Matemáticas
3º de ESO
Soluciones de ejercicios y problemas

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde.

Textos Marea Verde

CAPÍTULO 1: NÚMEROS RACIONALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

0. TE CONVIENE RECORDAR

1. Calcula:

a) –20 + 15   b) –2 · (–20 + 15)   c) –20 : (10 – 2(–20 + 15))   d) (–80 –20 : (10 – 2(–20 + 15))) · (3 – 2 · 3^2)

Solución: a) –5; b) 10; c) –1 d) 1215.

2. Calcula:

a) –10 + 20 : (–5)   b) (–10 + 20) : (–5)   c) –100 : ((–20) : (–5))   d) (–100 : (–20)) : (–5)   e) $\sqrt{36 \cdot 4}$

Solución: a) –14; b) –2; c) –25; d) –1; e) 24.

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot3-2\cdot5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$

c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot3-3\cdot4)^2-(2-4)^3$

Solución: a) 7; b) 2; c) –3; d) –26.

1. NÚMEROS RACIONALES

4. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

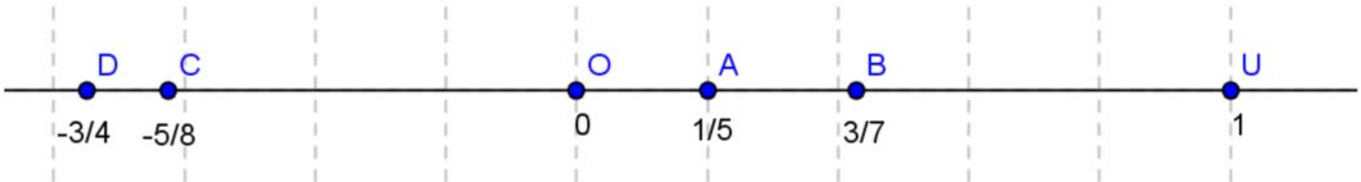
Solución: 7 + 1/7; 2 + 3/11; 16 + 5/6.

5. Pasa a forma mixta las fracciones $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

Solución: –4 – 2/7; –3 – 11/13; –4–16/21.

6. Representa en la recta numérica las fracciones: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

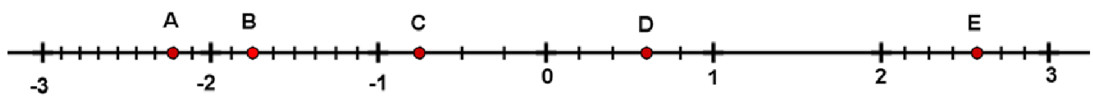
Solución gráfica:



7. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

Solución: 2+7/8; –2–7/8; 3+3/5; –4–1/3.

8. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos *A, B, C, D* y *E,* expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos *A, B* y *E.*



Solución: a) –2–2/9; –1–3/4; –3/4; 3/5; 2+4/7 b) –20/9; –7/4; 18/7.

9. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.

Solución: 36/5.

10. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

Solución: 120.

2. APROXIMACIONES Y ERRORES

11. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$	*3*	*3.2*	*3.16*	*3.162*
1/7	*0.1*	*0.14*	*0.143*	*0.1429*
95549	*100000*	*9600*	*95500*	*95550*
30000	$3\cdot10^4$	$30\cdot10^3$	$300\cdot10^2$	$3000\cdot10$
1.9995	*2*	*2.0*	*2.00*	*2.000*
20.55	*20*	*21*	*20.6*	*20.55*

12. Prueba que 123.45 con EA = 0.005 y 0.12345 con EA = 0.000005 tienen el mismo ER.

***Solución:** Er = $4.05 \cdot 10^{-3}$ %.*

13. Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:

a) Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.

***Solución:** Depende del tipo de error. Si se considera el error relativo, F, pues cuánto más pequeña sea la medida, más difícil es medir y el error relativo es mayor. Pero si se trata de error absoluto, V, pues al ser menor la medida también será menor el valor del error.*

b) No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes. F

c) Poner precios como 1.99 €/Kg es un intento de engaño. V

d) Comprar a 1.99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro. F

e) Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático. F

f) La precisión se mide por el número de cifras decimales. V

3. FRACCIONES Y DECIMALES

14. Sin hacer la división indica si las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

***Solución:** a) exacta; b) periódica; c) periódica; d) exacta.*

15. Pasa a fracción y simplifica:

a) 1.4142 b) 0.125 c) 6.66

***Solución:** a) 7071/9999; b) 1/8; c) 333/50.*

16. Pasa a fracción y simplifica:

a. 1.41424142… b. 0.125125… c. 6.666…

***Solución:** a) 14141/9999; b) 125/999; c) 20/3.*

17. Pasa a fracción y simplifica:

1) 1.041424142… 2) 0.7125125… 3) 6.7666…

***Solución:** 1) 52066/49995; 2) 3559/4995; 3) 203/30.*

18. Determina la fracción generatriz de:

A. 0.333… + 0.666… B. 0.888… · 2.5 C. 0.65 : 0.656565…

***Solución:** A) 1; B) 20/9; C) 99/100.*

CURIOSIDADES. REVISTA

Suma de infinitas fracciones

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ (***Solución***: 1).

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=$ (***Solución***: 1/2).

¿Cuánto crees que vale esta suma?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla paso a paso: (–5 + 4 · (–2) +7) : (7 – (3 – 4) · (–1))

Solución: –1.

2. Ordena de menor a mayor: $\frac{8}{9};\frac{-8}{9};\frac{4}{5};\frac{38}{45};\frac{77}{90};\frac{-9}{8}$

Solución: –9/8 < –8/9 < 4/5 < 38/45 < 77/90 < 8/9.

3. Indica razonadamente qué fracción es mayor: $a)\frac{102}{101}\ y\ \frac{98}{99}\quad b)\frac{98}{99}\ y\ \frac{97}{98}\quad c)\frac{-102}{101}\ y\ \frac{-103}{102}$

Solución: a) 102/101 > 98/99; b) 98/99 > 97/98; c) –102/101 < –103/102.

4. Demuestra que 4.999… = 5. Generaliza: ¿Cuánto vale *n*.999…?

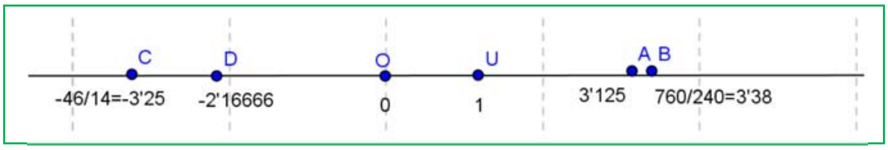
Solución: 49 – 4/9 = 45/9; n + 1.

5. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9};\frac{152}{6};\frac{-17}{5};\frac{-23}{4}$

Solución: 1+7/9; 25+1/3; –3–2/5; –5–3/4.

6. Representa de forma exacta en la recta numérica: $\frac{760}{240}$; 3.125; $-\frac{46}{14}$; -2.1666…

Solución gráfica:



7. Simplifica:

$a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$

Solución: a) 1; b) 2; c) 1/2.

8. Halla la fracción que cae justo en medio de 3/2 y 9/4 en la recta numérica. ***Pista:*** La media aritmética $\frac{a+b}{2}$ Representa las 3 fracciones en la recta numérica.

Solución: 21/8.

9. La media armónica se define como H(*a*, *b*) = $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, el inverso de la media aritmética de los inversos.

a) Demuestra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$ b) Halla $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

Solución: a) 2ab/(a+b); b) 66/31.

10. Halla la fracción inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$

Solución: 3/13

11. Opera y simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$

Solución: 1

12. Resuelve paso a paso: $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$

Solución: 0

13. Calcula las dos terceras parte de la sexta parte del 80 % de 900.

Solución: 80

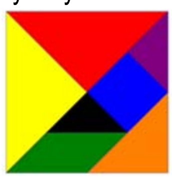
14. Halla el número tal que sus cuatro tercios valen 520.

Solución: 390

15. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?

Solución: 32 botes

16. Calcula la fracción por la que hay que multiplicar 450 para obtener 720.
Solución: 8/5
17. Si 100 pulgadas son 254 cm: a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19.2 pulgadas y largo/alto = 4/3; b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9
Solución: a) 65.024 cm. b) 86.698 666 … cm
18. Si en una clase el 77.777… % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos, pero menos de 40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?
Solución: Son 36 alumnos y aprueban 28
19. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*).
Solución: El de los 5 panes cobrará 7/3 y el de los 3 panes 1/3.
20. Aproxima los números 32567 y 1,395 con 2 cifras significativas y di en cuál se comete menor error relativo.
Solución: 33000, Er = 1.33%; 1.4; Er = 0.36%. Menor error relativo.
21. π no puede representarse mediante una fracción de enteros, pero ¿puedes hallar una fracción que lo aproxime con 5 cifras significativas?
Solución: 3927/1250.
22. Aproximamos π por: a) Simplifica hasta una fracción impropia irreducible; $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{16}}$ b) Halla el error absoluto y el error relativo.
Solución: a) 355/113; b) Er = 8.5 10^{-6} %.
23. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?
Solución: 48 botellas
24. Halla un número entero no nulo de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.
Solución: 420
25. A la unidad le quito sus 2 quintas partes. ¿Por qué fracción hay que multiplicar el resultado para llegar otra vez a la unidad?
Solución: 5/3
26. Halla la fracción resultante: a) Quito 1 tercio de lo que tengo y luego añado 1 tercio de lo que queda; b) Añado 1 tercio de lo que tengo y después quito 1 tercio del resultado.
Solución: a) 8/9; b) 8/9.
27. Estás aburrido y decides jugar a lo siguiente: Avanzas un metro en línea recta, retrocedes la mitad, avanzas la mitad de lo que has retrocedido en el último paso, retrocedes la mitad de lo que has avanzado en el último paso, … Si lo haces muchas, pero que muchas veces, ¿cuánto avanzas en total? $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}+\ldots=$
Solución: 2/3 de metro.
28. Darío da pasos de 3/5 de metro, su perro Rayo da pasos de ¼ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?
Solución: 150 pasos.



29. La figura de al lado es un "*Tamgran*".
a) Halla la fracción que se corresponde con cada una de las 7 piezas.
b) Si el lado del cuadrado es de 20cm, halla el área de cada pieza.
Solución: El área del cuadrado es de 400 cm². Amarillo: 1/4, 100 cm²; Rojo: 1/4, 100 cm²; Lila: 1/16, 25 cm²; Negro: 1/16, 25 cm²; Azul: 1/8, 50 cm²; Verde: 1/8, 50 cm²; Anaranjado: 1/8, 50 cm².

30. Si el lado del cuadrado es de 4 cm halla la fracción y el área de la zona coloreada:
Solución: a) 1/4; 4 cm²; b) 16/5; 3.2 cm²; c) 3/20; 2.4 cm².
31. Calcula: a) $\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2$ b) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{2}:\dfrac{3}{4}\right)^3+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2$ c) $\dfrac{8}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^3$
Solución: a) 63/4; b) 25/4; c) 47/8.

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes operar con números enteros, conoces la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis. Resuelve paso a paso: $(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$

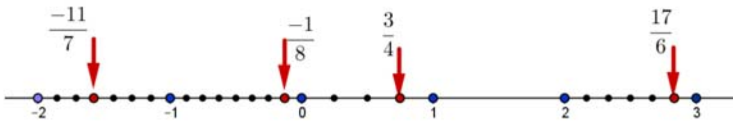
Solución: 10.

2. Sabes obtener fracciones equivalentes. Ordena de mayor a menor: $\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$

Solución: $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3. Sabes representar fracciones de forma exacta en la recta numérica. Representa: $\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0.125$

Solución:



4. Sabes operar con fracciones. Resuelve paso a paso y simplifica: $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$

Solución: $\frac{7}{2}$.

5. Sabes hallar la fracción de un número y la fracción de una fracción.
   a) Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.
   b) Una botella tiene llenas sus siete octavas partes, si contiene 840 cm^3, ¿cuánto le cabe llena?

Solución: a) 180; b) 960 cm^3.

6. Sabes redondear y calcular el error relativo cometido. Aproxima los números 9859 y 9.945 con 2 cifras significativas y calcula los errores relativos cometidos (en %), ¿cuál es menor?

Solución: 9859: 9900 ➔ EA = 41➔ ER = 0.42 %.
9.945: 9.9 ➔ EA = 0.045 ➔ ER = 0.45 %, es un poco menor el primero.

7. Sabes distinguir cuándo una fracción tiene una expresión decimal exacta.
   a) Di cuáles de las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$
   b) ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^6}$?
   c) ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el periodo de 1/97?

Solución: a) Primero se simplifican, son exactas 6/120 y 42/150. 5/180 tiene expresión decimal periódica.
b) 10 cifras decimales.
c) 96 cifras (de hecho las tiene).

8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción y simplifica:
   a) 2.225 b) 2.2252525... c) $\frac{0.125}{0.125125125\ldots}$

Solución: a) $\frac{89}{40}$ ***b)*** $\frac{2203}{990}$ ***c)*** $\frac{999}{1000} = 0.999$

9. Sabes resolver problemas mediante fracciones.
   Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.
   a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?
   b) Si su volumen actual es de 1200 cm^3, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?

Solución: a) 4 semanas. b) 506.25 cm^3.

10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que **le queda** el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que **le queda** las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aún tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Solución: Cobraba 1200 €. Ahora cobra 1000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

CAPÍTULO 2: POTENCIAS Y RAÍCES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

1. Determina el signo de las potencias: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$

***Solución:** a) –; b) +; c) –; d) +.*

2. Expresa en forma de una única potencia: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$

***Solución:** a) $(-7)^{16}$; b) $(3)^{17}$.*

3. Expresa en forma de potencia: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$

***Solución:** $(+120)^4$.*

4. Expresa en forma de potencia: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$

***Solución:** a) $(-8)^6$; b) $(-3)^{-5}$.*

5. Expresa en forma de potencia: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$

***Solución:** a) $(-25)^4$; b) $(-5/8)^8$*

6. Expresa en forma de potencia: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

***Solución:** a) $(-2)^{30}$; b) 7^{-15}.*

2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$

***Solución:** a) 125/27; b) 2401/16; c) 1/1296; d) 4/25.*

8. Expresa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$

***Solución:** a) $(-3/4)^{-3}$; b) $(1/8)^2$.*

9. Expresa como única potencia: a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$

***Solución:** a) $(5/42)^6$; b) $(9/160)^{-4}$.*

10. Calcula: a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$

***Solución:** a) $(-2/5)^{-3}$; b) $(5/8)^5$.*

11. Calcula: a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$

***Solución:** a) $(9/10)^{-3}$; b) $(27)^5$.*

12. Calcula: a) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$ b) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-1}{6}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^6}$

***Solución:** a) –1152/25; b) 64/729.*

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

13. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

***Solución:** 65536, 4294967296 y $1,84 \cdot 10^{19}$.*

14. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

***Solución:** Por ejemplo 13 años = $4.09 \cdot 10^8$ s.*

15. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5$

***Solución:** a) $2.71 \cdot 10^{-4}$; b) $1.97 \cdot 10^8$.*

16. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(1.3 \cdot 10^5) \cdot (6.1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})$

***Solución:** a) $7.93 \cdot 10^2$; b) $3.525 \cdot 10^{-5}$.*

17. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1.5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6.15 \cdot 10^{-7})$

***Solución:** a) $3.333 \cdot 10^{-5}$; b) $2.64 \cdot 10^4$.*

18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

***Solución:** $1.2856 \cdot 10^9$; $3.5 \cdot 10^7$ y 2.72 %.*

19. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa. y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

***Solución:** $9.109 \cdot 10^{-29}$ kg.*

20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

***Solución:** $2.5 \cdot 10^3$ glóbulos rojos.*

4. RAÍCES

21. Calcula todas las soluciones: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$

Solución: a) +11; b) –2; c) +10; d) –1; e) 1.

22. Expresa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$

Solución: a) $\sqrt[5]{-3^4}$ ***; b)*** $\sqrt[3]{8}$ ***; c)*** $\sqrt[3]{5^2}$ ***.***

23. Extrae los factores posibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

Solución: a) $ab\sqrt[4]{a^2 b}$ ***; b)*** $2^3 \cdot 3^3\sqrt[3]{2^2}$ ***; c)*** $2 \cdot 3^3 \cdot 5\sqrt{5}$ ***.***

24. Expresa en forma de producto o de cociente: a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$

Solución: a) $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$ ***; b)*** $\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{7}$ ***; c)*** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ ***; d)*** $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$ ***.***

25. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

Solución: a) $3\sqrt[6]{2}$ ***; b)*** $\sqrt[6]{5}$ ***.***

26. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

Solución: a) $2^{19/20}$***; b)*** $5^{-1/6}$***.***

27. Simplifica la expresión: a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

Solución: a) $x^{1/2}$; ***b)*** $x^{101/30}$***.***

28. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

Solución: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

29. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

Solución: a) 7, b) 5, c) 10, d) 8, e) 9, f) 1, g) 0 .

30. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

Solución: a) 7, b) 5, c) 10, d) 7 o 8 si aproximamos por exceso, e) 8 o 9 si aproximamos por exceso, g) 11.

31. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

Solución: a) 6 $\in$ ***N, b) No existe, c) No existe, d) Irracional, e) No existe, f) Irracional, g) 10*** $\in$ ***N.***

32. Utiliza la calculadora para calcular:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

Solución: a)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$ f) $(-18)^4 : (-3)^4$ g) $(6)^5 : (6)^2$ h) $(-3)^2 : (-3)^4$

Solución: a) 6^5; b) -1; c) 40^3; d) 5^7; e) 9^{10}; f) 6^4; g) 6^3; h) $(-3)^{-2}$.

2. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$

b) [(2)7 : (-3)7] · (– 4)3 · (–4)4

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

Solución: a) $(4/5)^6$; b) $(8/3)^7$; c) 9^3; d) $(6/7)^2$.

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo: $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

Solución: a) $(-1/4)^3$; b) $(1/9)^3$; c) $(1/2)^4$; d) $(-1/5)^3$.

4. Expresa en forma de única potencia: $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$

Solución: a) 2^{12}; b) $(-3)^{-10}$; c) $(-1)^{12}$; d) $5^{6/5}$.

5. Expresa en forma de única potencia: $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$

Solución: $(3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(5)^3$ d) $(3/2)^4$.

6. Expresa en forma de única potencia:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$

d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

Solución: a) $(2/3)^4$; b) $(-3/35)^3$; c) $(5/2)^4$;d) $(4/9)^{-2}$; e) $(-4/3)^{-15}$; f) $(2/7)^3$.

7. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $\dfrac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$

Solución: a) $(64/135)^3$; b) $3^{-6} \cdot (2/5)^{1/6}$; c) $(2/5)^{13/12} : (21/4)^3$.

8. Expresa en forma de notación científica:

a) 140000000 b) 32800 c) 71000000000000000 d) 0.0000075

e) –18000000 f) 0.00000000042 g) –0.009 h) 0.00000000007

Solución: a) $1.4 \cdot 10^8$; b) $3.28 \cdot 10^4$; c) $7.1 \cdot 10^{16}$; d) $7.5 \cdot 10^{-6}$; e) $1.8 \cdot 10^7$; f) $4.2 \cdot 10^{10}$; g) $-9 \cdot 10^{-3}$.

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

a) La distancia entre la Tierra y la Luna b) Unidad de masa atómica

c) Km que corresponden a un año luz d) Un gúgol d) La longitud de onda de los rayos cósmicos

Solución: a) $3.84 \cdot 10^8$ m; b) $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg; c) $9.46 \cdot 10^{12}$; d) 10^{100}; e) 10^{-15} a 10^{-13}.

10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$

c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$ d) $1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

Solución: a) $2.231 \cdot 10^6$; b) $5.678 \cdot 10^{-3}$; c) $1.35 \cdot 10^1$; d) $3.6 \cdot 10^{-4}$.

11. La estrella Sirio está a unos 8.611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (*Recuerda*: Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a 9.46×10^{12} km (9 460 730 472 580.8 km con más aproximación))

Solución: $1.629 \cdot 10^{17}$ m.

12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, la de un protón es de $1.672 \cdot 10^{-27}$ kg, y la de un neutrón 1.64×10^{-27} kg. Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y 6 + 2 = 8 neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).

Solución: $2.32 \cdot 10^{-26}$.

13. Calcula y expresa en notación científica:

a) $0.00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7.45 \cdot 10^{-5} - 6.32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^{6} - 2.8 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{5}$

c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{2} + 1.4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2.7) \cdot 10^{-3} + 4.2 \cdot 10^{-6}$

Solución: a) $1.17 \cdot 10^{-2}$; b) $-2.33 \cdot 10^{7}$; c) $-3.99 \cdot 10^{2}$; d) $4.12 \cdot 10^{-6}$.

14. Expresa el resultado de esta operación en notación científica: a) $\frac{2.4 \cdot 10^{-3} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{0.025 + 3 \cdot 10^{-4}}$ b) $\frac{(1.3 \cdot 10^{4}) \cdot (5 \cdot 10^{3})}{(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2.3 \cdot 10^{6})}$

Solución: a) $8.89 \cdot 10^{-2}$; b) $7.06 \cdot 10^{-5}$.

15. Se estima que existen 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Expresa en notación científica de forma aproximada el número de bacterias que existen en unos camiones que están descargando 50 toneladas métricas de arena en una playa.

Solución: $4 \cdot 10^{13}$ bacterias.

16. Si $x = 240000$; $y = 0.00058$; $z = 7.2 \cdot 10^{6}$: Calcula y expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^{7}$ c) $3x - 5y$

Solución: a) 139.2; b) $4.86 \cdot 10^{5}$; c) $7.2 \cdot 10^{5}$.

17. Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Vamos a estimarlos ahora por otro procedimiento. Estimamos cuántos granos de arena necesitamos para tener un gramo de arena. Te parece que 50 granos de arena. Se estima que la masa de la Tierra es de: M_T=5 980 000 000 000 000 000 000 000 000 g = $598 \cdot 10^{25}$ g

Calcula de forma aproximada el número de granos de arena que hay en toda la Tierra.

Solución: $3 \cdot 10^{29}$ granos de arena.

18. Vemos en Internet que la masa de Marte es de 639E21 kg, que la masa de Júpiter es de 1.898E27 kg, y que la masa de la Tierra es de 5.972E24 kg. a) Calcula cuántas veces cabría la Tierra en el planeta Júpiter. b) Calcula la relación entre la masa de la Tierra y la de Marte.

Solución: a) 318 veces; b) Masa de la Tierra 9.34 veces la masa de Marte.

Raíces

19. Calcula: a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0.49}$

Solución: a) +110; b) –0.2; c) –5; d) –1; e) +0.7.

20. Calcula: a) $\sqrt[4]{2.0736}$ b) $\sqrt[5]{-0.00001}$ c) $\sqrt{3364000(}$ d) $\sqrt[3]{-2.7 \cdot 10^{-6}}$

Solución: a) +1.2; b) –0.1; c) +5800; d) $-1.39\ 10^{-3}$.

21. Expresa en forma de raíz: a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

Solución: a) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; b) $\sqrt[6]{7}$; c) $\sqrt[3]{21}$; d) $\sqrt[3]{(-5)^2}$.

22. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

Solución: a) $6^{3/5}$; b) $(-7)^{5/2}$; c) $3^{5/2}$; d) $(-30)^{4/3}$.

23. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$

Solución: a) $3.10^2.2\sqrt{3 \cdot 10}$; b) $2^4.3^3\sqrt[3]{2^5}$; c) $x^2.y\sqrt[4]{x^3 \cdot y}$; d) $3.5^2\sqrt[3]{3}$.

24. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$

Solución: a) $a^2.b.c^{-2}\sqrt[3]{a}$; b) $5^{-2}.3^{-3}\sqrt{5^{-1}}$; c) $10/6^2\sqrt[4]{10}$ d) x^6.

25. Simplifica: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

Solución: a) $\left(\frac{2}{5}\right)\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$, b) $\left(\frac{-4}{5}\right)^2$, c) $\frac{y}{x^2}\sqrt{\frac{y}{x}}$, d) $3\sqrt[4]{3}$

26. Expresa en forma de producto: a) $\sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6}$

Solución: a) $30\sqrt{2}$, b) $2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 2}$, c) $2 \cdot 3^3\sqrt{2}$, d) $a^2 \cdot c^2 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2}$

27. Expresa en forma de cociente: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

Solución: a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, b) $\frac{\sqrt[5]{15}}{2}$, c) $\frac{\sqrt[3]{-7}}{\sqrt[3]{9}}$, d) $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

28. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

Solución: a) $2\sqrt{3}$; b) $\sqrt[6]{450}$; c) $\sqrt[12]{9000}$; d) $\sqrt[10]{-1}$.

29. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

Solución: a) $3 \cdot 2\sqrt[3]{18}$; b) $(-3)\sqrt[3]{5^2}$; c) $\frac{2^2}{3}\sqrt[5]{\frac{2^2}{3^3}}$; d) $2 \cdot 5^2\sqrt{3 \cdot 5}$.

30. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$

Solución: a) $\sqrt[6]{x^{-5}}$; b) 10^3; c) $(-2)^3 \cdot (-3)^3\sqrt{5}$; d) $-2/3$.

31. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{(-4)^5 \cdot \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3 : \sqrt{2^5}}}$ c) $\frac{\left(\left(-7^3\right)\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

Solución: a) $2 \cdot 5^{-2/3}$; b) $-2^{43/6}$; c) $(-7)^{7/6}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ y $(12)^7 : (12)^5$

   a) 6 y 12^2 b) $1/6$ y 12^5 c) $-1/6$ y 12^2

Solución: c).

2. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ y $(-8)^7 : (5)^7$

   a) $(-30)^4$ y $(-3)^7$ b) 30^4 y $(-8/5)^7$ c) 30^4 y $(-3)^7$

Solución: b).

3. El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $((-5)^{2/3})^6$

   a) $(-2)^{15}$; (-1) y $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) y $(-5)^4$ c) $(-2)^{15}$; (-1) y $(5)^4$

Solución: c).

4. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$

   a) $1/512$; $1/16$ y $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ y $1/10^{10}$

Solución: a).

5. El resultado de las operaciones siguientes es: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ y $(-2/5)^4$

   a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ y $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 y $2^4/5^4$

Solución: b).

6. El resultado de las operaciones siguientes es: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$

   a) 1 b) 2/3 c) –2/3 d) $(2/3) \cdot (-3/2)$

Solución: a).

7. Las expresiones $3.1 \cdot 10^8$ y 0.0000000095 corresponden a :

   a) 3100000000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ b)310000000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ c)310000000 y $9.5 \cdot 10^{-9}$

Solución: c).

8. El resultado de esta operación es: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$

   a) 124.5 b) 2407.5 c) 107.5 d) 140.75

Solución: d).

9. El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$

   a) –11, 16, –1 b) 11, 16, 1 c) –11, –16, –1

Solución: a).

10. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$

    a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$

Solución: b).

11. El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$

    a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$

Solución: b).

12. Las operaciones siguientes pueden expresarse: $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$

    a) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[9]{-18}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[6]{-18}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ y $\sqrt[9]{18}$

Solución: a).

CAPÍTULO 3: SUCESIONES. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:
   a) –1, –2, –3, –4,… b) 1, 4, 9, 16,… c) 1, 3, 5, 7,…

Solución:* *a) –1, –2, –3, –4, –5, –6, –7, –8, –9 y –10.
b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100.
c) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 y 19.

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

Solución: a) –100; b) 10000; c) 201.

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9,8 m/s (aproximadamente 10 m/s). Si en el primer segundo su velocidad es de 15 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 20 segundos? Representa gráficamente esta función.

Tiempo en segundos	1	2	3
Velocidad en m/s	15	25	35

Solución: v = 5 + 9.8 t, aproximadamente v = 5 + 10t.

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:
   $a_n = 2n^2+1$
   $v_{en} = \frac{4n-1}{3n}$
   $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$
   $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

Solución: a) 3, 9, 19 y 33; b) 1, 7/6, 11/9 y 5/4; c) 1, 8, 29 y 92; d) 2, 5 ,12 y 29.

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:
   a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…} , b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…} , c) {2, 4, 6, 8, 10,…} , d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \ldots\right\}$

Solución: a) $(-1)^n$; b) $n^2 - 1$; c) 2n; d) (2n – 1)/(n + 3).

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.

Solución: 2, 6, 10, 14, 18, 22 y 26.

7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta n-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de otra órbita anterior. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado	*18:27*	*20:24*	*21:51*	*23:18*	*0:45*	*2:12*

Solución: B) h = 17:30 + (1:27) · n; C) $h_n = h_{n-1} + (1{:}27)$; D) $h_n = h_m + (1{:}27) \cdot (m - n)$; E) 330 vueltas.
(En todas las respuestas, h horas m minutos se escribe h:m)

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética: {1, 10, 100, 1000, 100000, ….}.

Solución: No, es geométrica 10^{n-1}.

9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es –2.

Solución: 1, –1 y –3.

10. Dada una progresión aritmética cuyos dos de sus términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$:
    a) Calcula su diferencia.
    b) Calcula su término general.

Solución: a) d = 2; b) $a_n = 2n - 2$.

11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.

Solución: 2.

12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?

Solución: $a_n = -18 + (n-1)3$.

13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.

Solución: 3, 8, 13, 18 y 23.

14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

Solución: 2, 5, 8, 11 y 14.

15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:
    a) De diferencia $d = 2{,}5$ y de primer término 2.
    b) De diferencia $d = -2$ y de primer término 0.
    c) De diferencia $d = 1/3$ y de segundo término 5.
    d) De diferencia $d = 4$ y de quinto término 1.

Solución: a) $a_n = 2 + (n-1)2{,}5 = 2{,}5n - 5$; b) $a_n = 0 + (n-1)(-2) = -2n + 2$;
c) $a_n = 14/3 + (n-1)\,1/3 = n/3 + 13/3$; d) $a_n = -15 + (n-1)\,4 = 4n - 19$.

16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?

Solución: 126.

17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: $\{-5, 4, 13, 22, 31, 40, \ldots\}$

Solución: $S_{10} = 355$.

18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.

Solución: $S_{50} = 3825$.

19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el último?

Solución: 24.

20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio metro anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?

Solución: 98 euros. El primer metro cuesta 50 euros, metro y medio 56 €, dos metros 62 €... ; $a_9 = 50 + 8 \cdot 6 = 98$ €.

21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?

Solución: a) 825 euros; b) 225 euros; c) 37.5 %.
La primera semana paga 60 euros, la segunda 65, la tercera 70… y la décima $a_{10} = 60 + 9 \cdot 5 = 105$.
En total paga 60 + 65 + … 105 = 825. $S_{10} = (60 + 105) \cdot 10/2 = 825$ €.

22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

Solución: $a_n = 100 + (n-1)150$; ***b) 100, 250, 400, 550 y 700 metros.***

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.

Solución: $r = 2/3$.

24. El cuarto término de una progresión geométrica es 1/9 y la razón 1/3. Halla el primer término.

Solución: $a_1 = 3$.

25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$

Solución: $a_6 = 8$.

26. Dada una progresión geométrica cuyos dos de sus términos son: $a_3 = -8$ y $a_{11} = -2048$
    a) Calcula su razón. b) Calcula su término general.

Solución: a) $r = -2$; $a_n = (-2)^n$.

27. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de *clorella*. B) Indica el término general. C) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?

Solución: a) 1, 2, 4, 8, …; b) 2^{n-1}; c) No.

28. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo 384. Halla la razón y el producto de los 8 primeros términos.

Solución: a) r = 2; b) $1.76\ 10^{12}$.

29. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, …

Solución: 248832.

30. Un agricultor en su granja tiene 59049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?

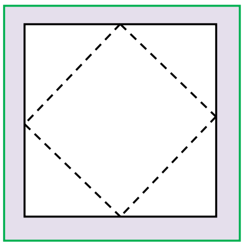
Solución: 58 126.359375 $\approx$ 58126.36 litros.

31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = ½$.

Solución: 163835/16384.

32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…

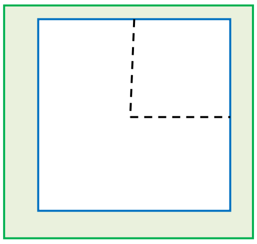
Solución: 12.



33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.

Solución: 0.5; la mitad. Los sucesivos cuadrados que tengo en la mano tienen de área 1, 1/2, 1/4, 1/8….Y los recortes sobre la mesa: 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8… Las infinitas áreas así obtenidas suman 1.

34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



Solución: Los sucesivos cuadrados que tengo en la mano tienen de área, 1, 1/4, 1/16… Disminuyen. El término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano es $(1/4)^{n-1}$. Los recortes que quedan forman otra progresión geométrica de término general $(3/4)^n$, que ahora crece. Si hubiéramos hecho infinitos cortes, en el límite, en la mano tendríamos un área 0, o tan próxima a cero como quisiéramos. Y sobre la mesa un área 1, o tan próxima a 1, como quisiéramos.

35. Calcula la fracción generatriz del número $4.5\hat{6}\hat{1}$.

Solución: 2258/495.

36. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3.5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

Solución: Mejor la opción b) 1140 euros frente a 1050 euros.

En el fascículo de GeoGebra, en el apartado 7.3, está explicado cómo hacerlo paso a paso.

Abre la hoja de cálculo Interés_compuesto para resolver problemas de interés compuesto, capitalización…

CURIOSIDADES. REVISTA

El inventor del ajedrez

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

a) ¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?
b) ¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?
c) ¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$$

Solución: a) Geométrica r = 2;   b) Mas de 18 trillones;   c) $1.8 \cdot 10^{19}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la diferencia es 5.

Solución*: *499.

2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.

Solución: 9.

1. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término n-ésimo 88, halla n.

Solución: 13.

2. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.

Solución: $a_1 = 12$; $d = 6$.

3. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20.

Solución: 11.

4. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.

Solución: 9.12 y 15.

5. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente, sean proporcionales a 5, 6 y 9.

Solución: 5.8 y 11.

6. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.

Solución: 25075.

7. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos. .

Solución: 2.5 y 8.

8. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?

Solución: 19.

9. La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. ¿Cuántos términos hemos sumado?

Solución: 49 números.

10. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.

Solución: 162.

11. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. Halla estos números.

Solución: 9,11 y 13.

12. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.

Solución: 20, 26 y 32.

13. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.

Solución: 2, 5, 8, 11 y 14.

14. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.

Solución: 2, 6 y 10.

15. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.

Solución: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 y 31.

16. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.

Solución: 1, 4, 7 y 10.

17. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.

Solución 1ª: 1, 5, 9 y 13 Solución 2ª: –13, –9, –5, –1.

18. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman –3 y los tres últimos 24.

Solución: –4, –1, 2, 5, 8 y 11.

19. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6. Calcula la diferencia y los términos mencionados.

Solución: d = 3 y 5,8 y 11, a_1 = 1/3; a_8 = 5; a_9 = 17/3; a_{11} = 7.

20. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.

Solución: 8, 11, 17 y 23.

21. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100º, calcula los otros dos.

Solución: 20º y 60º.

22. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15470 m^3.

Solución: 17, 26 y 35.

23. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.

Solución: 100º, 112º, 124º,136º, 148º y 160º o bien 90º,102º, 114º,126º, 138º y 150º.

24. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución: 9, 12 y 15.

25. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

Solución: 100 filas.

26. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?

Solución: 1350 €.

27. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

Solución: 5, 7, 9 y 11 años.

28. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?

Solución: a_{15} = 200 minutos y 6150 minutos en un mes.

29. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?

Solución: fila 16.

30. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

Solución: 1024.

31. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

Solución 1ª: 1, 3, 9, 27 y 81; solución 2ª: 1, –3, 9, –27 y 81.

32. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

Solución: 13.

33. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

Solución: 64.

34. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

Solución: 1/32 y r = 2.

35. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.

Solución: 4, 20 y 100.

36. El volumen de un ortoedro es de 3375 cm^3. Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.

Solución: 5, 15 y 45.

37. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...

Solución: $3^8 \cdot 2^{28} = 1753151963136$

38. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

Solución: 3069.

39. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 16 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

Solución: r = 2.

40. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

Solución: 16.

41. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.

Solución: 2, 6 y 18.

42. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.

Solución: 2^{11}.

43. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.

Solución: 25, 100 y 400.

44. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.

Solución: 1/3, 1/6, 1/12 y 1/24.

45. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

Solución: 7 términos.

46. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla los términos primero y séptimo.

Solución: $a_1 = 7$ ***y*** $a_7 = 5103$.

47. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.

Solución: 23, 69 y 207.

48. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

Solución: 16, 48 y 144.

49. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

Solución: 5, 20, 80 y 320.

50. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

Solución: 9, 27, 81 y 243.

51. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que sus aristas suman 420 m y su volumen 8000 m^3.

Solución: 5, 20 y 80.

52. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

Solución: 17, 51 y 153.

53. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

Solución: 8, 40 y 200.

54. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.

Solución: 8, 20, 50 y 125.

55. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.

Solución: a_6 = $6\sqrt[7]{3}^{5}$.

56. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.

Solución: 8, 16, 32, 64 y 128.

57. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

Solución: $x = 3$.

58. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

Solución: 100, 200 y 400.

59. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

Solución: 73/99.

60. Se tiene una cuba de vino que contiene 1024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?

Solución: 1 litro.

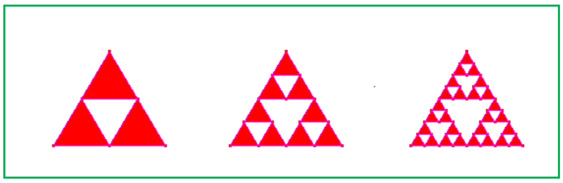
61. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

Solución: 2.

62. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

Solución: PG: 4, 16 y 64; PA: 3, 12 y 21.

63. *Triángulo de Sierspinky*: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de *Sierspinky*, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es (3/4)A. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



Solución: Sucesión de las áreas: 3/4 A, 9/16 A, 27/64 A ...; Decreciente;

Sucesión de las longitudes: L, L/2, L/4 .... Decreciente.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: a_n $5 \cdot 3^{n-1}$?
   a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica

Solución: b).

2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:
   a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

Solución: c).

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,… es:
   a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

Solución: d).

4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
   a) Es una progresión geométrica de razón 5
   b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
   c) Es una progresión geométrica de razón 3
   d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.

Solución: c).

5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:
   a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Solución: a).

6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10}?
   a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

Solución: b).

7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:
   a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$

Solución: c).

8. ¿Cuál es el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?
   a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000

Solución: b).

9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?
   a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

Solución: b).

10. A Roberto le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
    a) 6240 € b) 6104 € c) 7832.04 € d) 7299.92 €

Solución: d).

CAPÍTULO 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (*N*) así como la cantidad total de minutos de conversación (*M*). Justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Solución: Se multiplica el número de minutos por el precio de cada minuto y el número de llamadas por el precio de cada llamada.

2. Escribe las expresiones algebraicas que nos proporcionan la longitud de una circunferencia y el área de un trapecio.

Solución: $L = 2\pi r$; $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

3. Reescribe, en lenguaje algebraico, los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) El triple de su diferencia b) La suma de sus cuadrados c) El cuadrado de su suma
d) El inverso de su producto e) La suma de sus opuestos f) El producto de sus cuadrados

Solución: a) $3(x - y)$; b) $x^2 + y^2$; c) $(x + y)^2$; d) $\frac{1}{xy}$; e) $-x - y$; f) x^2y^2.

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 30 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

Solución: 0,7p.

5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ para $x = -2$.   b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ para $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$.

Solución: a) -19; b) $\frac{37}{36}$.

6. Indica, en cada caso, el valor numérico de la expresión $x - 2y + 3z$:

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = -1$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$

Solución: a) 0; b) -1; c) -2.

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ y $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

Solución: a) 1; b) -12; c) 11.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

8. En cada uno de los siguientes monomios señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

Solución:

$-12x^3$ Coeficiente: -12; parte literal x^3; grado: 3.
a^4b^3c Coeficiente: 1; parte literal a^4b^3c; grado: 8.
$4xy^2$ Coeficiente: 4; parte literal xy^2; grado: 3.

9. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

$5x^4 + 7x^2 - x$ $6x^2 + 10 - 2x^3$ $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Solución:

$5x^4 + 7x^2 - x$ Grado: 4. Monomios: $5x^4$, $7x^2$, $-x$.
$6x^2 + 10 - 2x^3$ Grado: 3. Monomios: $-2x^3$, $6x^2$, 10.
$2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$ Grado: 5. Monomios: $-x^5$, $7x^2y^2$, $2xy^3$.

10. Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.

Solución: $p(0) = 2$; $p(1) = 0$; $p(-1) = 4$; $p(-2) = 0$; $p(1/2) = 5/8$.

11. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

- $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$
- $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

Solución: ***$-5x^3 + 9x - 1$; $-6x^3 + 3x^2 - x + 9$.***

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 9$ b) $-5x$ c) $-x^3 + 7x$

Solución: a) $-2x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; b) $5x$; c) $x^3 - 7x$.

13. Considera los polinomios $p \equiv x^2 - x + 1$, $q \equiv -x^3 + 2x - 3$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

Solución: $p(-2) = 7$; $q(-2) = 1$; $s(-2) = 8 = p(-2) + q(-2)$.

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv 4x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 2$?

Solución: $p(2) = 29$; $-p(2) = -29$.

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

$(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$ $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

$(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$ $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

Solución: ***$-6x^3 + 8x$; $-8x^4 + 10x^3 - 4x + 5$; $8x^4 + 22x^3 - 6x^2 - 2x - 6$; $-8x^2 - 7x + 9$.***

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

$(5x^2 + 2) - (-2x)$ $(-2x^3 + 4x) - (-2x - 1)$ $(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

Solución: ***$5x^2 + 2x + x$; $-2x^3 + 6x + 1$; $-3x^3 + 3x^2 - x - 1$.***

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

$3x^2 - x + 2$ $-6x^3 + 2x - 3$ $-x^2 + 9x - 2$

Solución: $\frac{1}{3}(3x^2 - x + 2)$; $\frac{-1}{6}(-6x^3 + 2x - 3)$; $-(-x^2 + 9x - 2)$.

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $x \cdot (-2x + 4)$ b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$ c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$ d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

Solución: a) $-2x^2 + 4x$; b) $6x^2 - 5x - 6$; c) $-3a^2 + 10a - 8$ d) $a^2b^2 - 3a^3 - 2b^3 + 6ab$.

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2$ b) $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x)$ c) $(3a - 1) \cdot (2 - a) \cdot (5 - 4a)$

Solución: a) $-3x^5 + 4x^4 + 2x^3$; b) $10x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 3x$; c) $12^{a3} - 43a^2 + 43a - 10$.

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-10x^3 - 15x^2 + 20x$ b) $30x^4 + 24x^2$

Solución: a) $5x(-2x^2 - 3x + 4)$ b) $6x^2(5x^2 + 4)$.

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2 \\ & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & \end{array}$$

Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2+4x \\ & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & \\ & -8x^3 & +4x^2 & -12x & & \\ & & -4x^2 & -9x & -2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & 3x^2+4x-2 \\ & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & \\ & -8x^3 & +4x^2 & -12x & & \\ & & -4x^2 & -9x & -2 & \\ & & 4x^2 & -2x & +6 & \\ & & & -11x & +4 & \end{array}$$

Solución: Comprobado.

22. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 4x^2 - 9x + 7$ entre $x^2 + 2x - 1$

b) $-6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $3x^3 + x^2 - 2x + 1$

c) $-6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7$ entre $-3x^2 - 2x + 1$

d) $3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 14x + 14$ entre $x^3 - 2x^2 - x + 3$

e) $x^5 - 4x - 6$ entre $x^2 + 3$

Solución: a) Cociente: 3x –2, resto: –2x + 5

b) Cociente: –2, resto: 4x² – x + 6

c) Cociente: 2x² + 3x, resto: –16x + 7

d) cociente 3x² – 3x + 4, resto: x + 2

e) Cociente x³ – 3x, resto: 5x – 6.

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = 2x^2 - 3$ como resto.

Solución abierta. Una solución sencilla es Dividendo: x³ – x – 3, divisor: x.

24. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2 + 2x + 2$ entre $x + 1$

b) $x^3 + 3x^2 - 3x + 6$ entre $x + 2$

c) $5x^3 - 4x^2 - 2$ entre $x - 1$

d) $x^3 - 8x + 2$ entre $x - 3$

Solución: a)

$$\begin{array}{r|rrr} & -3 & 2 & 2 \\ -1 & & 3 & -5 \\ \hline & -3 & 5 & -3 \end{array}$$

Cociente: $-3x+5$. ***Resto:– 3***

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -3 & 6 \\ -2 & & -2 & -2 & 10 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 16 \end{array}$$

Cociente: $x^2 + x - 5$. ***Resto: 16***

c)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & & 5 & 1 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

Cociente: $5x^2 + x + 1$. ***Resto: –1***

d)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -8 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & \boxed{5} \end{array}$$
Cociente: x^2+3x+1***. Resto: 5***

25. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5 b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ c) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

Solución: a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & & 3 & -3 & -9 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{-4} \end{array}$$
: No es raíz (no puede serlo al no dividir al término independiente)

b)
$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & & 2 & 0 & -2 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$
: Es raíz

c)
$$\begin{array}{c|ccccc} & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & & -2 & -2 & -2 & -1 \\ \hline & -2 & -2 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$
: Es raíz (debe serlo al ser la suma de los coeficientes 0)

d) Es raíz

26. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

Solución:
$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & & -6 & -9 & -21 \\ \hline & -2 & -3 & -7 & \boxed{-18} \end{array}$$
: –18

27. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Solución: Como $2x+6=2(x+3)$***, usamos la regla de Ruffini en*** $x=-3$ ***para dividir el polinomio por*** $x+3$ ***y el cociente que queda lo dividimos entre 2 para dividir el polinomio por*** $2x+6$***. El resto es el mismo ya que el divisor por el cociente queda igual en las 2 divisiones:***

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & & -3 & -9 & -21 \\ \hline & 1 & -3 & -7 & \boxed{-18} \end{array}$$
Cociente: $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$***. Resto: –18***

28. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$ d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Solución: a) 1, -1, 2 y -2

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & & 1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

1 es raíz y queda $x^2 + 2$, que no tiene más raíces reales b) 1, -1, 3 y -3

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & & -1 & -3 & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \lfloor 0 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \lfloor 0 & \end{array}$$

-1 y -3 son raíces y queda $x^2 + 1$, que no tiene más raíces reales c) 1, -1, 3, -3, 9 y -9

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -18 & -9 \\ 3 & & 6 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \lfloor 0 \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & 1 & \lfloor 0 & \end{array}$$

3 y -3 son raíces y queda $2x + 1$, que no tiene más raíces enteras: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x = x\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$ *por lo que las posibles raíces, además de 0, son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \lfloor 0 \end{array}$$

0 y -2 son raíces y queda $x^2 + 3$, que no tiene más raíces reales.

29. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -18 & -9 \\ 3 & & 6 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \underline{|0} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{r|rrr} -3 & & -6 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & \underline{|0} \\ -\frac{1}{2} & & -1 & \\ \hline & 2 & \underline{|0} & \end{array}$$

30. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2+4x+1$ b) $2x^3-9x^2+12x-4$

Solución: a) 1, -1***,*** $\frac{1}{3}$ ***y*** $-\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 4 & 1 \\ -1 & & -3 & -1 \\ \hline & 3 & 1 & \underline{|0} \end{array}$$

-1 ***es raíz y queda*** $3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

b) 1, -1***, 2,*** -2***, 4,*** -4***,*** $\frac{1}{2}$ ***y*** $-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & 12 & -4 \\ 2 & & 4 & -10 & 4 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \underline{|0} \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & \underline{|0} & \end{array}$$

2 es raíz (doble) y queda:

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

31. Realiza los cálculos:

a) $(1+x)^2$ b) $(-x+2)^2$ c) $(x-2)^2$ d) $(2a-3)^2$ e) $(x^2+1)^3$ f) $(2b-4)^3$

Solución: a) $1+2x+x^2$ ***b)*** x^2-4x+4 ***c)*** x^2-4x+4

d) $4a^2-12a+9$ ***e)*** $x^6+3x^4+3x^2+1$ ***f)*** $8b^3-48b^2+24b-64$.

32. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

$(a+b+c)^2$ $(a-b+c)^2$

Solución: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

33. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3x-y)^2$ b) $(2a+x/2)^2$ c) $(4y-2/y)^2$

d) $(5a+a^2)^2$ e) $(-a^2+2b^2)^2$ f) $[(2/3)y-1/y]^2$

Solución: a) $9x^2-6xy+y^2$ ***b)*** $4a^2+2ax+x^2/4$ ***c)*** $16y^2-16+4/y^2$

. ***d)*** $25a^2+10a^3+a^4$ ***e)*** $a^4-4a^2b^2+4b^4$ ***f)*** $(4/9)y^2-4/3+1/y^2$

34. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) a^2-6a+9 b) $4x^2+4x+1$ c) $b^2-10b+25$

d) $4y^2-12y+9$ e) a^4+2a^2+1 f) $y^4+6xy^2+9x^2$

Solución: a) $(a-3)^2$ ***b)*** $(2x+1)^2$ ***c)*** $(b-5)^2$

d) $(2y-3)^2$ ***e)*** $(a^2+1)^2$ ***f)*** $(y^2+3x)^2$.

35. Efectúa estos productos:

a) $(3x+2)\cdot(3x-2)$ b) $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$ c) $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$ d) $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$ e) $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

Solución: a) $9x^2 - 4$; b) $4x^2 - 16y^2$; c) $16x^4 - 9$; d) $9a^2 - 25b^2$; e) $-x^4 + 25x^2$.

36. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

Solución: a) $(3x - 5)\cdot(3x + 5)$ b) $(2a^2 + 9b)\cdot(2a^2 - 9b)$ c) $(7 - 5x)\cdot(7 + 5x)$ d) $(10a - 8)\cdot(10a + 8)$.

37. Realiza las siguientes divisiones de polinomios a partir de la conversión del dividendo en la potencia de un binomio o en un producto de la forma suma por diferencia:

a) $x^2+12x+36$ entre $x+6$ b) $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$ c) $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$ d) x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

Solución: a) $x + 6$; b) $2x^2 + 4x$; c) $3x - 4$ d) $x - \sqrt{5}$.

38. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$ c) $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

Solución: a) $\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$ b) $\frac{-4x^2-2x+5}{x(x^2-1)}$ c) $\frac{-3x^3+3x^2}{x^2+4x+3}$ d) $\frac{x^2-x-6}{x^3}$.

39. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

Solución: a) $\frac{x^2+1}{x^3}$ b) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2x}$.

40. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$ b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$ c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$ d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

Solución: a) $x^2 - 4x + 3$; b) $a^3 + 12a^2 - 4$; c) $2x + 5$; d) $6xy - 4$.

41. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$ b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$ c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$ d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

Solución: Todas son ciertas.

42. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

Solución: a) $\frac{x^2+2x}{3x^2+6}$ b) $\frac{a-7}{3a+5}$ c) $\frac{xy-7y}{2}$ d) $\frac{ab-1}{a^2+1}$

43. En cada una de las siguientes fracciones algebraicas escribe, cuando sea posible, el polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia de un binomio o de suma por diferencia para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

Solución: a) $\frac{x-2}{3}$ b) $\frac{2(x+4)}{x-4}$ c) $\frac{-2}{2a+3}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son:
   A) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona.
   B) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros.

   Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros.

***Solución:** Llamaremos n al número de viajeros, p al precio por viajero y T a la cantidad total ingresada por la empresa. Todos los valores de las variables son números enteros.*

Si $n < 101$: $P = 150$; $T = 150n$

Si $n = 100 + x$ ($0 < x < 61$): $p = 150 – x$; $T = 15\,000 + 50x – x^2$

Si $n > 160$: $p = 90$; $T = 90n$.

2. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 5
   iii. Que al resultado anterior le sume 5
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que al resultado anterior le sume 10
   vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
   vii. Que divida entre 100 la última cantidad
   viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
   ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

***Solución:** Llamaremos 2n al número par inicial. Las instrucciones se traducen en la expresión siguiente:*

$$\frac{[(10\,n+5)\cdot 2-10]\cdot 5}{100}=\frac{100n}{100}-n=0$$

3. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:
   i. La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10%.
   ii. Para 2016 ofrecen aumentar un 10% los salarios de 2015.
   iii. En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10% cada año impar y que aumente un 10% cada año par.

   Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años.

***Solución:** Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:*

0.9 s; 0.99 s; 0.891 s; 0.980 1 s; 0.882 09 s; 0.970 299 s; …

Los salarios son cada vez menores que dos años antes.

4. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:
   a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.
   b) Para 2016, una reducción del 10% sobre los salarios de 2015.
   c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10% cada año impar y que disminuya un 10% cada año par.

   Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.

***Solución:** Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:*

1.1 s; 0.99 s; 0.891 s; 0.980 1 s; 0.882 09 s; 0.970 299 s; …

A partir del tercer año pierden dinero como en la propuesta anterior.

5. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

   a) $\frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

***Solución:** a) $x = –1$; b) $x = 5$, $x = –3.5$; c) $x = 1$; d) $x = y = 0$.*

6. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$ b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$ c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$

d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$ e) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$

Solución: a) –1; b) –2/9; c) 0; d) –1; e) 0.

7. Una persona tiene ahorrados 3000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2.5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

Solución: 3 151,88 €.

8. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.

Solución: Hay infinitos polinomios. Uno de ellos es $x^2 - 10$.

9. Considera los polinomios $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$ y $r(x)=x^2-3x+2$. Haz las siguientes operaciones:

a) p + q + r b) p – q c) pr d) pr – q

Solución: a) $(p + q + r)(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$; b) $(p - q)(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4$
c) $(pr)(x) = 2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 11x - 2$; d) $(pr - q)(x) = 2x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 12x + 3$.

10. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0.1x+0.2y-0.3z)\cdot(0.3x-0.2y+0.1z)$ c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

Solución: a) $\frac{-15abxy+2by^2}{30}$; b) $0.03x^2 - 0.04y^2 - 0.03z^2 + 0.04xy - 0.08xz + 0.08yz$; c) $x^2y + xya - x^2 - xa - y^2x - y^2a + ya$

11. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^3+x^2-12x+7$ entre $x+3$; b) $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$ entre $2x^2-3x+1$;

c) $-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$ entre $-x^3-2x+3$

Solución: a) Cociente: $2x^2 - 5x + 3$, Resto: -2; b) Cociente: $-2x^2 + x + 6$, Resto: $-4x + 2$;
c) Cociente: $3x^2 - 6$, Resto: $-9x^2 - 6x + 4$;.

12. Calcula los cocientes:

a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2)$ c) $(x^4-4x^2y+4y^2):(x^2-2y)$

Solución: a) $4x$; b) $(4/3)xy^2z^2$; c) $x^2 - 2y$.

13. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$ b) $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$ d) $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$ e) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$

Solución: a) $\frac{2x^2-1}{x}$; b) $\frac{2x^2+10x+3}{x^2+x}$ c) $\frac{(x-1)(2-x)}{x^2(x-3)}$ d) $\frac{x-1}{(2-x)(x-3)}$.

14. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que 2a)l dividir $p(x)$ entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=-3x^2+1$.

Solución: Existen infinitas soluciones de la forma $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio cualquiera..

15. Calcula las potencias:

a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

Solución: a) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$; b) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$; c) $a^2 + (2/3)ab + (1/9)b^2$; d) $x^4 - 4x^2z^3 + 4z^6$.

16. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) x^2-6x+9 b) x^4+8x^2+16 c) $x^2-\sqrt{12}\,xy+3y^2$ d) $y^4+2y^3+y^2+2y+1$

e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ f) x^2-25 g) x^2+5 h) $5x^2-1$

i) x^2-8y^2 j) x^4-1 k) x^2-y^2 l) $x^2-2y^2z^2$

Solución: a) $(x - 3)^2$ b) $(x^2 + 4)^2$ c) $(x-\sqrt{3}y)^2$ d) No
e) No; f) $(x + 5)(x - 5)$ g) No; h) $(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x-1)$;
i) $(x+\sqrt{8}y)(x-\sqrt{8}y)$ j) $(x^2+1)(x^2-1)$; k) $(x + y)(x - y)$ l) $(x+\sqrt{2}yz)(x-\sqrt{2}yz)$

17. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{xy^3-yx}{y^4-1}$

Solución: a) $\frac{x+1}{x-1}$ ***b)*** $\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}$ ***c)*** $\frac{xy}{y^2+1}$.

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{3}{x(3-x)}-\dfrac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4-5x^3+\dfrac{x^4-1}{x^3}\cdot\dfrac{x^5}{x^2+1}$ c) $\dfrac{x-2y}{a-b}+\dfrac{4x+5y}{3a-3b}$

Solución: a) $\frac{6-x}{2x(3-x)}$ ***b)*** $4x^4-5x^3-x^2$ ***c)*** $\frac{7x-y}{3a-3b}$.

19. Simplifica todo lo posible:

a) $\left(yx^4-\dfrac{y}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{b^3+3ab^2+3a^2b+a^3}{b-a}:\dfrac{b+a}{b-a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{4}{a-b}$

Solución: a) $\frac{y(x^3-1)}{x}$ ***b)*** $(a+b)^2$ ***c)*** $\frac{ab}{a-b}$.

20. Simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a+y}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{a+y}+\dfrac{1}{x}}:\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}$ b) $\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}}$

Solución: a) $\frac{x-y-a}{x+y-a}$ ***b)*** $\frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2-2x-3}$ ***c)*** $\frac{(2y-x)(y-3x)}{(3y+2x)(y-2x)}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

Solución: a) $3\sqrt{5}$ ***b) –3, –1, 1, 7 c) 1, 8, , 4, –2, 6, –3, 9.***

2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.

Solución: a) x, y b) x c) x, y, a.

3. Del polinomio $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica su grado y los monomios que lo integran.

Solución: Grado 4; monomios: $5x^4$, $-8x^2$, $-x$, 9.

4. La expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para : a) $x = 7$, b) $x = 2$, c) $x = 7$ y $x = 2$,d) $x=0$

Solución: b).

5. Cualquier polinomio:
   a) puede ser evaluado en cualquier número.
   b) no puede ser evaluado en el número cero.
   c) no puede ser evaluado en ciertos números concretos.

Solución: a).

6. El valor numérico de la expresión $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x=1, y=2, z=-1$ es:

   a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

Solución: b).

7. Completa adecuadamente las siguientes frases:
   a. La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ***dos.***
   b. La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ***dos.***
   c. El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ***cuatro.***
   d. La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ***dos.***
8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ***menor o igual a dos.***
   b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ***menor o igual a dos.***
   c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ***menor o igual a dos.***
9. Al dividir el polinomio $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ el polinomio resto resultante:
   a) debe ser de grado 2.
   b) puede ser de grado 2.
   c) debe ser de grado 1.
   d) ninguna de las opciones precedentes.

Solución: b).

10. Para que una fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea *equivalente* a un polinomio:
    a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
    b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
    c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
    d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.

Solución: c).

CAPÍTULO 5: ECUACIONES DE 2º GRADO Y SISTEMAS LINEALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

Solución:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$	***8x – 1***	***4x – 7***	***x***
5x + 9 = 3x – 1	$5x + 9$	$3x - 1$	***x***
$2a + 3 = 32$	***2a + 3***	***32***	***a***
2x – 5y = 5 + 4y	$2x - 5y$	$5 + 4y$	***x, y***

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:
   a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

Solución: a) 2; b) 2; c) 1; d) 1;

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:
   a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

Solución: a) 1; b) 2; c) 2; d) 3.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

Solución: a) x = –1; b) x = 3 c) x = 1.

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

5. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:
   a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$
   b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

Solución: a) Si; b) No, es de grado 3; c) Si; d) No, el de primer grado; e) No, tiene 1/x; f) No, tiene una raíz.

6. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.
   a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$ c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

Solución: a) a = –4, b = 9, c = 3; b) a = –3, b = 5, c = 0; c) a = 2, b = 0, c = –3; d) a = 1, b = –8, c = 1.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

Solución: a) $x_1 = 2, x_2 = 5$; b) $x_1 = -4, x_2 = 3$; c) $x_1 = 1, x_2 = 2$; d) $x_1 = -2, x_2 = 6$.

8. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:
   a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

Solución: a) 0; b) 1; c) 2; d) 0.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:
   a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

Solución: a) $x_1 = -6, x_2 = 0$; b) $x_1 = -3, x_2 = 3$; c) $x_1 = -5, x_2 = 5$; d) $x_1 = -1/2, x_2 = 0$; e) $x_1 = 3/2, x_2 = -3/2$; f) $x_1 = 0, x_2 = 2$.

10. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:
    a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$
    d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

Solución: a) $x_1 = -6, x_2 = 0$; b) $x_1 = -2, x_2 = 4$; c) $x_1 = -5, x_2 = 5$
d) $x_1 = 4, x_2 = 5$; e) $x_1 = -1, x_2 = 4$; f) $x_1 = -3, x_2 = 7$.

11. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

Solución abierta. Todas las ecuaciones son de la forma $a(x - 3)(x - 7)$, donde a es un número real cualquiera.

12. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.

Solución: Un lado mide 3 cm y el otro 5 cm.

13. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

Solución: a = 6.

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

Solución: a) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 7$.

15. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

Solución: a) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = \sqrt{2}$; b) No tiene soluciones reales; c) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$.

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

Solución: a) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. b) $x_1 = -5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$.
c) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$. d) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

17. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

Solución: a) No, el término xy no es de primer grado b) Si
c) Si d) No, los términos x^2 e y^2 no son de primer grado.

18. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

Solución: a) Las rectas se cortan en un punto. Sistema compatible determinado.
b) Las rectas son paralelas. Sistema incompatible.
c) Las rectas son coincidentes. Sistema compatible indeterminado.

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

Solución: a) x = –1, y = –1; b) x = 2, y = –1; c) x = 2, y = 2.

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = –1; b) x = 2, y = 3; c) x = 1, y = 1.

21. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

Solución: a) x = 2, y = –2; b) x = 19/7, y = –27/7; c) x = 3, y = –2.

22. Diseña una hoja de cálculo que te permita resolver sistemas lineales.

Solución manipulativa.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

23. En un hotel hay 47 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 57 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Solución: Hay 37 habitaciones simples y 10 dobles.

24. En una granja hay 100 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 280 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Solución: 60 gallinas.

25. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Solución: El número –5 y el número 8.

26. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

Solución: Los números 10, 11 y 12 y los números –10, –11 y –12.

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Solución: El número 5 y el número –17/3.

28. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

Solución: Los lados miden 8 cm y el área $8\sqrt{3}$ cm.

29. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

Solución: Luis tiene 52 años y Raquel 13.

30. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

Solución: Alberto tiene 24 años y María 8.

31. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

Solución: Los números son 49.5 y 73.5.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

Solución: a) $x = -8/7$ b) $x = 7$ c) $x = -5/63$ d) Indeterminada e) $x = 1/11$
f) $x = 1$ g) $x = -5/4$ h) $x = -166$ i) $x = 3/4$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Solución: a) $x = 65$; b) $x = 81/4$; c) $x = 3$ d) $x = 1/3$; e) $x = 1/3$; f) $x = 4/7$.

Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

Solución: a) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = 0$, $x_2 = 10$;
d) $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$; e) $x_1 = 1$, $x_2 = -10$; f) $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$;
g) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; h) $x_1 = -14$, $x_2 = 12$; i) $x_1 = 1$, $x_2 = 7/10$.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Solución: a) $x_1 = -13/3$, $x_2 = 5$; b) $x_1 = -27/10$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$;
d) $x_1 = 1-(\sqrt{6}/3)$, $x_2 = 1+(\sqrt{6}/3)$; e) $x_1 = 1/4$, $x_2 = 3$; f) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{97}}{12}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{97}}{12}$;.

5. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

Solución: a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; c) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$;
d) $x_1 = -2$, $x_2 = 5$; e) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$; f) $x_1 = -2$, $x_2 = -5$;
g) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; h) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; i) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

6. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0.$

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

Solución: a) $(x - 2)(x - 5)$; b) $x(x - 1)$; c) $(x + 5)(x - 5)$;
d) $(x + 2)(x - 5)$; e) $(x + 5)(x - 2)$; f) $(x + 2)(x + 5)$;
g) $(x - 2)(x - 3)$; h) $(x + 2)(x - 3)$; i) $(x + 3)(x - 2)$.

7. Cuando el coeficiente b es par (b = 2B), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm 2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

Solución: ***a)*** $x_1 = 4 + 2\sqrt{7}, x_2 = 4 - 2\sqrt{7}$ ***b)*** $x_1 = 4, x_2 = 6$ ***c) No tiene solución.***

8. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

Solución: ***a)*** $x_1 = 2, x_2 = 6$; ***b)*** $x_1 = -1, x_2 = 3$; ***c)*** $x_1 = 3, x_2 = 9$;

d) $x_1 = -4, x_2 = 1$; ***e)*** $x_1 = -7, x_2 = 2$; ***f)*** $x_1 = -6, x_2 = 4$.

9. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

Solución: ***a)*** $x_1 = -4, x_2 = 1$; ***b)*** $x_1 = -2, x_2 = 2/7$; ***c) No tiene solución;***

d) No tiene solución; ***e)*** $x_1 = \frac{1+\sqrt{19}}{6}, x_2 = \frac{1-\sqrt{19}}{6}$; ***f)*** $x_1 = \frac{-4+\sqrt{46}}{5}, x_2 = \frac{-4-\sqrt{46}}{5}$.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

Solución abierta.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

Solución abierta. Todas las soluciones son de la forma $a(x - b)^2 = 0$.

12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

Solución: abierta. Todas las soluciones son de la forma $a(x - b)(x - c) = 0$.

13. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Solución: No. Las ecuaciones de segundo grado tienen siempre dos soluciones, o una solución doble, o ninguna.

Sistemas lineales de ecuaciones

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x = 3, y = 2$; ***b)*** $x = 1, y = 1$ ***c)*** $x = 2, y = -1$.

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x = -2, y = 3$; ***b)*** $x = 1, y = 4$ ***c)*** $x = 1, y = 1$.

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

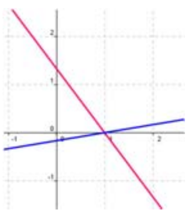
Solución: ***a)*** $x = 2, y = 1$; ***b)*** $x = 5, y = -2$ ***c)*** $x = 1, y = 1$.

17. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

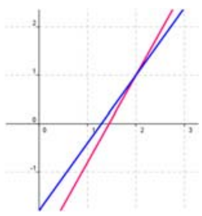
a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$

Solución gráfica: Comprueba que:

a) $x = 4, y = 3$



b) $x = 1, y = 0$



c) $x = 2, y = 1$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Solución: a) x = 1, y = 4; b) x = –1, y = 2 c) x = 1, y = 1.

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1 c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1 e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

Solución: a) –6x + 3y = –9; b) –5x + y = 6; c) 3x – y = 5, 3x + y = 7
d) 4x + (-10)y ≠ –2; e) 3x + 2y = –1, –2x + 3y = 5 f) 4x + 6y = -4.

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

Solución: abierta.

21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

Solución: abierta.

22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

Solución: abierta:.

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Solución: a) Incompatible; b) Compatible indeterminado c) Compatible determinado, x = 9/2, y = –1/2.

24. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para comprobar las soluciones de todos los ejercicios.

Solución manipulativa:.

Problemas

25. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

Solución: 20 bicicletas y 31 triciclos.

26. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

Solución: 20 años.

27. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

Solución: 8 = 4 · 2.

28. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

Solución: 5 o bien –17/3.

29. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

Solución: –15 y –13 o bien 13 y 15.

30. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

Solución: El asno lleva 5 sacos y el mulo 7.

31. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Solución: 8 o bien –5.

32. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

Solución: –12, –11 y –10 o bien 10, 11 y 12.

33. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

Solución: 21 años.

34. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

Solución: 16 y 18.

35. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

Solución: 12 y –7.

36. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

Solución: En cada bandeja ha de poner medio kilo de polvorones y medio de mazapanes. En total necesitará 12.5 kilos de cada producto.

37. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

Solución: 3 y 4 cm.

38. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

Solución: –4 y –1 o bien 1 y 4.

39. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

Solución: 15 y 5.

40. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

Solución: 20 coches y 10 motos.

41. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

Solución: Pedro tiene 30 años y Raquel 15.

42. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

Solución: 20 chicas y 15 chicos.

43. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Solución: Mi hermano tiene 3 años y mi abuelo 53.

44. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

Solución: El bocadillo cuesta 2 € y el refresco 1 €.

45. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

Solución: 17 vacas y 33 pollos.

46. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Solución: 54 metros de largo y 32 de ancho.

47. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

Solución: 13 monedas de 2 € y 27 de 1 €.

48. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

Solución: 34 arañas y 36 avispas.

49. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

Solución: 24 alumnos y 8 alumnas.

50. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

Solución: Yolanda tiene 14 años y Pablo 8.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$

Solución: d).

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

Solución: b).

3. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

Solución: d).

4. Las soluciones de la ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$

Solución: a).

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

Solución: c).

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

Solución: a).

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

Solución: d).

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

Solución: c).

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

Solución: a)

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 16 años b) 17 años c) 20 años d) 18 años

Solución: c)

CAPÍTULO 6: PROPORCIONALIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 260 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

Solución: Suponiendo que caben 10 personas en un metro cuadrado, en un local de 260 m^2 caben 2600.

2. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?

Solución: 10/3 = 3.33… kilogramos de fresas y 5/3 = 1.66… kilogramos de azúcar.

3. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1.2 m tiene una sombra de 2.3 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 4.2 m?

Solución: $h=\frac{4.2\times 1.2}{2.3}\approx 2.1m.$

4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad.

Litros	16	4.5	***3.6***	1	***4.44…***	50
Euros	36	***10.125***	8.10	***2.25***	10	***112.5***

$$R=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}=0.44\ldots$$

5. Hemos gastado 72 l de gasolina para recorrer 960 km. ¿Cuántos l necesitaremos para una distancia de 1500 km?

Solución: $x=\frac{1500\times 72}{960}=112.5\ l$

6. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1250 km?

Solución: $x=\frac{1250\times 6}{100}=12.5\times 6=75\ l$

7. Un libro de 420 páginas pesa 200 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 300 páginas?

Solución: $x=\frac{300\times 200}{420}\approx 142.86\text{ g.}$

8. Seis personas realizan un viaje de ocho días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 5 días?

Solución: $x=\frac{\frac{40800}{6}\times 5}{8}\ 15=\frac{6800\times 5}{8}\ 15=63750\ €$

9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15 %.

Solución: $\left(430+\frac{21}{100}430\right)-\left(430+\frac{21}{100}430\right)\frac{15}{100}$ ***= 442.255 € ≈ 442.26 €.***

10. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones: a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8}=\frac{x}{60}$

Solución: $x=\frac{3000}{24}=125$ ***b)*** $x=\frac{80\times 46}{12}=306.66\ldots$ ***c)*** $x=\frac{60\times 3.6}{12.8}=16.875$

11. Dos pantalones nos costaron 32 €, ¿cuánto pagaremos por 5 pantalones?

Solución: $x=\frac{32\times 5}{2}=80$ €.

12. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 127 € he pagado 111 €. Me han aplicado un 12.6 % de descuento

b) Me han descontado el 12 % de una factura de 414.77 € y he pagado 365 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 15 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento? 666.67 €

13. La distancia real entre dos pueblos es 18.5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

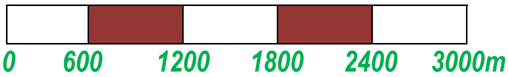
Solución: La escala es 1:185000

14. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 300 presenta una altura de 12 cm?

Solución: $h=300\times 12=3600\ cm=36\ m$

15. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

Solución:



16. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 6 cm y 14 cm. Si está dibujado a escala 1 : 40, calcula sus medidas reales.

Solución: $6 \times 40 = 240 \ cm$, $14 \times 40 = 560 \ cm$

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

17. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Magnitud A	36	0.09		12	
Magnitud B	0.25		6		72

Solución:

Magnitud A	***36***	***0.09***	***1.5***	***12***	***0.125***
Magnitud B	***0.25***	***100***	***6***	***0.75***	***72***

$$k' = 36 \times 0.25 = 9$$

18. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 6 paneles de 2.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 1.5 m de largo?

Solución: $x = \frac{2.25 \times 6}{1.5} = 9$ ***paneles.***

19. Para llenar un depósito se abren tres grifos que lanzan 2 litros por minuto cada uno y tardan 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 grifos similares que lanzan 5 litros por minuto cada uno?

Solución: $x = \frac{3 \times 2 \times 6}{4 \times 5} = 1.8 \ h.$ ***Se tardará una hora y 48 minutos.***

20. Tres máquinas fabrican 1200 piezas funcionando 5 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 6000 piezas durante 9 horas diarias?

Solución: Suponiendo que las tres máquinas fabrican 1200 piezas juntas, cada máquina fabrica 400 piezas las 5 horas, luego fabrica 80 piezas por hora. Llamamos x al número de máquinas, y 80 por 90 por el número de máquinas debe ser 6000, $80\,x\,9 = 6000, x = \frac{6000}{720} \approx 8.3$. ***Como el número de máquinas es entero, 9 máquinas.***

21. En la construcción de un puente de 900 m se han utilizado 250 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 75 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

Solución: $\frac{900}{75} = 12 \ m.$

22. En un huerto ecológico se utilizan 3000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 10 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

Solución: $x = \frac{3000 \times 10}{15} = 2000 \ kg$

23. Ese mismo huerto necesita 1200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?

Solución: $x = \frac{1200}{\frac{1}{2}} = 2400 \, cajas$, $x = \frac{1200}{2} = 600 \ cajas$

3. REPARTOS PROPORCIONALES

24. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Solución: $\frac{18000}{40}10 = 4500\ €$, $\frac{18000}{40}6 = 2700\ €$, $\frac{18000}{40}12 = 5400\ €$,
$\frac{18000}{40}7 = 3150\ €$, $\frac{18000}{40}5 = 2250\ €$

25. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 6, 5, 2, y 1 error, deben repartirse los 1400 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

Solución: $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{30}+\frac{6}{30}+\frac{15}{30}+\frac{30}{30}=\frac{56}{30}$ ***. Entonces reciben:***
$\frac{1400}{56}5 = 125\ puntos$, $\frac{1400}{56}6 = 150\ puntos$, $\frac{1400}{56}15 = 375\ puntos$, $\frac{1400}{56}30 = 750\ puntos$

26. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 22200 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Solución: $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}=\frac{15}{180}+\frac{12}{180}+\frac{10}{180}=\frac{37}{180}$ ***. Entonces reciben:***
$\frac{22200}{37}15 = 9000\ €$, $\frac{22200}{37}12 = 7200\ €$, $\frac{22200}{37}10 = 6000\ €$

27. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

Solución: $31500\,\frac{20000}{105000} = 6000\ €$, $31500\,\frac{34000}{105000} = 10200\ €$, $31500\,\frac{51000}{105000} = 15300\ €$

28. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg y 5.20 kg a 6 €/kg.

Solución: $\frac{3{,}5\cdot 4{,}8+5{,}2\cdot 6}{3{,}5+5{,}2}=$ ***5.517… € ≈ 5.52 €.***

29. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2.40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1.80 €/l para obtener una mezcla a 2.13 €/l?

Solución: $\frac{x\cdot 2{,}4+1{,}8\cdot 4}{x+4}=2{,}13\ , x=\frac{1{,}32}{0{,}27}\approx 4{,}89\ l.$

30. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 110 g y contiene 82 g de oro puro.

Solución: $\frac{82}{110}\approx 0{,}74$

31. ¿Cuántos quilates, aproximadamente tiene la joya anterior?

Solución: $\frac{82}{110}24 = 17.8909 \approx 17.89$

CURIOSIDADES. REVISTA

- La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Solución: k³ = 8 000 000/1 luego k = 200. Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá 300/200 = 1.5 m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!

- En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?

Solución: Área de la primera: 400π. Área de la segunda: 1600π. Mejor precio la segunda (es el cuádruple de tamaño y sólo cuesta el doble)

- Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

Solución: $k^3=\frac{2}{1};k=\sqrt[3]{2}$***. Mide*** $40\sqrt[3]{2}\approx 50.39$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	6.25		0.75	1.4	
euros		15	2.25		4.5

Solución:

litros	6.25	5	0.75	1.4	1.5
euros	18.75	15	2.25	4.2	4.5

$$k = \frac{0.75}{2.25} = \frac{1}{3}$$

2. Con 76 € hemos pagado 12.5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22.5 m?

Solución: $x = \frac{22.5 \times 76}{12.5} = 136.8$ €

3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos los meses de junio y julio?

Solución: *Si consideramos que cada mes tiene 4 semanas:* $82 \times 8 = 656$ *€, si consideramos que en junio y julio hay 9 semanas, entonces 82 · 9 = 738 €. Con más precisión* $\frac{82\text{ €} \times 61}{7} \approx 714.57$€

4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2.3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?

Solución: $5 \times 10 = 50$ *sillas*

5. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?

Solución: $x = \frac{16500\text{ kg.} \times 3}{5280\text{ kg.}} \approx 9.3$. *Como el número de viajes es entero, 10 viajes*

6. Una edición de 350 libros de 210 páginas cada uno alcanza un peso total de 70 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 630 libros de 140 páginas cada uno?

Solución: $x = \frac{88200 pg. \times 70}{73500 pg.} = 84\, kg.$

7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $\frac{A}{B}$ = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	12.6			4.14	
Magnitud B		9	0.1		2.7

Solución:

Magnitud A	12.6	16.2	0.18	4.14	4.86
Magnitud B	7	9	0.1	2.3	2.7

8. El modelo de teléfono móvil, que costaba 285 € + IVA, está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

Solución: $\left(285 + 285\,\frac{21}{100}\right) - 285\,\frac{121}{100}\,\frac{15}{100} \approx 293.12$ €

9. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?

Solución: $1520 + 1520\,\frac{12}{100} = 1702{,}40$ €

10. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1820 € si finalmente se pagaron 1274 €?

Solución: $1820 - 1820\,\frac{x}{100} = 1274\ ;\ x = 30\%$

11. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

Solución: $x - x\,\frac{22}{100} = 483.6;\ x = 620$ €

12. Por liquidar una deuda de 3500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

Solución: *Dinero ahorrado:* $3500 - 3080 = 420$ *Porcentaje:* $\frac{420}{3500}100 = 12\%$

13. El precio de un viaje se anuncia a 907.50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

Solución: $x + x\,\frac{21}{100} = 907.5;\ x = 750$ €

14. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47.12 €?

Solución: $38 + 38\,\frac{x}{100} = 47.12;\ x = 24\%$

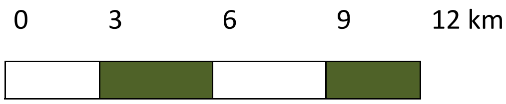
15. Un mapa está dibujado a escala 1:700000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

Solución: $\frac{2100000\ cm}{700000} = 3\ cm$

16. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

Solución: $\frac{10}{34000000\ cm} = 1 : 3400000$

17. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm



Solución: Cada centímetro representa 3 km = 300000 cm, luego es 1:300000; 21 cm serán $21 \times 3 = 63\,\text{km}$

18. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

Solución:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho	6 km largo y 1.25 km ancho	1:25000
6 cm	15 km	1:250000
1.5 cm	450 m	1:30000

19. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7.5		3.6	
Magnitud B		12	0.18		10

Solución:

Magnitud A	4	7.5	500	3.6	9
Magnitud B	22.5	12	0.18	25	10

$k' = 7.5 \times 12 = 90$

20. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

Solución: Espacio recorrido: $80 \times 5{,}25 = 420$. **Velocidad:** $\frac{420}{4} = 105\ km/h$

21. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5.4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	18		9		10.8
B		0.03		2.7	

Solución:

A	18	180	9	2	10.8
B	0.333	0.03	0.6	2.7	0.5

22. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si vende 60 vacas, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?

Solución: $9\,\frac{240}{180} = 12\ semanas$ $\quad 9\,\frac{240}{270} = 8\ semanas$ $\quad 9\,\frac{4}{3} = 12\ semanas$

23. Con doce paquetes de 3.5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

Solución: Número de kg: $3.5 \times 12 = 42$. **Número de paquetes:** $\frac{42}{2} = 21$

24. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

Solución: Inversamente proporcionales (cuando disminuye A aumenta B)

A	24	8	0.4	6	3.6	50
B	3	9	180	12	20	1.44

25. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

Solución: $15\,\frac{8}{7.5} = 16$ operarios

26. En un almacén se guardan reservas de comida para 80 personas durante 15 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 4 raciones diarias?

Solución: Número total de raciones: $3 \times 15 = 45$. *Número total de raciones para* x *días:* $4x$. $4x = 45\,\frac{80}{75};\ x = 12$

27. Diez operarios instalan 3600 m de valla en 6 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5040 m de valla?

Solución: Metros por día que instalan los 10 operarios: $\frac{360}{6} = 60$

Metros por día que instalan los 12 operarios: $\frac{600 \times 12}{10} = 720$

Número de días: $\frac{5040}{720} = 7$

28. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

Solución: $168000\,\frac{120}{240} = 84000$ €. $168000\,\frac{78}{240} = 54600$ €. $168000\,\frac{42}{240} = 29400$ €

29. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

Solución: $336\,\frac{160}{420} = 128$. $336\,\frac{140}{420} = 112$. $336\,\frac{120}{420} = 96$

30. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Solución: Euros por jornada: $\frac{3120}{52} = 60$.

Lo que reciben: $22 \times 60 = 1320$ €; $16 \times 60 = 960$ €; $14 \times 60 = 840$ €

31. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

Solución: $\frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{5}{90} + \frac{3}{90} + \frac{2}{90} = \frac{10}{90}$

$4350\,\frac{5}{10} = 2175$, $4350\,\frac{3}{10} = 1305$, $4350\,\frac{2}{10} = 870$

32. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

Hay distintas formas de interpretar este problema. Veamos diferentes soluciones:

Solución 1: $177.5\,\frac{3}{35}\approx 15.21$ €, $177.5\,\frac{5}{35}\approx 25.36$ €, $177.5\,\frac{7}{35}=35.5$ €, $177.5\,\frac{8}{35}\approx 40.57$ €, $177.5\,\frac{12}{35}\approx 60.86$ €.

Solución 2: Como el suplemento nocturno es lineal, cada uno paga 4 € de suplemento. Los 157.5 € salen a 4.5 €/km. De esta manera pagan respectivamente:

13.5 + 4 = 17.5 €; 22.5 + 4 = 26.5 €; 31.5 + 4 = 35.5 €; 36 + 4 = 40 €; 54 + 4 = 58 €.

Solución 3: Como el suplemento nocturno es lineal, cada uno paga 4 € de suplemento. El microbús recorre un total de 12 km y los viajeros van bajando cuando llegan a su destino. El precio por kilómetro sale a 13.125 €. Los primeros 3 km los pagan entre cinco. 13.125 : 5 = 2.625 €/km.

El primer viajero paga 4 + 3 · 2.625 ≈ 11.88 €.

Los siguientes 2 km los pagan entre cuatro. 13.125 : 4 = 3.28125 €/km.

El segundo viajero paga 4 + 3 · 2.625 + 2 · 3.28125 ≈ 18.44 €.

Los siguientes 2 km los pagan entre tres. 13.125 : 3 = 4.375 €/km.

El tercer viajero paga 4 + 3 · 2.625 + 2 · 3.28125 + 2 · 4.345 ≈ 27.19 €.

El siguiente km lo pagan entre dos. 13.125 : 2 = 6.5625 €/km.

El cuarto viajero paga 4 + 3 · 2.625 + 2 · 3.28125 + 2 · 4.345 + 6.5625 = 33.75 €.

Los últimos cuatro km los hace el quinto viajero solo. Tiene que pagar

4 + 3 · 2.625 + 2 · 3.28125 + 2 · 4.345 + 6.5625 + 4 · 13.125 = 86.25 €

De esta última forma sobra un céntimo. Se le puede dar de propina al conductor o guardar para cambiar los redondeos de otro viaje.

33. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 20 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

Solución: 15 + 9 + 12 = 36; $2350000\,\frac{15}{36}=9791666.67$ €, $2350000\,\frac{9}{36}=5875000$ €,

$$2350000\,\frac{12}{36}=7833333.33\text{ €}$$

34. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de anacardos a 18 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

Solución: Precio por kg de la mezcla: $\frac{3\times14+1.5\times6+1.75\times18}{3+1.5+1.75}=13.2$ €. ***Precio del paquete:*** $\frac{13.2}{4}=3.3$ €

35. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

Solución: Precio por litro de la mezcla: $\frac{8\times2.5+15\times1.6+5\times1.2}{8+15+5}=\frac{25}{14}\approx 1.79$ €.

Precio de la botella: $1.79\,\frac{3}{2}=2.69$ € ***o mejor*** $\frac{25}{14}\cdot\frac{3}{2}=\frac{75}{28}$ €.

Con el aumento: $2.69+2.69\,\frac{40}{100}\approx 3.75$ € ***o mejor*** $\frac{75}{28}\cdot\left(1+\frac{40}{100}\right)=3.75$ €

36. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4.2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

Solución: $\frac{5\times18+19\times4.2+12\times8}{5+19+12}=7.38$ € ***por kilo***

37. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280.5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

Solución: $Ley=\frac{peso\,metal\,puro}{peso\,total}=\frac{280.5}{340}\approx 0.825$

38. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0.900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0.950 de ley y 20 g de 0.750 de ley?

Solución: Gramos de oro de la primera: $0{,}95\times60=57$. ***Gramos de oro de la segunda:*** $0{,}75\times20=15$.

Gramos de oro de la joya: $57+15=72\,g$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0.75		4.5	100
B		15	6		

a) 160; 0.3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

Solución: a)

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:

a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €

Solución: c)

3. Un artículo que costaba 1600 € se ha rebajado a 1400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 12.5 % b) 14 % c) 15.625 % d) 16.25 %

Solución: a)

4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas

Solución: c)

5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:

a) 16 t y 5 t b) 12.8 t y 16 t c) 16 t y 12.8 t d) 16 t y 11 t

Solución: c)

6. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 3.4 cm equivalen a 1.02 km es:

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

Solución: c)

7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

Solución: b)

8. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1.2 €/kg, 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1.12€ b) 0.98 € c) 1.03€ d) 1.05€

Solución: d)

9. La ley de una aleación es 0.855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d)306 g

Solución: a)

CAPÍTULO 7: EDUCACIÓN FINANCIERA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.

Solución:

$$I = \frac{10\,000 \cdot 3 \cdot 750}{100 \cdot 365} = 616{,}43\ €$$

2. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80% durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \qquad 777{,}6 = \frac{C \cdot 1.8 \cdot 6}{100}; \quad C = 7\,200€$$

3. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 100 000 euros al 2 % durante un año.

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{100\,000 \cdot 2}{100} = 2\,000\ €$$

$$C_f = C_i + i \quad C_f = 100\,000 + 2\,000 = 102\,000\ €$$

4. Calcula el interés simple de un capital de 20 000 € invertidos durante 6 meses al 5 % anual.

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 12} = \frac{20\,000 \cdot 5 \cdot 3}{100 \cdot 12} = 250\ €$$

5. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 80 000 euros al 8 % durante 5 meses.

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 12} = \frac{80\,000 \cdot 8 \cdot 5}{100 \cdot 12} = 2\,666{,}6\ €$$

$$C_f = C_i + i \quad C_f = 80\,000 + 2\,666{,}6 = 82\,666{,}6\ €$$

6. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

Solución:

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$$

$$C_f = 39\,500 \cdot (1 + 0.05)^{12} = 39\,500 \cdot 1.7918\ldots = 70\,936{,}32\ €$$

7. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.

Solución:

Observa que en la hoja de cálculo hemos obtenido la misa solución: 70 936,32 €

Problema:

El capital inicial de un depósito asciende a 39500 €. El tanto aplicado es el 5% a interés compuesto durante 12 años. Calcula el capital final.

Capital inicial:	39.500
Tanto por ciento o rédito:	5
Número de años:	12

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
39500,00	1	0,05	1,05	41475,00	1975,00
41475,00	2	0,05	1,1025	43548,75	4048,75
43548,75	3	0,05	1,157625	45726,19	6226,19
45726,19	4	0,05	1,21550625	48012,50	8512,50
48012,50	5	0,05	1,276281563	50413,12	10913,12
50413,12	6	0,05	1,407100423	52933,78	13433,78
52933,78	7	0,05	1,628894627	55580,47	16080,47
55580,47	8	0,05	1,979931599	58359,49	18859,49
58359,49	9	0,05	2,526950195	61277,46	21777,46
61277,46	10	0,05	3,555672688	64341,34	24841,34
64341,34	11	0,05	5,791816136	67558,40	28058,40
67558,40	12	0,05	11,46739979	70936,32	31436,32

8. Teniendo un capital inicial de 50 000 € y un capital final de 52 020 €, ¿cuántos años deben pasar para alcanzar dicho capital final al 2 %?

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$52\,020 = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^2$; $\frac{52\,020}{50\,000} = (1{,}02)^n$

$1.0404 = (1{,}02)^n$ $\quad n = \frac{\log(1{,}0404)}{\log(1{,}02)} = 2$ $\quad$ ***2 años***

9. Se depositan 2 500 en un banco que reconoce una tasa de interés del 15 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 2 años?

Solución:

I anual = 0.15

Calculamos primero el interés diario

Interés mensual $= \frac{Interés\ anual}{12} = \frac{0{,}15}{12} =$ ***0,000416 diario***

Calculamos también el tiempo

n = 2 años = 360·2 = 720 días

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$C_f = 2\,500 \cdot (1 + 0{,}000416)^{720} = 2\,500 \cdot 1{,}3491... = 3\,372{,}81$ €

10. Un cliente tiene con su banco cuatro deudas con los siguientes importes: 1 000 €, 1 500 €, 3 000 € y 3 200 €, que vencen respectivamente en 2, 3, 5 y 6 años. El banco le propone sustituir la deuda por una sola a pagar a los 4 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 5 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.

Solución:

Para calcular el importe se realiza una equivalencia de estos 4 capitales junto a uno valorado en el cuarto año.

$$\frac{C_0}{(1+i)^{n_{C0}}} + \frac{C_1}{(1+i)^{n_{C1}}} + \frac{C_2}{(1+i)^{n_{C2}}} \dots\dots = \frac{C}{(1+i)^{n_C}}$$

$$\frac{1\,000}{(1+0,05)^2} + \frac{1\,500}{(1+0,05)^3} + \frac{3\,000}{(1+0,05)^5} + \frac{3\,200}{(1+0,05)^6} = \frac{C}{(1+0,05)^4}$$

C = 8 437,1371 €

A un interés del 5%, es equivalente una deuda a 4 años por un valor de 8 437,1371 €, que cuatro deudas de 1 000 €, 1 500 €, 3 000 € y 3 200 €, a 2, 3, 5 y 6 años respectivamente.

11. Un banco concede un préstamo por 10 000 € para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3 %. Calcula, usando Excel:
    a. Importe de la cuota de amortización constante
    b. Capital pendiente de amortización al principio del segundo año
    c. Anualidad del tercer año
    d. Capital amortizado en los cuatro primeros años
    e. Cuota de interés del segundo año

Solución:

Cuotas de amortización constantes

Problema:

Un banco concede un préstamo por 10 000€ para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3%. Calcula:

Capital inicial:	10.000
Tanto por ciento o rédito:	0,03
Número de años:	5
Cuota de amortización A	2000

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZAT	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	10.000
1	2300	300	2000	2000	8.000
2	2240	240	2000	4000	6.000
3	2180	180	2000	6000	4.000
4	2120	120	2000	8000	2.000
5	2060	60	2000	10000	0

a	2000
b	8.000
c	2180
d	8000
e	240

a. Importe de la cuota de amortización constante = 2 000 €
b. Capital pendiente de amortización al principio del segundo año = 8 000 €
c. Anualidad del tercer año = 2 180 €
d. Capital amortizado en los cuatro primeros años = 8 000 €
e. Cuota de interés del segundo año = 240 €

12. Un cliente necesita 155 400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5 %. Proporciona al cliente su hoja de amortización.

Solución:

Problema:

Un cliente necesita 155.400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5%. Proporciona al cliente su hoja de amortización.

Capital inicial:	155.400
Tanto por ciento o rédito:	0,045
Número de años:	20
Cuota de amortización A	7770

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZAT	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	155.400
1	14763	6993	7770	7770	147.630
2	14413,35	6643,35	7770	15540	139.860
3	14063,7	6293,7	7770	23310	132.090
4	13714,05	5944,05	7770	31080	124.320
5	13364,4	5594,4	7770	38850	116.550
6	13014,75	5244,75	7770	46620	108.780
7	12665,1	4895,1	7770	54390	101.010
8	12315,45	4545,45	7770	62160	93.240
9	11965,8	4195,8	7770	69930	85.470
10	11616,15	3846,15	7770	77700	77.700
11	11266,5	3496,5	7770	85470	69.930
12	10916,85	3146,85	7770	93240	62.160
13	10567,2	2797,2	7770	101010	54.390
14	10217,55	2447,55	7770	108780	46.620
15	9867,9	2097,9	7770	116550	38.850
16	9518,25	1748,25	7770	124320	31.080
17	9168,6	1398,6	7770	132090	23.310
18	8818,95	1048,95	7770	139860	15.540
19	8469,3	699,3	7770	147630	7.770
20	8119,65	349,65	7770	155400	0

13. Una caja de ahorros concede un préstamo a una familia para comprar un coche deportivo. El capital inicial prestado asciende a 86 432 euros a un tipo de interés del 2,25 % anual durante 10 años. Las cuotas de amortización son constantes. Selecciona la respuesta correcta en cada apartado:
    a. Capital pendiente al final del año 10
        a. 43 216 b. 0 c. 86.432
    b. La cuota de intereses del año 5
        a. 1 166,832 b. 10 587,92 c. 972,36
    c. La anualidad año 6
        a. 9 032,144 b. 9 421,088 c. 9 615,56
    d. La cuota de amortización del año 8
        a. 8 643 b. 8 643,2 c. 5 664
    e. Capital pendiente al principio del año 3
        a. 86 432 b. 77 789 c. 69 146

Solución:

a. Capital pendiente al final del año 10
   a. 43.216 b. 0 c. 86.432
b. La cuota de intereses del año 5
   a. 1 166,832 b. 10 587,92 c.972,36
c. La anualidad año 6
   a. 9 032,144 b. 9 421,088 c. 9 615,56
d. La cuota de amortización del año 8
   a. 8 643 b. 8 643,2 c. 5 664
e. Capital pendiente al principio del año 3
   a. 86 432 b. 77 789 c. 69 146

14. Señala qué bancos son los que no cobran comisiones o las cobran muy reducidas y determina también un par de ejemplos de bancos que cobren altas comisiones.

Solución:

Los bancos digitales no suelen cobrar comisiones. Ejemplo: Evobanco.

Los grandes bancos (CaixaBank, Santander...) son los que más cobran.

15. Relaciona cada comisión con su definición:

Comisión de mantenimiento	Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad
Comisión de descubierto	Aplicada por disponer de una tarjeta
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta
Comisión por uso de oficinas	. Aplicada por el banco por estar en números rojos
Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas.	Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias
Comisión por transferencias	Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta
Comisión de administración.	Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta

Solución:

Comisión de mantenimiento	***Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta***
Comisión de administración	***Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento***
Comisión por transferencias	***Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta***
Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas	***Aplicada por disponer de una tarjeta***
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	***Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta***
Comisión de descubierto	***Aplicada por el banco por estar en números rojos***
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	***Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad***
Comisión por uso de oficinas	***Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias***

16. La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:
   - *Si factura menos de 2 500 € al mes, cobrará 3,4% + 0,35 € por cada transacción.*
   - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,9 % + 0,35€ por cada transacción.*
   - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,7 % + 0,35 € por cada transacción.*
   - *Más de 50 000€ al mes, cobrará 2,4 % + 0,35 € por cada transacción.*

   Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a PayPal de comisiones:
   - *Factura 500 € realizando 2 transacciones.*
   - *Factura 3 000 € realizando 10 transacciones.*
   - *Factura 8 500 € realizando 500 transacciones.*
   - *Factura 76 000 € realizando 600 transacciones.*

Solución:

a. (500 · 0,034) + (2 · 0,35) = 17,7 €
b. (3 000 · 0,029) + (10 · 0,35) = 90,5 €
c. (8 500 · 0,027) + (500 · 0,35) = 404,5 €
d. (76 000 · 0,024) + (600 · 0,35) = 2 034 €

17. Una chica desea realizar varias transferencias desde su banca online. La primera de 30 € a su madre, no le urge que le llegue el dinero. La segunda a su casera de 365 €, esta debe llegarle en el mismo día. La tercera para pagar la letra de su coche a su financiera de EE. UU de 250 € que debe llegar a la financiera en menos de 24 horas. Su banco cobra comisiones por realizar transferencias urgentes de 2,5 % si son nacionales y 4 % si lo son al extranjero. Calcula:
   a. El importe total de comisiones que va a pagar.
   b. El importe total que va a pagar.

Solución:

(365 · 0,025) + (250 · 0,04) = 19,125 €
(365 · 0,025) + (250 · 0,04) + 30 + 365 + 250 = 664,125 €

18. ¿Crees que tiene futuro un negocio como éste en el sistema financiero actual?

Solución:

Respuesta abierta

19. Busca en Internet algún ejemplo actual de entidades que desarrollan este tipo de banca y escríbelo. Coméntalo en clase con tus compañeros.

Solución:

Respuesta abierta y manipulativa

20. Si el euro se deprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España?, ¿podrán comprar más o menos en nuestro país? Si el tipo de cambio dólar/euro disminuye desde 1,35 hasta 1,05, ¿qué significa para los europeos?

Solución:

Comprar en Europa es más barato para USA, y comprar en USA es más caro para los europeos. Pues lo contrario nos pasa a los europeos, antes con un euro conseguíamos 1,35 dólares, pero ahora solo conseguimos 1,05. Es decir, cuando vayamos allí a comprar tendremos menos dólares y podremos comprar menos cosas.

21. Si el euro se aprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España? Si el tipo de cambio dólar/euro pasa de 1,35 hasta 1,50, ¿qué significa para los europeos?

Solución:

Un aumento del tipo de cambio $/€ significa que hay que dar más por una unidad de dólar para obtener un euro. Si el tipo de cambio $/€ pasa de 1,25 a 1,40 decimos que el euro ha ganado valor respecto al dólar. Con un euro apreciado, los turistas y los compradores americanos tendrán que dar más dólares para conseguir un euro (1,40 en lugar de 1,25). Por tanto, con el mismo dinero que antes, tendrán menos euros y podrán comprar menos en Europa. Los europeos, sin embargo, ahora obtenemos más dólares con un euro. Por tanto, con el mismo dinero podremos comprar más cosas allí. Los productos de USA son más baratos para Europa.

22. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, soles, bolivianos, yenes y Dirhams.

Solución:

A libras

$$1\ 200\ € \cdot \frac{0{,}86\ £}{1€} = \frac{1\ 200 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{1€} = 1\ 032\ £$$

A soles

$$1\ 200\ € \cdot \frac{3{,}6\ S/}{1€} = \frac{1\ 200 \cdot 3{,}6}{1} \cdot \frac{€ \cdot S/}{1€} = 4\ 320\ S/$$

A bolivianos

$$1\ 200\ € \cdot \frac{9\ Bs}{1€} = \frac{1\ 200 \cdot 9}{1} \cdot \frac{€ \cdot Bs}{1€} = 10\ 800\ Bs$$

A yenes

$$1\ 200\ € \cdot \frac{131\ ¥}{1€} = \frac{1\ 200 \cdot 131}{1} \cdot \frac{€ \cdot ¥}{1€} = 157\ 200 ¥$$

A dirhams

$$1\ 200\ € \cdot \frac{11.1\ MAD}{1€} = \frac{1\ 200 \cdot 11{,}1}{1} \cdot \frac{€ \cdot MAD}{1€} = 13\ 320\ MAD$$

23. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 $ b) 4 051,5درهم c) 104 800 ¥ (yenes) d) 5 103 Bs

Solución:

390 $ a €

$$390\ \$ \cdot \frac{1€}{1{,}3\$} = \frac{390 \cdot 1}{1{,}3} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} = 300€$$

4 051.5درهم MAD

$$4\ 051{,}5\ MAD \cdot \frac{1€}{1{,}1MAD} = \frac{4051{,}1 \cdot 1}{1{,}1} \cdot \frac{MAD \cdot €}{MAD} = 3\ 683{,}18€$$

104 800 ¥ (yenes)

$$104\ 800\ ¥ \cdot \frac{1€}{131\ ¥} = \frac{104\ 800 \cdot 1}{131} \cdot \frac{¥ \cdot €}{¥} = 800\ €$$

5 103 Bs

$$5\ 103\ Bs \cdot \frac{1€}{9\ Bs} = \frac{5103 \cdot 1}{9} \cdot \frac{Ns \cdot €}{Bs} = 567\ €$$

24. Con las equivalencias anteriores. Jessica se quiere comprar una *Tablet*. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la *Tablet*?

Solución:

En España: 350 €

En Estados Unidos:

Pasamos los dólares a euros para comparar: 400 + 60 = 460 $ a €

$$460\ \$ \cdot \frac{1€}{1{,}3\$} = \frac{460 \cdot 1}{1{,}3} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} = 353{,}84€$$

En China:

Pasamos los yuanes a euros para comparar: 2 700 + 20 = 2 720 ¥ a €

$$2\ 700\ ¥ \cdot \frac{1€}{8¥} = \frac{2\ 700 \cdot 1}{8} \cdot \frac{¥ \cdot €}{¥} = 337{,}5€$$

Es más barato comprar en China.

25. Con las equivalencias anteriores. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Tayiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

Solución:

Cambia 200 € a:

A libras:

$$200\ € \cdot \frac{0{,}86\ £}{1€} = \frac{200 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{1€} = 172\ £$$

A bolivianos

$$200\ € \cdot \frac{9\ Bs}{1€} = \frac{200 \cdot 9}{1} \cdot \frac{€ \cdot Bs}{1€} = 1\,800\ Bs$$

A yens

$$200\ € \cdot \frac{131\ ¥}{1€} = \frac{200 \cdot 131}{1} \cdot \frac{€ \cdot ¥}{1€} = 26\,200\ ¥$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe en tu cuaderno dos formas a través de las cuales harías que tu compañero/a, que nunca ha estudiado educación financiera, se conciencie de la importancia de la misma.

Solución:

Respuesta abierta: Acudiendo a un curso de educación financiera, contándole lo útil que ha sido para ti calcular los intereses que tienes que pagar cuando tienes una deuda, etc.

2. La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo), recomienda que la educación financiera se enseñe en los centros educativos. Investiga ¿cómo promueve el estudio de la educación financiera? ¿Qué ha creó en 2008 para promover su estudio?

Solución:

Ha creado la International Network on Financial Education (INFE) en 2008 para promoverla y realizar estudios relacionados con la materia.

3. Investiga y realiza un informe a ordenador sobre el Día de la Educación Financiera. ¿Qué organismos promueven su celebración en España? ¿cuál es el objetivo de su celebración?

Solución:

En España, los organismos encargados de promover la celebración del Día de la Educación Financiera son la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV), en colaboración con el Banco de España; todo ello, bajo los principios de la OCDE.

El objetivo de su celebración es concienciar a la sociedad sobre la necesidad de tener educación financiera para comprender mínimamente la economía que nos rodea y entender el funcionamiento del dinero, así como la importancia del ahorro.

4. Calcula el interés simple de un capital de 5 200 € invertido durante 89 días al 4,25 % anual.

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{5\,200 \cdot 4{,}25 \cdot 89}{100 \cdot 360} = 54{,}636\ €$$

5. Calcula el capital final obtenido a partir de los datos del ejercicio anterior.

Solución:

$$C_f = C_i + i \quad C_f = 5\,200 + 54{,}636 = 5\,254.636\ €$$

6. Calcula el interés simple que producen 1 000 € al 3,05 % durante un año.

Solución:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}\ I = \frac{1\,000 \cdot 3{,}05}{100} = 30.5\ €$$

7. Calcula el capital que hay que depositar al 0,75 % durante 100 días para obtener un interés simple de 550 €.

Solución:

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 360}$ $\quad 550 = \frac{C \cdot 0{,}75 \cdot 100}{100 \cdot 360}$ $\quad 550 \cdot (100 \cdot 360) = C \cdot 0{,}75 \cdot 100$

$19\,800\,000 = C \cdot 75 \quad C = 264\,000$ €

8. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 40 € a partir de un capital de 2 000 € al 2 % anual.

Solución:

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \quad 40 = \frac{2\,000 \cdot 2 \cdot t}{100} \quad 4\,000 = 4\,000 \cdot t \quad t = 1$ año

9. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 68,75 € a partir de un capital de 5 500 € al 5 % diario.

Solución:

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 360} = \quad 68{,}75 = \frac{5\,500 \cdot 5 \cdot t}{100 \cdot 360} \quad t = 3$ meses

10. Calcula el capital final obtenido al depositar 9 000 euros al 7,7 % durante 8 meses.

Solución:

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100 \cdot 12} = \frac{90\,000 \cdot 7{,}7 \cdot 8}{100 \cdot 12} = 4\,620$ €

$C_f = C_i + i \quad C_f = 90\,000 + 4\,620 = 94\,620$ €

11. Si el capital inicial de un depósito asciende a 105 000 €. El tanto por ciento aplicado es el 5 % a interés compuesto durante 10 años. Calcula el capital final.

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$C_f = 105\,000 \cdot (1 + 0.05)^{10} = 105\,000 \cdot 1{,}6288... = 171\,033{,}93$ €

12. Al 4 % de interés compuesto durante 9 años, ¿cuál será el capital inicial que tendremos que depositar para obtener un capital final de 43 000 €?

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n; \quad 43\,000 = C_i \cdot (1 + 0{,}04)^9; \quad \frac{43\,000}{(1 + 0{,}04)9} = C_i; \quad C_i = 30\,211{,}22$ €

13. Al 2 % de interés compuesto durante 7 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 25 300 €?

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$C_f = 25\,300 \cdot (1 + 0{,}02)^7 = 25\,300 \cdot 1{,}1486... = 29\,061{,}74$ €

14. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.

Solución: Naturalmente obtenemos la misma solución: ***29 061,74 €***

Problema:

El capital inicial de un depósito asciende a 25300 €. El tanto aplicado es el 2% a interés compuesto durante 7 años. Calcula el capital final.

Capital inicial:	25.300
Tanto por ciento o rédito:	2
Número de años:	7

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
25300,00	1	0,02	1,02	25806,00	506,00
25806,00	2	0,02	1,0404	26322,12	1022,12
26322,12	3	0,02	1,061208	26848,56	1548,56
26848,56	4	0,02	1,08243216	27385,53	2085,53
27385,53	5	0,02	1,104080803	27933,24	2633,24
27933,24	6	0,02	1,148685668	28491,91	3191,91
28491,91	7	0,02	1,21899442	29061,75	3761,75

15. Si se pretende obtener un capital final de 60 500 €, cuánto será el capital inicial que se debe depositar al 3 % durante 3 años para conseguirlo?

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$60\,500 = C_i \cdot (1 + 0{,}03)^3 = \frac{60\,500}{(1{,}03)3} = C_i$

$C_i = 55366{,}07$ €

16. ¿A qué tipo de interés se deben depositar 2 000 € durante 4 años para conseguir un capital final de 4 000 €?

Solución:

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n \qquad 4\,000 = 2\,000 \cdot (1 + i)^4 \qquad \frac{4\,000}{2\,000} = (1 + i)^4 \qquad I = 0{,}1892$

17. Usando Excel, teniendo un capital inicial de 13 500 € y un 3,5 % de rédito durante 17 años. Calcula:
    a. El interés total al final del año 8.
    b. El capital inicial en el año 13.
    c. El capital final obtenido al finalizar el año 17.

Solución:

a. El interés total al final del año 8 ***Solución: 4 276,92***
b. El capital inicial en el año 13 ***Solución: 20 399,43***
c. El capital final obtenido al finalizar el año 17 ***Solución: 24 228,12***

Problema:

El capital inicial de un depósito asciende a 13500 €. El tanto aplicado es el 3,5% a interés compuesto durante 17 años. Calcula el capital final.

Capital inicial:	13.500
Tanto por ciento o rédito:	3,5
Número de años:	17

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
13500,00	1	0,035	1,035	13972,50	472,50
13972,50	2	0,035	1,071225	14461,54	961,54
14461,54	3	0,035	1,108717875	14967,69	1467,69
14967,69	4	0,035	1,147523001	15491,56	1991,56
15491,56	5	0,035	1,187686306	16033,77	2533,77
16033,77	6	0,035	1,272279263	16594,95	3094,95
16594,95	7	0,035	1,410598761	17175,77	3675,77
17175,77	8	0,035	1,618694522	17776,92	4276,92
17776,92	9	0,035	1,922501317	18399,11	4899,11
18399,11	10	0,035	2,445958559	19043,08	5543,08
19043,08	11	0,035	3,450266111	19709,59	6209,59
19709,59	12	0,035	5,584926856	20399,43	6899,43
20399,43	13	0,035	10,73702924	21113,41	7613,41
21113,41	14	0,035	26,26232856	21852,38	8352,38
21852,38	15	0,035	90,61202223	22617,21	9117,21
22617,21	16	0,035	506,0615164	23408,81	9908,81
23408,81	17	0,035	5433,597298	24228,12	10728,12

18. Se depositan 13 250 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 25 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 3 años?

Solución:

I anual = 0,25

Calculamos primero el interés diario

$\text{Interés diario} = \frac{\text{Interés anual}}{360} = \frac{0{,}25}{360} = 0{,}000694$ *diario*

Calculamos también el tiempo

$N = 3$ *años* $= 360 \cdot 3 = 1\,080$ *días*

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$C_f = 13\,250 \cdot (1 + 0{,}000694)^{1080} = 13\,250 \cdot 2{,}1154... = 2\,8029{,}50$ €

19. Se depositan 2 120 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 41 % anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 5 años?

Solución:

I anual = 0,41

Calculamos primero el interés mensual

Interés mensual $= \frac{Interés\ anual}{12} = \frac{0,41}{12} =$ ***0,03416 mensual***

Calculamos también el tiempo

n = 5 años = 60 meses

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

$C_f = 2\,120 \cdot (1 + 0,03416)^{60} = 2\,120 \cdot 7,5035... = 15\,907,4295$ €

20. Una empresa posee 2 deudas de 15 000 € y 35 000 €, que vencen respectivamente en 5 y 10 años. Pretende sustituir la deuda por una sola a pagar a los 7 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 2 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.

Solución:

Para calcular el importe se realiza una equivalencia de estos 4 capitales junto a uno valorado en el cuarto año.

$$\frac{C_0}{(1+i)^{n_{C0}}} + \frac{C_1}{(1+i)^{n_{C1}}} = \frac{C}{(1+i)^{n_C}}$$

$$\frac{15\,000}{(1+0,02)^5} + \frac{35\,000}{(1+0,02)^{10}} = \frac{C}{(1+0,02)^7}$$

C = 48 587,2817 €

Solución: A un interés del 2 %, es equivalente una deuda a 7 años por un valor de 48 587,2817 €, que dos deudas de 15 000 € y 35 000 €, a 5 y 10 años respectivamente.

21. Si un banco concede un préstamo por 36 000 € para ser amortizado en 6 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 2 %. Calcula usando fórmulas:
    a. Importe de la cuota de amortización constante
    b. Capital pendiente de amortización al principio del tercer año
    c. Anualidad del cuarto año
    d. Capital amortizado en los dos primeros años
    e. Cuota de interés del tercer año

Solución:

$C_0 = 36\,000$ ***de euros***

n = 6 años

A = constante

i = 0,02

a) $A = \frac{C_0}{n} = \frac{36\,000}{6} = 6\,000$

b) $C_3 = ?$ $\quad C_3 = C_0 - M_3$

$M_3 = 3 \cdot A$

$M_3 = 3 \cdot 6\,000 = 18\,000$

$C_3 = 36\,000 - 18\,000 = 18\,000$

c) $a_4 = ?$ $\quad a_4 = A + I_4$

Siendo: $I_4 = C_3 \cdot i$

$C_3 = C_0 - M_3$

$M_3 = 3A$

Sustituyendo:

$a_4 = 6\,000 + (36\,000 - 18\,000)\ \ 0,02$

$a_4 = 6\,360$ €

d). $M_5 = ?$ $\quad M_5 = 5A$

$M_5 = 5 \cdot 6\,000 = 30\,000$ €

e) $I_3 = ?$ $\quad I_3 = C_2 \cdot i$

$C_2 = C_1 - M_2$

$M_2 = 2A$

Sustituyendo:

$I_3 = (36\,000 - 12\,000) \cdot 0,02 = 480$

22. Realiza el ejercicio anterior usando Excel.

Solución:

Problema:

Si un banco concede un préstamo por 36 000€ para ser amortizado en 6 años con cuotas de amorti-zación constantes a un tipo de interés anual del 2%. Calcula

a.Importe de la cuota de amortización constante

b.Capital pendiente de amortización al principio del tercer año

c.Anualidad del cuarto año

d.Capital amortizado en los dos primeros años

e.Cuota de interés del tercer año

Capital inicial:	36.000
Tanto por ciento o rédito:	0,02
Número de años:	6
Cuota de amortización A	6000

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL
					PENDIENTE
0	-	-	-	-	36.000
1	6720	720	6000	6000	30.000
2	6600	600	6000	12000	24.000
3	6480	480	6000	18000	18.000
4	6360	360	6000	24000	12.000
5	6240	240	6000	30000	6.000
6	120	120	0	30000	6.000

a	6000
b	18.000
c	6360
d	30000
e	480

23. Una sucursal bancaria de la capital de tu país concede préstamos al 1,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes. Tu amiga solicita un préstamo para poder abrir un negocio. Necesita 52 300 €. Lo puede devolver en 5 años. Realiza el cuadro de amortización del préstamo.

Solución:

Cuotas de amortización constantes

Problema:

Una sucursal bancaria de la capital de tu país concede préstamos al 1,5% de interés anual, con cuotas de amortización constantes. Tu amiga solicita un préstamo para poder abrir un negocio. Necesita 52.300€.

Capital inicial:	52.300
Tanto por ciento o rédito:	0,015
Número de años:	5
Cuota de amortización A	10460

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL
					PENDIENTE
0	-	-	-	-	52300
1	11244,5	784,5	10460	10460	41840
2	11087,6	627,6	10460	20920	31380
3	10930,7	470,7	10460	31380	20920
4	10773,8	313,8	10460	41840	10460
5	10616,9	156,9	10460	52300	0

24. La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:
   a. Capital pendiente al final del año 3
      a. 36 610 b. 0 c. 24 321
   b. La cuota de intereses del año 2
      a. 706,05 b. 923,56 c. 346,83
   c. La anualidad año 7
      a. 5 543,8 b. 3 423,03 c. 6 645,32
   d. La cuota de amortización del año 9
      a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675
   e. Capital pendiente al principio del año 3
      a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675

Solución:

a) Capital pendiente al final del año 3
a. 36 610 b. 0 c. 24 321
b) La cuota de intereses del año 2
706,05 b. 923,56 c. 346,83
c) La anualidad año 7
5 543,8 b. 3 423,03 c. 6 645,32
d) La cuota de amortización del año 9
2 653 b. 5 230 c. 4 675
e) Capital pendiente al principio del año 3
2 653 b. 5 230 c. 4 675

Cuotas de amortización constantes

Problema:

La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:

Capital inicial:	52.300
Tanto por ciento o rédito:	0,015
Número de años:	10
Cuota de amortización A	5230

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	52300
1	6014,5	784,5	5230	5230	47070
2	5936,05	706,05	5230	10460	41840
3	5857,6	627,6	5230	15690	36610
4	5779,15	549,15	5230	20920	31380
5	5700,7	470,7	5230	26150	26150
6	5622,25	392,25	5230	31380	20920
7	5543,8	313,8	5230	36610	15690
8	5465,35	235,35	5230	41840	10460
9	5386,9	156,9	5230	47070	5230
10	5308,45	78,45	5230	52300	0

25. Es completamente legal que los bancos cobren comisión por sacar dinero en ventanilla. A partir de esta frase, contesta:
    a. ¿Por qué crees que lo hacen?
    b. ¿Crees que atenta contra algún tipo de cliente en especial?, ¿ a quién?
    c. En caso de haber contestado si al apartado b, ¿sabes si se está haciendo algo para remediarlo?

Solución:

a. ***Lo hacen para obtener más dinero, para evitar tener que hacer operaciones innecesarias y poder dedicarse a otras tareas, para poder reducir costes y no tener a un empleado dedicado a operaciones como esta, ya que operaciones de este tipo se pueden hacer hoy en día a través de cajeros.***

b. ***Afecta negativamente sobre todo a aquellos clientes que no se sienten familiarizados con el uso de cajeros, normalmente las personas de avanzada edad que siempre han operado con libreta de ahorros. Los mayores no solo tienen falta de habilidades digitales, también tienen mucho miedo a cometer errores y que esto les lleve a ser engañados (fraude).***

c. ***El Banco de España ha establecido que todos los consumidores tengan al menos un sistema gratuito para retirar dinero en metálico de su cuenta. En un primer momento, los bancos dejaban hasta una hora (generalmente 10:00 de la mañana) o un día a la semana para poder retirar dinero en cantidades pequeñas en la ventanilla.***

26. Para proteger a los mayores ante el abuso por comisiones el Gobierno debe de realizar una serie de acciones. Explica con tus palabras qué significan cada una de estas acciones:
    - Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios.
    - Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca.
    - Desarrollar tecnologías inclusivas
    - Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas

Solución:

- ✓ ***Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios. Que todas las personas puedan acceder a su dinero en cualquier momento sin necesidad de tener que pagar por ello.***
- ✓ ***Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca. Que se desarrollen normas para proteger a las personas mayores.***
- ✓ ***Desarrollar tecnologías inclusivas: por ejemplo, que permitan realizar operaciones en cajeros automáticos de forma similar a la de oficinas***
- ✓ ***Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas: por ejemplo cursillos gratuitos para aprender a utilizar el cajero automático.***

27. Un hombre acude a la ventanilla de su banco a realizar varias operaciones: ingresar dinero a una de sus cuentas, realizar una transferencia urgente a su hijo que vive en Alemania de 1 375 €, otra transferencia no urgente a un cliente suyo por importe de 543 €. Aprovechando que está allí, el banco le dice que debe pagar la comisión por el mantenimiento de sus tarjetas 10 €/anual y la de administración por tener abierta una cuenta con ellos 7 €/anual. Calcula el total de comisiones que ese día paga dicho hombre sabiendo que el importe de realizar transferencias urgentes es de 3,5 % y las no urgentes no suponen un gasto a los clientes.

Solución:

(1 375·0,035) + 10 + 7 = 65,125 €

28. Una entidad bancaria determina que las transferencias tendrán una comisión del 0,4 % de cada importe. Por otro lado, la comisión mínima a cobrar debe ser de 5 €. A partir de estos datos calcula el total a pagar por un cliente que realiza transferencias por valor de:
    a. 4 956 €
    b. 3,5 €
    c. 321 €
    d. 1 879,10 €

Solución:

a) Total de comisiones: (4 956 · 0,004) = 19,824 €
Total a pagar = (4 956 + 19,824) = 4 975,824 €

b) Total de comisiones: (3,5 ·0,004) = 0,0144 € al no llegar al mínimo se le cobran 5 € por comisiones.
Total a pagar = (3,5 + 5) = 8,5 €

c) Total de comisiones: (321 · 0,004) = 1.284 € al no llegar al mínimo se le cobran 5 € por comisiones.
Total a pagar = (321 + 5) = 326 €

d) Total de comisiones: (1 879,10 · 0,004) = 7,5164 €
Total a pagar = (1 879,10 + 7,5164) = 1 886,6164 €

29. La plataforma de pago GooglePay cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:
   - *Si factura menos de 1 500 € al mes, cobrará 3,2 % + 0,45 € por cada transacción.*
   - *Si factura entre 1 500 € y 12 000 € al mes, cobrará 2,6 % + 0,40 € por cada transacción.*
   - *Si factura entre 12 001 € y 99 999 € al mes, cobrará 1,8 % + 0,30 € por cada transacción.*
   - *Más de 1 000 000€ al mes, cobrará 0,5 % + 0,25 € por cada transacción.*

   Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a GooglePay de comisiones:

   a. Factura 650 € realizando 7 transacciones.
   b. Factura 5 340 € realizando 24 transacciones.
   c. Factura 45 520 € realizando 145 transacciones.
   d. Factura 111 000 € realizando 430 transacciones.

Solución:

a. (650 · 0,032) + (7 · 0,45) = 23,95 €
b. (5 340 · 0,026) + (24 · 0,40) = 148,44 €
c. (45 520 · 0,018) + (145 · 0,3) = 862,86 €
d. (111 000 · 0,005) + (430 · 0,25) = 662,5 €

30. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia 3 000 € a libras, soles, bolivianos, yenes y dirhams.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0,6	1,1	2,5	7	106	8	15

Solución:

A libras

$$3\,000\,€\cdot\frac{0{,}6\,£}{1€}=\frac{3\,000\cdot 0{,}6}{1}\cdot\frac{€\cdot £}{1€}=1\,800\,£$$

A soles

$$3\,000\,€\cdot\frac{2{,}5\,S/}{1€}=\frac{3\,000\cdot 2{,}5}{1}\cdot\frac{€\cdot S/}{1€}=7\,500\,S/$$

A bolivianos

$$3\,000\,€\cdot\frac{7\,Bs}{1€}=\frac{3\,000\cdot 7}{1}\cdot\frac{€\cdot Bs}{1€}=21\,000\,Bs$$

A yens

$$3\,000\,€\cdot\frac{106\,¥}{1€}=\frac{3\,000\cdot 106}{1}\cdot\frac{€\cdot ¥}{1€}=318\,000\,¥$$

A dirhams

$$-3000\,€\cdot\frac{15\ MAD}{1€}=\frac{3\,000\cdot 15}{1}\cdot\frac{€\cdot MAD}{1€}=45\,000\,MAD$$

31. Sara ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón si el tipo de cambio es 102 ¥? B) ¿Y al de EE. UU. si el tipo de cambio es 1,1 $? C) ¿Y al de Bolivia si el tipo de cambio es 7 Bs? Realiza los cálculos.

Solución:

Cambia 400 € a:

A dólares:

$$400\,€\cdot\frac{1.1\,\$}{1€}=\frac{400\cdot 1{,}1}{1}\cdot\frac{€\cdot \$}{1€}=440\,\$$$

A bolivianos

$$400\,€\cdot\frac{9\,Bs}{1€}=\frac{400\cdot 9}{1}\cdot\frac{€\cdot Bs}{1€}=3\,600\,Bs$$

A yenes

$$400\,€\cdot\frac{131\,¥}{1€}=\frac{400\cdot 131}{1}\cdot\frac{€\cdot ¥}{1€}=52\,400\,¥$$

32. Joaquín se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 \$ y 50 \$ por el transporte, en China 4 550 ¥ y 0 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil? El tipo de cambio en Estados Unidos es de 1,2 dólares y el de China es de 6 yuanes.

Solución:

En España: 500 €

En Estados Unidos:

Pasamos los dólares a euros para comparar: 500 + 50 = 550 \$ a €

$$550\ \$ \cdot \frac{1€}{1{,}2\$} = \frac{550 \cdot 1}{1{,}2} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} = 458{,}3\ €$$

En China:

Pasamos los yuanes a euros para comparar:

$$4\ 550\ ¥ \cdot \frac{1€}{8¥} = \frac{4\ 550 \cdot 1}{6} \cdot \frac{¥ \cdot €}{¥} = 758{,}3\ €$$

Es más barato comprar ese móvil en Estados Unidos.

33. En el cuadro siguiente se presentan los tipos de cambio bilaterales de un grupo de monedas respecto al dólar. A partir de esta primera columna, calcúlese el resto de las relaciones entre las monedas utilizando los tipos de cambio cruzados.

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-			
Canadá	0,613	-		
Zona-euro	0,886		-	
Gran Bretaña	1,564			-

Solución:

Si el tipo de cambio del dólar EEUU respecto al dólar canadiense es 0,613. El del dólar canadiense respecto al dólar de EE.UU se calculará invirtiéndolo:

$$\frac{1\ \$}{0{,}613\ \$/\$can.} = 1{,}631\ \ \$can./\$$$

Lo mismo se realiza respecto al euro:

$$\frac{1}{0{,}886\ \$/€} = 1{,}1286\ €/\$$$

Lo mismo se realiza respecto a la libra:

$$\frac{1}{1{,}564\ \$/£} = 0{,}6393\ €/£$$

Para completar el resto de la tabla como tenemos el cambio de dos monedas respecto al dólar podemos obtener el cambio cruzado de esas dos monedas.

Utilizando el tipo de cambio \$/\$can. Y el tipo de cambio \$/€ se puede obtener el tipo cruzado \$can./€:

$$\frac{0{,}886\ \$/€}{€\ 0{,}613\ \$/\$can.} = \frac{0{,}886}{0{,}613} \cdot \frac{\$/€}{\$/\$can.} = 1{,}445$$

Por tanto, así se calcula el equivalente en dólares canadienses de un euro. También de forma inmediata, se puede conocer el cambio del euro respecto al dólar canadiense. Basta con invertir el tipo de cambio anterior:

$$\frac{1}{1{,}445\ \$\ can./€} = 0{,}692\ €/\$can.$$

En cuanto a la libra esterlina, utilizando el tipo de cambio \$/£ y \$/\$can. se calcularía la relación entre la divisa canadiense y la libra:

$$\frac{1{,}564\ \$/£}{0{,}613\ \$/\$can.} = 2{,}5513\ \$can./£$$

Invirtiendo el cálculo anterior, se obtiene el tipo de cambio £/\$can.:

$$\frac{1}{2{,}5513\ \$can/£} = 0{,}3919$$

Que se colocaría en la columna de Gran Bretaña, segunda fila.

Por último, faltaría calcular las relaciones £/€ y viceversa. Utilizando los tipos de cambio \$/£ y \$/€:

$$\frac{1{,}564\ \$/£}{0{,}886\ \$/€} = 1{,}7652\ €/£$$

$$\frac{1}{1{,}7652\ €/£} = 0{,}5665\ £/€$$

Por tanto, la tabla anterior quedaría:

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-	1,631	1,1286	0,6393
Canadá	0,713	-	0,692	0,3919
Zona-euro	0,892	1,445	-	0,5665
Gran Bretaña	1,665	2,5513	1,7652	-

AUTOEVALUACIÓN

1. "Un euro hoy es mejor que……………mañana".
   a) un dólar hoy b) un dólar mañana c) un coche hoy d) un euro mañana

Solución: d)

2. Uno de los principales motivos por los que se cobran intereses es:
   a) la liquidez b) el riesgo c) para tener más dinero d) porque es obligatorio

Solución: b)

3. Si depositamos en un banco 3 000 € al 3 % anual, ¿cuánto dinero tendremos al cabo de 20 meses?
   a) 1 200 b) 150 c) 3 150 d) 3 000

Solución: c)

4. Un banco concede un préstamo por importe de 3 000 € al 3,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes a devolver en 4 años. ¿Cuál es la cuota de amortización?
   a) 3 000 € b) 650€ c) 1 500 € d) 750 €

Solución: d)

5. Qué organismo solicita al Banco de España la revisión de las comisiones cobradas en ventanilla:
   a) La ONU b) La organización de consumidores c) La OCU d) La OCDE

Solución: c)

6. Cuanto le costará a un adulto realizar un envío de dinero a través de bizum, si su banco cobra 3,5 % por cada transferencia:
   a) Nada b) El 3,5 % del importe c) El 0,035 € d) 35 €

Solución: a)

7. Tomando como referencia las comisiones de PayPal de la actividad propuesta 16, ¿Cuánto pagaría un cliente cobrando 6 754 € realizando 35 transacciones?
   a) 6 754 € b) 50 € c) 323,65 € d) 194,608 €

Solución: d)

8. Siguiendo el apartado anterior, ¿Cuánto pagaría si recibe 132 000€ realizando 200 transacciones?
   a) 3 238 € b) 123,23 € c) 423,50 € d) 23,56 €

Solución: a)

9. Marina ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 1,2 dólares. ¿Cuántos euros tendrá?
   a) 541,6 € b) 635,3 € c) 780 € d) 345 €

Solución: a)

10. Andrés ha vuelto de un viaje de Reino Unido con 50 £ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 0,87 libras. ¿Cuántos euros tendrá?
    a) 54 € b) 57,47 € c) 43,5 € d) 45,3 €

Solución: b)

Solución:

1. "Un euro hoy es mejor que…………….mañana".

   a) un dólar hoy b) un dólar mañana c) un coche hoy d) un euro mañana
2. Uno de los principales motivos por los que se cobran intereses es:

   a) la liquidez b) el riesgo c) para tener más dinero d) porque es obligatorio
3. Si depositamos en un banco 3 000€ al 3% anual ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 20 meses?
4. a) 1 200 b) 150 c) 3 150 d) 3 000

Calculamos el interés simple:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

$$I = \frac{3\,000 \cdot 3 \cdot 20}{100 \cdot 12} = 150 \text{ €}$$

Sumamos capital e intereses:

$$3\,000 + 150 = 3\,150 \text{ €}$$

5. Un banco concede un préstamo por importe de 3 000€ al 3,5% de interés anual, con cuotas de amortización constantes a devolver en 4 años. ¿Cuál es la cuota de amortización?

   a) 3 000€ b) 650€ c) 1 500€ d) 750€
6. Qué organismo solicita al Banco de España la revisión de las comisiones cobradas en ventanilla:

   a) La ONU b) La organización de consumidores c) La OCU d) La OCDE
7. Cuanto le costará a un adulto realizar un envío de dinero a través de bizum, si su banco cobra 3,5% por cada transferencia:

   a) Nada b) El 3,5% del importe c) El 0,035€ d) 35€
8. Tomando como referencia las comisiones de PayPal de la actividad propuesta 16, ¿Cuánto pagaría un cliente cobrando 6 754€ realizando 35 transacciones?
9. a) 6 754 € b)50€ c) 323,65€ d) 194,608€

   (6 754·0,027)+(35·0,35)=194,608 €
10. Siguiendo el apartado anterior, ¿Cuánto pagaría si recibe 132 000€ realizando 200 transacciones?

    a) 3 238€ b) 123,23€ c) 423,50€ d) 23,56€

    (132 000·0,024)+(200·0,35)=3 238€

11. Marina ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 1,2 dólares. ¿Cuántos euros tendrá?

    a) 541.6€ b) 635,3€ c) 780€ d) 345€

Pasamos los dólares a euros:

$$650\$ \cdot \frac{1€}{1{,}2\$} = \frac{650 \cdot 1}{1{,}2} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} = 541{,}6€$$

12. Andrés ha vuelto de un viaje de Reino Unido con 50 £ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 0,87 libras. ¿Cuántos euros tendrá?

    a) 54€ b) 57,47€ c) 43,5€ d) 45,3€

Pasamos las libras a euros:

$$50£ \cdot \frac{1€}{0{,}87£} = \frac{50 \cdot 1}{0{,}87} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} = 57{,}47€$$

RESUMEN

<table>
<tr><td>Interés simple y compuesto</td><td>El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo</td><td>C = 3 600; r = 4,3 %; t = 8 años
$I = \frac{3\,600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100} = 1\,238{,}4$ €</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Equivalencias financieras</td><td>Comprobar la equivalencia financiera entre dos capitales, cosiste en comparar dichos capitales situados en diferentes momentos del tiempo</td><td>$\frac{C_0}{(1+i)^{n_{C0}}} + \frac{C_1}{(1+i)^{n_{C1}}} + \frac{C_2}{(1+i)^{n_{C2}}} \dots \dots . = \frac{C}{(1+i)^{n_C}}$</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Préstamos cuotas constantes</td><td>Normalmente la devolución del préstamo se realiza usando la capitalización compuesta y la devolución de este se realiza con periodos equidistantes (meses, trimestres, años, etc.). Lo normal es hacerlo anualmente por eso los reembolsos que se van haciendo reciben el nombre de anualidades.</td><td>
<table>
<tr><td>n</td><td>a_k</td><td>I_k</td><td>A_k</td><td>M_k</td><td>C_k</td></tr>
<tr><td>PERIODOS</td><td>TÉRMINOS AMORTIZATIVOS</td><td>CUOTA DE INTERESES</td><td>CUOTA DE AMORTIZACIÓN</td><td>CAPITAL AMORTIZADO</td><td>CAPITAL PENDIENTE</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>C_0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_1=A+I_1$</td><td>$I_1= C_0 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_1=A$</td><td>$C_1= C_0-A$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$A_2=A+I_2$</td><td>$I_2= C_1 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_2=2A$</td><td>$C_2= C_1-A$
$C_2= C_0-2A$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$A_3=A+I_3$</td><td>$I_3= C_2 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_3=3A$</td><td>$C_3= C_2-A$
$C_3= C_0-3A$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>$\sum A= C_0$</td><td>$M_4= C_0$</td><td>$C_n=0$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Comisiones</td><td>Una comisión bancaria es la cantidad de dinero que una entidad bancaria cobra a sus clientes por prestarles sus servicios</td><td>Un banco por una transferencia de 400 € cobrará 1,4 %. ¿A cuánto asciende la comisión?
400 · 0,014 = 5,6 € se cobrará de comisión</td></tr>
<tr><td>Banca ética</td><td colspan="2">La forman diversas entidades que ofrecen servicios financieros y bancarios de inversión y promoción de iniciativas de carácter social y medioambiental fomentando la responsabilidad social, la sostenibilidad y la transparencia.</td></tr>
<tr><td>Cambio de divisas</td><td>Las unidades monetarias diferentes a las que nosotros usamos son las divisas.</td><td>A lo largo de la unidad cogeremos la definición del BCE, es decir, que el tipo de cambio sea $/€.</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 8: GEOMETRÍA EN EL PLANO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?

Solución: Una circunferencia con centro en la bomba y radio 50 metros.

2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?

Solución: En la mediatriz del segmento cuyos extremos son los dos participantes.

3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?

Solución: Para estar todos a la misma distancia del fuego.

4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

Solución gráfica:

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.

Solución gráfica:

6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.

Solución gráfica y manipulativa:

7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

Solución gráfica y manipulativa:

8. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?

Solución: Las medianas son también mediatrices, bisectrices y alturas. Los cuatro puntos coinciden.

9. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?

Solución: La altura correspondiente al lado desigual es también mediana, mediatriz y bisectriz. Las otras rectas notables no coinciden.

10. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?

Solución: Si la ponemos en el circuncentro, los tres vértices recibirán la misma luz, pero puede ser muy poca si se trata de un triángulo obtusángulo (el circuncentro quedará fuera de la plaza). Si la ponemos en el incentro, tendremos un círculo completo de buena luz dentro de la plaza, pero no necesariamente en los vértices.

11. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?

Solución: 4 cm.

12. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?

Solución: En el incentro.

13. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?

Solución: Debe seguir una de las medianas.

14. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?

Solución: En el vértice del ángulo recto.

15. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.

Solución: El ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito de 90º mide 180º. Por lo tanto la hipotenusa del triángulo debe ser un diámetro de la circunferencia.

16. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

Solución manipulativa:

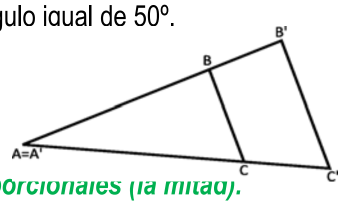
17. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]

Solución: $20\sqrt{3}$ cm.

18. Repite las actividades resueltas con *Geogebra*. Modifica a tu gusto colores y líneas.
Solución manipulativa utilizando Geogebra:
19. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.
Solución manipulativa utilizando Geogebra:
20. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.
Solución manipulativa utilizando Geogebra:
21. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.
Solución manipulativa utilizando Geogebra:
22. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?
Solución manipulativa utilizando Geogebra: Isósceles
23. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.
Solución manipulativa utilizando Geogebra: Coinciden en un triángulo equilátero

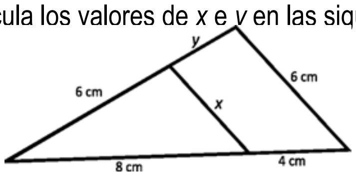
2. SEMEJANZA

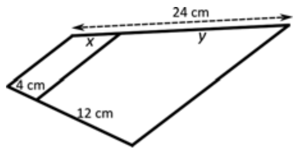
24. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
    c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3,5 cm, c' = 4,5 cm
    d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12,5 cm, c' = 24,5 cm



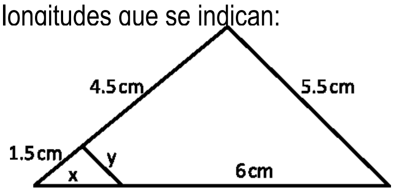
Solución: a) Si porque sus tres ángulos son 40º, 60º y 80º.
b) No porque sus ángulos respectivos son 70º, 55º, 55º y 80º, 50º, 50º.
c) Si porque tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales (la mitad).
d) No porque a'/a = b'/b = 2,5 pero c'/c = 3,5.

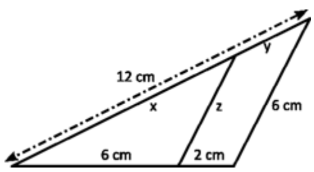
25. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
    b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 16 cm, ¿c'?
Solución: a) c' = 8 cm; b) c' = 8 cm.
26. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
Solución: 18 cm, 21 cm y 21 cm.
27. Calcula los valores de x e y en las siguientes figuras.





Solución: Primera figura: x = 4 cm; y = 3 cm. Segunda figura: x = 6 cm; y = 18 cm.
28. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.
Solución: El poste mide 8 m y el cable 10 m.
29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7.2 m. ¿Cuánto mide el edificio?
Solución: 12.8 m.
30. Calcula las longitudes que se indican:





Solución: Primera figura: x = 2 cm; y = 1.375 cm. Segunda figura: x = 9 cm; y = 3 cm; z = 4.5 cm.

3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

31. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Solución: La hipotenusa debe medir 13 cm.

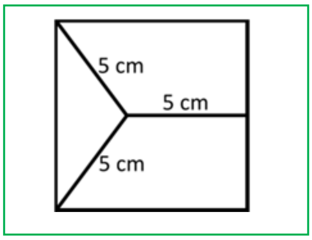
32. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13.6 *km* y 21.4 *km*.

Solución: a) 10 cm; b) 5 m; c) 17 dm; d) $\sqrt{642,92}$ ***km*** $\approx$ ***25.4 km.***

33. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14.7 *km* y 5.9 *km*

Solución: a) 24 cm; b) 15 m; c) 12 dm; d) $\sqrt{181.28}$ ***km*** $\approx$ ***13.5 km.***

34. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:



Solución: Si el triángulo de la izquierda es rectángulo, su hipotenusa mide $5\sqrt{2}$ ***cm y la altura correspondiente a la hipotenusa mide*** $2.5\sqrt{2}$ ***cm. Se trata de un rectángulo de lados mide*** $5\sqrt{2}$ ***cm y 5 +*** $2.5\sqrt{2}$ ***cm.***

35. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.

Solución: $\frac{81}{4}\sqrt{3}$ ***cm²***.

36. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.

Solución: $6\sqrt{3}$ ***cm²***.

37. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.

Solución: $\frac{343}{12}\sqrt{2}$ ***cm³***.

38. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.

Solución: $3\sqrt{2}$ ***m.***

39. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

Solución: 17 cm.

40. Una portería de fútbol mide 7.32 m de ancho por 2.44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:
   a) Un tiro directo a la base del poste.
   b) Un tiro directo a la escuadra.

Solución: a) 10.65 m; b) 10.92 m.

41. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.

Solución: $2x^2 = d^2$.

Otra solución: El cuadrado de lado 1 tiene por diagonal $\sqrt{2}$***. Como todos los cuadrados son semejantes, el de lado x tiene por diagonal*** $x\sqrt{2}$ ***.***

42. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Solución: $d^2 = x^2 - (x/2)^2$.

Otra solución: El triángulo equilátero de lado 2 tiene por altura $\sqrt{3}$***. Como todos los triángulos equiláteros son semejantes, el de lado x tiene por altura*** $\frac{x}{2}\sqrt{3}$ ***.***

43. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.

Solución: 120º y 60º; 90º y 90º; 72º y 108º; 60º y 120º; 40º y 140º.

44. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.

Solución: El ángulo central mide 60º. El triángulo formado por dos radios consecutivos y el lado correspondiente es isósceles porque todos los radios son iguales. El ángulo supuestamente desigual de este triángulo isósceles mide 60º así que los otros dos ángulos también han de medir 60º. Un triángulo con los tres ángulos iguales es equilátero.

45. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 36º y 72º, ¿cuánto debe medir el ángulo que falta?

Solución: Mide 72º.

46. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 108º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?

Solución: En un trapecio isósceles los ángulos son iguales dos a dos y han de ser dos agudos y dos obtusos para sumar en total 360º. Los ángulos que faltan miden 108º y 72º.

47. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

Solución: 1440º.

48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.

Solución: Área: 190 cm²; perímetro: 128 cm.

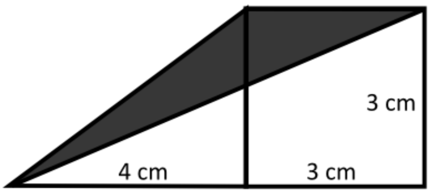
49. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.

Solución: Área: 574 cm²; perímetro: 326 cm.

50. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 100 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.

Solución: Área: 1 470 m²; perímetro: 198 cm.

51. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.



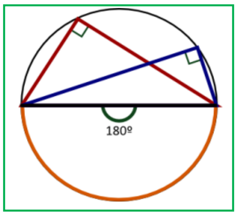
Solución: Área: 10,5 cm²; perímetro: 8 + $\sqrt{58}$ cm. No es necesario el teorema de Tales. El de Pitágoras sí.

52. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es la apotema del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

Solución: $37.5\sqrt{3}$ cm² ≈ 64.95 cm².

53. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm². Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]

Solución: El hexágono. Las abejas construyen celdas hexagonales.



54. Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa. Observa la figura y razona la afirmación.

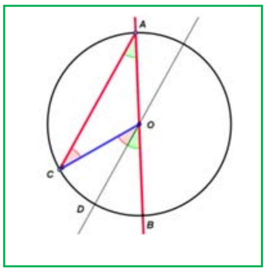
Solución: Véase la respuesta siguiente. La bisectriz del ángulo recto va del vértice al punto medio de la hipotenusa.

55. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

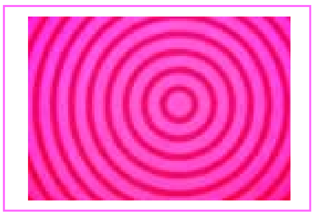
Solución: El ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. En este caso, la mitad de 180º es 90º.

56. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

Solución: Desde cualquier punto de la circunferencia circunscrita al triángulo formado por el punto de penalti y las bases de los postes de la portería.



57. ***Otra demostración.*** Intenta comprenderla. Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.



Solución: Sigue paso a paso el razonamiento.

58. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

Solución: Miden respectivamente 2π, 4π, 6π, 8π, etc.

59. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

Solución: 40 080 km.

60. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París*". Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

Solución: 6 366 km.

61. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

Solución: Aproximadamente 14.8 km.

62. Determina el área del triángulo equilátero de 10 cm de radio.

Solución: Su área es $25\sqrt{3}$ cm².

63. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.

Solución: 81π cm² ≈ 254.47 cm².

64. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.

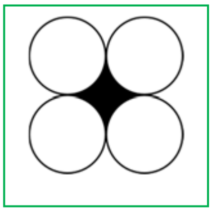
Solución: 119π cm² ≈ 376.85 cm².

65. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

Solución: Sector: 6π cm² ≈ 18.85 cm². Segmento: $6\pi-9\sqrt{3}$ cm² ≈ 3.26 cm².

66. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

Solución: $301\pi/6$ cm² ≈ 157.60 cm².

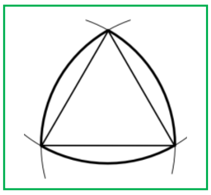


67. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.

Solución: 100 – 25π cm² ≈ 21.46 cm².

68. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga la misma área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?

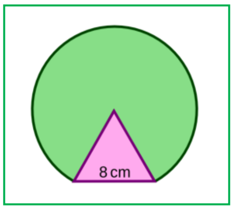
Solución: 9 + $9\sqrt{2}$ m de radio interior.



69. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo equilátero de 2 metros de lado. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.

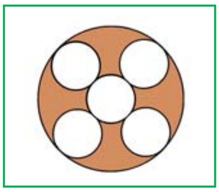
Solución: El caso general es $\frac{R^2}{2}(\pi-\sqrt{3})$.

En este caso $2(\pi-\sqrt{3})$ m² ≈1.41 m².



70. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

Solución: $64(\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4})$ cm² ≈195.26 cm².



71. Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?

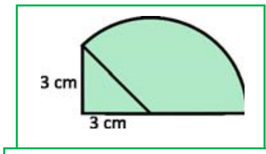
Solución: 80π cm² ≈ 251.33 cm²

72. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?

Solución: $28\pi/9$ cm² ≈ 9.77 cm².

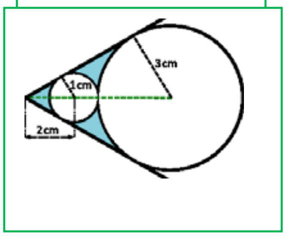
73. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?

Solución: $40\pi/9$ cm² ≈ 13.96 cm².



74. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.

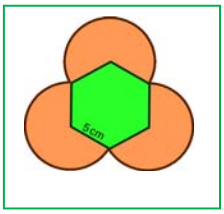
Solución: 9/2 + $27\pi/4$ cm² ≈ 25.71 cm².



75. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?

Solución: $9\sqrt{3}-4\pi$ cm² ≈ 3.02 cm².

76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.



Solución: $\frac{75}{2}\sqrt{3}+50\pi$ ***cm² ≈ 222.03 cm².***

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lugares geométricos

26. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm y 4 cm. Traza en él, utilizando regla y compás, las mediatrices y bisectrices. Determina el circuncentro y el incentro. Traza las circunferencias inscritas y circunscritas.

Solución gráfica y manipulativa:

27. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 5 cm y ángulos adyacentes al mismo de 30º y 50º. Traza en él, utilizando regla y compás, las medianas y las alturas. Determina su ortocentro y su baricentro.

Solución gráfica y manipulativa:

28. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 50º comprendido entre dos lados de 5 y 8 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

Solución gráfica y manipulativa:

29. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo rectángulo?

Solución: Los catetos son alturas. El ortocentro es el vértice del ángulo recto. El circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

30. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo isósceles?

Solución: El eje de simetría es altura, mediana, bisectriz y mediatriz.

Semejanza

31. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 70º y otro de 20º. Un ángulo de 90º y otro de 20º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.
    c) *A* = 40º, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *A'*= 40º, *b'* = 4 cm, *c'* = 5 cm
    d) *a* = 3 cm, *b* = 4 cm, *c* = 6 cm. *a'* = 9 cm, *b'* = 12 cm, *c'* = 19 cm

Solución: a) SI; b) SI; c) SI; d) NO.

32. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) *a* = 15 cm, *b* = 9 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 10 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?
    b) *A* = 50º, *b* = 6 cm, c = 4 cm. *A'* = 50º, *b'* = 18 cm, ¿*c'*?

Solución: a) $\frac{15}{10}\neq\frac{9}{4}$***. Los triángulos no son semejantes. b) Se puede calcular c' = 12 cm.***

33. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 90 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Solución: 27 cm, 31,5 cm y 31,5 cm.

34. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayo entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

Solución: Los ángulos miden 36º, 72º y 72º.

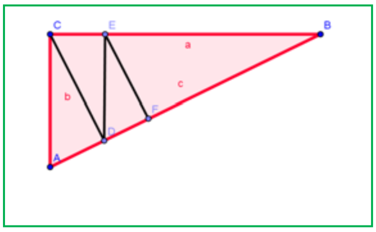
35. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

Solución: 360º.

36. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

Solución: 22.5 m.

37. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



Solución: Área de ABC = 1 350. Área de ACD = 486. CD = 36. DE = 28.8. EF = 23.04.

38. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.

Solución: Si los lados son proporcionales, las mitades de sus lados también lo son.

39. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

Solución: 24.5 cm² y 12.25 cm².

40. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

Solución: Los triángulos son semejantes. El perímetro del segundo es la mitad del primero y su área la cuarta parte.

41. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Solución: La altura es 104/7 cm. Las áreas son 14 cm² y 1352/7 cm².

Ángulos, longitudes y áreas

42. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado *a*, el lado *a* y el *c*.

Solución: Solución gráfica.

43. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

Solución: $5\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ***cm ≈ 3.8 cm.***

44. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.

Solución: $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ ***cm ≈ 6.1 cm.***

45. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

Solución: $\frac{625}{\pi}$ ***cm² ≈ 198.94 cm².***

46. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo círculo tiene una superficie de mide 50 cm².

Solución: $10\sqrt{2\pi}$ ***cm ≈ 25.1 cm.***

47. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?

Solución: Si el ecuador mide 40 000 km, la velocidad es 5 000/3 km/h.

48. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?

Solución: Si el triángulo es equilátero, la relación es $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$***. En otro caso se necesitan más datos del triángulo.***

49. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a *n*. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, ….
    a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

Solución: Si.

50. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm² ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?

Solución: 23/6 cm.

51. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?

Solución: Aproximadamente 4 908.739 kg. Otra aproximación es 5 toneladas.

52. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1.5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

Solución: $\frac{\sqrt{55}}{2}$ ***m ≈ 3.708 m.***

53. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.

Solución: $\frac{65}{2}\pi$ ***cm² ≈ 102.10 cm².***

54. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.

Solución: Hexágono: $\frac{23\sqrt{3}}{2}$ ***cm² ≈ 23.38 cm². Hexágono estrellado:*** $23\sqrt{3}$ ***cm² ≈ 46.77 cm².***

55. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?

Solución: Aproximadamente 6 660 cm². El resultado es aproximado porque el valor de la altura lo es.

56. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

Solución: $25\sqrt{3}$ ***cm² ≈ 43.30 cm².***

57. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.

Solución: $150\sqrt{3}$ ***cm² ≈ 259.81 cm².***

58. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.

Solución: La figura es imposible porque el lado oblicuo ha de ser mayor que la altura.

59. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.

Solución: $14\sqrt{2}$ ***cm² ≈ 19.80 cm².***

60. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.

Solución: Área: $4\sqrt{33}$ ***cm² ≈ 29.98 cm². Perímetro:*** $2(4+\sqrt{33})$ ***cm ≈ 19.49 cm.***

61. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.

Solución: Área: 40.5 cm². Perímetro: $18\sqrt{2}$ ***cm ≈ 25.46 cm.***

62. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.

Solución: Área: 24 cm². Perímetro: $8+4\sqrt{13}$ ***cm ≈ 22.42 cm.***

63. Un triángulo mide de altura π y de base π + 1. ¿Es rectángulo?

Solución: Es rectángulo si la base y la altura son los catetos.

64. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

Solución: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ ***= 2,*** $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$

65. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

Solución: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ ***cm.***

66. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.

Solución: $5\sqrt{7}$ ***m ≈ 13.229 m.***

67. Calcula la generatriz de un como de radio de la base 5 m y de altura 7 m.

Solución: $\sqrt{74}$ ***m ≈ 8.602 m.***

68. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pie está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia *x* y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?

Solución: $-10+10\sqrt{41}$ ***m ≈ 54.031 m.***

69. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?

Solución: $\sqrt{\frac{89617}{2}}$ ***m ≈ 211.681 m.***

AUTOEVALUACIÓN

1. Todos los puntos que están a la misma distancia de dos puntos dados están en:
   a) una bisectriz b) una circunferencia c) una elipse d) una mediatriz

Solución d)

2. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el:
   a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro

Solución b)

3. El circuncentro es el centro de:
   a) gravedad del triángulo b) la circunferencia inscrita c) la circunferencia circunscrita

Solución c)

4. Dos triángulos son semejantes si:
   a) tienen dos ángulos iguales b) tienen dos lados proporcionales
   c) tienen un ángulo igual d) sus áreas son semejantes

Solución a)

5. Sabemos que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes. Calcula el valor de *a'* y *c'* para que lo sean, sabiendo que a = 10 cm, b = 6 cm, b' = 3 cm, c = 8 cm:
   a) a' = 4 cm y c' = 6 cm b) a' = 5 cm y c' = 6 cm
   c) a' = 4 cm y c' = 4 cm d) a' = 5 cm y c' = 4 cm

Solución d)

6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 cm y un cateto mide 3 cm, entonces el otro cateto mide aproximadamente:
   a) 6.3 cm b) 5 cm c) 5.8 cm d) 6.9 cm

Solución a)

7. La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:
   a) 1440º b) 1620º c) 1800º d) 1260º

Solución a)

8. El área de un rombo de lado 5 cm y una diagonal de 8 cm mide:
   a) 48 cm^2 b) 36.7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21.2 cm^2

Solución c)

9. El ángulo central del inscrito en la circunferencia que abarca un ángulo de 72º mide:
   a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º

Solución d)

10. La longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 3 cm son respectivamente:
    a) 6π cm y 9π cm^2 b) 9π cm y 6π cm^2 c) 3π cm y 3π cm^2 d) 18 cm y 27 cm^2

Solución a)

CAPÍTULO 9: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?

Solución: Todos los lados y todos los ángulos miden lo mismo)

2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

Solución gráfica

3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?

Solución: Las longitudes son dobles de grandes y los ángulos son iguales. Es una semejanza.

4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?

Solución: Es simétrica. O semejante se rezón de semejanza –1.

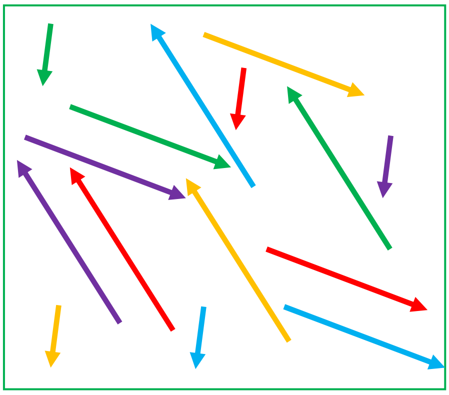
5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

Solución gráfica y abierta.

2. TRASLACIONES

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** y ***CB***. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.

Solución AB = (4, 4); AC = (7, –5); BC = (3, –9); CA = (–7, 5); CB = (–3, 9).



7. El vector fijo ***AB*** tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.

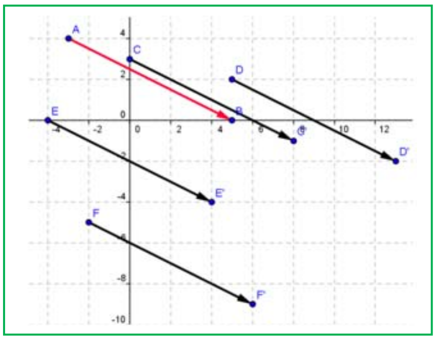
Solución: A = (–5, –1)

8. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo ***AB*** son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.

Solución: B = (6, 1)

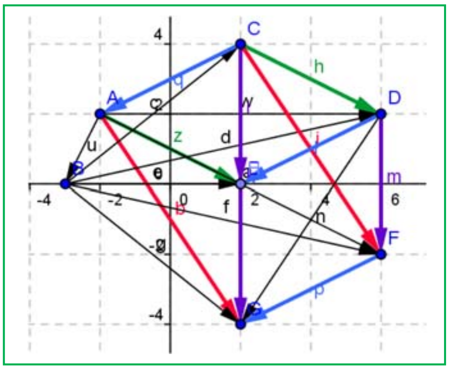
9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.

Solución gráfica



10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E* (–4, 0) y *F* (–2, –5).

Solución gráfica



11. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.

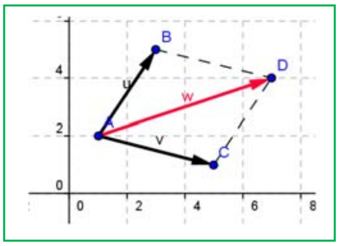
Solución gráfica: Son equipolentes: AG = CF; GA = FC; CD = AE; EA = DC; CE = DF = EG; EC = FD = GE; DE = FG = CA; ED = GF = AC.

12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos ***DE*** y ***FG***. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

Solución: DE = (–4, –2) = FG. Son dos representantes del mismo vector.

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama u al vector fijo ***AB*** e indica sus componentes. b) Llama v al vector fijo ***BC*** e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector w = u + v. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.

Solución gráfica: a) u = AB = (–9, 1); b) v = BC = (7, –11); c) w = u + v = (–2, –10); d) solución gráfica.



14. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector **u** = (2, 3) con origen en *A*, y el vector **v** = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma **u** + **v**, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre **u** y **v**.

Solución gráfica: u + v = (6, 2).

15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot(4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)] c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)] d) 9.3·(2, 6) + (3.7, 5.2)

Solución: a) (3, –3/2); b) (3, –6); c) 65, –99); d) (22.3, 61).

16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) y ***w*** = (3, 4):

a) 2***u*** – (***v*** + ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

Solución: a) (–17, 15); b) (23, –7); c) (–11, –14).

17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.

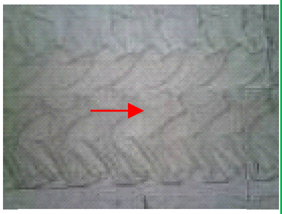
Solución abierta y gráfica:

18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Solución manipulativa y gráfica: Las dos figuras tienen todas sus longitudes y ángulos iguales. Esas rectas son paralelas. Han seguido un vector libre.

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa: Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.



Un friso en Camboya

20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

Solución: Horizontal.

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).

Solución manipulativa y gráfica:

22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?

Solución manipulativa y gráfica: A' = (7, 3); B' = (7, 5); C' = (5, 5).

23. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Solución manipulativa, abierta y gráfica:

24. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

Solución manipulativa y gráfica: Otra traslación de vector (–1, –1).

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.

Solución manipulativa y gráfica:

26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Solución manipulativa y gráfica:

3. GIROS O ROTACIONES

28. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.

Solución manipulativa y gráfica:

29. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.

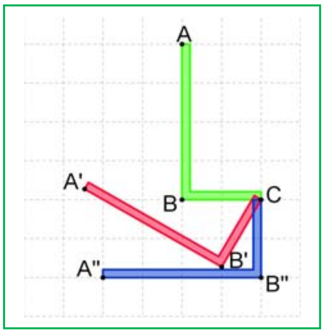
Solución manipulativa y gráfica:

30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?

Solución manipulativa y gráfica: A' ***(–2, 4),*** B' ***(2, 3) y*** C' ***(0, 5)***

31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante el giro la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.



32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.

Solución manipulativa y gráfica:

33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?

Solución: Un giro de 60º no deja ninguna recta invariante. Un giro de 180º deja invariantes a las rectas que pasan por el centro de giro. Los giros de 0º y de 360º son la identidad, dejan todos los puntos y rectas invariantes.

34. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?

Solución manipulativa y gráfica: Ya sabes, la simetría central en el plano es un giro de 180º luego es un movimiento directo. Los lados y los ángulos de un triángulo y su girado 180º son iguales, y con el mismo sentido.

35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

Solución: No tienen simetría central: B, P, T. ***Si la tienen:*** H, N, O, S, X, Z.

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

Solución abierta: Por ejemplo, una puerta, las patillas de unas gafas, un picaporte.

37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: El plano se transforma en un plano, una esfera en una esfera igual, un cono en otro cono igual, los planos paralelos se transforman en planos paralelos y los ortogonales en planos ortogonales.

4. SIMETRÍAS

38. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto *P'* simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'*. (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).

Solución manipulativa y gráfica:

39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.

Solución manipulativa y gráfica:

40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.

Solución manipulativa y gráfica:

41. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.

Solución manipulativa y gráfica:

42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

Solución: Eje de ordenadas: A' (–3, –4), B' (–5, 6), C' (4, 5); Eje de abscisas: A" (3, 4), B" (5, –6), C" (–4, –5).

43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

Solución: Eje de simetría horizontal: B, D. ***Eje de simetría vertical:*** A, M, T, U, V, W..

44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante una simetría la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*

Solución manipulativa y gráfica: El rectángulo tiene dos ejes de simetría, las mediatrices de los segmentos AB y BC.

46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: El hexágono tiene 6 ejes de simetría, 3 van de vértice a vértice opuesto, y 3 van de centro de lado a centro de lado opuesto.

47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: Tiene 5, que van de vértice a centro de lado.

48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

b) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

c) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?

d) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

Solución manipulativa y gráfica: c) No existe ninguna simetría axial que transforme P' en P", Existe la simetría central de centro el origen. Es un movimiento directo. d) P (–2, 5); P' (2, 5); P (–2, –5).

49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.

Solución manipulativa y gráfica: El vector de traslación es perpendicular a la dirección de las rectas, de sentido de la primera recta a la segunda y de módulo, el doble de la distancia entre las rectas.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.

Solución manipulativa y gráfica: El centro de giro es el punto de intersección de las rectas, y el ángulo de giro tiene de amplitud el doble del ángulo que forman las rectas y de sentido, de la primera recta a la segunda.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

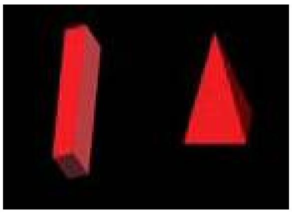
Solución: La misma simetría. La simetría es involutiva: s $\circ$ s = Identidad.

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?

Solución: Ortogonales.

53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Solución abierta: Por ejemplo: mi silla, la mesa, mi ordenador, la lámpara, un lápiz.



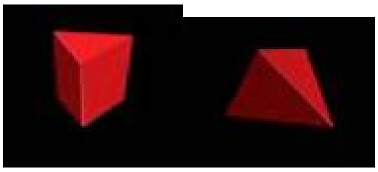
54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:

a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?

b) Una pirámide recta de base cuadrada.

c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?

Solución: a) Tiene 5 planos de simetría, 2 pasan por 4 vértices y 2 aristas laterales; 2 pasan por los puntos medios de 4 aristas de la base; 1 pasa por los puntos medios de las aristas laterales. Tiene un eje de rotación de 90º, 180º y 270º que va de centro de la base cuadrada a centro de la otra base. Un prisma oblicuo, ninguno. b) Pirámide de base cuadrada tiene 4 planos de simetría, 2 pasan por 2 vértices de la base y el vértice y los otros 2, por los puntos medios de las aristas de la base y el vértice. Tiene un eje de rotación de 90º, 180º y 270º que pasa por el vértice y el centro de cuadrado de la base. c) Se pierden los planos de simetría que pasan por dos aristas.



55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:
a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.
b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?
c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?
Solución: a) 3 Planos que pasen por una arista y la mitad de una cara rectángulo; 1 plano que pase por la mitad de las aristas laterales; b) 3 Planos que pasen por una arista y la mitad de una cara lateral; Ninguno; c) 1 plano que divida a la base en dos triángulos iguales y 1 plano que pase por la mitad de las aristas laterales

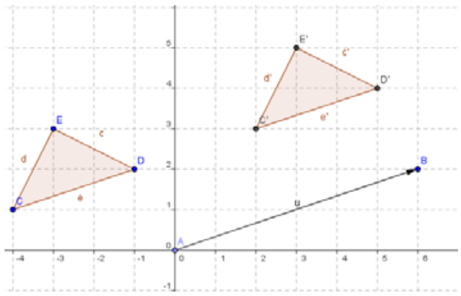
56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.
Solución: El plano se transforma en un plano, una esfera en una esfera igual, un cono en otro cono igual, los planos paralelos se transforman en planos paralelos y los ortogonales en planos ortogonales.

GEOGEBRA

57. - *Utiliza Geogebra para estudiar* vectores *y traslaciones.*

- En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - ➢ Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C’D’E’*.

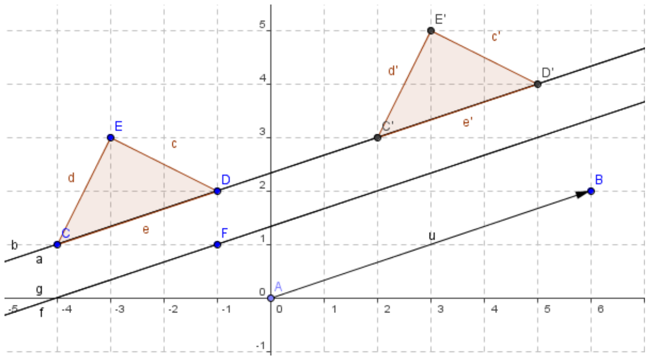
  ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC’B, ADD’B y AEE’B*?



Solución manipulativa:

58. Comprueba en la ventana algebraica que:
   a) Las coordenadas de los puntos *C’, D’ y E’* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*
   b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C’D’E’* coinciden

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C’* y *D’* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*
- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo, la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.



Solución manipulativa:

59. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.
Solución manipulativa: Ninguno.

60. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Solución manipulativa: Los del eje de simetría. Rectas invariantes, además del eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, son rectas invariantes las rectas ortogonales al eje de simetría.

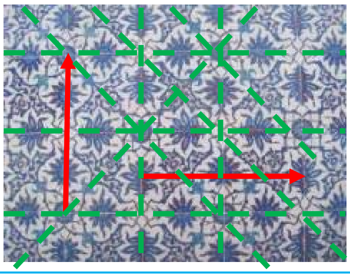
61. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45º.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.
   b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Solución manipulativa: El centro de giro es un punto invariante. No hay rectas invariantes (si el giro no es de 180º)

62. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.
   b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.
   c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Solución manipulativa: En la simetría central, el centro es un punto invariante, y las rectas que pasan por ese centro son rectas invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES



63. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

Solución: Dos vectores de traslación ortogonales indicados en rojo. Ejes de simetría horizontales, verticales y oblicuos marcados, algunos de ellos, en verde. Los puntos de intersección de los ejes de simetría son centros de giro de 90º.

64. **Análisis de mosaicos de la Alhambra**: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 180º? ¿Y de 30º?

Solución: No hay simetrías. Hay giros de 60º y de 120º.

65. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

Solución abierta y manipulativa:

66. Generación de un mosaico mediante giros y traslaciones: animación. Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

Solución manipulativa:

67. También puedes ver en la siguiente animación cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.

Solución manipulativa:

68. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo, una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

Solución abierta y manipulativa:

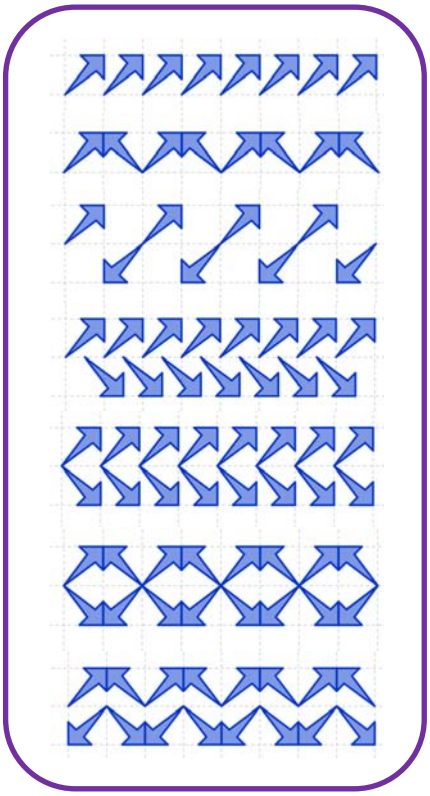
69. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

Solución: A) En L4, L5. B) L2, L5. C) L3, L5, L7. D) Si, en L6 y L7. E) Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180º, y simetría con deslizamiento.

70. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

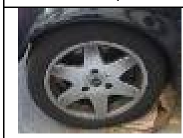
Solución abierta y manipulativa:



71. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

Solución: Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180º, y simetría con deslizamiento. Observa: en el primero únicamente hay traslación, en el 2º, simetría de eje vertical, en el 3º giros de 180º; en el 4º simetría con deslizamiento, en el 5º simetría de eje horizontal, en el 6º simetrías de eje horizontal y de je vertical, y por lo tanto giros de 180º; en el 7º simetrías de eje vertical y simetría con deslizamiento.

72. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12

a) Tiene simetría central.
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

Solución: a) Simetría central: 2, 3, 4, 7, 9, b) Ejes de simetría axial: 1 (5), 2 (6), 3 (7), 4 (4), 5 (5), 6(5), 7 (6)… c) Todos, d) Solución abierta.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?

Solución gráfica y manipulativa: Los vectores correspondientes a lados paralelos tienen las mismas coordenadas.

2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, –2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

Solución: AB = (3, 1); AC = (4, –7); AD = (7, –2); BC = (1, –8); BD = (4, –3); CD = (3, 5); DC = (–3, –5); BA = (–3, –1).

3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A’* (1, 5).

Solución: AA’ = (–2, –2)

4. Por la traslación de vector u = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A’*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A’*?

Solución: A’ = (11, 12).

5. Por la traslación de vector u = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A’* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?

Solución: A = (6, 4).

6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector u = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

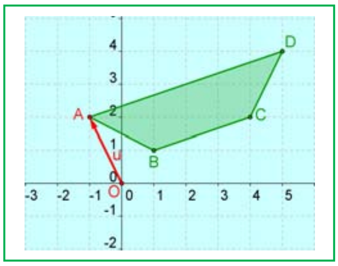
Solución: Centro = C’ = (0, 0), radio = 3 unidades.

7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C’* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?

Solución manipulativa y gráfica: Es una traslación de vector u + v = (2, 5). El origen se transforma en O’ = (2, 5).

8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?

Solución: A’ = (1, 5); B’ = (–1, 7); C’ = (1, 9); D’ = (3, 7).



9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.

Solución: A’ = (–2, 4); B’ = (0, 3); C’ = (3, 4); D’ = (4, 9).

10. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

Solución: A’ = (0, 5); B’ = (1, 8); C’ = (3, 9).

11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
    a) Trasládalo con la traslación de vector u = (3, 0).
    b) Trasládalo después mediante la traslación de vector v = (0, 4).
    c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
    d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

Solución manipulativa y gráfica: c) C” = (3, 4); d) (3, 6).

12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector u = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector v = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.

Solución manipulativa y gráfica: A’ (15, 10), B (6, 13) y C (9, 17).

13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector u = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

Solución: v = (–2, 6).

14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A’B’C’* al triángulo obtenido.
    b) Traslada *A’B’C’* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A”B”C”* al nuevo triángulo.
    c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A”B”C”* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?

Solución manipulativa y gráfica: u = (5, 4). Longitud = 6.4 cm.

15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

Solución: –u = (2, –5).

16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.

Solución abierta, manipulativa y gráfica: b) El friso con la letra M ***tiene simetrías verticales.***

17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: La traslación es una isometría, conserva distancias y ángulos, por tanto transforma un plano en un plano, una esfera en una esfera, un cono en un cono, mantiene el paralelismo y la ortogonalidad.

Giros

18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A’* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A”* obtenido al girar *A’* 90º con el mismo centro de giro.

Solución manipulativa y gráfica: A’ = (–5, –4); A” = (–4, 5).

19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.

Solución abierta, manipulativa y gráfica: Las dos figuras tienen todas las longitudes y los ángulos iguales.

20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.

Solución manipulativa y gráfica:

21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

Solución manipulativa y gráfica: En 8 giros de 45º llegas al triángulo inicial, luego los giros han sido de 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º, 360º.

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.

Solución manipulativa y gráfica:

23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

Solución abierta: Si tiene centro de simetría. Por ejemplo: Un folio, una flor de 6 pétalos iguales, un cubo.

24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A’*, *B’* y *C’*?

Solución manipulativa y gráfica: A’ = (–2, –6), B (2, –5), C (–5, –3)

25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?

Solución manipulativa y gráfica: A” = (13, 9), B” = (11, 21) y C” = (9, 14).

26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P’* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P’*?

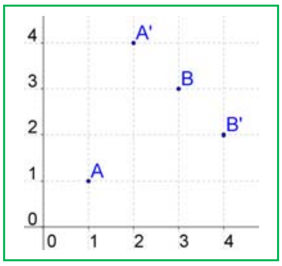
Solución: P’ = (–x, –y)

27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

Solución: A’ = (–3, 4), B’ = (–5, –6), C’ = (4, –5).

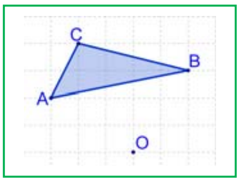
28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?

Solución manipulativa y gráfica: Un rombo. 6 giros de 60º, 120º, 180º, 240º, 300º, 360º.



29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.

Solución manipulativa y gráfica: Tienes que dibujar la mediatriz del segmento AA’ y la del segmento BB’ y buscar el punto donde se cortan.



30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.

Solución manipulativa y gráfica: Resulta otro triángulo igual.

31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?

Solución manipulativa y gráfica: Es suficiente girar dos puntos. Basta girar el punto donde corta a la recta la ortogonal desde el punto O.

32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (***Ayuda***: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

Solución: Juega. Con la ayuda es fácil descubrir la estrategia ganadora.

33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

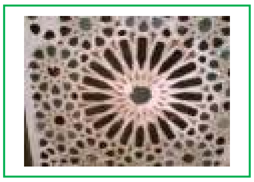
Solución: 90º. No. Hay ejes de simetría ortogonales. Los centros de giro están en la intersección de dichos ejes.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

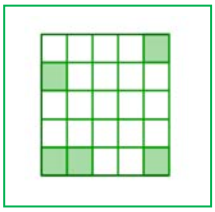
Solución: El centro es en todos los casos donde se cortan los ejes de simetría. a) 71º; b) 60º; c) 36º; d) 120º; e) 189º; f) 90º; g) 180º; h) El centro es el punto de intersección de las diagonales, 180º; i) 45º.

35. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?



Solución: Tiene centro de giro de 18º.

36. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



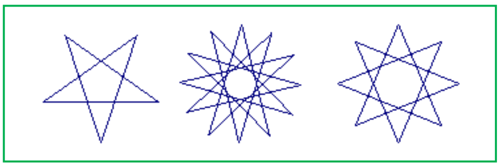
Solución manipulativa y gráfica: La simetría central es un movimiento directo, conserva distancias y ángulos.

37. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

Solución: 3.

38. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

Solución manipulativa y gráfica:



39. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

Solución: Tienen centro de simetría el de 12 puntas y el de 8 puntas. El de 5, no. El ángulo de giro es de: 72º, 30º, 45º, respectivamente.

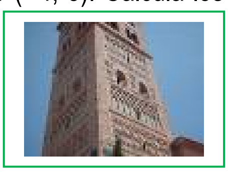
40. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

Solución abierta: Por ejemplo, algo con forma de cilindro, cono o esfera.

41. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

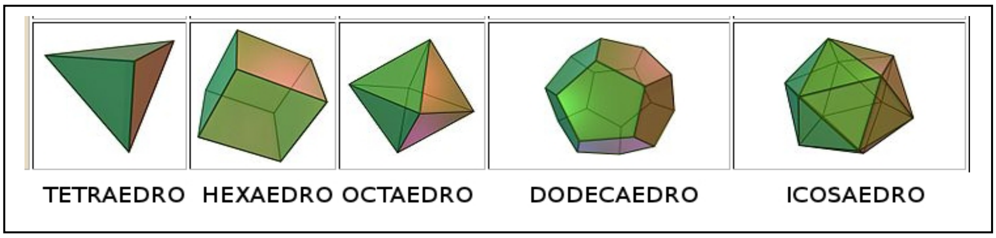
Solución: B' (–8, –1), C' (–5, –5), D' (–1, –2) y E' (–3, –0)

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?



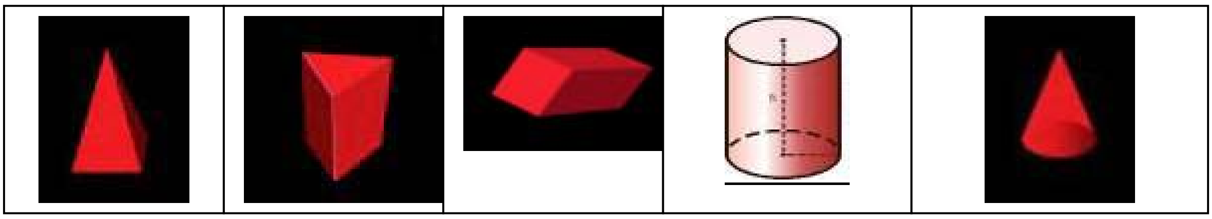
Solución: 90º.

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



Solución: No tiene simetría central el tetraedro-

44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



Solución: Tiene simetría central el cilindro.

Simetrías

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.

Solución manipulativa y gráfica:

46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

Solución: a) H, I, O, X; ***b)*** A, M, T, U, V, W; ***c)*** B, C, D, E; ***d)*** F, G, J, K, L, N, P, Q, R, S, Y, Z***;***
e) Las letras H, I, O, X ***tienen centro de simetría.***

47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

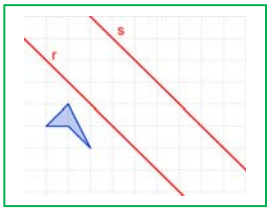
Solución: Un único eje de simetría: a), c). Dos ejes: d); f). Ninguno: b), e).

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.
e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

Solución: a) 4; b) 3; c) 1; d) 6; e) Infinitos; f) 2; g) 2.

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



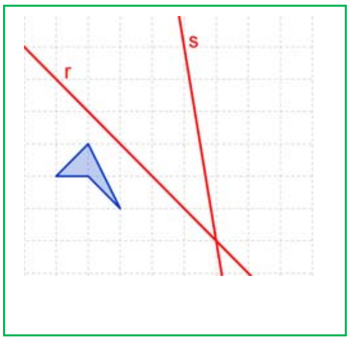
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C′* a su simétrico respecto al eje *r* y *C″* al simétrico de *C′* respecto al eje *s*:

b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C″*.
c) ¿Qué elementos la definen?
d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

Solución manipulativa y gráfica: a) (5, 7), (6, 7), (7, 6) y (6, 8); b) y c) Una trslación de vector u = (2, 2);
d) Es otra traslación de vector –u = (–2, –2); Vértices: (–1, 1), (0, 1), (1, 0) y (0, 2).

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

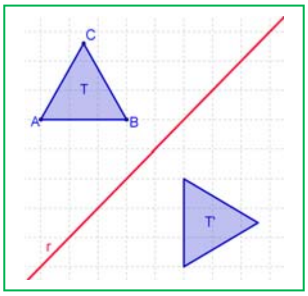
c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

Solución manipulativa y gráfica: La isometría es un giro.

51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

Solución manipulativa y gráfica: a) Son iguales; b) Puedes pasar de una a otra mediante isometrías directas, es decir, traslaciones y giros. Si las haces coincidir dando la vuelta, es mediante simetrías. Las dimensiones no cambian.



52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A*, *B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*?

Solución manipulativa y gráfica:

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

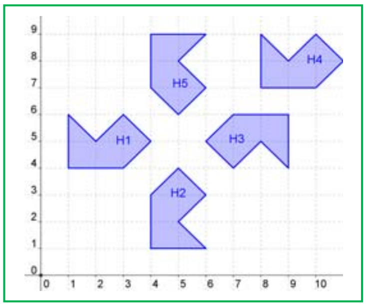
Solución manipulativa:

Problemas

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.
    a) Una traslación según el vector (1, 3).
    b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.
    c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

Solución: a) La traslación no deja ningún punto invariante, y deja invariantes las rectas paralelas al vector de traslación. b) La simetría axial deja invariantes a los puntos del eje de simetría, en este caso, al eje de ordenadas. El eje es una recta invariante de puntos invariantes. Rectas invariantes son también las perpendiculares al eje de ordenadas, en este caso, las rectas horizontales. C) La simetría central deja invariante al centro de simetría, en este caso, al origen de coordenadas. Deja invariantes a las rectas que pasan por el centro, en este caso a las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.



Solución: H1: (1, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 6), (4, 5) y (3, 4);
H2 simetría; Vértices: (4, 1), (6, 1), (5, 2), (6, 3), (5, 4) y (4, 3);
H3 simetría central de centro (9, 6); Vértices (9, 4), (8, 5), (7, 4), (6, 6), (7, 6);
H4 traslación de vector (7, 3); Vértices (8, 7), (8, 9), (9, 8), (10, 9), (11, 8) (10, 7)
H5 giro de 90º. Vértices (4, 9), (6, 9), (5, 8), (6, 7), (4, 7) y (4, 9);

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?
b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?
c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?
d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

***Solución:** a) Las traslaciones dejan invariante a las rectas paralelas al vector de traslación. b) La simetría central, tanto en el plano como en el espacio, deja invariante a las rectas que pasan por el centro. c) La simetría axial deja invariante a las rectas perpendiculares al eje de simetría. Los únicos puntos invariantes son los del eje. d) La simetría especular deja invariantes a las rectas y a los planos ortogonales al plano de simetría. Solo deja invariantes a los puntos del plano de simetría.*

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

Solución:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación	*Ninguno*	*Paralelas al vector de traslación*	*Ninguna*
Simetría central	*El centro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Ninguna*
Giro	*El centro de giro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Ninguna*
Simetría axial	*El eje de simetría*	*El eje y las perpendiculares al eje*	*El eje de simetría*
Simetría con deslizamiento	*Ninguna*	*Ninguna*	*Ninguna*

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación	*Ninguno*	*Paralelas al vector de traslación*	*Ninguno*
Simetría central	*El centro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Los planos que pasan por el centro*
Giro	*Los puntos del eje de giro*	*Rectas ortogonales al eje*	*Los planos que contienen al eje de giro*
Simetría especular	*El plano de simetría*	*Las del plano de simetría y las ortogonales al plano*	*El plano s¡de simetría y los planos ortogonales al plano de simetría*
Simetría con deslizamiento	*Ninguna*	*Ninguna*	*Ninguno*

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)
a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.
b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

***Solución manipulativa y gráfica:** a) A' (–1, 3), B' (1, 4) y C' (–2, 5); b) A'' (–1, –2), B'' (–2, –4) y C'' (–3, –1).*

59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2), *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

Solución manipulativa y gráfica: a) A' (–1, 0), B' (1, 1), C' (–2, 2) y D' (0, 3); b) A'' (4, –1), B'' (2, –2), C'' (5, –3) y D'' (3, –4)

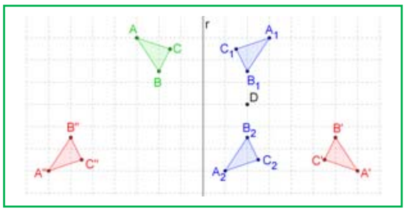
Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

Solución manipulativa y gráfica: Si. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:



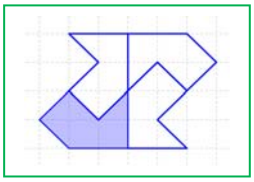
62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.

c) ¿Qué conclusión obtienes?

Solución: a) Simetría de eje r y giro de 180º de centro D; b) Giro de centro D y 180º, y simetría de eje la recta r; c) La composición de isometrías no es conmutativa, pues A''B''C'' es distinto de $A_2B_2C_2$.

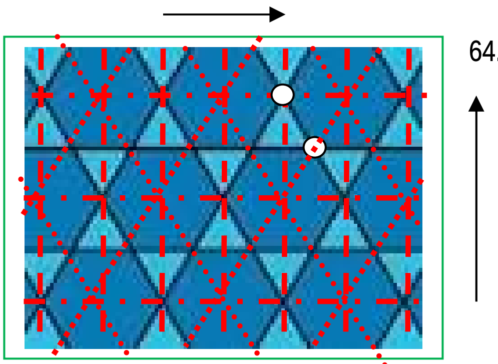


Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

Solución: Giros de 90º, 180º y 270º.

63. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

Solución: Eje vertical: A, M, T, U, V, W***; Dos ejes de simetría:*** H, I, O, X***; Centro de simetría:*** N, S, Z***; Eje de simetría horizontal:*** B, C, D, E***; Ningún tipo de simetría:*** F, G, J, K, L, P, Q, R, Y.



64. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.

a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

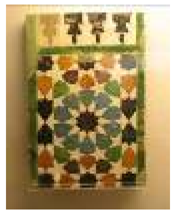
b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.

Solución manipulativa y gráfica: Los ejes de simetría están señalados en rojo. a) Hay giros de 60º en los centros de los hexágonos. B) Hay giros de 180º con centro en los vértices de los triángulos. C) Hay simetrías de ejes verticales, de ejes horizontales y de ejes oblicuos.



65. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

Solución manipulativa: Hay ejes de simetría horizontales y verticales; y centros de giro de 36º y de 45º.

66. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico. Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.

Solución manipulativa:

67. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

Solución: Son pares, con eje de simetría el eje de ordenadas: a) y c). Son impares, con centro de simetría el origen: b) y d).

68. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

Solución manipulativa y gráfica: cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.

69. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

Solución manipulativa y gráfica: Es importante construir los poliedros y manejarlos. Contienen dos aristas opuestas

70. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

Solución manipulativa y gráfica: Tienen 5 planos de simetría. Tiene un eje de giro de 72º. No tiene simetría central.

71. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución manipulativa y gráfica: Tiene simetría central. Tres ejes de giro (de 180º) que pasan por el centro de una cara al centro de la cara opuesta. Planos de simetría que pasan por los ejes de giro y centros de las aristas.

72. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución: No tiene simetría central. Eje de giro de 120º que pasa por el vértice y el centro de la base. Tres planos de simetría que pasan por el eje de giro y un vértice de la base.

73. Describe las isometrías que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada

d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

Solución: a) Todos los planos que pasan por el centro son planos de simetría, y todos los diámetros que pasan por el centro son ejes de giro de cualquier ángulo; b) Todos los planos que pasan por los centros de las bases son planos de simetría, y el eje que pasa por los centros de las bases es eje de giro de cualquier ángulo; c) El eje que pasa por los centros de la base es eje de giro de 90º, º80º y 270º, los planos que contienen a ese eje y pasan por puntos medios de las aristas son planos de simetría. Los ejes que pasan por los centros de las caras rectangulares son ejes de giro de 180º, y los planos que pasan por dichos ejes y puntos medios de aristas so planos de simetría; d) Todos los planos que pasan por el vértice y el centro de la base son planos de simetría, y el eje que pasa por el vértice y el centro de la base es eje de giro de cualquier ángulo; e) No tiene simetría; f) La recta que pasa por el vértice y el centro de la base es eje de giro de 120º y 240º, los planos que contienen a dicho eje y pasan por un vértice de la base son planos de simetría.

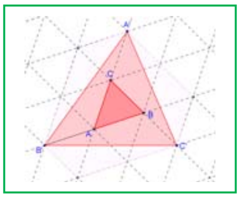
74. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

75. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	***No***	***Si***	***4, 120º***	***Si***	
Cubo	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Octaedro	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Dodecaedro	***Si***	***Si***		***Si***	
Icosaedro	***Si***	***Si***		***Si***	

76. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
   a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
   b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
   c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
   d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?



Solución manipulativa y gráfica: a) Muchos mosaicos hemos visto que los tienen. b) Para que sea un centro de simetría debe ser ortogonales. c) Es una simetría especular de plano vertical. d) Si.

77. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.

Solución: 1/4 u^2.

78. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

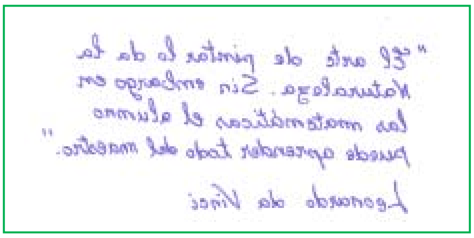
Solución abierta, manipulativa y gráfica:

79. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

80. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.

Solución manipulativa y gráfica:



81. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

Solución manipulativa y gráfica: Ayuda***: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.***

82. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

Solución manipulativa y gráfica: a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120º. Aplicamos ahora la simetría de vértice A: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$. La composición transforma al triángulo en: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría. d) Hacemos ahora el giro de 240º: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$. Componemos el giro de 120º con el de 240º: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ y obtenemos la identidad. e) Componemos dos giros de 240º: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ y obtenemos el giro de 120º. La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).

83. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

Solución manipulativa y gráfica: En el diseño de este mosaico hay simetrías de eje vertical, de eje horizontal, simetrías de ejes oblicuos, giros de 90º, giros de 45º y traslaciones.

84. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

Solución manipulativa y gráfica: Al componer simetrías de ejes paralelos tienes una traslación. Al componer simetrías de ejes secantes obtienes un giro de ángulo doble al que forman los ejes de simetría.

85. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

Solución manipulativa y gráfica: El hueso es simétrico con dos ejes de simetría ortogonales. Se pasa de un hueso blanco a uno de color adyacente con un giro de 901 y centro el vértice del cuadrado inicial.

86. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:
   a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60º.
   b) La simetría de eje *n*
   c) La simetría de eje *m*
   d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*
   e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

Solución manipulativa y gráfica: La composición de la simetría de eje n con la de eje m es un giro de centro el punto de intersección y de 60º.

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)

Solución: b)

2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector **u**:
   a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)

Solución: c)

3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) **no** puede ser:
   a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º b) Una traslación de vector **u** = (2, 2)
   c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º d) Una simetría de eje *y* = *x*.

Solución: b)

4. La transformación identidad también se llama:
   a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)

Solución: d)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
   a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles

Solución: c)

6. La simetría central en el plano es un giro de:
   a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º

Solución: b)

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
   a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central

Solución: b)

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

Solución: b)

9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:
   a) O b) H c) S d) D

Solución: d)

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
   a) Dos giros de distinto centro b) Dos simetrías de ejes secantes
   c) Un giro y una simetría d) Dos simetrías de ejes paralelos.

Solución: b)

CAPÍTULO 10: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO. GLOBO TERRÁQUEO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO EN EL ESPACIO

1. Busca en la habitación en la que te encuentras, ejemplos de:
    a. Planos paralelos y perpendiculares.
    b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares y coplanarias, rectas perpendiculares y no coplanarias.
    c. Recta paralela a plano, recta y plano secantes, recta contenida en plano.

Solución: Respuesta abierta.

2. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 ángulos diedros consecutivos e iguales. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?

Solución: 72º.

3. Desde un punto interior a una sala de planta hexagonal regular se traza una recta perpendicular a cada pared. ¿Cuánto medirá el ángulo que forman dos perpendiculares consecutivas?

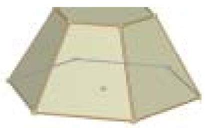
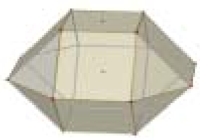
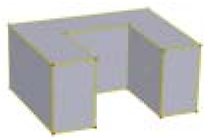
Solución: 60º.

4. Dos triedros tienen las tres caras iguales, ¿se puede asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

Solución: Han de ser iguales los tres diedros que lo forman.

2. POLIEDROS

5. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de Euler. Indica también si son cóncavos o convexos

Solución: Son poliedros los 1, 2, 4 y 5. Son convexos 2 y 4; cóncavos 1, 3 y 5. Los cuatro poliedros cumplen el teorema de Euler.

6. Es posible demostrar con un rompecabezas el teorema de Pitágoras en el espacio. Te proponemos que lo intentes. Podrás encontrar en la revista y entre los recursos para imprimir las piezas que te ayudarán. En la fotografía se muestra el puzle resuelto.

Solución: En la fotografía se muestra el puzle resuelto.

7. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.

Solución: El prisma triangular no puede ser cóncavo porque no hay triángulos cóncavos. El prisma cóncavo no puede ser regular porque los polígonos cóncavos no son regulares.

8. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.

Solución: el cubo es un prisma cuadrangular regular.

9. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?

Solución: No. Si las bases son dos rectángulos iguales y las caras laterales son romboides se trata de un prisma oblicuo.

10. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.

Solución: Tiene siete caras, quince aristas y diez vértices: 7 – 15 + 10 = 2.

11. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

Solución: $2\sqrt{3}$ ***dm*** $\approx$ ***3.46 dm.***

12. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 10 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura.

Solución: $5\sqrt{5}$ ***m*** $\approx$ ***11.180 m.***

13. Clasifica los siguientes poliedros

Solución: Prisma triangular recto. Octaedro regular. Dodecaedro regular. Prisma cuadrangular regular. Prisma hexagonal regular.

14. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.

Solución: El tetraedro regular es una pirámide. En una pirámide todas las caras laterales concurren en el ápice así que no pueden ser paralelas. La base no puede ser paralela a ninguna cara lateral porque tiene una arista común con cada una de ellas.

15. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

Solución: Respuesta gráfica.

3. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

16. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 m.

Solución: $4800 + 2\sqrt{3}$ ***cm²*** $\approx$ ***4803.4641 cm².***

17. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m² y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

Solución: 9 m.

18. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula la apotema de la pirámide y su área total.

Solución: Apotema = $\sqrt{127}$ ***cm*** $\approx$ ***11.13 cm y Área =*** $18\sqrt{127} + 108\sqrt{3}$ ***cm²*** $\approx$ ***389.91 cm².***

19. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.

Solución: 352 dm².

20. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm², calcula la apotema de la pirámide y su altura.

Solución: Si llamamos "a" a la arista de la base, la altura de la pirámide es $\dfrac{\sqrt{10616 - a^4}}{2a}$

4. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

21. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?

Solución: $\dfrac{76}{25}\pi$ ***m²*** $\approx$ ***9.550442 m².***

22. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

Solución: 20216 π ***cm²*** $\approx$ ***63510.44 cm².***

23. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.

Solución: 1500 π ***dm²*** $\approx$ ***4712.3890 dm².***

24. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.

Solución: $\left(\dfrac{625}{64\pi} + 25\right)$ ***m²*** $\approx$ ***28.108495 m².***

25. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

Solución: a) 8 π ***m*** $\approx$ ***25.133 m. b) 64*** π ***m²*** $\approx$ ***201.061930 m².***

5. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

26. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.

Solución: $288\sqrt{3}$ ***dm³ ≈ 408.830632 dm³.***

27. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

Solución: 360 π cm³ ≈ 1130.973 cm³.

28. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
    a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
    b. Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

Solución: a) 1000 π dm³ ≈ 3149 dm³; b) 2 512 €.

29. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

Solución: Ambos volúmenes son $\frac{500\,\pi}{3}$ ***dm³.***

6. GLOBO TERRÁQUEO

30. Un avión recorre 20º en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170º Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?

Solución: 0º de latitud, 170º Oeste.

31. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?

Solución: En el polo norte (exactamente).

32. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.

Solución: El mayor paralelo es el ecuador. Los meridianos son todos iguales.

33. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.

Solución abierta:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo y perpendicularidad. Poliedros: elementos y tipos.

1. Si estamos en una habitación sin columnas, atendiendo al suelo y a sus cuatro paredes, ¿cuántos ángulos diedros se forman?

Solución: Doce diedros si la habitación tiene techo. Sin techo, ocho.

2. Dobla por la mitad una hoja de papel, construye un ángulo diedro y traza su rectilíneo. ¿Podrías medir la amplitud de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?

Solución manipulativa y abierta:

3. Determina la amplitud de los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un octógono regular.

Solución: 135º.

4. Dos caras de un triedro miden 60º y 118º, ¿Entre qué valores puede oscilar la otra?

Solución: Entre 0º y 182º, ambos excluidos.

5. ¿Se puede formar un ángulo poliedro con un ángulo de un triángulo equilátero, dos ángulos de un rectángulo y uno de un pentágono regular?

Solución: 60º + 2 · 90º + 108º = 348º < 360º. Se puede.

6. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

Solución: 120º · 3 = 360º. No se puede.

7. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

Solución: En el cubo 4; en el octaedro 3.

8. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

Solución: En el tetraedro no. En todos los demás, sí.

9. Prolonga una pareja de aristas en una pirámide pentagonal, de modo que se obtengan rectas no coplanarias.

Solución manipulativa:

10. Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.

Solución manipulativa y gráfica:

11. Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?

Solución: Ha de tener 20 caras. Una pirámide convexa tiene tantas caras como vértices, así que no puede ser una pirámide. Un prisma convexo de 20 caras tendría dos bases y 18 caras laterales. En este caso tendría 54 aristas y 36 vértices.

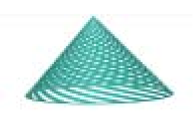
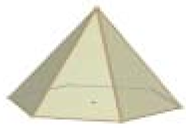
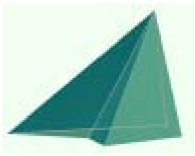
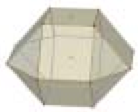
12. Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?

Solución: Se puede construir un cubo, un octaedro o dos tetraedros.

13. De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?

Solución: 10 caras (es un prisma octogonal).

14. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?

Solución: Cono.

Pirámide hexagonal regular. 7 vértices, 12 aristas y 7 caras. Cumple el teorema de Euler.

Pirámide pentagonal cóncava. 7 vértices, 12 aristas y 7 caras. Cumple el teorema de Euler.

Es un poliedro formado por 8 triángulos equiláteros y 10 cuadrados. 16 vértices, 32 aristas y 18 caras. Cumple el teorema de Euler.

Prisma pentagonal oblicuo. 10 vértices, 15 aristas y 7 caras. Cumple el teorema de Euler.

15. Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?

Solución: En un prisma recto todas las caras laterales son rectángulos; en el oblicuo algunas no los son.

Un prisma con base un rombo o un romboide tiene cuatro caras laterales que son rectángulos paralelos dos a dos y no es un ortoedro.

Teorema de Pitágoras en el espacio

16. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.

Solución manipulativa y gráfica.

17. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

Solución: $\sqrt{77}$ ***cm*** $\approx$ ***8.8 cm.***

18. Un vaso de 12 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 4 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?

Solución: 17 cm.

19. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?

Solución: La diagonal de este ortoedro mide 13 cm. Si el bolígrafo tiene diámetro distinto de cero en sus dos extremos, no cabe.

20. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.

Solución: $2\sqrt{34}$ ***cm*** $\approx$ ***11.7 cm.***

21. Si un ascensor mide 1 m de ancho, 1.5 m de largo y 2.2 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?

Solución: La diagonal del ortoedro mide aproximadamente 2.844 m. La escalera no cabe.

22. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 metros de altura ?

Solución: $2\sqrt{29}$ ***m*** $\approx$ ***10.770 m.***

23. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 cm.

Solución: Aproximadamente 2 cm.

24. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

Solución: $\sqrt{149}$ ***cm ≈ 12.2 cm.***

Área lateral, total y volumen de cuerpos geométricos

25. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

Solución: Prisma cuadrangular regular; prisma hexagonal regular; tronco de cono recto; Tetraedro (regular); cilindro recto.

26. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

Solución: Área lateral: 96 dm²; área total: 108 dm².

27. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.

Solución: Área de la base: $24\sqrt{3}$ ***cm²; área total:*** $48(5+\sqrt{3})$ ***cm² ≈ 323.14 cm².***

28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm² de área. Calcula su volumen.

Solución: 360 cm³.

29. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3.5 dm, 8.2 dm y 75 cm.

Solución: 232.9 dm².

30. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5 cm de radio de la base.

Solución: Área total: 8950 cm² ≈ 25289.82 cm².

Volumen: 20000 π cm³ ≈ 62831.853 cm³.

31. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.

Solución: 100 π cm² ≈ 314.16 cm².

32. Calcula la apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m² y su base es un hexágono de 5 m de lado.

Solución: 4 m.

33. Calcula la apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

Solución: Apotema de la pirámide: $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ ***dm ≈ 6.11 dm.***

Volumen: $\frac{512\sqrt{3}}{9}$ ***dm³ ≈ 98.534446 dm³.***

34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

Solución: Si el eje de giro es el cateto mayor:

Área lateral: 65 π cm² ≈ 204.20 cm²; área total: 90 π cm² ≈ 282.74 cm².

Volumen: 100 π cm³ ≈ 314.159 cm³.

Si el eje de giro es el cateto menor:

Área lateral: 156 π cm² ≈ 480.09 cm²; área total: 300 π cm² ≈ 942.48 cm².

Volumen: 240 π cm³ ≈ 753.982 cm³.

35. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0.3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

Solución: $2\sqrt[3]{65755}$ ***dm ≈ 80.72 dm.***

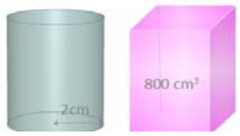
36. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1.20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?

Solución: $\frac{36\pi}{5}$ ***cm³ ≈ 22.619 cm³.***

37. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

Solución: El área total es $100\,(1+\sqrt{26}\,)$ ***cm²*** $\approx$ ***609.91 cm².***

Para recortar el desarrollo de la pirámide necesitaremos más cartón. El cuadrado mínimo necesario tiene $5\sqrt{2}+10\sqrt{13}$ ***cm*** $\approx$ ***43.2 cm.***



38. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm3 de volumen.

Solución: 200 π ***cm³*** $\approx$ ***628.319 cm³.***

39. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1.20 m de alto y 248 dm³ de volumen?

Solución: $\frac{31}{150}$ ***m²*** $\approx$ ***0.206 m².***

40. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

Solución: Se llenan 3 619 114 envases.

41. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.

Solución: Una vez recortados todos los tetraedros, el área total es $40\sqrt{3}$ ***cm²*** $\approx$ ***69.28 cm².***

42. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

Solución: $48+2\sqrt{3}$ ***cm²*** $\approx$ ***51.46 cm².***

43. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.

Solución: El área total es $12+3\sqrt{3}$ ***m²*** $\approx$ ***17.194152 m². Si lo queremos envolver con un rectángulo de papel, ha de medir 6 m de largo y*** $2+\sqrt{3}$ ***m de ancho. Aproximadamente 6 por 3.74 m.***

44. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

Solución: $432\sqrt{3}$ ***dm³*** $\approx$ ***748.245949 dm³.***

45. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14.5 m.

Solución: Aproximadamente 4.775; 7.958 y 11.141 m.

46. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm² de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

Solución: $\frac{21-3\sqrt{33}}{4}$ ***dm³*** $\approx$ ***0.941578 dm³.***

47. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm³, calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3.14 como valor de π).

Solución: $\sqrt{10}$ ***cm*** $\approx$ ***3.2 cm.***

48. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m³. (Tomar π=3,14). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

Solución: 3π m³ = 3 000 π L. Si tomamos π = 3.14, el volumen es 9 420 L. Si utilizamos el valor de la calculadora, 9 424.778 L.

49. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm³, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

Solución: a) 1 L = 1 000 cm³; b) la altura del envase es 10 cm. (Se trata de un cubo.).

50. Una circunferencia de longitud 2.24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar π=3.14).

Solución: Aproximadamente 5.885 cm³.

51. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3. A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.

Solución: A) 0.064 m^3; B) 219.2 €; C) 19.2 €.

52. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

Solución: Exactamente 34.56 cm.

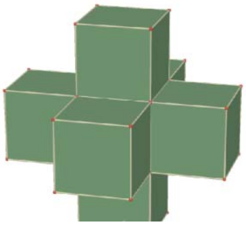
53. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

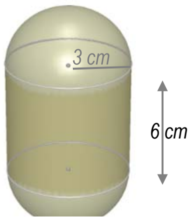
Solución: 10 cm de diámetro y 10 cm de altura. El área es 100 π $cm^2 \approx 314.1593$ cm^2.

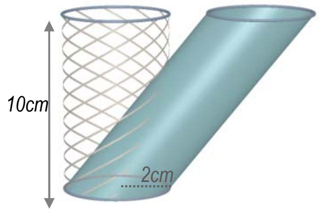
54. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31.40 m?

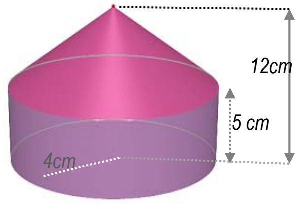
Solución: Aproximadamente 522.803 cm^3.

55. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos









Solución:

Primera. Área: 480 cm^2. Volumen: 448 cm^3.

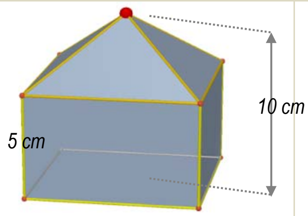
Segunda. Área: 72 π $cm^2 \approx 226.19$ cm^2. Volumen: 90 π $cm^3 \approx 282.743$ cm^3.

Tercera. El área depende de la inclinación. Volumen: 40 π $cm^3 \approx 125.664$ cm^3.

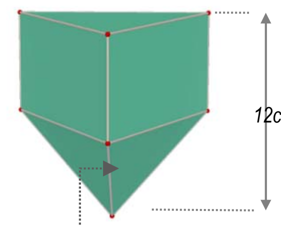
Cuarta. Área: $4\pi(14+\sqrt{65})$ ***$cm^2 \approx 277.24$ cm^2.***

Volumen: $\frac{352\pi}{3}$ ***$cm^3 \approx 368.614$ cm^3.***

56. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada 7cm



Tetraedro de 5cm de arista

Octaedro de 6cm de arista

Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

Solución:

Primera. Área: $189+7\sqrt{149}$ ***$cm^2 \approx 274.45$ cm^2.***

Volumen: $\frac{980}{3}$ ***$cm^3 \approx 326.666$ cm^3.***

Segunda. Área: $(180-25\sqrt{6}+25\sqrt{3})$ ***$cm^2 \approx 162.06$ cm^2.***

Volumen: $\frac{2250\sqrt{2}-625\sqrt{3}}{18}$ ***$cm^3 \approx 116.636$ cm^3.***

Tercera. Área: $72\sqrt{3}$ ***$cm^2 \approx 124.71$ cm^2.***

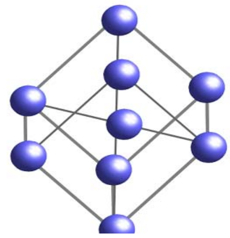
Volumen: $72\sqrt{2}$ ***$cm^3 \approx 101.82$ cm^3.***

Cuarta. Área: $\frac{25}{2}(3+\sqrt{3})$ ***$dm^2 \approx 59.1506$ dm^2.***

Volumen: $\frac{125}{3}$ ***$dm^3 \approx$ 41.6 dm^3.***

57. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2.5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

Solución: Consideramos que 2.5 m es el radio del globo. Suponemos que se paga solo la lona del globo y no los recortes ni las costuras.
La superficie de la esfera es 25π m^2. El precio sería 23 561.95 €.



58. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.

Solución: Aproximadamente 2 dm.

59. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

Solución: Aproximadamente 60.695 L.

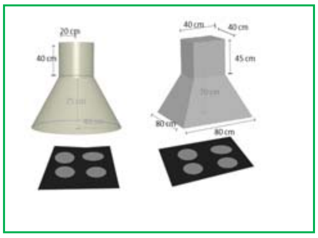
60. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

Solución: 659.73 €.

61. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
    a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
    b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

Solución: a) 200 000 L; b) 4 000 €.

62. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?



Solución: El área de la circular es $100\pi(16+3\sqrt{41})$ cm^2.
El área de la cuadrada es $100\pi(16+3\sqrt{41})$ cm^2. Esta última es mayor.

63. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0.3 metros el nivel del agua?

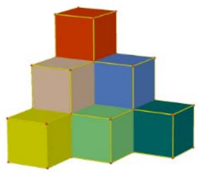
Solución: 48π dm^3 $\approx$ 150.796447 dm^3.

64. El precio de las tejas es de 14.30 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8 metros de lado de la base?

Solución: El precio de la pirámide es 1 294.29 €.

65. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

Solución: Si hacemos coincidir los lados largos, el volumen es $\frac{9375}{\pi}$ cm^3. Si hacemos coincidir los lados cortos, el volumen es $\frac{11250}{\pi}$ cm^3.Este último es mayor.



66. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

Solución: 17 cubos.

67. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

Solución: $\frac{261\pi}{8}$ cm^3 $\approx$ 102.494 cm^3.

68. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.

Solución: Área lateral: $500\pi\sqrt{26}$ cm^2 $\approx$ 8009.52 cm^2.
Si las bases son de cristal, miden respectivamente 400π y 900π. En total serían aproximadamente 12 093.59 cm^2.

69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

Solución: $\frac{11314\pi}{3}$ cm^3 $\approx$ 11847.993 cm^3.

70. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120º y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.

Solución: $\frac{16000\pi}{81}$ cm^3 $\approx$ 877.607 cm^3.

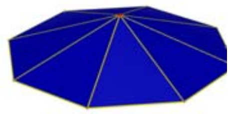
71. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?

Solución: $\frac{60}{\pi}$ ***cm*** $\approx$ ***19.2 cm.***

72. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?

Solución: $\frac{36}{\pi}$ ***cm*** $\approx$ ***114.6 cm.***

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?



Solución: La sombra es igual al octógono de la base. El área de un octógono de lado a es $\frac{2a^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$***. Si a = 45 cm, el área aproximada es 9 777.56 cm²***^{2}***.***

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?

Solución: $\frac{875}{27}$ ***cm*** $\approx$ ***32.407407 cm.***

75. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360º alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.

Solución: 50 π ***m***^{3} $\approx$ ***157.079632679 m***^{3}

76. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?

Solución: Superficie de galleta: $\frac{25\pi\sqrt{37}}{4}$ ***cm***^{2} $\approx$ ***119.43 cm***^{2}***. El volumen de helado es*** $\frac{125\pi}{4}$ ***cm***^{3} $\approx$ ***98.175 cm***^{3}***. La masa depende de la densidad del helado.***

Husos horarios

77. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?

Solución: 75º de longitud. De las latitudes no se sabe nada.

78. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45º y el avión despega del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?

Solución: A las 16 horas.

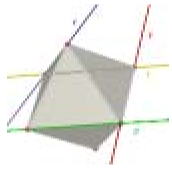
79. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo, en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0º	51º 30´latitud N
PEKIN	116º longitud E	40º latitud N
SAO PAULO	46º 30´de longitud W	23º 30´de latitud S

Solución: Por la diferencia de latitud.

AUTOEVALUACIÓN

1. Cada una de las rectas r, s, t y p pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:

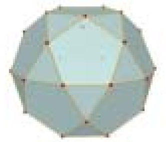
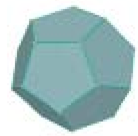
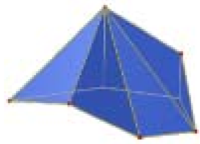


a) Las rectas r y s son coplanarias y secantes. **b)** Las rectas t y p no son coplanarias.

c) Las rectas r y p se cruzan. **d)** r y s contienen aristas de una misma cara del octaedro

Solución c):

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:

a)	b)	c)	d)	e)	f)
					

a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. **b)** . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI).

c) Son poliedros regulares II) y IV). **d)** Son cóncavos I) y V).

Solución a):

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

Solución d):

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

Solución b):

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

a) 38 tejas **b)** 76 tejas **c)** 72 tejas **d)** 36 tejas

Solución a):

6. Una caja de dimensiones $30 \times 20 \times 15 \quad cm$, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

Solución d):

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

Solución b):

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

Solución a):

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

a) 2250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

Solución c):

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B , C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos.

b) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más.

c) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más.

d) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.

Solución d):

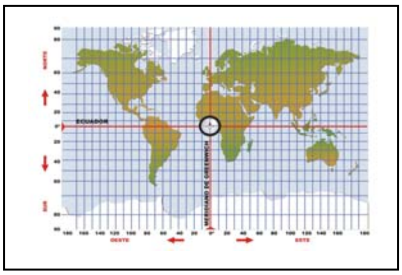
CAPÍTULO 11: FUNCIONES Y GRÁFICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO.

1. Fíjate en el mapa siguiente, localiza los países o ciudades que se piden e indica en tu cuaderno:

   a) Los cuadrantes donde se encuentran los siguientes países:



- Méjico:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Argentina:
- Australia:
- Japón:
- Arabia Saudí:
- Alemania:
- EEUU:
- Marruecos:

   b) Las coordenadas (aproximadas) de las siguientes ciudades:

- Ciudad del Cabo
- Nueva York:
- Río de Janeiro:
- Alicante
- Rabat:
- Pekín:
- Córdoba (Méjico):
- Sídney:
- Londres:
- Oviedo:

Solución: a) Primer cuadrante: India, Japón, Arabia Saudí y Alemania; Segundo cuadrante: Méjico, España, EEUU y Marruecos; Tercer cuadrante: Chile y Argentina; Cuarto cuadrante: Madagascar y Australia;

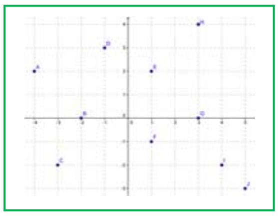
b) Ciudad del Cabo: 33ºSur, 18 º Este, (-35, 125); Nueva York: 41 º Norte, 71 º Oeste, (41, -74);

Río de Janeiro: 23 º Sur, 43 º Oeste, (-23, -43); Alicante: 38 º Oeste, 0º, (38, 0); Pekín: 40º Norte, 116 º Este, (40, 116);

Rabat: 34 º Norte, 7 º Oeste, (34, -7); Sídney: 34 º Sur, 151 º Este (-34, 151); Oviedo: 43 º Norte, 6 º Oeste, (43, -6); Londres, 51 º Norte, 0º Oeste, (51, 0); Córdoba (Méjico): 19 º Norte, 97 º Oeste, (19, -97).

2. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

Solución gráfica: Las coordenadas de los puntos, de arriba abajo, y de izquierda a derecha, son: (3, 4), (–1, 3), (–4, 2), (1, 2), (–2, 0), (3, 0), (1, –1), (–3, –2), (4, –2), (5, –3).

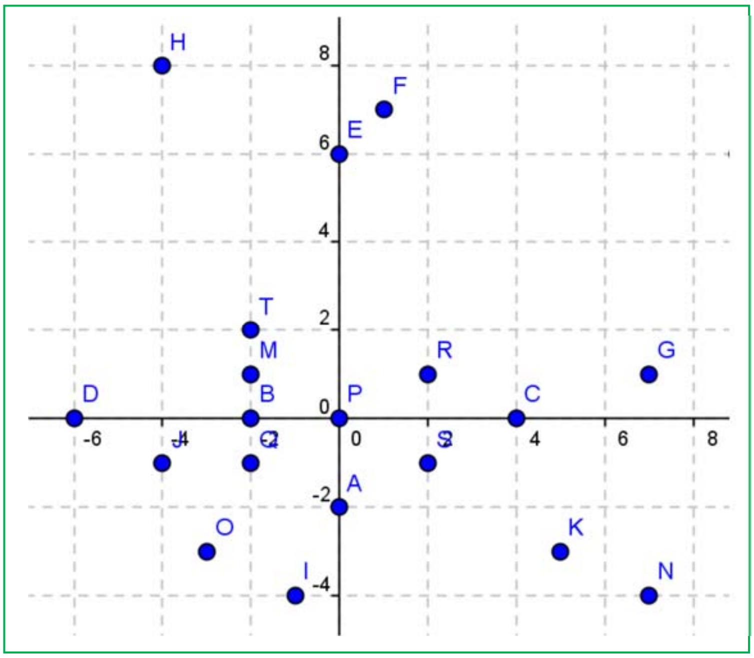


3. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano:

A (0, –2) *B* (–2, 0) *C* (4, 0) *D* (–6, 0) *E* (0, 6) *F* (1, 7) *G* (7, 1) *H* (–4, 8) *I* (–1, –4) *J* (–4, –1)

K (5, –3) *L* (9, 6) *M* (–2, 1) *N* (7, –4) *Ñ* (–3, –3) *O(0, 0)* *P(–2, –1)* *Q*(2, 1) *R*(2, –1) *S*(–2, 2)

Solución gráfica:



2. FUNCIONES

4. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:
   a. Edad – altura de la persona a lo largo de su vida
   b. Altura – edad de la persona
   c. Precio de la gasolina – día del mes
   d. Día del mes – precio de la gasolina
   e. Un número y su quinta parte
   f. Un número y su cuadrado
   g. Un número y su raíz cuadrada

Solución: Son funciones: a), d), f), g); No lo son: b), c).

5. Si hoy el cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	60
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función? Si realizas el cambio en una oficina, te cobran una pequeña comisión fija por realizar la operación de 1.5 €. ¿Cómo quedaría/n la fórmula/s en este caso?

Solución:

€	2	5	10	27	60
$	2.74	6.85	13.70	36.99	82.20

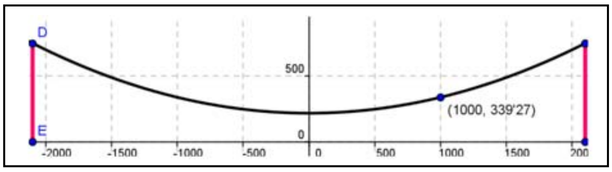
$y = 1.37x$, se puede expresar de forma única. Es una función; $y = 1.37x + 1.5$.

6. El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 746 pies de altura, están separadas por una distancia de 4200 pies aproximadamente. La calzada, que tiene una anchura de 90 pies y se encuentra a una altura de 220 pies sobre el nivel del agua, está sujeta a las torres mediante dos cables, de 3 pies de diámetro, que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente.

-Realiza un dibujo donde queden reflejados los datos más significativos del problema.

-Determina la relación que existe entre la altura a la que se encuentra un punto del cable y la distancia de su proyección vertical al centro del puente.

-Aplicar dicha fórmula para calcular la altura de un punto del cable cuya vertical está a 1000 pies del centro del puente.

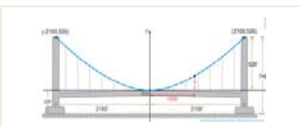


Solución gráfica: Los cables toman la forma de una parábola, de vértice (0, 220) y que pasa por los puntos (4200/2, 746) = (2100, 746) y (–2100, 746) luego su ecuación es:

$$y = 0.00011927\,x^2 + 220,$$

siendo y la altura de un punto del cable, y x la distancia de su proyección vertical al centro del puente.

Si $x = 1000$ entonces $y = 339.2743$ pies.



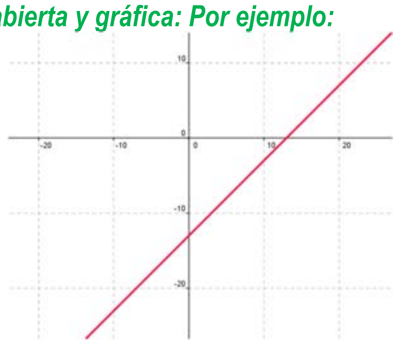
También podemos hacer que el origen de coordenadas coincida con el vértice de la parábola. Así la carretera será la recta $y = 0$. La parábola tiene entonces la ecuación:

$y = (746 - 220)/(2100^2)x^2 = 526/(2100^2)x^2$ y la altura cuando $x = 1000$ es de

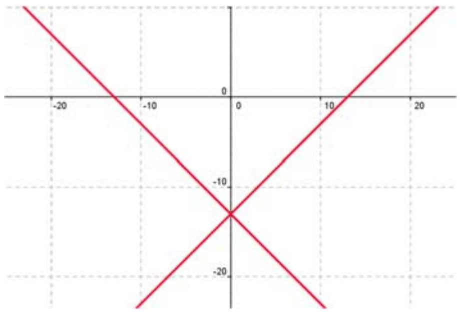
$$y = 339.2743 - 220 \approx 119.3 \text{ pies}$$

7. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y la otra no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

Solución abierta y gráfica: Por ejemplo:

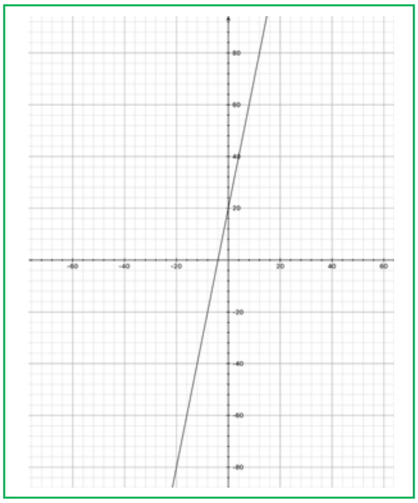


Es una función. A cada valor de la abscisa corresponde un único valor de la ordenada



No es una función pues a cada valor de la abscisa corresponden dos valores de la ordenada

8. Realiza en tu cuaderno una tabla con 10 valores de la función $e(t) = 5t + 20$, represéntalos gráficamente e indica la figura que determinan. Si dicha función representa el espacio (en kilómetros) que recorre una persona que lleva andados 20 km y camina a una velocidad de 5 km/h, en función del tiempo que tarda en recorrerlo (en horas), indica cuáles serían los valores que no tendría sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.



Solución abierta y gráfica:

–3	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*	*50*	*55*	*60*	*65*	*70*

Es una recta. No tendrían sentido los tiempos negativos.

9. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

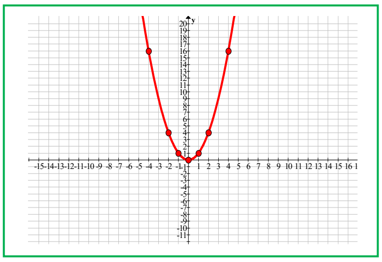
x	–13	–7	10	–13	24
f(x)	–15	0	14	3	0

Solución: No porque un valor de la variable independiente, el -13, hay dos valores diferentes de la variable dependiente.

10. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. ¿Cuál es su área? Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

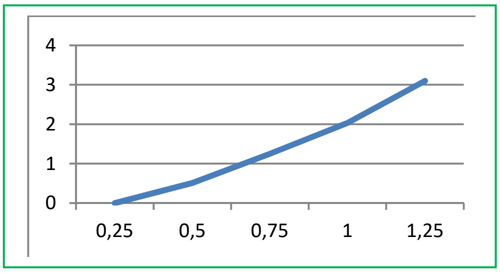
Solución gráfica:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*



Si representan áreas, no tiene sentido para valores negativos de la variable independiente, aunque en la gráfica la hemos extendido a dicho valores. La fórmula es: $y = x^2$.

11. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.



Solución gráfica: La tabla indica los datos de Bilbao de 2016.

Horas	*0.25*	*0.5*	*0.75*	*1*	*1.25*
Euros	*0*	*0.51*	*1.25*	*2.03*	*3.1*

12. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 4 cm y de altura total del vaso 24 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

Solución:

h = Altura (cm)	*0*	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*
V = Volumen (cm³)	*0*	*151*	*301.4*	*452*	*603*	*754*	*904*	*1055*	*1206*	*1356*

$V = \pi r^2 h \approx 3.14*16*h = 50.24*h$.

$h = V/50.24$.

1 dl = 100 cm³, luego aproximadamente se debe colocar a 2 cm de altura.

13. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas de que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 3, –2, y 1/2 respectivamente.

Solución: $y = 3x$; $y = –2x$; $y = (1/2)x$.

14. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta $y = x$? ¿Y la recta $y = -x$?

Solución: 45 º = π/4, y 135º = 3π/4.

15. Un metro de cierta tela cuesta 1.35 €, ¿cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 m? ¿Y 12.5 m? ¿Cuánto cuestan “*x*” metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

Solución: 5 metros cuestan 6.75 €; 10 metros, 13.5 € y 12.5 m, 16.88 €. X metros cuestan 1.35x.

16. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:
    a) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es 3.
    b) Pasa por los puntos *A*(1, 3) y *B*(0, 4).
    c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
    d) Pasa por los puntos *C*(–1, 3) y *D*(–2, 5).
    e) Pasa por el punto (*a*, *b*) y tiene de pendiente *m*.

Solución gráfica: a) y = 2x + 3; b) y = –x + 4; c) y = 0; d) y = -2 x + 1; e) y = b + m(x – a).

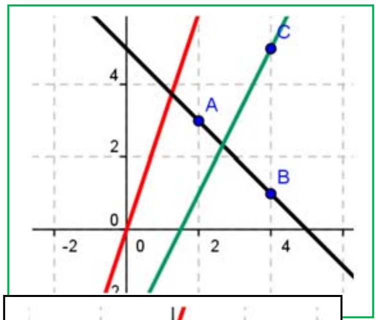
17. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

Solución: Paralelas

18. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

Solución:

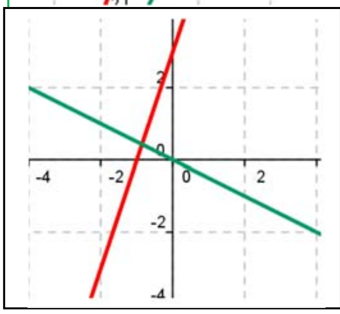
a) De pendiente 3 y ordenada en el origen 0.
b) Pasa por los puntos ***A***(2, 3) y ***B***(4, 1).
c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).



19. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = 3x + 3$

Solución: y = 3x + 3

x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*–3*	*0*	*3*	*6*	*9*	*12*



20. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = \frac{-x}{2}$

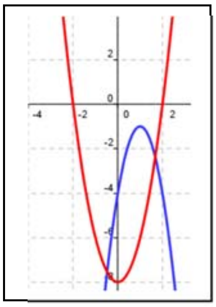
Solución: y = –x/2;

x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*1*	*1/2*	*0*	*–1/2*	*–1*	*–3/2*

21. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = -3x^2 + 6x - 4$

Solución: y = –3x² + 6 x – 4;

x	*–1*	*–0*	*1*	*2*	*3*
y	*–13*	*–4*	*–1*	*–4*	*–13*



22. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = 2x^2 - 8$

Solución: y = 2x² – 8;

x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*0*	*–6*	*–8*	*–6*	*0*	*10*

23. Dibuja la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.

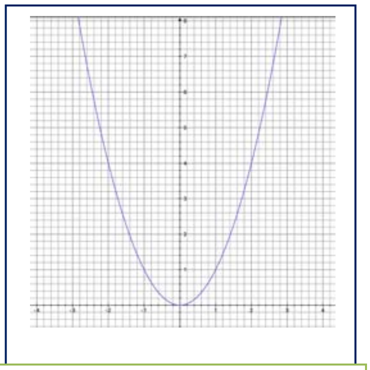
b) Tomando valores de abscisa negativa.

c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?

d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.

e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.

f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.



Solución manipulativa y gráfica:

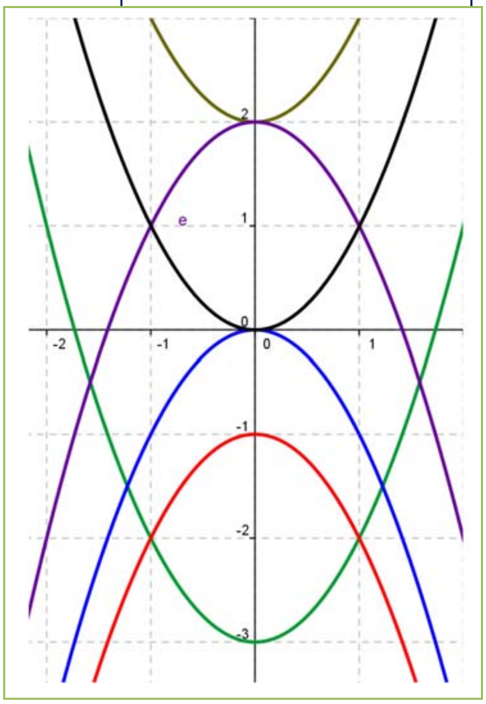
x	*–2*	*–1*	*0*	*1*	*2*	*3*
y	*4*	*1*	*0*	*1*	*4*	*6*

c) Para valores grandes de x la gráfica crece, tiende a +∞. Y para valores negativos grandes en valor absoluto, también crece, también tiende a +∞.

d) Es simétrica, con simetría par. Su eje de simetría es la recta x = 0.

e) Tiene un mínimo en (0, 0) que es el vértice de la parábola.

24. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$.



Solución: La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

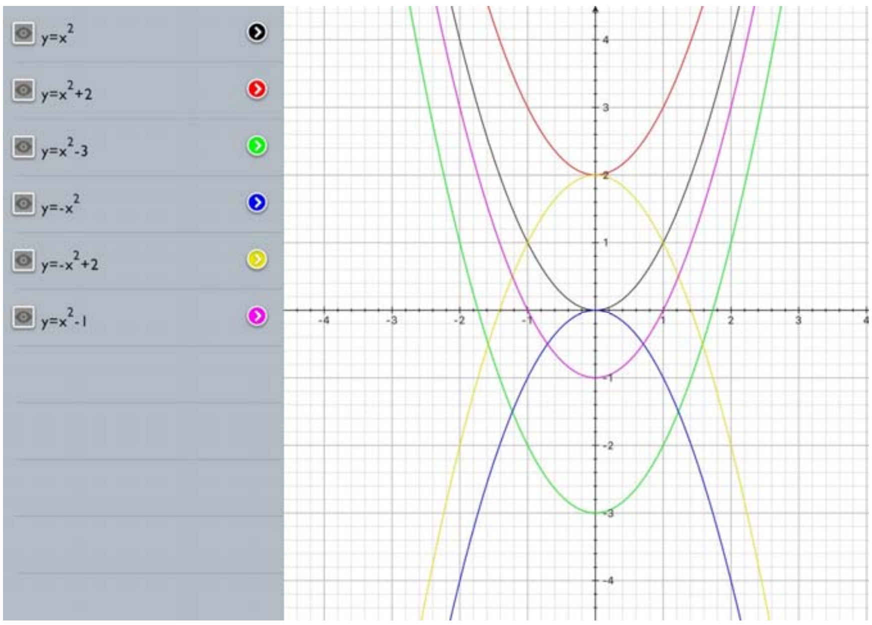
$y = x^2 + 2$;

$y = x^2 - 3$;

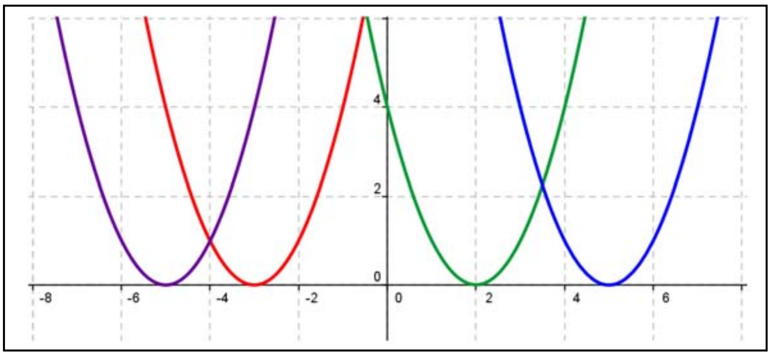
$y = -x^2$;

$y = -x^2 + 2$;

$y = x^2 - 1$;



25. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.



Solución: En general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos y = (x – q)².

$y = (x + 3)^2$;
$y = (x - 2)^2$;
$y = (x + 5)^2$;
$y = (x - 5)^2$

26. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal a la derecha y 3 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

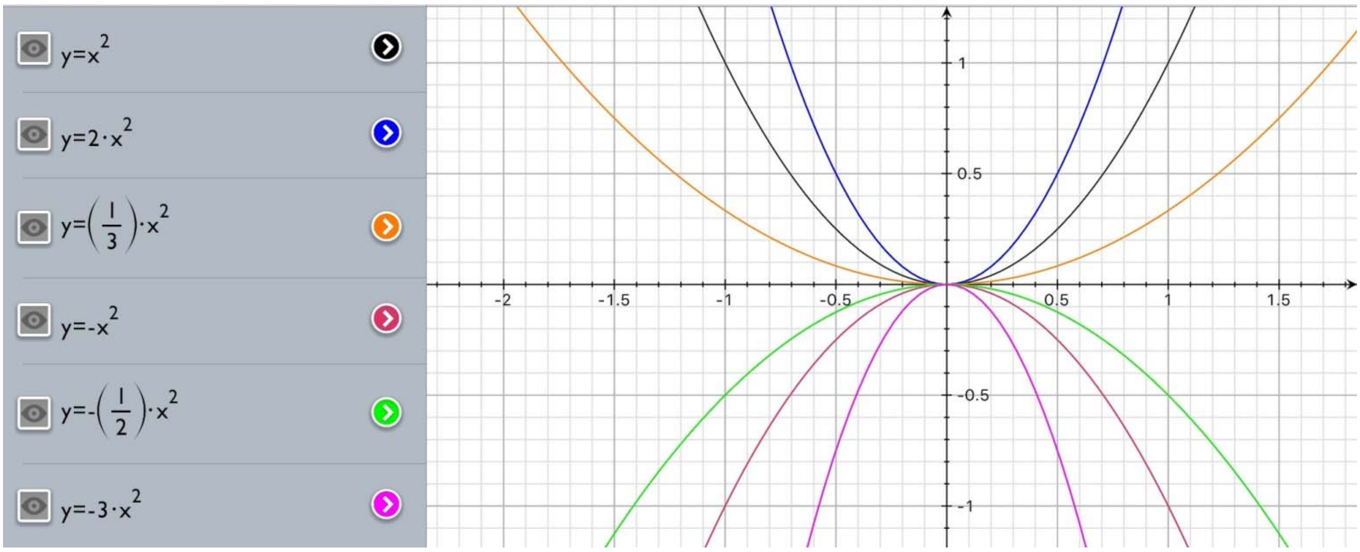
Solución: $y = (x - 5)^2 + 3$. ***V(5, 3).***

27. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas:

$y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que ahora ya no te sirve la plantilla empleada. Ahora las parábolas se estrechan o se ensanchan.

Solución:



28. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

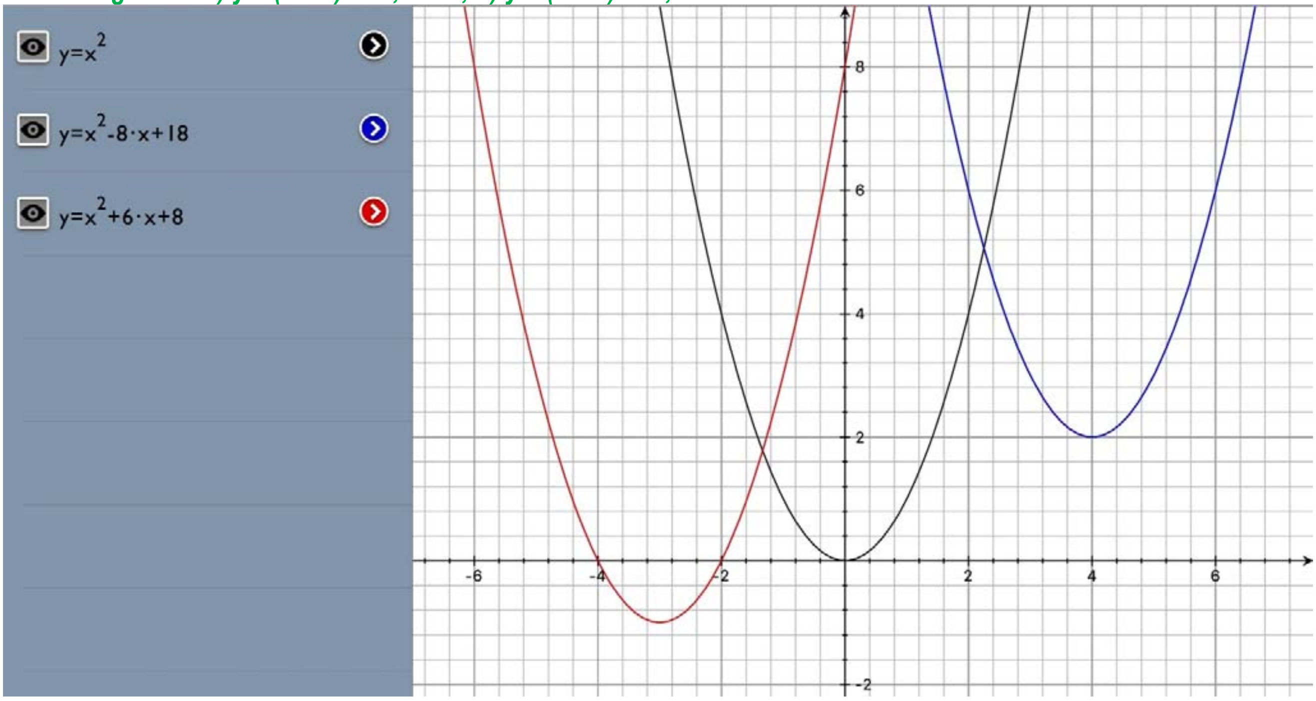
Solución: Si a > 1 entonces la gráfica se estrecha
Si 0 < a < 1 entonces la gráfica se ensancha
Si a < –1 entonces la gráfica se estrecha, y las ramas de la parábola van hacia abajo.
Si –1 < a < 0 entonces la gráfica se ensancha, y las ramas de la parábola van hacia abajo.

29. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (4, 2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–3, –1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

Solución gráfica: a) $y = (x - 4)^2 + 2$; $x = 4$; b) $y = (x + 3)^2 - 1$; $x = -3$.



LOGARITMOS

30. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

Solución:

$2^5 = 32$	$\Leftrightarrow \log_2 32 = 5$	$2^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_2 1 = 0$
$5^1 = 5$	$\Leftrightarrow \log_5 5 = 1$	$5^0 = 1$	$\Leftrightarrow \log_5 1 = 0$
$2^1 = 2$	$\Leftrightarrow \log_2 2 = 1$	$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow \log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\Leftrightarrow \log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$	$\Leftrightarrow \log_3 81 = 4$

31. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

Solución: a) 5; b) 2; c) 41; d) 30.

32. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

Solución: a) 3; b) 2; c) 2; d) –4.

33. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

Solución: a) x = 6; b) 1/16; c) 5.

34. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$ b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Solución: a) 1.5; b) –8.

35. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

Solución: a) 1/5(ln4 + 2 lnx – 3) ***b) 3 log a + 2 log b – 4 log c – log d***

36. Utiliza la calculadora para obtener

a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

Solución: a) log 0.000142 = -3.8477117; b) log 142 = 2.15228834; c) log 9 + log 64 = 2.76042248

37. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

Solución: a) log81 = 4*(0.4771212); ***b) log27 = 3*(0.4771212);*** ***c) log59049 = 10*(0.4771212) = 4.771212.***

38. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Solución: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$ ***= log(m^{1/2}) – log(t²) – log(p) + log(h^{5/2}) = log((m^{1/2} · h^{5/2})/ (t²·p))***

GEOGEBRA

39. Dibuja en los mismos ejes coordenados las rectas que pasan por los siguientes puntos:

i) (0, 0) y (1, -2) ii) (1, 1) y (0, 3) iii) (-2, 0) y (0 ,-4)

a) ¿Cómo son las rectas?

b) Calcula la ecuación de las tres rectas del apartado anterior. ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y dibuja otras rectas paralelas para comprobarla.

Solución: Las rectas son paralelas.

i) y = –2x; ii) y = –2x + 3; iii) y = –2x – 4. Las tres rectas tienen la misma pendiente. Las rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.

40. Dibuja en los mismos ejes coordenados las rectas que pasan por los puntos:

i) (0, 3) y (1, 1) ii) (1, 4) y (-1, 2) iii) (-2, 4) y (2, 2) iv) (-2, -1) y (-1, 1)

a) Calcula las ecuaciones de las cuatro rectas.

b) ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que has calculado?

Solución: i) y = –2x +3; ii) y = x + 3; iii) $y = \frac{-1}{2}x + 3$***; iv) y = 2x + 3.***

Las cuatro pasan por le punto (0, 3).

41. ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen de las cuatro rectas que has dibujado en el ejercicio anterior? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y compruébala dibujando otras rectas que pasen por el mismo punto.

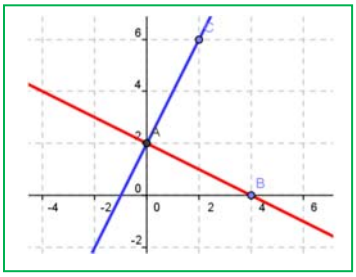
Solución: 3.

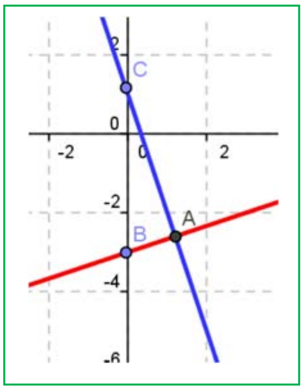
42. Observa las ecuaciones de las cuatro rectas que has dibujado, dos de ellas tienen pendiente positiva *a* y *d* y las otras dos, *b* y *c* tienen pendiente negativa. Relaciona el signo de la pendiente de la recta con el crecimiento o decrecimiento de la función que representan.

Solución: Las rectas con pendiente positiva crecen. Las rectas con pendiente negativa decrecen.

43. Calcula dos puntos de las rectas de ecuaciones: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para dibujarlas con Geogebra. Indica dos propiedades comunes de ambas gráficas.

Solución abierta: Por ejemplo: (0, 2) en ambas, (4, 0) de y = –x/2 + 2, y (2, 6) de y = 2x + 2. Ambas rectas tienen de ordenada en el origen 2, luego pasan por el punto (0, 2). Las dos rectas son ortogonales. Sus pendientes son 2 y -1/2 respectivamente.





44. Representa, también, las rectas de ecuaciones: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

Solución: Ahora tienen distinta ordenada en el origen, 1 y -3, pero también son ortogonales.

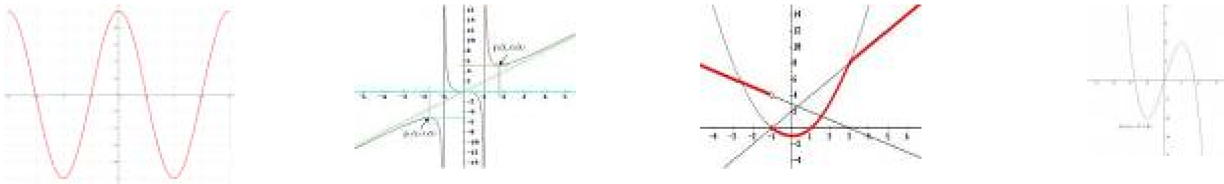
45. ¿Qué condición deben verificar las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares?

Solución: Analizando los dos problemas anteriores se comprueba que, si la pendiente de una recta es m, la pendiente de una recta ortogonal debe ser –1/m.

3. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

46. Señala todas las características que puedas de las funciones representadas mediante sus gráficas: dominio y rango, simetría, puntos de intersección con los ejes coordenados, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

GRÁFICA 1 GRÁFICA 2 GRÁFICA 3 GRÁFICA 4



***Solución:** a) Dominio = ℜ; Intersección con los ejes: (–1.5, 0), (0, 0), (1.5, 0); Máximo = (0, 0), mínimos: (–1, –1), (1, –1); Decreciente si x < 0, y 0 < x < 1; Creciente si –1 < x < 0 y x > 1. Simetría par.*

b) Dominio = ℜ – {–1, 1}; Asíntotas verticales: x = 1, x = –1; Función impar.

c) Dominio = ℜ; Función definida a trozos. Tiene un punto de discontinuidad en x = –1; Tiene un mínimo para x = 0. No es simétrica.

d) Dominio = ℜ; Mínimo en x = –1: Máximo en x = 1; Función impar.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sistemas de representación

1. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda: *A*(5,4); *B*(0,2); *C*(–2,0); *D*(3,–1,3); *E*(1.5,0); *F*(0,0); *G*(–1,–2/3). Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está.

***Solución gráfica:** A está en el primer cuadrante. B está en el eje de ordenadas. C y E están en el eje de abscisas. D está en el cuarto cuadrante. F es el origen de coordenadas. G está en el tercer cuadrante.*

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

***Solución abierta. Por ejemplo:** (–3, –2); (–6, –1); (–4, –9).*

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
A(0, 4); B(0, 2.3); C(0, –2); D(0, –1). ¿Qué tienen en común todos ellos?

***Solución gráfica:** Todos están en el eje de ordenadas.*

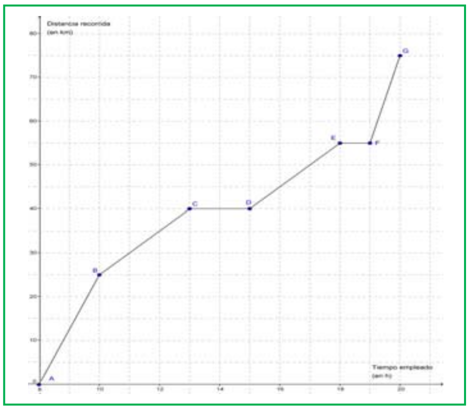
4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de ordenadas. ¿Qué tienen en común?

***Solución abierta. Por ejemplo:** (0, 1), (0, 2), (0, 3). Tienen igual a 0 la primera componente.*

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

***Solución gráfica:** A = O = (0, 0); B = (3, 0); C = (0, 4).*

6. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



   a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
   b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
   c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
   d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
   e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
   f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
   g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable “distancia al punto de partida”, ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

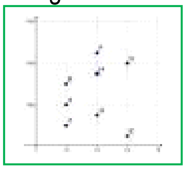
***Solución:** a) 12 horas; b) Dos horas de 13 h a 15 h, y una hora de 18 h a 19 h; c) 75 km; d) A la ida, de 8 a 10 h, y de 19 a 20 h; e) En el eje de ordenadas se indica distancia recorrida, y en el eje de abscisas las horas del día. Puede indicar que primero se mueven deprisa en un medio de locomoción, luego andan durante 3 horas, descansan para comer, vuelven a andar, descansan para merendar, (o esperar al tren) y regresan en un medio de locomoción; g) La gráfica sería distinta. Se podría hacer, pero no sabemos cuál ha sido el punto más alejado, si 40 km, o 75/2 km.*

Funciones y tipos de funciones.

7. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
   a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
   b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.

Solución: Funciones: b); No son funciones: a).

8. La altura y la edad de los componentes de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:



   a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura?
   b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad?
   c) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué?
   d) ¿Y la relación entre la edad y la altura? Realiza una gráfica similar a la anterior para representar esta situación.

Solución: a) Juan puede medir 160 cm, o 135 cm; b) María tiene 13 años; c) No es una relación funcional, pues a una misma altura le corresponden distintas edades; d) Tampoco, pues a una misma edad le corresponden distintas alturas.

9. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
b) Dibuja la gráfica.
c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3.14).
d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

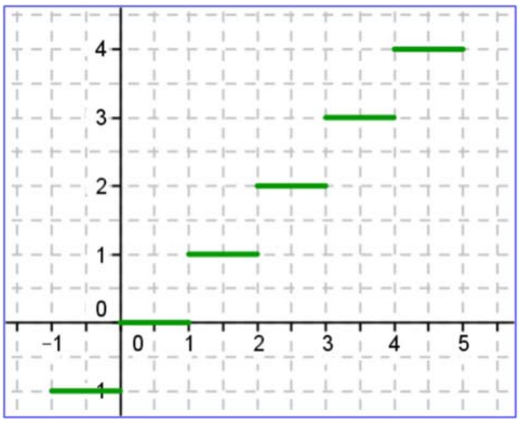
Solución: a) $d = 78\pi\cdot n$; b) Solución gráfica. Una recta que pasa por el origen y pendiente 78π;
c) $d = 78\pi 1000 \approx 245044$ cm = 2.45 km; d) 2856.6.

10. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:
    a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
    b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?
    c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
    d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

Solución: a) –7.6 º; b) 7 020 metros; c) $t = 9 - \frac{a}{180}$; d) $t = 12 - \frac{a}{180}$. Las dos son funciones afines que representan rectas paralelas.

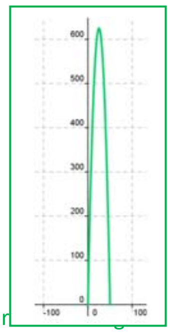
11. Dibuja la gráfica de la función parte entera: $y = E(x)$.

Solución:

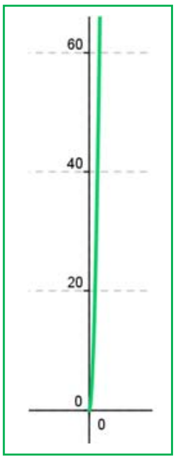


12. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama *x* a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de *x*. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

Solución gráfica: $A = x\cdot(50 – x)$. Una parábola.



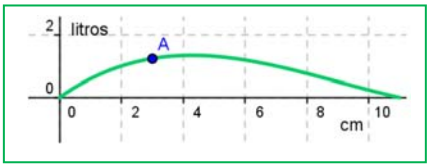
Textos Marea Verde



13. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

Solución gráfica: $V = 20x^2$.

14. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es *x*? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.



Solución gráfica: $V = (32 - 2x)\cdot(22 - 2x)\cdot x$; $V(3) = 1248$ cm^3; $V(2) = 1\,008$ cm^3.

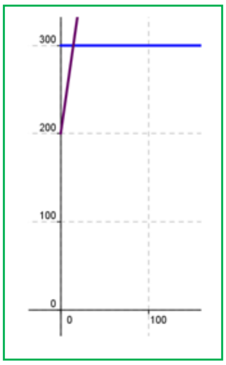
15. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada en el origen 6.

Solución: $y = 4x + 6$

16. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ y $C(13, 15)$.

Solución: No están alineados. Los puntos B(7, 9) y C(13, 15) están en la recta $y = x + 2$, y el punto A(3, 4) no pertenece a esa recta.

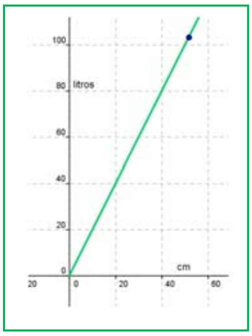
17. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.



Solución: Fórmula 1: $y = 300d$; Fórmula 2: $y = 200d + 7x$;

Coste Fórmula 1 = 3000 €; Coste Fórmula 2 = 2000 + 7000 = 9000 €.

En general es más barata la fórmula 1, pero si vamos a hacer menos de 14 km diarios, nos sale mejor la fórmula 2.



18. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.

Solución: $V = 1\,350\pi\cdot a$. $V(50) = 67\,500\pi \approx 212\,057.504$ cm^3 ≈ 212 l. $V(150) = 202\,500\,\pi \approx 636\,172.512$ cm^3 ≈ 636 l.

19. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

Solución:

a) Vértice V(–4, –29). Puntos de intersección: A(0, –13), B($-4+\sqrt{29}$, 0), C($-4-\sqrt{29}$, 0).

b) Vértice V(4, 3). Puntos de intersección: A(0, –13), B($4+\sqrt{3}$, 0), C($4-\sqrt{3}$, 0).

c) Vértice V(2, –2). Puntos de intersección: A(0, 2), B($2+\sqrt{2}$, 0), C($2-\sqrt{2}$, 0).

d) Vértice V(–3, –9). Puntos de intersección: A(0, 0), B(0, –6).

e) Vértice V(2, –3). Punto de intersección: A(0, –7).

20. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice (–2, –10)

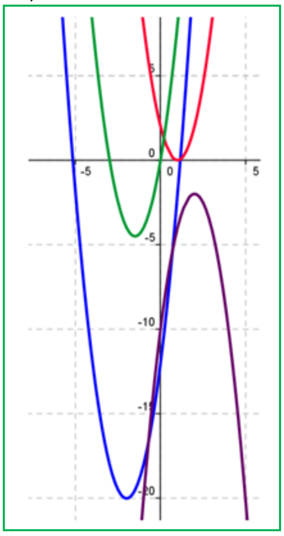
Solución gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12 = 2((x + 2)^2 - 10)$; $V = (-2, -10)$;

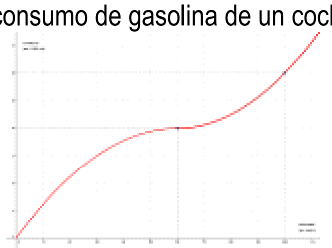
b) $y = -2x^2 + 8x - 10 = -2((x - 2)^2 - 2)$; $V = (2, -2)$

c) $y = 2x^2 - 4x + 2 = 2((x - 1)^2)$; $V = (1, 0)$

d) $y = 2x^2 + 6x = 2((x + 3/2)^2 + 9/2$; $V = (-3/2, -9/2)$.



21. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.



a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?
e) Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

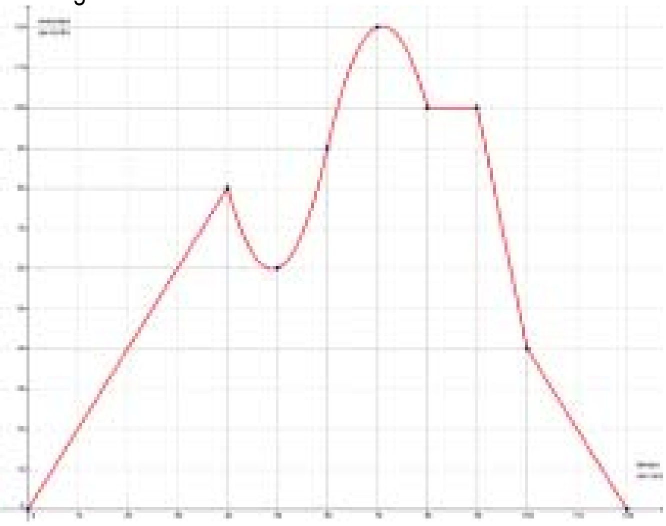
Solución: El consumo aumenta con la velocidad; a) y b) La variable independiente es la velocidad a km/h, y la dependiente el consumo en l por cada 100 km; c) 4 litros cada 100 km; d) A 100 km/h.

Características de las funciones.

22. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

Solución: Dentro de 7 años cobrará 50 euros. Es una función escalonada, pues cobra lo mismo durante todo un año, y luego aumenta 5 euros: P = $\left\{\begin{array}{ll} 20 & 1^{\circ}\text{ año} \\ 25 & 2^{\circ}\text{ año} \\ 30 & 3^{\circ}\text{ año} \\ \ldots & \\ 20+5(n-1) & \text{año } n \end{array}\right.$ ***)***

23. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

Solución:

a) Es funcional porque hay un único valor de la velocidad para cada tiempo.
b) Variable independiente: tiempo; variable dependiente: velocidad.
c) A 40 km/h.
d) La velocidad ha aumentado desde el minuto 0 hasta el 40 y desde el 50 hasta el 70. Ha disminuido desde el minuto 40 hasta el 50, desde el 70 hasta el 80 y desde el 90 hasta el 120.
e) La velocidad máxima fue de 120 km/h; se alcanzó en el minuto 70. Durante la primera hora la velocidad máxima fue de 80 km/h, en el minuto 40.
f) La velocidad mínima fue 0 km/h, al comienzo y final del viaje (minutos 0 y 120). Entre los minutos 30 y 90 la velocidad mínima fue de 60 km/h. Se alcanzó en los minutos 30, 50 y 96 con 40 segundos.

24. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1.20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:
   a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
   b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
   c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

Solución:

Tiempo (horas)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Precio (euros)	*0*	*0*	*0*	*1.2*	*2.4*	*3.6*	*4.8*	*6.0*	*7.2*	*8.4*	*9.6*	*10.8*	*12.0*

a) La variable independiente toma todos los valores de tiempo comprendidos entre 0 y 12 horas. La variable dependiente toma los valores múltiplo de 1.2 € comprendidos entre 0 y 12 €.
b) Es una función escalonada con diez tramos horizontales.
c) Hay puntos de discontinuidad en cada número entero de horas mayor o igual que 2. A partir de las dos horas, se paga cada fracción de hora como si fuera la hora entera.

25. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 x tiempo
b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
c) A partir del día 45: altura = 135.

Solución:

Tiempo (días)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*	*45*	*50*
Altura (cm)	*0*	*20*	*40*	*60*	*80*	*10*	*120*	*125*	*130*	*135*	*135*

26. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma:

-Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto.
-Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$.
-Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$.
-Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

Solución: a)

t (h)	*0*	*1*	*2p*	*2s*	*3p*	*3s*	*4p*	*4s*	*5*	*6*
d (km)	*1*	*3*	*5*	*5*	*4*	*4*	*4*	*4*	*7*	*10*

a) Las letras "p" y "s" en los tiempos se utilizan para diferenciar las dos definiciones (primera y segunda) dadas en la descripción.
b) Es una relación funcional porque para cada tiempo hay una única distancia. Obsérvese que en todos los casos los valores "p" y "s" son los mismos.
c) Merced a la observación anterior, no hay discontinuidades.
d) A las cinco horas.
e) El punto (0, 1) indica que el tiempo se cuenta desde que el tren está a 1 km de distancia.
f) La función es creciente desde las 0 hasta las 2 horas y desde las 4 hasta las 6. Es decreciente desde las 2 hasta las 3. Es constante desde las 3 hasta las 4.
g) El mínimo absoluto (0, 1) y el máximo absoluto (6, 10) marcan el comienzo y el final del viaje. El máximo relativo (2, 5) señala el instante en que el tren empieza a retroceder. No hay un mínimo relativo porque cuando el tren deja de retroceder, queda quieto durante una hora.

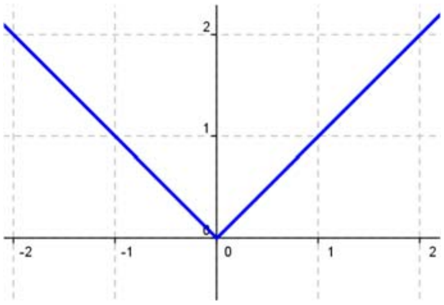
27. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el tema: monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x)=|x|$.

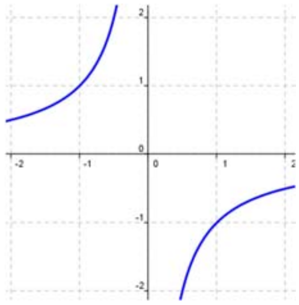
b) Opuesto e inverso de un número: $f(x)=\frac{-1}{x}$.

c) *Mantisa* (a cada número le hace corresponder la diferencia entre dicho número y su parte entera): $M(x)=x-E(x)$.

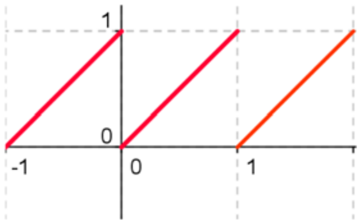
Solución:



a)

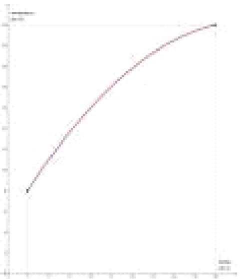
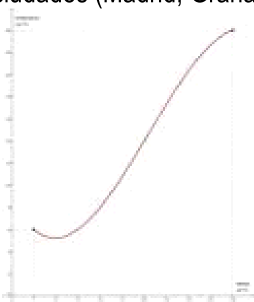
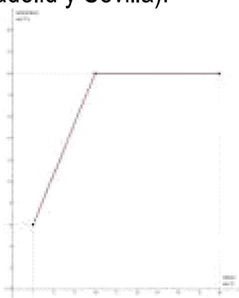
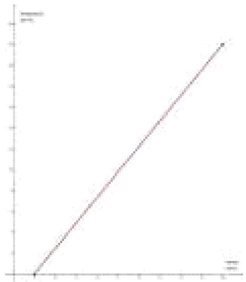


b)



c)

28. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):

a) Estudia la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

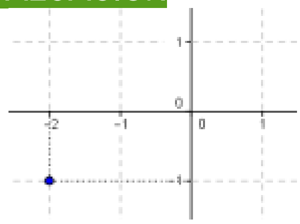
c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h y en Valladolid a partir del mediodía la temperatura bajó, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

Solución: a) la temperatura en general sube a lo largo del día; b) No en todo el intervalo, pero la tercera indica que la temperatura se ha mantenido constante una parte del intervalo; c) Granada; d) Madrid = IV; Granada = II; Sevilla = III y Valladolid = I.

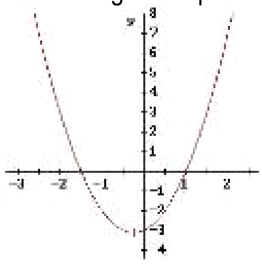
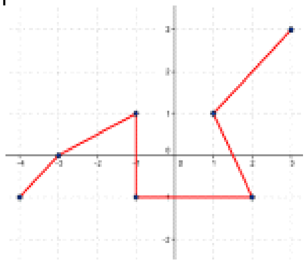
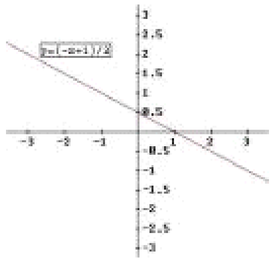
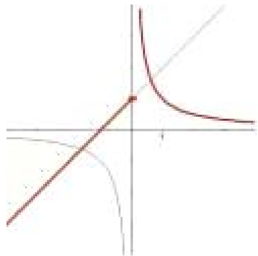
AUTOEVALUACIÓN

1. Las coordenadas del punto señalado son:
   a) (–1, 2)
   b) (–2, –1)
   c) (1, 2)
   d) (1, –2)



Solución: b)

2. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

Solución: b)

3. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	y
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

c)

x	y
–3	9
–1	1
0	0
2	4

d)

x	y
0	2
1	3
4	6
0	3

Solución: d)

4. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = –4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x + 3$ d) $y = –x – 1$

Solución: a)

5. La única gráfica de una función afín no constante es:

a) b) c) d)

Solución: b)

6. La única función cuadrática es:

a) $y = –2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^3 – 1$

Solución: c)

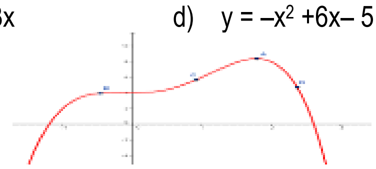
7. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (3, 4) es:

a) $y = –2x^2$ b) $y = 3x^2–x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^2 +6x– 5$

Solución: d)

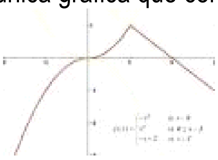
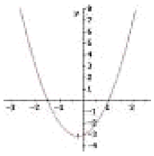
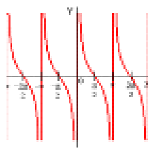
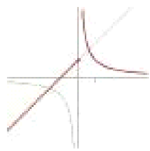
8. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

a) b) c) d)



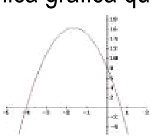
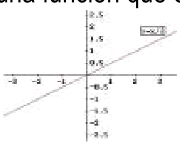
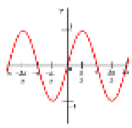
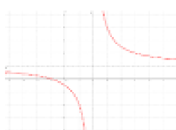
Solución: c)

9. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

Solución: c)

10. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d) 

Solución: b)

CAPÍTULO 12: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LA TOMA DE DATOS

1. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.
   a) ¿Cuál es la población objeto del estudio?
   b) ¿Cuál es la muestra elegida?
   c) Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.

Solución: a) Los estudiantes de mi clase; b) los diez estudiantes elegidos; c) cinco estudiantes de la clase que no estén en la muestra.

2. En un estudio estadístico se puede preguntar cosas tan variopintas como
   a) ¿Qué frutas comes a lo largo de una semana?
   b) ¿Cuántas piezas de fruta comes al día?
   c) ¿Cuántas monedas llevas en el bolsillo?
   d) ¿Cuál es tu altura?
   e) ¿Cuántas marcas de chocolate recuerdas?
   f) ¿Cuáles son las marcas de chocolate que recuerdas?
   g) ¿Cuántos hermanos tienes?
   h) ¿Cuál es tu color favorito para un coche?
   i) ¿Cuánto tiempo pasas al día viendo la televisión?
   j) ¿Cuántos seguidores tienes en twitter?

   Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

Solución: Cualitativas: a), f), h). Cuantitativas: b) discreta; c) discreta; d) continua; e) discreta; g) discreta; i) continua; j) discreta.

3. Señalar en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
   a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
   b) La altura de un grupo de seis amigos.

Solución: Muestra: a) Población: b)

4. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 3º ESO es de* 7.9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las alumnas, ¿sería representativo su valor?

Solución: Lo habrá calculado el programa informático que lo gestiona todo. Estudia toda la población. Si el estudio solo es de las alumnas, el resultado no representa a toda la población.

5. En una serie de televisión tienen dudas sobre qué hacer con la protagonista, que tenga un accidente o si debe casarse. Van a hacer una consulta. ¿A toda la población o seleccionado una muestra representativa? Razona la respuesta.

Solución: Sería muy complicado consultar a toda la población (largo y caro). Mejor una muestra.

2. REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

6. Reúne a 10 amigos. Recuenta cuántas monedas de cada valor (1céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, …) tenéis entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado el número de monedas de cada clase que hay. ¿Hay algún otro diagrama que te permita ver qué tipos de monedas son más abundantes en la muestra que has tomado?

Solución abierta

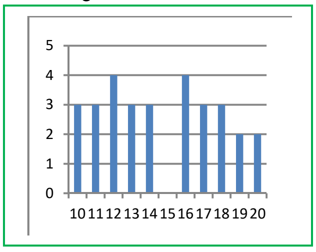
7. En la clase de Educación Física el profesor ha medido el tiempo que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:

14.92	13.01	12.22	16.72	12.06	10.11	10.58	18.58	20.07	13.15	20.10	12.43	17.51	11.59	11.79
16.94	16.45	10.94	16.56	14.87	17.59	13.74	19.71	18.63	19.87	11.12	12.09	14.20	18.30	17.64

Agrupa estos resultados por clases, comenzando en 10 segundos y haciendo intervalos de longitud 1 segundo. Realiza una tabla de frecuencias y representa adecuadamente estos datos.

Solución:

Segundos	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***
Frecuencia Absolutas	***3***	***3***	***4***	***3***	***3***	***0***	***4***	***3***	***3***	***2***	***2***
	xxx	***xxx***	***xxxx***	***xxx***	***xxx***		***xxxx***	***xxx***	***xxx***	***xx***	***xx***



3. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

8. En una excursión de montaña participan 25 personas con las siguientes edades:

8	10	10	11	12
36	37	37	38	40
42	43	43	44	45
47	48	50	52	53
55	58	61	63	67

a) Hacer una tabla de frecuencias clasificando las edades en 6 intervalos que comienzan en 7,5 y terminan en 67,5. Hallar, a partir de ella, los parámetros $\overline{x}$, σ y CV.

b) Calcular $\overline{x}$, σ y CV introduciendo los 25 datos en la calculadora, es decir, sin agruparlos en intervalos.

c) Prescindiendo de los 5 niños, obtenemos un colectivo de 20 personas. Calcular de nuevo sus parámetros $\overline{x}$, σ y CV, y comparar con los obtenidos en el grupo inicial.

d) Hallar los parámetros de posición Q_1, Q_3 y Me, de la distribución original, y construir el diagrama de caja y bigotes correspondiente.

Solución:

7.5 - 17.5	*17.5 - 27.5*	*27.5 - 37.5*	*37.5 - 47.5*	*47.5 57.5*	*57.5 - 67.5*
5	*0*	*3*	*8*	*5*	*4*

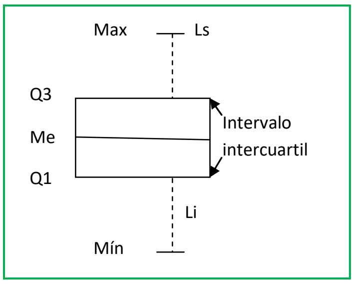
a) Media = 40.4; Desviación típica = 16.49; Coeficiente de variación = 0.407 $\approx$ 40.7 %;

b) $\overline{x}$ = 40.4; σ = 17.11; CV = 42.4%

c) $\overline{x}$ = 48.6; σ = 8.77; CV = 18.0%

d) Q1 = 36.5; Me = 43; Q3 = 52.5

Máx = 67 = Ls



Q3 = 52.5
Me = 43;
Q1 = 36.5

Intervalo intercuartil = 15.

Min = 8 = Li

4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

9. Para cada uno de los ejemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.

   1. Baraja española de 40 cartas. Experimento: sacamos una carta al azar y miramos su palo.
   2. Experimento: lanzamos simultáneamente 1 moneda de euro y una de 2 euros al aire.
   3. Experimento: lanzamos simultáneamente 2 monedas de 1 euro (indistinguibles)
   4. Experimento: lanzamos una moneda de 1 euro y apuntamos qué ha salido; la volvemos a lanzar y apuntamos el resultado.
   5. Experimento: lanzamos simultáneamente dos dados y sumamos los números que se ven en las caras superiores.

Solución abierta: Por ejemplo: 1.- Sacar un oro, sacar un as, sacar figura.
2.- Sacar una cara. Sacar al menos una cara. Sacar alguna cruz.
3.- Sacar una cara. Sacar al menos una cara. Sacar alguna cruz.
4.- Sacar una cara. Sacar al menos una cara. Sacar alguna cruz.
5.- La suma sea mayor que 7. La suma sea exactamente 7. Sea menor que 7.

10. En una bolsa tenemos 10 bolas rojas numeradas del 1 al 10. Se hacen los dos experimentos siguientes:

    EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.
    EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.
    ¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?
    Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

Solución: El experimento A no es aleatorio porque todas las bolas son rojas. En B, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

11. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.

Solución: C = {(negro, negro), (negro, rojo), (rojo, negro), (rojo, rojo)}

12. En algunos lugares de España se sigue jugando a la taba. La taba es un hueso de cordero que no es regular. Puede caer en cuatro posiciones distintas. Podemos pensar en ella como si fuese un dado “raro”. Considera el experimento “lanzar la taba al aire y ver lo que marca su cara superior: hoyo, panza, rey y verdugo”. Aproxima la probabilidad de cada uno de los casos de este experimento aleatorio.

(Imagen: Wikimedia

Solución: Podemos considerar en un primer momento equiprobables a los sucesos elementales, luego su probabilidad es 1/4. Con cada taba concreta podemos analizar si ese supuesto es correcto estudiando las frecuencias relativas.

13. Tu calculadora probablemente tendrá una función que sirve para generar números aleatorios. Normalmente da un número comprendido entre 0 y 1. Realiza el experimento aleatorio “genera un número aleatorio y apunta su segundo decimal”. Haz 40 repeticiones de este experimento. Dibuja un histograma de frecuencias.

Solución experimental y abierta:

14. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero “con sentido”).
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Solución experimental y abierta:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

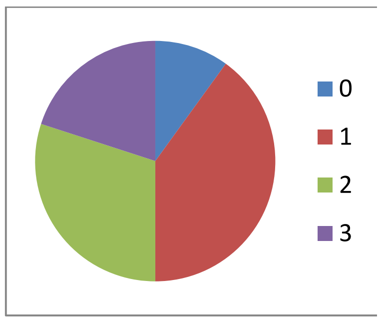
Estadística

1. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

Solución: Es una variable cuantitativa discreta. Su tabla de frecuencias es:

N. Hijos	***0***	***1***	***2***	***3***
Frecuencia absoluta	***2***	***8***	***6***	***4***



2. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana y la moda y los cuartiles.

Solución:

Media	***Mediana***	***Moda***	***Cuartil 1***	***Cuartil 3***
1.6	***1.5***	***1***	***1***	***2***

3. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la deviación media, la varianza, la desviación típica y el intervalo intercuartílico.

Solución:

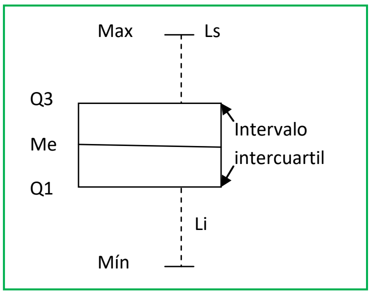
Rango	***Desviación Media***	***Varianza***	***Desviación Típica***	***Intervalo intercuartílico***
3	***0.8***	***0.84***	***0.9165***	***1***

4. Representa esos datos en un diagrama de cajas.

Solución: Máx: = L_S = 3.

Tercer cuartil = Q3 = 2
Mediana = Me = 1.5
Primer cuartil = Q1 = 1

Mín. = L_I = 0



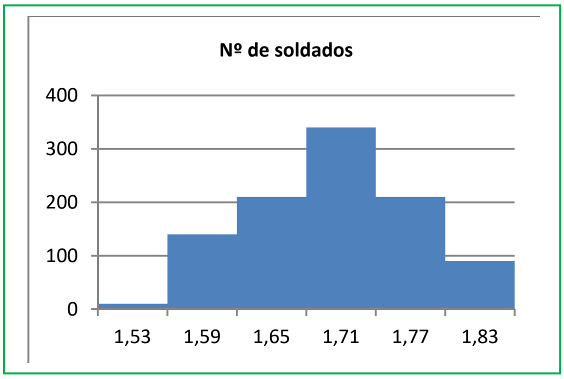
Intervalo intercuartil = 1

5. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa los datos en un histograma.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.

Solución: b) Media = 1.7049. Desviación típica = $\sigma \approx$ 0.076 692; c) Mediana. Para calcular ese intervalo miramos donde, en las frecuencias acumuladas, está los 500 soldados. Es el intervalo 1.68 – 1.74.



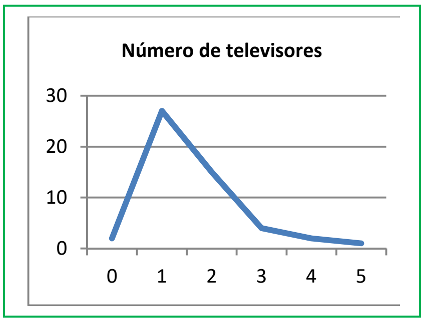
6. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada.

Calcula la media y la desviación típica.

Solución: Variable cuantitativa discreta. Media = 1.6078. Desviación típica = 0.9717.



7. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.

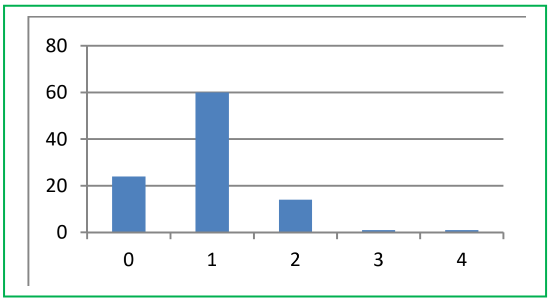
Solución: La mediana es 1 y el intervalo intercuartílico 1.

8. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

Solución:
Media = 0.95. Mediana = 0.8. Moda = 1.



9. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.

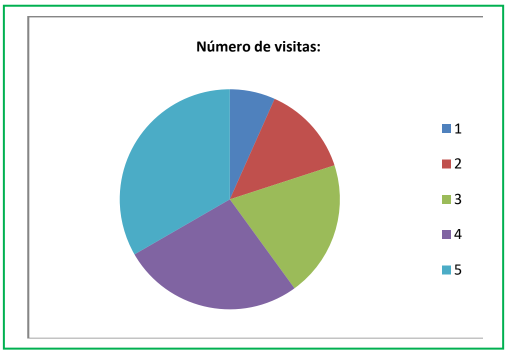
***Solución gráfica: rango = 4. Desviación media = 0.456. Varianza = 0.299. Desviación típica = 0.**5473;*
Me = 1; Q1 = 1; Q3 = 1.

10. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

Solución: Media = 2.5; Mediana = 2; Moda = 2.



11. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

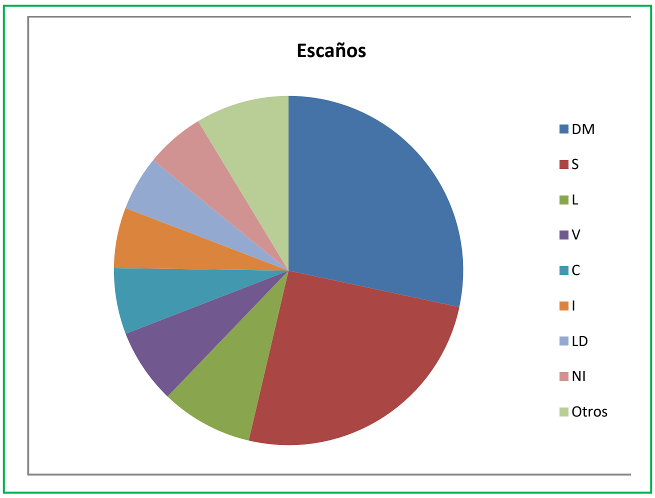
Solución: Rango = 4; Desviación media = 1.14; Varianza = 1.81; Desviación típica = 1.3454.

12. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Otros	Total
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

Solución: Se suele representar con un diagrama de sectores. También puede ser un diagrama de barras. Como es una variable cualitativa, no tiene sentido calcular parámetros estadísticos.

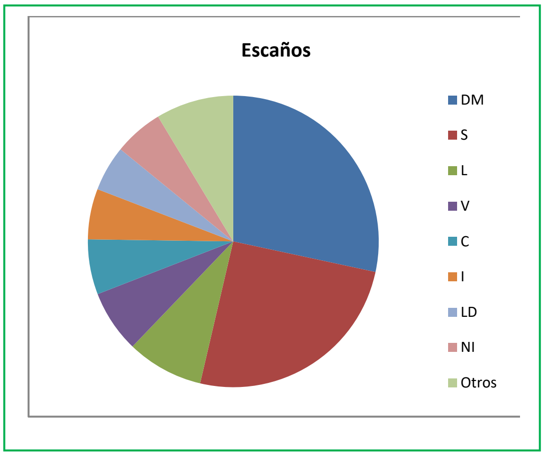


13. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Polonia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Otros	Total
Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

Solución: Se puede representar con un diagrama de sectores. También puede ser un diagrama de barras. Es una variable cuantitativa discreta y se puede calcular tanto la media como el rango. Los otros países ocupan 288 escaños.



14. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

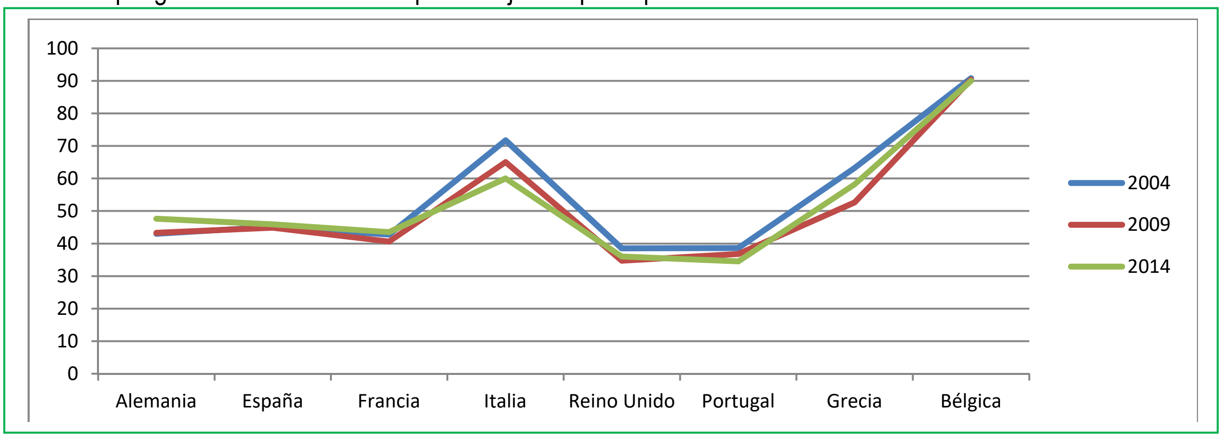
Solución: Se puede representar mediante un diagrama de barras con colores distintos para cada año. La variable es cuantitativa continua y se pueden calcular parámetros estadísticos. El orden de los países es Bélgica > Italia > Grecia > España > Alemania > Francia > Portugal > Reino Unido.

15. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

Solución:



16. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Separa los Estados Miembros en dos grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

Solución:

	Mayor %	Menor %
2004	***Italia, Grecia y Bélgica***	***Alemania, España, Francia, Reino Unido y Portugal***
2009	***Italia, Grecia y Bélgica***	***Alemania, España, Francia, Reino Unido y Portugal***
2014	***Alemania, España, Francia, Italia, Grecia y Bélgica***	***Reino Unido y Portugal***

17. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

Solución:

	Alemania	***España***	***Bélgica***	***Portugal***
Media	***44.623***	***45.303***	***90.4***	***36.623***
σ	***2.1077***	***0.43607***	***0.33076***	***1.67702***

18. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35.379.097	15.920.815	19.458.282	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

Solución:

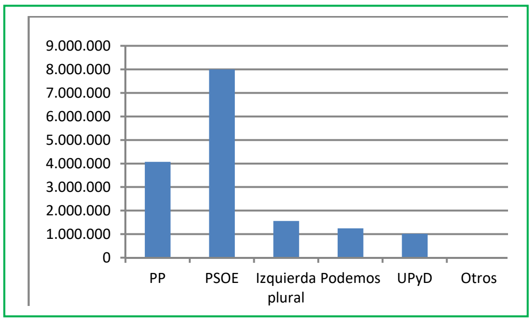
Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
100	***45.00062565 %***	***54.99937435 %***	***0.82022727 %***	***1.01002861 %***

Ha ganado la abstención, con más de la mitad del censo.

19. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?



Solución: Los otros partidos han obtenido 20 189 votos.

	PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros
%	***25.59***	***50.26***	***9.81***	***7.83***	***6.38***	***0.13***

Los escaños se pueden distribuir con distintos criterios. Si se distribuyeran de forma proporcional hubiera sido:

Esc.	***14***	***27***	***5***	***4***	***4***

Y sobraría 1 por decidir.

Probabilidad

20. Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado dos veces. Calcula las probabilidades siguientes:
    a) Sacar algún 1.
    b) La suma de los dígitos es 8.
    c) No sacar ningún 2.
    d) Sacar algún 1 o bien no sacar ningún 2.

Solución: a) $1 – (5/6)^2 = 11/36$. b) 5/36. c) 25/36. d) 11/36 + 25/36 – 2/36 = 34/36.

21. Se considera el experimento aleatorio sacar dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de:
    a) Sacar algún rey.
    b) Obtener al menos un basto.
    c) No obtener ningún basto.
    d) No obtener el rey de bastos.
    e) Sacar alguna figura: sota, caballo, rey o as.
    f) No sacar ninguna figura.

Solución: a) 1 – (36/40)(35/39) = 0.19; b) 1 – (30/40)(29/39) = 0.44; c) (30/40)(29/39) = 0.56; d) (39/40)(38/39) = 0.95; e) 1 – (24/40)(23/39) = 0.65; f) (24/40)(23/39) = 0.35.

22. Se considera el experimento aleatorio de tirar una moneda tres veces. Calcula las probabilidades siguientes:
    a) Sacar cara en la primera tirada.
    b) Sacar cara en la segunda tirada.
    c) Sacar cara en la tercera tirada.
    d) Sacar alguna cara.
    e) No sacar ninguna cara.
    f) Sacar tres caras.

Solución: a) 1/2; b) 1/2; c) 1/2; d) 1 – 1/8 = 7/8; e) 1/8; f) 1/8.

23. Con una baraja española se hace el experimento de sacar tres cartas, con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres reyes? Y si el experimento se hace sin reemplazo, ¿cuál es ahora la probabilidad de tener 3 reyes?

Solución: Con reemplazo: $(4/40)^3 = 1/1000$. Sin reemplazo: (4/40)*(3/39)*(2/38) = 1/2470.

24. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo. Determina la probabilidad de que:
    a) Las dos sean negras.
    b) Haya al menos una negra.
    c) Ninguna sea negra.

Solución: a) $(14/20)^2 = 49/100$. b) $1 – (6/20)^2 = 364/400 = 91/100$. c) $(6/20)^2 = 36/400 = 9/100$.

25. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo. Determina la probabilidad de que:
    a) Las dos sean negras.
    b) Haya al menos una negra.
    c) Ninguna sea negra.
    d) Compara los resultados con los de la actividad anterior.

Solución: a) (14/20)*(13/19) = 91/190. b) 1 – ((6/20)*(5/19)) = 35/38. c) (6/20)*(5/19) = 3/38.

26. Al lanzar cuatro monedas al aire,
    a) ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro sean caras?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres caras?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 caras?

Solución: a) 1/16; b) 1 – 1/16 = 15/16; c) 3/16 = 1/4.

27. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0.7 y el segundo de 0.5. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y las distintas posibilidades: a) ¿Qué probabilidad hay de que uno de los tiradores dé en el plato? b) Calcula la probabilidad de que ninguno acierte. c) Calcula la probabilidad de que los dos acierten.

Solución gráfica: a) 0.5; b) 0.15; c) 0.35.

28. Se lanza una moneda hasta que aparezca cara dos veces seguidas. a) Calcula la probabilidad de que la experiencia termine en el segundo lanzamiento. b) Calcula la probabilidad de que termine en el tercer lanzamiento.

Solución: a) 1/4. b) 1/8.

29. En el lanzamiento de naves espaciales se han instalado tres dispositivos de seguridad A, B y C. Si falla A se pone automáticamente en marcha el dispositivo B, y si falla este, se pone en marcha C. Se sabe que la probabilidad de que falle A es 0.1, la probabilidad de que B funcione es 0.98 y la probabilidad de que falle C es 0.05. Calcula la probabilidad de que todo funcione bien.

Solución: P(todo bien) = 1 – P(fallo) = 1 – 0.1·0.02·0.05 = 0.9999.

P(todo bien sin que tenga que funcionar ninguno de los dispositivos de seguridad) = 0.8379.

30. Se hace un estudio sobre los incendios forestales de una zona y se comprueba que el 40 % son intencionados, el 50 % se deben a negligencias y el 10 % a causas naturales. Se han producido tres incendios, a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado? b) Probabilidad de que los tres incendios se deban a causas naturales. c) Probabilidad de que ningún incendio sea por negligencias.

Solución: a) 1 – P(ninguno intencionado) = 1 – 0.6^3 = 0.784; b) 0.1^3 = 0.001 = 1/1000; c) 0.5^3 = 0.125 = 1/8.

31. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

Solución: 10/36.

32. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0.12, la probabilidad de que salga una copa es 0.08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84. Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

Solución:

	As	*No As*	
Copa	*0.04*	*0.04*	*0.08*
No copa	*0.08*	*0.84*	*0.92*
	0.12	*0.88*	*1*

P(as copas) = 0.04 = 1/25; No se ha eliminado el as de copas.

33. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:
    a) que los calcetines sean negros.
    b) que los dos calcetines sean del mismo color.
    c) que al menos uno de ellos sea rojo.
    d) que uno sea negro y el otro no.

Solución: a) (8/18)*(7/17) = 28/153, b) (56 + 30 + 12)/(18*17) = 49/153, c) 1 – ((14*13)/(18*17)) = 62/153,
d) (8*10)/(18*17) = 80/153.

34. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,
    a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.
    b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

Solución: a) 3(1/365)(364/365)(364/365) = 0.008174203184;
b) 3(1/365)(1/365)(364/365) + (1/365)(1/365)(1/365) = 0.000022456602.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:

   a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

Solución: b)

2. En un histograma de frecuencias relativas el área de cada rectángulo es:

   a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta

   c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada

Solución: c)

3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:

   a) 7.6 b) 8.2 c) 8 d) 9

Solución: c)

4. En las notas anteriores de Ana la mediana es:

   a) 9 b) 8 c) 7.5 d) 8.5

Solución: b)

5. En las notas anteriores de Ana la moda es:

   a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10

Solución: d)

6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es:

   a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

Solución: b)

7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:

   a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

Solución: a)

8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:

   a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

Solución: b)

9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es: a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

Solución: d)

10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es: a) 1/5, b) 1/7, c) 1/8, d) 1/6

Solución: c)