

# 4ºA ESO

## Capítulo 1:

### Números reales

#### Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-J

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:20:55.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos si excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)

BOCM:– Realización de **estimaciones** en diversos contextos analizando y acotando el error cometido.

- Definición de **logaritmo**. Comprensión de la importancia, en ciertos contextos, del concepto de orden de magnitud.
- Algunos números irracionales en situaciones de la vida cotidiana. La importancia del **número  $\pi$**  y de la proporción aurea.

**Autor: Paco Moya y Nieves Zuasti**

**Revisor: Javier Rodrigo y María Molero**

**Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF**

## Índice

### 1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

- 1.1. OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS, FRACCIONES Y DECIMALES
- 1.2. NÚMEROS RACIONALES. FRACCIONES Y EXPRESIONES DECIMALES
- 1.3. NÚMEROS IRRACIONALES. EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES
- 1.4. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

### 2. POTENCIAS

- 2.1. REPASO DE LAS POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL
- 2.2. POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO
- 2.3. OPERACIONES CON RADICALES
- 2.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

### 3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

- 3.1. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS Y NÚMEROS RACIONALES
- 3.2. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES
- 3.3. HERRAMIENTA INFORMÁTICA PARA ESTUDIAR LA PROPORCIÓN ÁUREA

### 4. APROXIMACIONES Y ERRORES

- 4.1. REDONDEO
- 4.2. CIFRAS SIGNIFICATIVAS
- 4.3. ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO

### 5. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

- 5.1. INTERVALOS. TIPOS Y SIGNIFICADO
- 5.2. SEMIRRECTAS
- 5.3. ENTORNOS

### 6. LOGARITMOS

- 6.1. DEFINICIÓN
- 6.2. PROPIEDADES

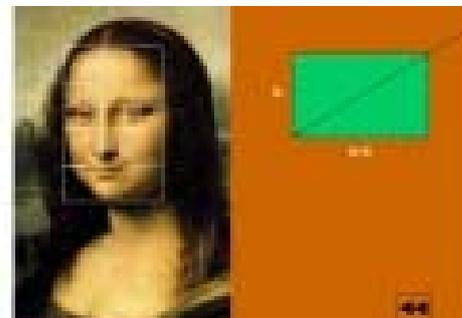
## Resumen

Ya conoces los números naturales, los números enteros y los números racionales. En este capítulo vamos a estudiar los números reales que están formados por los números racionales y los irracionales.

Con algunos números reales irracionales ya te habías encontrado, como con  $\sqrt{2}$ , o con  $\pi$ ... Pero hay muchos, muchos más. Hay muchos más números irracionales que racionales. Y te preguntarás, ¿cómo se puede decir eso si son infinitos? Resulta que hay unos infinitos más grandes que otros. Al infinito de los números naturales se le denomina "*infinito numerable*". El infinito de los números enteros y de los números racionales también es "*infinito numerable*", pero el de los números reales ya no es numerable, es mucho mayor, se le denomina "*la potencia del continuo*".

Una de las propiedades más importantes de los números reales es su relación con los puntos de una recta, por lo que aprenderemos a representarlos en la recta "*real*" en la que no dejan "agujeros".

#### *El número de oro en la Gioconda*



En este primer capítulo vamos a repasar muchas cosas que ya conoces, como las operaciones con los números, representar los números en una recta, las potencias... Si todo eso lo dominas suficientemente, lo mejor es que pases muy deprisa por él, y dediques tu tiempo a otros capítulos que te resulten más nuevos. Sin embargo, seguro que hay pequeños detalles que sí pueden resultarte nuevos, como por ejemplo que los números irracionales, junto con los números racionales forman el conjunto de los *números reales*, y que a cada número real le corresponde un punto de la recta (propiedad que ya tenían los números racionales) y a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso, a la recta numérica la vamos a llamar *recta real*.

Empezamos con un problema para que midas lo que recuerdas sobre operaciones con fracciones:

## Actividades propuestas

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

## 1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

### 1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales

#### Operaciones con números enteros

**Recuerda que:**

Los números **naturales** son:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ .

Existen ocasiones de la vida cotidiana en las que es preciso usar números diferentes de los números naturales. Fíjate en estos ejemplos:

**Ejemplos:**

- Si se tienen 20 € y se gastan 30 euros, se tendrá una deuda de 10 euros, es decir  $-10$  €.
- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace  $-5$  °C.
- Al bajar en ascensor al sótano 3, has bajado al piso  $-3$ .

Los **números enteros** son una ampliación de los números **naturales** ( $\mathbb{N}$ ). Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo  $+$ :  $+1, +2, +3, +4, +5\dots$ . Los enteros **negativos** van precedidos del signo  $-$ :  $-1, -2, -3\dots$ . El **cero** es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por  $\mathbb{Z}$ :  $\mathbb{Z} = \{\dots-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots\}$ .

**Recuerda que:**

Para **sumar** (o restar) números enteros podemos sumar por un lado todos los números enteros positivos, y los negativos por otro, restando el resultado.

**Ejemplo:**

✚ Si  $a, b$  y  $c$  son números enteros entonces:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Para **multiplicar** o dividir números enteros se tiene en cuenta la regla de los signos.

**Ejemplo:**

$$\color{red}{+} \color{red}{+} \quad (+5) \cdot (+4) = +20 \quad \color{red}{-} \color{red}{-} \quad (-3) \cdot (-5) = +15 \quad \color{red}{+} \color{red}{-} \quad (+5) \cdot (-4) = -20 \quad \color{red}{-} \color{red}{+} \quad (-6) \cdot (+5) = -30$$

## Actividades propuestas

2. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $+8 + (-1) \cdot (+6)$

b)  $-6 + (-7) : (+7)$

c)  $+28 - (-36) : (-9-9)$

d)  $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$

e)  $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$

f)  $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a.  $6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 20$

b.  $-8 \cdot (+5) + (-4) \cdot 9 + 50$

c.  $(-3) \cdot (+9) - (-6) \cdot (-7) + (-2) \cdot (+5)$

d.  $-(-1) \cdot (+6) \cdot (-9) \cdot (+8) - (+5) \cdot (-7)$

## Operaciones con fracciones

**Recuerda que:**

Una **fracción** es una expresión de la forma  $\frac{m}{n}$  donde tanto  $m$  como  $n$  son números enteros. Para referirnos a ella decimos " $m$  partido por  $n$ ";  $m$  recibe el nombre de **numerador** y  $n$  el de **denominador**.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador, reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador, reciben el nombre de **fracciones propias**.

Para **sumar** o restar fracciones que tienen el **mismo denominador** se realiza la suma, o la resta, de los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador, buscando el mínimo común múltiplo de los denominadores.

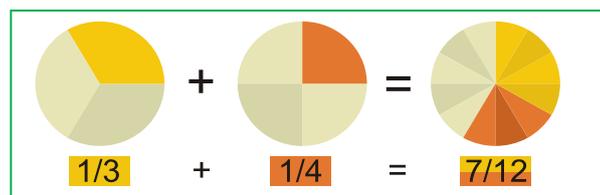
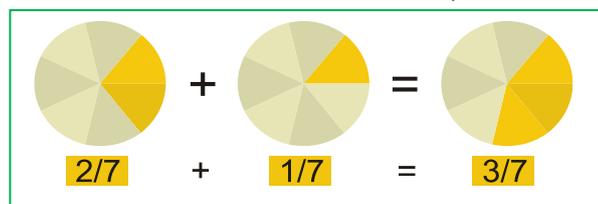
**Ejemplos:**

$\color{red}{+} \color{red}{+}$  a)  $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

$\color{red}{+} \color{red}{+}$  b)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Los denominadores son diferentes, 3 y 4. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 3 nos da 4 y al hacerlo entre 4 obtenemos 3.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$



## Actividades propuestas

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } -\frac{5}{3} - \frac{7}{2} & \text{b) } \frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9} & \text{c) } \frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8} & \text{d) } \frac{7}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8}\right) \\
 \text{e) } \left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{9}{8} & \text{f) } \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{8}\right) & \text{g) } \frac{15}{2} : \frac{5}{4} & \text{h) } \frac{6}{5} : \frac{1}{5} \quad \text{i) } 15 : \frac{3}{5}
 \end{array}$$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3}\right) \cdot \frac{9}{x} & \text{b) } \frac{x+1}{x^2-1} & \text{c) } \frac{x^2-6x+9}{x-3} : \frac{x-3}{x+2} & \text{d) } \frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)
 \end{array}$$

## Operaciones con expresiones decimales

Una **expresión decimal** consta de dos partes: su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma.

**Observa que:**

La coma se puede escribir arriba: 3'5 (aunque actualmente la RAE lo considera falta de ortografía), o abajo: 3,5, o también se utiliza un punto: 3.5. En este capítulo vamos a utilizar el punto.

Para **sumar o restar** expresiones decimales, basta conseguir que tengan el mismo número de cifras decimales.

**Ejemplo:**

$$\text{a) } 24.7 + 83.15 - 0.05 = 24.70 + 83.15 - 0.05 = 107.80 \quad \text{b) } 53.39 - 56 + 0.06 = 53.45 - 56.00 = -2.55$$

Para **multiplicar** dos expresiones decimales, se multiplican ignorando la coma que posee cada una de ellas. Al resultado de ese producto se le pone una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

**Ejemplo:**

$$\text{✚ } 5.7a \cdot 3.2a \cdot 7.14a = 130.2336a^3$$

Para **dividir** expresiones decimales igualamos el número de cifras decimales de ambos números, y luego dividimos.

**Ejemplo:**

$$\text{✚ } \frac{9.3}{4.81} = \frac{9.30}{4.81} = \frac{930}{481} = 1.9$$

## Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } 31.3 + 5.97 & \text{b) } 3.52 \cdot 6.7 & \text{c) } 11.51 - 4.8 & \text{d) } 19.1 - 7.35 \\
 \text{e) } 4.32 + 32.8 + 8.224 & \text{f) } 46.77 - 15.6 + 2.3 & \text{g) } 1.16 \cdot 3.52 & \text{h) } 3.2 \cdot 5.1 \cdot 1.4 \\
 \text{i) } 2.3 \cdot 4.11 \cdot 3.5 & \text{j) } 4 \cdot (3.01 + 2.4) & \text{k) } 5.3 \cdot (12 + 3.14) & \text{l) } 3.9 \cdot (25.8 - 21.97)
 \end{array}$$

## 1.2. Números racionales. Fracciones y expresiones decimales

Toda expresión decimal exacta, o periódica, se puede poner como fracción.

Una expresión **decimal exacta** se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

**Ejemplo:**

$$\color{red}{+} \quad 93.15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$$

Para escribir en forma de fracción una expresión **decimal periódica**, como por ejemplo,  $N = 1.725252525\dots$ , tenemos que conseguir dos números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales:

$$\begin{aligned} N &= 1.7252525\dots \\ 1000N &= 1725.2525\dots \\ 10N &= 17.2525\dots \\ \text{Si restamos: } 990N &= 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495} \end{aligned}$$

Para ello multiplicamos a N de forma que la coma quede después del primer periodo, en este caso después de 1725. También multiplicamos a N de manera que la coma quede al principio del primer periodo, en este caso detrás de 17. Ahora 1000N y 10N tienen la misma parte decimal (infinita) que si restamos desaparece, y podemos despejar N.

### Actividades propuestas

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

- a) 7.92835;                      b) 291.291835;                      c) 0.23;                      d) 2.353535.....  
e) 87.2365656565.....;                      f) 0.9999.....;                      g) 26.5735735735.....

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta, o periódica.

**Recuerda que:**

Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 su expresión decimal es exacta.

**Ejemplo:**

$$\color{red}{+} \quad \frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0,025; \text{ ya que } \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2, \text{ y esto es general ya que siempre habrá una potencia de } 10 \text{ que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de } 2 \text{ y } 5.$$

Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

## Ejemplo:

- ✚ Si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente? La respuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten. Por lo tanto, la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto, pero  $1/23$  tiene un periodo de 22 cifras,  $1/97$  lo tiene de 96 cifras, sin embargo  $1/37$  tiene un periodo de sólo 3 cifras).

Se llaman **números racionales** a aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica, y se les representa por  $\mathbb{Q}$ . Acabamos de ver que se pueden escribir en forma de fracción por lo que se puede definir el conjunto de los números racionales como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

¿Por qué imponemos que el denominador sea distinto de cero? Observa que no tiene sentido una fracción de denominador 0.

## Actividades propuestas

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.
- a)  $1/3$     b)  $7/5$     c)  $11/30$     d)  $3/25$     e)  $9/8$     f)  $7/11$
9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

## 1.3. Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Ya conoces algunos:  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  ... Cuando los griegos demostraron que existían números como  $\sqrt{2}$ , o como el número de oro, que no se podían poner en forma de fracción y que tenían, por tanto, infinitas cifras decimales no periódicas, les pareció algo insólito. Por eso estos números recibieron ese extraño nombre de “irracionales”. No lo podían entender dentro de su filosofía. Lo interesante es que existe una longitud que mide exactamente  $\sqrt{2}$ , que es la diagonal de cuadrado de lado 1, o la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

El método para demostrar que  $\sqrt{2}$  no se puede escribir en forma de fracción se denomina “reducción al absurdo” y consiste en suponer que sí se puede, y llegar a una contradicción. Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, como con  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  ...

Pero no vale para todos los irracionales. Para demostrar que  $\pi$  es un número irracional hay que estudiar mucho. Está relacionado con el interesante problema de la *cuadratura del círculo*. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por *Lambert*. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

Estos números cuya expresión decimal es infinita y no periódica se denominan **números irracionales**.

Se llaman **números reales** al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

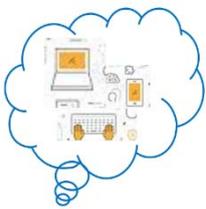
Con estos números tenemos resuelto el problema de poder medir cualquier longitud. Esta propiedad de los números reales se conoce con el nombre de *completitud*.

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Observa que también a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero no al contrario, pues  $\sqrt{2}$  es un punto de la recta que no es racional.

## Actividades propuestas

**10.** Dibuja un segmento de longitud  $\sqrt{2}$ . El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1.4, pues  $(1.4)^2$  es distinto de 2; no 1.41 pues  $(1.41)^2$  es distinto de 2; ni 1.414, pues  $(1.414)^2$  es distinto de 2; y sin embargo  $(\sqrt{2})^2 = 2$ .



**11.** Utiliza la calculadora para hallar la expresión decimal aproximada de  $\sqrt{2}$ . Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

## 1.4. Distintos tipos de números

Ya conoces distintos tipos de números:

**Naturales**  $\rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 no suele considerarse un número natural.

**Enteros**  $\rightarrow \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Son los números naturales, sus opuestos y el cero. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra  $\mathbb{Q}$ . Por tanto

**Racionales**  $\rightarrow \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Los números racionales incluyen a los Enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0.12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7.01252525...) pues pueden escribirse en forma de fracción.

Los números como  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \pi, \dots$  son los números **irracionales**, y tienen una expresión decimal infinita no periódica. Junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Por tanto

**Irracionales**  $\rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

Son números irracionales aquellos números que **no** pueden ponerse como fracción de números enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho, hay más que racionales ¡!), son todos aquellos

### Notación:

- $\in$  significa "pertenece a"
- $\cup$  significa "unión"
- $\subset$  significa "incluido en"
- $\cap$  significa "intersección"

# Números reales. 4ºA de ESO

que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo**. Ejemplos: 17.6766766676... que me lo acabo de inventar o 0.1234567891011... que se lo inventó *Carmichael*. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora 😊)

$$\text{Reales} \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

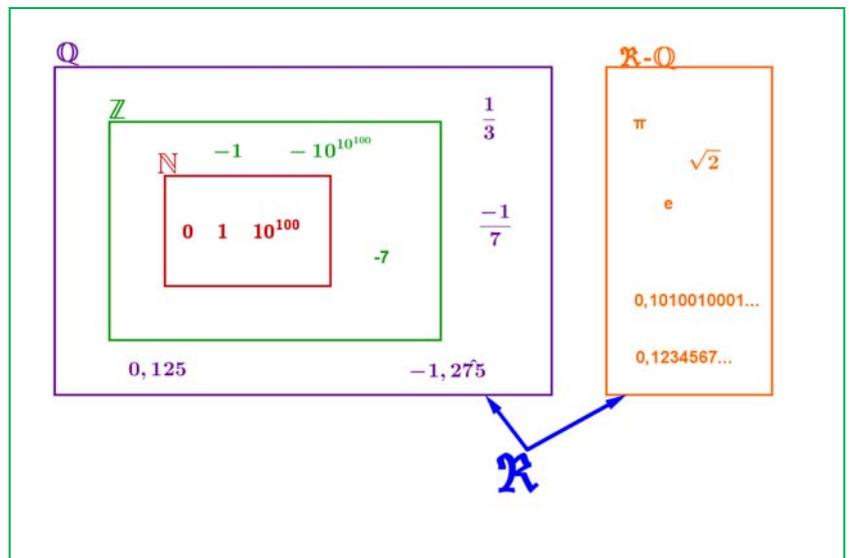
Tenemos por tanto que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

¿Son estos todos los números?

No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos  $\mathbb{C}$  (en 1º de bachillerato se estudian en la opción de Ciencias).



## Actividades propuestas

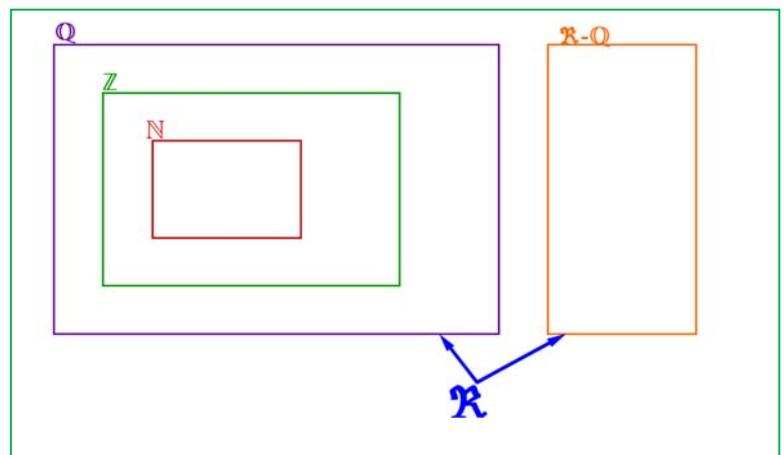
12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212...					
$\pi$					
1/2					
1.99999...					

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:

14. ¿Puedes demostrar que  $4.99999... = 5$ ? ¿cuánto vale  $2.5999...?$  Escríbelos en forma de fracción.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de  $\frac{1}{53}$ ?



## 2. POTENCIAS

### 2.1. Repaso de las potencias de exponente natural

**Recuerda que:**

Para calcular la **potencia** de exponente un número natural y de base un número cualquiera se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

**Ejemplos:**

$$+ a) (+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$$

$$b) (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

$$c) (1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$$

$$d) (\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$$(-2)^2 = +4$$

**Ejemplos:**

$$+ (-5)^2 = +25$$

$$+ (-5)^3 = -125$$

### Actividades propuestas

16. Calcula:

$$a) 1)^{7345}$$

$$b) (-1)^{7345}$$

$$c) (-4)^2$$

$$d) (-4)^3$$

$$e) (1/2)^3$$

$$f) (\sqrt{2})^6$$

### 2.2. Potencias de exponente fraccionario

Si el exponente es, por ejemplo,  $-2$ , no sabemos multiplicar algo *menos dos veces*. Tampoco sabemos multiplicar algo por sí mismo *cero veces*. Ahora la definición anterior no nos sirve. Las definiciones que se van a dar van a mantener las propiedades que conocemos de las operaciones con potencias de exponente natural, que van a seguir siendo válidas.

Se define:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  y se define  $a^0 = 1$

En efecto,  $\frac{a^3}{a^3} = 1$  y  $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$ . Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define  $a^0 = 1$ .

También,  $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$  y  $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$ . Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

#### Recuerda

Siempre se verifica que:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

$$c^m : c^n = c^{m-n}$$

$$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$$

## Actividades propuestas

17. Expresa como única potencia:

a)  $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$

b)  $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c)  $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$

d)  $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a)  $(-3/5)^{-4}$     b)  $(-4/7)^{-2}$     c)  $\frac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$     d)  $\frac{3^2 \cdot 4^5}{(-2) \cdot 4^5}$     e)  $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

## 2.3. Operaciones con radicales

La raíz  $n$ -ésima de un número  $a$  es un número  $x$  que, al elevarlo a  $n$ , da como resultado  $a$ .

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo  $a$  es un **único** número no negativo  $x$  que elevado al cuadrado nos da  $a$ :

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, a \geq 0, x \geq 0.$$

**Observa que**  $\sqrt{-1}$  no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo  $\sqrt[3]{-1} = -1$  sí existe, pues  $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$ .

**Observa que:**  $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$ , por lo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

**Ejemplo:**

$$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$$

Podemos **operar** con radicales utilizando las mismas propiedades de las potencias de exponente fraccionario.

**Ejemplo:**

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$$

$$x^{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$x^{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

### Recuerda

Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$  que es distinto de:

$$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

En ocasiones es posible **extraer factores** de un radical.

**Ejemplo:**

$$\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$$

## Actividades propuestas

19. Simplifica los radicales  $\sqrt[4]{3^{12}}$ ,  $\sqrt[10]{9^{15}}$  usando potencias de exponente fraccionario.

20. Calcula  $\sqrt{484}$  y  $\sqrt[3]{8\,000}$  factorizando previamente los radicandos

21. Calcula y simplifica:  $\sqrt{3}(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula  $25^{0,5}$ ;  $64^{\frac{3}{5}}$  y  $\left(\frac{6}{7^5}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. Expresa en forma de radical: a)  $(-5)^{4/5}$                       b)  $27^{1/3}$                       c)  $7^{2/3}$

## 2.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por  $10^n$ , siendo  $n$  un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \leq a \leq 9$$

Si el exponente  $n$  es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente  $n$  es negativo para expresar números pequeños

**Ejemplo:**

$$\sqrt{7\,810\,000\,000\,000} = 7.81 \cdot 10^{12}$$

$$0.0000000000038 = 3.8 \cdot 10^{-11}$$

$$\sqrt{500\,000} = 5 \cdot 10^5$$

$$0.00002 = 2 \cdot 10^{-5}$$

$\sqrt{}$  Hay galaxias que están a 200 000 000 000 000 km de nosotros, y lo escribimos  $2 \cdot 10^{14}$

$\sqrt{}$  La masa de un electrón es aproximadamente de 0.00000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como  $9.11 \cdot 10^{-28}$

## Actividades resueltas

- $\sqrt{}$  En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.



Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es  $9 \cdot 10^{18}$ , con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9 223 372 036 854 775 808 que da un poco de mareo.

✚ Escribe en notación científica:  $2^{16}$ ,  $2^{32}$  y  $2^{64}$

$$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4 \quad 2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4.29 \cdot 10^9$$

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$$

## Actividades propuestas

24. Escribe en notación científica:

- a) 400 000 000      b) 45 000 000      c) 34 500 000 000 000      d) 0.0000001      e) 0.00000046



¿Cuántas veces puedes doblar una hoja de papel? Eduardo Sáenz de Cabezón:

[https://www.youtube.com/watch?v=nc5okMs\\_ss0](https://www.youtube.com/watch?v=nc5okMs_ss0)



## Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

*Ejemplo:*

✚ Para calcular  $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$  expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso  $10^5$ :  $4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$ . Sacamos factor común:  $10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

*Ejemplo:*

✚  $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$

✚  $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$

✚ Para hacer el cociente para calcular  $2^{63}$  dividiendo  $2^{64}$  entre 2 en notación científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

## Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir  $9 \cdot 10^{18}$  escriben  $9e+18$ .

25. Utiliza tu calculadora para obtener  $2^{16}$ ,  $2^{32}$  y  $2^{64}$  y observa cómo da el resultado.

26. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

## Actividades propuestas

27. Efectúa las operaciones en notación científica:

a)  $0.000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$       b)  $300\,000\,000 - 5.4 \cdot 10^6 + 7.2 \cdot 10^5$

c)  $(2.9 \cdot 10^5) \cdot (5.7 \cdot 10^{-3})$       d)  $(3.8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3.5 \cdot 10^6) \cdot (8.1 \cdot 10^{-4})$

e)  $(4.8 \cdot 10^{-8}) : (3.2 \cdot 10^{-3})$       f)  $(6.28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2.9 \cdot 10^2) : (3.98 \cdot 10^{-7})$

## 3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES

### 3.1. Representación de números enteros y racionales

*Recuerda que:*

Para representar un número entero en la recta numérica se traza una recta horizontal en la que se marca el cero, que se denomina origen, y se marca el 1. Se divide la recta en segmentos iguales, de longitud 1. Se representan los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.



De esta forma quedan ordenados los números enteros. Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

*Ejemplo 6:*

✚ Representa en una recta numérica y ordena los números enteros siguientes:

-2, 0, 4, -1, 8, -7, -3 y 1



Orden de menor a mayor:  $-7 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 4 < 8$ .

Orden de mayor a menor:  $8 > 4 > 2 > 0 > -1 > -2 > -3 > -7$ .

### Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: -9, 7, 6, -5, 9, -2, -1, 1 y 0.
29. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de mayor a menor: +1, -4, -8, +9, +4, -6, -7
30. *Pitágoras* vivió entre el 569 a. C. y el 475 a. C. y *Gauss* entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de siglos hay entre ambas fechas?
31. Representa gráficamente y ordena en sentido creciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: 10, -4, -7, 5, -8, 7, -6, 0, 8.

*Para representar una fracción en la recta numérica:*

Distinguimos entre fracciones propias e impropias.

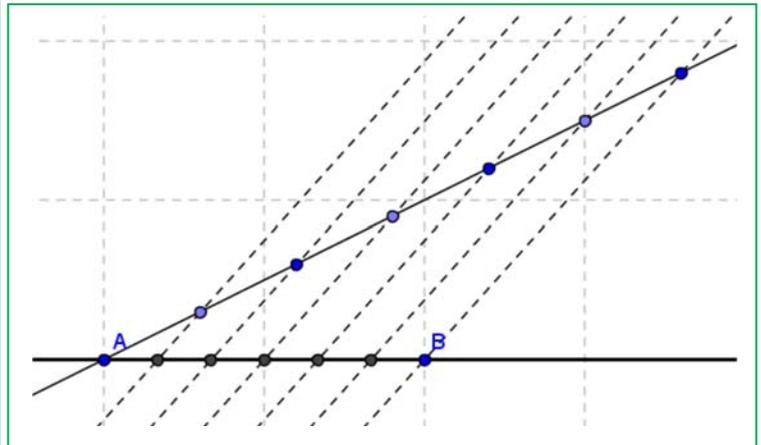
En cualquier caso, debemos recordar cómo se divide un segmento en partes iguales.

### Actividades resueltas

- ✚ Si la fracción es **propia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), por ejemplo  $\frac{5}{6}$  bastará con dividir la primera unidad en 6 partes iguales y tomar 5. En caso de ser negativa contaremos hacia la izquierda. (Ver figura)

## Dividir un segmento en parte iguales

Para dividir el segmento AB en por ejemplo 6 partes iguales, trazamos por A una línea auxiliar oblicua cualquiera, abrimos el compás una abertura cualquiera y marcamos 6 puntos en la recta anterior a distancia igual. Unimos el último punto con B y trazamos paralelas que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua. Por el *Teorema de Tales*, el segmento AB ha quedado dividido en 6 partes iguales. Para representar  $5/6$ , tomamos 5 de esas partes.



Normalmente no te exigirán que lo hagas tan exacto, lo harás de forma aproximada, pero ten cuidado en que las partes parezcan iguales.

- Si la fracción es **impropia** (numerador mayor que denominador y por tanto valor mayor que 1) haremos la división entera (sin decimales) quedándonos con el cociente y el resto. Esto nos permite ponerla en forma mixta (suma de un entero y una fracción propia). Así por ejemplo:  $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$  ya que al dividir 50 entre 11 obtenemos 4 de cociente y 6 de resto. *El cociente es la parte entera y el resto el numerador de la fracción propia.*

$$\begin{array}{r} 50 \quad | \quad 11 \\ \underline{6 \quad 4} \\ 50 \\ \underline{44} \\ 6 \end{array}$$

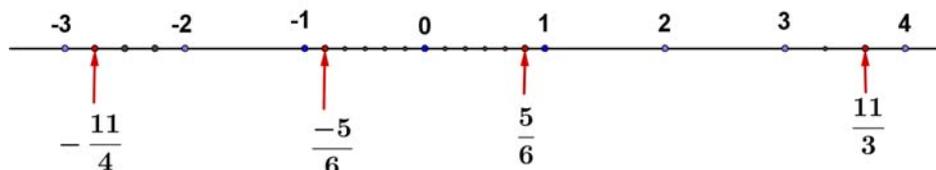
$$\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$$

Para representarla sólo nos tenemos que ir donde dice la parte entera (4) y la unidad siguiente (la que va del 4 al 5) la dividimos en 11 partes iguales y tomamos 6.

- Otro ejemplo:  $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$ , pues la división da 2 de cociente y 3 de resto.

Nos vamos al 2, dividimos la unidad siguiente (del 2 al 3) en 7 partes iguales y tomamos 3.

- En caso de ser negativa:**  $-\frac{11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$ , se hará igual, pero contando hacia la izquierda. Nos vamos al  $-2$ , la unidad que va del  $-2$  al  $-3$  se divide en 4 partes y tomamos 3 (pero contando del  $-2$  al  $-3$  ¡claro!).



## Actividades propuestas

32. Representa en la recta numérica los siguientes números:  $\frac{7}{6}$ ;  $\frac{-17}{4}$ ; 2.375;  $-3.\overset{\circ}{6}$

33. Representa en la recta numérica 6.5; 6.2; 3.76; 8.43; 8.48; 8.51 y 8.38.

34. Ordena los siguientes números de mayor a menor: +1.47; -4.32; -4.8; +1.5; +1.409; 1.4; -4.308.

## 3.2. Representación en la recta real de los números reales:

Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

Esta segunda parte, es la propiedad más importante de los números reales y la que los distingue de los números racionales.

Veamos como representar de forma exacta **algunos** números reales:

### Representación en la recta de las raíces cuadradas:

Para representar raíces cuadradas usamos el *Teorema de Pitágoras*. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa es  $h$  y los catetos son  $a, b$  tenemos que  $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



**Representación raíces. Utilizando el teorema de Pitágoras podemos representar cualquier raíz entera en la recta real José Luis Lorente**

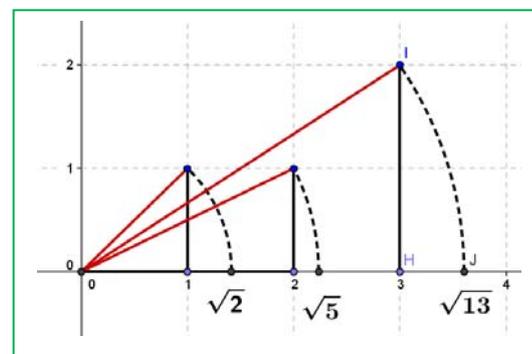
[https://youtu.be/p5BvnOp5D\\_k](https://youtu.be/p5BvnOp5D_k)



## Actividades resueltas

✚ Representa en la recta  $\sqrt{2}$

Si  $a = b = 1$  tenemos que  $h = \sqrt{2}$ . Sólo tenemos que construir un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, su hipotenusa mide  $\sqrt{2}$ , (la diagonal del cuadrado de lado 1 mide  $\sqrt{2}$ ). Ahora utilizando el compás, llevamos esa distancia al eje X (ver figura).



✚ Representa en la recta  $\sqrt{5}$

Como  $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$  sólo hay que construir un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1, y su hipotenusa mide  $\sqrt{5}$ .

¿Has pillado el truco?, el radicando hay que expresarlo como suma de 2 cuadrados. El triángulo rectángulo tendrá como catetos esos dos números.

✚ Así, para representar  $\sqrt{13}$ , expresamos 13 como suma de 2 cuadrados:  
 $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$  luego en un triángulo rectángulo de lados 3 y 2 la hipotenusa será  $\sqrt{13}$ .

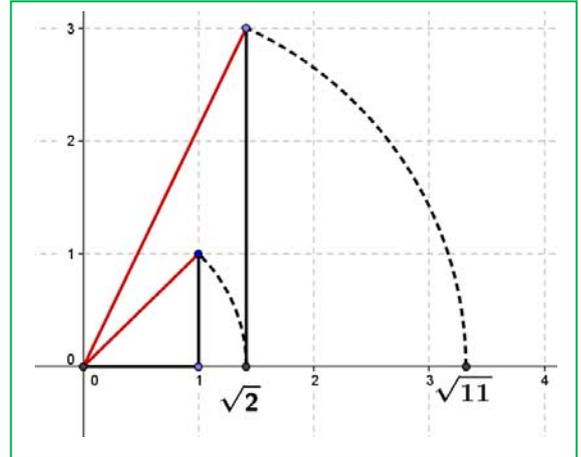
# Números reales. 4ºA de ESO

- ✚ ¿Pero, y si el número no puede ponerse como suma de 2 cuadrados?, por ejemplo el 11 (¡siempre complicando las cosas! ☹).

Habrás que hacerlo en 2 pasos.  $11 = 2 + 9$ , ¿hay algún número cuyo cuadrado sea 2?, por supuesto que sí,  $\sqrt{2}$ .

Por tanto  $\sqrt{11} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2}$ , tenemos que hacer un triángulo rectángulo de catetos  $\sqrt{2}$  y 3. Para ello primero se construye  $\sqrt{2}$  como antes y se traza una perpendicular de longitud 3 (ver figura).

¿Pueden dibujarse ya así todas las raíces?, no. Hay algunas para las que hay que hacer más pasos ( $\sqrt{7}$  por ejemplo requiere 3), pero mejor lo dejamos aquí, ¿no?



## Actividades resueltas

- ✚ Representa en la recta numérica de forma exacta el número de oro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

¿Has oído hablar del número de oro?

El Número de Oro (o Razón Áurea o Proporción Armónica o Divina Proporción) es igual a  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- ✚ ¿Cómo lo representamos en la recta?

Sólo hay que construir  $\sqrt{5}$  como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidad con el compás) y dividir entre 2 hallando el punto medio (con la mediatriz), hecho.

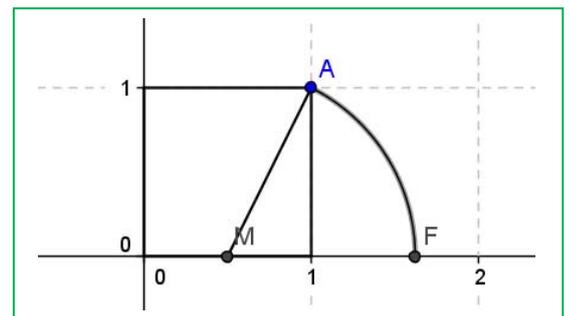
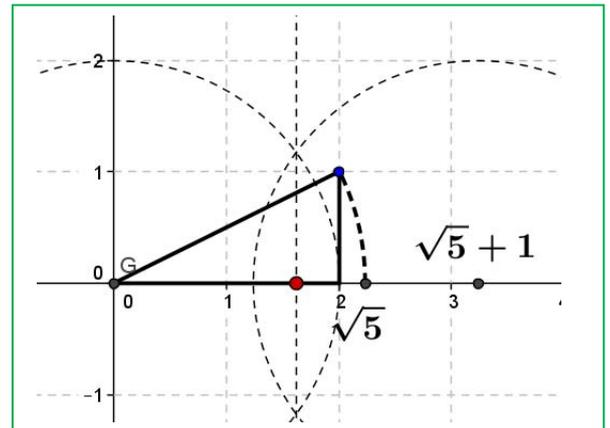
- ✚ Otra forma distinta:

Construimos un cuadrado de lado 1 (¿un qué?, ¡un lo que quieras!). Hallamos el punto medio del lado inferior (M) y llevamos la distancia MA con el compás al eje horizontal, OF es el número de oro.

Veamos:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



## Actividades propuestas

35. Busca *rectángulo áureo* y *espiral áurea* en Internet.
36. Ya de paso busca la relación entre el *Número de Oro* y la *Sucesión de Fibonacci*.
37. Busca en youtube “algo pasa con phi” y me cuentas.
38. Representa en la recta numérica de forma exacta:

$$\sqrt{20}; -\sqrt{8}; \sqrt{14}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



## Densidad de los números reales

Los números reales son **densos**: entre cada dos números reales hay infinitos números reales en medio.

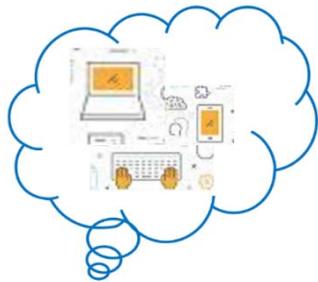
Eso es fácil de deducir, si  $a, b$  son dos números con  $a < b$  sabemos que  $a < \frac{a+b}{2} < b$ , es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos en los números reales, así como los irracionales.

## Actividades propuestas

39. Calcula 3 números reales que estén entre  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y 1.
40. Halla 5 números racionales que estén entre  $\sqrt{2}$  y 1,5
41. Halla 5 números irracionales que estén entre 3.14 y  $\pi$

### 3.3. Herramienta informática para estudiar la proporción áurea



En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la proporción áurea.

Un segmento está dividido en dos partes que están en proporción áurea si la razón entre la longitud del segmento y la longitud de la parte mayor coincide con la razón entre la longitud de la parte mayor y la de la parte menor.



video

La sucesión de Fibonacci y la razón áurea. ¿Tiene alguna relación la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea? ¿Sabes qué le ha hecho más famosa? .Eduardo Sáenz de Cabezón



<https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxl>

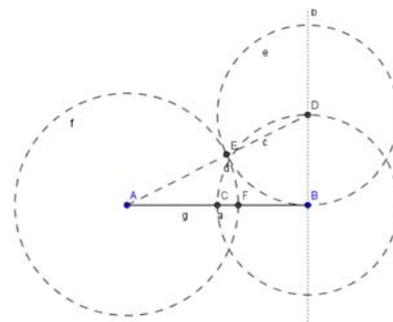
## Actividades resueltas

- ✚ Utiliza *Geogebra* para dividir un segmento en dos partes que estén en proporción áurea.

Abre una nueva ventana de *Geogebra*, en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula**

- Determina con **Nuevo punto** los puntos  $A$  y  $B$  y dibuja el segmento,  $a$ , que los une.

- Traza un segmento  $BD$  perpendicular al segmento  $AB$  en el punto  $B$ , cuya longitud sea la mitad de  $AB$ , puedes seguir las siguientes instrucciones:
  - Calcula el **Punto medio o centro** del segmento  $AB$  y llámalo  $C$ .
  - Dibuja con **Circunferencia con centro y punto que cruza** la que tiene centro en  $B$  y pasa por  $C$ .
  - Traza la **Recta Perpendicular** al segmento  $AB$  que pase por  $B$ .
  - Define  $D$  como el **Punto de Intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja el segmento  $AD$  y una circunferencia con centro  $D$  que pase por  $B$ . Sea  $E$  el **Punto de Intersección** de esta circunferencia con el segmento  $AD$ .
- Con centro en  $A$  traza la circunferencia que pasa por  $E$  y determina el **punto de Intersección**,  $F$ , de esta circunferencia con el segmento  $AB$ .
- Traza el segmento,  $g$ , que une los puntos  $A$  y  $F$ .
- Comprueba que el punto  $F$  divide al segmento  $AB$  en dos partes que están en proporción áurea:
  - Elige en el menú **Opciones**, **5 Posiciones decimales**.
  - Calcula en la línea de **Entrada** los cocientes  $a/g$  y  $g/(a-g)$ .



Observa en la **Ventana algebraica** que estos valores coinciden, has calculado un valor aproximado del número de oro,  $\Phi$ .

- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales  $A$  o  $B$  y comprueba que el cociente entre las longitudes de los segmentos  $AF$  y  $FB$  permanece constante.
- Para visualizar mejor la construcción puedes dibujar los elementos auxiliares con trazo discontinuo, eligiendo en el menú contextual, **Propiedades y Estilo de trazo**.

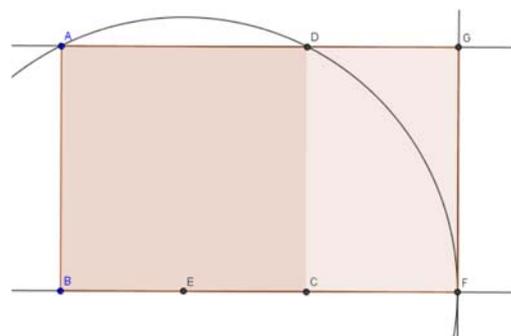
Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea.

Si a un rectángulo áureo le quitamos (o le añadimos) un cuadrado obtenemos un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

✚ Utiliza Geogebra para dibujar un rectángulo áureo.

Abre una nueva ventana de *Geogebra*, en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes y Cuadrícula**

- Define dos puntos  $A$  y  $B$  que van a ser los extremos del lado menor del rectángulo y con la herramienta **polígono regular** dibuja, a partir de los puntos  $A$  y  $B$ , el cuadrado  $ABCD$  y oculta los nombres de los lados con la herramienta **Expone/Oculta rótulo**.
- Calcula el **Punto medio**,  $E$ , del lado  $BC$ . Con centro en  $E$  dibuja la **Circunferencia** con centro en  $E$  que pasa por  $A$ .
- Traza la recta,  $a$ , que pasa por  $BC$  y define como  $F$  el **Punto de intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja la **Recta perpendicular** a la recta  $a$  que pasa por  $F$ , y la **recta** que pasa por los puntos  $A$  y  $D$ , llama  $G$  al **Punto de intersección** de estas rectas y define con **Polígono** el rectángulo  $ABFG$ .



# Números reales. 4ºA de ESO

- En la ventana algebraica aparecen las longitudes de los lados del rectángulo como  $f$  y  $g$ , introduce en la línea de **Entrada**  $g/f$  y observa en esta ventana que aparece el valor  $e$  que es una aproximación al número áureo. Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**.
- Dibuja el **segmento**  $CF$ , en la ventana algebraica aparece su longitud,  $h$ , introduce en la línea de **Entrada**  $f/h$ , observa que este cociente coincide con  $g/f$  y es una aproximación del número áureo.
- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales  $A$  o  $B$  y observa que el cociente entre las longitudes de los lados de los rectángulos es constante.

El rectángulo  $ABFG$  es áureo ya que el cociente entre la longitud de su lado mayor y la del menor es el número de oro, además el rectángulo  $DCFG$ , que se obtiene al quitar un cuadrado de lado el menor del rectángulo, es también áureo y por lo tanto semejante al primero.

✚ Crea tus propias herramientas con Geogebra. Crea una que dibuje rectángulos áureos.

Se va a crear una herramienta que a partir de dos puntos  $A$  y  $B$  dibuje el rectángulo áureo en el que el segmento  $AB$  es el lado menor.

- En la figura anterior oculta el nombre de los puntos  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $G$  con la herramienta **Expone/Ocultar rótulo** haciendo clic con el ratón sobre ellos, en el área de trabajo o en la ventana algebraica.
- Activa en el menú **Herramientas**, la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

**Objetos de salida:** el polígono cuadrado, el polígono rectángulo y los puntos  $C$ ,  $D$ ,  $F$ , y  $G$ .

**Objetos de entrada:** los dos puntos iniciales  $A$  y  $B$ .

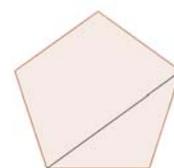
Y elige como **nombre de la herramienta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece en la barra de herramientas.

En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *rectanguloaureo*, que se guarda como *rectanguloaureo.ggt*

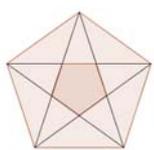
Utiliza la herramienta **Desplazamiento de la zona gráfica** para ir a una parte vacía de la pantalla y comprobar que la herramienta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

## Actividades propuestas

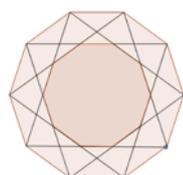
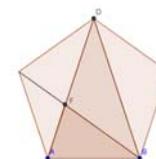
42. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.



43. Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.



44. Comprueba que los triángulos  $ABD$  y  $ABF$  de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con *Geogebra* su razón de semejanza.



45. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos.

## 4. APROXIMACIONES Y ERRORES

En la vida cotidiana y también en las Ciencias Aplicadas es necesario trabajar con números aproximados.

**Unos ejemplos:**

- Queremos comprar un tercio de metro de tela, tenemos que decirle al dependiente cuanto queremos y no vamos a ser tan idiotas como para decirle que nos dé 0.333... metros o 33.333... cm que es lo exacto. Lo normal es pedir 33 cm o 333 mm si somos muy finos.
- Medimos un folio A4 con la regla y nos da 29.7 cm, la regla llega a los mm. Queremos dividirlo en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte?, si hacemos  $29.7 : 8$  nos da 3.7125 cm, pero la regla no llega a tanto, será mejor aproximar a 3.7 cm.
- Hacemos un examen con 9 preguntas que valen todas igual. Tenemos 5 bien y las demás en blanco. ¿Qué nota tenemos?,  $10 \cdot 5/9 = 5.55555556$  según la calculadora, ¿las ponemos todas?, si lo hacemos estamos suponiendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10000 millones de partes iguales del examen. Lo razonable es 5.6 o 5.56 si somos muy pero que muy precisos.
- Resulta curioso y debería ser delito que en las gasolineras se anuncie: Precio del gasoil 1.399 €/litro. Si alguien va y pide un litro exacto, o 2 o 15 no se lo pueden cobrar exactamente puesto que ¡no existen las milésimas de €!, deberían escribir 1.40 €/litro. Es cierto que de esa manera te ahorras 5 céntimos si echas 50 litros, pero a ellos les compensa el tema psicológico, la gente poco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.
- Exactamente lo mismo pasa en los supermercados: merluza 5.99 €/Kg. Son trucos baratos que una mente entrenada sabe detectar y actuar en consecuencia. La diferencia entre 6 €/Kg y 5.99 €/Kg es que te ahorras ¡1 céntimo! si compras 1 Kg, si compras medio, ¿cuánto te ahorras?, ¡nada!,  $5.99 : 2 = 2.995$  que redondeado es 3, que es lo que cobran. Aunque bien mirada la oferta no está tan mal, sin compras 5 Kg. de merluza ahorras para comprarte un caramelo, eso sí, tienes que comprar más de medio Kg por vez.

Utilizar demasiadas cifras decimales sin estar seguro de ellas no es sinónimo de precisión sino de torpeza.

### 4.1. Redondeo

Te recordamos como se redondean correctamente los números.

- Redondear  $\pi$  a las diezmilésimas:  $\pi = 3.1415926535\dots$ , la cifra de las diezmilésimas es 5, como la cifra siguiente es 9 que es  $\geq 5$ , le sumamos 1 al 5 y pondremos  $\pi \approx 3.1416$ .

Fíjate que  $\pi$  está más cerca de 3.1416 que de 3.1415

- Redondear  $\sqrt{2}$  a las centésimas:  $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ , ahora la cifra siguiente es  $4 < 5$  luego la dejamos tal cual,  $\sqrt{2} \approx 1.41$

La regla es: Localizamos la cifra de redondeo, miramos la siguiente cifra (sólo la siguiente), si ésta es menor que 5 dejamos la cifra de redondeo igual, si la cifra siguiente es 5 o mayor que 5 incrementamos en 1 la cifra de redondeo.

## Más ejemplos:

### Redondea

- 1.995 a las centésimas → 2.00 y los ceros hay que escribirlos para indicar dónde hemos redondeado.
- 1 555 555 en los miles → 1 556 000 donde hay que completar con ceros después de los miles.
- 6.94999 en las décimas → 6.9 sólo hay que mirar el 4

Nota importante: Si el resultado de un problema son **€ se redondeará siempre en los céntimos.**

**Otra nota importante:** Si queremos dar un resultado con 2 decimales en los pasos intermedios trabajaremos con más decimales, al menos 3 o 4, de lo contrario el resultado no tendrá la precisión que pretendemos, un ejemplo:

- $A = 9.65$ ;  $B = 6.98$  y  $C = 4.99$ . Queremos hacer  $(A \cdot B) \cdot C^2$ , si hacemos  $A \cdot B$  y redondeamos en las centésimas nos queda 67.36 y si ahora multiplicamos por  $4.99^2 = 24.90$  nos sale 1 677.26.

El resultado correcto es 1 677.20 donde sólo hemos redondeado al final.

## 4.2. Cifras significativas.

Es el número de cifras “*con valor*” que se utilizan para expresar un número aproximado.

Unos cuantos *ejemplos* y lo entiendes:

- 2.25 tiene 3 cifras significativas;                      28.049 tiene 5 cifras significativas.
- 5.00 tiene 3;    4 000.01 tiene 6;
- 10 000 no sabemos las cifras significativas que tiene, puede ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, nos tienen que decir en qué cifra se ha aproximado. Para este último caso puede recurrirse a la notación científica para decir con precisión el número de cifras significativas, así:

$1 \cdot 10^4$  tiene una cifra significativa,  $1.0 \cdot 10^4$  tiene 2 y así hasta  $1.0000 \cdot 10^4$  que tiene 5.

### Consideraciones:

- Las cifras **distintas** de 0 siempre son significativas.
- Los ceros a la izquierda nunca son cifras significativas: 0.0002 tiene una cifra significativa.
- Los ceros en medio de otras cifras distintas de 0 siempre son significativos 2004 tiene 4 cifras significativas.

**Más que el número de decimales la precisión de una aproximación se mide por el número de cifras significativas.**

**No deben utilizarse más cifras de las que requiera la situación.**

## Actividades propuestas

1. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

Número	Cifras significativas			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95 549	100 000			
30 000	$3 \cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

### 4.3. Error absoluto y error relativo

#### I.- Error absoluto

Se define el **error absoluto** (EA) como  $EA = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$ .

Las barras verticales se leen “valor absoluto” y significan que el resultado se dará siempre positivo.

**Ejemplo:**

- Aproximamos  $1/3$  de litro por 0.33 litros.

$$EA = \left| \frac{1}{3} - 0.33 \right| = 0.00333... \approx 0.0033 \text{ litros}$$

**Otro ejemplo:**

- Aproximamos 16/6 Kg. con 2 cifras significativas (2.7 Kg.)

$$EA = \left| \frac{16}{6} - 2.7 \right| = |-0.0333...| \approx 0.033 \text{ Kg.}$$

- **No deben ponerse demasiadas cifras significativas en el error absoluto, 2 o 3 es suficiente.**
- **El error absoluto tiene las mismas unidades que la magnitud que se aproxima.**

¿Estos errores son grandes o pequeños?, la respuesta es, ¿comparados con qué?

Para ello se define el error relativo que sí nos da una medida de lo grande o pequeño que es el error absoluto.

#### II.- Error relativo

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el **Error Relativo (ER)** como:

$$ER = \frac{EA}{|\text{Valor real}|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.

Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

Calculamos el error relativo para los ejemplos de arriba:

$$1^{\text{a}}) ER = \frac{0.0033}{1/3} = 0.0099 \Rightarrow 0.99 \% \text{ de ER} \qquad 2^{\text{a}}) ER = \frac{0.033}{8/3} \approx 0.0124 \Rightarrow 1.2 \% \text{ de ER}$$

Ahora sí podemos decir que la 1ª aproximación tiene menos error que la 2ª, puesto que el error relativo es menor.

**El error relativo (ER) no tiene unidades** y por ello se pueden comparar errores de distintas magnitudes o con distintas unidades.

¿Qué hacer si no se conoce el valor exacto?

En este caso no se puede calcular el error absoluto, sin embargo todos los aparatos de medida tienen un error absoluto máximo.

- Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g su error absoluto máximo es de 50 g.
- Cronómetros que miden centésimas de segundo, su error absoluto máximo será de 0.005 s, media centésima.
- Reglas normales que miden mm, su error absoluto máximo será de 0.5 mm = 0.05 cm = 0.0005 m

A esto se le denomina **cota de error absoluto**.

## Actividades resueltas

- Te pesas en una báscula de baño y te marca 65.3 Kg, el error absoluto máximo es de 0.05 Kg (50 g)  
Ahora pesamos un coche en una báscula especial y pesa 1 250 Kg con error absoluto máximo de 10 Kg. ¿Qué medida es más precisa?

$$\text{Tú} \rightarrow ER \leq \frac{0,05}{65,3} = 0.00077 \Rightarrow ER \leq 0.077 \%$$

$$\text{Coche} \rightarrow ER \leq \frac{10}{1250} = 0.008 \Rightarrow ER \leq 0.8 \%$$

Es mucho más precisa la báscula de baño en este caso. Sin embargo, si en la misma báscula pesamos a un bebé y marca 3.1Kg, el error relativo sale menor o igual que 1.6 % (pruébalo) y ahora la medida de la báscula de baño es mucho menos precisa.

*Así que el error depende de la precisión de la máquina y de la medida que hagamos con ella.*

## Actividades propuestas

- Prueba que 123.45 con EA = 0.005 y 0.12345 con EA = 0.000005 tienen el mismo ER.
- Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:
  - Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.
  - No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes.
  - Poner precios como 1.99 €/Kg es un intento de engaño.
  - Comprar a 1.99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro.
  - Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático.
  - La precisión se mide por el número de cifras decimales.

## 5. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

Como ya sabemos entre dos números reales hay infinitos números. Hay una notación especial para referirse a esos infinitos números que deberás dominar para éste y futuros cursos.

### 5.1. Intervalos. Tipos y significado

(Del lat. *intervallum*): **2. m.** Conjunto de los valores que toma una magnitud entre dos límites dados. RAE.

#### Definición:

Un subconjunto de  $\mathfrak{R}$  es un intervalo si para cualquier par de elementos,  $a$  y  $b$ , de ese subconjunto se verifica que si  $a < x < b$  entonces  $x$  debe pertenecer a dicho subconjunto.

Vamos a estudiar en este apartado intervalos acotados de distintos tipos: los intervalos abiertos, los intervalos cerrados y los intervalos semiabiertos (o semicerrados)

#### Intervalos abiertos

Si nos queremos referir al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**

#### Ejemplo:

- Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por  $(2, 7)$  y se lee “*intervalo abierto de extremos 2 y 7*”. A él pertenecen infinitos números como 2.001; 3.5; 5; 6.999; ... pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos.

#### Ejemplo:

- Los números positivos menores que 10, se representan por  $(0, 10)$ , el intervalo abierto de extremos 0 y 10. Fíjate que 0 no es positivo, por lo que no entra y el 10 no es menor que 10, por lo que tampoco entra.

**Nota:** No se admite poner  $(7, 2)$ , ¡el menor siempre a la izquierda!

También hay que dominar la expresión de estos conjuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}.$$

**Traducimos:** Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la  $x$  para denotar a un número real, la  $/$  significa “tal que” (en ocasiones se utiliza un punto y coma “;” o una raya vertical “|”) y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que no te asustes, lo de arriba se lee: *los números reales tal que son mayores que 2 y menores que 7*.

Usaremos indistintamente varias de estas nomenclaturas para que todas te resulten familiares.

Es necesario dominar este lenguaje matemático puesto que la frase en castellano puede no entenderse en otros países pero te aseguramos que eso de las llaves y la  $|$  lo entienden todos los estudiantes de matemáticas del mundo (bueno, casi todos).

El otro ejemplo:  $(0, 10) = \{x \in \mathfrak{R} / 0 < x < 10\}$ .

Por último la **representación gráfica**:

Se ponen **puntos sin rellenar** en los extremos y se resalta la zona intermedia.



En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: “( )”, o corchetes al revés: “[ ]”.

**Pregunta:** ¿Cuál es número que está más cerca de 7, sin ser 7?

Piensa que  $6.999... = 7$  y que entre 6.999 y 7 hay “muchos, muchísimos ...” números.

**Nota:**

En algunos textos los intervalos abiertos se representan así:  $]2, 7[$  lo cual tiene algunas ventajas como que los estudiantes no confundan el intervalo  $(3, 4)$  con el punto del plano  $(3, 4)$ , que aseguramos que ha ocurrido (pero tú no serás uno de ellos ¿no?), o la fastidiosa necesidad de poner  $(2,3 ; 3,4)$  porque  $(2,3, 3,4)$  no lo entendería ni Gauss.

## Intervalos cerrados

Igual que los abiertos pero ahora **sí** pertenecen los extremos.

**Ejemplo:**

- El intervalo de los números mayores o iguales que  $-2$  pero menores o iguales que 5. Ahora el  $-2$  y el 5 sí entran. Se hace igual pero poniendo corchetes:  $[-2, 5]$ .

En forma de conjunto se escribe:

$$[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 5\}.$$

Fíjate que ahora ponemos  $\leq$  que significa “menor o igual”.

**Ejemplo:**

- El intervalo de los números cuyo cuadrado no es superior a 4. Si lo piensas un poco verás que son los números entre el  $-2$  y el 2, ambos incluidos (no superior  $\Leftrightarrow$  menor o igual). Por tanto:

$$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \leq x \leq 2\}.$$

La representación gráfica es igual pero poniendo **puntos rellenos**. En ocasiones también se puede representar gráficamente con corchetes: “[ ]”.



## Intervalos semiabiertos (o semicerrados, a elegir)

Por supuesto que un intervalo puede tener un extremo abierto y otro cerrado. La notación será la misma.



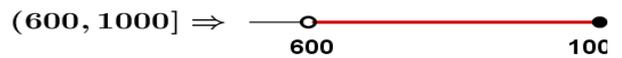
**Ejemplo:**

- Temperatura negativa pero no por debajo de  $-8$  °C:

$$[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R}; -8 \leq x < 0\}.$$

Es el intervalo cerrado a la izquierda de extremos  $-8$  y 0.

- Números superiores a 600 pero que no excedan de 1000.  
 $(600, 1000] = \{x \in \mathfrak{R}; 600 < x \leq 1000\}$ .



Es el intervalo cerrado a la derecha de extremos 600 y 1000.

## 5.2. Semirrectas

Muchas veces el conjunto de interés no está limitado por uno de sus extremos.

### Ejemplo:

- Los números reales positivos: No hay ningún número positivo que sea el mayor. Se recurre entonces al símbolo  $\infty$  y se escribe:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 0\}.$$

Nótese que es equivalente poner  $x > 0$  que poner  $0 < x$ , se puede poner de ambas formas.

### Ejemplo:

- Números no mayores que 5:  $(-\infty, 5] = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \leq 5\}$ .

Aquí el 5 sí entra y por eso lo ponemos cerrado (“no mayor” equivale a “menor o igual”)

### Ejemplo:

- Solución de  $x > 7$ :  $(7, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 7\}$ .

**Nota:** El extremo no acotado siempre se pone abierto. No queremos ver esto:  $(7, +\infty]$



Las semirrectas también son intervalos. Son intervalos no acotados.

Incluso la recta real es un intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathfrak{R}.$$

Es el único intervalo no acotado ni superiormente ni inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos diciendo que  $-\infty$  y que  $+\infty$  no son números reales.

## 5.3. Entornos

Es una forma especial de representar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro  $a$  y radio  $r$  y se denota  $E(a, r)$  (otra forma usual es  $E_r(a)$ ) como el conjunto de números que están a una **distancia de  $a$  menor que  $r$** .

$$E(a, r) = (a - r, a + r)$$

Observa que un entorno es siempre un intervalo abierto y acotado.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

### Ejemplo:

- ✚ El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 a una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre  $5 - 2$  y  $5 + 2$ , es decir, el intervalo  $(3, 7)$ . Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

### Ejemplo:

✚  $E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

### Ejemplo:

- ✚ Si tengo el intervalo abierto  $(3, 10)$ , ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio  $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$  que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

$(10 - 3) : 2 = 3.5$  es el radio (la mitad del ancho).

Por tanto  $(3, 10) = E(6.5 ; 3.5)$

En general:

$$\text{El intervalo } (b, c) \text{ es el entorno } E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right).$$

### Ejemplo:

✚ El intervalo  $(-8, 1) = E\left(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3.5; 4.5)$ .

## Actividades propuestas

46. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

- a) Porcentaje superior al 15 %.                      b) Edad inferior o igual a 21 años.  
 c) Números cuyo cubo sea superior a 27.      d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.  
 e) Temperatura inferior a 24 °C.                      f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.  
 g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

47. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

- a)  $E(2, 7)$                       b)  $E(-3, \frac{8}{3})$                       c)  $E(-1; 0.001)$

48. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

- a)  $(1, 7)$                       b)  $(-5, -1)$                       c)  $(-4, 2)$

49. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?                      \*Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

## 6. LOGARITMOS

### 6.1. Definición

La palabra **logaritmo** viene del griego, une los sustantivos logos (relación) y aritmos (número), refiriendo la relación entre dos números que se comparan. Uno de ellos hace de base o referencia, y el otro es el número que se somete a comparación.

¿Cuántas veces es más grande un elefante que una pulga?

Si fuéramos pulgas y avistáramos un elefante, ¿cuántas veces mayor que nosotros pensaríamos que es? ¿De qué magnitud es su masa respecto de una base numérica fijada? ¿Es del orden del picogramo (un picógramo es  $10^{-12}$  gramos), del orden del nanogramo (son  $10^{-9}$  gramos), del orden del kilogramo, del orden del miriagramo?



Puedes entrar en la página [The Scale of the Universe 2 \(htwins.net\)](http://htwins.net) y analizar diferentes órdenes de magnitud. ¿Cuánto mide una molécula de agua? ( $2.8 \times 10^{-10}$  m) ¿Cuánto mide el diámetro de la Luna? ( $3.5 \times 10^6$  m) ¿Y un cromosoma? ( $4 \times 10^{-6}$  m)

El **logaritmo** de un número  $m$ , positivo, en **base**  $a$ , positiva y distinta de uno, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\text{Si } a > 0, \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

#### Ejemplo:

Así, teniendo en cuenta que nosotros pensamos en base 10 y que el peso de una elefanta asiática hembra adulta es de 2 700 kilogramos, podríamos afirmar que el orden de su peso es aproximadamente 3.43, es decir que,  $\log_{10} 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700$ . Como quiera que, normalmente, trabajamos en base 10, por comodidad, nos permitimos el lujo de omitir este dato y escribimos:

$$\log 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700.$$

#### Ejemplo:

Mientras que si trabajamos en cualquier otra base numérica lo especificamos. Siguiendo con el mismo ejemplo, ahora en base 2, el orden de la misma elefanta es

$$\log_2 2\,700 = 11.3 \Leftrightarrow 2^{11.3} = 2\,700.$$

Si estamos preparando una base de datos para grabar las masas de una manada de elefantes en estudio, en el lugar del peso, habremos de guardar 11.3 dígitos, redondeando al alza para no perder información, habremos de reservar 12 posiciones de memoria.

Los logaritmos más utilizados son los **logaritmos decimales** o logaritmos de base 10 y los **logaritmos neperianos** (llamados así en honor a **Neper**) o logaritmos en base  $e$  ( $e$  es un número irracional cuyas primeras cifras son:  $e = 2.71828182\dots$ ).

Ambos tienen una notación especial:

$$\log_{10} m = \log m$$

$$\log_e m = \ln m$$

Pasemos a calcular algunos logaritmos:

### Ejemplos:

- Si queremos conocer el logaritmo en base dos de dieciséis,  $\log_2 16$ , tendremos que pensar en qué exponente convierte un dos en dieciséis. Dado que  $2^4 = 16$ , tenemos que  $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ . Formulado de otra forma, pensaremos en a qué número tengo que elevar la base, 2 en este caso, para obtener el valor en estudio, 16.
- ¿A qué número tengo que elevar tres, para obtener veintisiete?

$$\log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27.$$

### Actividades resueltas:

- ✚  $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- ✚  $\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow 32 = 2^5$
- ✚  $\log_{1000} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- ✚  $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** de la definición se deduce que:

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

### Demostración:

Como  $a^0 = 1$ , por definición de logaritmo, tenemos que  $\log_a 1 = 0$

### Ejemplos:

- ✚  $\log_a 1 = 0$
- ✚  $\log_2 1 = 0$
- ✚  $\log_3 1 = 0$

- ✓ El logaritmo de la base es 1.

### Demostración:

Como  $a^1 = a$ , por definición de logaritmo, tenemos que  $\log_a a = 1$

### Ejemplos:

- ✚  $\log_a a = 1$
- ✚  $\log_3 3 = 1$
- ✚  $\log_5 5 = 1$
- ✚  $\log_3 3^5 = 5$

- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un número irracional

Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un número negativo ni cero.

- ✚  $\log_2 (-4)$  No existe

- ✚  $\log_2 0$  No existe.
- ✚  $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$ .
- ✚  $\log 0.1 = -1 \Leftrightarrow 0.1 = 10^{-1}$ .
- ✚  $\log \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$ .
- ✚  $\log 2 = 0.301030\dots$

## Actividades resueltas

- ✚  $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- ✚  $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- ✚  $\log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

## Actividades propuestas

50. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

51. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

- a)  $\log_2 2^5$       b)  $\log_5 25$       c)  $\log_2 2^{41}$       d)  $\log_5 5^{30}$

52. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

- a)  $\log_3 27$       b)  $\log_{10} 100$       c)  $\log_{1/2}(1/4)$       d)  $\log_{10} 0.0001$

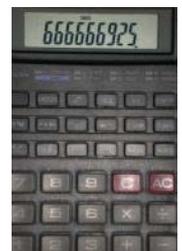
53. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

- a)  $\log_2 64 = x$       b)  $\log_{1/2} x = 4$       c)  $\log_x 25 = 2$

54. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

- a)  $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$   
 b)  $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

55. Utiliza la calculadora para obtener a)  $\log 0.000142$ ; b)  $\log 142$ ; c)  $\log 9 + \log 64$ .



## 6.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos se heredan de las propiedades de las potencias. Ya hemos visto que:

- Si cualquier número elevado a cero es uno, entonces el logaritmo en cualquier base de uno es cero.  $\log_3 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$ .
- Si cualquier número elevado a uno es él mismo, entonces el logaritmo de cualquier número, tomado él mismo como base es uno.  $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$ .

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
- ✓ El logaritmo de la base es 1.
- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos.

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Si cuando multiplicamos números con una misma base elevada a distintos exponentes los sumamos, entonces la suma de logaritmos de dos factores será el logaritmo del producto. Si  $\log_a b = x$ ,  $\log_a c = y$ . Entonces  $\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c \Leftrightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ . El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

### Demostración:

Llamamos  $A = \log_a x$  y  $B = \log_a y$ . Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos:

$$x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x \cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y.$$

### Ejemplo:

$$\log_a(2 \cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Si cuando Dividimos números con una misma base elevada a distintos exponentes los restamos, entonces la resta de logaritmos de dos factores será el logaritmo del cociente. Si  $\log_a b = x$ ,  $\log_a c = y$ . Entonces  $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ . El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos.

### Demostración:

Llamamos  $A = \log_a x$  y  $B = \log_a y$ . Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos:

$$x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y.$$

Ejemplo:

$$\color{red}{+} \log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

Si cuando elevamos una potencia a un exponente, multiplicamos los exponentes, entonces, el logaritmo de una potencia, será el producto del exponente por el logaritmo del número.

**Demostración:**

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$$

Ejemplo:

$$\color{red}{+} \log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Si cuando hacemos la raíz de orden  $n$  de un número lo podemos expresar como el número elevado a uno partido del orden de la raíz, entonces el logaritmo de la raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el orden.

**Demostración:**

Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.

Ejemplo:

$$\color{red}{+} \log_a \sqrt[3]{27} = \left( \frac{\log_a 27}{3} \right)$$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base  $a$  de un número  $x$  es igual al cociente de dividir el logaritmo en base  $b$  de  $x$  por el logaritmo en base  $b$  de  $a$ :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **“fórmula del cambio de base”**. Antaño, cuando no existían las calculadoras, se calculaban los logaritmos utilizando los valores recogidos en las tablas logarítmicas. Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

**Ejemplo:**

$$\star \log_2 11 = \frac{\log 11}{\log 2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162$$

## Actividades resueltas

- Desarrollar las expresiones que se indican:

$$\log_5 \left[ \frac{a^3 \cdot b^2}{c^4} \right] = \log_5 [a^3 \cdot b^2] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3 \log_5 a + 2 \log_5 b - 4 \log_5 c$$

$$\log \left( \frac{x^2}{y^5 \cdot z} \right)^3 = 3 \log \left( \frac{x^2}{y^5 \cdot z} \right) = 3 [\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)] = 3 [2 \log x - 5 \log y - \log z] = 6 \log x - 15 \log y - 3 \log z$$

- Escribe con un único logaritmo:

$$3 \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{2}{3} \log_2 b + 2 \log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2 (a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2 (\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4) = \log_2 \left( \frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4} \right)$$

- Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de  $\log 2 = 0.301030$ :

a)  $4 \Rightarrow \log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 0.301030 = 0.602060$

b)  $1024 \Rightarrow \log 1024 = \log 2^{10} = 10 \cdot \log 2 = 10 \cdot 0.301030 = 3.01030$

## Actividades propuestas

56. Desarrolla las expresiones que se indican:

a)  $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$

b)  $\log \left( \frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$

57. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de  $\log 3 = 0.4771212$

a) 81

b) 27

c) 59 049

58. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$$

**Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular  $26^{378}$ .**

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378 \cdot \log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$\log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

**Solución:**

$$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.$$

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora es capaz de calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con  $50^{200}$  y comprueba que te sale

$$6.3 \cdot 10^{339}.$$



## CURIOSIDADES. REVISTA

### Folios y $\sqrt{2}$

Ya sabemos que un cuadrado de lado  $L$  tiene una diagonal que vale  $\sqrt{2}L$ , veamos algo más:

La imagen representa un folio con la norma DIN 476 que es la más utilizada a nivel mundial.

Esta norma especifica que un folio DIN A0 tiene una superficie de  $1 \text{ m}^2$  y que al partirlo por la mitad obtendremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semejante al anterior. Partiendo el A1 en 2 iguales obtenemos el DIN A2, después el DIN A3 y el DIN A4 que es el más usado. Todos son semejantes a los anteriores.

¿Qué significa ser semejante?

Pues que  $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$ , pero  $AM = AD/2$  luego

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Por lo tanto, en los folios DIN 476:

la razón entre el largo y ancho es  $\sqrt{2}$ .

No queda aquí la cosa, fíjate que al partir el folio en 2 partes iguales el nuevo folio tiene el lado mayor que coincide con el lado menor del original:  $AB$  es ahora el lado mayor y antes era el menor, como  $AB = AD/\sqrt{2}$  resulta que la razón de semejanza es  $\sqrt{2}$ . Es decir, para pasar de un folio A0 a otro A1 dividimos sus lados entre  $\sqrt{2}$ . Lo mismo para los siguientes.

Calculemos las dimensiones:

Para el A0 tenemos que el área es  $AD \cdot AB = 1 \text{ m}^2$

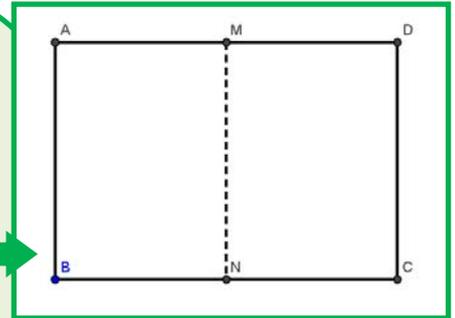
$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m};$$

$$AB = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx 0.841 \text{ m. Para obtener las medidas del A4}$$

dividimos 4 veces entre  $\sqrt{2}$ :

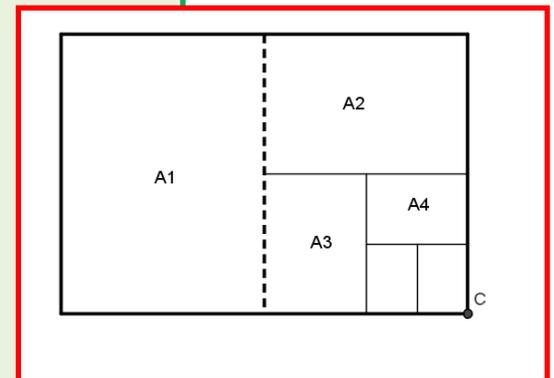
$$\text{Largo} = \frac{\sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2})^4} \approx 0.297 \text{ m} = 29.7 \text{ cm}$$

$$\text{Ancho} = \text{Largo} / \sqrt{2} \approx 0.210 \text{ m} = 21.0 \text{ cm}$$



### Una tabla

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )
A0	118.92	84.09	10000
A1	84.09	59.46	5000
A2	59.46	44.04	2500
A3	42.04	29.83	1250
A4	29.73	21.02	625
A5	21.02	14.87	415.2



### Cuestiones:

- 1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos tres valores equivocados 😊)
- 2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
- 3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

# Números reales. 4ºA de ESO

$\pi$

Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Ya sabes que vale **3,141592...** con infinitas cifras decimales no periódicas

En la Biblia se le daba el valor de 3.

En el antiguo Egipto,  $256/81 = 3,16049$

En Babilonia,  $3 + 1/8 = 3,125$ .

Con los ordenadores cada vez conocemos más cifras, en 1949 se conocían 2037, y en 2011, más de 10 billones (¡un 1 y 13 ceros!)

Los árabes obtuvieron hasta 17 cifras decimales

$e$

Otro número irracional. *Euler* calculó 23 de sus cifras decimales

Vale **2,718281828459...** con infinitas cifras decimales no periódicas

Es la base de los logaritmos neperianos

$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

Una de las numerosas aplicaciones del número  $e$  en Biología es el crecimiento exponencial de poblaciones. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que lo limiten. En esos casos se aplica la fórmula:  $P = P_0 \cdot e^t$  que permite averiguar cuál será la población  $P$  en un tiempo  $t$  a partir de la población inicial  $P_0$ .



$\Phi$

¡El número de oro! ¡La divina proporción!

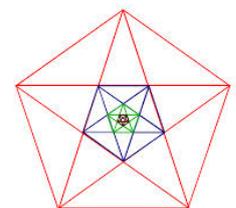
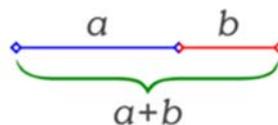
Vale **1,61803398874989...** con infinitas cifras decimales no periódicas

Se define como  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Observa que se define con un radical  $\sqrt{5}$ . Es un número irracional **algebraico**, mientras que los otros dos,  $\pi$  y  $e$ , son **transcendentes**

Se obtiene como una proporción, al dividir un segmento de longitud  $a + b$ , en dos partes de forma que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



## El número de oro

El número de Oro (o Razón Áurea) llamado  $\Phi$  (fi) es precisamente el valor de esa proporción, así:

Ya tenemos dos curiosidades:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\dots \Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$$

$$\Phi = \frac{a}{b}; \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo Número de Fibonacci. Estos números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ... donde cada término a partir del tercero se obtiene sumando los dos anteriores.

Más relaciones entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci:

a) Si vamos dividiendo un número de la sucesión entre su anterior obtenemos:  $1/1 = 1$ ;  $2/1 = 2$ ;  $3/2 = 1.5$ ;  $5/3 = 1.666\dots$ ;  $8/5 = 1.6$ ;  $13/8 = 1.625$

Como puede verse, nos acercamos rápidamente al valor del número de Oro, primero por debajo, después por arriba, por debajo, ... alternativamente.

Dividimos un segmento en dos partes de forma que si dividimos la longitud del segmento total entre la parte mayor debe de dar lo mismo que al dividir la parte mayor entre la parte menor.

Tenemos que  $(a+b)/a = a/b$ .

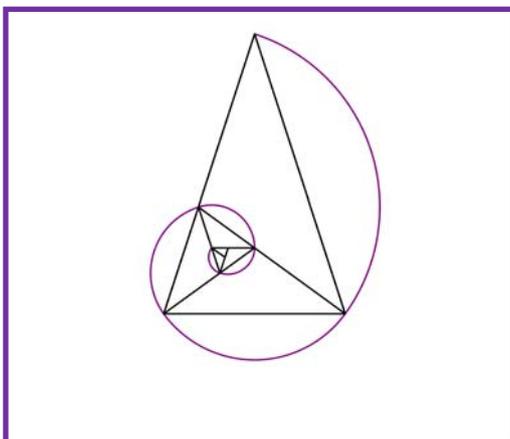
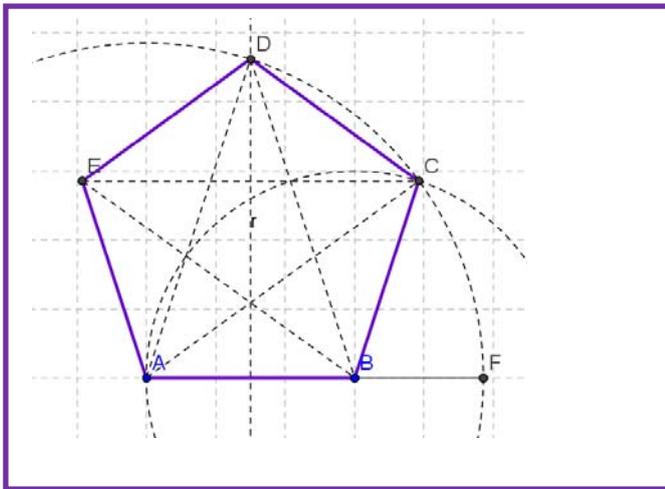


¿Qué tienen en común un campo de fútbol, un billete de 10 euros y una revista de actualidad? Solo una cosa: su forma. Todos son rectángulos. En este capítulo veremos, entre otros temas, el procedimiento para construir rectángulos áureos y cuáles son las propiedades de éstos, como la espiral de Durero y su correspondencia con la realidad. Más por menos. La aventura del saber. Antonio Pérez.



[Más por menos: El número áureo | RTVE Play](#)

## El pentágono regular y el Número de Oro.



En un pentágono regular la razón entre una diagonal y el lado es  $\Phi$ . Como sabemos construir  $\Phi$ , la construcción de un pentágono regular es muy sencilla:

Si AB va a ser un lado de nuestro pentágono, construimos el punto F alineado con A y B que cumpla  $AF/AB$  igual a  $\Phi$  (se indica cómo hacerlo en el texto).

Entonces, AB será el lado y AF la medida de la diagonal.

Trazamos la mediatriz de AB y una circunferencia de centro A y radio AF. Se cortan en D que es un vértice del pentágono.

Trazamos ahora una circunferencia con centro B y radio AB, se corta con la anterior en C que es otro vértice del pentágono. Sólo queda hallar E que es muy fácil.

El pentágono regular con sus diagonales se conoce como "Pentagrama Místico" y parece ser que volvía loquitos a los pitagóricos, en él el número de Oro aparece de forma desmesurada.

Del Pentagrama hemos sacado este triángulo, llamado Triángulo Áureo que permite obtener más triángulos áureos haciendo la bisectriz en uno de los ángulos iguales y formar esta espiral. Esta espiral es parecida a la Espiral Áurea, a la de *Fibonacci* y a la espiral logarítmica que es la que aparece en: galaxias, huracanes, conchas, girasoles ...



## El ajedrez

Cuenta la leyenda que cuando el inventor del ajedrez le mostró este juego al rey *Shirham* de la India, éste se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle todo lo que quisiera.

El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla del juego, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla.

Al rey le pareció una petición modesta, pero... como se puede comprobar ese número de granos dan poco más de 15 billones de toneladas métricas lo que corresponde a la producción mundial de trigo de 21 685 años.

¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!



## ¡Te gusta hacer magia!

Puedes hacer este juego con tus amigos. Para hacerlo necesitas papel y lápiz, o mejor, una calculadora, o todavía mejor, una hoja de cálculo.

Escribe en una columna los números del 1 al 20. Al lado del 1 escribe el número que te diga tu amigo o amiga, de una, dos o tres cifras (376). Al lado del 2 escribe también otro número inventado de 1, 2 o 3 cifras (712). Al lado del 3, la suma de los dos números anteriores (1088). Al lado del 4, lo mismo, la suma de los dos números anteriores (ahora los de al lado del 2 y del 4), y así hasta llegar a la casilla 20.

Ahora divide el número de al lado del 20 (3 948 456) entre el número de al lado del 19 (2 440 280), y ¡magia!, puedes adivinar el resultado. ¡Se aproxima al número de oro!

**1.618...**

¿Por qué? ¿Sabes algo de la sucesión de Fibonacci? Búscalo en Internet.

Haz una hoja de cálculo como la del margen.

	A	B	C	D	E	F
1	<b>¡Te gusta hacer magia!</b>					
2						
3	1	376				
4	2	712				
5	3	1088				
6	4	1800				
7	5	2888				
8	6	4688				
9	7	7576				
10	8	12264				
11	9	19840				
12	10	32104				
13	11	51944				
14	12	84048				
15	13	135992				
16	14	220040				
17	15	356032				
18	16	576072				
19	17	932104				
20	18	1508176				
21	19	2440280				
22	20	3948456				
23						
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	<b>1,61803</b>	
25						

## RESUMEN

<b>Conjuntos de números</b>	<b>Naturales</b> $\rightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ; <b>Enteros</b> $\rightarrow \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ <b>Racionales</b> $\rightarrow \mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ ; <b>Irracionales</b> $\rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}; \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	
<b>Fracciones y expresión decimal</b>	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $x = 1.7252525\dots = 854/495$
<b>Números racionales</b>	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1.5; 0.3333333333...
<b>Representación en la recta real</b>	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
<b>N. Reales</b>	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0.333333; $\pi$ ; $\sqrt{2}$
<b>Intervalo abierto</b>	Intervalo abierto en el que los extremos <b>no</b> pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}$ . $(2, 7) \Rightarrow$
<b>Intervalo cerrado</b>	Los extremos <b>SI</b> pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ $[-2, 2] \Rightarrow$
<b>Intervalos Semiabiertos ( o semicerrados)</b>	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ $[-8, 0) \Rightarrow$
<b>Entornos</b>	Forma especial de expresar un intervalo abierto: $E(a, r) = (a - r, a + r)$	$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$
<b>Logaritmos</b>	Si $a > 0$ , $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $25 \log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

$$a) -\frac{4}{7} - \frac{5}{2} \quad b) \frac{3}{5} + \frac{(-7)}{9} \quad c) \frac{(-2)}{3} + \frac{(-1)}{8} \quad d) \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)$$

$$e) \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} \quad f) \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{2}\right) \quad g) \frac{25}{3} : \frac{5}{9} \quad h) \frac{7}{3} : \frac{14}{9} \quad i) 15 : \frac{3}{5}$$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \left(\frac{a-1}{3} + \frac{a+1}{2}\right) \cdot \frac{6}{a} \quad b) \frac{x-2}{x^2-4} \quad c) \frac{x^2+6x+9}{x-3} : \frac{x^2-9}{x+3} \quad d) \frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)$$

3. Realiza las operaciones:

$$a) (24.67 + 6.91)3.2 \quad b) 2(3.91 + 98.1) \quad c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8$$

4. Halla el valor exacto de  $\frac{0.4}{0.4}$  sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{9}{40}; \frac{30}{21}; \frac{37}{250}; \frac{21}{15}$$

6. Halla 3 fracciones  $a, b, c$  tal que  $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene  $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$ ?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división  $999\,999:7$  y después haz  $1:7$ . ¿Será casualidad?

9. Ahora divide  $999$  entre  $37$  y después haz  $1:37$ , ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

$$2.73535\dots; \quad \pi-2; \quad \sqrt[3]{-32}; \quad 10^{100}; \quad \frac{102}{34}; \quad -2.5; \quad 0.1223334444\dots$$

11. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a)  $Q \cap (\mathbb{R} - Q) = \{0\}$

b)  $Z \subset Q$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d)  $\sqrt{7} \notin Q$

e)  $1/47$  tiene expresión decimal periódica.

12. Pon ejemplos que justifiquen:

- a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.
- b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt{8}$  m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado  $\sqrt{3}$  m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio  $\sqrt{10}$  m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado  $\sqrt[3]{7}$  m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea  $1 \text{ m}^2$ ?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

## Potencias

23. Calcula:

- a)  $(+2)^7$
- b)  $(-1)^{9345}$
- c)  $(-5)^2$
- d)  $(-5)^3$
- e)  $(1/3)^3$
- f)  $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

- a)  $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$
- b)  $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$
- c)  $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$
- d)  $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

- a)  $(-2/3)^{-4}$
- b)  $(-1/5)^{-2}$
- c)  $\frac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$
- d)  $\frac{3^2 \cdot 25^5}{9^5 \cdot (-5)^2 \cdot 4^5}$
- e)  $\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-25}{6}\right)^3}{\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae los factores posibles en cada radical:

- a)  $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$
- b)  $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$
- c)  $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz:

- a)  $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$
- b)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

28. Expresa en forma de potencia:

- a)  $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$
- b)  $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica la expresión:

$$\text{a) } \left( \frac{\frac{2}{x^3}}{\sqrt{x}} \right)^3 \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$$

30. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de  $1\,285\,600\,000 \text{ km}^3$  y el volumen de agua dulce es de  $35\,000\,000 \text{ km}^3$ . Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

31. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de  $9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

32. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada  $\text{mm}^3$ . Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

## Representación en la recta real

33. *Pitágoras* vivió entre el 569 y el 475 años a. C. y Gauss entre el 1777 y el 1855, ¿qué diferencia de años hay entre ambas fechas?

34. Representa de forma exacta en la recta numérica:  $-2.45$ ;  $3.666\dots$

35. Sitúa en la recta real los números  $0.5$ ;  $0.48$ ;  $0.51$  y  $0.505$ .

36. Ordena los siguientes números de mayor a menor:  $2.4$ ;  $-3.62$ ;  $-3.6$ ;  $2.5$ ;  $2.409$ ;  $-3.9999\dots$

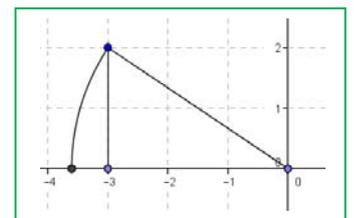
37. Representa en la recta numérica de forma exacta los siguientes números:

$$\frac{2}{3}; \frac{-3}{5}; \frac{5}{2}; 1.256; 3.\hat{5}$$

38. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?

39. Representa de forma exacta en la recta numérica:  $-\sqrt{8}$ ;  $2\sqrt{5}$ ;  $\frac{\sqrt{10}}{2}$

40. Halla 5 números racionales que estén entre  $3.14$  y  $\pi$ .



## Intervalos

41. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a.  $(-5, 5]$

b.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 7\}$ .

c.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

d.  $(-3, +\infty)$

42. Halla:

a.  $(2, 4] \cup (3, 5]$

b.  $(2, 4] \cap (3, 5]$

c.  $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

43. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

44. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

a.  $(0, 8)$

b.  $(-6, -2)$

c.  $(2, +\infty)$

45. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

a.  $E_{2/3}(4)$

b.  $E_{1/2}(-7)$

c.  $E(1, 2)$

d.  $E(0, 1)$

46. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

47. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

48. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

## Varios

49. Un número irracional tan importante como Pi es el número "e".  $e \approx 2.718281828...$  que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  cuando  $n$  se hace muy, pero que muy grande. **Coge la calculadora** y dale a  $n$  valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, ...



Apunta los resultados en una **tabla**.

50. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón

$9.11 \cdot 10^{-31}$  kilogramos

Masa de la Tierra

$5.983 \cdot 10^{24}$  kilogramos

Masa del Sol

$1.99 \cdot 10^{30}$  kilogramos

Masa de la Luna

$7.3 \cdot 10^{22}$  kilogramos.

51. Otra forma de definir  $e$  es  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo:  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ , se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo:  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ . No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora. ¿Puedes calcular  $e$  con 6 cifras decimales correctas? *\*Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta  $n = ?$



52. Tomando  $1.67 \cdot 10^{-24}$  gramos como masa de un protón y  $1.2 \cdot 10^{-15}$  metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en  $\text{cm}^3$  (Recuerda el volumen de una esfera es  $(4/3)\pi r^3$ . b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11.34 gramos).

## AUTOEVALUACIÓN

- Indica qué afirmación es falsa. El número  $-0.3333333\dots$  es un número
  - real
  - racional
  - irracional
  - negativo
- Operando y simplificando la fracción  $\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 2} : \frac{a - 2}{a + 3}$  se obtiene:
  - $a + 3$
  - $1/(a + 3)$
  - $a - 2$
  - $1/(a - 2)$
- La expresión decimal  $0.63636363\dots$  Se escribe en forma de fracción como
  - $63/701$
  - $7/11$
  - $5/7$
  - $70/111$
- Al simplificar  $\sqrt{2} (7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$  obtienes:
  - $6\sqrt{2}$
  - $\sqrt{2} (5\sqrt{2})$
  - 12
  - 8
- Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones  $4/7$ ;  $9/150$ ;  $7/50$  tienen una expresión decimal:
  - periódica, periódica, exacta
  - periódica, exacta, periódica
  - periódica, exacta, exacta
- El conjunto de los números reales menores o iguales a  $-2$  se escribe:
  - $(-\infty, -2)$
  - $(-\infty, -2]$
  - $(-2, +\infty)$
  - $(-\infty, -2[$
- El entorno de centro  $-2$  y radio  $0.7$  es el intervalo:
  - $(-3.7, -2.7)$
  - $(-2.7, -1.3)$
  - $(-3.3, -2.7)$
  - $(-2.7, -1.3]$
- El intervalo  $(-3, -2)$  es el entorno:
  - $E(-2.5; 1/2)$
  - $E(-3.5; -0,5)$
  - $(-3.5, 1/2)$
  - $(-2.5; -0,5)$
- Al efectuar la operación  $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  se obtiene:
  - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$
  - $25/4$
  - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$
  - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$
- Al efectuar la operación  $0.000078 + 2.4 \cdot 10^{-5}$  se obtiene:
  - $3.6 \cdot 10^{-10}$
  - $1.8912 \cdot 10^{-10}$
  - $10.2 \cdot 10^{-5}$
  - $18.72 \cdot 10^{-5}$