular, el plano de simetría pasa por el centro de la lámpara.

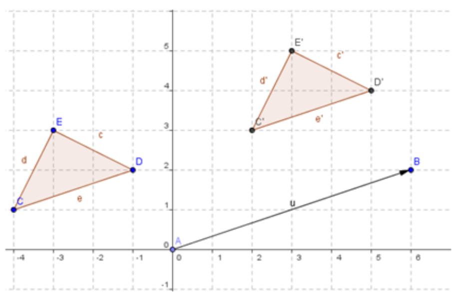
Ventanas: Las ventanas a menudo tienen simetría, especialmente si tienen un diseño regular, como ventanas rectangulares, el plano de simetría de las ventanas rectangulares pasa por el centro horizontal y verticalmente.

Mesas: las mesas tienen simetría, el plano de simetría de las mesas rectangulares pasa por el centro horizontal y verticalmente.

Traslación

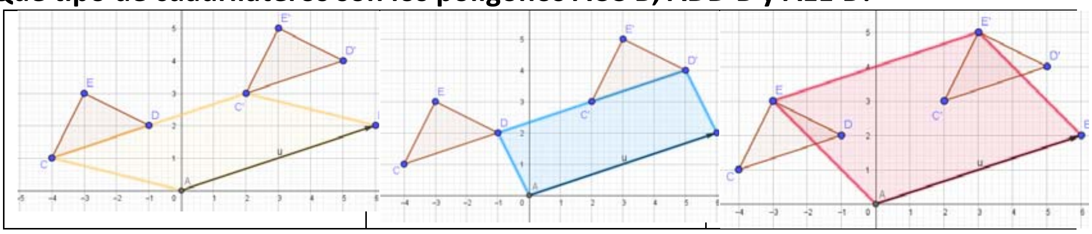
Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.

- En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B*. y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).



- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.

74. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos ACC'B, ADD'B y AEE'B?

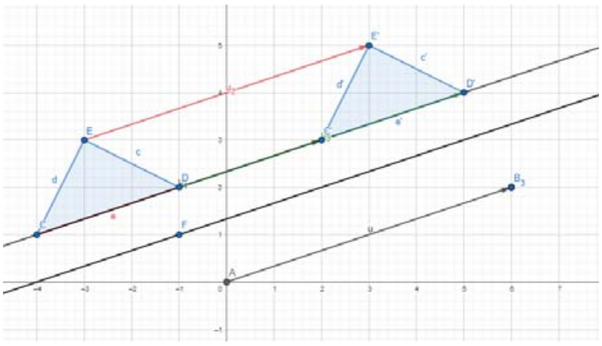


Dos lados iguales, CC' , DD' , EE' y el AB que es común. Un rectángulo y dos romboides

75. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos C', D' y E' se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos C, D, y E las coordenadas del vector u.

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos CDE y C'D'E' coinciden



a) Las coordenadas de los puntos C’, D’ y E’ se obtienen al sumar las coordenadas de C, D y E y el vector u
b) la longitud de los lados trasladados es igual a la de los lados originales y el área también ya que son simétricos

76. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

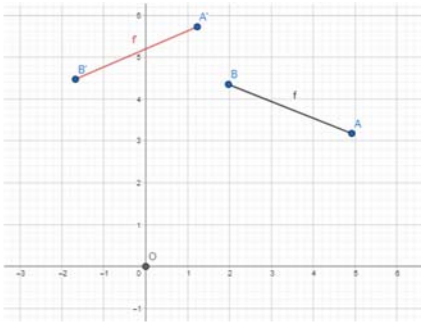
En un plano, los puntos que permanecen invariables al ser sometidos a traslaciones son aquellos que se encuentran en la línea de acción del vector de traslación.

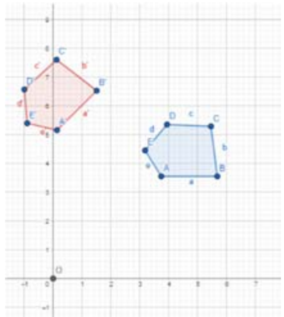
77. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Puntos Invariantes: Los puntos que se encuentran sobre la línea de simetría son invariantes durante una simetría axial.
Rectas Invariantes: Las rectas perpendiculares a la línea de simetría son invariantes durante una simetría axial.

78. **Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45°.**

a)Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman mediante este giro.



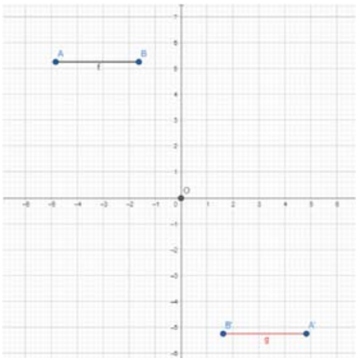


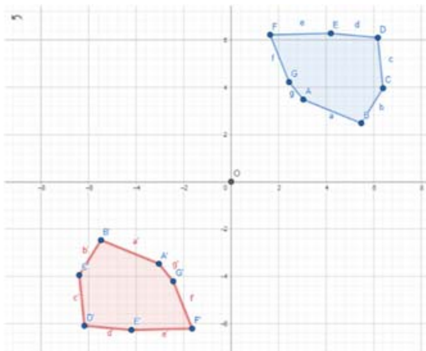
b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

1. Puntos Invariantes:
    - Centro de Giro: El punto alrededor del cual se realiza el giro permanece invariable después de la rotación.
2. Rectas Invariantes: si el giro no es de 180º no hay rectas invariantes

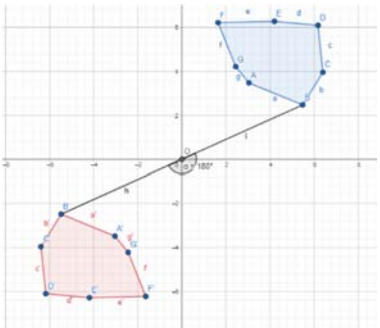
79. **Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto O como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.**

a) Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman por una simetría central.





b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) **Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.** 1. Puntos Invariantes:
   - Centro de Simetría: El punto alrededor del cual se realiza la simetría central permanece invariable después de la reflexión.

   2. Rectas Invariantes:
   - Rectas que Pasan por el Centro de Simetría: Cualquier recta que pase por el centro de simetría se mantiene invariable después de la reflexión. Los puntos en esta recta conservan su posición.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1. **Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 cm.**

$$\frac{7^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = 40{,}42\ \ cm^3$$

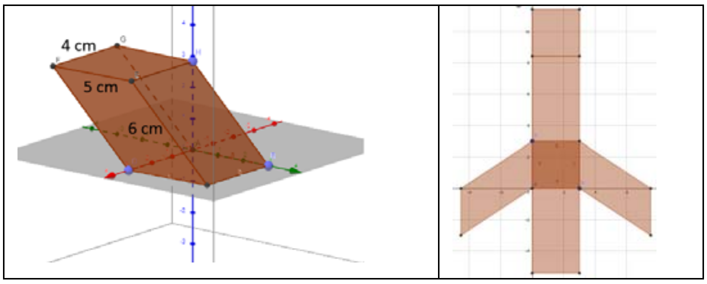
2. **Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 m.**

$$D^2 = 1^2 + 1^2; \quad D = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}cm$$

3. **Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 cm y altura 6 cm.**

$$D^2 = 15^2 + 6^2; \quad D = \sqrt{225+36} = \sqrt{261} = 16{,}15\ \ cm$$

4. **Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.**



5. **Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?**

$$D^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2; \quad D = \sqrt{77} = 8{,}8\ \ cm$$

6. **Un vaso de 11 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?**

$$2 + \sqrt{185} = 15{,}81\ \ cm$$

7. **¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?**

$$D^2 = 4^2 + 3^2 + 12^2; \quad D = \sqrt{169} = 13\ \ cm$$

Sí, se podría guardar, pero un bolígrafo de mayor longitud no.

8. **Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.**

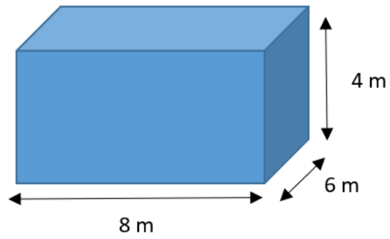
$$D^2 = 6^2 + 6^2 + 8^2; \quad D = \sqrt{136} = 11{,}66\ \ cm$$

9. **Si un ascensor mide 1.2 m de ancho, 1.6 m de largo y 2.3 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?**

$$D^2 = 1{,}2^2 + 1{,}6^2 + 2{,}3^2; \quad D = \sqrt{9{,}29} = 3{,}04\ m$$

Sí es posible ya que la diagonal mide más de 3 m

10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 m de altura?



$$D^2 = 6^2 + 8^2 + 4^2; \quad D = \sqrt{116} = 10{,}77\ m$$

11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 cm.

$$D = \sqrt{3} \cdot longitud\ arista; \qquad longitud\ arista = \frac{3{,}46}{\sqrt{3}} \cong 2\ cm$$

12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

$$D = \sqrt{(5+2)^2 + 10^2} = 12{,}2\ cm$$

13. En una pizzería la pizza de 15 cm de diámetro vale 2€ y la de 40 cm vale 5€. ¿Cuál tiene mejor precio?

$$PIZZA\ 1 = \frac{15^2\pi}{2} = \frac{225\pi}{2} = 353{,}25\ cm^2/€$$

$$PIZZA\ 2 = \frac{40^2\pi}{5} = 320\pi = 1004{,}8\ cm^2/€$$

Tiene mejor precio la segunda

14. Vemos en el mercado una merluza de 30 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

$$medida = 30 \cdot \sqrt[3]{2} = 37{,}8\ cm$$

15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

El padre tendrá más frio ya que su volumen es mayor que el de su hijo y para tener la misma cantidad de frio que su hijo debería llevar la ropa de abrigo proporcional no igual.

LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

1. Prisma cuadrangular regular
2. Prisma hexagonal regular
3. Tronco de cono
4. Tetraedro
5. Cilindro recto

17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

No, porque en un hexágono regular los ángulos internos tienen una medida de 120º. Si intentáramos construir un poliedro utilizando hexágonos regulares como caras, los ángulos en los vértices estarían formados por tres de los ángulos internos del hexágono. Es decir, 360º. En un poliedro regular, el ángulo en un vértice debe ser menos de 360ºpara que el poliedro sea cerrado y tenga una estructura tridimensional.

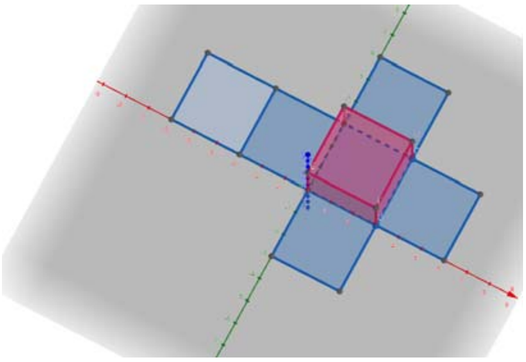
18. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

En el cubo 4 y en el octaedro 3

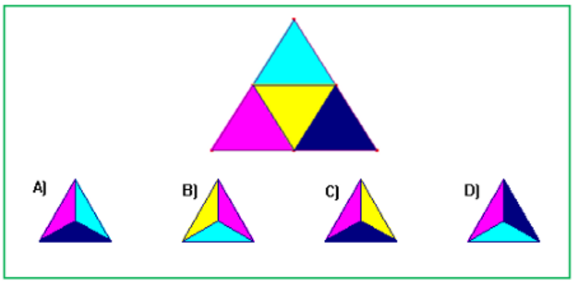
19. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

En el tetraedro no puedo encontrar dos aristas paralelas, en cambio, en el resto de poliedros regulares sí.

20. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



En la C

22. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

Área Lateral = Perímetro de la Base · Altura del Prisma

En este caso, la base del prisma es un triángulo rectángulo con catetos de 3 dm y 4 dm.

La otra arista es la hipotenusa: $h^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; $h = \sqrt{25} = 5$

Perímetro de la Base = 3 dm + 4 dm + 5 dm = 12 dm

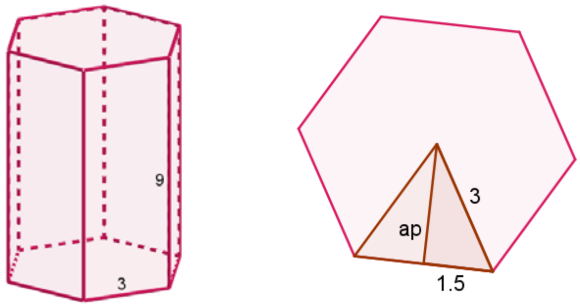
h = 8 dm

Área Lateral = 12 dm · 8 dm = 96 dm^2

Área de la Base = $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ dm^2

Área Total = 96 + 2 · 6 = 108 dm^2

23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 cm de arista basal y 0.9 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.



$3^2 = ap^2 + 1.5^2$; $ap = \sqrt{6,75} = 2.3$

Área base $= \frac{6 \cdot 3 \cdot 2.3}{2} = 23,38$ cm^2

0.9 dm = 9 cm

Área lateral = 6 · 3 · 9 = 162 cm^2

Área total = 2 · 23.38 + 162 = 208,76 cm^2

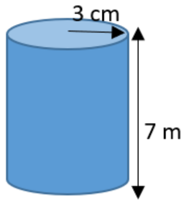
24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

V = 30 · 15 = 450 cm^3

25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2.7 dm, 6.2 dm y 80 cm.

$A = 2 \cdot (2{,}7 \cdot 6{,}2 + 2{,}7 \cdot 8 + 6{,}2 \cdot 8) = 175{,}88\ dm^2$

26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 m de altura y 3 cm de radio de la base.



$S = 2\pi \cdot 3 \cdot 700 + 2\pi \cdot 3^2 = 13251.24\ \text{cm}^2$

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 700^2 = 19.792034 cm^3$

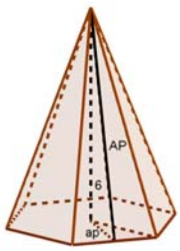
27. Calcula el área total de una esfera de 7 cm de radio.

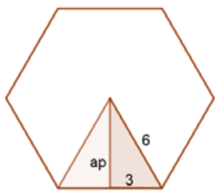
$A = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 615{,}44\text{cm}^2$

28. Calcula la apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm² y su base es un hexágono de 4 cm de lado.

$150 = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot ap}{2}; \quad 150 = \dfrac{24 \cdot ap}{2}; \quad 300 = 24 \cdot ap; \quad ap = \dfrac{300}{24} = 12{,}5\ cm$

29. Calcula la apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 dm y la altura de la pirámide es de 6 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.





Lado de la base: $\frac{36}{6} = 6$ dm

Apotema base: $6^2 = 3^2 + ap^2$; $ap = \sqrt{27}$

Área base: $\frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{27}}{2} = 93.53\ dm^2$

$AP^2 = \sqrt{27}^2 + 6^2 = 63$; $AP = \sqrt{63}$

Área lateral: $6 \cdot 6 \cdot \sqrt{63} = 285.74$ dm²

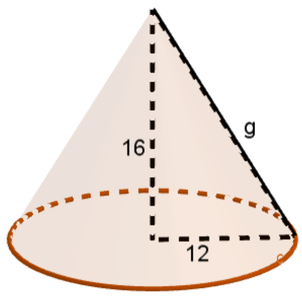
Área total= 93.53 + 285.74 = 379.27 dm²

Volumen: $\frac{93.53 \cdot 6}{3} = 187{,}06$ dm³.

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 16 cm gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



$g^2 = 12^2 + 16^2 = 400$; g = 20

Área lateral = π·r·g = π·12·20 = 753,6 cm^2

Área base = π·r^2 = π·12^2 = 452,16 cm^2

Área total = 452,16 + 753,6 = 1205,76 cm^2

Volumen = $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot g}{3} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 20}{3} =$ 3014,4 cm^3

31. Tres bolas de metal de radios 15 dm, 0.4 m y 2 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

$$Vtotal = \frac{4}{3}\pi \cdot (15)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (4)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (20)^3 = 47915{,}5$$

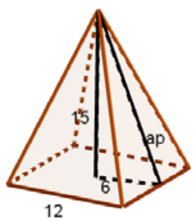
$$47915{,}5 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; \quad r^3 = \frac{47915{,}5}{4{,}18} = 11463{,}03; \quad r = \sqrt[3]{11463{,}03} = 22{,}54 \ dm$$

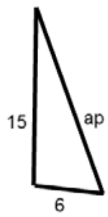
D=22,54 · 2= 45,08 dm

32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 m de diámetro y 30 m de profundidad?

Volumen = $\pi \cdot 0{,}75^2 \cdot 30 = 52{,}9$ m^3 = 52900 dm^3 = 52 900 litros

33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 cm y que su altura sea de 15 cm?





Área de la base = 12^2 = 144 cm^2

$ap^2 = 15^2 + 6^2 = 261$,

$ap = \sqrt{261} = 16{,}16$

Área lateral = 4 · $\frac{12 \cdot 16{,}16}{2} =$

$387{,}84 \ cm^2$

Área total = 387,84 + 144 = 531,84 cm^2

34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm^3 de volumen.

Volumen del prisma, $800 = 4 \cdot 4 \cdot h$; $h = 50 \ cm$

Volumen cilindro = $\pi \cdot r^2 \cdot h$ = $\pi \cdot 2^2 \cdot 50 = 200\pi \ cm^3$= 628.31cm^3

35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 m de alto y 135 dm^3 de volumen?

1,50 m = 15 dm ; volumen cilindro: $135 = \pi \cdot r^2 \cdot 15$; $r = \sqrt{\frac{135}{\pi \cdot 15}} =$ 1,69 dm

$Ab = \pi \cdot 1{,}69^2 = 9 \ dm^2$

36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

$V = 20 \cdot 10^2 \cdot \pi \ \ m^3 =$ $2000\pi \ \ m^3$ = $2000\pi \cdot 1000$ dm^3 = 2 000 000π litros

Envases = $\frac{2000000\pi}{2,5} = 2\,512\,000 \ \ envases$

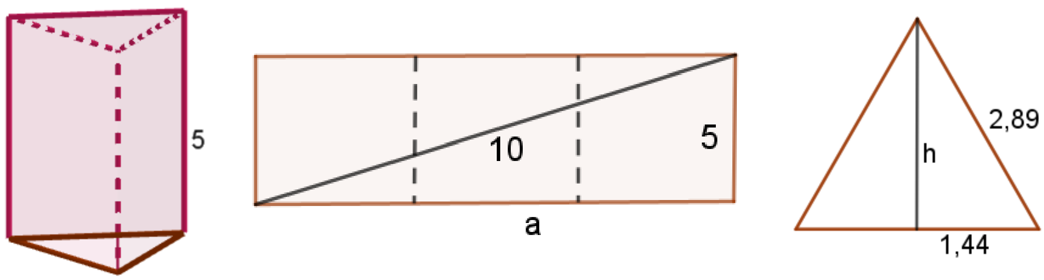
37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

$$Área \ \ triángulo \ \ equilatero = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot lado^2$$

$$Área \ \ tetraedro = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) = \sqrt{3}cm^2$$

$$Área \ \ anillo = 10 \cdot \sqrt{3} = 17,32 \ \ cm^2$$

38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 dm de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.



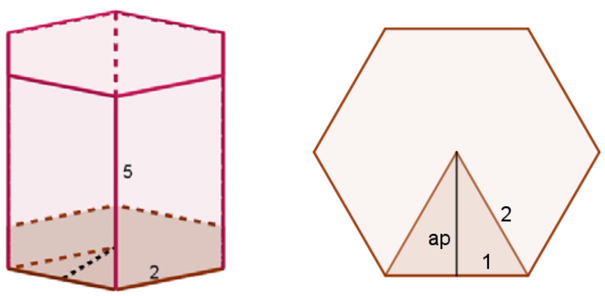
$D^2 = a^2 + b^2$; $\ \ 10^2 = a^2 + 5^2$; $\quad$ a $= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = 8,66$;

$A_l = \sqrt{75} \cdot 5 = 5\sqrt{75} = 43,3 \ dm^2$

$\frac{8,66}{3} = 2,89$; $\ \ 2,89^2 = 1,44^2 + h^2$; $\ h = 2,51$

$A_t = 5\sqrt{75} + 2 \cdot \frac{2,89 \cdot 2,51}{2} = 93,84 \ \ dm^2$

39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 cm de lado de la base y 5 cm de altura.



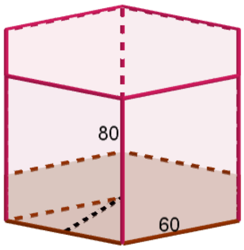
$2^2 = ap^2 + 1^2$; $\quad ap = \sqrt{3}$

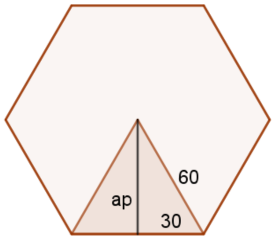
$At = perímetro \cdot (h + ap) = 6 \cdot 2 \cdot (5 + \sqrt{3}) = 80,78 \ \ cm^2$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.





$$60^2 = ap^2 + 30^2; \quad ap = 30\sqrt{3}$$

$$Área\ base = \frac{6 \cdot 60 \cdot 30\sqrt{3}}{2} = 5400\sqrt{3} cm^2$$

$$Volumen\ tierra = 5400\sqrt{3} \cdot 80 = 432000\sqrt{3} = 748240\ cm^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 748{,}24\ dm^3$$

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18.3 m.

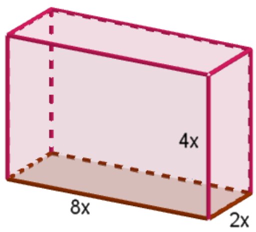
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2; \quad 18{,}3^2 = (2x)^2 + (4x)^2 + (8x)^2 = 4x^2 + 16x^2 + 64x^2;$$

$$334{,}89 = 84x^2; \quad x^2 = \frac{334{,}89}{84} = 3{,}9; \quad x = \sqrt{3{,}9} = 1{,}97$$

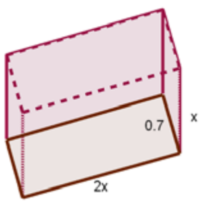
$$a = 2 \cdot 1{,}97 = 3{,}94\ m\ ; \quad b = 4 \cdot 1{,}97 = 7{,}88\ m\ ; \quad c = 8 \cdot 1{,}97 = 15{,}76\ m$$

$$A = 2 \cdot (3{,}94 \cdot 7{,}88 + 3{,}94 \cdot 15{,}76 + 7{,}88 \cdot 15{,}76) = 434{,}66\ m^2$$

$$V = 3{,}94 \cdot 7{,}88 \cdot 15{,}76 = 489{,}3\ m^3$$



42. Un ortoedro tiene 0.7 dm de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?



$8 = 2·2x·x + 2·0.7·x + 2·0.7·2x = 4x^2 + 4.2x$

$4x^2 + 4.2x – 8 = 0$, $x^2 + 1.05x – 2 = 0$, $x = 0.98$

Volumen: $0.98 \cdot 2·0.98 \cdot 0.7 = 1.34456$ dm^3

Volumen: 1 344.56 cm^3

43. Si el volumen de un cilindro de 15 cm de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.

Volumen cilindro = $\pi \cdot r^2 \cdot h$; 424 = $\pi \cdot r^2 \cdot 15$; $r = \sqrt{\frac{424}{15\pi}} = 3\ cm$

44. Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros.
a) Calcula el volumen del depósito en m^3.
b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi\ m^3$;
b) $3\pi\ m^3$ = 9,42 m^3 = 9420 dm^3 = 9420 l de agua caben en el depósito.

45. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
a)1l = 1dm^3 = 1000cm^3
b)$V = Área\ base\ \cdot altura$; 1000 = 100 · h ; h = 10cm

46. Una circunferencia de longitud 18.84 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.
Calculamos el radio de la circunferencia: $l = 2\pi r$, $18.84 = 2\pi r$, $r = \frac{18.84}{2\pi} = \frac{9.42}{\pi}$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9.42}{\pi}\right)^3 = 113.04\ cm^3$

47. Una puerta mide 1.8 m de alto, 70 cm de ancho y 3 cm de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.
Área total a barnizar = 2 · 1.8 · 0.7 = 2.52 m^2
Costo del barnizado = Área total a barnizar · tarifa de barnizado =2.52 · 5 €/m^2 = 12.60€
Costo de la madera = 1.8 · 0.7 · 0.03 · 280 €/m^3 = 10.584€
Costo total de la puerta: Finalmente, el costo total de la puerta es la suma del costo del barnizado, el costo de la madera y el costo de instalación, que es 100 €.
Costo total = 12.60 € + 10.584 € + 100 € = 123.18€

48. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 cm de altura y 15 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 cm de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
$Vcono = \frac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 21}{3} = 1236{,}375\ cm^3$
$1236{,}375 = \pi \cdot 7,5^2 \cdot h;\quad h = \frac{1236{,}375}{176{,}6} = 7\ cm\ alcanzará\ el\ agua$

49. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

14 cm de diámetro y 14 cm de altura.

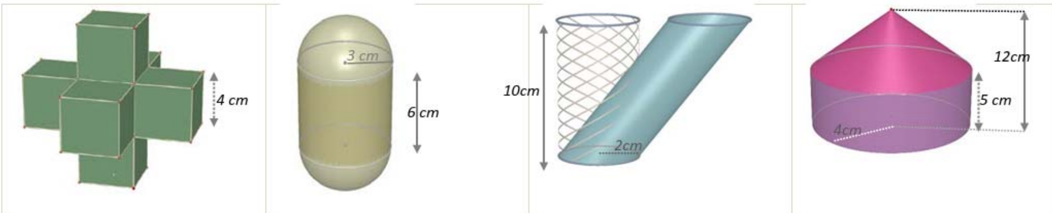
A = πr^2 = $14^2 \pi$ = 615.75 cm^2.

50. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 m?

$$251{,}2 = 2\pi \cdot r; \qquad r = \frac{251{,}2}{2\pi} = 40\ m$$

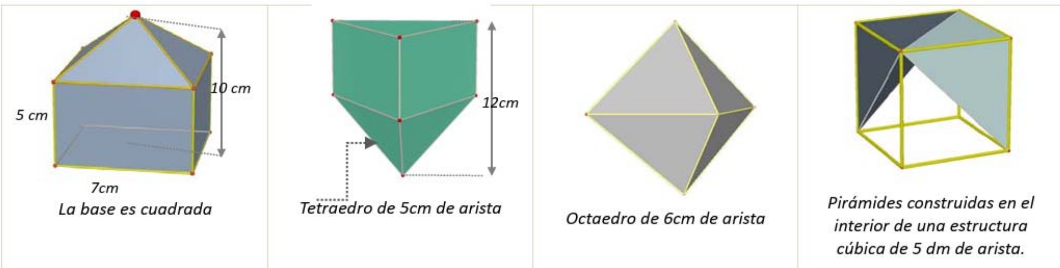
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 40^3 = 267946{,}6667\ m^3$$

51. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



1. Área: 480 cm^2. Volumen: 448 cm^3.
2. Área: 72 π cm^2 = 226.19 cm^2. Volumen: 90 π cm^3 =282.743 cm^3.
3. El área puede variar. Volumen: 40 π cm^3 = 125.66 cm^3.
4. Área= 277.24 cm2. Volumen: 352$\boldsymbol{\pi}$ 3 cm^3 = 368.61 cm^3

52. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:



1. Área:274.45 cm^2. Volumen: 980,3 cm^3
2. Área:162.06 cm^2. Volumen: 116.636 cm^3.
3. Área: 124.71 cm^2. Volumen: 101.82 cm^3.
4. Área: 59.1506 dm^2. Volumen: 41.666 dm^3.

53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m². Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

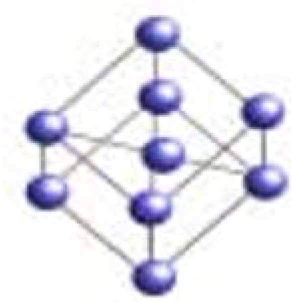
$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1 = 4\pi\ m^2$ = 12,56 m^2

coste = 12,56 · 300 = 3768€

54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm³ de volumen.

$$33{,}51 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; \qquad r^3 = \frac{33{,}51}{4{,}18} = 8{,}01; \qquad r = \sqrt[3]{8{,}01} \approx 2\ dm$$

55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



Hay 9 esferas, 12 cilindros laterales y 8 cilindros centrales

V esferas $= \frac{\pi}{3} \cdot (9)^3 = 763{,}41$; $763{,}41 \cdot 9 = 6870{,}66 \text{m}^3$; 9 esferas

$D = l\sqrt{3}$; $103 = l\sqrt{3}$; $l = \frac{103}{\sqrt{3}} = 60{,}5$ lado del cubo

Altura de los cilindros laterales: 60,5 – 18 – 18 = 24,5

Altura de los cilindros centrales: 60,5 – 18 – 18 – 18 = 6

V cilindro lateral $= \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 24{,}5 = 76{,}97$

Volumen cilindros laterales: $76{,}97 \cdot 12 = 923{,}63$

Volumen cilindro central: $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 = 18{,}85$

Volumen cilindros centrales: $18{,}85 \cdot 8 = 150{,}8$

$V\ total = 6870{,}66 + 923{,}63 + 150{,}8 = 7945\ m^3$

Como la escala es 1:100, 7945 : 100 = 79,45 m³ necesitamos.

56. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2 €/dm², ¿cuánto dinero ha costado en total?

Área del depósito (fuera y dentro): $2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 8 =$ 452, 39

Área de la base: $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28{,}27$

Área total: $452{,}39 + 28{,}27 = 480{,}66$

Coste total: $2 \cdot 480{,}66 = 961{,}32$ €

57. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

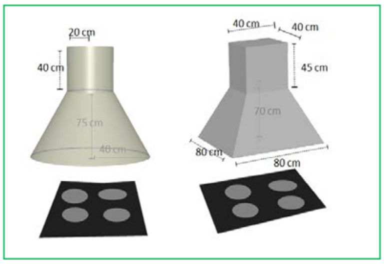
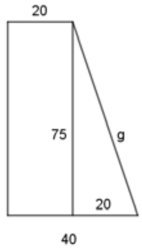
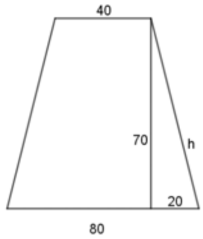
a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

$V = 20 \cdot 5 \cdot 2 = 200\ m^3$; $200\,000\ dm^3$/ l

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2 ?

$A = 2\cdot(20\cdot2) + 2\cdot(5\cdot2) + (20\cdot5) = 200\ m^2$; $200\cdot20 = 4000$€

58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

		Para calcular g en el tronco de cono		Para calcular la altura del trapecio de las caras del tronco de pirámide

<u>Área campana 1</u>: área de tronco de cono + área de cilindro

Área tronco cono: π(R + r)g , calculamos g, $g^2 = 75^2 + 20^2 = 6025$, $g = 77{,}62$

π(R + r)g = π(40 + 20)77,62 = 14 623,77

Área del cilindro (sin bases): 2πrh = 2π·20·40 = 5 024

<u>Área campana 1</u>: 14 623,77 + 5 024 = <u>19 647,77 cm^2</u>

<u>Área campana 2</u>: área tronco pirámide + área cubo (sin bases)

Área tronco pirámide: $4 \cdot \frac{B+b}{2} \cdot h$, calculamos h, $h^2 = 70^2 + 20^2 = 5300$, $h = 72{,}8$

$$4 \cdot \frac{B+b}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{80+40}{2} \cdot 72{,}8 = 17472$$

Área del cubo: 4· 40 · 45 = 7200

<u>Área campana 2</u>: 17 472 + 7 200 = <u>24 672 cm^2</u>

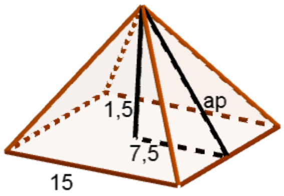
Es mayor la segunda, por tanto, tiene menor coste la primera.

59. En una vasija cilíndrica de 3 m de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 m el nivel del agua?

Volumen de la bola es igual al volumen de un cilindro de radio 1,5 m y altura 0,5 m

V = π · r^2 · h = π · 1,5^2 · 0,5 = 3,534 m^3

60. El precio de las tejas es de 12.6 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 15 m de lado de la base?



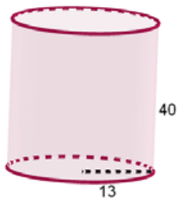
Área lateral = $\frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2}$

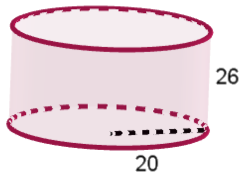
Calculamos la apotema: $ap^2 = 1{,}5^2 + 15^2 = 58{,}5$, $ap = 7{,}6$

$\frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot apotema}{2} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 7{,}6}{2} = 456$

Coste : 456 · 12,6 = 5 745,6 €

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 cm y 26 cm formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



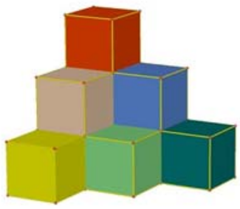


Cilindro 1 ; V = π · r^2 · h = π · 13^2 · 40 = 21 226,4 cm^3

Cilindro 2: V = π · r^2 · h = π · 20^2 · 26 = 32 656 cm^3

El segundo cilindro tiene más volumen

62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

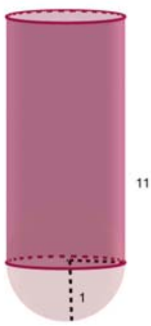


Volumen de un cubo = 2^3 = 8

216 : 8 = 27,

27 – 10 = 17 cubos hay que añadir.

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 cm y la altura total es de 12 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.



Volumen cilindro: V = π · r^2 · h = π · 1^2 · 11 = 34,54 cm^3

Volumen semiesfera: V = $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3\right) = \frac{2}{3}\pi\ cm^3$

Volumen total: = 34,54 + $\frac{2}{3}\pi$ = 36,6 cm^3

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 m, y su altura 146 m. ¿Qué volumen encierra?

$V = \frac{área\ de\ la\ base \cdot altura}{3} = \frac{230 \cdot 230 \cdot 146}{3} = 2\ 574\ 466{,}67$ m^3

65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24 g/cm3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus bases miden 2.5 cm y 1.2 cm, y su altura 3 cm?

Volumen tronco de cono: $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot (1{,}25^2 + 0{,}6^2 + 1{,}25 \cdot 0{,}6) = 8{,}39$ cm^3

1000 tapones pesan: 1000 · 8,39 · 0,24 = 2013,6 g

66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.

Si el radio de la esfera es r, los radios del cilindro y el cono también es r y su altura 2r.

Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\,\pi \cdot r^3$

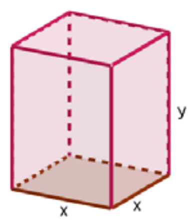
Volumen del cono: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 2r}{3} = \frac{2\pi \cdot r^3}{3}$

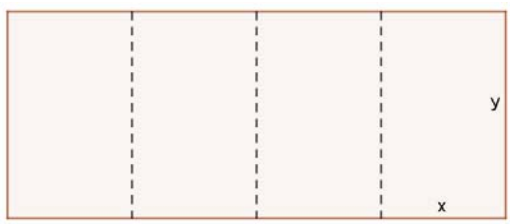
Volumen del cilindro – del cono = $2\,\pi \cdot r^3 - \frac{2\pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ = Volumen de la esfera.

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 cm

Volumen octaedro: $\mathrm{V} = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{3} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^3}{3} = 3{,}77$ cm^3

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm^3, y de área lateral 240 cm^2.





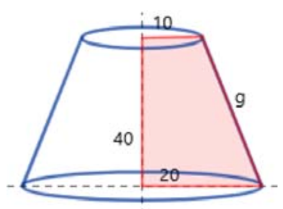
Volumen = 240 = x · x · y

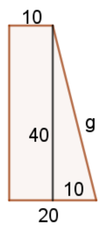
Área lateral = 240 = 4x · y

$\begin{cases} x^2 y = 240 \\ 4xy = 240 \end{cases} \rightarrow x^2 y = 4xy \rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x = 4\,; \;\; 4 \cdot 4 \cdot y = 240 \rightarrow y = 15$

Las aristas de la base han de medir 4 cm y la altura 15 cm.

69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 cm de altura y bases de radios 20 y 10 cm. Calcula su superficie.





Calculamos g:

$g^2 = 40^2 + 10^2\,,\, g = \sqrt{1700} = 41{,}23$

Área tronco cono: π(R + r)g = π·(20 + 10)·41,23 = 3883,86

Área círculos: $\pi R^2 + \pi r^2 = \pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 10^2 = 1570$

Superficie: 3883,86 + 1570 = 5453,86 cm^2

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

70. Un bote cilíndrico de 15 cm de radio y 30 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

Volumen cilindro: $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 30 = 21195\ cm^3$
Volumen pelotas: $4 \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot r^3 = 4 \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot (3.5)^3 = 716{,}8\ cm^3$
Espacio libre: $21195 - 716{,}8 = 20\,478{,}2\ cm^3$

71. Un embudo cónico de 15 cm de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \ ; \quad 1000 = 58{,}8 \ \cdot h \ ; \qquad h = \frac{1000}{58{,}8} \approx 17 \ \text{cm}$$

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 dm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h; \quad 450 = \pi \cdot 30^2 \cdot h; \quad 450 = 900\pi \cdot h; \quad h = \frac{2826}{450} = 6{,}28 \ \text{dm de altura}$$

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0.5 m de altura y 40 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?

$$A \ \text{sombra} = \frac{2a^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot 40^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = 7725{,}48 \ \text{cm}^2$$

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 cm de largo y 20 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?

$$65000 = 65 \cdot 20 \cdot h; \qquad h = \frac{65000}{1300} = 50 \ \text{cm de profundidad}$$

75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 cm de altura y 4 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm³ de helado contiene?

$superficie \ galleta = \pi \cdot 2 \cdot 12{,}16 = 76{,}3 \ cm^2$; radio esfera: 2

Volumen semiesfera $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2^3}{3} = 16{,}75$

Volumen cono: $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 12}{3} = 50{,}24$

Volumen helado: $16{,}75 + 50{,}24 \approx 67\ cm^3$

INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

76. Calcula la distancia entre los puntos A(7, 3) y B(2, 5).

D(A, B) = $\sqrt{(2-7)^2+(5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

77. Calcula la distancia entre los puntos A(7, 3, 4) y B(2, 5, 8).

D(A, B) = $\sqrt{(2-7)^2+(5-3)^2+(8-4)^2} = \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45}$

78. Calcula la longitud del vector de componentes u = (4, 5).

L = $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

79. Calcula la longitud del vector de componentes u = (4, 5, 0).

L = $\sqrt{4^2+5^2+0^2} = \sqrt{16+25+0} = \sqrt{41}$

80. El vector u = (4, 5) tiene el origen en el punto A(3, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

Extremo = B = (B_1, B_2)

u = AB ; (4, 5) = (B_1-3, B_2-7)

B_1-3 = 4; B_1 = 4 + 3 = 7

B_2-7 = 5; B_2 = 5 + 7 = 12

B = (7, 12)

81. El vector u = (4, 5, 2) tiene el origen en el punto A(3, 7, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

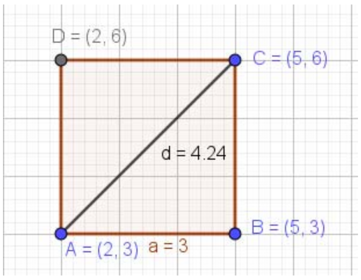
Extremo = B = (B_1, B_2, B_3)

u = AB ; (4, 5, 2) = (B_1-3, B_2-7, B_3-5)

B_1-3 = 4, B_1 = 4 + 3 = 7 ; B_2-7 = 5, B_2 = 5 + 7 = 12 ; B_3 – 5 = 2 , B_3 = 2 + 5 = 7

B = (7, 12, 7)

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto A(2, 3) y C(5, 6). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.



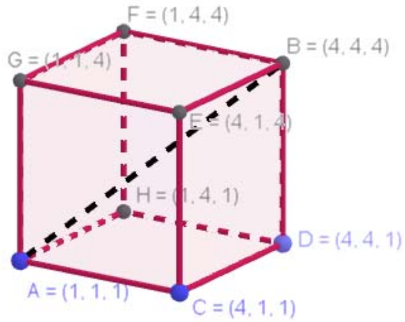
D(A, C) = $\sqrt{(5-2)^2+(6-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\sqrt{18}^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 18 = 2a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

B(2 + 3, 3) = (5,3) ; C(2, 3 + 3) = (2, 6)

d = $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4{,}24$

83. Dibuja un cubo de diagonal A(1, 1, 1) y B(4, 4, 4). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.



C (4, 1, 1), D (4, 4, 1), E (4, 1, 4),

F (1, 4, 4), G (1, 1, 4), H(1, 4, 1)

Arista: 3

Diagonal de una cara: $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = = 3\sqrt{2}$

Diagonal del cubo: $\sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{9+9+9} =$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

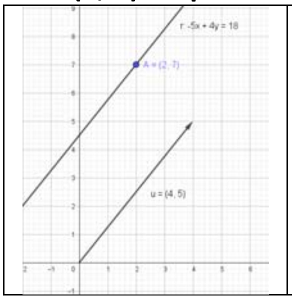
84. Sea X(x, y) un punto del plano, y A(2, 4), escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

d(A, X) = $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} = 3 \to (x-2)^2+(y-4)^2 = 9$

85. Sea X(x, y, z) un punto del espacio, y A(2, 4, 3), escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

d(A, X) = $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2} = 3 \to (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2 = 9$

86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto A(2, 7) y tiene como vector de dirección u = (4, 5). Represéntala gráficamente.



x = 2 + 4t
y = 7 + 5t

87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 7) y B(4, 6), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

AB(4-2, 6-7) = (2, -1) ; punto A(2, 7) , vector u(2, -1)

Paramétrica: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 7-t \end{cases}$

Continua: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-7}{-1} \to -x+2 = 2y-14$

Implícita: x + 2y – 16 = 0

Explícita: $y = \frac{-1}{2}x + 8$

88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 4, 6) y B(5, 2, 8), de forma continua, y como intersección de dos planos.

u = AB(5-2, 2-4, 8-6) = (3, -2, 2), punto A(2, 4, 6)

Continua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-6}{2} \to$

$$\to \begin{cases} -2x + 4 = 3y - 12 \\ 2y - 8 = -2z + 12 \end{cases} \to \begin{cases} 2x + 3y - 16 = 0 \\ 2y + 2z - 20 = 0 \end{cases}$$

89. En el cubo de diagonal A(1, 1, 1) y B(5, 5, 5) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Ecuaciones de los planos de las caras: x = 1; y = 1; z = 1; x = 5; y = 5; z = 5.

Aristas:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} y = 5 \\ z = 5 \end{cases}, \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 \end{cases},$

Vértices: C(1, 1, 5), D(1, 5, 1), E(1, 5, 5), F(5, 1, 1), G(5, 1, 5), H(5, 5, 1).

90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$ y radio 3.

$$x^2 + y^2 = 9$$

91. Escribe la ecuación de la esfera de centro A(2, 7, 3) y radio 4.

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 16$$

92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + t} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = 2} \end{cases}$ y radio 2.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro A(3, 7) y radio 3.

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$$

94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 9$$

MOVIMIENTOS

95. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

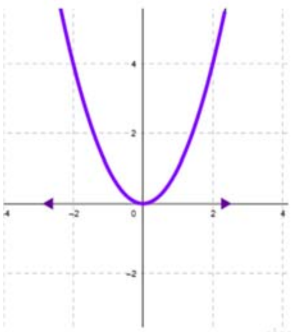
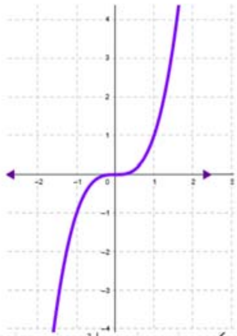
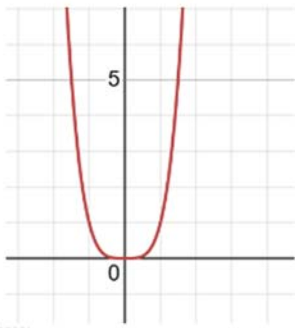
Sí. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

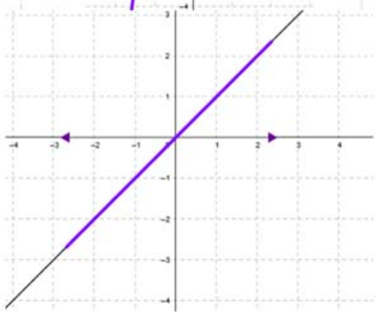
96. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica

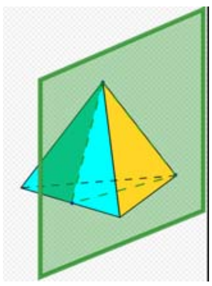
97. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica). a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

FUNCIÓN	EJE DE SIMETRÍA	CENTRO DE SIMETRÍA	PARIDAD
$y = x^2$	x = 0 (vertical)	Ninguno	Par
$y = x^3$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar
$y = x^4$	x = 0 (vertical)	Ninguno	Par
$y = x$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar



98. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibújalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.



Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría: Cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.

Cada plano divide el tetraedro en dos mitades simétricas.

99. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, el prisma recto de base rectangular tiene simetría central. Tiene un centro de simetría en el punto medio del prisma, donde todas las diagonales de las caras se intersecan. Cualquier punto de la figura tiene un simétrico opuesto respecto a este centro.

Sí, el prisma tiene 3 planos de simetría. Estos son:

2 planos verticales que pasan por el centro de las bases rectangulares, dividiendo cada base en dos mitades simétricas. Estos planos son perpendiculares entre sí.

1 plano horizontal que pasa por el centro de la altura del prisma y divide al prisma en dos mitades simétricas, cortando a través de las dos bases rectangulares.

Sí, el prisma tiene 2 ejes de giro. Estos son:

Ejes que pasan por el centro de las bases: Son dos ejes de giro perpendiculares a las bases rectangulares. El prisma puede girar 180° alrededor de cada uno de estos ejes sin que se altere su forma, ya que las bases rectangulares son simétricas.

Eje vertical: El prisma puede girar alrededor del eje vertical que pasa por el centro de las bases, pero este eje no genera más simetrías en ángulos menores a 180°.

100. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, tiene simetría central**.** Existe un centro de simetría en el punto medio de la altura de la pirámide, y cualquier punto tiene su simétrico en el lado opuesto de este centro.

Sí, tiene 3 planos de simetría. Son planos verticales que pasan por el vértice superior de la pirámide y dividen la base triangular en dos mitades simétricas. Cada plano corta la pirámide a lo largo de una arista de la base y pasa por el vértice superior.

Sí, tiene 1 eje de giro. Este eje es vertical, pasa por el vértice superior de la pirámide y el centro de la base triangular. La pirámide puede girar 120° y 240° alrededor de este eje sin que se altere su forma, debido a la simetría de la base triangular regular.

101. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	No	Si	4, 120º	Si	
Cubo	Si	Si	3, 90º; 4, 120º; 6, 180º	Si	
Octaedro	Si	Si	3, 90º; 4, 120º; 6, 180º	Si	
Dodecaedro	Si	Si		Si	
Icosaedro	Si	Si		Si	

102. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240°, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240°? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120°

Aplicamos ahora la simetría de vértice A: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$. La composición transforma al triángulo en $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría.

b) Hacemos ahora el giro de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$.

c) Comprobar

d) Componemos el giro de 120° con el de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ y obtenemos la identidad.

e) Componemos dos giros de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ y obtenemos el giro de 120°.

f) La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).

103. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico.

Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?
¿Hay simetrías de eje vertical?
¿Hay simetrías de eje horizontal?
¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
¿Hay giros de 90°?
¿Hay giros de 45°?
¿Hay traslaciones?

Hay simetrías tanto verticales, como horizontales como oblicuas. También podemos considerar giros de 90°, porque al ser figuras simétricas, se replicarían exactamente iguales, pero en otro lugar. Los giros de 45° nos daría el mismo resultado que aplicar una simetría oblicua

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices A(2, 2) B(1, 4) y C(0, 3) son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$
$$CA = \sqrt{(2-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

b) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

$$\frac{(3\cdot 10)\cdot(4\cdot 10)}{2} = 600\ cm^2 = 6dm^2$$

b) 6 dm²

3.La altura de un prisma de base cuadrada es 20 cm y el lado de la base es 5 cm, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

$A_l = (4 \cdot 5) \cdot 20 = 400\ cm^2$
$A_b = 5 \cdot 5 = 25\ cm^2$
$A_t = 400 + 2 \cdot 25 = 450\ cm^2$

a) 450 cm²

4.Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30\,000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

$V = A_b \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 7.5\sqrt{3}m^3$

$A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ m^2$

d)$7,5\sqrt{3}m^3$

5.El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 m de altura y 1000 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

$A_{lateral} = \frac{perimetro\ \ base\ \ \cdot apotema}{2} = \frac{(4\ \cdot 10)\cdot 5{,}02}{2} = 100{,}4\ m^2$; $100{,}4 \cdot 15 = 1506 \approx 1508$

$$ap^2 = 5^2 + 0{,}5^2; \quad ap = \sqrt{25 + 0{,}25} = \sqrt{25{,}25} = 5{,}02$$

a) 1508 tejas.

6.Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 cm, está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

$$V = 30 \cdot 20 \cdot 15 = 9000 cm^3$$

$$Nº\ CUBOS = \frac{9000}{1} = 9000\ cubos$$

$$A_{BASE\ PRISMA} = 10 \cdot 10 = 100\ cm^3; \quad 100 \frac{cubos}{capa}; \frac{9000}{100} = 90\ capas; \quad 90\ cm$$

d) 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2\,250}$ *cm*

V esfera = V cono

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}; \quad 4{,}18 \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3}; \quad 4{,}18 \cdot r^3 = 314; \quad r^3 = \frac{314}{4{,}18} = 75{,}1; \quad r \cong \sqrt[3]{75}$$

b)$\sqrt[3]{75}$

8. Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 423{,}9\ cm^3; 0{,}4239 \frac{dm^3}{l}$$

$$Nº\ ENVASES = \frac{42{,}39}{0{,}4329} = 100\ envases$$

a)100

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos A(2, 5) y B(1, 3) es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

AB(1-2, 3-5) , AB(-1, -2) $m = \frac{-2}{-1} = 2$ $y - 5 = 2(x - 2)$; $y = 2x - 4 + 5$

c) y = 2x + 1

10.La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = r^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = 3^2$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 25 + 4 + 9 - 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$$

b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

Matemáticas aplicadas
4ºA E.S.O.
Capítulo 7: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

María Peláez Ruiz

Silvana Parra Torres

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 3x - 4}$

$TVM[\text{-}3, 2]: \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{2+13}{2+3} = 3$

$TVM[1, 5]: \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{11+1}{5-1} = 3$

$TVM[0, 3]: \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{5+4}{3-0} = 3$

b) $\boldsymbol{y = -2x - 3}$

$TVM[\text{-}3, 2]: \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{-7-3}{2+3} = -2$

$TVM[1, 5]: \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-13+5}{5-1} = -2$

$TVM[0, 3]: \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{-13+3}{3-0} = -2$

c) $\boldsymbol{y = 0.5x + 2}$

$TVM[3, 2]: \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{3-0{,}5}{2+3} = 0{,}5$

$TVM[1, 5]: \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{4{,}5-2{,}5}{5-1} = 0{,}5$

$TVM[0, 3]: \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{3{,}5-2}{3-0} = 0{,}5$

d) $\boldsymbol{y = x - 1}$

$TVM[3, 2]: \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{1+4}{2+3} = 1$

$TVM[1, 5]: \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{4-0}{5-1} = 1$

$TVM[0, 3]: \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{2+1}{3-0} = 1$

2. Halla la tasa de variación media de la función y = x2 – 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

$TVM[-3, 2] \to \frac{\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(-3)}{2-3} \to \frac{(2^2-1)-((-3)^2-1)}{2+3} \to \frac{-5}{5} \to -1$

$TVM[1, 5] \to \frac{\mathrm{f}(5)-\mathrm{f}(1)}{5-1} \to \frac{(5^2-1)-(1^2-1)}{5-1} \to \frac{24}{4} \to 6$

$TVM[0, 3] \to \frac{\mathrm{f}(3)-\mathrm{f}(0)}{3-0} \to \frac{(3^2-1)-(0^2-1)}{3-0} \to \frac{9}{3} \to 3$

->Ahora no es constante.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

3. Halla la tasa de variación media de la función y = x³ + 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

$TVM\ [-3, 2] \rightarrow \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \rightarrow \frac{(2^3+1)-((-3)^3+1)}{2+3} \rightarrow \frac{-5}{5} \rightarrow \frac{35}{5} \rightarrow 7$

$TVM\ [1, 5] \rightarrow \frac{f(5)-f(-1)}{5-1} \rightarrow \frac{(5^3+1)-(1^3+1)}{5-1} \rightarrow \frac{124}{4} \rightarrow 31$

$TVM[0, 3] \rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \rightarrow \frac{(3^3+1)-(0^3+1)}{3-0} \rightarrow \frac{27}{3} \rightarrow 9$

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas.

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

$Vmedia = \frac{340-0}{14-0} \rightarrow 24.26 m/s$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

$$Vmedia[0,6] \rightarrow \frac{230-0}{6-0} = 38{,}33\mathrm{m/s}$$

$$Vmedia[2,10] \rightarrow \frac{300-100}{10-2} = 25\mathrm{m/s}$$

$$Vmedia[6,14] \rightarrow \frac{340-230}{14-6} \rightarrow 13{,}7\ m/s$$

c) ¿Es constante?

No es cte. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	35
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a)Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

$TVM\ (a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \mathrm{TVM}\ (0{,}40) = \frac{720-0}{40-0} = 18 m/s$

b)Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

$TVM\ (a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \mathrm{TVM}\ (15{,}25) = \frac{430-290}{25-15} = 14 m/s$

$TVM\ (a, b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow \mathrm{TVM}\ (0{,}40) = \frac{510-370}{30-20} = 14 m/s$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

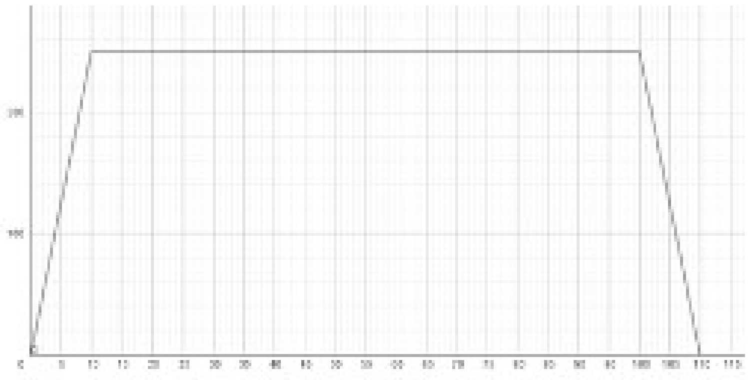
Cómo la velocidad no varía se puede decir que es constante.

c)Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

120 km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a)Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.



b)Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

$$am\ [0,10] = \frac{250}{10-0} = 25\ km/h^2$$

c)Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

$am\ [10,90] = \frac{250-250}{90-10} = 0$, velocidad constante

d)Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

$$am\ [100,110] = \frac{0-250}{10-100} = -25\ km/h^2$$

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$ donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.

$$TVM(0-100)=\frac{B(100)-B(0)}{100-0}$$

$$B(0)=(0)^2+7(0)+\sqrt{0}=0$$

$$B(100)=100^2+7(100)+\sqrt{100}=10710$$

$$TVM(0-100)=\frac{10710-0}{100-0}=107.1$$

$$TVM(25-100)=\frac{B(100)-B(25)}{100-25}$$

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x)=x+\sqrt{x}$ **y que los ingresos por ventas también contratado vienen dados por** $l(x) = 2x + x^2$**. Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina las tasas de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.**

B(X) = $x^2+x-\sqrt{x}$

$$TVM=\frac{B(2500)-B(100)}{2500-100}$$

$$B(2500)=2500^2+2500-\sqrt{2500}=6252450$$

$$B(100)=100^2+100-\sqrt{100}=10090$$

$$TVM=\frac{6252450-10090}{2500-100}=2601.83$$

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5:

a) $y = 3x - 4$

$y = 3x - 4 \rightarrow y' = 3$

$x = 1;\ y'(1) = 3$

$x = 3;\ y'(3) = 3$

$x = 5;\ y'(5) = 3$

b) $y = -2x - 3$

$y = -2x - 3 \rightarrow y' = -2$

$x = 1;\ y'(1) = -2$

$x = 3;\ y'(3) = -2$

$x = 5;\ y'(5) = -2$

c) □ = □. □□ + □

□ = 0.5□ + 2 → □´ = 0,**¡Error! Marcador no definido.**

□ = 1; □´(1) = 0,**¡Error! Marcador no definido.**

□ = 3; □´(3) = 0,**¡Error! Marcador no definido.**

$$x = 5;\ y´(5) = 0.5$$

d) $y = x - 1$

$$y = x - 1 \rightarrow y´ = 1$$

$$\mathbf{x = 1;\ y´(1) = 1}$$

$$\mathbf{x = 3;\ y´(3) = 1}$$

$$x = 5;\ y´(5) = 1$$

La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función y = x² – 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5. ¿Es ahora constante?

$$y = x^2 - 1 \rightarrow y´ = 2x$$

$$x = 1;\ y´(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x = 3;\ y´(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$x = 5;\ y´(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

No, no es constante.

11. Halla la derivada de la función y = x³ + 1 en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5.

$$y = x^3 - 1 \rightarrow y´ = 3x^2$$

$$x = 1;\ y´(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3$$

$$x = 3;\ y´(3) = 3 \cdot (3)^2 = 27$$

$$x = 5;\ y´(5) = 3 \cdot (5)^2 = 75$$

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia “y” dada por la ecuación: y = 0.2x + 110x – 67.2. Determina la velocidad que llevaba el coche para x = 1.5.

$$y = 0.2x^2 + 110x - 67.2 \rightarrow y´ = 0.4x + 110$$

$$0.4 \cdot (1.5) + 110 \rightarrow 110.6 \text{ m/s}$$

13. En dicho viaje la distancia recorrida para 2.5 ≤ x ≤ 3 viene dada por la ecuación y = 110x − 121.4 . Y para 3 ≤ x ≤ 5 por y = 0,1x^2 + 118x − 143.3. Para x = 3 hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de x = 3, y la velocidad después de x = 3.

Para 2,5 ≤ x ≤ 3

$y = 110x - 121{,}4 \rightarrow y' = 110 = 110$

Para 3 ≤ x ≤ 5

$y = 0{,}1x^2 + 118x - 146{,}3 \rightarrow y' = 0{,}2x + 118 \rightarrow y'(3) = 0{,}2 \cdot 3 + 118 = 0{,}6 + 118 = 118{,}6$

Antes de x= 3 la velocidad es 110 m/s y después 118,6 m/s

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ **(x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.**

$$y = 50x - 0.2x^2 \rightarrow y' = 50 - 0.4x$$

$$x = 2 \rightarrow 50 - 0.4(2) \rightarrow 50 - 0.8 \rightarrow 49.2$$

Solución= 49.2m

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$**. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.**

$$d = 0.3t^4 \rightarrow d' = 1.2t^3$$

$$t = 4 \rightarrow v(4) = 1.2 \cdot (4)^3 = 76.8$$

$$t = 7 \rightarrow v(7) = 1.2 \cdot (7)^3 = 411.6$$

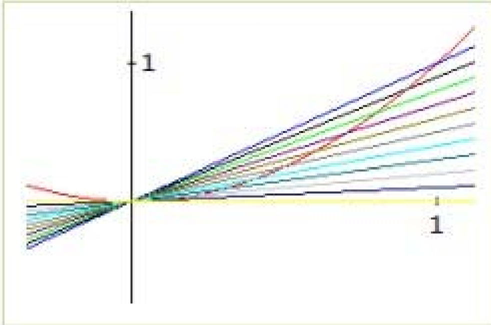
$$t = 10 \rightarrow v(10) = 1.2 \cdot (10)^3 = 1200$$

16. Representa gráficamente la función y = 2, y determina su derivada para x = 1, 2, 3.... a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal y=b?

y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0.

Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, f(x) y f(a), correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

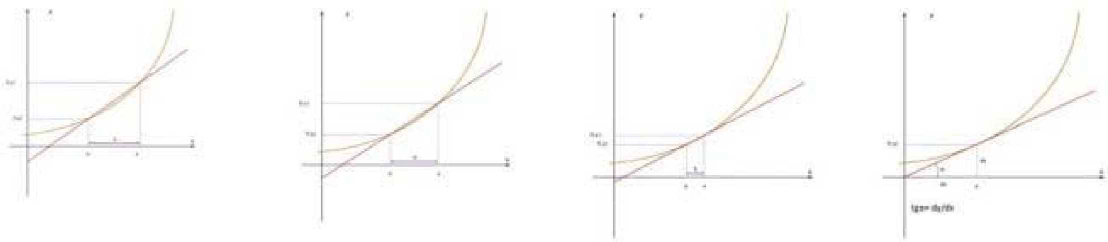


Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).

18. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica1, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición y = f(t), y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

$$y = f(t) = t^2; \qquad y' = v = 2t; \qquad a = y'' = 2.$$

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función f(a). Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.



20. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 2x + x2. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

$$y = f(t) = t^2; \quad y' = v = 2t; \qquad a = y'' = 2.$$

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = 1. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = a. Calcula mediante la expresión resultante f ’(1), f’ (2), f’ (12), f’ (5.43) y f’ (-7).

$y = x^2 - x + 1 \rightarrow$ y ’(1)$\rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-(1+h)+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+2h+1)-(1+h)+1-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h+1-1-h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 0+1 = 1$

$y = x^2 - x + 1 \rightarrow y'(a) \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-(a+h)+1-(a^2-a+1)}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\frac{(h^2+2ah+a^2)-a-h-a^2+a-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah-h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2a-1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2a-1) = 2a-1$

f ’(1) = 2·1 – 1 = 1; f’ (2) = 2·2 – 1 = 3; f’ (12) = 2·12 – 1 = 23; f’ (5.43) = 2·5.43 – 1 = 9.86; f’ (-7) = 2·(-7) – 1 = -15

22.Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	f(x) = x³	f(x) = 2	f(x) = x²	f(x) = x	f(x) = k	f(x) = 2x + 3	f(x) = 2x² + 3x
Derivada	f’(x) = 3x²	f’(x) =0	f’(x) =2x	f’(x) = 1	f’(x) =0	f’(x) = 2	f’(x) = 4x+3

23.Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

24.Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

La función valor absoluto de x es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen, pero tiene un mínimo en dicho origen.

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24} \rightarrow f'(x) = 24x^{23}$

b) $g(x) = 6x^{10} \rightarrow g'(x) = 60x^{9}$

c) $h(x) = \frac{6}{7x^{13}} \rightarrow h`(x) = \frac{78}{7x^{12}}$

d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \rightarrow j'(x) = 12x^3 - 10x$

e) $p(x) = 5x^3 - x \rightarrow p'(x) = 15x^2 - 1$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2 \rightarrow y' = -10x + 1$

b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5 \rightarrow y' = 15x^4 + 12x - 7$

c) $y = \frac{2}{3x^7} + \frac{8}{5x^5} - \frac{9}{4x^4} \rightarrow y' = \frac{14}{3x^6} + \frac{40}{5x^4} - \frac{36}{4x^3}$

d) $y = x^8 - x \rightarrow y' = 7x^7 - 1$

27. Ya hemos obtenido la derivada $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$En\ x = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$En\ x = 4 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$En\ x = 5 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 0{,}2236$

$En\ x = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot 0^{\frac{1}{2}}}$ →No existe, porque cuando el 0 se encuentra en el denominador no es un valor real.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3)\,(6x^6 - 5) \rightarrow y = 6x^8 - 5x^2 + 18x^2 \rightarrow y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $y = (7x^3 - 1)\,(5x^4 + 4) \rightarrow y = 35x^7 + 28x^3 - 5x^4 - 4 \rightarrow y' = 245x^6 + 84x^2 - 20x^3$

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x) \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 5x) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 5)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{x-1}{x+3} \rightarrow y' = \frac{x(x-3)-x(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$

b) $y = x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x^3 - 2x + 7 \rightarrow y' = 2x + 5x^2 - 2$

c) $y = \frac{2x^3-5x^2}{6x^4-2x^3} \rightarrow y' = \frac{(6x^2-10x)(6x^4-2x^3)-(24x^3-6x^2)(2x^3-5x^2)}{(6x^4-2x^3)^2} = \frac{-6x^2+30x-5}{18x^4-12x^3+2x^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+2)-x^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+3\right)}{(x+2)^2}$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7} = (x^7)^{\frac{1}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{5}(x^7)^{\frac{-4}{5}}(7x^6) = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x^3+5} = \frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3+5} \rightarrow y' = \frac{\left(\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3+5)-\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}\right)(3x^2)}{(x^3+5)^2} = \frac{-11x^4+35x}{(x^3+5)^2}$

c) $y = \frac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}} \rightarrow y' = \frac{\left[4x^3\cdot\sqrt{x}+(x^4-2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(\sqrt[4]{x^5}\right)-\left((x^4-2)\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x^5}\right)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2} = \frac{(x)^{\frac{11}{6}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{11}{6}(x)^{\frac{5}{6}}(x+2)-(x)^{\frac{11}{6}}}{(x+2)^2}$

31.En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por, $I(x) = 2x + x^2$ Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes C(x) y de la función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ;\ B' = 1 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

->Estas derivadas nos dan información sobre cómo los costes y los beneficios cambian con respecto al número de trabajadores contratados, lo que puede ser útil para la toma de decisiones empresariales.

32.Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12} \rightarrow y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7 \rightarrow y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$

c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5} \rightarrow y = (4x^5 - 8x^3)^{\frac{5}{2}} \rightarrow y' = \frac{5}{2}(4x^5 - 8x^3)^{\frac{3}{2}}(20x^4 - 24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4} \rightarrow y = (2x^2 + 4x^7)^{\frac{4}{3}} \rightarrow y' = \frac{4}{3}(2x^2 + 4x^7)^{\frac{1}{3}}(4x - 28x^6)$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3-7}(x^4 - 6x^3)};\ y = \left(\frac{3x^2-5x}{2x^3-7}(x^4 - 6x^3)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^2-5x}{2x^3-7}(x^4 - 6x^3)^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{(6x-5)(2x^3+7)-(3x^2-5x)(6x^2)}{(2x^3+7)^2}\right) \cdot (x^4 - 6x^3)^2 +$$
$$+\left(\frac{3x^2-5x}{2x^3-7}\right) \cdot 2(x^4 - 6x^3)(4x^3 - 18x^2)$$

b) $y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}} = \sqrt{\frac{x^4-7x^2+3x^2-21}{x^3-5}} = \sqrt{\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}} = \left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(4x^3-8)(x^3-5)-3x^2(x^4-4x^2-21)}{(x^3-5)^2}\right)\right]$$

c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3} = \left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$y' = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}(10x+3)(8x^3 - 2x^2) - (5x^2 + 3x)(24x^2 - 4x)\right]$$

d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}} = \left(3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3 + \left(x - \frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}\left(3+\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{-1}{2}}(1-6x^{-4})$$

34.Determina la ecuación de la recta tangente a y = 7x² + 5x – 3 en el punto x = 2.

$$y = 7x^2 + 5x - 3 \to y' = 14x + 5$$

$$y'(2) = 14(2) + 5 = 28 + 5 = 33$$

$$y(2) = 7(2)^2 + 5(2) - 3 = 29 \to P(2, 29)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \to y - 29 = 33(x - 2) \to y = 33x - 66 + 29 \to y = 33x - 37$$

35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: y = 0.05x – 0.01x^2 donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$; $f'(x) = 0.05 - \frac{1}{50}x$

PARA $x = 0 \to x_0 = 0$

$f(0) = 0.05 \cdot 0 - 0.01 \cdot 0\ 2 = 0$

$f'(0) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 0 = 0.05$ $y = 0 + 0.05 \cdot (x - 0)$, y = 0,05x

PARA $x = 1 \to x_0 = 1$

$f(1) = 0.05 \cdot 1 - 0.01 \cdot 1^2 = 0.04$

$f'(1) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 1 = 0.03$, y = 0.03x + 0.01

PARA $x = 2 \to x_0 = 2$

$(2) = 0.05 \cdot 2 - 0.01 \cdot 2^2 = 0.06$

$f'(2) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 2 = 0.01$ $y = 0.06 + 0.01 \cdot (x - 2)$ $y = 0.06 + 0.01x - 0.02$, $y = 0.01x + 0.04$

PARA $x = 3 \to x_0 = 3$

$(3) = 0.05 \cdot 3 - 0.01 \cdot 3^2 = -0.04$

$f'(3) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 3 = -0.01$, $y = -0.04 + (-0.01) \cdot (x - 3)$; $y = -0.04 - 0.01x + 0{,}03$,

y = -0,01x - 0,01

36. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$ donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del

producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

a) $\frac{dy}{dx}$(3) = 10 · (3) – 1,2 · (3)^2= 19,2. Creciente

b) $10t - 1{,}2t^2 > 0 \to t(10 - 1{,}2t) > 0 \to t > 0 \; y \; 10 - 1{,}2t > 0 \; \to t > 0 \quad y \quad t < \frac{10}{1{,}2}$

$\to t > 0 \; y \; t < \dfrac{25}{3} \to 10t - 1{,}2t^2 = t(10 - 1.2t) = 0 \to t = 0{,}10 = 1{,}2t \to t = 8{,}333$

Los ingresos están aumentando para $0 < t < \frac{25}{3}$

c) $10t - 1{,}2t^2 < 0 \to t(10 - 1{,}2t) < 0 \to t < 0 \; o \; 10 - 1{,}2t < 0 \to t < 0 \; o \; t > \frac{10}{1{,}2}$

$\to t < 0 \quad o \quad t > \dfrac{25}{3}$

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: y = x^3 + 3x. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: y = x³ - 3x. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 2? ¿Y en x = -2?

$y = x^3 + 3x \to y' = 3x^2 + 3 \; \to Ahora\ hay\ que\ igualar\ la\ derivada\ a\ 0$

$\to 3x^2 + 3 = 0 \to x = \sqrt{-1}$ no es valor real, como y' > 0 siempre, la función es siempre creciente.

$y = x^3 - 3 \to y' = 3x^2 - 3 \to y' = 0 \to 3x^2 - 3 = 0 \to x = \sqrt{1} \to x = \pm 1$

$y'(2) = 1 > 0 \to Creciente$

$y'(0) = -3 < 0 \to Decreciente$

$y'(-2) = 1 > 0 \to Creciente$

$Creciente\ (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \qquad Decreciente\ (-1{,}1)$

38.En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

$B(x)$ = $I(x)$ – $C(x)$ → $B(x)$ = (2x + x^2) – (x + x) → x^2

$B(x)$ =x^2; $B'(x)$ = 2x -> Es creciente

39. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 4x^2 + 3} \to y' = 8x \to 8x = 0 \to x = 0 \to y'' = 8 > 0 \to En\ x = 0\ hay\ un\ minimo$

b)$\boldsymbol{y = 5x^4 - 2} \to y' = 20x^3 \to 20x^3 = 0 \to x = 0 \to (-\infty, 0)\ decreciente, (0, \infty)\ creciente,$ $x = 0\ hay\ un\ minimo$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $\boldsymbol{y = 3x^3 + 1} \rightarrow y' = 9x^2 \rightarrow No\ hay\ maximos\ ni\ minimos, siempre\ es\ positiva$

d) $\boldsymbol{y = 4x^4 - 2x^2 + 5} \rightarrow y' = 16x^3 - 4x \rightarrow y' = 4x \cdot (4x^2 - 1) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = -\frac{1}{2}\ ,\ x_3 = 0$

$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0 \rightarrow Es\ un\ minimo\ relativo$

$y''(0) = -4 < 0 \rightarrow Es\ un\ maximo\ relativo$

$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0 \rightarrow Es\ un\ maximo\ relativo$

e) $\boldsymbol{y = 7x^3 - 3x} \rightarrow y' = 21x^2 - 3 \rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{3}{21}} \rightarrow y'' = 42x$

$y''\left(\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42 \cdot \sqrt{\frac{3}{21}} = 6 \cdot \sqrt{7} > 0 \rightarrow Es\ un\ minimo$

$y''\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42x \rightarrow 42\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = -6 \cdot \sqrt{7} < 0 \rightarrow Es\ un\ maximo\ relativo$

40. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

$Función\ para\ optimizar \rightarrow S(x, y) = 2x^2 + 4xy \qquad Condición: x^2y = 1$

$despejamos\ y \rightarrow y = \dfrac{1}{x^2} \rightarrow sustituimos\ en\ la\ funcion \rightarrow S(x) = 2x^2 + 4x\dfrac{1}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

$Derivamos\ S \rightarrow S'(x) = 4x - \dfrac{4}{x^2}$

$Igualamos\ a\ 0\ y\ resolvemos \rightarrow 4x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow 4x = \dfrac{4}{x^2} \rightarrow x^3 = 1, x = 1$

$Calculamos\ la\ segunda\ derivada \rightarrow S''(x) = 4 + \dfrac{8}{x^3}\ y\ S''(1) = 4 + \dfrac{8}{1^3} = 12 > 0$

$En\ x = 1\ hay\ un\ minimo \rightarrow y = \dfrac{1}{1^2} = 1$

La mínima superficie se obtiene con un cubo de 1dm de arista

41. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7}$ → $y' = 18x^2 - 4x + 5$ → $18x^2 - 4x + 5 = 0$; *sin raíces reales* $y(0) = 5 > 0$ por tanto, siempre creciente, no hay máximos ni mínimos

b) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x + 5}$ → $y' = 3x^2 - 3 = 0$ → $x = 1$; $x = -1$

$y'' = 6x$ → $y''(-1) = -6 < 0$; *máximo* → $y''(1) = 6 > 0$

c) $y = |x-4|$ → $x - 4 = 0$ → $x = 4$, $mínimo\ en\ x = 4$

d) $y = |x+1| + |x-2|$; $|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \le -1 \\ x+1 & x > -1 \end{cases}$; $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & x < 2 \\ x-2 & x \ge 2 \end{cases}$

$$|x+1| + |x-2| = \begin{cases} -x-1-x+2 & x \le -1 \\ x+1-x+2 & -1 < x < 2 \\ x+1+x-2 & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 & x \le -1 \\ 3 & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & x \ge 2 \end{cases}$$

No tiene máximos ni mínimos

42.Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [−4, 3] y en el intervalo [0, 5].

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72$ → $6x^2 - 6x + 72 = 0$, no tiene soluciones reales. No hay máximos ni mínimos relativos

Intervalo [−4, 3]:

$$f(-4) = 2(-4)^3 - 3(-4)^2 + 72(-4) = -128 - 48 - 288 = -464$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 + 72(3) = 54 - 27 + 216 = 243$$

En x = - 4, hay un mínimo absoluto y en x = 3, hay un máximo absoluto.

Intervalo [0, 5]

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 72(0) = 0$$

$$f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 250 - 75 + 360 = 535$$

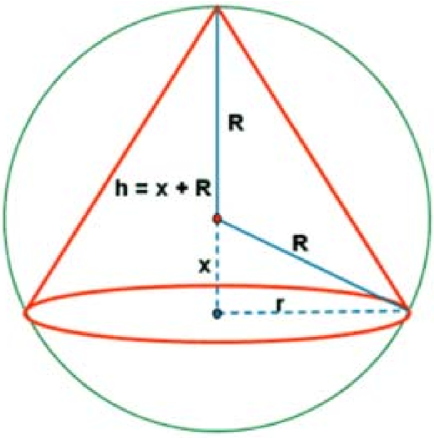
En x = 0, hay un mínimo absoluto y en x = 5, hay un máximo absoluto.

43. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+2|$ en el intervalo [−3, 5].

$x + 2 = 0$; $x = -2$; $f(-3) = -3 + 2 = -1$; $f(-2) = -2 + 2 = 0$; $f(5) = 5 + 2 = 7$

→En x = -2 hay un mínimo absoluto y en x = 5 hay un máximo absoluto.

44. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de R= 5 cm. (La altura del cono es igual a R + x, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$



$v = \frac{(\pi r^2 h)}{3} = \frac{\pi r^2 (R+x)}{3} = \frac{\pi (R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi (25 - x^2)(5+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(-x^3 - 5x^2 + 25x + 125)$

$v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) \rightarrow v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) = 0 \rightarrow x = 1{,}66$

$v'' = \frac{\pi}{3}(-6x - 10)$

$v''(1{,}66) < 0$, por tanto, es un máximo.

$r^2 = R^2 - x^2 = 5^2 - 1{,}66^2$; $r = 4{,}83\ cm$

$h = R + x = 5 - 1{,}66$; $h = 6{,}66\ cm$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = x³ en el punto x = 2.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3)-2^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(12+6h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(12+6h+h^2)=12$$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = $\sqrt{x}$ en x = 1.

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\to Indeterminación$$

$$\to\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = $\frac{1}{x^2}$ en x= 4

$$y'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{16-x^2}{16x^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^3-64x^2}=$$

$$=\frac{16-4^2}{16(4^3)-64(4^2)}=\frac{16-16}{1024-1024}=\frac{0}{0}\to Indeterminación$$

$$\to\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(4+x)}{16x^2(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{-(4+x)}{16x^2}=-\frac{4+4}{16(4^2)}=-\frac{8}{256}=-\frac{1}{32}$$

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = 3x² − 5x + 2 en el punto de abscisa x = 1.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-5(1+h)+2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h+3-5-5h+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+1)=1$$

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = x − 3 en x = 2.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h-3)-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

6.Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

- **a)** $y = 4x^2 + 2x - 3 \to y' = 8x + 2$
- **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \to y' = 6x^2 - 6x + 7$
- **c)** $y = x^2 - 5x + 2 \to y' = 2x - 5$
- **d)** $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3 \to y' = (56x^6 - 54x^5 - 15x^2)$

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

- **a)** $y = (5x^2 + 7x^4 + 3x) \to y' = (10x + 28x^3 + 3)$
- **b)** $y = (6x^5 + 4x^2 + 7x + 5x^3) \to y' = (30x^4 + 8x + 7 + 15x^2)$

c) $y = (x^5 + 7x^4 + 2x^3) \rightarrow y' = (5x^4 + 28x^3 + 6x^2)$

d) $y = (3x^3 + 9x^6 + 2x^8) \rightarrow y' = (9x^2 + 54x^5 + 16x^7)$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \left(7x^2 + 3x + \frac{1}{x}\right)} = (7x^2 + 3x + x^{-1}) \rightarrow y' = 14x + 3 - x^{-2} = 14x + 3 - \frac{1}{x^2}$

b) $\boldsymbol{y = \left(5x^3 + 2x^2 + \sqrt{x}\right)} = \left(5x^3 + 2x^2 + x^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y' = 15x^2 + 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 15x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2-5x+2)}} \rightarrow y = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-5x^2+2x+3x^2-15x+6} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-2x^2-13x+6} \rightarrow$

$\rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}(x)^{\frac{-1}{2}}(x^3-2x^2-13x+6)-(x)^{\frac{1}{2}}(3x^2-4x-13)}{(x^3-2x^2-13x+6)^2} = \frac{-5x^3+6x^2+13x+6}{\sqrt{x}(x+3)^2(x^2-5x+2)^2}$

d) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot(x+5)}{(x^2-5)} \rightarrow y' = \frac{\left[\frac{1}{2}(x)^{\frac{-1}{2}}(x+5)+\sqrt{x}\cdot 1\right](x^2-5)-2x\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)^2} = \frac{-x^2-15x^2-15x-25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \frac{7x^2}{3} + \frac{3x}{5} + \frac{8}{3x}} = \frac{7x^2}{3} + \frac{3x}{5} + \frac{8}{3}x^{-1} \rightarrow y' = \frac{14x}{3} + \frac{3}{5} - \frac{8}{3}x^{-2} = \frac{14x}{3} + \frac{3}{5} - \frac{8}{3x^2}$

b) $\boldsymbol{y = \frac{5x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} + 6\frac{\sqrt{x}}{5}} = \frac{5x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} + \frac{6}{5}x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{15x^2}{2} + \frac{4x}{3} - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}(x)^{\frac{-1}{2}} = \frac{15x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{3}{5\sqrt{x}}$

c) $\boldsymbol{7y = \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{7} + \frac{7}{\sqrt{x}}} \rightarrow y = \frac{1}{7}\left(\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{7} + 7x^{-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y' = \frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3} + \frac{10x}{7} + 7\left(-\frac{1}{2}\right)x^{\frac{-3}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3} + \frac{10x}{7} - \frac{7}{2\sqrt{x^3}}\right)$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \frac{(x-1)(2x-3)}{x+2}} \rightarrow y = \frac{2x^2-3x-2x+3}{x+2} \rightarrow y = \frac{2x^2-5x+3}{x+2} \rightarrow y' = \frac{(4x-5)(x+2)-(2x^2-5x+3)}{(x+2)^2}$

b) $\boldsymbol{y = \frac{(3x^2+4)(4-2x)}{7x-1}} \rightarrow y = \frac{12x^3-6x^2+16x-8}{7x-1} \rightarrow y' = \frac{(36x^2-12x+16)(7x-1)-7(12x^3-12x^2+16x-8)}{(7x-1)^2}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{(x+9)(2x-3)}{(x+3(x+2)}} \rightarrow y = \frac{16x^6-56x^2+10x^7-35x^2}{4x+6} \rightarrow y = \frac{16x^6+10x^7-91x^2}{4x+6}$

$\rightarrow y' = \frac{(96x^5+70x^6-182x)(4x-6)-4(16x^6-92x^2+10x^7)}{(4x+6)^2}$

d) $\boldsymbol{y = \frac{(x+9)(2x-3)}{(x+3)(x+2)}} = \frac{2x^2-3x+18x-27}{x^2+5x+6} \rightarrow y = \frac{2x^2+15x-27}{x^2+5x+6} \rightarrow y' = \frac{(4x+15)(x^2+5x+6)-(2x^2+15x-27)(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2}$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)$\boldsymbol{y = \sqrt{x^3 + 5}} \rightarrow y = (x^3 + 5)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2}(x^3 + 5)^{\frac{-1}{2}}(3x^2)$

b)$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 1}} \rightarrow y = (2x^3 + 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}(2x^3 + 4x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}(6x^2 + 8x)$

c) $y = (5x^3 + 2)^5 \rightarrow y' = 5(15x^2 + 2)^4(15x^2)$

d) $y = (2x^2 + 5x)^9 \rightarrow y' = 9(2x^2 + 5x)^8\, 4x$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{x^3+5}\cdot(x^7+3x^2)^6} \rightarrow y = (x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^7+3x^2)^6$

$\rightarrow y' = \left[\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(x^7+3x^2)^6 + (x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 6(x^7+3x^2)^5\cdot(7x^6+6x)\right]$

b) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}} \rightarrow y = \frac{(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{x+1} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\frac{2}{3}}(6x^2+8x)(x+1)-(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^2}$

c) $y = (5x^3 + 2)^5 \cdot (x^5 + 6x^8) \rightarrow y' = 5(5x^3+2)^4(15x^2)(x^5+6x^8) + (5x^3+2)^5(5x^4+48x^7)$

d) $\boldsymbol{y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}} \rightarrow y' = \frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)^2-(2x^3-5x^2)^9(7x^4-5x^3)(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^4} =$

$= \frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)-(2x^3-5x^2)^9(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^3}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = e^{x^5+4x^3}} \rightarrow y' = \left(e^{x^5+4x^3}\right)(5x^4+12x^2)$

b) $\boldsymbol{y = \left(e^{2x^3+7x^2}\right)^7} \rightarrow y' = 7\left(e^{2x^3+7x^2}\right)^6\cdot\left(e^{2x^3+7x^2}\right)\cdot(6x^2+14x)$

c) $\boldsymbol{y = e^{(3x^5+5x^3)^5}} \rightarrow y' = \left(e^{(3x^5+5x^3)^5}\right)(5(3x^5+5x^3)^4)(15x^4+15x^2)$

d) $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}} = e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}} \rightarrow y' = \left[\left(e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2}{3}(6x^5-9x^8)^{-\frac{1}{3}}\right)(30x^4-72x^7)\right]$

14. La derivada de *y* = *cos*(*x*) es *y'* = −sen(*x*). Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \cos(x^5-7x^3)} \rightarrow y' = -\operatorname{sen}(x^5-7x^3)(5x^4-21x^2)$

b) $\boldsymbol{y = (\cos(3x^3-5x^2))^7} \rightarrow y' = 7(\cos(3x^3-5x^2))^6\cdot(-\operatorname{sen}(3x^3-5x^2))(9x^2-10x)$

c) $\boldsymbol{y = \cos^5(4x^5-8x^3)} \rightarrow y' = 5(\cos(4x^5-8x^3))^4\cdot(-\operatorname{sen}(4x^5-8x^3))\cdot(20x^4-24x^2)$

d) $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{\cos^4(2x^2+4x^7)}} = (\cos(2x^2+4x^7))^{\frac{4}{3}} \rightarrow$

$y' = \left[\frac{4}{3}(\cos(2x^2+4x^7))^{\frac{1}{3}}\cdot(-\operatorname{sen}(2x^2+4x^7))(4x+28x^6)\right]$

15.Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

$y' = 3x^2 - 3$

Para x = 0 $y'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$

Punto: (0,0) Pendiente: -3

Ecuación recta tangente: $y - 0 = -3(x - 0) \rightarrow y = -3x$

Para x = 1 $y'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$

Punto: (1,-2) Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$

Para x = 2 $y'(2) = 3(2)^2 - 3 = 6$

Punto: (2,2) Pendiente: 6

Ecuación recta tangente: $y - 2 = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 12 + 2 \rightarrow y = 6x - 10$

16.Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en x= 2

$$y' = 3x^2 \rightarrow y'(2) = 3(2)^2 = 12$$

Pendiente: 2

Ecuación recta tangente: $y - y(2) = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 24 - 8 \rightarrow y = 12x - 16$

b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en x= 1

$$y' = 4x + 4 \rightarrow y'(1) = 4(1) + 4 = 8$$

Pendiente: 8

Ecuación recta tangente: $y - y(1) = 8(x - 1) \rightarrow y = 8x - 8 + (2 + 4 - 5) \rightarrow y = 8x - 7$

c) $y = x^3 - 7x^2 + 3x$ en x= 0

$$y' = 3x^2 - 14x \rightarrow y'(0) = 3(0)^2 - 14(0) = 0$$

Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y - y(0) = 0(x - 0) \rightarrow y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en x = 3

$$y' = 3x^2 + 3 \rightarrow y'(3) = 3(3)^2 + 3 = 30$$

Pendiente: 30

b) $y + 2x - 5$ **en x = 0**

$$y = -2x + 5 \rightarrow y' = -2$$

Pendiente: -2

c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ **en x= 1**

$$y' = 12x^2 - 10x \rightarrow y'(1) = 12\,(1)^2 - 10\,(1) = 2$$

Pendiente: 2

18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ **en los que su tangente sea paralela:**

a) **a la recta** $y = 0$**;**

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Para que la tangente sea paralela a la recta y = 0, su pendiente debe ser cero, es decir→ $y' = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y(-1) = (-1)3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$y(1) = (1)3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Solución: (1, 0), (–1, 4);

b) **a la recta** $y = 6x$**.**

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

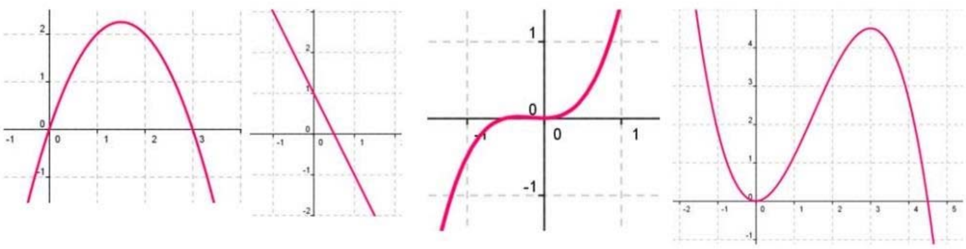
$$y(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) + 2 = 7 - 3\sqrt{3}$$

$$Solución: (\sqrt{3}, 2), (-\sqrt{3}, 2)$$

19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $\sqrt{x^3}$ **en x = 0.**

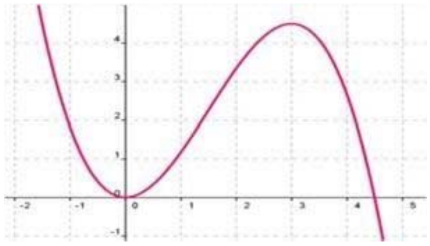
$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'(0) = \frac{3}{2}0^{\frac{1}{2}} = 0 \rightarrow Solución: y = 0$$

20. Si $f'(x) = x\,(3 - x)$**, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de** $f(x)$**?**



$$f'(x) = x(3 - x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = 3$$

Tiene extremos relativos en los puntos x= 0 y x=3, por lo que la única gráfica que cumple los requisitos es la siguiente:



21. Determina las rectas tangentes a la función *f*(*x*) = 4*x*³ – 12*x* en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$$y' = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 12 \rightarrow 12x^2 = 24 \rightarrow x^2 = \frac{24}{12} \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \rightarrow y = f(\sqrt{2}) + 12 \cdot (x - \sqrt{2}) \rightarrow f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 12(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

$$y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2}) \rightarrow y = -4\sqrt{2} + 12x - 12\sqrt{2} \rightarrow \boldsymbol{y = 12x - 16\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\sqrt{2}} \rightarrow f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2} \rightarrow)^3 - 12(-\sqrt{2} \rightarrow) = 4\sqrt{2} \rightarrow$$

$$y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2}) \rightarrow y = 4\sqrt{2} + 12x + 12\sqrt{2} \rightarrow \boldsymbol{y = 12x + 16\sqrt{2}}$$

$$y' = 12x^2 - 12 \rightarrow y'' = 24x \rightarrow 24x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y''' = 24 > 0 \rightarrow mínimo$$

$$y'(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12 \qquad\qquad f(0) = 4(0)^3 - 12(0) = 0$$

El menos valor de la pendiente es -12 y se alcanza en (0,0)

22. Determina la recta tangente a la función *f*(*x*) = *x*³ – 3*x* en el punto *A* (−1, 2). ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \rightarrow y = 2 + 0(x - 0) \rightarrow y = 2$$

$$x^3 - 3x = 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \ , \ x = 2$$

Por tanto, x= 2 es el otro punto por donde pasa la recta en la función. Llamaremos a este punto B (2,2)

23. Determina los coeficientes *a*, *b* y *c* de la función *f*(*x*) = *ax*³ + *bx* + *c*, que pasa por el punto *A* (1, 2) y es tangente a la recta *y* = *x* en el punto *O* (0, 0).

Tenemos que utilizar la información a nuestra disposición para calcular las tres incógnitas.

Primero, sabiendo que f(x) es tangente a la recta en (0,0), sabemos que cuando x=0; y=0

Por ende, sabemos que c=0

También sabemos que porque la pendiente de la recta y=x es 1

$$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(0) = 3a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow f'(0) = b = 1$$

Luego, para encontrar el valor de a podemos utilizar más información: f(x) pasa por el punto A (1,2)

$$f(1) = 2 \rightarrow a \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + 0 = 2 \rightarrow \boldsymbol{a = 1},\ \boldsymbol{b = 1},\ \boldsymbol{c = 0}$$

24. Determina los coeficientes *a*, *b* y *c* para que las funciones *f*(*x*) = x^3 + *bx* + *c* y *g*(*x*)= a*x* – x^2 tengan la misma recta tangente en el punto *A* (1, 0).

$f'(x) = 3x^2 + b \rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1 + b = 3 + b$

$g'(x) = a - 2x \rightarrow g'(1) = a - 2 \cdot 1 = a - 2$

$3 + b = a - 2 \rightarrow a = b + 5$

$f(1) = 0 \rightarrow 1 + b + c = 0$
$g(1) = 0 \rightarrow a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$

$1 = 5 + b \rightarrow b = -5 + 1 \rightarrow b = -4\ ;\ 1 - 4 + c = 0 \rightarrow c = 3$

$\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = -4}$, $\mathbf{c = 3}$

25. Determina el coeficiente a, para que la función f(x) = x² + a, sea tangente a la recta y = x

$$y' = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}\ sustituimos\ en\ la\ recta,\ \ y = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = 1/*x*².

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^3} > 0 \quad , \quad y'(10) = -\frac{2}{(10)^3} < 0$$

Creciente (−∞, 0) y **Decreciente** (0, ∞)

27.Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = 1/*x*.

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot x}{(x^2)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^2} < 0 \quad , \quad y'(10) = -\frac{2}{(10)^2} < 0$$

Decreciente: (−∞, 0) U (0, ∞)

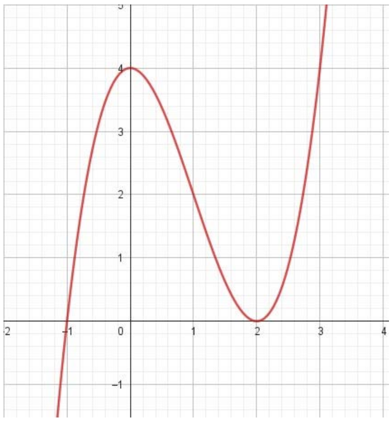
28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = *x*³ − 3*x*² + 4. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 6x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0\,;\ x = 0\,,\ \ x = 2$

$y'(-10) = 3(-10)(-10-2) > 0\ \ ;\ \ y'(1) = 3(1)(1-2) < 0\ \ ;\ \ y'(10) = 3(10)(10-2) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **Decreciente:** $(0,2)$ **, máximo en x = 0 y mínimo en x =2**

$y(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \rightarrow Máximo: (0,4)\ \ ;\ \ y(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow Mínimo: (2,0)$



29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = *x*³ − 6*x*² + 9*x* + 6. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

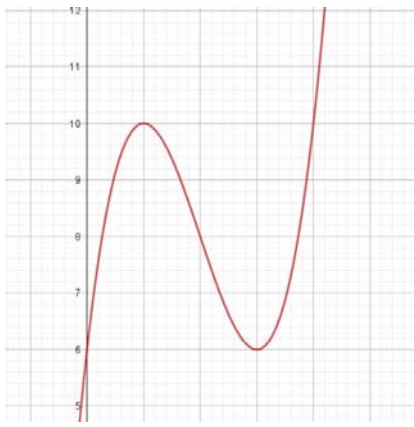
$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 6 = 0\,;\ \ Punto\ corte\ con\ el\ eje\ de\ ordenadas\ (0,6)$

$y' = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0\,;\ x = 1\ \ x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 12(-10) + 9 > 0 \qquad f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 < 0 \qquad f'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 9 > 0$

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ **Decreciente:** $(1,3)$

Existe un máximo relativo cuando x = 1 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x = 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) = 2*x*³ − 3*x*² + 3. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

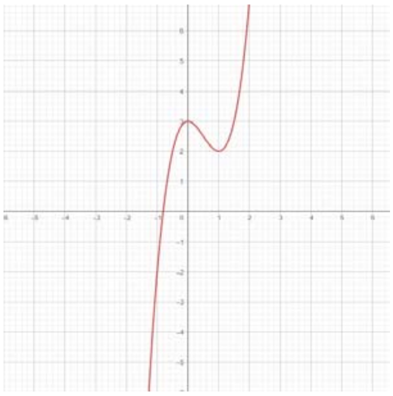
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$y' = 6x^2 - 6x \rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0\,,\; x = 1$

$f'(-10) = 6(-10)^2 - 6(-10) > 0$; $\quad f'(0,5) = 6(0,5)^2 - 6(0,5) < 0$; $\quad f'(10) = 6(10)^2 - 6(10) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ **Decreciente:** $(0,1)$

Existe un máximo relativo cuando x = 0 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x = 1 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



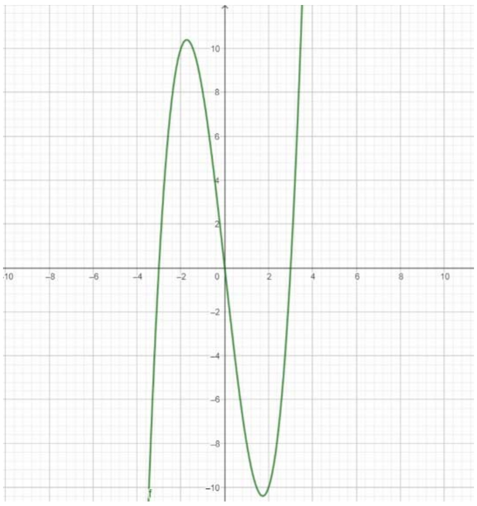
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 9 \rightarrow y' = 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}\;,\; x = \sqrt{3}$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 9 > 0$; $\quad f'(0) = 3(0)^2 - 9 < 0$; $\quad f'(10) = 3(10)^2 - 9 > 0$

Creciente: $(-\infty - \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ **Decreciente:** $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Existe un máximo relativo cuando x = $-\sqrt{3}$ pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x = $\sqrt{3}$ pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.

$y' = 12x^2 - 12x + 72 \rightarrow y' = 12(x^2 - x + 6)$

$No\ tiene\ soluciones\ reales,\ no\ existen\ máximos\ o\ mínimos\ relativos$

En [−7, 2] :

$f(-7) = 4(-7)^3 - 6(7)^2 + 72(-7) = -1372 - 294 - 504 = -2170$;
$f(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 72(2) = 32 - 24 + 144 = 152$;

$Mínimo\ absoluto\ (-7, -2170)$; $Máximo\ absoluto\ (2, 152)$

En [0, 8]:

$f(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 72(0) = 0$

$f(8) = 4(8)^3 - 6(8)^2 + 72(8) = 2048 - 384 + 576 = 2240$;

$Mínimo\ absoluto\ (0,\ 0)$; $Máximo\ absoluto\ (8,\ 2240)$

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función *f*(*x*) = $|x+3|$ en el intervalo [−3, 3].

Máximos y mínimos absolutos:

$$f(3) = x + 3 = 6 \rightarrow Máximo\ absoluto:\ (3,6)$$

$$f(-3) = -(-3+3) = 0 \rightarrow Mínimo\ absoluto:\ (-3,0)$$

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los *t* segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: *y* = 15*t* + 0.8*t*². ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

$y(t) = 15t + 0{,}8\,t^2$; $y'(t) = v(t) = 15 + 1{,}6t$

Para t = 0

$v(0) = 15 + 1{,}6\,(0) = 15$ m/s

Para t = 5

$v(5) = 15 + 1{,}6\,(5) = 15 + 8 = 23$ m/s

$$120\frac{km}{h}\cdot\frac{1000m}{1km}\cdot\frac{1h}{3600s} = \frac{100}{3}\ m/s$$

$$15 + 1{,}6t = \frac{100}{3}\ \ ;\ \ 45 + 4{,}8t = 100\ \ ;\ \ t = \frac{100-45}{4{,}8} = 11{,}46s$$

35. La temperatura, *T*, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por *T* = 200 – 500/*t*, donde *t* es el tiempo en segundos. El radio, *r*, en mm, de la bola cuando la temperatura es de *T* grados viene dado por *r* = 40 + 0.001*T*. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50º, 75º, 100º? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para *t* = 90 segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

$$r = 40 + 0{,}001T \to v(t) = \frac{dr}{dt} = 0{,}001 \to Velocidad\ constante$$

$$T = 200 - \frac{500}{t} \to v(T) = \frac{500}{t^2}$$

$$Para\ t = 30 \to v(30) = \frac{500}{30^2} = \frac{500}{900} = 0{,}556\ {}^{º}\!/_{s}$$

$$Para\ t = 90 \to v(90) = \frac{500}{90^2} = \frac{500}{8100} = 0{,}061\ {}^{º}\!/_{s}$$

$$r = 40 + 0{,}001T \to T = 200 - \frac{500}{t}$$

$$r(t) = \frac{dr}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = 0{,}001 \cdot \frac{500}{t^2}$$

$$Para\ t = 10 \to r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{10^2} = 0{,}05\ {}^{mm}\!/_{s}$$

$$Para\ t = 30 \to r(30) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{30^2} = 0{,}001\ {}^{mm}\!/_{s}$$

$$Para\ t = 90 \to r(90) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{90^2} = 0\ {}^{mm}\!/_{s}$$

36. La distancia, *d*, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los *t* segundos, viene dada aproximadamente por *d* = 5*t*². Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

$$d = \frac{1}{2}gt^2 \to v = gt$$

Primera plataforma(57m):

$$\to d = \frac{1}{2}9{,}8t^2 \to 4{,}9t^2 = 57 \to t^2 = \frac{57}{4{,}9} \to t = \sqrt{11{,}63} = 3{,}41s$$

$$\to v = (9{,}8)(3{,}41) = 33{,}38\ {}^{m}\!/_{s}$$

Segunda plataforma(115m):

$$\to d = \frac{1}{2}9{,}8t^2 \to 4{,}9t^2 = 115 \to t^2 = \frac{115}{4{,}9} \to t = \sqrt{23{,}47} = 4{,}85\ s$$

$$\to v = (9{,}8)(4{,}85) = 47{,}63\ {}^{m}\!/_{s}$$

Tercera plataforma(274m):

$$\to d = \frac{1}{2}9{,}8t^2 \to 4{,}9t^2 = 274 \to t^2 = \frac{274}{4{,}9} \to t = \sqrt{55{,}92} = 7{,}48s$$

$$\to v = (9{,}8)(7{,}48) = 73{,}3\ {}^{m}\!/_{s}$$

37. La función *e* = *f*(*t*) indica el espacio recorrido, *e*, en metros, por un cuerpo en el tiempo *t* (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $e = t^2 - 4t + 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} \to v = 2t - 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \to a = 2$

b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} \to v = 6t^2 - 10t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \to a = 36t - 10$

c) $e = -t^2 + 4t + 3$

$v(t) = \frac{de}{dt} \to v = 2t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \to a = -2$

d) $e = (3t - 4)^2$

$v(t) = \frac{de}{dt} \to v = 9t^2 + 16 - 24t$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \to a = 18t - 24$

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$V = 0{,}3tm^3 \to V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\to \pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}3t \to h\frac{0{,}3t}{\pi \cdot r^2} \to h' = v = \frac{0{,}3}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$

$\to t = 2 \to v(2) = \frac{0{,}3}{25\pi} = 0{,}0038\, {}^{m}/_{s}$

$$\rightarrow t = 5 \rightarrow v(5) = \frac{0{,}3}{25\pi} = 0{,}0038\, ^{m}/_{s}$$

39. La distancia, *d*, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los *t* segundos, viene dada por *d* = 0.2*t*² + 0.01*t*³. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

$$d(t) = 0{,}2t^2 + 0{,}01t^3 \rightarrow v(t) = \frac{d(d)}{dt} = 0{,}4t + 0{,}03t^3$$

Para t= 2

(2) = 0.4 (2) + 0.03 (2)^2 = 0.8 + 0.12 = 0,92 m/s

Para t= 4

(4) = 0.4 (4) + 0.03 (4)^2 = 1.6 + 0.48 = 2,08 m/s

Para t= 7

(7) = 0.4 (7) + 0.03 (7)^2 = 2.8 + 1.47 = 4.27 m/s

Para t= 15

(15) = 0.4 (15) + 0.03 (15)^2 = 6 + 6.75 = 12,75 m/s

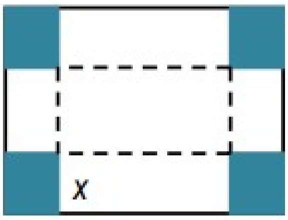
$$60\frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1\ km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 16{,}67\, ^{m}/_{s}$$

$$0{,}4t + 0{,}03t^2 = 16{,}67 \rightarrow 0{,}4t + 0{,}03t^2 - 16{,}67 = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{(0{,}4)^2 - 4(0{,}03 = (16{,}67)}}{2(0{,}03)} = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{2{,}1604}}{0{,}06} \rightarrow \frac{-0{,}4 + 1{,}469}{0{,}06}$$

$$\rightarrow t = \frac{1{,}068}{0{,}06} = 17{,}8s$$

40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado *x*, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, *x*, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de *x*.



$V(x) = x(25 - 2x)(20 - 2x) \to V'(x) = (25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) = (25 - 2x)(20 - 2x) - 2(20 - 2x) - 2(25 - 2x) = 0$

$(500 - 90x + 4x^2) - (40 - 4x^2) - (50 - 4x^2) = 500 - 90x + 4x^2 - 40x + 4x^2 - 50x + 4x^2 = 0$
$500 - 180x + 12x^2 = 0 \to 12x^2 - 180x + 500 = 0 \to 3x^2 - 45x + 125 = 0$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4(3)(125)}}{2(3)} = \frac{45 \pm \sqrt{525}}{6} = \frac{45 \pm 5\sqrt{21}}{6}$$

$$x_1 = 11{,}31\ cm \to No\ válido \qquad\qquad x_2 = 3{,}7cm$$

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 150 \to h = \frac{150}{\pi \cdot r^2}$$

$$A = 2\pi \cdot r \cdot +2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot \frac{150}{\pi r^2} + 2\pi r^3 = \frac{300}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = -\frac{300}{r^2} + 4\pi r = 0 \to \frac{300}{r^2} = 4\pi r$$

$$300 = 4\pi r^3 \to r^3 = \frac{300}{4\pi} \to r = \sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}} \to \boldsymbol{r} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{75}}{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{m}$$

$$A'' = \frac{600}{r^3} + 4\pi \to A''\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right) = \frac{600}{\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^3} + 4\pi > 0 \to Mínimo$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{150}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}} = \frac{150}{\pi \cdot 2{,}879} = \boldsymbol{137{,}46\ m}$$

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que, según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: y = 100 − 80/ (x + 5). Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta

$$y = 100 - \frac{80}{(x+5)} - 2 \to y' = \frac{80}{(x+5)^2} - 2 \to \frac{80}{(x+5)^2} - 2 = 0$$

$$2(x+5)^2 = 80 \to 2x^2 + 20x - 30 = 0 \to x^2 + 10x - 15 = 0 \to x = -5 \pm 2\sqrt{10}$$

Solución valida→ $x = -5 + 2\sqrt{10} \rightarrow máximo$

43. En una industria la función *u* = *f*(*t*) indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante *t*, y la función *v* = *g*(*t*) indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante *t*. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a *y* = *uv*. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, (*u'* = 0.03*u*) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual (*v'* = 0.02*v*) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$f'(t) = 0{,}03 \cdot f(t)$ $\qquad g'(t) = 0{,}02 \cdot g(t)$

$0{,}03 \cdot f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot 0{,}02 \cdot g(t) \rightarrow 0{,}03u \cdot v + 0{,}02u \cdot v \rightarrow 0{,}05u \cdot v$

$\rightarrow Aumenta\ un\ 5\%$

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante *t* es *u* = *f*(*t*) = 3*t* y que la función *v* = *g*(*t*) = t^2 + 3*t*, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante *t*. La producción total es igual a *y* = *uv*. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$y = u \cdot v = (3t) \cdot (t^2 + 3t) \rightarrow y = 3t\,(t^2 + 3t) = 3t^3 + 9t^2 \rightarrow y' = 9t^2 + 18t$

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

$\frac{dp}{dt} = P(x) \cdot 0{,}03$ $\qquad \frac{dT}{dt} = T(x) \cdot (-0{,}05)$

$$\frac{d(PT)}{dt} = \frac{d(P \cdot T)}{dt} \rightarrow \frac{d(PT)}{dt} = P \cdot \frac{dT}{dt} + T \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = P(x) \cdot \big(t(x) \cdot (-0{,}05)\big) + T(x) \cdot (P(x) \cdot 0{,}03)$$

$$\rightarrow \frac{d(PT)}{dt} = -0{,}05 \cdot P(x) \cdot T(x) + 0{,}03 \cdot P(x) \cdot T(x)$$

$$\rightarrow \frac{d(PT)}{dt} = -0{,}02 \cdot P(x) \cdot T(x) \rightarrow Disminuye\ un\ 2\%\ anual$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

$\boldsymbol{a})\ \lim_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ $\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\boldsymbol{c})\ \lim_{h\to o}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\boldsymbol{d})\ \lim_{b\to x}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x}(x-1)$ en x= 1 es:

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2

$$y'(1) = \lim_{h\to o}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\left(\sqrt{1+h}(1+h-1)-\left(\sqrt{1}(1-1)\right)\right)}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\sqrt{1+h}\cdot h}{h} = \sqrt{1+0} = 1$$

3. La derivada de $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en x = 2 es:

a) $\frac{15}{11}$ **b)** $-\frac{10}{25}$ **c)** $-\frac{16}{121}$ **d)** $\frac{1}{3}$

$$\lim_{h\to o}\frac{\frac{(2+h)^2+1}{(2+h)^3+3}-\frac{2^2+1}{2^3+3}}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\frac{(4+4h+h^2+1)+1}{(8+12h+6h^2+h^3)+3}-\frac{4+1}{8+3}}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\frac{4+h^2+5}{(11+12h+6h^2+h^3)}-\frac{5}{11}}{h} =$$

$$\lim_{h\to o}\frac{\frac{11(4h+h^2+5)-5(11+12h+6h^2+h^3}{11(11+12h+6h^2+h^3)}}{h} = \lim_{h\to o}\frac{11h^2+44h+55-5h^3-30h^2-60h-55}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3} =$$

$$\lim_{h\to o}\frac{-5h^3-19h^2-16h}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} = \lim_{h\to o}\frac{h(-5h^2-19h-16)}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} =$$

$$\lim_{h\to o}\frac{(-5h^2-19h-16)}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} = -\frac{16}{11\cdot 11} = -\frac{16}{121}$$

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ **b)** $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ **c)** $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ **d)** $y' = 2e^{x^2}$

$$\rightarrow y = e^{x^2+3} \rightarrow y' = (e^{x^2+3})(2x)$$

5. La derivada $y = sen(x^3)$ es:

a) $y' = 3(sen\ (x))^2 \cdot (cos(x)^3)$ **b)** $y' = \cos\ (x^3)\ \cdot\ 3x^2$

c) $y' = cos\ (x^3) \cdot \mathrm{sen}(3x^2)$ **d)** $y' = 3(\mathrm{sen}(x))^2 \cdot (\cos\ (x))$

$$y = sen\ x^3 \rightarrow y' = 3x^2\ \cdot \cos x^3$$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

6. La ecuación de la recta tangente de la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 2x + 6$ **d)** $y = 2x + 8$

$y' = -6x^2 + 6x + 2 \rightarrow y'(1) = -6(1)^2 + 6(1) + 2 = 2$; $y(1) = 5 + 2\cdot1 + 3\cdot1^2 - 2\cdot1^3 = 8$

$y = 8 + 2(x - 1) \rightarrow y = 8 + 2x - 2 \rightarrow y = 2x + 6$

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 6x$ **d)** $y = 0$

$y' = -6x^2 + 6x \rightarrow y'(0) = -6(0)^2 + 6(0) = 0$; $y(0) = 3\cdot0^2 - 2\cdot0^3 = 0$

$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente **b) decreciente** **c) alcanza un mínimo** **d) alcanza un máximo**

$y' = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 1 \rightarrow y'(1) = 12(1)^3 - 15(1)^2 + 4(1) - 1 = 0$

$y'(0) = 12(0)^3 - 15(0)^2 + 4(0) - 1 < 0$; $y'(2) = 12(2)^3 - 12(2)^2 + 4(2) - 1 < 0$

Decrecimiento: $(-\infty, 1)$ Crecimiento: $(1, \infty)$

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)\,x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, *decreciente*; $0 < x < 4$, *decreciente*; $x > 4$, *creciente*

b) $x < 0$, *decreciente*; $0 < x < 4$, *creciente*; $x > 4$, *decreciente*

c) $x < 0$, *creciente*; $0 < x < 4$, *creciente*; $x > 4$, *decreciente*

d) $x < 0$, *creciente*; $0 < x < 4$, *decreciente*; $x > 4$, *decreciente*

$f'(x) = x(x - 4) \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0 \;\; x = 4$

$f'(-10) = (-10)(-10 - 4) > 0$; $f'(1) = (1)(1 - 4) < 0$; $f'(10) = (10)(10 - 4) > 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ La función es decreciente en $(0,4)$

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) $(0, 0)$ **máximo y** $(1, 1)$ **mínimo** **b)** $(-1, 5)$ **máximo y** $(1, 1)$ **mínimo**

c) $(6, -324)$ **mínimo y** $(1, 1)$ **máximo** **d)** $(0, 0)$ **mínimo y** $(1, 1)$ **máximo**

$y = 3x^2 - 2x^3 \rightarrow y' = 6x - 6x^2 = 0$; $x = 1 \;\; x = 0$

$y'(-10) = 6(-10) - 6(-10)^2 < 0$; $y'(0,5) = 6(0,5) - 6(0,5)^2 > 0$; $y'(10) = 6(10) - 6(10)^2 < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; Creciente: $(0,1)$

x=0 mínimo f (0) =0 , (0,0) ; x=1 máximo f (1) = 1 , (1,1)

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 8: Combinatoria

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

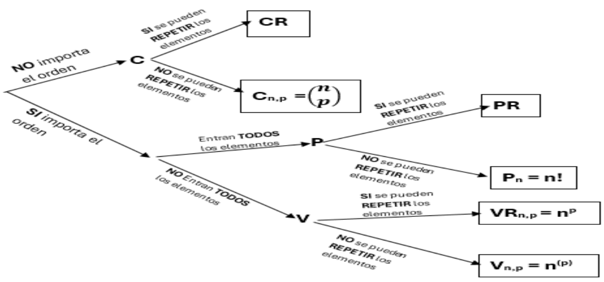
Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

NOCIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLOS
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

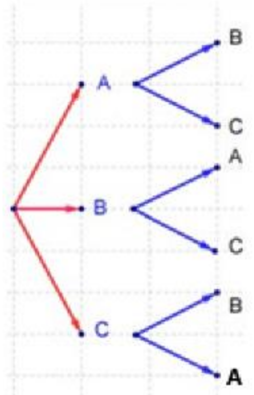


ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERMUTACIONES

1. Haz diagramas en árbol y calcula:
a) Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B y C.
b) Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.

a)



$3 \cdot 2 = 6$

b) El abecedario tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.

La primera letra puede ser una de las vocales: 5

La segunda letra puede ser cualquiera de las del abecedario menos la vocal utilizada: 26

La tercera letra puede ser cualquier consonante menos la utilizada anteriormente: 21

Palabras de 3 letras distintas empiezan vocal y terminan consonante: $5 \cdot 26 \cdot 21 = 2730$.

2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? Ayuda: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema

$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ modelos diferentes. Sólo repetirá modelo un día.

3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? Sugerencia: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

Para colocar la primera ficha tenemos 25 casillas.

Para colocar la segunda ficha nos queda, si eliminamos una fila y una columna, un cuadrado de 4 por 4 que son 16 casillas.

Hay que dividir entre 2, pues donde hemos puesto la segunda ficha ya la hemos contado como posible para poner la segunda, como son idénticas las fichas, se repite la colocación: $(25 \cdot 16) / 2 = 200$

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

5. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Cada uno de los 5 puede llegar el primero.

Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, 3, y 5.

Si la carrera no está amañada hay $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas distintas de llegar a la meta.

6. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.

Se pueden ordenar de $P_{28} = 28! =$ 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes.

8. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

9. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$ b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$

d) $\frac{6!}{5!} = \frac{6\cdot 5!}{5!} = 6$

e) $\frac{12!}{11!} = \frac{12\cdot 11!}{11!} = 12$

f) $\frac{347!}{346!} = 347$

Cuando son dos números factoriales que se diferencian en una unidad, al dividir queda el mayor sin factorial

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$

b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4$

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = (n+4)\cdot(n+3) = n^2 + 7n + 12$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

a) $5\cdot4\cdot3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = \frac{5!}{2!}$

b) $10\cdot11\cdot12\cdot13 = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9!}{9!} = \frac{13!}{9!}$

c) $8\cdot7\cdot6 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$

d) $10\cdot9 = \frac{10\cdot9\cdot8!}{8!} = \frac{10!}{8!}$

13. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{n!} = \frac{(n+3)!}{n!}$

b) $\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)\cdot(\mathrm{n}+2)\cdot(\mathrm{n}+3) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!}$

c) $\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)\cdot(\mathrm{n}+2)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{n}+\mathrm{k}) = \frac{(n+k)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!}$

14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.

Disposición de 30 elementos, importa el orden, entran todos: P_{30} = 30!

15. Nueve amigos van en bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos: P_9 = 9! = 9·8·7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 362 880

2. VARIACIONES

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

Como el 0 no puede estar en primera posición tenemos 9 dígitos para colocar en la primera posición y nos quedan 10 dígitos para 5 posiciones, disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 5), se pueden repetir: 9· $VR_{10,5}$ = 10^5 = 9 · 100 000 = 900 000

17. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?

Los números pueden empezar por 0

Números: disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 4), se pueden repetir: $VR_{10,4}$

Letras: disposición de 27 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 3), se pueden repetir: $VR_{27,3}$

En total: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 10^4 \cdot 27^3$ = 196 830 000

18. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos (esta condición correctamente expresada es "no necesariamente entran todos"), se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

a) $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

b) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$

c) $VR_{11,2} = 11^2 = 121$

d) $VR_{2,11} = 2^{11} = 2048$

20. Expresa con una fórmula:

Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.
Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.
Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

a) $VR_{3,5} = 3^5$; b) $VR_{7,2} = 7^2$; c) $VR_{5,4} = 5^4$

21. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?

Acertar o no acertar lo podemos considerar como 0 y 1.
Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$

22. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

El alfabeto tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.
La primera letra ha de ser consonante: 22
Como la última ha de ser la R, nos quedan 27 letras para la segunda posición: 27
En total: $22 \cdot 27 = 594$

23. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{4,3} = 4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

24. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras.
Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero, pero no la colocada en primer lugar.
Para la tercera 8 y para la cuarta 7.
En total $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ posibilidades.

25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{9,5} = 9^{(5)} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

26. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{3,2} = 3^{(2)} = 3 \cdot 2 = 6$

27. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

a) $V_{11,6} = 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 332640$; b) $V_{7,5} = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520$; c) $V_{8,4} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680$.

29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

a) $\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

b) $\frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c) $\frac{10!}{8!} = \frac{10\cdot9\cdot8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

COMBINACIONES

30. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Reparto de 5 elementos entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$.

31. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Reparto de 3 elementos entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$

32. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Reparto de 5 elementos entre 52, no importa el orden, no se pueden repetir:

$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 1\,497\,000\,960$

33. Añade tres filas más al triángulo de Tartaglia de la derecha

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Las 3 nuevas filas serían:

1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

34. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

35. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Mirando en el triángulo del ejercicio 65, $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,5} = 1$.

También, la fila 5 es: $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ $C_{5,3} = \binom{5}{3}$ $C_{5,4} = \binom{5}{4}$ $C_{5,5} = \binom{5}{5}$

1 5 10 10 5 1

36. Desarrolla $(a + b)^6$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

37. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

a) $$(a-b)^6 = \binom{6}{0}a^6 - \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 - \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 - \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

b) $$(x-3)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 - \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$$
$$= x^4 - 4x^3 \cdot 3 + 6x^2 \cdot 3^2 - 4x \cdot 3^3 + 3^4 = x^4 - 12 + 54x^2 - 108x + 81$$

c) (x+2)^7=$\binom{7}{0}x^7+\binom{7}{1}x^6 2+\binom{7}{2}x^5 2^2+\binom{7}{3}x^4 2^3+\binom{7}{4}x^3 2^4+\binom{7}{5}x^2 2^5+\binom{7}{6}x 2^6++\binom{7}{7}2^7=$

$$=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128$$

d) (–x+3)^5= $\binom{5}{0}(-x)^5+\binom{5}{1}(-x)^4\cdot 3+\binom{5}{2}(-x)^3\cdot 3^2+\binom{5}{3}(-x)^2\cdot 3^3+\binom{5}{4}(-x)3^4++\binom{5}{5}3^5$

$$=-x^5+15x^4-90x^3+270x^2-405x+243$$

38. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^5$

La suma de los exponentes de x han de sumar 7, $x^{5-k}\cdot(x^2)^k=x^7$, luego

5 – k + 2· k = 7 , k = 2 , por tanto el término es,

$\binom{5}{2}(3x)^3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=10\cdot 3^3\cdot x^3\cdot\frac{x^4}{2^2}$, el coeficiente es $\frac{10\cdot 27}{4}=\frac{135}{2}$

39. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

$$\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5$$

$$\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5=\binom{5}{0}(\sqrt{2})^5-\binom{5}{1}(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{5}{2}(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-\binom{5}{3}(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{5}{4}(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=(\sqrt{2})^5-5(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+10(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-10(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+5(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=4\sqrt{2}-10x+5\sqrt{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{16}\sqrt{2}x^4-\frac{1}{32}x^5$$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

40. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? Ayuda: Haz un diagrama circular como el anterior.

El español (A) tiene al italiano (B) a su derecha y al portugués (C) a su izquierda

41. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?

Con Ana y Alejandro hay 4 chicos y 4 chicas en total 8.

En las distribuciones circulares hay que fijar 1 persona, nos quedan 7

Hay P_7 = 7! = 5 040 formas de sentarse en la mesa.

Hay 2 formas de sentar a la pareja, según quien esté a derecha o izquierda, nos quedan 6, luego

Tenemos: $2\cdot P_6$ = 2 · 6! = 1 440 formas en las que están juntos Ana y Alejandro.

Tenemos P_3 y P_3 formas de sentar a chicas y chicos intercalándoles, luego en total tenemos:

$P_3\cdot P_3$ = 3! · 3! = 6 · 6 = 36 formas en las que no hay dos chicas ni dos chicos juntos.

42. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

Hay P_7 = 7! = 5 040 poligonales cerradas contando con el propio octógono.

43. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 3, 2 y 2 veces:

$PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$ números distintos.

44. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 2, 1, 1 y 1 veces:
$PR_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!} = 7\ 560$ Palabras distintas.

45. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 3, y 2 veces:
$PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1\ 260$ formas distintas.
Consideramos las 2 bolas blancas como una sola y contamos de cuantas formas se pueden ordenar:
$PR_8^{4,3,1} = \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} = 280$
Al total restamos las que están juntas y tenemos las que están separadas: 1 260 − 280 = 980.

46. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? Ayuda: Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir:
  $VR_{10,7} = 10^7$ = 10 000 000 contraseñas.
- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
  $V_{10,7} = 10^{(7)}$ = 604 800 contraseñas con números distintos.
- Algún número repetido (aparece 2 veces o más): a todas las contraseñas posibles le restamos las que tienen todos los dígitos distintos: 10 000 000 - 604 800 = 9 395 200 contraseñas.
- Tienen un número repetido 2 veces:
  - Cogemos el número que se va a repetir, que va a ocupar dos posiciones, nos quedan 5 posiciones que pueden ocupar cualquiera de los 9 dígitos restantes, tenemos que escoger que 5 dígitos van a ser, distintos del repetido: $C_{9,5}$.
  - Todos los números que se pueden escribir repitiendo uno de los dígitos: $PR_7^{2,1,1,1,1,1}$
  - En total tenemos: $C_{9,5} \cdot PR_7^{2,1,1,1,1,1}$ = 3 175 200 contraseñas.

47. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? Ayuda: Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

- Como son todas iguales no hay que elegir, introducimos una bola en cada caja, nos quedan 2 bolas que podemos introducir, una en cualquiera de las 5 y lo mismo la otra, luego: 5 · 5 = 25
- Sumamos las maneras que hay sin dejar ninguna vacía y le sumamos dejar una vacía:
    - Ninguna vacía hay 25.
    - Una vacía: elegimos la vacía, hay 5 posibles, nos quedan 4 cajas y 7 bolas, como no puede quedar ninguna vacía, introducimos una en cada caja, nos quedan 3 bolas que las podemos introducir en cualquiera de las cajas: 4 · 4 · 4 = 64
    - En total tenemos: 25 + 64 = 89

48. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? Ayuda: Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

Supongamos que las pulseras no se pueden voltear: Si no fueran cerradas tendríamos $C_{10,4}$ = 210 pulseras diferentes. Al ser cerradas tenemos 210/10 = 21 pulseras distintas.
Si las pulseras se pueden voltear:
Vamos a estudiar los casos a partir de la distancia entre las bolas blancas.
Si las 6 bolas rojas están unidas: Sólo hay 1 caso: 0-0-0-6
Si hay 5 bolas rojas unidas: Hay 2 casos posibles: 1-0-0-5 y 0-1-0-5.
Si hay 4 bolas rojas unidas: Hay 4 casos posibles: 1-1-0-4, 1-0-1-4, 0-0-2-4, 0-2-0-4
Si hay 3 bolas rojas unidas: Hay 6 casos posibles: 0-3-0-3, 3-0-0-3, 0-2-1-3, 0-1-2-3, 2-0-1-3, 1-1-1-3
Si hay 2 bolas rojas unidas: Hay 3 casos posibles: 2-1-1-2, 1-2-1-2, 0-2-2-2.
En total 16 casos.

49. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente? ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

- El rey blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición.
    - Si el rey blanco está en una esquina amenaza a 3 y excluyendo su posición hay 60 casillas para colocar al rey negro y como hay 4 esquinas en total hay 240 formas.
    - Si el rey blanco está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 5 casillas y excluyendo la suya tenemos 58, en total 58·24 = 1392 formas.
    - Si el rey blanco está en una posición central, hay 36 casillas de este tipo, amenaza 8 casillas que incluyendo la suya no amenaza a 55, en total 55·36 = 1980.
    - Por último 240 + 1392 + 1980 = **3612**.
- El alfil blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
    - Si está en una esquina amenaza a 7, excluyendo la suya, nos quedan 64 – 8 = 56 para el negro y como hay 4 esquinas, 4 · 56 = 224 formas.

- Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 8 = 56 para el alfil negro, como para el blanco hay 24, en total hay 24 · 56 = 1344 formas.
- Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 10 = 54 casillas, en total, 20 · 54 = 1080.
- Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 12 = 52 casillas, en total, 12 · 52 = 624.
- Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 14 = 50 casillas, en total, 4 · 50 = 200.
- En total, 224 + 1344 + 1080 + 624 + 200 = **3472**

- La reina blanca la podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
    - Si está en una esquina amenaza a 21, excluyendo la suya, nos quedan 64 – 22 = 42 para la reina negra y como hay 4 esquinas, 4 · 22 = 88 formas.
        - En cualquier casilla, que no sean las esquinas, en horizontal y vertical siempre amenaza 7 en cada dirección, es decir, 14 y en diagonal se comporta como el alfil, luego a los cálculos del alfil hay que sumar siempre 14 casillas más de amenaza.
    - Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 + 14 = 21 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 22 = 42 para la reina negra, como para la blanca hay 24, en total hay 24 · 42 = 1008 formas.
    - Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 + 14 = 23 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 24 = 40 casillas, en total, 20 · 40 = 800.
    - Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 + 14 = 25 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 26 = 38 casillas, en total, 12 · 38 = 456.
    - Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 + 14 = 27 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 28 = 36 casillas, en total, 4 · 36 = 144
    - En total, 88 + 1008 + 800 + 456 + 144 = **2496**.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PERMUTACIONES

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Disposición de 8 elementos, importa el orden, entran todos: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Disposición de 2 elementos, importa el orden, entran todos: P_2 para las chicas e igualmente para chicos P_2, como puede empezar por chica o chico multiplicamos por 2:

$2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! \cdot 2! = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/120.

5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040

6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Si empiezan por 5 tenemos un dígito menos, nos quedan 4:

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Si empiezan por 5 y terminan en 7 tenemos 3 dígitos:

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

VARIACIONES

7. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? Recuerda: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

- 4 cifras distintas: Disposición de 4 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{6,4} = 6^{(4)} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- Impares, acaban en 1, 3 o 5, hay 3 dígitos posibles, nos quedan 5 para coger 3: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $3 \cdot V_{5,3} = 3 \cdot 5^{(3)} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
- Para los múltiplos de 4, analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64, hay 7 posibles, nos quedan 4 dígitos y 2 para elegir: Disposición de 2 elementos (tomados de 4), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $7 \cdot V_{4,2} = 7 \cdot 4^{(2)} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$

8. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. Sugerencia: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

Disposición de 4 elementos (tomados de entre 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$.

Viene a ser la suma , 1 111 + 1 112 + … +6 666, la suma de los términos primero y último es igual a la suma de segundo y penúltimo, 7 777, como hay 1296 números y los juntamos de 2 en 2, la suma total es: $(7\,777 \cdot 1296)/2 = 5\,039\,496$.

9. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

3 colores: Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

5 colores: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

5 colores, sin ser distintos: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

6 días: Disposición de 6 elementos (tomados de 7), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{7,6} = 7^{(6)} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5\,040$

3 días: el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.

11. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

4 cifras: como la primera no puede ser 0, nos quedan 5 para la primera posición y para las 3 restantes nos quedan 5 cifras, Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)}$
En total hay: $5 \cdot V_{5,3} = 5 \cdot 5^{(3)} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ números de 4 cifras distintas.
Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir, 2 · Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $2 \cdot V_{5,3} = 2 \cdot 5^{(3)} = 120$.

12. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

El menor número de tres cifras es 100, el mayor 999, en total hay 900.

Mayores que 123 hay 900 menos los menores o igual que 123, que son del 100 al 123, en total 24, luego mayores que 123 hay: $900 - 24 = 876$.

13. Con las letras de la palabra “arquetipo” ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?
a) Si todas las letras son distintas.
b) Si se pueden repetir letras.

Hay 5 vocales y 4 consonantes, tenemos que alternar vocal y consonante, luego tenemos que calcular el número de letras con 3 vocales y el de 3 consonates y multiplicarlas y a su vez multiplicar por 2, pues puede empezar en vocal o consonante.

a) $2 \cdot V_{5,3} \cdot V_{4,3} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2\,880$ palabras.

b) Si las letras se pueden repetir tenemos $2 \cdot VR_{5,3} \cdot VR_{4,3} = 54\,000$ palabras.

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Byte (8 dígitos): Disposición de 8 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes.

Byte (16 dígitos): Disposición de 16 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,16} = 2^{16} = 65\,536$ bytes.

Byte (4 dígitos): Disposición de 4 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ bytes diferentes, no se pueden escribir las letras del alfabeto.

COMBINACIONES

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \binom{\mathbf{20}}{\mathbf{1}}$ $\boldsymbol{y}$ $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} \neq \binom{\mathbf{9}}{\mathbf{9}}$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$, $\binom{20}{1} = 20$; $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = 56 \neq \binom{9}{9} = 1$

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4 y 3 veces:

$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$ formas distintas.

También, tenemos 7 posiciones, calculamos todas las formas de coger 4 posiciones y ponemos las bolas negras, en las restantes posiciones ponemos las blancas; igualmente puede calcularse cogiendo 3 posiciones y poner las blancas y en las restantes las negras: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ formas distintas.

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$.

18. Calcula: $\boldsymbol{a})\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}$; $\boldsymbol{b})\ \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$; $\boldsymbol{c})\ \binom{\mathbf{20}}{\mathbf{1}}$; $\boldsymbol{d})\ \binom{\mathbf{34}}{\mathbf{0}}$; $\boldsymbol{e})\ \binom{\mathbf{47}}{\mathbf{47}}$

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$

b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$

c) $\binom{20}{1} = 20$

d) $\binom{34}{0} = 1$

e) $\binom{47}{47} = 1$

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

a) $C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

b) $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot(10-6)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$

c) $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$

d) $C_{20,19} = \binom{20}{19} = 20$

e) $C_{47,1} = \binom{47}{1} = 47$

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Reparto de 4 elementos de entre 30, no importa el orden, no se pueden repetir:

$C_{30,3} = \binom{30}{3}$ = 27 405 maneras de elegir 4 alumns de entre 30.

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{5,3} = \binom{5}{3}$ = 10.

Sólo el producto 2 · 7 · 5, es decir hay 1 producto que de número entero.

Para que el resultado sea un número racional no entero, debe entrar 1/3 y no puede entrar π, luego nos quedan, 3 números,2, 7 y 5 para dos factores: $C_{3,2} = \binom{3}{2}$ = 3

Para que el resultado sea un número irracional debe entrar π, luego nos quedan 4 números para coger 2: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?

Reparto de 3 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,3} = \binom{7}{3}$ = 35.

23. Calcula: a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ **b)** $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = \binom{4}{0}1^4+\binom{4}{1}1^3 1^1+\binom{4}{2}1^2 1^2+\binom{4}{3}1^1 1^3+\binom{4}{4}1^4 =$

$= (1+1)^4 = 2^4 = 16$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$, análogamente, = 2^5 = 32

24. ¿Cuál es la forma más facil de calcular: $\binom{8}{0}+\binom{1}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$ **sin calcular cada uno de los números combinatorios?**

Al igual que el ejercicio anterior, la suma corresponde al desarrollo por el Binomio de Newton: $(1 + 1)^8 = 2^8 = 256$.

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

Reparto de 3 elementos de entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{10,3} = \binom{10}{3}$ = 120.

Al escoger 3 ya queda el otro grupo con 7 estudiantes.

Tambien: $C_{10,7} = \binom{10}{7}$ = 120

26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Reparto de 2 elementos de entre 20, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{20,2} = \binom{20}{2} = 190$.

Si te sabes 16 temas hay 4 que no te sabes, luego, reparto de 2 elementos de entre 4, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$, de donde la probabilidad de que salgan 2 que no te sepas es: 6/190 = 0,032 es decir un 3,2%

Si te sabes un tema debemos calcular cuantas formas hay de sacar un tema que sabes de 16 y un tema que no te sabes de 4: $C_{16,1} \cdot C_{4,1} = 16 \cdot 4 = 64$ y la probabilidad es: 64/190 = 0,34 el 34%

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

Si una actividad se puede quedar sin alumnos, son disposiciones ordenadas, la actividad 1 y la 2 e importa el orden y se pueden repetir, pueden ir todos a la misma, $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$ formas de formar los grupos.

Si ninguna actividad se puede quedar sin alumnos hay dos menos, pues hay que fijar que un alumno vaya a una actividad y otro a la otra, es decir 1024 – 2 = 1022 formas.

28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$

a) $(4 - x)^5 = \binom{5}{0}4^5 - \binom{5}{1}4^4 \cdot x + \binom{5}{2}4^3 \cdot x^2 - \binom{5}{3}4^2 \cdot x^3 + \binom{5}{4}4 \cdot x^4 + \binom{5}{5}x^5 =$

$= 256 - 640x + 640x^2 - 160x^3 + 20x^4 - x^5$

b) $(3 - 2x)^4 = \binom{4}{0}3^4 - \binom{4}{1}3^3 2x + \binom{4}{2}3^2(2x)^2 - \binom{4}{3}3(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4 =$

$= 81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$

c) $(2ab - 3c)^6 = \binom{6}{0}(2ab)^6 - \binom{6}{1}(2ab)^5 \cdot 3c + \binom{6}{2}(2ab)^4(3c)^2 - \binom{6}{3}(2ab)^3(3c)^3 +$

$+ \binom{6}{4}(2ab)^2(3c)^4 - \binom{6}{5}2ab(3c)^5 + \binom{6}{6}(3c)^6 =$

$= 64a^6b^6 - 576a^5b^5c + 2160a^4b^4c^2 - 4320a^3b^3c^3 + 4860a^2b^2c^4 - 2916abc^5 + 729c^6$

d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3 = \binom{3}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \binom{3}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{2x} + \binom{3}{2}\frac{x}{2}\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \binom{3}{3}\left(\sqrt{2x}\right)^3 =$

$\frac{x^3}{2^3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2^2} \cdot \sqrt{2x} + 3 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x - 2x \cdot \sqrt{2x} = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} \cdot \sqrt{2x} + 3x^2 - 2x \cdot \sqrt{2x}$

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$, *b)* $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$, *c)* $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$, *d)* $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores, luego x + 2 = 7 , **x = 5,** $\binom{7}{5}=\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$

b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 10, **x = 4**, $\binom{10}{4}=\binom{10}{6}$

c) $\binom{x+3}{x}=\binom{7}{4}+\binom{7}{x}$, la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores luego x + 3 = 8 , **x = 5,** $\binom{8}{5}=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$,

d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 12, **x = 5**, $\binom{12}{5}=\binom{12}{7}$

30. Calcula x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x},\ x\neq 3$; **b)** $\binom{7}{3}=\binom{7}{x},\ x\neq 3$; **c)** $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; ***e)*** $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; ***f)*** $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+3}$

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x},\ x\neq 3$; x + 3 = 4, **x = 1,** $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$,

b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x},\ x\neq 3$; x + 3 = 7 , **x = 4**, $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}$,

c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$; ***x = 3,*** $\binom{4}{3}=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; *2x + 1 = 9 ,* ***x = 4,*** $\binom{9}{5}=\binom{8}{4}+\binom{8}{5}$

e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; **x = 6** , $\binom{7}{3}=\binom{6}{3}+\binom{6}{2}$

f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+3}$, x + 3 + x = 7 , x = 2, $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$; ***b)*** $\binom{n}{2}+n$; ***c)*** $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$;

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{4}$

b) $\binom{n}{2}+n=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$

c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+3}{3}$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

El coeficiente del término sexto en el desarrollo del binomio de Newton será, $\binom{10}{5}$, luego el término sexto es: $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^5=252\cdot\frac{a^5}{2^5}\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{x^5}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^5}{x^5}$, $\left(\frac{252\cdot4\cdot\sqrt{2}}{32}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\right)$,

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1-5x)^9$.

El coeficiente de x^2 corresponderá al término : $\binom{9}{7}\cdot(-1)^7\cdot(-5x)^2=-36\cdot5^2\cdot x^2=-900x^2$

Luego el coeficiente es: - 900.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Reparto de 4 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,4}=\binom{7}{4}=35$.

35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Reparto de 4 elementos de entre 12, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{12,4}=\binom{12}{4}=495$.

Reparto de 3elementos de entre 11, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{11,3}=\binom{11}{3}=165$.

PROBLEMAS

36. En "Curiosidades y Revista" tienes el problema de Buteo. Con 7 discos y 6 letras, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? Ayuda: En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro *"Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur"*, uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?

Disposición de 7 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,7}=6^7$ combinaciones distintas.

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

$5\cdot4\cdot6=120$, el menú se puede combinar de 120 formas diferentes.

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener: $2\cdot6=$ 12 resultados.

Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos: 2 · 2 · 6 = 24 resultados.
Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos: 2 · 2 · 2 · 6 · 6 = 288 resultados.

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?

Se pueden formar: 6 · 8 = 48 parejas distintas.

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

Tenemos 3 colores, 3 figuras y 2 tamaños. La caja consta de: 3 · 3 · 2 = 18 piezas.

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

Los diferentes menú que se pueden elaborar son: 80 · 50 = 40
Para que 40x > 365 el número de postres x debe ser mayor que 365/40 = 9,125. Con 10 postres sería suficiente.

42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?

Si hubo 91 apretones, cada apretón consiste en elegir 2 personas, sin importar el orden de entre x, luego $C_{x,2}$ = 91 , $C_{x,2}$ = $\binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 91 \rightarrow x\cdot(x-1) = 182 \rightarrow x^2 - x - 182 = 0$, x = 14 y x = -13 por tanto, había 14 personas.
Si hubo 45 apretones, $C_{x,2}$ = 45 , $C_{x,2}$ = $\binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 45 \rightarrow x\cdot(x-1) = 90 \rightarrow x^2 - x - 90 = 0$,
x = 10 y x = -9 por tanto, había 10 personas.

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

Hay P_5 = 5! = 120 maneras de introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes.

Si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos distribuimos las 5 cajas en 5 lugares ordenados simbolizados por los objetos, así C1-C1-C1-C1-C2 indica que los 4 primeros objetos están en la caja 1, el quinto en la caja 2 y el resto de las cajas están vacías, por lo tanto tenemos, disposiciones de 5 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,5} = 5^5$ = 3 125 formas diferentes de colocarlos.

La probabilidad de que en la primera caja no haya ningún sería el cociente de disposiciones de 4 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir:
$VR_{4,5} = 4^5$ = 1024 entre las disposiciones de los 5 objetos en las 5 cajas, (apartado anterior) por tanto p(no haya objeto en la primera caja) = 1024/3125 = 0,33

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Con 4 cifras podemos formar, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ contraseñas.

No tienen ningún número repetido, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{10,4} = 5\,040$,

Por lo tanto tienen algún número repetido: 10 000 – 5 040 = 4 960 contraseñas.

Tienen un número repetido dos veces, hay 10 números que se pueden repetir, elegimos las posiciones donde va el número repetido ($V_{4,2}/2$) dividimos entre 2 pues al ser el mismo número el que elegimos, hemos contado el doble de disposiciones y elegimos los otros 2 números, $V_{9,2}$ en total tenemos: $10 \cdot (V_{4,2}/2) \cdot V_{9,2} = 10 \cdot (4 \cdot 3/2) \cdot 9 \cdot 8 = 4\,320$ contraseñas
Cualquier número repetido dos veces 4 320 contraseñas.

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?

El número de puntos de intersección entre 10 rectas es, cada punto de intersección consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 10: $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$.

Con 15 rectas se tienen $C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$ puntos

Con n rectas tenemos $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ puntos.

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

Cada diagonal consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 8: $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$, restamos los 8 lados, un octógono regular tiene 28 – 8 = 20 diagonales.

Un polígono de 20 lados tiene $C_{20,2} - 20 = \binom{20}{2} - 20 = \frac{20\cdot 19}{2} - 20 = 190 - 20 = 170$ diagonales.

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$. **b) $VR_{2,4} = 24$**

c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6!/3! = 120$ **d) $C_{6,3} = 20$**

Introducimos los datos en la calculadora y comprobamos que son ciertos

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? Ayuda: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler: C + V = A + 2

Un icosaedro regular tiene 12 vértices y 30 aristas por lo tanto tiene:

$C_{12,2} - 30 = \binom{12}{2} - 30 = \frac{12\cdot 11}{2} - 30 = 66 - 30 = 36$ diagonales.

Un dodecaedro tiene 20 vértices, 30 aristas y cada una de las 12 caras pentagonales tienen 5 diagonales, por lo tanto un dodecaedro tiene $C_{20,2} - 30 - 12\cdot 5 = \binom{20}{2} - 30 - 60 = \frac{20\cdot 19}{2} - 90 =$
$= 190 - 90 = 100$ diagonales.

49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

- 5 cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 120$.
- Que terminan en 5: Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 24$.
- Que empiecen por 2, Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 24$.
- Que empiezan por 2 y terminan en 7, Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 6$.

50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?

a) Si hay 5 bolas podemos tener 2 bolas de un color, 2 bolas de otro y 1 bola del tercer color, o bien 3 bolas de 1 color, 1 bola de otro y ota bola de otro, por tanto puede haber:

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el primer caso es $PR_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30.$

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el segundo caso es $PR_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20.$

b) Y pulseras hay: en el primer caso, AAVVR, ARAVV, AAVRV, 3 pulseras.

En el segundo caso, AAAVR, AAVAR, AARAV, 3 pulseras también.

51. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

Cinco cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 120$

Ordenados de menor a mayor, 12 345 el menor y 54 321 el mayor, se observa que el primero más el ultimo suman 66 666 lo mismo que el segundo más el penúltimo y así sucesivamente por lo que la suma de estos 120 números es, como los cogemos de 2 en 2 nos quedan 60 sumas,

66 666 · 60 = 399 996.

52. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

a) $V_{x,3} = C_{x,2}$, $x\cdot(x-1)\cdot(x-2) = \frac{x\cdot(x-1)}{2}$, simplificando, $2\cdot(x-2) = 1$, **$x = 5/2$**

b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$, $x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4) = 6\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-2)$, simplificando, $(x-3)\cdot(x-4) = 6$, $x^2 - 7x - 6 = 0$,

$x = 1$, $x = 6$, como la solución $x = 1$ no tiene sentido, nos queda **$x = 6$**.

c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3} \to 3\cdot C_{x+1,14} = 7\cdot C_{x,2} \to 3\cdot\binom{x+1}{14} = 7\cdot\binom{x}{2} \to$

$\to 3\cdot\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\dots(x-12)}{14!} = 7\cdot\frac{x(x-1)}{2!}$, simplificando,

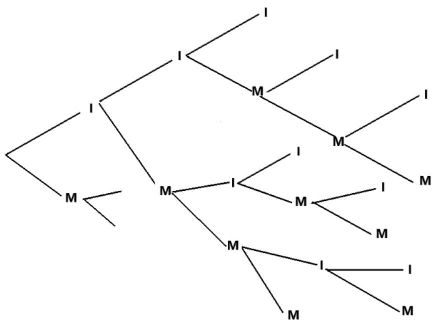
$$(x+1)(x-2)\dots(x-12) = \frac{7\cdot 14!}{3\cdot 2} \to (x+1)(x-2)\dots(x-12) = \frac{7\cdot 7\cdot 2\cdot 13!}{3\cdot 2} = \frac{49}{3}\cdot 13!$$

53. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Tenemos 27 letras y 10 números.
Con M 123456: $27 \cdot VR_{6,10} = 27\ 000\ 000$ matrículas diferentes,
Con M 1234 A : $27 \cdot VR_{10,4} \cdot 27 = 7\ 290\ 000$ distintas, y
Con 1234 ABC: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 10^4 \cdot 27^3 = 196\ 830\ 000$.

54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

En el peor de los casos sería que ganasen los sets de forma que en el 4º hubieran ganado 2 cada uno, luego como máximo 5 sets.
Los desarrollos dependen de la forma en que vayan ganando los sets hasta el 4º pues el 5º terminarían y según empiece ganando Iker o María:



hay 10 posibles desarrollos para cada uno, luego en total hay 20 posibles desarrollos.

55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Menores que 5 son, 0, 1, 2, 3 y 4, 5 cifras para 4 huecos luego, el número del teléfono está entre $V_{5,4} = 120$ números diferentes.

56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Se trata de elegir 3 expertos entre los 7 que hay, no importa el orden y 2 en formación entre los 4 que hay, no importa el orden, el equipo puede estar formado de $C_{7,3} \cdot C_{4,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} \cdot \frac{4\cdot3}{2} = 210$ formas diferentes.

Si un experto está fijo hay $C_{6,2} \cdot C_{4,2} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6\cdot5}{2} \cdot \frac{4\cdot3}{2} = 90$ formas distintas.

57. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

a) Para imprimir los billetes con salida y llegada se trata de elegir 2 entre 8, importa el orden:
$V_{8,2}$ = 8 · 7 = 56 billetes diferentes hay que imprimir

b) Al imprimir sólo las distancias, no importa el orden por tanto, $C_{8,2}$ = $\binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$.

58. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Cada 6 meses coinciden 1 en que los dos entran a trabajar a las 8, en un año coinciden 2 meses, es decir, de cada 6 días 1 no podrá ninguno de los dos padres ir a la guardería. Suponiendo que trabajan los sábados, pero no los domingos habrá aproximadamente 52 días.

59. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Debemos calcular las formas de encenderse las luces dependiendo de que se acierte a 3, 2, 1 o ningún caballito: $V_{10,3} + V_{10,2} + V_{10,1}$ +1 = 10 · 9 · 8 + 10 · 9 + 10 + 1 = 821 formas diferentes.
Si el primer tiro falla tenemos: $V_{10,2} + V_{10,1}$ +1 = 10 · 9 + 10 + 1 = 101 formas distintas.

60. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Tenemos 6 chicas y 6 chicos, se trata de colocar personas en los 4 bailes:
Si elige chica Antonio tiene $C_{6,4}$ = $\binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5}{2}$ =15 formas de elegir pareja chica en cuatro bailes.
Si elige chico Antonio tiene $C_{5,4}$ = $\binom{5}{4}$ = 5 formas de elegir pareja chico en cuatro bailes.
En total hay 20 formas de elegir pareja.

61. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar? ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2? Calcula la suma de todos estos últimos números.

Calculamos todos los de 6 cifras y restamos todos los que empiezan por 0.
Hay $VR_{6,5} = 6^5$ = 7 776 formas de formar números de 5 dígitos. Hay $VR_{5,4} = 5^4$ = 625 que empiezan por 0 por lo que hay 7 776 – 625 = 7 151 números de cinco cifras.
2 veces el 1 y 3 veces el 2: hay $PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2}$ = 10 números con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2.
Para calcular la suma podemos escribirlos: 11222 + 12122 + 12212 + 12221 + 21122 + 21212 + 21221 + 22112 + 22121 + 22211 = 177 776.
También fijando las cifras y calculando su valor y las veces que aparece:
El 1 en las decenas de millar, millar, etc:
4·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) igualmente con el 2 : 2· 6·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) =
= 44 444 + 133 332 = 177 776

62. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra “puerta” que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

Tenemos 3 vocales y 3 consonantes, como no deben ir juntas vocales ni consonantes, es como alternar, empezando por vocal o consonante: hay $P_3 \cdot P_3$ = 3! · 3! = 3 · 2 · 3 · 2 = 36 palabras que empiezan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante. En total 72 palabras.

63. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

Como no importa el orden, se pueden realizar $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$ = 120 guardias diferentes.

Alejandro estará en $C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2}$ = 36 guardias y no estará en 120 – 36 = 84. $C_{9,3}$

64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

Con dos cifras hay 9 números capicúas, los formados con los 9 dígitos.
Con tres cifras hay los mismos que antes multiplicados por los 10 que pueden ir en el centro: 10 · 9 = 90.
De cuatro cifras, el primero puede ser uno de los 9 dígitos distintos del 0 y el segundo cualquiera de los 10 dígitos, 3º y 4º son los mismos que 1º y 2º: 9 · 10 = 90 capicúas.

65. Con las letras de la palabra "argumento" ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.

Tenemos 4 vocales y 5 consonantes.
a) Comienzan y terminan por vocal, en el centro debe ir otra vocal, tenemos que elegir 3 vocales de 4 y 2 consonantes de 5, importa el orden y no se pueden repetir: $V_{4,3} \cdot V_{5,2}$ = 4 · 3 · 2 · 5 · 4 = 480.
Comienzan y terminan por consonante, igual que antes pero ahora elegimos 3 consonantes de 5 y 2 vocales de 4: $V_{5,3} \cdot V_{4,2}$ = 5 · 4 · 3 · 4 · 3 · 2 = 720. En total 1200 palabras.
b) Si se pueden repetir el cálculo es igual con repetición: comienzan y terminan por vocal $VR_{4,3} \cdot VR_{5,2} = 4^3 \cdot 5^2$ = 1 600.
Comienzan y terminan por consonante: $VR_{5,3} \cdot VR_{4,2} = 5^3 \cdot 4^2$ = 2000. En total 3 600 palabras.

66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

Pueden comenzar por 6, 7 u 8, (3 cifras) Nos quedan 9 cifras para poner en los 3 huecos, distintas y ordenadas luego hay 3 · $V_{9,3}$ = 3 · 9 · 8 · 7 = 1 296 números con todas sus cifras distintas.

67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?

Como no importa el orden hay $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}$ = 70 muestrarios distintos de cuatro juguetes.

Si queremos que siempre entre el último modelo, tenemos: $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}$ =35 muestrarios.

Calculamos ahora la probabilidad que el último modelo llegue a un cliente: $\frac{35}{70} = 0{,}5$

68. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

Si hay tres resguardos equivocados se tienen $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2}$ = 10 formas distintas de elegir tres resguardos equivocados, para cada una de estas elecciones hay 2 en las que ninguno de los tres resguardos coincide con el bolso respectivo, es decir, sea E equivocado, la distribución de equivocados puede ser E1-E2-E3, o bien, E1-E3-E2. En total 2 · 10 = 20 formas diferentes.

Si son dos los resguardos equivocados se tienen también $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2}$ = 10 formas distintas de elegir dos resguardos equivocados pero ahora sólo hay una forma en la que los dos resguardos no coincide con el bolso respectivo, E1-E2. En total 10 formas diferentes.

69. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

En las disposiciones circulares hay que fijar un elemento y permutar el resto, luego hay $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$ formas de colocar a cuatro personas en una mesa circular.

70. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

Hay 9 000 números de cuatro cifras de estos no tienen ningún cinco, a todos los los números de 4 cifras sin contar el 5 le restamos todos los números que empizan por 0 y no contienen el 5: $VR_{9,4} – VR_{8,3} = 9^4 - 8^3 = 6\ 049$, por lo tanto tienen algún cinco: 9 000 – 6 049 = 2 951 números.

71. Con las letras de la palabra "saber", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "corte", "puerta" y "Alberto".

Con las letras de la palabra "saber" se pueden formar, sin juntar dos vocales o dos consonantes, como hay 3 consonantes y 2 vocales tienen que empezar y terminar en vocal $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ palabras, las mismas que con las letras de la palabra "corte".

Con las de la palabra "puerta" hay $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ que comienzan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante, en total 72.

Con las de la palabra "Alberto" hay $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ palabras.

72. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, … ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?

Ley de recurrencia: $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + n$.

Su término general $a_n = \binom{n+1}{2}$, se verifica la ley de recurrencia $a_1 = 1$ y $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$.

73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

Con una cifra hay 3. Con dos cifras hay $VR_{3,2} = 3^2 = 9$. Con tres cifras hay $VR_{3,3} = 3^3 = 27$ y con cuatro cifras hay $VR_{3,4} = 3^4 = 81$. En total 3 +9 + 27 + 81 = 120 números.

74. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

En total se tienen $VR_{5,5} = 5^5 = 3\ 125$ palabras con letras repetidas o no. Entre estas hay $P_5 = 5! = 120$ con las cinco letras distintas por lo tanto hay 3 125 – 120 = 3 005 palabras con alguna letra repetida.

75. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?

Al ser con reemplazo se pueden repetir y son ordenadas.
Obtenemos 4 ases cuando obtenemos una que no es as, nos quedan 36 multiplicado por las formas de sacar 4 ases, puede salir el mismo, $36 \cdot VR_{4,4} = 36 \cdot 4^4 = 9\,216$ casos.
Tenemos 5 ases en $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$ casos en total tenemos 9 216 + 1024 = 10 240 casos favorables.
El número de casos posibles es $VR_{40,5} = 102\,400\,000$.
La probabilidad de obtener más de 3 ases es 10 240/102 400 000 = 1/10 000.
La probabilidad de obtener menos de cuatro ases 1 – 1/10 000 = 9 999/10 000.

76. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba? b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con n caminos en cada lado? e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales?

a) Hay 9 pasos de A hasta B que se pueden escoger de 2 formas $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ caminos diferentes.
b) En este caso tenemos 6 caminos.
c) En este caso tenemos 7 caminos
d) En una cuadrícula con n caminos en cada lado hay n – 1 cuadrados en cada lado y el número de caminos es $\binom{2n-2}{n-1}$
e) En una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales hay $\binom{n+m-2}{n-1}$ caminos.

AUTOEVALUACIÓN

1) Tienes nueve monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?:

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

Lo más fácil es $PR_9^{5,4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \binom{9}{5}$

Respuesta: c) $C_{9,5}$

2) En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?:

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

Disposición de 4 elementos tomados entre 10, no importa el orden

Respuesta: c) $C_{10,4}$

3) ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

Disposición de 3 elementos tomados entre 4, no importa el orden.

Respuesta: c) $C_{4,3}$

4) Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?:

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

Disposiciones de 5 elementos tomados entre 5, importa el orden, entran todos.

Respuesta: b) P_5

5) Permutaciones de n+4 elementos dividido por permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

Respuesta: a) $\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)$

6) Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

Respuesta: b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$

7) Indica qué afirmación es falsa;

a) $0! = 1$; b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot(m-n+1)$

Respuesta: b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$;

8) El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ **es:**

a) 0, 1, y 1; b) 0, 9 y 4; c) 1, 1 y 4; d) 5, 9 y 4

Respuesta: c) 1, 1 y 4

9) El valor de x, distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ **es:**

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

4 + x = 7 , x = 3

Respuesta: a) 3

10) El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de (a + b)^7 es:

a) $\binom{7}{3}$ **; b) 1; c)** $\binom{7}{4}$**; d)** $V_{7,4}$

Respuesta: a) $\binom{7}{3}$