

RESPUESTAS MATEMÁTICAS LOMLOE

3 ESO

Luis Carlos Vidal Del Campo

www.apuntesmareaverde.org.es



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045270
Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:10:12.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.
Mas información en <http://www.dmrights.com>




Textos Marea Verde

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLGEBRA

1. Números racionales	3
2. Potencias y raíces	18
3. Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas	33
4. Expresiones algebraicas. Polinomios	56
5. Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales	76
6. Proporcionalidad	130
7. Educación financiera	161

GEOMETRÍA

8. Revisión de geometría en el plano	192
9. Movimientos en el plano y el espacio	*222*
10. Revisión de geometría en el espacio. Globo terráqueo	*264*

FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

11. Funciones y gráficas	*
12. Estadística. Azar y probabilidad	*



3º ESO

Capítulo 1: Números Racionales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: **Luis Carlos Vidal Del Campo**

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

0. TE CONVIENE RECORDAR**1. Calcula:**

- a) $-20 + 15 = -5$
 b) $-2(-20 + 15) = -2(-5) = +10$
 c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15)) = -20 : (10 - 2(-5)) = -20 : (10 + 10) = -20 : 20 = -1$
 d) $(-80 - 20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 32) = (-80 - 1) \cdot (3 - 2 \cdot 9) =$
 $= -81 \cdot (3 - 18) = -81(-15) = 1215$

2. Calcula:

- a) $-10 + 20 : (-5) = -10 - 4 = -14$
 b) $(-10 + 20) : (-5) = 10 : (-5) = -2$
 c) $-100 : ((-20) : (-5)) = -100 : 4 = -25$
 d) $(-100 : (-20)) : (-5) = 5 : (-5) = -1$
 e) $\sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

3. Calcula:

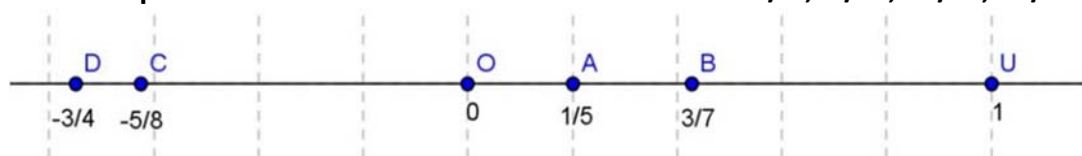
- a) $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^3 = 3 - (12 - 10)^2 - (-2)^3 =$
 $= 3 - 2^2 - (-8) = 3 - 4 + 8 = 7$
 b) $5 - 32 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2 = 5 - 32 + 10 - (-2)^2 = 6 - 4 = 2$
 c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2 = 7 - 2 \cdot (-2)^2 - 6 + 8 - 4 =$
 $= 7 - 2 \cdot 4 - 2 = 7 - 8 - 2 = -3$
 d) $2 - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4)^2 - (2 - 4)^3 = 2 - (6 - 12)^2 - (-2)^3 =$
 $= 2 - (-6)^2 - (-8) = 2 - 36 + 8 = -26$

4. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones:

- a) $\frac{50}{7} = \frac{49 + 1}{7} = \frac{(7 \cdot 7) + 1}{7} = 7 + \frac{1}{7}$
 b) $\frac{25}{11} = \frac{22 + 3}{11} = \frac{(2 \cdot 11) + 3}{11} = 2 + \frac{3}{11}$
 c) $\frac{101}{6} = \frac{96 + 5}{6} = \frac{(16 \cdot 6) + 5}{6} = 16 + \frac{5}{6}$

5. Pasa a forma mixta las fracciones:

- a) $\frac{-30}{7} = \frac{-28 - 2}{7} = \frac{(-4 \cdot 7) - 2}{7} = -4 - \frac{2}{7}$
 b) $\frac{-50}{13} = \frac{-39 - 11}{13} = \frac{(-3 \cdot 13) - 11}{13} = -3 - \frac{11}{13}$
 c) $\frac{-100}{21} = \frac{-84 - 16}{21} = \frac{(-4 \cdot 21) - 16}{21} = -4 - \frac{16}{21}$

6. Representa en la recta numérica las fracciones: $1/5$, $3/7$, $-5/8$, $-3/4$ 

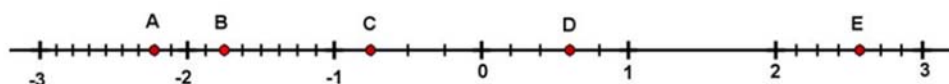
7. Pasa a forma mixta y representa las fracciones:

$$a) \frac{23}{8} = \frac{16+7}{8} = \frac{(2 \cdot 8) + 7}{8} = 2 + \frac{7}{8}$$

$$b) \frac{-23}{8} = \frac{-16-7}{8} = \frac{(-2 \cdot 8) - 7}{8} = -2 - \frac{7}{8}$$

$$c) \frac{180}{50} = \frac{150+30}{50} = \frac{(3 \cdot 50) + 30}{50} = 3 + \frac{30}{50} = 3 + \frac{3}{5}$$

$$d) \frac{-26}{6} = \frac{-24-2}{6} = \frac{(-4 \cdot 6) - 2}{6} = -4 - \frac{2}{6} = -4 - \frac{1}{3}$$

**8. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos A, B, C, D y E, expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos A, B y E.**

$$A) -2 - \frac{2}{9} = \frac{(-2 \cdot 9) - 2}{9} = \frac{-18 - 2}{9} = \frac{-20}{9};$$

$$B) -1 - \frac{6}{8} = -1 - \frac{3}{4} = \frac{(-1 \cdot 4) - 3}{4} = \frac{-4 - 3}{4} = \frac{-7}{4};$$

$$C) \frac{-3}{4}; \quad D) \frac{3}{5}; \quad E) 2 + \frac{4}{5} = \frac{(2 \cdot 5) + 4}{5} = \frac{14 + 4}{5} = \frac{18}{5}$$

9. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 12 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 12}{5 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 12}{5} = \frac{36}{5}$$

10. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

Llamemos a este número x :

$$\frac{5}{6} \cdot x = 100 \rightarrow x = 100 \cdot \frac{6}{5} = \frac{100 \cdot 6}{5} = \frac{600}{5} = 120$$

Comprobamos:

$$\frac{5}{6} \cdot 120 = \frac{5 \cdot 120}{6} = \frac{600}{6} = 100$$

2. APROXIMACIONES Y ERRORES**11. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado.**

Número	Cifras significativas			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95 549	100 000			
30 000	$3 \cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

a) $\sqrt{10} = 3,16227766 \dots \rightarrow$ 1) 3,16227766 $\rightarrow 3,1$
 2) 3,16227766 $\rightarrow 3,2$
 3) 3,16227766 $\rightarrow 3,16$
 4) 3,16227766 $\rightarrow 3,162$

b) $\frac{1}{7} = 0,142857142 \dots \rightarrow$ 1) 0,142857142 $\rightarrow 0,1$

Los ceros a la izquierda no son cifras significativas.

2) 0,142857142 $\rightarrow 0,14$
 3) 0,142857142 $\rightarrow 0,143$
 4) 0,142857142 $\rightarrow 0,1429$

c) 95 549 $\rightarrow$ 1) 95 549 $\rightarrow 100\,000 = 1 \cdot 10^5$
 2) 95 549 $\rightarrow 96\,000 = 96 \cdot 10^3$
 3) 95 549 $\rightarrow 95\,500 = 955 \cdot 10^2$
 4) 95 549 $\rightarrow 95\,550 = 9\,555 \cdot 10$

d) 30 000 $\rightarrow$ 1) 30 000 $\rightarrow 3 \cdot 10^4$
 2) 30 000 $\rightarrow 30 \cdot 10^3$
 3) 30 000 $\rightarrow 300 \cdot 10^2$
 4) 30 000 $\rightarrow 3\,000 \cdot 10$

e) 1,9995 $\rightarrow$ 1) 1,9995 $= 2$
 2) 1,9995 $\rightarrow 2,0$
 3) 1,9995 $\rightarrow 2,00$
 4) 1,9995 $\rightarrow 2,000$

f) 20,55 $\rightarrow$ 1) 20,55 $\rightarrow 20 = 2 \cdot 10$
 2) 20,55 $\rightarrow 21$
 3) 20,55 $\rightarrow 20,6$
 4) 20,55 $\rightarrow 20,55$

Número	Cifras significativas			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$	3	3.2	3.16	3.162
$1/7$	0.1	0.14	0.143	0.1429
95549	100000	9600	95500	95550
30000	$3 \cdot 10^4$	$30 \cdot 10^3$	$300 \cdot 10^2$	$3000 \cdot 10$
1.9995	2	2.0	2.00	2.000
20.55	20	21	20.6	20.55

12. Prueba que 123.45 con EA = 0.005 y 0.12345 con EA = 0.000005 tienen el mismo ER.

$$EA = |\text{valor real} - \text{valor aproximado}|$$

$$ER = \frac{EA}{|\text{valor real}|}$$

$$ER = \frac{0,005}{123,45} = \frac{0,000005}{0,12345} = 4,05 \cdot 10^{-3}\%$$

13. Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:

a) Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.

Depende del tipo de error. Si se considera el error relativo, **Falso**, pues cuánto más pequeña sea la medida, más difícil es medir y el error relativo es mayor. Pero si se trata de error absoluto, **Verdadero**, pues al ser menor la medida también será menor el valor del error.

b) No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes.

Falso, el error relativo, al ser una medida adimensional, permite comparar la precisión de aproximaciones de diferentes magnitudes de manera justa y consistente.

c) Poner precios como 1.99 €/Kg es un intento de engaño

Verdadera, se trata de una estrategia diseñada para hacer que el precio parezca significativamente menor que 2 €/Kg, influyendo en la percepción del consumidor, y aunque te ahorras un céntimo si compras un kilo, si compras medio kilo no ahorras nada.

d) Comprar a 1.99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro.

Falso, porque, aunque ahorras un céntimo si compras un kilo, este ahorro es insignificante, y no se aplica cuando compras medio kilo, donde no hay diferencia en el coste.

e) Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático.

f) La precisión se mide por el número de cifras decimales.

Ambas son **falsas**, como hemos leído en este capítulo: *utilizar demasiadas cifras decimales sin estar seguro de ellas no es sinónimo de precisión sino de torpeza.*

3. FRACCIONES Y DECIMALES

14. . Sin hacer la división indica si las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica.

a) $\frac{21}{750} = \frac{7}{250} \rightarrow$ encontramos la fracción irreducible

Descomponemos el denominador en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 250 = 2 \cdot 5^3$$

En general $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ tiene expresión decimal exacta y el número de cifras decimales es el máximo entre n y m.

Por lo tanto $\frac{1}{2 \cdot 5^3}$ tiene **expresión decimal exacta** y el número de cifras decimales es 3.

Lógicamente es también el caso de $\frac{7}{2 \cdot 5^3}$, el número que estamos estudiando.

Podemos comprobarlo con la calculadora: $\frac{21}{750} = 0,028$

b) $\frac{75}{21} = \frac{25}{7} \rightarrow 7$ es un número primo.

Si en el denominador de una fracción irreducible aparecen factores primos distintos de 2 y de 5 la expresión decimal será **periódica**.

$$c) \frac{11}{99} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \rightarrow \text{Expresión decimal periódica.}$$

$$d) \frac{35}{56} = \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} \rightarrow \text{Expresión decimal exacta y el número de cifras decimales es 3.}$$

15. Pasa a fracción y simplifica:

$$a) 1,4142 = \frac{14142(:3)}{10\,000(:3)} = \frac{7071}{5\,000}$$

$$b) 0,125 = \frac{125(:125)}{1\,000(:125)} = \frac{1}{8}$$

$$c) 6,66 = \frac{666(:2)}{100(:2)} = \frac{333}{50}$$

16. Pasa a fracción y simplifica:

$$a) 1.41424142 \dots = 1 + \frac{4142}{9\,999} = \frac{9999 + 4142}{9\,999} = \frac{14141}{9\,999} \rightarrow \text{ya es una fracción irreducible}$$

$$b) 0.125125 \dots = \frac{125}{999}$$

$$c) 6.666 = 6 + \frac{6}{9} = \frac{(6 \cdot 9) + 6}{9} = \frac{54 + 6}{9} = \frac{60(:3)}{9(:3)} = \frac{20}{3}$$

17. Pasa a fracción y simplifica:

$$a) 1.041424142 \dots = 1 + 0,0414241 \dots = 1 + \frac{0,41424 \dots}{10} = 1 + \frac{4142}{99\,990} = \frac{99990 + 4142}{99\,990} \\ = \frac{104\,132}{99\,990} = \frac{52\,066}{49\,995}$$

$$b) 0.7125125 \dots = 0,7 + 0,0125125 \dots = \frac{7}{10} + \frac{0,12512 \dots}{10} = \frac{7}{10} + \frac{125}{9990} = \frac{(7 \cdot \frac{9990}{10}) + 125}{9990} = \\ = \frac{(7 \cdot 999) + 125}{9990} = \frac{6993 + 125}{9990} = \frac{7118}{9990} = \frac{3559}{4995}$$

$$c) 6.7666 \dots = 6 + 0,7 + 0,0666 \dots = 6 + \frac{7}{10} + \frac{0,666 \dots}{10} = 6 + \frac{7}{10} + \frac{6}{90} = \frac{(6 \cdot 90) + (7 \cdot 9) + 6}{90} \\ = \frac{540 + 63 + 6}{90} = \frac{609}{90} = \frac{203}{30}$$

18. . Determina la fracción generatriz de:

$$a) 0.333 \dots + 0.666 \dots = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{3+6}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$b) 0.888 \dots \cdot 2.5 = \frac{8}{9} \cdot \frac{25}{10} = \frac{8 \cdot 25}{9 \cdot 10} = \frac{200}{90} = \frac{20}{9}$$

$$c) 0.65 : 0.656565 \dots = \frac{65}{100} : \frac{65}{99} = \frac{65 \cdot 99}{100 \cdot 65} = \frac{99}{100}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla paso a paso:

$$(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1)) = (-5 - 8 + 7) : (7 - (-1) \cdot (-1)) =$$

$$= (-6) : (7 - 1) = (-6) : 6 = -1$$

2. Ordena de menor a mayor: $\frac{8}{9}$; $\frac{-8}{9}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{38}{45}$; $\frac{77}{90}$; $\frac{-9}{8}$

Ponemos las fracciones con el mismo denominador

$$\frac{80}{90}; \frac{-80}{90}; \frac{(4 \cdot \frac{90}{5})}{90}; \frac{(38 \cdot \frac{90}{45})}{90}; \frac{77}{90}; \frac{(-9 \cdot \frac{90}{8})}{90} \rightarrow \frac{80}{90}; \frac{-80}{90}; \frac{72}{90}; \frac{76}{90}; \frac{77}{90}; \frac{-101,25}{90} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-101,25}{90} < \frac{-80}{90} < \frac{72}{90} < \frac{76}{90} < \frac{77}{90} < \frac{80}{90} \rightarrow \frac{-9}{8} < \frac{-8}{9} < \frac{4}{5} < \frac{38}{45} < \frac{77}{90} < \frac{8}{9}$$

3. Indica razonadamente qué fracción es mayor: a) $\frac{102}{101}$ y $\frac{98}{99}$; b) $\frac{98}{99}$ y $\frac{97}{98}$; c) $\frac{-102}{101}$ y $\frac{-103}{102}$

$$a) \frac{1}{101} + 1 \text{ y } \frac{98}{99} \rightarrow \frac{102}{101} > \frac{98}{99}; \text{ ya que } \left(\frac{1}{101} + 1\right) > 1 \text{ y } \frac{98}{99} < 1$$

$$b) \frac{98}{99} \text{ y } \frac{97}{98}; \quad \frac{98}{99} \text{ y } \frac{(97 \cdot \frac{99}{98})}{99} = \frac{97,98}{99} \rightarrow \frac{98}{99} > \frac{97}{98}$$

$$c) \frac{-102}{101} \text{ y } \frac{-103}{102}; \quad \frac{-102}{101} \text{ y } \frac{(-103 \cdot \frac{101}{102})}{101} = \frac{-101,9}{101} \rightarrow \frac{-103}{102} > \frac{-102}{101}$$

4. Demuestra que $4,999... = 5$

$4,999999... = 4 + 0,99999... \rightarrow$ entonces basta con demostrar que $0,9999... = 1$

Llamamos x a nuestro número periódico: $x = 0, \hat{9} = 0,99999...$

Propiedad de la igualdad, multiplicamos por 10 a ambos lados: $10x = 9,999999...$

$\begin{cases} x = 0,99999... \\ 10x = 9,99999... \end{cases} \rightarrow$ Restamos la 1ª expresión a la 2ª: $10x - x = 9,9999... - 0,99999...$

$\rightarrow 9x = 9 \rightarrow x = 1$, lo que implica $0,99999... = 1 \rightarrow 4,9999... = 5$

Generaliza: ¿Cuánto vale $n,999...?$

$$n,99999 = n + 1$$

5. Usa la calculadora o una hoja de cálculo y reflexiona sobre la jerarquía de operaciones:

1º Se resuelven los paréntesis interiores.

2º Las potencias y las raíces.

3º Las multiplicaciones y divisiones.

4º Las sumas y restas.

6. Pasa a forma mixta:

$$a) \frac{16}{9} = \frac{9+7}{9} = 1 + \frac{7}{9}$$

$$b) \frac{152}{6} = \frac{150+2}{6} = \frac{(25 \cdot 6) + 2}{6} = 25 + \frac{2}{6}$$

$$c) \frac{-17}{5} = \frac{-15-2}{5} = \frac{(-3 \cdot 5) - 2}{5} = -3 - \frac{2}{5}$$

$$d) \frac{-23}{4} = \frac{-20-3}{4} = \frac{(-5 \cdot 4) - 3}{4} = -5 - \frac{3}{4}$$

7. Representa de forma exacta en la recta numérica:

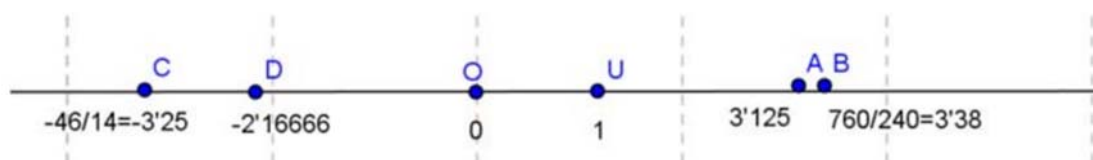
$$a) 3,125 = \frac{3125}{1000} = \frac{25}{8} = \frac{24+1}{8} = \frac{(3 \cdot 8) + 1}{8} = 3 + \frac{1}{8}$$

$$b) \frac{760}{240} = \frac{720+40}{240} = \frac{(3 \cdot 240) + 40}{240} = 3 + \frac{40}{240} = 3 + \frac{1}{6}$$

$$c) \frac{-46}{14} = \frac{-42-4}{14} = \frac{(-3 \cdot 14) - 4}{14} = -3 - \frac{4}{14}$$

$$d) -2,1666 \dots = -2,1 - 0,06666 \dots = \frac{-21}{10} - \frac{6}{90} = \frac{(-21 \cdot 9) - 6}{90} = \frac{-189 - 6}{90} = \frac{-195}{90} = -\frac{13}{6} =$$

$$= \frac{-12-1}{6} = \frac{(-2 \cdot 6) - 1}{6} = -2 - \frac{1}{6}$$



8. Simplifica:

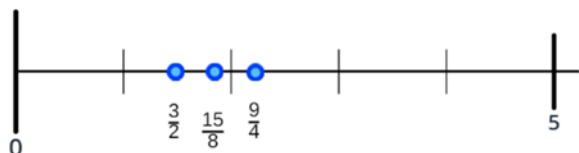
$$a) \frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5} = 1 \text{ (descomposición en factores primos)}$$

$$b) \frac{10+6}{10-2} = \frac{2(5+3)}{8} = 2$$

$$c) \frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10} = \frac{2(3+2)}{2(5+5)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

9. Halla la fracción que cae justo en medio de $3/2$ y $9/4$ en la recta numérica.

$$\frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2} = \frac{15}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}$$



10. La media armónica se define como: $H(a, b) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

a. Demuestra que $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1}{\frac{b+a}{2ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

b. Halla $H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$:

$$H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{11}{3}\right)}{\frac{3}{2} + \frac{11}{3}} = \frac{2\left(\frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 3}\right)}{\frac{9+22}{6}} = \frac{2\left(\frac{11}{2}\right)}{\frac{31}{6}} = \frac{11 \cdot 6}{31} = \frac{66}{31}$$

11. Halla la fracción inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$

$$3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10} = 3 + \frac{4 \cdot 10}{5 \cdot 6} = 3 + \frac{40}{30} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3} \rightarrow \text{fracción inversa: } \frac{1}{\frac{13}{3}} = \frac{3}{13}$$

12. Opera y simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 7}{5 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 2} = \frac{1680}{1680} = 1$$

13. Resuelve paso a paso:

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2\right)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 4}}{\frac{3}{5} : \left(-\frac{11}{6}\right)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{12}{20}}{-\frac{11}{5} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{(3 \cdot \frac{20}{5}) - 12}{20}}{-\frac{11}{5 \cdot 6}} = \frac{\frac{(12 - 12)}{20}}{-\frac{11}{3 \cdot 6}} = 0$$

14. Calcula las dos terceras parte de la sexta parte del 80 % de 900.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{80}{100} \cdot 900 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 900}{3 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{14400}{180} = 80$$

15. Halla el número tal que sus cuatro tercios valen 520.

$$\frac{4}{3}x = 520 \rightarrow x = 520 \cdot \frac{3}{4} = 390$$

16. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?

$$1 \text{ bote} \rightarrow \frac{3}{8} \text{ litro}$$

$$x \text{ botes} \rightarrow 12 \text{ litros} \rightarrow x = \frac{12}{\frac{3}{8}} = \frac{12 \cdot 8}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

17. Si 100 pulgadas son 254 cm:

a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19.2 pulgadas y largo/alto = 4/3;

b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9

a) 100 pulgadas 254 cm, $254/100 = 2.54$, 1 pulgada = 2.54 cm ; altura = $19.2 \cdot 2.54 = 48.768$
largo/alto = $4/3 = \text{largo}/48.768$, largo = $48.768 \cdot 4 / 3 = 65.024$ cm

b) $\text{largo/alto} = 16/9 = \text{largo}/48.768$, $\text{largo} = 48.768 \cdot 16 / 9 = 86.69666... \text{ cm}$

18. Si en una clase el 77.777... % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos, pero menos de

40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?

$$30 \cdot 77.7777 / 100 = 23.3333$$

Aprueban entre 24 y 31 , probamos

$$40 \cdot 77.77777 / 100 = 31.111$$

$$24/0.77777 = 30.86 \text{ no puede ser}$$

$$25/0.77777 = 32.14 \text{ no puede ser}$$

$$26/0.77777 = 33.43 \text{ no puede ser}$$

$$27/0.77777 = 34.71 \text{ no puede ser}$$

$$28/0.77777 = 36 \text{ es exacto}$$

Hay 36 alumnos y aprueban 28

19. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (Problema de la Olimpiada de Albacete).

Total de panes 8, como viajan 8 días cada día comen 1 pan

Cada peregrino ha comido $8/3$ de pan

El primer peregrino ha puesto 5 panes, es decir, $15/3$ como ha comido $8/3$ le ha entregado al que no ha aportado pan $15/3 - 8/3 = 7/3$ que es lo que le corresponde, es decir, si cada pan vale 1 €, le debe entregar 2.33 €

Al segundo peregrino le debe entregar $1/3$, es decir, 0.33 €

Si desea repartir 8€ debe darle 7€ al primero y 1€ al segundo.

20. Aproxima los números 32567 y 1.395 con 2 cifras significativas y di en cuál se comete menor error relativo.

$$32567 \dots\dots\dots 33000$$

$$EA = |32567 - 33000| = 433$$

$$ER = 433/32567 = 0.0133 \dots 1.33\%$$

$$1.395 \dots\dots\dots 1.4$$

$$EA = |1.395 - 1.4| = 0.005$$

$$ER = 0.005/1.395 = 0.0036 \dots 0.36\%$$

En el segundo número se comete menor error relativo.

21. π no puede representarse mediante una fracción de enteros, pero ¿puedes hallar una fracción que lo aproxime con 5 cifras significativas?

Mediante ensayo y error $3927/1250$

22. Aproximamos π por:

a) Simplifica hasta una fracción impropia irreducible $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$

b) Halla el error absoluto y el error relativo.

$$a) 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{112+1}{16}} = 3 + \frac{16}{113} = \frac{339+16}{113} = \frac{355}{113}$$

$$b) \frac{355}{113} = 3.14159292 \rightarrow EA = |3.14159265 - 3.14159292| = 0,00000027$$

$$ER = \frac{0.00000027}{3.14159265} = 8.6 \cdot 10^{-8} = 8.6 \cdot 10^{-6} \%$$

23. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de $\frac{3}{5}$ de litro?

$$60 \cdot \frac{3}{5} = 36 \text{ litros} \quad ; \quad 36 : \frac{3}{4} = 48 \text{ botellas}$$

24. Halla un número entero no nulo de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \text{ hacemos el mcm de } (2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420$$

25. A la unidad le quito sus 2 quintas partes. ¿Por qué fracción hay que multiplicar el resultado para llegar otra vez a la unidad?

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad , \quad \text{para obtener 1 debemos multiplicar por } \frac{5}{3}$$

26. Halla la fracción resultante:

a) Quito 1 tercio de lo que tengo y luego añado 1 tercio de lo que queda;

b) Añado 1 tercio de lo que tengo y después quito 1 tercio del resultado. Solución: a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{8}{9}$

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{Nos queda } \frac{8}{9}$$

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{12} = \frac{16}{12} - \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{Nos queda } \frac{8}{9}$$

27. Estás aburrido y decides jugar a lo siguiente: Avanzas un metro en línea recta, retrocedes la mitad, avanzas la mitad de lo que has retrocedido en el último paso, retrocedes la mitad de lo que has avanzado en el último paso, ... Si lo haces muchas, pero que muchas veces, ¿cuánto avanzas en total? $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$

Sumamos los positivos y negativos por separado:

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$ suma infinita de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$, primer término 1

$$\text{La suma es igual a } \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \quad ; \quad S = \frac{a_1}{1-r}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$ suma infinita de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{4}$, primer término $\frac{1}{2}$

$$\text{La suma es igual a } \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Restamos } \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{Avanzo } \frac{2}{3} \text{ de metro}$$

28. Darío da pasos de $\frac{3}{5}$ de metro, su perro Rayo da pasos de $\frac{1}{4}$ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?

$$\text{Rayo: } 360 \cdot \frac{1}{4} = 90 \text{ metros en un minuto.}$$

$$\text{Darío: } 90 : \frac{3}{5} = 150 \text{ pasos por minuto.}$$

29. La figura de al lado es un "Tangram".

- a) Halla la fracción que se corresponde con cada una de las 7 piezas.
b) Si el lado del cuadrado es de 20cm, halla el área de cada pieza.

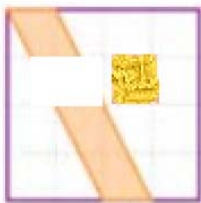


- a) Amarillo y rojo: $\frac{1}{4}$; azul, verde y naranja: $\frac{1}{8}$; lila y negro: $\frac{1}{16}$
b) Si el lado mide 20 cm, el área del cuadrado es de 400 cm^2 y el área de las piezas es:
Amarillo y rojo: 100 cm^2 ; azul, verde y naranja: 50 cm^2 ; lila y negro: 25 cm^2 .

30. Si el lado del cuadrado es de 4 cm halla la fracción y el área de la zona coloreada:



El área del cuadrado es de 16 cm^2 hay 16 cuadraditos.



- a) la franja son 4 cuadraditos, luego es $\frac{1}{4}$, 4 cm^2



- b) hay 5 piezas iguales, luego es $\frac{1}{5}$ de $16 = \frac{16}{5}$, 3.2 cm^2



- c) la pieza es $\frac{3}{4}$ de la anterior, luego $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$; $\frac{3}{20} \cdot 16 = \frac{48}{20} = 2.4 \text{ cm}^2$

31. Calcula:

$$\text{a) } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{b) } \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{c) } \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$$

$$\text{a) } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{4} + \frac{9}{4} = \frac{162}{12} + \frac{9}{4} = \frac{162}{12} + \frac{27}{12} = \frac{189}{12} = \frac{63}{4}$$

$$\text{b) } \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{12}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot (2)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\text{c) } \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{8} = \frac{72}{12} - \frac{1}{8} = 6 - \frac{1}{8} = \frac{47}{8}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes operar con números enteros, conoces la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis. Resuelve paso a paso: $(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$.

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2) = (-8 - 7 \cdot (2) : (-1) + 5 - 16) \cdot (-2) =$$

$$= (-8 - 14 : (-1) - 11) \cdot (-2) = (-8 + 14 - 11) \cdot (-2) = (-5) \cdot (-2) = 10$$

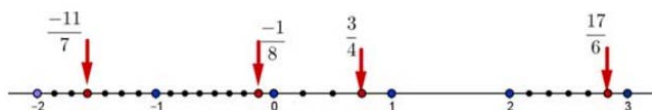
2. Sabes obtener fracciones equivalentes. Ordena de mayor a menor: $\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$
Calculamos el MCM (4, 6, 8) = 24

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4} = \frac{20}{24}; \frac{21}{24}; \frac{-21}{24}; \frac{-20}{24}; \frac{-30}{24} \text{ ya podemos ordenar, fijándonos en los numeradores}$$

$$\frac{21}{24} > \frac{20}{24} > \frac{-20}{24} > \frac{-21}{24} > \frac{-30}{24} \text{ de donde } \frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fracciones de forma exacta en la recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0.125$$



4. Sabes operar con fracciones. Resuelve paso a paso y simplifica: $\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : (2 - \frac{11}{3})}{\frac{2}{6}}$

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : (2 - \frac{11}{3})}{\frac{2}{6}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : (\frac{6}{3} - \frac{11}{3})}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : (-\frac{5}{3})}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{1} = \frac{21}{2}$$

5. Sabes hallar la fracción de un número y la fracción de una fracción.

a) Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.

b) Una botella tiene llenas sus siete octavas partes, si contiene 840 cm³, ¿cuánto le cabe llena?

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot 360 = \frac{20}{40} \cdot 360 = \frac{1}{2} \cdot 360 = 180$

b) Para calcularla fracción de un número multiplicamos la fracción por el número, como lo que conocemos es el resultado, para calcular el número debemos dividir entre la fracción:

$$840 : \frac{7}{8} = \frac{6720}{7} = 960$$

6. Sabes redondear y calcular el error relativo cometido. Aproxima los números 9859 y 9.945 con 2 cifras significativas y calcula los errores relativos cometidos (en %), ¿cuál es menor?

$$9859 \dots 9900, \quad EA = |9859 - 9900| = 41, \quad ER = 41/9859 = 0.0042 = 0.42 \%$$

$$9.945 \dots 9.9, \quad EA = |9.945 - 9.9| = 0.045, \quad ER = 0.045/9.945 = 0.0045 = 0.45 \%$$

El error relativo cometido con el redondeo del primer número es un poco menor que el cometido con el segundo número.

7. Sabes distinguir cuándo una fracción tiene una expresión decimal exacta.

a) Di cuáles de las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{6}{120} ; \frac{5}{180} ; \frac{42}{210}$$

b) ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?

c) ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el periodo de $1/97$?

a) Simplificamos: $\frac{6}{120} = \frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5}$, denominador con solo múltiplos de 2 y 5, es exacta.

$$\frac{5}{180} = \frac{1}{36} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}, \text{ denominador con múltiplos distintos de 2 y 5, decimal periódica.}$$

$$\frac{42}{210} = \frac{1}{5}, \text{ denominador con solo múltiplos de 2 y 5, es exacta.}$$

b) Como el mayor exponente es 10, tiene 10 decimales.

c) 96 cifras (de hecho, las tiene).

8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción y simplifica: a) 2.225 b) 2.2252525...

c) $\frac{0.125}{0.125125125...}$

a) $2.225 = \frac{2225}{1000} = \frac{89}{40}$

b) $2.2252525... = \frac{2225-22}{990} = \frac{2203}{990}$

c) $\frac{0.125}{0.125125125...} = \frac{\frac{125}{1000}}{\frac{125}{999}} = \frac{999}{1000} = 0.999$

9. Sabes resolver problemas mediante fracciones. Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.

a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?

b) Si su volumen actual es de 1200 cm^3 , ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?

a) Calculamos el aumento cada semana:

1ª semana $1 + 1/3 = 4/3$

2ª semana $4/3 + 1/3 \cdot 4/3 = 4/3 + 4/9 = 16/9$

3ª semana $16/9 + 1/3 \cdot 16/9 = 16/9 + 16/27 = 64/27$

4ª semana $64/27 + 1/3 \cdot 64/27 = 64/27 + 64/81 = 256/81 = 3.16$ su volumen es más de 3 veces el inicial, deben pasar 4 semanas

b) Como en 3 semanas crece $64/27$ y esto es 1200 cm^3 para calcular el volumen inicial dividimos

$$1200 : 64/27 = 506.25 \text{ cm}^3$$

10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que le queda el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que le queda las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aún tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

$1 - 1/6 = 5/6$ le queda

Impuestos: $5/6 \cdot 25/100 = 5/24$, le queda $5/6 - 5/24 = 15/24 = 5/8$

Hipoteca: $2/5 \cdot 5/8 = 1/4$, le queda $5/8 - 1/4 = 3/8$ que es 450 luego inicialmente tenía $450 : 3/8 = 1200$

Cobraba 1200 €. Ahora cobra 1000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

3º ESO

Capítulo 2: Potencias y raíces Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alicia Durán Crespo

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Determina el signo de las potencias:

$$(-1)^9 = \text{negativo}$$

$$(5)^{12} = \text{positivo}$$

$$(-12)^{-5} = \text{negativo}$$

$$(8)^{-4} = \text{positivo}$$

2. Expresa en forma de una única potencia:

$$(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6 = (-7)^{3+5+2+6} = (-7)^{16}$$

$$(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3 = (3)^{2+7+1+4+3} = (3)^{17}$$

3. Expresa en forma de potencia:

$$(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4 = ((-6) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-5))^4 = (-120)^4$$

4. Expresa en forma de potencia:

$$(-8)^9 \div (-8)^3 = (-8)^{9-3} = (-8)^6$$

$$(-3)^2 \div (-3)^7 = (-3)^{2-7} = (-3)^{-5}$$

5. Expresa en forma de potencia:

$$(75)^4 \div (-3)^4 = \left(\frac{75}{-3}\right)^4 = (-25)^4$$

$$(-5)^8 \div (8)^8 = \left(\frac{-5}{8}\right)^8$$

6. Expresa en forma de potencia:

$$((-2)^5)^6 = (-2)^{5 \cdot 6} = (-2)^{30}$$

$$((7)^3)^{-5} = (-2)^{3 \cdot (-5)} = (-2)^{-15}$$

7. Calcula:

$$a) \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$$

$$b) \left(\frac{-2}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{-2}\right)^4 = \frac{7^4}{(-2)^4} = \frac{2401}{16}$$

$$c) \left(\frac{-1}{6}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

$$d) \left(\frac{-5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{-5}\right)^2 = \frac{2^2}{(-5)^2} = \frac{4}{25}$$

8. Expresa como única potencia:

$$a) \left(\frac{-3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{-8} = \left(\frac{-3}{4}\right)^{3+2-8} = \left(\frac{-3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{-3}\right)^3$$

$$b) \left(\frac{1}{8}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-5+4-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{1}\right)^3 = 8^3$$

9. Expresa como única potencia:

$$a) \left(\frac{5}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{-1}{7}\right)^6 = \left(\frac{5 \cdot (-2) \cdot (-1)}{4 \cdot 3 \cdot 7}\right)^6 = \left(\frac{10}{84}\right)^6$$

$$b) \left(\frac{-3}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-1)}{5 \cdot 8 \cdot 4}\right)^{-4} = \left(\frac{-9}{160}\right)^{-4} = \left(\frac{160}{-9}\right)^4$$

10. Calcula:

$$a) \left(\frac{-2}{5}\right)^4 \div \left(\frac{-2}{5}\right)^7 = \left(\frac{-2}{5}\right)^{4-7} = \left(\frac{-2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{-2}\right)^3$$

$$b) \left(\frac{5}{8}\right)^3 \div \left(\frac{5}{8}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3+2} = \left(\frac{5}{8}\right)^5$$

11. Calcula:

$$a) \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{2}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5} \div \frac{2}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{9}\right)^3$$

$$b) (-6)^5 \div \left(\frac{-2}{9}\right)^5 = \left(\frac{-6}{1} \div \frac{-2}{9}\right)^5 = \left(\frac{-54}{-2}\right)^5 = 27^5$$

12. Calcula:

$$a) \frac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5} = \frac{9 \cdot \frac{32}{5^5}}{4^6} = \frac{288}{4^6}$$

$$b) \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6} = \frac{\left(\frac{-2 \cdot (-1)}{3 \cdot 6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4+6}} = \frac{\left(\frac{2}{18}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \left(\frac{16}{54}\right)^2 = \frac{64}{729}$$

13. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16} , 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

$$2^{16} = 65536$$

$$2^{32} = 4294967296$$

$$2^{64} = 1,844674407 \cdot 10^{19}$$

14. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

$$15 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 4,7304 \cdot 10^8 \text{ segundos}$$

15. Efectúa las operaciones en notación científica:

$$a) 0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5} = 25.7 \cdot 10^{-5} + 1.4 \cdot 10^{-5} = 27.1 \cdot 10^{-5}$$

$$b) 200000000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5 = 200 \cdot 10^6 - 3.5 \cdot 10^6 + 0.85 \cdot 10^6 = 197.35 \cdot 10^6$$

16. Efectúa las operaciones en notación científica:

$$a) (1.3 \cdot 10^5) \cdot (6.1 \cdot 10^{-3}) = (1.3 \cdot 6.1) \cdot 10^{5-3} = 7.93 \cdot 10^2$$

$$b) (4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4}) = (4.7 \cdot 3 \cdot 2.5) \cdot 10^{-8+6-4} = 35.25 \cdot 10^{-6}$$

17. Efectúa las operaciones en notación científica:

$$a) (5 \cdot 10^{-8}) \div (1.5 \cdot 10^{-3}) = (5 \div 1.5) \cdot 10^{-8+3} = 3.3 \cdot 10^{-5}$$

$$b) (3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) \div (6.15 \cdot 10^{-7}) = (3.25 \cdot 5 \div 6.15) \cdot 10^{-5+2+7} = 2.64227 \cdot 10^4$$

18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de $1\,284\,600\,000 \text{ km}^3$ y el volumen de agua dulce es de $35\,000\,000 \text{ km}^3$. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

$$1\,284\,600\,000 = 1.2846 \cdot 10^9$$

$$35\,000\,000 = 3.5 \cdot 10^7$$

$$3.5 \cdot 10^7 \div 1.2846 \cdot 10^9 = (3.5 \div 128.46) \cdot 10^{7-9} = 0.02725$$

La proporción de agua dulce es del 2,725 %

19. Se sabe que en un átomo de hidrogeno el núcleo constituye el 99% de la masa y que la masa de un electrón es de aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ g. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (Recuerda: Un átomo de hidrogeno está formado por el núcleo, con un protón y por un único electrón)

Masa del protón: $1.673 \cdot 10^{-24}$

Masa del núcleo= $0.99 \times (\text{Masa del protón} + \text{Masa del electrón})$

$$0.99 \cdot (1.673 \cdot 10^{-27} + 9.109 \cdot 10^{-31}) = 0.99 \cdot (167300 \cdot 10^{-29} + 0.09109 \cdot 10^{-29}) = 0.99 \cdot (167300.0911 \cdot 10^{-29}) = 165627,0902 \cdot 10^{-29}$$

20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3 . Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

$$5l = 5000000 \text{ mm}^3$$

$$5000000 = 5 \cdot 10^6$$

$$(5 \cdot 10^6) \cdot (5 \cdot 10^6) = 25 \cdot 10^{12} \text{ de glóbulos rojos en 5 litros de sangre}$$

21. Calcula todas las soluciones:

a) $\sqrt{121} = 11 \text{ y } -11$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\sqrt[4]{10000} = 10 \text{ y } -10$

d) $\sqrt[5]{-1} = -1$

e) $\sqrt[7]{1} = 1$

22. Expresa en forma de radical

a) $(-3)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(-3)^4}$

b) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

c) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

23. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^6 \cdot b^5} = ab \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b}$

b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6} = 6 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt[3]{6^2 \cdot 3}$

c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3} = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \sqrt{5 \cdot 9} = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$

24. Expresa en forma de producto o de cociente:

a) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$

c) $\sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$

25. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}} = \sqrt[3 \cdot 2]{18} = \sqrt[6]{18}$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[4 \cdot 3]{25} = \sqrt[12]{25}$

26. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^{13}} = 2^{\frac{13}{4}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}} = \frac{\sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^6}}{\sqrt[12]{5^3}} = \frac{\sqrt[12]{5^{10}}}{\sqrt[12]{5^3}} = \sqrt[12]{5^{10-3}} = \sqrt[12]{5^7} = 5^{\frac{7}{12}}$

27. Simplifica la expresión:

a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3 = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^3 = \frac{x^{\frac{6}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{11}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{37}{10}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{101}{30}}$

28. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144

29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49} = 7$

b) $\sqrt{25} = 5$

c) $\sqrt{100} = 10$

d) $\sqrt{64} = 8$

e) $\sqrt{81} = 9$

f) $\sqrt{1} = 1$

g) $\sqrt{0} = 0$

30. Calcula mentalmente en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51} \approx 7$

b) $\sqrt{27} \approx 5$

c) $\sqrt{102} \approx 10$

d) $\sqrt{63} \approx 8$

e) $\sqrt{80} \approx 9$

f) $\sqrt{2} \approx 1$

g) $\sqrt{123} \approx 11$

31. Indica que raíces cuadradas van a ser números naturales, cuales números irracionales y cuales no existen:

a) $\sqrt{36} = n^\circ$ natural

b) $\sqrt{-25}$ no existe

c) $\sqrt{-100}$ no existe

d) $\sqrt{32} = n^\circ$ irracional

e) $\sqrt{-7}$ = no existe

f) $\sqrt{10}$ = n° irracional

g) $\sqrt{100}$ = n° natural

32. Utiliza la calculadora para calcular:

a) $\sqrt{51}$ = 7.141428

b) $\sqrt{27}$ = 5.19615

c) $\sqrt{102}$ = 10.0995

d) $\sqrt{63}$ = 7.93725

e) $\sqrt{80}$ = 8.94427

f) $\sqrt{2}$ = 1.41421

g) $\sqrt{123}$ = 11.0905

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa en forma de única potencia:

- a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5 = (2 \cdot (-3) \cdot (-1))^5 = 6^5$
 b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (-1)^5 = (-1)^{3+8+5} = (-1)^{16}$
 c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 5)^3 = 40^3$
 d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5) = (5)^{2+4+1} = (5)^7$
 e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9 = (-9)^{2+3+4+1} = (-9)^{10}$
 f) $(-18)^4 : (-3)^4 = \left(\frac{-18}{-3}\right)^4 = 6^4$
 g) $(6)^5 : (6)^2 = (6)^{5-2} = 6^3$
 h) $(-3)^2 : (-3)^4 = (-3)^{2-4} = (-3)^{-2}$

2. Expresa en forma de única potencia:

- a) $\frac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6} = \frac{4^{2+3+1}}{(5 \cdot (-1))^6} = \frac{4^6}{5^6} = \left(\frac{4}{5}\right)^6$
 b) $((2^7) : (-3^7)) \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4 = ((2 : (-3))^7) \cdot (-4)^{4+3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \cdot (-4)^7 = \left(\frac{8}{3}\right)^7$
 c) $\frac{(-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4)^3 : ((-4)^8 \cdot (-4)^4)}{9^6 \cdot 9^4 \cdot 9} = \frac{(-2 \cdot (-3) \cdot 6)^{4 \cdot 3} : (-4)^{8+4}}{9^{6+4+1}} = \frac{36^{12} : (-4)^{12}}{9^9} = \frac{-9^{12}}{9^9} = (-9)^3$
 d) $\frac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3} = \left(\frac{((-3) \cdot 10 : (-5)^2)}{7^{5-3}}\right) = \left(\frac{6^2}{7^2}\right) = \left(\frac{6}{7}\right)^2$

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo:

- a) $(-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3$
 b) $(9)^{-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^3$
 c) $(-2)^5 : (-2)^9 = (-2)^{5-9} = (-2)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$
 d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6 = (-5)^{1+2-6} = (-5)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3$

4. Expresa en forma de única potencia:

- a) $((2)^4)^3 = (2)^{4 \cdot 3} = 2^{12}$
 b) $((-3)^{-2})^5 = (-3)^{(-2) \cdot 5} = (-3)^{-10}$
 c) $((-1)^4)^3 = (-1)^{4 \cdot 3} = (-1)^{12}$
 d) $((5)^2)^{3/5} = (5)^{2 \cdot 3/5} = (5)^{6/5}$

5. Expresa en forma de única potencia:

- a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 = (3/5)^4$
 b) $\left(\frac{2}{9}\right)^4$
 c) $(1/5)^{-3} = 5^3$
 d) $(2/3)^{-4} = (3/2)^4$

6. Expresa en forma de única potencia:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4+3+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

$$b) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot (-6)}{6 \cdot 5 \cdot (-7)}\right)^3 = \left(-\frac{3}{35}\right)^3$$

$$c) \left(-\frac{5}{3}\right)^4 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}\right)^4 = \left(\frac{15}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4$$

$$d) \left(\frac{4}{9}\right)^3 : \left(\frac{4}{9}\right)^5 = \left(\frac{4}{9}\right)^{3-5} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$e) \left(\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}\right)^5 = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3 \cdot 5} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-15} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{15}$$

$$f) \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{7}\right)^{1 \cdot 3} = \left(\frac{2}{7}\right)^3$$

7. Expresa en forma de única potencia:

$$a) \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2}\right)^3}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{3-2+1+4}} = \frac{\left(\frac{4}{135}\right)^3}{\left(-\frac{1}{4}\right)^6} = \frac{\left(\frac{4}{135}\right)^3}{\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)^3} = \left(\frac{4}{135} \div \left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)^3 =$$

$$= (4/135 \div 1/4^2)^3 = \left(\frac{64}{135}\right)^3$$

$$b) \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{4 \cdot \frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot (2/5)^{1/6}$$

$$c) \frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 \cdot (1/6)^3} = \frac{(2/5)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}}}{\left(\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6}\right)^3} = \frac{(2/5)^{13/12}}{\left(\frac{21}{4}\right)^3}$$

8. Expresa en forma de notación científica:

$$a) 140\,000\,000 = 1.4 \cdot 10^8$$

$$b) 32\,800 = 3.28 \cdot 10^4$$

$$c) 71\,000\,000\,000\,000\,000 = 7.1 \cdot 10^{16}$$

$$d) 0.0000075 = 7.5 \cdot 10^{-6}$$

$$h) -18\,000\,000 = -1.8 \cdot 10^7$$

$$f) 0.00000000042 = 4.2 \cdot 10^{10}$$

$$g) -0.009 = -9 \cdot 10^{-3}$$

$$e) 0.00000000007 = 7 \cdot 10^{-11}$$

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

$$a) \text{ La distancia entre la Tierra y la Luna} = 3.844 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$b) \text{ Unidad de masa atómica} = 1.665402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$c) \text{ Km que corresponden a un año luz} = 9.46 \cdot 10^{12}$$

$$d) \text{ Un gúgol} = 10^{100}$$

$$e) \text{ La longitud de onda de los rayos cósmicos} = 10^{-15}$$

10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:

$$a) 4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3 = 0.004 \cdot 10^6 + 2.4 \cdot 10^6 - 0.17 \cdot 10^6 - 0.003 \cdot 10^6 = 2.231 \cdot 10^6$$

$$b) 2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3} = 0.023 \cdot 10^{-3} - 0.345 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-3} = 5.678 \cdot 10^{-3}$$

$$c) 3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2 = 13.5 \cdot 10^{-2}$$

$$d) 1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8 = 0.36 \cdot 10^{-3}$$

11. La estrella Sirio está a unos 8.611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (Recuerda: Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$ (9 460 730 472 580.8 km más 9.46×10^{12} aproximación)).

$$8.611 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 365 \cdot 3600 = 2.2 \cdot 10^{10}$$

$$9.46 \times 10^{12} \cdot 1000 \cdot 365 \cdot 3600 = 2.98 \cdot 10^{22} \text{ m/s}$$

$$2.98 \cdot 10^{22} \cdot 2.2 \cdot 10^{10} = 6.556 \cdot 10^{32}$$

12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, la de un protón es de $1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ y la de un neutrón 1.64×10^{-27} . Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y $6 + 2 = 8$ neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).

$$\text{Masa } C_{14} = (6 \cdot 1.672 \cdot 10^{-27}) (6 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}) (8 \cdot 1.64 \times 10^{-27}) = (10.032 \cdot 10^{-27}) (54.66 \cdot 10^{-31}) (13.12 \times 10^{-27})$$

13. Calcula y expresa en notación científica:

$$a) 0.00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7.45 \cdot 10^{-5} - 6.32 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 8.29 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3} + 0.0745 \cdot 10^{-3} - 0.632 \cdot 10^{-3} = 11.7325 \cdot 10^{-3}$$

$$b) 5 \cdot 10^6 - 2.8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^6 - 28 \cdot 10^6 - 0.3 \cdot 10^6 = -23.3 \cdot 10^6$$

$$c) 5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^2 + 1.4 \cdot 10^{-3} = 0.0005 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^2 + 0.000014 \cdot 10^2 = -3.99 \cdot 10^2$$

$$d) 3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2.7) \cdot 10^{-3} + 4.2 \cdot 10^{-6} = -8.1 \cdot 10^{-8} + 4.2 \cdot 10^{-6} =$$

$$= -0.081 \cdot 10^{-6} + 4.2 \cdot 10^{-6} = 4.119 \cdot 10^{-6}$$

14. Expresa el resultado de esta operación en notación científica:

$$a) \frac{2.4 \cdot 10^{-3} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{0.025 + 3 \cdot 10^{-4}} = \frac{24 \cdot 10^{-4} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{250 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4}} = \frac{2398 \cdot 10^{-4}}{253 \cdot 10^{-4}} = 0.0948 \cdot 10^{-4}$$

15. Se estima que existen 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Expresa en notación científica de forma aproximada el número de bacterias que existen en unos camiones que están descargando 50 toneladas métricas de arena en una playa.

$$5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^7 = 20 \cdot 10^{11} = 2 \cdot 10^{12}$$

a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^7$ c) $3x - 5y$

$$\mathbf{b)} \quad (2 \cdot 24 \cdot 10^4) + (5.8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^7) = (48 \cdot 10^4) + (5.8 \cdot 10^3) = (48 \cdot 10^4) + (0.58 \cdot 10^4) = 48.58 \cdot 10^4$$

c) $(3 \cdot 24 \cdot 10^4) - (5 \cdot 5.8 \cdot 10^{-4}) = (72 \cdot 10^4) - (29 \cdot 10^{-4}) =$
 $= (72 \cdot 10^4) - (0.00000029 \cdot 10^4) = 71.9999 \cdot 10^4 \simeq 7.2 \cdot 10^5$

Calcula de forma aproximada el número de granos de arena que hay en toda la Tierra.

$$\frac{5.98 \cdot 10^{25}}{50} = 1.196 \cdot 10^{24}$$

$$\frac{1.898 \cdot 10^{27}}{5.972 \cdot 10^{24}} = 0.318 \cdot 10^3 = 318$$
$$\frac{5.972 \cdot 10^{24}}{639 \cdot 10^{21}} = 0.00934 \cdot 10^3 = 9.34$$

19. Calcula:

a) $\sqrt{12100} = 110$

b) $\sqrt[3]{-0.008} = -0.2$

c) $\sqrt[3]{-125} = -5$

d) $\sqrt[5]{-1} = -1$

e) $\sqrt{0.49} = 0.7$

20. Calcula:

a) $\sqrt[4]{2.0736} = 1.2$

b) $\sqrt[5]{-0.00001} = -0.1$

c) $\sqrt{33\,640\,000} = 5800$

d) $\sqrt[3]{-2.7 \cdot 10^{-6}} = -1.39 \cdot 10^{-3}$

21. Expresa en forma de raíz:

a) $(-4)^{3/5} = \sqrt[5]{(-4)^3}$

b) $7^{1/6} = \sqrt[6]{7}$

c) $(21)^{1/3} = \sqrt[3]{21}$

d) $(-5)^{2/3} = \sqrt[3]{(-5)^2}$

22. Expresa en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{3/5}$

b) $\sqrt{(-7)^5} = (-7)^{5/2}$

c) $\sqrt{3^5} = 3^{5/2}$

d) $\sqrt[3]{(-30)^4} = (-30)^{4/3}$

23. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2} = 3 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 2}$

b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5} = 6^3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot \sqrt[3]{2^2}$

c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5} = x^2 \cdot y \cdot \sqrt[4]{x^3}$

d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6} = 3 \cdot 5^2 \cdot \sqrt[3]{3}$

24. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}} = a^2 \cdot b \cdot c^{-2} \cdot \sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}} = 5^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot \sqrt{5^{-1}}$

c) $\sqrt[4]{10^5 \cdot 6^8} = 10/6^2 \cdot \sqrt[4]{10}$

d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x} = \sqrt{x^{12}} = x^6$

25. Simplifica:

a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{2}{5}\right) \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$

$$b) \sqrt[3]{\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^5} = \sqrt[3]{\left(-\frac{4}{5}\right)^6} = \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$c) \sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}} = \sqrt{\frac{y^3}{x^5}} = \frac{y}{x^2} \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$d) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5} = \left(\frac{1}{4}\right) : \left(\frac{4}{3}\right) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right) : \left(\frac{4}{3}\right)}$$

26. Expresa en forma de producto:

$$a) \sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12} = \sqrt{3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2} = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$$b) \sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{5^2 \cdot 2}$$

$$c) \sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9} = \sqrt{3^6 \cdot 2^3} = 3^3 \cdot 2\sqrt{2} = 54\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6} = a^2 \cdot c^2 \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2}$$

27. Expresa en forma de cociente:

$$a) \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$b) \sqrt[5]{\frac{15}{32}} = \frac{\sqrt[5]{15}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{15}}{2}$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{-7}{9}} = \frac{\sqrt[3]{-7}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{-7}}{3}$$

$$d) \sqrt{\frac{15}{24}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

28. Expresa en forma de única raíz:

$$a) \sqrt{\sqrt{48}} = {}^{2 \cdot 2}\sqrt{48} = {}^4\sqrt{48}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{450}} = {}^{3 \cdot 2}\sqrt{450} = {}^6\sqrt{450}$$

$$c) \sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}} = {}^{4 \cdot 3}\sqrt{9000} = {}^{12}\sqrt{9000}$$

$$d) \sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}} = {}^{2 \cdot 5}\sqrt{-1} = {}^{10}\sqrt{-1}$$

29. Simplifica las operaciones:

$$a) \sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{3^5 \cdot 2^4} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3^2 \cdot 2}$$

$$b) (\sqrt[3]{-27}) \cdot 5^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{(-3)^3}) \cdot 5^{\frac{2}{3}} = (-3) \cdot \sqrt[3]{25}$$

$$c) \sqrt[5]{2^{12}} \cdot \sqrt[5]{3^8} = \sqrt[5]{2^{12} \cdot 3^8} = \frac{2^2}{3} \cdot \sqrt[5]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$d) \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} \cdot \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{3 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 2^3} = \sqrt[2]{3 \cdot 2^2 \cdot 5^5} = 2 \cdot 5^2 \sqrt[2]{3 \cdot 5}$$

30. Simplifica las operaciones:

$$a) \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[2]{x^3} = \sqrt[6]{x^{10}} \cdot \sqrt[6]{x^9} = \sqrt[6]{x^{19}}$$

$$b) \sqrt{\sqrt{10^{12}}} = \sqrt[4]{10^{12}} = 10^3$$

$$c) \sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6} = (-2)^3 \cdot (-3)^3 \sqrt{5}$$

$$d) \sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}} = \sqrt[5]{-6^{12} : (-6)^7 \cdot 3^{10}} = \sqrt[5]{-6^5 \cdot 3^{10}} = (-6) \cdot 9$$

31. Simplifica las operaciones:

$$a) \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{2/3} = \sqrt[6]{64} : 5^{2/3} = 2 : 5^{2/3}$$

$$b) \frac{(-4)^{5 \cdot 3} \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3 \cdot \sqrt{2^5}}} = \frac{(-4)^{15} \cdot (-4)^{1/3}}{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^5}} = \frac{(-4)^{15/3}}{4 \sqrt[6]{2}} = \frac{(-4)^{5}}{4 \cdot 2^{1/6}}$$

$$c) \frac{((-7^3)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2})}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}} = \frac{(-7)^{3/4} \cdot (-7)^{2/3}}{\sqrt[4]{(-7)}} = \frac{(-7)^{17/12}}{(-7)^{1/4}} = (-7)^{14/12} = (-7)^{7/6}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ y $(12)^7 \div (12)^5$

$$(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6) = (-6)^{3-5+1} = (-6)^{-1} = \frac{1}{-6}$$

$$(12)^7 \div (12)^5 = (12)^{7-5} = (12)^2$$

La c) $1/6$ y 12^2

2. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ y $(-8)^7 \div (5)^7$

$$(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4 = (-5 \cdot (-1) \cdot 6)^4 = 30^4$$

$$(-8)^7 \div (5)^7 = \left(-\frac{8}{5}\right)^7$$

La b) 30^4 y $\left(-\frac{8}{5}\right)^7$

3. El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $\left((-5)^{\frac{2}{3}}\right)^6$

$$((-2)^5)^3 = (-2)^{5 \cdot 3} = (-2)^{15}$$

$$((-1)^5)^7 = (-1)^{5 \cdot 7} = (-1)^{35} = -1$$

$$\left((-5)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = (-5)^{\frac{2}{3} \cdot 6} = (-5)^{\frac{12}{3}} = (-5)^4$$

La c) $(-2)^{15}$; -1 y $(-5)^4$

4. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$

$$(8)^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{8^3}$$

$$(-2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = -\frac{1}{2^4}$$

$$(10^5)^{-2} = \left(\frac{1}{10^5}\right)^2 = \frac{1}{10^{10}}$$

La b) $\frac{1}{8^3}$; $-\frac{1}{2^4}$ y $\frac{1}{10^{10}}$

5. El resultado de las operaciones siguientes es: $\left(\frac{5}{7}\right)^3$; $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-2}$ y $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 = \left(\frac{3^2}{1}\right) = 3^2$$

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$$

La b) $\frac{5^3}{7^3}$; 3^2 y $\frac{2^4}{5^4}$

6. El resultado de las operaciones siguientes es: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

La a) 1

7. Las expresiones $3.1 \cdot 10^8$ y 0.0000000095 corresponden a:

$$3.1 \cdot 10^8 = 310000000$$

$$0.0000000095 = 9.5 \cdot 10^{-9}$$

La c) 310000000 y $9.5 \cdot 10^{-9}$

8. El resultado de esta operación es: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$

$$(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5 = (9.8 \cdot 10^{-4} + 0.03 \cdot 10^{-4} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5 =$$

$$5.63 \cdot 10^{-4} \cdot 2.5 \cdot 10^5 = 14.075 \cdot 10 = 140.75$$

La d) 140.75

9. El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$

$$\sqrt[3]{-1331} = -11$$

$$\sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1$$

La a) -11 , 16 , -1

10. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$

$$(-4)^{3/5} = \sqrt[5]{(-4)^3}$$

$$(3)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$(-5)^{4/3} = \sqrt[3]{(-5)^4}$$

La b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{(-5)^4}$

11. El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$

$$\sqrt[3]{(-5)^4} = (-5) \sqrt[3]{(-5)}$$

$$\sqrt{2^3 \cdot 5^5} = 2 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5} = 50\sqrt{10}$$

La b) $(-5) \sqrt[3]{(-5)}$; $50\sqrt{10}$

12. Las operaciones siguientes pueden expresarse: $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$

$$\sqrt[3]{-(5):12} = \frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}} = \sqrt[9]{-18}$$

La a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[9]{-18}$

3º ESO

Capítulo 3: Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $-1, -2, -3, -4, \dots$ b) $1, 4, 9, 16, \dots$ c) $1, 3, 5, 7, \dots$ a) $-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9$ y -10 .b) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ y 100 .c) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ y 19 .

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

a) $a_n = -n$, $a_{100} = -100$ b) $a_n = n^2$, $a_{100} = 100^2 = 10\,000$ c) $a_n = 2n - 1$, $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9.8 m/s . Si en el primer segundo su velocidad es de 10 m/s , escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 30 segundos? Representa gráficamente esta sucesión.

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10				

Debemos sumar $9,8$ cada segundo:

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10	19.8	29.6	304	$10+n \cdot 9.8$

Para calcular la velocidad a los 30 segundos sustituimos en $a_n = 10 + 9,8n$;

$$a_{30} = 10 + 9,8 \cdot 30 = 304 \text{ m/s}$$



4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

$$a_n = 2n^2 + 1 ; b_n = \frac{4n-1}{3n} ; c_1 = 1, c_n = 3c_{n-1} + 5 ; d_1 = 2, d_2 = 5, d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$$

$$a_n = 2n^2 + 1 ; a_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3, a_2 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9, a_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19,$$

$$a_4 = 2 \cdot 4^2 + 1 = 33$$

$$b_n = \frac{4n-1}{3n} ; b_1 = \frac{4 \cdot 1 - 1}{3 \cdot 1} = 1, b_2 = \frac{4 \cdot 2 - 1}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6}, b_3 = \frac{4 \cdot 3 - 1}{3 \cdot 3} = \frac{11}{9}, b_4 = \frac{4 \cdot 4 - 1}{3 \cdot 4} = \frac{15}{12}$$

$$c_1 = 1, c_n = 3c_{n-1} + 5, c_2 = 3c_1 + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8, c_3 = 3c_2 + 5 = 3 \cdot 8 + 5 = 29$$

$$c_4 = 3c_3 + 5 = 3 \cdot 29 + 5 = 94$$

$$d_1 = 2, d_2 = 5, d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2} \quad d_3 = 2d_2 + d_1 = 2 \cdot 5 + 1 = 12$$

$$d_4 = 2d_3 + d_2 = 2 \cdot 12 + 5 = 29$$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$,

b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$,

c) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$,

d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \dots\right\}$

a) Siempre 1 cambiando de signo, impares negativos: $a_n = (-1)^n$

b) $a_n = n^2 - 1$

c) Múltiplos de 2: $a_n = 2n$

d) Numerador impares, denominador naturales comenzando en 4: $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.

2, 6, 10, 14, 18, 22 y 26.

7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos.

a) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta.

b) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta n -ésima.

c) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior.

d) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de otra órbita anterior.

e) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

a) Como empieza a las 17h 30min y tarda 87 minutos = 1h 27 min en una órbita, habrá que sumar esta cantidad por cada órbita: 17 y 30 + 1 y 27 = 18h 57 min

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado	18:27	20:24	21:51	23:18	0:45	2:12

b) $h_n = 17:30 + 1:27 \cdot n$

c) $h_n = h_{n-1} + 1:27$

d) $h_n = h_m + 1:27 \cdot (n - m)$

e) 20 días tarde son $24 \cdot 20 = 480$ horas, a las 17:30, como nos pide a las 14 horas, es 3:30 horas menos, es decir dentro 476:30 horas, dividimos entre $1:27 = 87$ minutos que tarda en una vuelta, $\frac{476 \cdot 60 + 30}{87} = 328,62$ vueltas.

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética:

$\{1, 10, 100, 1000, 100000, \dots\}$.

No, es geométrica, cada término se obtiene multiplicando por 10 el anterior, 10^{n-1} .

9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es -2 .

1, $1 + (-2) = -1$, $-1 + (-2) = -3$, 1, -1 y -3 .

10. Dada una progresión aritmética cuyos dos de sus términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$:

a) Calcula su diferencia. b) Calcula su término general.

a) $18 - 4 = 12$, como de a_3 hasta a_{10} hay 6 términos, dividimos $12/6 = 2$ que es la diferencia.

b) $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_1 = a_3 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$, $a_n = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$

11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_{30} = a_1 + 2(30-1)$ $60 = a_1 + 58$, $a_1 = 60 - 58 = 2$

12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?

$a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_{22} = a_1 + 3(22-1)$, $45 = a_1 + 63$ $a_1 = 45 - 63 = -18$

$a_n = -18 + 3(n-1)$

13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.

El perímetro equivale a la suma de los 5 primeros términos de la progresión:

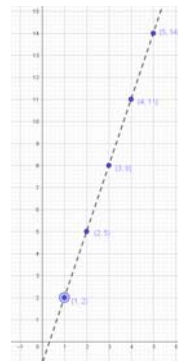
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$, $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_5 = a_1 + 5(5-1) = a_1 + 20$ sustituimos en

la suma: $65 = \frac{a_1 + a_1 + 20}{2} \cdot 5 \rightarrow \frac{65}{5} = \frac{2a_1 + 20}{2} \rightarrow 2 \cdot 13 = 2a_1 + 20 \rightarrow a_1 = 3$

El valor de los lados es: 3, 8, 13, 18 y 23.

14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

2, 5, 8, 11 y 14.



15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:

a) De diferencia $d = 2,5$ y de primer término 2.

b) De diferencia $d = -2$ y de primer término 0.

c) De diferencia $d = 1/3$ y de segundo término 5.

d) De diferencia $d = 4$ y de quinto término 1.

a) $a_n = 2 + (n-1)2,5 = 2,5n - 5$;

b) $a_n = 0 + (n-1)(-2) = -2n + 2$;

c) $5 - 1/3 = 14/3$, luego $a_1 = 14/3$, de donde, $a_n = 14/3 + (n-1) 1/3 = n/3 + 13/3$;

d) Restamos 4 veces 4 para obtener el primer término, $1 - 4 \cdot 4 = -15$, $a_n = -15 + (n-1) 4 = 4n - 19$.

16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?

El término general es $a_n = 7 + 7(n-1) = 7n$.

$$893 = 7n, n = 893/7 = 127,57, \text{ luego hay } 127, \quad 127 \cdot 7 = 889$$

17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: $\{-5, 4, 13, 22, 31, 40, \dots\}$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10; \quad a_n = a_1 + d(n-1), \quad a_{10} = -5 + 9(10-1) = 76$$

$$S_{10} = \frac{-5+76}{2} \cdot 10 = 355$$

18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.

$$a_n = 3n, \quad a_{50} = 50 \cdot 3 = 150$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{3+150}{2} \cdot 50 = 3825$$

19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el último?

La suma del primer y último término es igual al doble del central, por tanto, $2 \cdot 12 = 24$.

20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio metro anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?

$$a_n = a_1 + d(n-1), \text{ como el precio es 6 euros por medio metro, el metro sale a 12 euros,}$$

$$a_n = 50 + 12(n-1), \quad a_5 = 50 + 12 \cdot 4 = 98 \text{ €}$$

21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 60 + 5(n-1) = 5n + 55, \quad a_{10} = 5 \cdot 10 + 55 = 105$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{60+105}{2} \cdot 10 = 825, \text{ le costó } 825 \text{ €}$$

Lo iba a pagar en 10 semanas a 60€ lo que hace 600€, $825 - 600 = 225$, ha pagado 225€ de más
 $225/600 = 0,375$ supone un 37,5% más.

22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos.

a) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n .

b) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

2 largos son 100m, como 3 largos más cada día, hace $3 \cdot 50 = 150$ m más cada vez

a) $a_n = 100 + (n-1)150$

b) 100, 250, 400, 550 y 700 metros

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \quad 8 = 27 \cdot r^3 \quad r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

24. El cuarto término de una progresión geométrica es $1/9$ y la razón $1/3$. Halla el primer término.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \quad \frac{1}{9} = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rightarrow a_1 = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = 3$$

25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots\}$

El quinto sería $4\sqrt{2}$, y el sexto, $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$

26. Dada una progresión geométrica cuyos dos de sus términos son: $a_3 = -8$ y $a_{11} = -2048$

a) Calcula su razón.

b) Calcula su término general.

a) $a_n = a_m \cdot r^{n-m} \quad , \quad a_{11} = a_3 \cdot r^{11-3} \quad , \quad -2048 = -8 \cdot r^8 \quad , \quad r = \sqrt[8]{\frac{-2048}{-8}} = 2$

b) El segundo término es $-8/2 = -4$ y el primer término $-4/2 = -2$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad a_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$$

27. Cierta clase de alga, llamada clorella, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos.

a) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de clorella.

b) Indica el término general.

c) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?

Considerando los periodos de reproducción de 2 horas y media, tendríamos

a)

periodos	1	2	3	4	5
kilos	1	2	4	8	16

b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$

c) No, pues 2^{40} es imposible como peso.

28. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo 384. Halla la razón y el producto de los 8 primeros términos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_8 = a_1 \cdot r^{8-1} \quad , \quad 384 = 3 \cdot r^7 \quad , \quad r = \sqrt[7]{\frac{384}{3}} = 2$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad , \quad P_8 = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{(3 \cdot 384)^8} = 1,76 \cdot 10^{12}$$

29. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, ...

El quinto término es 48, $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad , \quad P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = 248\,832$

30. Un agricultor en su granja tiene 59049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?

Consideramos que el primer día utiliza la mitad, $59049/2 = 29524,5$

Es una progresión geométrica de razón $1/2$, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 29524,5 \cdot (1/2)^5 = 922,64$

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} \quad , \quad S_6 = \frac{r \cdot a_6 - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 922,64 - 29524,5}{\frac{1}{2} - 1} = 58126,36 \text{ litros ha utilizado en los 6 días.}$$

31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad S_{15} = a_1 \cdot \frac{r^{15} - 1}{r - 1} = 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{15} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 163835/16384$$

32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,...

La razón es $\frac{1}{2}$ que es menor que 1, $S_\infty \approx \frac{a_1}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

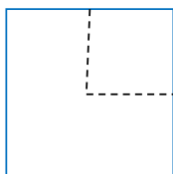
33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.

El nuevo cuadrado tiene un área de 0.5, la mitad. Los sucesivos cuadrados que tengo en la mano tienen de área 1, 1/2, 1/4, 1/8....

Y los recortes sobre la mesa: 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8...

Las infinitas áreas así obtenidas suman 1.

34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



En la mano vamos teniendo 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}^2$, ..., Disminuye.

Sobre la mesa va quedando, $0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}^2 + \dots$, Aumenta.

El área en la mano tiende a 0

El área en la mesa tiende a 1

35. Calcula la fracción generatriz del número $4,5\overline{61}$

$$4,5\overline{61} = 4,5 + 0,061 + 0,00061 + \dots = \frac{45}{10} + \frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots$$

$$\frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots \text{ es una progresión geométrica de razón } \frac{1}{100} < 1, S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{61}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{61}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{61}{990}$$

$$\frac{45}{10} + \frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots = \frac{45}{10} + \frac{61}{990} = \frac{45 \cdot 99 + 61}{990} = \frac{4516}{990}$$

36. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3.5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

Primer caso: $C_f = C_0 \cdot (1 + r)^n$, : $C_f = 6000 \cdot (1 + 0,035)^5 = 7126,12$

Segundo caso: 2 primeros años, $C_f = C_0 \cdot (1 + r)^n$, : $C_f = 6000 \cdot (1 + 0,05)^2 = 6615$

$$3 \text{ años restantes, } C_f = 6615 \cdot (1 + 0,03)^3 = 7228,39$$

La segunda opción es mejor.

CURIOSIDADES. REVISTA

El inventor del ajedrez El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente: "Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

a) ¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?

b) ¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

c) ¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora? $1 + 2 + 22 + 23 + \dots + 262 + 263$

a) Geométrica $r = 2$

b) Mas de 18 trillones

c) $1.8 \cdot 10^{19}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la diferencia es 5.

$$a_n = a_1 + d(n-1) , \quad a_{100} = 4 + 5(100-1) = 499$$

2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.

$$a_n = a_1 + d(n-1) , \quad a_{10} = a_1 + 4(10-1) , \quad 45 = a_1 + 36 , \quad a_1 = 9$$

3. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término n -ésimo 88, halla n .

$$a_n = a_1 + d(n-1) , \quad 88 = 4 + 7(n-1) = 4 + 7n - 7 , \quad 7n = 91 , \quad n = 91/7 = 13.$$

4. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.

$$a_n = a_m + d(n-m) , \quad a_{10} = a_3 + d(10-3) , \quad 66 = 24 + 7d , \quad 7d = 42 , \quad d = 6$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) , \quad a_{10} = a_1 + 6(10-1) , \quad 66 = a_1 + 54 , \quad a_1 = 12$$

5. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia $1/2$. Halla el término 20.

$$a_n = a_m + d(n-m) , \quad a_{20} = a_6 + \frac{1}{2} \cdot (20-6) = 4 + \frac{1}{2} \cdot 14 = 11 ; \quad a_{20} = 11$$

6. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.

Los lados serán: x , $x+3$ y $x+6$, por Pitágoras: $x^2 + (x+3)^2 = (x+6)^2$ desarrollando

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12x + 36 \rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \text{ resolviendo}$$

$x = 9$ y $x = -3$ que no es válido por ser medidas, luego los lados miden, 9, 12 y 15.

7. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente sean proporcionales a 5, 6 y 9.

Sean los números: x , $x+d$ y $x+2d$; aumentamos, $x+5$, $x+d+4$, $x+2d+7$

Se supone que la proporción es la misma, $\frac{x+5}{5} = \frac{x+d+4}{6} = \frac{x+2d+7}{9}$ multiplicando en cruz dos

$$\text{igualdades, } \begin{cases} 6x + 30 = 5x + 5d + 20 \\ 9x + 45 = 5x + 10d + 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5d - 10 \\ 4x = 10d - 10 \end{cases} \rightarrow$$

multiplicando por -4 la 1ª ecuación y sumando a la 2ª $0 = -10d + 30 \rightarrow d = 3$

$x = 5d - 10 \rightarrow x = 5 \cdot 3 - 10 = 5$, luego los números son: 5, 8 y 11.

8. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.

Vamos probando y el primer múltiplo de 59 mayor que 1000 es 1003, tenemos una progresión aritmética de primer término 1003 y diferencia 59, calculamos el múltiplo más cerca de 2000,

$$a_n = a_1 + d(n-1) , \quad 2000 = 1003 + 59(n-1) = 1003 + 59n - 59 = 944 + 59n ,$$

$$n = (2000 - 944)/59 = 17,89 , \text{ luego } n = 17 , \quad a_{17} = a_1 + 59(17-1) = 1003 + 944 = 1947$$

$$\text{Calculamos la suma, } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n , \quad S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \cdot 17 = \frac{1003 + 1947}{2} \cdot 17 = 25\,075$$

9. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos.

Sean los términos: $x - d$, x , $x + d$; $(x - 3)(x)(x + 3) = 80$, $x \cdot (x^2 - 9) = 80$, $x^3 - 9x = 80$
 $x^3 - 9x - 80 = 0$, resolvemos por Ruffini, $x = 5$ y dos soluciones no reales, por tanto, los términos son: 2, 5, 8.

10. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?

La diferencia es 6 y el primer término 2, formamos un sistema de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + d(n - 1) \\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_n = 2 + 6(n - 1) \\ 1064 = \frac{2 + a_n}{2} \cdot n \end{cases} \rightarrow \text{sustituimos } 1064 = \frac{2 + 6(n - 1)}{2} \cdot n$$

$2128 = (4 + 6n - 6) \cdot n \rightarrow 6n^2 - 2n - 2128 = 0$ resolvemos, $n = 19$, la otra solución es negativa y por tanto no válida,

11. La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. ¿Cuántos términos hemos sumado?

El primer término es 11 y la diferencia 1, $\begin{cases} a_n = a_1 + d(n - 1) \\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_n = 11 + 1(n - 1) \\ 1715 = \frac{11 + a_n}{2} \cdot n \end{cases} \rightarrow$
sustituimos $1715 = \frac{11 + 11 + n - 1}{2} \cdot n \rightarrow 3430 = (21 + n) \cdot n \rightarrow n^2 + 21n - 3430 = 0$
resolvemos, $n = 49$, la otra solución es negativa.

12. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n - 1), \quad a_5 = a_1 + 2(5 - 1), \quad 18 = a_1 + 2 \cdot 4, \quad a_1 = 10 \\ a_9 &= a_1 + 2(9 - 1) = 10 + 16 = 26 \\ S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{10 + 26}{2} \cdot 9 = 162 \end{aligned}$$

13. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. Halla estos números.

Sean los números, $x - d$, x , $x + d$; $x - d + x + x + d = 33$, $3x = 33$, $x = 11$
Entonces, $(11 - d)(11)(11 + d) = 1287$, $(121 - d^2)11 = 1287$, $11d^2 = 1331 - 1287 = 44$
 $d^2 = 4$, $d = 2$, luego los números son: 9, 11 y 13.

14. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.

Sean los números, 20, $20 + d$, $20 + 2d$; $20(20 + d)(20 + 2d) = 16640$
 $20(400 + 60d + 2d^2) = 16640$, dividimos entre 20, $400 + 60d + 2d^2 = 832$
 $2d^2 + 60d - 432 = 0$, resolvemos, $d = 6$, la otra solución es negativa, los números son:
20, 26 y 32.

15. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.

Sean los números, $x - 2d$, $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$

$$x - 2d + x - d + x + x + d + x + 2d = 5x = 40, \quad x = 8$$

$$(8 - 2d)(8 - d)(8)(8 + d)(8 + 2d) = 12320 \quad , \quad 8(64 - 4d^2)(64 - d^2) = 12320 \text{ dividiendo entre } 8$$

$$(64 - 4d^2)(64 - d^2) = 1540 \quad , \quad 4d^4 - 320d^2 + 4096 = 1540 \quad , \quad 4d^4 - 320d^2 + 2556 = 0$$

$$\text{Dividiendo entre } 4, \quad d^4 - 80d^2 + 639 = 0 \quad , \quad \text{es una ecuación bicuadrada } x^2 - 80x + 639 = 0$$

Resolviendo $x = 9$ y $x = 71$, como es $x = d^2$ la única solución válida es $d = 3$,

Los números son: 2, 5, 8, 11 y 14.

16. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.

Sean los números, $x - d$, x , $x + d$; $x - d + x + x + d = 18$, $3x = 18$, $x = 6$

$6 - d + 6 = 6 + d - 2$, $2d = 8$, $d = 4$. Los números son: 2, 6 y 10.

17. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.

$$a_{11} - a_1 = a_1 + 10d - a_1 = 10d = 30, \quad d = 3$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 \rightarrow 176 = \frac{a_1 + a_1 + 10 \cdot 3}{2} \cdot 11 \rightarrow 352 = 11(2a_1 + 30)$$

Dividiendo entre 11, $32 = 2a_1 + 30$, $2a_1 = 2$, $a_1 = 1$, luego los términos son:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 y 31.

18. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.

Sean los números, $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$; $x - d + x + x + d + x + 2d = 4x + 2d = 22$

Dividiendo entre 2, $2x + d = 11$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x + d = 11 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 = 166 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + d = 11 \\ x^2 - 2xd + d^2 + x^2 + x^2 + 2xd + d^2 + x^2 + 4xd + 4d^2 = 166 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + d = 11 \\ 4x^2 + 4xd + 6d^2 = 166 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 11 - 2x \\ 4x^2 + 4x(11 - 2x) + 6(11 - 2x)^2 = 166 \end{cases} \rightarrow$$

$$4x^2 + 44x - 8x^2 + 726 - 264x + 24x^2 = 166 \rightarrow 20x^2 - 220x + 560 = 0 \rightarrow$$

Dividiendo entre 20, $x^2 - 11x + 28 = 0$ resolvemos, $x = 4$ y $x = 7$; $d = 11 - 2x$, $d = 3$, $d = -3$

Luego los números son: 1, 4, 7 y 10. Para $x = 4$ y $d = 3$

10, 7, 4, y 1. Para $x = 7$ y $d = -3$, son los mismos.

19. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.

Sean los números, $x - 4$, x , $x + 4$, $x + 2 \cdot 4$; $x - 4$, x , $x + 4$, $x + 8$

$$(x - 4)x(x + 4)(x + 8) = (x^2 - 16)(x^2 + 8x) = x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 128x = 585,$$

$x^4 + 8x^3 - 16x^2 - 128x - 585 = 0$, resolvemos por Ruffini, $x = 5$ y $x = -9$, las otras 2 no son válidas

Luego los números son: 1, 5, 9, 13 o bien -13, -9, -5, -1.

20. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman -3 y los tres últimos 24.

Sean los números: $x - 2d$, $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$

$x - 2d + x - d + x = -3$; $x + d + x + 2d + x + 3d = 24$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} 3x - 3d = -3 \\ 3x + 6d = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - d = -1 \\ x + 2d = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2^a \text{ ecuación menos primera, } -3d = 9, \\ d = -3, x - (-3) = -1, x = 2 \end{matrix}$$

Los términos son: -4, -1, 2, 5, 8 y 11.

21. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6. Calcula la diferencia y los términos mencionados.

$a_{11} - a_8 = 2$ $a_1 + a_9 = 6$, como $a_n = a_1 + d(n - 1)$, sustituimos los términos por su expresión

y obtenemos el sistema $\begin{cases} a_1 + d(11 - 1) - [a_1 + d(8 - 1)] = 2 \\ a_1 + a_1 + d(9 - 1) = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10d - 7d = 2 \\ 2a_1 + 8d = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3d = 2 \\ a_1 + 4d = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{3} \\ a_1 + 4 \cdot \frac{2}{3} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{3} \\ a_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a_8 = 1/3 + 2/3 (8 - 1) = 5 ; \quad a_9 = 1/3 + 2/3 (9 - 1) = 17/3 ; \quad a_{11} = 1/3 + 2/3 (11 - 1) = 7$$

22. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.

$a_3 + a_2 = 19$ $a_5 + a_7 = 40$, como $a_n = a_1 + d(n - 1)$, sustituimos los términos por su expresión

y obtenemos el sistema $\begin{cases} a_1 + d(3 - 1) + a_1 + d(2 - 1) = 19 \\ a_1 + d(5 - 1) + a_1 + d(7 - 1) = 40 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = 19 \\ 2a_1 + 10d = 40 \end{cases}$

restamos la segunda ecuación menos la primera, $\begin{cases} 2a_1 + 3d = 19 \\ 7d = 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3 \cdot 3 = 19 \\ d = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \end{cases}$

$$a_2 = 5 + 3(2 - 1) = 8, \quad a_3 = 5 + 3(3 - 1) = 11, \quad a_5 = 5 + 3(5 - 1) = 17, \quad a_7 = 5 + 3(7 - 1) = 23$$

23. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100°, calcula los otros dos.

Sean los ángulos: $100 - d$, 100 , $100 - 2d$, tenemos que $100 - d + 100 + 100 - 2d = 180$

$300 - 3d = 180$, $3d = 120$, $d = 40$, los ángulos son: 20°, 60° y 100°

(consideramos que hay que restar la diferencia a 100, pues este debe ser el ángulo mayor, al tratarse de un triángulo)

24. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15470 m³.

Sean las longitudes de los lados: $x - d$, x , $x + d$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x - d + x + x + d = 78 \\ (x - d)(x)(x + d) = 15470 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 78 \\ (x - d)(x)(x + d) = 15470 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 26 \\ (26 - d)(26)(26 + d) = 15470 \end{cases} \rightarrow -26d^2 + 17576 = 15470 \rightarrow d^2 = 81 \rightarrow d = 9$$

Las longitudes son: 17, 26 y 35.

25. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60°. Calcula el valor de cada ángulo.

Sean los ángulos, $x - 2d$, $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$

$$x + 3d - (x - 2d) = 60, \quad 5d = 60, \quad d = 12$$

Como la suma de los ángulos de un hexágono es de 720°

$$S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{a_1 + a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = \frac{2a_1 + 5 \cdot 12}{2} \cdot 6 = 720 \rightarrow 2a_1 + 60 = \frac{720}{3} = 240 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2a_1 = 180 \rightarrow a_1 = 90$$

Los ángulos son: 90°, 102°, 114°, 126°, 138° y 150°.

26. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?

Sean las longitudes de los lados: $x - d$, x , $x + d$, tenemos

$$x - d + x + x + d = 36, \quad 3x = 36, \quad x = 12$$

Como es rectángulo, $(12 + d)^2 = 12^2 + (12 - d)^2$, $144 + 24d + d^2 = 144 + 144 - 24d + d^2$

$$48d = 144, \quad d = 3.$$

Las longitudes de los lados son: 9, 12 y 15.

27. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

Se trata de la suma de una progresión aritmética de diferencia 1 y primer término 1

$$a_n = a_1 + 1(n - 1) = a_1 + n - 1, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{1 + 1 + n - 1}{2} \cdot n = 5050$$

$$\frac{1+n}{2} \cdot n = 5050 \rightarrow (1+n) \cdot n = 10100 \rightarrow n^2 + n - 10100 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $n = 100$ y $n = -101$ (no válida)

Tiene que haber 100 filas.

28. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 50 y primer término 800

12 años son $12 \cdot 12 = 144$ meses, debemos calcular el término 144

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad a_{144} = 800 + 50(144 - 1) = 1350$$

Al cabo de 12 años debe pagar 1350€ al mes.

29. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

Sean las edades de los hermanos: $x - d$, x , $x + d$, $x + 2d$ tenemos

$$\begin{cases} x + 2d - (x - d) = 6 \\ x - d + x + x + d + x + 2d = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3d = 6 \\ 4x + 2d = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 4x + 2 \cdot 2 = 32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Las edades de los hermanos son: 5, 7, 9 y 11 años.

30. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 10 y primer término 60 (1 hora = 60 minutos)

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad , \quad a_{15} = 60 + 10(15-1) = 200$$

$$a_{30} = 60 + 10(30-1) = 350 \quad , \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad , \quad S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{60+350}{2} \cdot 30 = 6150$$

A los 15 días debe entrenar **200 minutos** y a lo largo de un mes habrá dedicado **6150 minutos**.

31. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad , \quad a_6 = 86 + d(6-1) = 134 \quad 5d = 134 - 86 = 48 \quad , \quad d = \frac{48}{5}$$

$$a_n = 86 + \frac{48}{5}(n-1) = 230 \quad , \quad 230 - 86 = \frac{48}{5}(n-1) \quad , \quad 144 = \frac{48}{5}(n-1)$$

$$144 \cdot 5 = 48n - 48 \quad , \quad 48n = 768 \quad , \quad n = 16$$

La persona estará en la **fila 16**.

32. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_{11} = 1 \cdot 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$$

33. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \quad , \quad 81 = 1 \cdot r^4 \quad , \quad r = \sqrt[4]{81} = \pm 3$$

Solución 1ª: 1, 3, 9, 27 y 81

Solución 2ª: 1, -3, 9, -27 y 81.

34. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad 28672 = 7 \cdot 2^{n-1} \quad , \quad 28672/7 = 2^{n-1} \quad , \quad 2^{n-1} = 4096 \quad , \quad 2^{n-1} = 2^{12} \quad , \quad n-1 = 12 \quad , \quad n = 13$$

28672 ocupa el lugar **13**

35. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad 1 = a_1 \cdot (1/2)^{7-1} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = 2^6 = 64$$

El primer término es **64**.

36. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

$$a_n = a_m \cdot r^{n-m} \quad , \quad a_{15} = a_{10} \cdot r^{15-10} \quad , \quad 512 = 16 \cdot r^5 \quad , \quad r^5 = 512/16 = 2^5 \quad , \quad r = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad , \quad a_{10} = a_1 \cdot r^{10-1} \quad , \quad 16 = a_1 \cdot 2^9 \quad , \quad a_1 = 2^4/2^9 = 1/2^5 = 1/32$$

37. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.

Sean los números: $a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2$ tenemos que:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \rightarrow S_3 = a_1 \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1} \rightarrow 124 = a_1 \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1} \quad y$$

$$a_1 \cdot r^2 - a_1 = 96 \rightarrow a_1 \cdot (r^2 - 1) = 96 \rightarrow a_1 = \frac{96}{r^2 - 1}, \text{ sustituimos en la primera ecuación,}$$

$$124 = \frac{96}{r^2 - 1} \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1} \rightarrow 124(r^2 - 1)(r - 1) = 96(r^3 - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow 124r^3 - 124r^2 - 124r + 124 = 96r^3 - 96 \rightarrow$$

$$\rightarrow 28r^3 - 124r^2 - 124r + 220 = 0, \text{ resolvemos por Ruffini, obtenemos } r = 5,$$

$$a_1 = \frac{96}{r^2 - 1} \rightarrow a_1 = \frac{96}{5^2 - 1} = 4$$

Los tres sumandos son: **4, 20 y 100.**

38. El volumen de un ortoedro es de 3375 cm³. Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.

Sean las longitudes de las aristas: $a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2$ tenemos que, $a_1 \cdot r = a_1 + 10, r = \frac{a_1 + 10}{a_1}$

Los lados quedan: $a_1, a_1 + 10, (a_1 + 10) \cdot r$

Como el volumen es el producto los lados, nos queda $3375 = a_1(a_1 + 10)(a_1 + 10) \cdot r \rightarrow$

$$\rightarrow 3375 = a_1(a_1 + 10)(a_1 + 10) \cdot \frac{a_1 + 10}{a_1} \rightarrow 3375 = (a_1 + 10)(a_1 + 10)(a_1 + 10) \rightarrow$$

$$\rightarrow 3375 = a_1^3 + 30a_1^2 + 300a_1 + 1000 \rightarrow a_1^3 + 30a_1^2 + 300a_1 - 2375 = 0, \text{ resolviendo}$$

Por Ruffini, $a_1 = 5$, de donde, $r = \frac{a_1 + 10}{a_1} = \frac{5 + 10}{5} = 3$

Las longitudes son: **5, 15 y 45.**

39. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...

La razón es 2 y el primer término 3, necesitamos calcular el término octavo

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, a_8 = 3 \cdot 2^{8-1} = 3 \cdot 128 = 384$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}, P_8 = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{(3 \cdot 384)^8} = (3 \cdot 384)^4 = 1\,753\,151\,963\,136$$

$$P_8 = 1\,753\,151\,963\,136$$

40. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

Primer término 3 y razón 2 $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, S_{10} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 3069$

41. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 16 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, S_8 = 16S_4, S_8 = a_1 \cdot \frac{r^8 - 1}{r - 1}, S_4 = a_1 \cdot \frac{r^4 - 1}{r - 1}, a_1 \cdot \frac{r^8 - 1}{r - 1} = 16a_1 \cdot \frac{r^4 - 1}{r - 1}$$

$$r^8 - 1 = 16(r^4 - 1) \rightarrow (r^4 + 1)(r^4 - 1) = 16(r^4 - 1) \rightarrow r^4 + 1 = 16 \rightarrow r^4 = 15 \rightarrow r = \sqrt[4]{15}$$

42. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2} < 1$

$$S_{\infty} \approx \frac{a_1}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \quad S_{\infty} = 16$$

43. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.

Sean los números: x/r , x , $x \cdot r$ sabemos que,

$$x/r + x + x \cdot r = 26, \quad \text{y que} \quad (x/r) \cdot x \cdot x \cdot r = 216, \quad x^3 = 6^3, \quad x = 6$$

$$6/r + 6 + 6 \cdot r = 26, \quad \text{quitamos } r \text{ de denominador, } 6 + 6r + 6r^2 = 26r$$

$$6r^2 - 20r + 6 = 0, \quad \text{resolviendo, } r = 3 \quad \text{y} \quad r = 1/3$$

Los números son: **2, 6 y 18**

44. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.

El término central de 11 es el sexto, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $a_6 = a_1 \cdot r^{6-1} = 2$, $a_1 \cdot r^5 = 2$, $a_1 = 2/r^5$

$$a_n = a_m \cdot r^{n-m}, \quad a_{11} = a_6 \cdot r^{11-6} = 2 \cdot r^5$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}, \quad P_{11} = \sqrt{(a_1 \cdot a_{11})^{11}} = \sqrt{\left(\frac{2}{r^5} \cdot 2r^5\right)^{11}} = \sqrt{(4)^{11}} = 2^{11}$$

$$P_{11} = 2^{11}$$

45. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.

Sean los números: x/r , x , $x \cdot r$ sabemos que,

$$x/r + x + x \cdot r = 525, \quad \text{y que} \quad (x/r) \cdot x \cdot x \cdot r = 1\,000\,000, \quad x^3 = 100^3, \quad x = 100$$

sustituyendo en la 1ª ecuación: $100/r + 100 + 100 \cdot r = 525$ multiplicamos por r

$$100 + 100r + 100r^2 = 525r, \quad 100r^2 - 425r + 100 = 0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado, $r = 4$ y $r = \frac{1}{4}$

Los números son: **25, 100 y 400.**

46. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.

Sean los números: x/r , x , $x \cdot r$ y $x \cdot r^2$ sabemos que,

$$x/r + x = 0,5 \quad \text{y que} \quad x \cdot r + x \cdot r^2 = 0,125$$

$$\begin{cases} \frac{x}{r} + x = 0,5 \\ x \cdot r + x \cdot r^2 = 0,125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \left(\frac{1}{r} + 1 \right) = 0,5 \\ x(r + r^2) = 0,125 \end{cases} \quad \text{dividiendo la segunda entre la primera}$$

$$\frac{r+r^2}{\frac{1}{r}+1} = \frac{0,125}{0,5} \rightarrow \frac{r(r+1)}{\frac{1+r}{r}} = \frac{0,125}{0,5} \rightarrow r^2 = 0,25 \rightarrow r = 0,5$$

$$x(r + r^2) = 0,125 \rightarrow x(0,5 + 0,25) = 0,125 \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Los números son: $1/3, 1/6, 1/12$ y $1/24$.

47. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}, \quad 889 = \frac{r \cdot 448 - 7}{r - 1}, \quad 889(r - 1) = 448r - 7, \quad 441r = 882, \quad r = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad 448 = 7 \cdot r^{n-1}; \quad 448 = 7 \cdot 2^{n-1}, \quad 2^{n-1} = 64 = 2^6, \quad n - 1 = 6, \quad n = 7$$

Se han tomado **7 términos**.

48. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla los términos primero y séptimo.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad S_7 = a_1 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 7651 \rightarrow a_1 \cdot \frac{2186}{2} = 7651 \rightarrow 1093a_1 = 7651 \rightarrow a_1 = 7$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad a_7 = 7 \cdot 3^{7-1} = 5103$$

Los términos primero y séptimo son: $a_1 = 7$ y $a_7 = 5103$.

49. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.

Sean los números: $x/r, x$ y $x \cdot r$ sabemos que, $x \cdot r = x/r + x + 115$, como $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

$$P_3 = \sqrt{(a_1 \cdot a_3)^3} = \sqrt{\left(\frac{x}{r} \cdot x \cdot r\right)^3} = 328509 \rightarrow x^3 = 328509 \rightarrow x = \sqrt[3]{328509} = 69$$

Sustituyendo en $x \cdot r = x/r + x + 115$, $69r = 69/r + 69 + 115$, multiplicando por r

$$69r^2 = 69 + 184r, \quad 69r^2 - 184r - 69 = 0, \text{ resolviendo, } r = 3 \text{ y } r = 1/3$$

Los tres números son: **23, 69 y 207**.

50. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.

Sean los números: $x/r, x$ y $x \cdot r$ sabemos que, $x = x/r + 32$ y que $xr = x + 96$

Despejamos x en la segunda ecuación, $xr - x = 96$, $x(r - 1) = 96$, $x = 96/(r - 1)$

$$\text{Sustituimos en la primera ecuación, } \frac{96}{r-1} = \frac{96}{r} + 32 \rightarrow \frac{96}{r-1} = \frac{96}{r(r-1)} + 32$$

multiplicamos por $r(r - 1)$ $96r = 96 + 32r(r - 1) \rightarrow 32r^2 - 128r + 96 = 0$ dividiendo

entre 32, $r^2 - 4r + 3 = 0$ resolviendo, $r = 3$ y $r = 1$, sustituyendo en $x = \frac{96}{r-1}$

$$x = \frac{96}{3-1} = \frac{96}{2} = 48, \quad r = 1 \text{ no es válido.}$$

Los tres números pedidos son: **16, 48 y 144**.

51. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.

Sean los números: $x/r, x, x \cdot r$ y $x \cdot r^2$ sabemos que, $x = 20$ luego nos queda

$$20/r + 20 + 20r + 20r^2 = 425 \text{ multiplicando por } r, \quad 20 + 20r + 20r^2 + 20r^3 = 425r$$

$20r^3 + 20r^2 - 405r + 20 = 0$, resolviendo por Ruffini, obtenemos $r = 4$ única solución válida.

Los cuatro números son: 5, 20, 80 y 320.

52. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.

Sean los ángulos: x/r , x , $x \cdot r$ y $x \cdot r^2$ sabemos que, $x \cdot r^2 = 27 x/r$, de donde, $x \cdot r^3 = 27x$
 $r^3 = 27$, $r = 3$. Como la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° , tenemos
 $x/r + x + x \cdot r + x \cdot r^2 = 360$, $x/3 + x + 3x + 9x = 360$, $40x/3 = 360$, $40x = 1080$, $x = 27$
 Los cuatro ángulos son: 9° , 27° , 81° y 243° .

53. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que sus aristas suman 420 m y su volumen 8000 m³.

Sean las dimensiones: x/r , x y $x \cdot r$ sabemos que, $4x/r + 4x + 4x \cdot r = 420$ y que
 $(x/r) \cdot x \cdot x \cdot r = 8000$

Tenemos el sistema $\begin{cases} \frac{4x}{r} + 4x + 4xr = 420 \\ x^3 = 8000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{r} + x + xr = 105 \\ x = 20 \end{cases} \rightarrow \frac{20}{r} + 20 + 20r = 105$

Multiplicamos por r , $20 + 20r + 20r^2 = 105r \rightarrow 20r^2 - 85r + 20 = 0$ dividiendo entre 5
 $4r^2 - 17r + 4 = 0$ resolviendo, $r = 4$ y $r = \frac{1}{4}$

Las dimensiones de las aristas son: 5m, 20m y 80m.

54. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.

Sean las partes: x/r , x y $x \cdot r$ sabemos que, $x/r + x + x \cdot r = 221$ y que, $xr = x/r + 136$

Tenemos el sistema $\begin{cases} \frac{x}{r} + x + xr = 221 \\ xr = \frac{x}{r} + 136 \end{cases} \text{ multiplicando por } r \rightarrow \begin{cases} x + xr + xr^2 = 221r \\ xr^2 = x + 136r \end{cases} \rightarrow$

Despejamos x en la 2ª ecuación, $xr^2 - x = 136r \rightarrow x(r^2 - 1) = 136r \rightarrow x = \frac{136r}{r^2 - 1}$

Sustituimos en la 1ª ecuación, $\frac{136r}{r^2 - 1} + \frac{136r}{r^2 - 1}r + \frac{136r}{r^2 - 1}r^2 = 221r$

Multiplicamos por $r^2 - 1$, $136r + 136r^2 + 136r^3 = 221r(r^2 - 1) \rightarrow$

$\rightarrow 136r + 136r^2 + 136r^3 = 221r^3 - 221r \rightarrow 85r^3 - 136r^2 - 357r = 0 \rightarrow$

dividimos entre 17, $(5r^3 - 8r^2 - 21r) = 0 \rightarrow$ resolviendo, $r = 0$, no válida, $r = 3$, $r = 1/3$

Las tres partes son: 17, 51 y 153.

55. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.

Sean las partes: x/r , x y $x \cdot r$ sabemos que, $x/r + x + x \cdot r = 248$ y que, $x \cdot r - x/r = 192$

Tenemos el sistema $\begin{cases} \frac{x}{r} + x + xr = 248 \\ xr - \frac{x}{r} = 192 \end{cases} \text{ multiplicando por } r \rightarrow \begin{cases} x + xr + xr^2 = 248r \\ xr^2 - x = 192r \end{cases} \rightarrow$

Despejamos x en la 2ª ecuación, $xr^2 - x = 192r \rightarrow x(r^2 - 1) = 192r \rightarrow x = \frac{192r}{r^2 - 1}$

Sustituimos en la 1ª ecuación, $\frac{192r}{r^2-1} + \frac{192r}{r^2-1}r + \frac{192r}{r^2-1}r^2 = 248r$

Multiplicamos por $r^2 - 1$, $192r + 192r^2 + 192r^3 = 248r(r^2 - 1) \rightarrow$

$$\rightarrow 192r + 192r^2 + 192r^3 = 248r^3 - 248r \rightarrow 56r^3 - 192r^2 - 440r = 0 \rightarrow$$

Dividimos entre 8, $(7r^2 - 24r - 55)r = 0$ resolviendo, $r = 0$, no válida, $r = 5$, $r = 1/5$

Los números son: 8, 40 y 200.

56. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.

Sean los números: x/r , x , $x \cdot r$ y $x \cdot r^2$ sabemos que, $x/r + x = 28$ y que, $x \cdot r + x \cdot r^2 = 175$

Tenemos el sistema $\begin{cases} \frac{x}{r} + x = 28 \\ xr + xr^2 = 175 \end{cases}$ multiplicando por $r \rightarrow \begin{cases} x + xr = 28r \\ xr^2 + xr = 175 \end{cases} \rightarrow$

Despejando x en las 2 ecuaciones, $\begin{cases} x(1+r) = 28r \\ x(r^2+r) = 175 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{28r}{1+r} \\ x = \frac{175}{r(r+1)} \end{cases} \rightarrow \frac{28r}{1+r} = \frac{175}{r(r+1)} \rightarrow$

$$\rightarrow 28r = \frac{175}{r} \rightarrow 28r^2 = 175 \rightarrow r = \sqrt{\frac{175}{28}} = 2,5 ; \text{ sustituyendo, } x = \frac{28r}{1+r} = \frac{28 \cdot 2,5}{1+2,5} = 20$$

Los números son: 8, 20, 50 y 125.

57. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad a_{15} = 6 \cdot r^{15-1}, \quad 54 = 6 \cdot r^{14}, \quad r^{14} = 9, \quad r = \sqrt[14]{9} = \sqrt[7]{3}$$

$$a_6 = 6 \cdot (\sqrt[7]{3})^{6-1} = 6 \cdot (\sqrt[7]{3})^5$$

El término sexto es: $a_6 = 6 \cdot (\sqrt[7]{3})^5$.

58. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.

Sean los términos: x/r^2 , x/r , x , $x \cdot r$ y $x \cdot r^2$ sabemos que, $r = \frac{1}{4}(x/r^2)$ y que, $x/r^2 + x/r = 24$

Tenemos el sistema $\begin{cases} \frac{x}{4r^2} = r \\ \frac{x}{r^2} + \frac{x}{r} = 24 \end{cases}$ multiplicando por $r^2 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = r^3 \\ x + xr = 24r^2 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 4r^3 \\ 4r^3 + 4r^3r = 24r^2 \end{cases} \rightarrow 4r^4 + 4r^3 - 24r^2 = 0 \rightarrow 4r^2(r^2 + r - 6) = 0 \rightarrow r = 0, r = -3, r = 2$$

$$x = 4r^3 \rightarrow x = 4 \cdot 2^3 = 32 ; \quad x = 4 \cdot (-3)^3 = -108$$

Los términos son: 8, 16, 32, 64 y 128, o bien, -12, 36, -108, 324 y -972

59. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

$$\text{Debe cumplirse que } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2(x+1)}{x+1} \rightarrow (x+1)^2 = 2(x+1)(x-1) \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3, \text{ sólo es válido } x = 3$$

El valor de x es: $x = 3$ y los términos, 2, 4 y 8

60. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

Sean las longitudes de los trozos: 100, $100r$ y $100r^2$, tenemos que

$$100 + 100r + 100r^2 = 700, \text{ dividiendo entre } 100, 1 + r + r^2 = 7, r^2 + r - 6 = 0,$$

Resolviendo, $x = 2$ y $x = -3$, -3 no es válido pues, aunque cumple la condición de sumar 700, uno de los trozos tendría longitud negativa.

La longitud de los trozos sería: 100m, 200m y 400m.

61. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

$$0,737373... = 0,73 + 0,0073 + 0,000073 + ... = \frac{73}{100} + \frac{73}{10000} + \frac{73}{1000000} + ...$$

Se trata de una progresión geométrica de primer término $\frac{73}{100}$ y $r = \frac{1}{100} < 1$

$$S_{\infty} \approx \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{73}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{73}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{73}{99}$$

La fracción generatriz es: $\frac{73}{99}$.

62. Se tiene una cuba de vino que contiene 1024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?

Se trata de una progresión geométrica de primer término 1024 y razón $\frac{1}{2}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, a_{10} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 2^9 \cdot 2^{-9} = 2^0 = 1$$

El día 10 de octubre se sacó: 1 litro.

63. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

El área de un cuadrado es su lado al cuadrado, el segundo cuadrado tiene de lado

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ el área del primer cuadrado es } 1 \cdot 1 = 1, \text{ el área del segundo cuadrado es,}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ luego las áreas son: } 1, 1/2, 1/4, 1/8, ... \quad S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

La suma de las infinitas áreas es: $2m^2$.

64. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que, si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

Sean los números, $x-d$, x , $x+d$, sabemos que, $x-d+1$, $x+4$, y $x+d+43$ forman

una progresión geométrica y, además $x-d+x+x+d=36$, $3x=36$, $x=12$, nos queda

que, $12 - d + 1$, $12 + 4$, y $12 + d + 43$, es decir, $13 - d$, 16 y $55 + d$ forman una P.G.

$$\text{luego } \frac{16}{13-d} = \frac{55+d}{16} \rightarrow 16 \cdot 16 = (13-d)(55+d) \rightarrow 256 = 715 - 42d - d^2 \rightarrow$$

$$d^2 + 42d - 459 = 0 \text{ resolviendo } d = 9 \text{ y } d = -51$$

Los números son: para $x = 12$ y $d = 9$, P.A.: 3, 12 y 21; P.G.: 4, 16 y 64.

para $x = 12$ y $d = -51$, P.A.: 63, 12, -39; P.G.: 64, 16, 4.

65. Triángulo de Sierpinsky: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierpinsky, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



- a) $A, (3/4)A, (9/16)A, \dots, (3/4)^{n-1}A$, esta es la sucesión de las áreas, que es decreciente y tiende a 0.
- b) Se entiende que la pregunta es la longitud total de los lados del triángulo, es decir, si el lado del primer triángulo es L , la longitud total es $3L$, los lados de los triángulos de la primera iteración miden $L/2$, como tiene 3 lados, la longitud total es $3 \cdot L/2$ y como hay 3 triángulos la longitud total será $3 \cdot 3 \cdot L/2 = 9/2 \cdot L = 4,5L$, sucesivamente en la siguiente iteración la longitud total es $3^3/2^2 L = 6,75L$, así tenemos: $3L, 4,5L, 6,75L, \dots$ la sucesión es creciente, tiende a infinito.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?
- a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica

Respuesta: b).

2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:
- a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

$$a_n = 13 + 13(n - 1) = 169, \quad 13n = 169, \quad n = 13$$

Respuesta: c).

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,... es:
- a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10; \quad a_n = a_1 + d(n - 1), \quad a_{10} = 7 + 6(10 - 1) = 61$$

$$S_{10} = \frac{7+61}{2} \cdot 10 = 340$$

Respuesta: d).

4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
- a) Es una progresión geométrica de razón 5
b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
c) Es una progresión geométrica de razón 3
d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.

Respuesta: c).

5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:
- a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ d) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Cada término se obtiene multiplicando por 5 el anterior, primer término es 2, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Respuesta: a).

6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10} ?
- a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048

$$a_1 = 32 = 2^5, \quad a_6 = 2^{10}, \quad S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}, \quad S_6 = \frac{r \cdot a_6 - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot 2^{10} - 32}{2 - 1} = 2046$$

Respuesta: b).

7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:
- a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad a_n = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

Respuesta: c).

8. ¿Cuál es el valor de la suma: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$?

- a) 500 000 b) 250 000 c) 50 000 d) 25 000

Se trata de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de primer término 1
Y término general $2n - 1$ (los números impares) $999 = 2n - 1$, $n = 500$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_{500} = \frac{a_1 + a_{500}}{2} \cdot 500 = \frac{1 + 999}{2} \cdot 500 = 250\,000$$

Respuesta: b).

9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?

- a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

Se trata de la suma de los 7 primeros términos de una progresión geométrica de razón 2

Y primer término 3, $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, $S_7 = a_1 \cdot \frac{r^7 - 1}{r - 1} = 3 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 381$

Respuesta: a).

10. A Roberto le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

- a) 6240 € b) 6104 € c) 7832.04 € d) 7299.92 €

$$C_f = C_0 \cdot (1 + r)^n, \quad C_f = 6000 \cdot (1 + 0,04)^5 = 7299,92$$

Respuesta: d)

3º ESO

Capítulo 4: Expresiones algebraicas. Polinomios

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: **Luis Carlos Vidal Del Campo**

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Respuesta: Se multiplica el número de minutos por el precio de cada minuto y el número de llamadas por el precio de cada llamada

2. Escribe las expresiones algebraicas que nos proporcionan la longitud de una circunferencia y el área de un trapecio.

Respuesta: $L = 2\pi r$, $A = \frac{(B+b)h}{2}$

3. Reescribe, en lenguaje algebraico, los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y :

- a) El triple de su diferencia b) La suma de sus cuadrados c) El cuadrado de su suma
d) El inverso de su producto e) La suma de sus opuestos f) El producto de sus cuadrados

Respuesta: a) $3(x - y)$ b) $x^2 + y^2$ c) $(x + y)^2$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $-x - y$ f) $x^2 y^2$

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 30 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta

Respuesta: $1 - 0,3 = 0,7$ luego pagaremos $0,7p$, siendo p el precio impreso.

5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ para $x = -2$. b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ para $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$

Respuesta:

a) $-3 \cdot (-2)^2 + \frac{4}{-2} - 5 = -3 \cdot 4 - 2 - 5 = -19$

b) $3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{6}}{2 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{\frac{5}{6}}{\frac{15}{8}} + \frac{1}{12} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{15}{8} + \frac{1}{12} - 1 =$
 $= \frac{3}{2} + \frac{4}{9} + \frac{1}{12} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{4}{9} + \frac{1}{12} - 1 = \frac{54+16+3+36}{36} = \frac{37}{36}$

6. Indica, en cada caso, el valor numérico de la expresión $x - 2y + 3z$:

- a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ b) $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$ c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$

Respuesta:

a) $1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1 - 4 + 3 = 0$ b) $2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 - 0 - 3 = -1$

c) $0 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 - 2 + 0 = -2$

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

- a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ y $b = -2$
 c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$

Respuesta:

- a) $2^2 + 2 \cdot 2 - 7 = 4 + 4 - 7 = 1$
 b) $(3 - 2)^2 - (3^2 + (-2)^2) = 1^2 - (9 + 4) = 1 - 13 = -12$
 c) $1^2 + 3 \cdot 1 + 7 = 1 + 3 + 7 = 11$

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

8. En cada uno de los siguientes monomios señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

$-12x^3$ a^4b^3c $4xy^2$

Respuesta:

- $-12x^3$ Coeficiente: -12 ; parte literal x^3 ; grado: 3.
 a^4b^3c Coeficiente: 1; parte literal a^4b^3c ; grado: 8.
 $4xy^2$ Coeficiente: 4; parte literal xy^2 ; grado: 3.

9. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

$5x^4 + 7x^2 - x$ $6x^2 + 10 - 2x^3$ $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Respuesta:

- $5x^4 + 7x^2 - x$ Grado: 4. Monomios: $5x^4$, $7x^2$, $-x$.
 $6x^2 + 10 - 2x^3$ Grado: 3. Monomios: $-2x^3$, $6x^2$, 10 .
 $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$ Grado: 5. Monomios: $-x^5$, $7x^2y^2$, $2xy^3$.

10. Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Halla los siguientes valores numéricos de p : $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.

Respuesta:

$$p(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$$

$$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 0$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{8}$$

11. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

$$(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$$

$$(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$$

Respuesta:

$$(-1 - 4)x^3 + (1 + 2 - 2)x^2 + (1 + 5 + 3)x + (-5 + 4) = -5x^3 + 9x - 1$$

$$\cdot -6x^3 + (1 + 3 - 1)x^2 + (-2 + 1)x + (4 + 4 + 1) = -6x^3 + 3x^2 - x + 9$$

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 9$

b) $-5x$

c) $-x^3 + 7x$

Respuesta:

a) $-(2x^3 - 2x^2 - 3x + 9) = -2x^3 + 2x^2 + 3x - 9$

b) $-(-5x) = 5x$

c) $-(-x^3 + 7x) = x^3 - 7x$

13. Considera los polinomios $p \equiv x^2 - x + 1$, $q \equiv -x^3 + 2x - 3$, así como el polinomio suma $s \equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

$$s \equiv p + q = x^2 - x + 1 - x^3 + 2x - 3 = -x^3 + x^2 + x - 2$$

$$p(-2) = (-2)^2 - (-2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$q(-2) = -(-2)^3 + 2(-2) - 3 = 8 - 4 - 3 = 1$$

$$s(-2) = -(-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 2 = 8 + 4 - 2 - 2 = 8$$

$$s(-2) = p(-2) + q(-2) = 7 + 1 = 8.$$

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv 4x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 2$?

Respuesta:

$$p(2) = 4 \cdot (2)^3 - 2^2 + 1 = 4 \cdot 8 - 4 + 1 = 29$$

$$-p(2) = -29$$

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

$(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

$(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

$(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$

$(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

Respuesta:

$$(-2x) \cdot (3x^2 - 4) = 6x^3 + 8x \quad ; \quad (2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5) = -8x^4 + 10x^3 - 4x + 5$$

$$(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6) = 8x^4 - 2x^3 - 2x + 24x^3 - 6x^2 - 6 = 8x^4 + 22x^3 - 6x^2 - 2x - 6$$

$$(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9) = -8x^2 - 7x + 9$$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

$(5x^2 + 2) - (-2x)$

$(-2x^3 + 4x) - (2x - 1)$

$(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

Respuesta:

$$\cdot (5x^2 + 2) - (-2x) = 5x^2 + 2 + 2x = 5x^2 + 2x + 2$$

$$\cdot (-2x^3 + 4x) - (2x - 1) = -2x^3 + 4x + 2x + 1 = -2x^3 + 6x + 1$$

$$\cdot (7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1) = 7x^2 - 2x - 3x^3 - 4x^2 + x - 1 = -3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

$$3x^2 - x + 2$$

$$-6x^3 + 2x - 3$$

$$-x^2 + 9x$$

Respuesta:

$$\frac{1}{3}(3x^2 - x + 2) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6}(-6x^3 + 2x - 3) = x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$-(-x^2 + 9x - 2) = x^2 - 9x + 2$$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $x \cdot (-2x + 4)$

b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$

c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$

d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

Respuesta:

a) $x \cdot (-2x + 4) = -2x^2 + 4x$

b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2) = 6x^2 + 4x - 9x - 6 = 6x^2 - 5x - 6$

c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a) = 4a - 3a^2 - 8 + 6a = -3a^2 + 10a - 8$

d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2) = 6ab - 3a^3 - 2b^3 + a^2b^2$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios

a) $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2$

b) $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x)$

c) $(3a - 1) \cdot (2 - a) \cdot (5 - 4a)$

Respuesta:

a) $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2 = (-3x^3 + 4x^2 + 2) \cdot x^2 = -3x^5 + 4x^4 + 2x^2$

b) $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x) = (-10x^3 + 2x^2 - 6x + 5x^2 - x + 3) \cdot (-x) =$
 $= (-10x^3 + 7x^2 - 7x + 3) \cdot (-x) = 10x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 3x$

c) $(3a - 1)(2 - a)(5 - 4a) = (6a - 3a^2 - 2 + a)(5 - 4a) = (-3a^2 + 7a - 2)(5 - 4a) =$
 $= -15a^2 + 35a - 10 + 12a^3 - 28a^2 + 8a = 12a^3 - 43a^2 + 43a - 10$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-10x^3 - 15x^2 + 20$

b) $30x^4 + 24x^2$

Respuesta:

a) $-10x^3 - 15x^2 + 20x = 5x(-2x^2 - 3x + 4)$

b) $30x^4 + 24x^2 = 6x^2 \cdot (5x^2 + 4)$

3. DIVISION DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

-Primera etapa:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad 2x^2 - x + 3 \\
 3x^2
 \end{array}$$

Primera y segunda etapa:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\
 -8x^3 + 4x^2 - 12x \\
 \hline
 -4x^2 - 9x - 2
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad 2x^2 - x + 3 \\
 3x^2 + 4x
 \end{array}$$

-Las tres etapas:

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x \\
 -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\
 -8x^3 + 4x^2 - 12x \\
 \hline
 -4x^2 - 9 \\
 4x^2 - 2x + 6 \\
 \hline
 -11x + 4
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad 2x^2 - x - 3 \\
 3x^2 + 4x - 2
 \end{array}$$

22. Divide los siguientes polinomios

- a) $3x^3 + 4x^2 - 9x + 7$ entre $x^2 + 2x + 1$
 b) $-6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $3x^3 + x^2 - 2x + 1$
 c) $-6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7$ entre $-3x^2 - 2x + 1$
 d) $3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 13x + 7$ entre $x^3 - 2x^2 - x + 3$
 e) $x^5 - 4x - 6$ entre $x^2 + 3$

Respuesta:

$$\begin{array}{r}
 a) \quad 3x^3 + 4x^2 - 9x + 7 \\
 -3x^3 - 6x^2 + 3x \\
 \hline
 -2x^2 - 6x + 7 \\
 -2x^2 + 4x - 2 \\
 \hline
 -2x + 5
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad x^2 + 2x - 1 \\
 3x - 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad -6x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\
 6x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\
 \hline
 4x^2 - x + 6
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad 3x^3 + x^2 - 2x + 1 \\
 -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad -6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7 \\
 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 -9x^3 - 6x^2 - 13x + 7 \\
 9x^3 + 6x^2 - 3x \\
 \hline
 -16x + 7
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 | \quad -3x^2 - 2x + 1 \\
 2x^2 + 3x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad 3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 14x + 14 \\
 \underline{-3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \\
 -3x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 14x + 14 \\
 \underline{3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 9x} \\
 4x^3 - 8x^2 - 5x + 14 \\
 \underline{-4x^3 + 8x^2 + 4x - 12} \\
 -x + 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | \underline{x^3 - 2x^2 - x + 3} \\
 3x^2 - 3x + 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 e) \quad x^5 \qquad -4x - 6 \\
 \underline{-x^5 - 3x^3} \\
 -3x^3 \quad -4x - 6 \\
 \underline{3x^3 \quad + 9x} \\
 5x - 6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | \underline{x^2 + 3} \\
 x^3 - 3x
 \end{array}$$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = 2x^2 - 3$ como resto.

Solución abierta. Una solución sencilla es: Dividendo = $x^3 - x - 3$, divisor = x .

Respuesta:

$$\begin{array}{rcl}
 p(x) & | & q(x) \\
 r(x) & d(x) & \\
 \hline
 & & p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)
 \end{array}$$

Haciendo $d(x) = x$

$$p(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot x + (2x^2 - 3) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 - 3 = x^3 - x - 3$$

24. Realiza los cálculos:

$$a) (1+x)^2 \quad b) (-x+2)^2 \quad c) (x-2)^2 \quad d) (2a-3)^2 \quad e) (x^2+1)^3 \quad f) (2b-4)^3$$

Respuesta:

$$a) (1+x)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$b) (-x+2)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$c) (x-2)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$d) (2a-3)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = 4a^2 - 12a + 9$$

$$\begin{aligned}
 e) (x^2+1)^3 &= (x^2+1)^2 \cdot (x^2+1) = ((x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2) \cdot (x^2+1) = \\
 &(x^4 + 2x^2 + 1)(x^2+1) = x^6 + 2x^4 + x^2 + x^4 + 2x^2 + 1 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) (2b-4)^3 &= (2b-4)^2 \cdot (2b-4) = ((2b)^2 - 2 \cdot 2b \cdot 4 + 4^2)(2b-4) = \\
 &(4b^2 - 16b + 16) \cdot (2b-4) = 8b^3 - 32b^2 + 32b - 16b^2 + 64b - 64 = \\
 &= 8b^3 - 48b^2 + 96b - 64
 \end{aligned}$$

25. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios

$(a + b + c)^2$

$(a - b + c)^2$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
 (a + b + c)^2 &= (a + b + c) \cdot (a + b + c) = \\
 &= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a - b + c)^2 &= (a - b + c) \cdot (a - b + c) = \\
 &= a^2 - ba + ac - ba + b^2 - bc + ca - cb + c^2 = \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc
 \end{aligned}$$

26. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3x - y)^2$

b) $(2a + x/2)^2$

c) $(4y - 2/y)^2$

d) $(5a + a^2)^2$

e) $(-a^2 + 2b^2)^2$

f) $[(2/3)y - 1/y]^2$

Respuesta:

a) $(3x - y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

b) $(2a + \frac{x}{2})^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 = 4a^2 + 2ax + \frac{x^2}{4}$

c) $(4y - \frac{2}{y})^2 = (4y)^2 - 2 \cdot 4y \cdot \frac{2}{y} + (\frac{2}{y})^2 = 16y^2 - 16 + \frac{4}{y^2}$

d) $(5a + a^2)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot a^2 + (a^2)^2 = 25a^2 + 10a^3 + a^4$

e) $(-a^2 + 2b^2)^2 = (-a^2)^2 + 2 \cdot (-a^2) \cdot (2b^2) + (2b^2)^2 = a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$

f) $(\frac{2}{3}y - \frac{1}{y})^2 = (\frac{2}{3}y)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}y \cdot \frac{1}{y} + (\frac{1}{y})^2 = \frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{y^2}$

27. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 - 6a + 9$

b) $4x^2 + 4x + 1$

c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 - 12y + 9$

e) $a^4 + 2a^2 + 1$

f) $y^2 + 6xy^2 + 9x^2$

Respuesta:

a) $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$

b) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

c) $b^2 - 10b + 25 = (b - 5)^2$

d) $4y^2 - 12y + 9 = (2y - 3)^2$

e) $a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$

f) $y^2 + 6xy^2 + 9x^2 = (y^2 + 3x)^2$

28. Efectúa estos productos:

a) $(3x + 2) \cdot (3x - 2)$

b) $(2x + 4y) \cdot (2x + 4y)$

c) $(4x^2 + 3) \cdot (4x^2 - 3)$

d) $(3a - 5b) \cdot (3a - 5b)$

e) $(-x^2 + 5x) \cdot (x^2 + 5x)$

Respuesta:

a) $(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$

b) $(2x + 4y)(2x + 4y) = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4y + (4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

$$c) (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2)^2 - 3^2 = 16x^4 - 9$$

$$d) (3a - 5b)(3a + 5b) = (3a)^2 - (5b)^2 = 9a^2 - 25b^2$$

$$e) (-x^2 + 5x)(x^2 + 5x) = (5x - x^2)(5x + x^2) = (5x^2) - (x^2)^2 = 25x^2 + x^4$$

29. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

$$a) 9x^2 - 25 \quad b) 4a^4 - 81b^2 \quad c) 49 - 25x^2 \quad d) 100a^2 - 64$$

Respuesta:

$$a) 9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$$

$$b) 4a^4 - 81b^2 = (2a^2 - 9b)(2a^2 + 9b)$$

$$c) 49 - 25x^2 = (7 - 5x)(7 + 5x)$$

$$d) 100a^2 - 64 = (10a - 8)(10a + 8)$$

30. Realiza las siguientes divisiones de polinomios a partir de la conversión del dividendo en la potencia de un binomio o en un producto de la forma suma por diferencia:

$$a) x^2 + 12x + 36 \text{ entre } x + 6 \quad b) 4x^4 - 16x^2 \text{ entre } 2x^2 - 4x$$

$$c) 9x^2 - 24x + 16 \text{ entre } 3x - 4 \quad d) x^2 - 5 \text{ entre } x + \sqrt{5}$$

Respuesta:

$$a) \frac{x^2+12x+36}{x+6} = \frac{(x+6)^2}{x+6} = x + 6$$

$$b) \frac{4x^4-16x^2}{2x^2-4x} = \frac{(2x^2-4x)(2x^2+4x)}{(2x^2-4x)} = 2x^2 + 4x$$

$$c) \frac{9x^2-24x+16}{3x-4} = \frac{(3x-4)^2}{3x-4} = 3x - 4$$

$$d) \frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}} = \frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+\sqrt{5}} = x - \sqrt{5}$$

31. Efectúa los siguientes cálculos:

$$a) \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} \quad b) \frac{x-2}{x^2-1} - \frac{5}{x} \quad c) \frac{-x+1}{x+3} \cdot \frac{3^2}{x+1} \quad d) \frac{2+x}{x^2} : \frac{x}{x-3}$$

Respuesta:

$$a) \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} = \frac{1 \cdot (x-1) + 2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x-1+2x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$$

$$b) \frac{x-2}{x^2-1} - \frac{5}{x} = \frac{(x-2) \cdot x - 5(x^2-1)}{x(x^2-1)} = \frac{-4x^2-2x+5}{x(x^2-1)}$$

$$c) \frac{-x+1}{x+3} \cdot \frac{3x^2}{x+1} = \frac{-3x^3+3x^2}{x^2+x+3x+3} = \frac{-3x^3+3x^2}{x^2+4x+3}$$

$$d) \frac{2+x}{x^2} : \frac{x}{x-3} = \frac{(2+x)(x-3)}{x^2 \cdot x} = \frac{(2x-6+x^2-3x)}{x^3} = \frac{x^2-x-6}{x^3}$$

32. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

$$a) \frac{-2x^2-x+1}{x^3} + \frac{3x+1}{x^2} \quad b) \frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{3x}{x-2}$$

Respuesta:

$$a) \frac{-2x^2-x+1}{x^3} + \frac{3x+1}{x^2} = \frac{-2x^2-x+1}{x^3} + \frac{x(3x+1)}{x \cdot x^2} = \frac{-2x^2-x+1+3x^2+x}{x^3} = \frac{x^2+1}{x^3}$$

$$b) \frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{3x}{x-2} = \frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{3x \cdot x}{(x-2) \cdot x} = \frac{2x-1-3x^2}{x^2-2x} = \frac{-3x^2+2x-1}{x^2-2x}$$

33. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$

b) $(16x^2 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

Respuesta:

a) $\frac{2x^3-8x^2+6x}{2x} = \frac{2x(x^2-4x+3)}{2x} = x^2 - 4x + 3$

b) $\frac{5a^3+60a^2-20}{5} = \frac{5(a^3+12a^2-4)}{5} = a^3 + 12a^2 - 4$

c) $\frac{16x^3+40x^2}{8x^2} = \frac{8x^2(2x+5)}{8x^2} = 2x + 5$

d) $\frac{6x^2y^3-4xy^2}{xy^2} = \frac{2xy^2(3xy-2)}{xy^2} = 2(3xy-2) = 6xy - 4$

34. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$

b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy} = 2x^2 - \frac{1}{2}y$

c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8} = \frac{2x^2+x}{x-4}$

d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b} = \frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

Respuesta:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$

b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy} = \frac{2xy(4x^2-y)}{4xy} = \frac{4x^2y}{2} = \frac{4x^2}{2} - \frac{y}{2} = 2x^2 - \frac{y}{2}$

c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8} = \frac{2x(2x+1)}{2(x-4)} = \frac{2x^2+x}{x-4}$

d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b} = \frac{2ab(3ab-2ab^2+2)}{2ab(b-4a)} = \frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

35. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$

b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$

c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$

d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

Respuesta:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18} = \frac{3x(x+2)}{9(x^2+2)} = \frac{x(x+2)}{3(x^2+2)} = \frac{x^2+2x}{3x^2+6}$

b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2} = \frac{a^2(a-7)}{a^2(3a+5)} = \frac{a-7}{3a+5}$

c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy} = \frac{xy(xy-7y)}{2xy} = \frac{xy-7y}{2}$

$$d) \frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab} = \frac{ab(ab-1)}{ab(a^2+1)} = \frac{ab-1}{a^2+1}$$

36. En cada una de las siguientes fracciones algebraicas escribe, cuando sea posible, el polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia de un binomio o de suma por diferencia para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

$$a) \frac{x^2-4}{3x+6}$$

$$b) \frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$$

$$c) \frac{6-4a}{4a^2-9}$$

Respuesta:

$$a) \frac{x^2-4}{3x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x-2}{3}$$

$$b) \frac{2x^2-16x+32}{x^2-16} = \frac{2(x^2-8x+16)}{(x-4)(x+4)} = \frac{2(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{2(x-4)}{x+4}$$

$$c) \frac{6-4a}{4a^2-9} = \frac{2(3-2a)}{(2a-3)(2a+3)} = \frac{-2(2a-3)}{(2a-3)(2a+3)} = \frac{-2}{2a+3}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son: A) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona. B) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros. Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros:

Respuesta:

Llamaremos n al número de viajeros, p al precio por viajero y T a la cantidad total ingresada por la empresa.

Todos los valores de las variables son números enteros.

Si $n < 101$: $p = 150$; $T = 150n$

Si el precio no baja de 90€, el descuento se hace hasta los 160 viajeros.

Si $n = 100 + x$, ($0 < x < 61$): $p = 150 - x$; $T = (150 - x) \cdot (100 + x) = 15\,000 + 50x - x^2$

Si $n > 160$: $p = 90$; $T = 90n$.

2. En este ejercicio se va a presentar un truco mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

- i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
- ii. Que lo multiplique por 5
- iii. Que al resultado anterior le sume 5
- iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
- v. Que al resultado anterior le sume 10
- vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
- vii. Que divida entre 100 la última cantidad
- viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
- ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

Respuesta:

- I. Sea el número $2n$
- II. $5 \cdot 2n = 10n$
- III. $10n + 5$
- IV. $2 \cdot (10n + 5) = 20n + 10$
- V. $20n + 10 + 10 = 20n + 20$
- VI. $5 \cdot (20n + 20) = 100n + 100$
- VII. $(100n + 100)/100 = n + 1$
- VIII. $(n + 1) - 2n/2 = n + 1 - n = 1$
- IX. Siempre da 1.

3. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:

- i. La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10%.
- ii. Para 2016 ofrecen aumentar un 10% los salarios de 2015.
- iii. En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10% cada año impar y que aumente un 10% cada año par.

Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años

Respuesta:

Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:

0.9 s ; 0.99 s ; 0.891 s ; 0.980 1 s ; 0.882 09 s ; 0.970 299 s ; ...

Los salarios son cada vez menores que dos años antes.

4. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:

- a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.
- b) Para 2016, una reducción del 10% sobre los salarios de 2015.
- c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10% cada año impar y que disminuya un 10% cada año par.

Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.

Respuesta:

Si llamamos s al salario de 2014, los salarios de los años sucesivos son:

1.1 s ; 0.99 s ; 0.891 s ; 0.980 1 s ; 0.882 09 s ; 0.970 299 s ; ...

1.2 A partir del tercer año pierden dinero como en la propuesta anterior.

1.3

5. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{x-3}{x-1}$ b) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$ c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

Respuesta:

a) $x + 1 = 0$; $x = -1$

b) $(x - 5)(2x + 7) = 0$; $x - 5 = 0$, $x = 5$

$$2x + 7 = 0, x = -\frac{7}{2} = -3,5$$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ (doble)

d) $x^2 + 3y^2 = 0$; $x = 0$, $y = 0$

6. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x = 1$ b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x = -2$ c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x = 3$ e $y = -1$

d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$ e) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$ en $x = \frac{1}{2}$

Respuesta:

$$a) \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b) \frac{-2}{(-2)^2 - 2(-2) + 1} = \frac{-2}{4 + 4 + 1} = \frac{-2}{9}$$

$$c) \frac{3-1-2}{3^2 + 3(-1)^2} = \frac{0}{9+3} = \frac{0}{12} = 0$$

$$d) \frac{-2(-1) + 0^2 - 4}{(-1)^2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 2} = \frac{2-4}{2+0} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$e) \frac{2\frac{1}{2}-1}{(\frac{1}{2}-5)(2\frac{1}{2}+7)} = \frac{1-1}{\frac{-9}{2} \cdot 8} = \frac{0}{-36} = 0$$

7. Una persona tiene ahorrados 3000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2.5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

Respuesta:

Ahorro: 3000 € interés 2,5% anual

Recupera a los 2 años

$$C_F = C_I \cdot (1 + i)^n; \quad 2,5\% = 0,025$$

$$C_F = 3000(1 + 0,025)^2 = 3151,88$$

8. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2) = -6$.

$$p(-2) = -6$$

$$p(x) = x^2 + 5x; \quad p(-2) = (-2)^2 + 5(-2) = -6$$

9. Considera los polinomios:

$$p(x) = 2 - x^2, \quad q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5 \quad y \quad r(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Haz las siguientes operaciones:

$$a) \quad p + q + r \quad b) \quad p - q \quad c) \quad pr \quad d) \quad pr - q$$

$$a) \quad (p + q + r)(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5 + x^2 - 3x + 2 = \\ = -x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$$

$$b) \quad (p - q)(x) = (2x^3 - x^2 + 4x - 1) - (-x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5) = \\ = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4$$

$$c) \quad (p \cdot r)(x) = (2x^3 - x^2 + 4x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) = \\ = 2x^5 - 6x^4 + 4x^3 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x^3 - 12x^2 + 8x - x^2 + 3x - 2 = \\ = 2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 11x - 2$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad (pr - q)(x) &= (2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 11x - 2) - (-x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5) \\
 &= 2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 15x^2 + 11x - 2 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 5 = \\
 &= 2x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 17x^2 + 12x + 3
 \end{aligned}$$

10. Calcula los productos:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right) & \qquad b) \quad (0.1x + 0.2y - 0.3z) \cdot (0.3x - 0.2y + 0.1z) \\
 c) \quad (x-y) \cdot (y-1) \cdot (x+a) &
 \end{aligned}$$

$$a) \quad \left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \left(\frac{-by}{3}\right) = \frac{15ax-2y}{10} \cdot \frac{-by}{3} = \frac{-15abxy+2by^2}{30}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad (0.1x + 0.2y - 0.3z)(0.3x - 0.2y + 0.1z) &= \\
 = 0.03x^2 - 0.02xy + 0.01xz + 0.06xy - 0.04y^2 + 0.02yz - 0.09xz + 0.06yz - 0.03z^2 &= \\
 = 0.03x^2 - 0.04y^2 - 0.03z^2 + 0.04xy - 0.08xz + 0.08yz &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad (x-y)(y-1)(x+a) &= (xy - x - y^2 + y)(x+a) = \\
 &= x^2y + xya - x^2 - xa - xy^2 - ay^2 + xy + ay \cdot
 \end{aligned}$$

11. Efectúa las divisiones de polinomios:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & 2x^3 + x^2 - 12x + 7 \text{ entre } x + 3; \\
 b) \quad & -4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8 \text{ entre } 2x^2 - 3x + 1; \\
 c) \quad & -3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14 \text{ entre } -x^3 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 a) \quad \begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 12x + 7 \\ -2x^3 - 6x^2 \\ \hline -5x^2 - 12x + 7 \\ \quad 5x^2 + 15x \\ \hline \quad \quad 3x + 7 \\ \quad \quad -3x - 9 \\ \hline \quad \quad \quad -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} | x + 3 \\ 2x^2 - 5x + 3 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad \begin{array}{r} -4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8 \\ \quad 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 \\ \hline \quad \quad 2x^3 + 9x^2 - 21x + 8 \\ \quad \quad -2x^3 + 3x^2 - x \\ \hline \quad \quad \quad 12x^2 - 22x + 8 \\ \quad \quad \quad -12x^2 + 18x - 6 \\ \hline \quad \quad \quad \quad -4x + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} | 2x^2 - 3x + 1 \\ -2x^2 + x + 6 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad -3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14 \\
 \underline{3x^5 + 6x^3 - 9x^2} \\
 4x^3 + 6x - 14 \\
 \underline{-4x^3} \quad + 8x + 12 \\
 14x - 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) -x^3 - 2x + 3} \\
 3x^2 - 4
 \end{array}$$

12. Calcula los cocientes:

$$a) (4x^3):(x^2) \qquad b) (4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2) \qquad c) (x^4 - 4x^2y + 4y^2):(x^2 - 2y)$$

$$a) \frac{4x^3}{x^2} = 4x$$

$$b) \frac{4x^3y^3z^4}{3x^2yz^2} = \frac{4xy^2z^2}{3}$$

$$c) \frac{x^4 - 4x^2y + 4y^2}{x^2 - 2y} = \frac{(x^2 - 2y)^2}{(x^2 - 2y)} = (x^2 - 2y)$$

13. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

$$a) \frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x} \qquad b) \frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1} \qquad c) \frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x} \qquad d) \frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x} \qquad e) \frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$$

$$a) \frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x} = \frac{(x-1)+x \cdot (2x-1)}{x^2} = \frac{x-1+2x^2-x}{x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2}$$

$$b) \frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1} = \frac{(x+1)(2x+3)+5x}{x \cdot (x+1)} = \frac{2x^2+2x+3x+3+5x}{x^2+x} = \frac{2x^2+10x+3}{x^2+x}$$

$$c) \frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x} = \frac{x-1-(2-x)(x-3)}{x \cdot (x-3)} = \frac{x-1-(2x-6-x^2+3x)}{x \cdot (x-3)} = \frac{x-1-5x+6+x^2}{x \cdot (x-3)} = \frac{x^2-4x+5}{x \cdot (x-3)}$$

$$d) \frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x} = \frac{(x-1)(2-x)}{x^2(x-3)}$$

$$e) \frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x} = \frac{x(x-1)}{x^2(x-3)} = \frac{(x-1)}{x(x-3)}$$

14. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que al dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = -3x^2 + 1$

En una división, $p = q \cdot c + r$, lo más fácil es tomar $c(x) = 1$ de donde $p = q + r$

$$p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 + (-3x^2 + 1) = x^3 - 4x^2 + 2x - 2$$

15. Calcula las potencias:

$$a) (x + 2y - z)^2 \qquad b) (x - 3y)^3 \qquad c) (a + \frac{b}{3})^2 \qquad d) (x^2 - 2z^3)^2$$

$$a) (x + 2y - z)^2 = (x + 2y - z)(x + 2y - z) = x^2 + 2xy - xz + 2xy + 4y^2 - 2yz - xz - 2yz + z^2 = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$$

$$b) (x - 3y)^3 = (x - 3y)(x - 3y)^2 = (x - 3y)(x^2 - 6xy + 9y^2) = x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 3yx^2 + 18xy^2 - 27y^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$$

$$c) \left(a + \frac{b}{3}\right)^2 = a^2 + 2a\frac{b}{3} + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{9}$$

$$d) (x^2 - 2z^3)^2 = x^4 - 4x^2z^3 + z^6$$

16. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

$$\begin{array}{llll} a) x^2 - 6x + 9 & b) x^4 + 8x^2 + 16 & c) x^2 - \sqrt{12xy + 3y^2} & d) y^4 + 2y^3 + y^2 + 1 \\ e) x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1 & f) x^2 - 25 & g) x^2 + 5 & h) 5x^2 - 1 \\ i) x^2 - 8y^2 & j) x^4 - 1 & k) x^2 - y^2 & l) x^2 - 2y^2z^2 \end{array}$$

$$a) x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$b) x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2 + 4)^2$$

$$c) x^2 - \sqrt{12xy + 3y^2} = (x + \sqrt[4]{12xy + 3y^2})(x - \sqrt[4]{12xy + 3y^2})$$

$$d) y^4 + 2y^3 + y^2 + 1 = NO$$

$$e) x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = NO$$

$$f) x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$g) x^2 + 5 = NO$$

$$h) 5x^2 - 1 = (\sqrt{5}x + 1)(\sqrt{5}x - 1)$$

$$i) x^2 - 8y^2 = (x + \sqrt{8}y)(x - \sqrt{8}y)$$

$$j) x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$k) x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$l) x^2 - 2y^2z^2 = (x + \sqrt{2}yz)(x - \sqrt{2}yz)$$

17. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

$$a) \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \quad b) \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} \quad c) \frac{xy^3-yx}{y^4-1}$$

$$a) \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$b) \frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}$$

$$c) \frac{xy^3-yx}{y^4-1} = \frac{xy(y^2-1)}{(y^2+1)(y^2-1)} = \frac{xy}{(y^2+1)}$$

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{3}{x(3-x)} - \frac{1}{2(3-x)} \quad b) 3x^4 - 5x^3 + \frac{x^4-1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{x^2+1} \quad c) \frac{x-2y}{a-b} + \frac{4x+5y}{3a-3b}$$

$$a) \frac{3}{x(3-x)} - \frac{1}{2(3-x)} = \frac{3 \cdot 2 - x \cdot 1}{2x(3-x)} = \frac{6-x}{2x(3-x)}$$

$$b) 3x^4 - 5x^3 + \frac{x^4-1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{x^2+1} = 3x^4 - 5x^3 + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^3} \cdot \frac{x^3 \cdot x^2}{x^2+1} = 3x^4 - 5x^3 + (x^2-1)x^2 =$$

$$= 3x^4 - 5x^3 + x^4 - x^2 = 4x^4 - 5x^3 - x^2$$

$$c) \frac{x-2y}{a-b} + \frac{4x+5y}{3a-3b} = \frac{3(x-2y)+4x+5y}{3(a-b)} = \frac{7x-y}{3(a-b)} =$$

19. Simplifica todo lo posible:

$$a) \left(yx^4 - \frac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \quad b) \frac{b^3+3ab^2+3a^2b+a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a} \quad c) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{4}{a-b}$$

$$a) \left(yx^4 - \frac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \frac{yx^6-y}{x^2} : \frac{x^3+1}{x} = \frac{xy(x^6-1)}{x^2(x^3+1)} = \frac{y(x^3+1)(x^3-1)}{x(x^3+1)} = \frac{y(x^3-1)}{x}$$

$$b) \frac{b^3+3ab^2+3a^2b+a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a} = \frac{(a+b)^3(b-a)}{(b-a)(b+a)} = (a+b)^2$$

$$c) \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{4}{a-b} = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} : \frac{4}{a-b} = \frac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} : \frac{4}{a-b} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} : \frac{4}{a-b} =$$

$$= \frac{4ab(a-b)}{4(a-b)(a+b)} = \frac{ab}{a+b}$$

20. Simplifica todo lo posible:

$$a) \frac{\frac{1}{a+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x}} \quad b) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) \quad c) \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}$$

$$a) \frac{\frac{1}{a+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-a-y}{(a+y)x}}{\frac{x+a+y}{(a+y)x}} : \frac{\frac{x+y-a}{a(x+y)}}{\frac{x+y+a}{a(x+y)}} = \frac{x-a-y}{x+a+y} : \frac{x+y-a}{x+y+a} = \frac{(x-a-y)(x+y+a)}{(x+y-a)(x+y+a)} = \frac{x-a-y}{x+y-a}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^3} : \frac{x^2-2x-3}{x^3} = \frac{x^3(x^3+x^2+2x+3)}{x^3(x^2-2x-3)} = \frac{x^3+x^2+2x+3}{x^2-2x-3}$$

$$c) \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+2x}{xy}} : \frac{\frac{y-3x}{xy}}{\frac{y-2x}{xy}} = \frac{(2y-x)(y-3x)}{(3y+2x)(y-2x)}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

a) $3\sqrt{5}$

b) $-3, -1, 1, 7$

c) $1, 8, , 4, -2, 6, -3, 9$

2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.

a) x, y

b) x

c) $x, y, a.$

3. Del polinomio $5x^2 - 8x^2 - x + 9$ indica su grado y los monomios que lo integran.

Grado 4; **monomios:** $5x^2, -8x^2, -x, 9.$

4. La expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para:

a) $x = 7,$ b) $x = 2,$ c) $x = 7$ y $x = 2,$ d) $x = 0$

$4 - 2x = 0, \quad x = 2$

Respuesta: b)

5. Cualquier polinomio:

a) Puede ser evaluado en cualquier número.

b) No puede ser evaluado en el número cero.

c) No puede ser evaluado en ciertos números concretos.

Respuesta: a)

6. El valor numérico de la expresión $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1, y = 2, z = -1$ es:

a) -11

b) 7

c) 1

d) -5

$$\frac{1+7}{4-2 \cdot 2^2} + 6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - \frac{3}{-1} = 7$$

Respuesta: b)

7. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a. La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.

b. La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.

c. El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **cuatro**.

d. La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado **dos**.

8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.

c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado **menor o igual a dos**.

9. Al dividir el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$

- a) debe ser de grado 2.
- b) puede ser de grado 2.
- c) puede ser de grado 1.
- d) ninguna de las opciones precedentes.

Respuesta: a)

10. Para que una fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea equivalente a un polinomio:

- a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
- b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
- c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
- d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.

Respuesta: c)

3º ESO

Capítulo 5: Ecuaciones y sistemas Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$	$8x - 1$	$4x - 7$	x
$5x + 9 = 3x + 1$	$5x + 9$	$3x - 1$	x
$2a + 3 = 32$	$2a + 3$	32	a
$2x - 5y = 5 + 4y$	$2x - 5y$	$5 + 4y$	x, y

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5y = 7x + 6$

Respuesta: 2 incógnitas (x, y)

b) $2x + 8y^2 = 5$

Respuesta: 2 incógnitas (x, y)

c) $3a + 6a^2 = 3$

Respuesta: 1 incógnita (a)

d) $4x + 8x^2 = 12$

Respuesta: 1 incógnita (x)

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 4 = 6x + 8$

Respuesta: Grado 1

b) $3x + 9y^2 = 12$

Respuesta: Grado 2

c) $5x + 10x^2 = 30$

Respuesta: Grado 2

d) $2x + 2xy^2 = 3$

Respuesta: Grado 3

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

2.1. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3 = 4x - 5$

$$2x - 3 = 4x - 5 \rightarrow 2x - 4x = -5 + 3 \rightarrow -2x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{-2} \rightarrow x = 1$$

b) $3x + 6 = 9x - 12$

$$3x + 6 = 9x - 12 \rightarrow 3x - 9x = -12 - 6 \rightarrow -6x = -18 \rightarrow x = \frac{-18}{-6} \rightarrow x = 3$$

c) $4x + 8 = 12$

$$4x + 8 = 12 \rightarrow 4x = 12 - 8 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{4} \rightarrow x = 1$$

5. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$

Respuesta: Esta es una ecuación de segundo grado, ya que tiene el término x^2 , el cual es de grado 2.

b) $3xy^2 - 5 = 0$

Respuesta: NO es una ecuación de segundo grado en x , ya que aparece xy^2 , lo cual involucra una combinación de variables x y y , no solo x^2 o y^2 .

c) $8x^2 - 9 = 0$

Respuesta: Es una ecuación de segundo grado, ya que tiene un término cuadrático x^2 .

d) $8 - 7.3x = 0$

Respuesta: NO es una ecuación de segundo grado, ya que el exponente de x es 1.

e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

Respuesta: NO es una ecuación de segundo grado, ya que hay una x en el denominador.

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

Respuesta: Aunque tiene un término cuadrático ($2x^2$), el término $\sqrt{x}$ no está en forma de un término lineal (x) o cuadrático (x^2). En lugar de eso, $\sqrt{x}$ es $x^{1/2}$, es un exponente fraccionario. Por tanto, NO es una ecuación de segundo grado.

6. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$

Respuesta: $a = -4, b = 9, c = 3$

b) $-3x^2 + 5x = 0$

Respuesta: $a = -3, b = 5, c = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$

Respuesta: $a = 2, b = 0, c = 3$

d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

Respuesta: $a = 1, b = -8, c = 1$

2.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

Para una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Usamos la fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Donde: $a = 1, b = -7, c = 10$

Sustituimos en la fórmula:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Resolver para los dos valores de x :

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Respuesta: $x = 5$ y $x = 2$

b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

Simplificamos la ecuación:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

Resolver para los dos valores de x :

$$x_1 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Respuesta: $x = 3$ y $x = -4$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

Simplificamos la ecuación:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Resolver para los dos valores de x :

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Respuesta: $x = 2$ y $x = 1$

d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \rightarrow x = \frac{4 \pm 8}{2}$$

Resolver para los dos valores de x :

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6, \quad x_2 = \frac{4-8}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Respuesta: $x = 6$ y $x = -2$

2.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

8. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

Para determinar cuántas soluciones tiene cada ecuación de segundo grado, utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si $\Delta = 0 \rightarrow$ la ecuación tiene una única solución real (raíz doble).

Si $\Delta < 0 \rightarrow$ la ecuación tiene dos soluciones complejas (no reales).

a) $x^2 + x + 4 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(4) = 1 - 16 = -15$$

Respuesta: Como $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

Respuesta: Como $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real (raíz doble).

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-7) = 36 + 28 = 64$$

Respuesta: Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

Respuesta: Como $\Delta < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas.

2.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$

Factorizamos:

$$3x(x + 2) = 0$$

Respuesta: $x_1 = 0, x_2 = -2$

b) $3x^2 - 27 = 0$

Despejamos x^2 :

$$3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9$$

Respuesta: $x_1 = 3, x_2 = -3$

c) $x^2 - 25 = 0$

Despejamos x^2 :

$$x^2 = 25$$

Respuesta: $x_1 = 5, x_2 = -5$

d) $2x^2 + x = 0$

Factorizamos:

$$x(2x + 1) = 0$$

Respuesta: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

e) $4x^2 - 9 = 0$

Despejamos x^2 :

$$4x^2 = 9 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

Respuesta: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$

f) $5x^2 - 10x = 0$

Factorizamos:

$$5x(x - 2) = 0$$

Respuesta: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

2.5. Suma y producto de raíces

10. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de segundo grado:

El producto de las raíces es igual a **c** y la suma cambiada de signo es igual a **b**

a) $x^2 + 6x = 0$

El producto es 0 y la suma cambiada de signo es -6

Respuesta: $x_1 = 0$, $x_2 = -6$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

El producto es -8 y la suma cambiada de signo es -2

Respuesta: $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

c) $x^2 - 25 = 0$

El producto es -25 y la suma cambiada de signo es 0

Respuesta: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

El producto es 20 y la suma cambiada de signo es 9

Respuesta: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$

El producto es -4 y la suma cambiada de signo es 3

Respuesta: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$

f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

El producto es -21 y la suma cambiada de signo es 4

Respuesta: $x_1 = 7$, $x_2 = -3$

11. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

Si las raíces de una ecuación son 3 y 7, podemos escribirlo como:

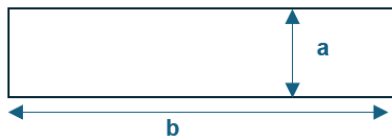
$$(x - 3)(x - 7) = 0$$

Que desarrollando sería:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Respuesta: La ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$ de segundo grado tiene como soluciones 3 y 7.

12. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.



• Perímetro: $P = 2a + 2b = 16 \text{ cm}$

• Área: $A = a \cdot b = 15 \text{ cm}^2$

Hallamos los valores de a y b a través del sistema obtenido por las ecuaciones anteriores.

$$\begin{cases} 2a+2b=16 \\ ab=15 \end{cases} \quad \text{Dividimos la primera ecuación entre 2: } a + b = 8$$

Ahora tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ ab=15 \end{cases} \quad \text{De donde obtenemos las soluciones: } x_1 = 3, \quad x_2 = 5$$

Respuesta: Los lados del rectángulo son $(a = 3, b = 5)$ o $(a = 5, b = 3)$.

13. Si 3 es una solución de la ecuación $x^2 - 5x + a = 0$ ¿cuánto vale a ?

Si $x = 3$ es solución de $x^2 - 5x + a = 0$, entonces:

$$3^2 - 5(3) + a = 0 \rightarrow 9 - 15 + a = 0 \rightarrow -6 + a = 0 \rightarrow a = 6$$

Respuesta: El valor de a es 6.

2.6. Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7)(x - 2)(x + 5)(x - 3)(x - 11) = 0$

Resolviendo la ecuación:

$$(x - 7)(x - 2)(x + 5)(x - 3)(x - 11) = 0$$

Para que el producto sea 0, al menos un factor debe ser 0:

- $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$
- $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
- $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$
- $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
- $x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

Respuesta: $x = \{-5, 2, 3, 7, 11\}$

b) $3(x - 5)(x - 7)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = 0$

Resolviendo la ecuación:

$$3(x - 5)(x - 7)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = 0$$

Dividimos entre 3, ya que no afecta a las soluciones:

$$(x - 5)(x - 7)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = 0$$

Para que el producto sea 0, al menos un factor debe ser 0:

- $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
- $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$
- $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
- $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
- $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Respuesta: $x = \{-2, 3, 4, 5, 7\}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Factorizamos:

$$(y - 1)(y - 2) = 0$$

Resolviendo para y :

- $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
- $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

Volviendo a x :

- $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Respuesta: $x = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 + 12y + 35 = 0$$

Factorizamos (o resolvemos con la fórmula):

$$(y + 5)(y + 7) = 0$$

Resolviendo para y :

- $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$
- $y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7$

Dado que x^2 no puede ser negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

Respuesta: **No hay soluciones reales.**

c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} \rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \rightarrow y = \frac{4 \pm 8}{2}$$

Resolviendo para los dos valores de y :

- $y_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$
- $y_2 = \frac{4-8}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Para $y = 6$: $x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

Para $y = -2$: No tiene soluciones reales.

Respuesta: $x = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Factorizamos (o resolvemos con la fórmula):

$$(y - 9)(y - 4) = 0$$

Resolviendo para y :

- $y - 9 = 0 \Rightarrow y = 9$
- $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

Volviendo a x :

- $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
- $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Respuesta: $x = \{-3, -2, 2, 3\}$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 29y + 100 = 0$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$y = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(1)(100)}}{2(1)} \rightarrow y = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} \rightarrow y = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} \rightarrow y = \frac{29 \pm 21}{2}$$

Resolviendo para los dos valores de y :

- $y_1 = \frac{29+21}{2} = \frac{50}{2} = 25$
- $y_2 = \frac{29-21}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Volviendo a x :

- $x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$
- $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Respuesta: $x = \{-5, -2, 2, 5\}$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

Factorizamos (o resolvemos con la fórmula):

$$(y - 9)(y - 1) = 0$$

Resolviendo para y :

- $y - 9 = 0 \Rightarrow y = 9$
- $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Volviendo a x :

- $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$
- $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Respuesta: $x = \{-3, -1, 1, 3\}$

d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$, entonces la ecuación se transforma en:

$$y^2 - 26y + 25 = 0$$

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$y = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)} \rightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} \rightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} \rightarrow y = \frac{26 \pm 24}{2}$$

Resolviendo para los dos valores de y :

$$\bullet y_1 = \frac{26+24}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\bullet y_2 = \frac{26-24}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Volviendo a x :

$$\bullet x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\bullet x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Respuesta: $x = \{-5, -1, 1, 5\}$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

17. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

Respuesta: Este sistema no es lineal debido a la presencia del término xy en la primera ecuación.

b) $\begin{cases} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$

Respuesta: Este sistema es lineal ya que ambas ecuaciones tienen términos de primer grado en x e y .

c) $\begin{cases} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{cases}$

Respuesta: Este sistema es lineal ya que ambas ecuaciones tienen términos de primer grado en x e y .

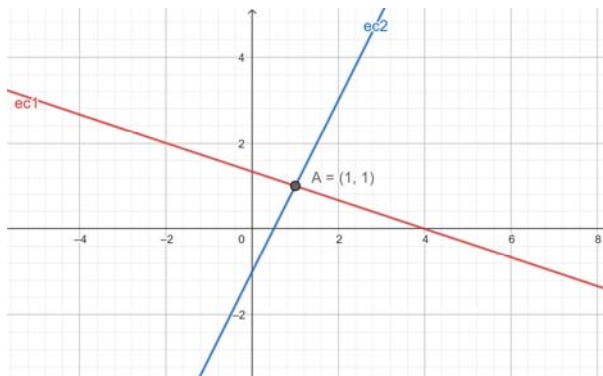
d) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

Respuesta: Este sistema no es lineal debido a la presencia del término x^2 en la primera ecuación e y^2 en la segunda ecuación.

3.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

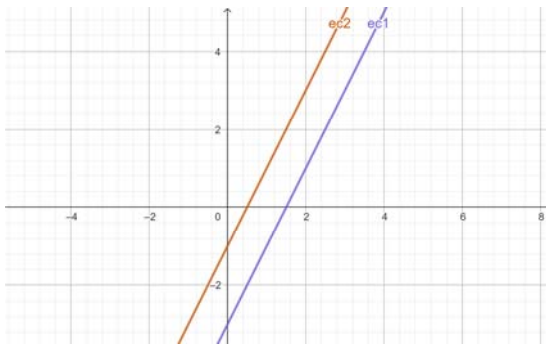
18. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$



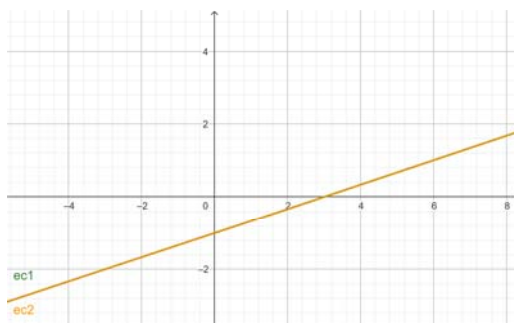
Respuesta: Compatible determinado porque las rectas se cortan en un único punto.

b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -y+2x=1 \end{cases}$



Respuesta: Incompatible porque las rectas son paralelas.

c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$



Respuesta: Compatible indeterminado porque las dos ecuaciones representan la misma recta.

3.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Despejamos x en la segunda ecuación:

$$x = 2y + 1$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3(2y + 1) + 4y = -7 \rightarrow 6y + 3 + 4y = -7 \rightarrow 10y + 3 = -7 \rightarrow 10y = -10 \rightarrow y = -1$$

Sustituyendo $y = -1$ en $x = 2y + 1$:

$$x = 2(-1) + 1 = -1$$

Respuesta: $(x, y) = (-1, -1)$

b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = 5 - 3x$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2x + 4(5 - 3x) = 0 \rightarrow 2x + 20 - 12x = 0 \rightarrow -10x + 20 = 0 \rightarrow -10x = -20 \rightarrow x = 2$$

Sustituyendo $x = 2$ en $y = 5 - 3x$:

$$y = 5 - 3(2) = -1$$

Respuesta: $(x, y) = (2, -1)$

c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación:

$$x = \frac{2y+2}{3}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2\left(\frac{2y+2}{3}\right) + 3y = 10 \rightarrow \frac{4y+4}{3} + 3y = 10$$

Multiplicamos todo por 3:

$$4y + 4 + 9y = 30 \rightarrow 13y + 4 = 30 \rightarrow 13y = 26 \rightarrow y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ en $x = \frac{2y+2}{3}$:

$$x = \frac{2(2)+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Respuesta: $(x, y) = (2, 2)$

3.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$

Despejamos y en ambas ecuaciones:

$$y = 2 - 3x, \quad y = \frac{-5+2x}{3}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$2 - 3x = \frac{-5+2x}{3}$$

Multiplicamos todo por 3 para eliminar el denominador:

$$3(2 - 3x) = -5 + 2x \rightarrow 6 - 9x = -5 + 2x \rightarrow 6 + 5 = 9x + 2x \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$$

Sustituyendo $x = 1$ en $y = 2 - 3x$:

$$y = 2 - 3(1) = -1$$

Respuesta: $(x, y) = (1, -1)$

b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{-5+3y}{2}, \quad x = \frac{14-2y}{4}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-5+3y}{2} = \frac{14-2y}{4}$$

Multiplicamos todo por 4 para eliminar denominadores:

$$4(-5 + 3y) = 2(14 - 2y) \rightarrow -20 + 12y = 28 - 4y \rightarrow 12y + 4y = 28 + 20 \rightarrow 16y = 48 \rightarrow y = 3$$

Sustituyendo $y = 3$ en $x = \frac{-5+3y}{2}$:

$$x = \frac{-5+3(3)}{2} = \frac{-5+9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Respuesta: $(x, y) = (2, 3)$

$$c) \begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{3+4y}{7}, \quad x = \frac{5-2y}{3}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{3+4y}{7} = \frac{5-2y}{3}$$

Multiplicamos todo por 21 para eliminar denominadores:

$$3(3+4y) = 7(5-2y) \rightarrow 9+12y = 35-14y \rightarrow 12y+14y = 35-9 \rightarrow 26y = 26 \rightarrow y = 1$$

Sustituyendo $y = 1$ en $x = \frac{3+4y}{7}$:

$$x = \frac{3+4(1)}{7} = \frac{3+4}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

Respuesta: $(x, y) = (1, 1)$

3.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

21. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$a) \begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 5 para igualar los coeficientes de y :

$$\begin{cases} 15x+5y=20 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$15x + 5y + 2x - 5y = 20 + 14 \rightarrow 17x = 34 \rightarrow x = 2$$

Sustituyendo $x = 2$ en $3x + y = 4$:

$$3(2) + y = 4 \rightarrow 6 + y = 4 \rightarrow y = -2$$

Respuesta: $(x, y) = (2, -2)$

$$b) \begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 3 para igualar los coeficientes de y :

$$\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 12x+3y=21 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones:

$$(12x + 3y) - (5x + 3y) = 21 - 2 \rightarrow 7x = 19 \rightarrow x = \frac{19}{7}$$

Sustituyendo $x = \frac{19}{7}$ en $4x + y = 7$:

$$4\left(\frac{19}{7}\right) + y = 7 \rightarrow \frac{76}{7} + y = 7 \rightarrow y = 7 - \frac{76}{7} \rightarrow y = \frac{49}{7} - \frac{76}{7} \rightarrow y = \frac{-27}{7}$$

Respuesta: $(x, y) = \left(\frac{19}{7}, \frac{-27}{7}\right)$

$$c) \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 para igualar los coeficientes de x :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 39 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$4x + 6y + 9x - 6y = 0 + 39 \rightarrow 13x = 39 \rightarrow x = 3$$

Sustituyendo $x = 3$ en $2x + 3y = 0$:

$$2(3) + 3y = 0 \rightarrow 6 + 3y = 0 \rightarrow 3y = -6 \rightarrow y = -2$$

Respuesta: $(x, y) = (3, -2)$

22. Diseña una hoja de cálculo que te permita resolver sistemas lineales.

Un Sistema Lineal de ecuaciones se puede definir como:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Luego, sabiendo los valores de a, b, c, d, e y f podemos calcular los valores de x e y .

En el documento Excel:

Definiremos las siguientes tablas, donde habrá que sustituir los valores de $a \dots f$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	*					
2	a	b	e					
3	c	d	f					
4								
5	Inversa							
6	#VALOR!							
7								
8								
9								
10	Resultado							
11	x	#VALOR!						
12	y							
13								
14								

Para las celdas de la matriz inversa:

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	*				
2	a	b	e				
3	c	d	f				
4							
5	Inversa						
6	=INVERSA(A2:B3)						
7							
8							
9							
10	Resultado						
11	x	#VALOR!					
12	y						
13							
14							

Para los resultados:

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	*				
2	a	b	e				
3	c	d	f				
4							
5	Inversa						
6	#VALOR!						
7							
8							
9							
10	Resultado						
11	x	=A6*(C2:C3)					
12	y						
13							
14							

Entonces, si tenemos el siguiente sistema (correspondiente al apartado c) del ejercicio anterior):

$$\begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 39 \end{cases}$$

Introduciendo en la tabla:

$$a = 4, b = 6, c = 9, d = -6, e = 0 \text{ y } f = 39$$

	A	B	C	D	E	F
1	x	y	*			
2	4	6	0			
3	9	-6	39			
4						
5	Inversa					
6	0.07692308	0.07692308				
7	0.11538462	-0.05128205				
8						
9						
10	Resultado					
11	x	3				
12	y	-2				
13						
14						

Tenemos que el resultado del sistema es: $x = 3, y = -2$, comprobamos que se corresponde con las soluciones anteriores.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado

23. En un pequeño hotel hay 47 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 57 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Supongamos que:

- x es el número de habitaciones simples.
- y es el número de habitaciones dobles.

Entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 47$$

$$x + 2y = 57$$

Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$(x + 2y) - (x + y) = 57 - 47$$

Simplificamos:

$$y = 10$$

Ahora sustituimos el valor de y en la primera ecuación:

$$x + 10 = 47$$

Despejamos x :

$$x = 47 - 10 = 37$$

Por lo tanto, hay 37 habitaciones simples y 10 habitaciones dobles.

24. En una granja hay 100 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 280 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Supongamos que:

- x es el número de gallinas.
- y es el número de conejos.

Entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 100$$

$$2x + 4y = 280$$

Simplificamos la segunda ecuación dividiéndola entre 2:

$$x + 2y = 140$$

Restamos la primera ecuación de la ecuación simplificada:

$$(x + 2y) - (x + y) = 140 - 100$$

Simplificamos:

$$y = 40$$

Ahora sustituimos el valor de y en la primera ecuación:

$$x + 40 = 100$$

Despejamos x :

$$x = 100 - 40 = 60$$

Por lo tanto, hay 60 gallinas y 40 conejos en la granja.

4.2. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

25. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Supongamos que el número es x .

Según el enunciado, el número x multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado. Entonces, podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$3x = x^2 - 40$$

Reordenamos los términos para igualarla a cero:

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Para resolver esta ecuación cuadrática utilizamos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -3 \\ c &= -40 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 13}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad , \quad x_2 = \frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Por lo tanto, los números que cumplen la condición son **8 y -5**.

26. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

Supongamos que los tres números consecutivos son $x - 1$, x y $x + 1$.

La suma de los cuadrados de estos tres números es:

$$(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 365$$

Desarrollamos los cuadrados:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad , \quad x^2 = x^2 \quad , \quad (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Entonces la ecuación se convierte en:

$$(x^2 - 2x + 1) + x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 365$$

Sumamos todos los términos:

$$3x^2 + 2 = 365$$

Restamos 2 de ambos lados de la ecuación:

$$3x^2 = 363$$

Dividimos ambos lados entre 3:

$$x^2 = 121$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados:

$$x = \pm 11$$

Por lo tanto, los tres números consecutivos pueden ser **10, 11 y 12** o **-12, -11 y -10**.

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Supongamos que el número es x .

Según el enunciado, el triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. Entonces, podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$3x^2 + 2x = 85$$

Reordenamos los términos para igualarla a cero:

$$3x^2 + 2x - 85 = 0$$

Para resolver esta ecuación cuadrática utilizamos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \\ c &= -85 \end{aligned}$$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-85)}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1020}}{6} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{1024}}{6} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 32}{6}$$

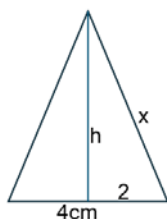
Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2+32}{6} = \frac{30}{6} = 5, \quad x_2 = \frac{-2-32}{6} = \frac{-34}{6} = -\frac{17}{3}$$

Por lo tanto, los números que cumplen la condición son **5 y $-\frac{17}{3}$** .

28. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

Supongamos que los dos lados iguales del triángulo isósceles miden x cm cada uno.



Sabemos que el perímetro del triángulo es 20 cm, y la base mide 4 cm.

Entonces, podemos escribir la ecuación: $x + x + 4 = 20$

Sumamos los términos semejantes: $2x + 4 = 20$

Restamos 4 de ambos lados de la ecuación: $2x = 16$

Dividimos ambos lados entre 2: $x = 8$

Por lo tanto, los dos lados iguales del triángulo miden **8 cm** cada uno.

Para calcular el área del triángulo, utilizamos la fórmula del área de un triángulo isósceles:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

Necesitamos calcular la altura del triángulo. Podemos dividir el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos, donde la altura h es uno de los catetos, la mitad de la base (2 cm) es el otro cateto, y uno de los lados iguales (8 cm) es la hipotenusa.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para encontrar la altura h :

$$h^2 + 2^2 = 8^2 \rightarrow h^2 + 4 = 64$$

Restamos 4 de ambos lados de la ecuación:

$$h^2 = 60$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados:

$$h = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

Ahora, podemos calcular el área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15}$$

$$\text{Área} = 4\sqrt{15} \text{ cm}^2$$

4.3. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

29. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

Supongamos que:

- x es la edad de Raquel.

- y es la edad de Luis.

Entonces, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ y + 4x = 104 \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda para despejar y :

$$y + 4x - (x + y) = 104 - 65$$

Operamos:

$$3x = 39$$

Despejamos x :

$$x = 13$$

Sustituimos el valor de x en la primera ecuación para encontrar y : $13 + y = 65$

Despejamos y : $y = 65 - 13 = 52$

Por lo tanto, Raquel tiene 13 años y Luis tiene 52 años.

30. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

Supongamos que:

- x es la edad de María.

- y es la edad de Alberto.

Entonces, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ y + 8 = 2(x + 8) \end{cases}$$

Quitamos paréntesis en la segunda ecuación:

$$y + 8 = 2x + 16$$

Restamos 8 de ambos miembros:

$$y = 2x + 8$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$x + (2x + 8) = 32$$

Simplificamos:

$$3x + 8 = 32$$

Restamos 8 de ambos miembros:

$$3x = 24$$

Dividimos ambos miembros entre 3:

$$x = 8$$

Sustituimos x en la ecuación $y = 2x + 8$: $y = 2(8) + 8 = 16 + 8 = 24$

Por lo tanto, María tiene 8 años y Alberto tiene 24 años.

31. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

Supongamos que:

- x e y son los dos números.

Entonces, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x - y = 24 \\ x + y = 123 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones para despejar x :

$$(x - y) + (x + y) = 24 + 123$$

Simplificamos:

$$2x = 147$$

Dividimos ambos lados entre 2:

$$x = 73.5$$

Sustituimos x en la segunda ecuación para encontrar y : $73.5 + y = 123$

Despejamos y : $y = 123 - 73.5 = 49.5$

Por lo tanto, los dos números son 73.5 y 49.5.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $-x - 6x - 8 = 0$

$$-x - 6x - 8 = 0 \rightarrow -7x - 8 = 0 \rightarrow -7x = 8 \rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

b) $-1 + x = 6$

$$1 + x = 6 \rightarrow x = 6 - 1 \rightarrow x = 5$$

c) $7x = 70x + 5$

$$7x = 70x + 5 \rightarrow 7x - 70x = 5 \rightarrow -63x = 5 \rightarrow x = -\frac{5}{63}$$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$

$$2(x + 3) - (2x + 1) = 5 \rightarrow 2x + 6 - 2x - 1 = 5 \rightarrow 6 - 1 = 5 \rightarrow 5 = 5$$

Todos los valores de x son soluciones.

e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$

$$5(2x - 1) + (x - 1) = 5 \rightarrow 10x - 5 + x - 1 = 5 \rightarrow 11x - 6 = 5 \rightarrow 11x = 11 \rightarrow x = 1$$

f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

$$12(x - 1) - 6(2 + x) = -18 \rightarrow 12x - 12 - 12 - 6x = -18 \rightarrow 6x - 24 = -18 \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$

$$(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3 \rightarrow 2x + x + 3 - 1 = -x - 3 \rightarrow 3x + 2 = -x - 3 \rightarrow 3x + x = -3 - 2 \rightarrow 4x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

h) $x + 2 = 2x + 168$

$$x + 2 = 2x + 168 \rightarrow 2 = 2x + 168 - x \rightarrow x = -166$$

i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

$$6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1 \rightarrow 6(-x + 1) - 2x - 1 = -1 \rightarrow -6x + 6 - 2x - 1 = -1 \rightarrow -8x + 5 = -1 \rightarrow -8x = -6 \rightarrow x = \frac{3}{4}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

Multiplicamos ambos miembros por 6:

$$3(x - 1) - 2(x + 1) = 60 \rightarrow 3x - 3 - 2x - 2 = 60 \rightarrow x - 5 = 60 \rightarrow x = 65$$

b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$

Multiplicamos ambos miembros por 21:

$$7(x-3) + 3(-x+1) = 63 \rightarrow 7x - 21 - 3x + 3 = 63 \rightarrow 4x - 18 = 63 \rightarrow 4x = 81 \rightarrow x = \frac{81}{4}$$

c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

Multiplicamos ambos miembros por 10:

$$2(x+1) + (2x+6) = 20 \rightarrow 2x + 2 + 2x + 6 = 20 \rightarrow 4x + 8 = 20 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

Multiplicamos ambos miembros por 6:

$$3(1-x) + 2(3x-1) = 78 \rightarrow 3 - 3x + 6x - 2 = 78 \rightarrow 3x + 1 = 78 \rightarrow 3x = 77 \rightarrow x = \frac{77}{3}$$

e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$

Multiplicamos ambos miembros por 10:

$$2(2x-8) - (3x-9) = 10(x-1) \rightarrow 4x - 16 - 3x + 9 = 10x - 10 \rightarrow x - 7 = 10x - 10 \rightarrow -7 + 10 = 10x - x \rightarrow 3 = 9x \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

$$\frac{5x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1 \rightarrow x - \frac{3x-6}{10} = 1$$

Multiplicamos ambos miembros por 10:

$$10x - 3x + 6 = 10 \rightarrow 7x + 6 = 10 \rightarrow 7x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{7}$$

Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

$$-x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \rightarrow x = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

Soluciones: $x_1 = -2, x_2 = -4$

b) $x(-1+x) = 6$

$$x(-1+x) = 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -2$

c) $7x^2 = 70x$

$$7x^2 = 70x \rightarrow 7x^2 - 70x = 0 \rightarrow x(7x - 70) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad 7x = 70, x = 10$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 10$

d) $2(x+3) - x(2x+1) = 5$

$$2(x+3) - x(2x+1) = 5 \rightarrow 2x + 6 - 2x^2 - x = 5 \rightarrow -2x^2 + x + 6 = 5 \rightarrow -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{-4} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-4}$$

Soluciones: $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$

e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$

$$5(2x - 1) + x(x - 1) = 5 \rightarrow 10x - 5 + x^2 - x = 5 \rightarrow x^2 + 9x - 5 = 5 \rightarrow x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{2} \rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} \rightarrow x = \frac{-9 \pm 11}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -10$

f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

$$12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18 \rightarrow 12x^2 - 12 - 12 - 6x = -18 \rightarrow 12x^2 - 6x - 24 = -18 \rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

g) $(2x + 3)(x - 1) = -x - 3$

$$(2x + 3)(x - 1) = -x - 3 \rightarrow 2x^2 - 2x + 3x - 3 = -x - 3 \rightarrow 2x^2 + x - 3 = -x - 3$$

$$2x^2 + 2x = 0 \rightarrow 2x(x + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

Soluciones: $x = 0, x = -1$

h) $x(x + 2) = 168$

$$x(x + 2) = 168 \rightarrow x^2 + 2x - 168 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-168)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+672}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{676}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 26}{2} \rightarrow \frac{-2+26}{2} = 12, \quad \frac{-2-26}{2} = -14$$

Soluciones: $x_1 = 12, x_2 = -14$

i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

$$6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1 \rightarrow 12x^2 - 18x + 6 - 2x^2 + x = -1 \rightarrow 10x^2 - 17x + 7 = -1 \rightarrow 10x^2 - 17x + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 10 \cdot 8}}{2 \cdot 10} \rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289-320}}{20} \rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{-31}}{20}$$

No tiene soluciones reales.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

$$\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10 \rightarrow 3(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 60 \quad (\text{multiplicamos ambos miembros por 6})$$

$$3x^2 - 3 - 2x - 2 = 60 \rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 60 \rightarrow 3x^2 - 2x - 65 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-65)}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+780}}{6} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{784}}{6} \rightarrow x = \frac{2 \pm 28}{6}$$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -\frac{13}{3}$

b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$

$$\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3 \rightarrow 7(x^2-3) + 3(x^2-x+1) =$$

63 (multiplicamos ambos miembros por 21)

$$7x^2 - 21 + 3x^2 - 3x + 3 = 63 \rightarrow 10x^2 - 3x - 18 = 63 \rightarrow 10x^2 - 3x - 81 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-81)}}{2 \cdot 10} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+3240}}{20} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3249}}{20} \rightarrow x = \frac{3 \pm 57}{20}$$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -\frac{27}{10}$

c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

$$\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2 \rightarrow 2(x^2+1) + (2x+6) = 20 \quad (\text{multiplicamos ambos miembros por 10})$$

$$2x^2 + 2 + 2x + 6 = 20 \rightarrow 2x^2 + 2x + 8 = 20 \rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{4} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{4} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{4}$$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -3$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow 3(1-x^2) + 2(3x-1) = 2 \quad (\text{multiplicamos ambos miembros por 6})$$

$$3 - 3x^2 + 6x - 2 = 2 \rightarrow -3x^2 + 6x + 1 = 2 \rightarrow -3x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-12}}{-6} \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{-6} \rightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{-6}$$

Soluciones: $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$

e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$

$$\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1 \rightarrow 2(2x^2-8) - (3x-9) = 10(x-1) \quad (\text{multiplicamos ambos miembros por 10})$$

$$4x^2 - 16 - 3x + 9 = 10x - 10 \rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 10x - 10 \rightarrow 4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{121}}{8} \rightarrow x = \frac{13 \pm 11}{8}$$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{4}$

f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

$$\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1 \rightarrow 2(2x+3x^2) - (3x-6) = 10 \quad (\text{multiplicamos ambos miembros por 10})$$

$$4x + 6x^2 - 3x + 6 = 10 \rightarrow 6x^2 + x + 6 = 10 \rightarrow 6x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4)}}{2 \cdot 6} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+96}}{12} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{12}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{97}}{12}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{97}}{12}$

5. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

El producto de las raíces es igual a **c** y la suma cambiada de signo es igual a **b**

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

El producto es 10 y la suma cambiada de signo es 7

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = 2$

b) $x(-1 + x) = 0$

$$x(-1 + x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad -1 + x = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 1$

c) $2x^2 = 50$

$$2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25}$$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -5$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

El producto es -10 y la suma cambiada de signo es 3

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -2$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

El producto es -10 y la suma cambiada de signo es -3

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -5$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

El producto es 10 y la suma cambiada de signo es -7

Soluciones: $x_1 = -2, x_2 = -5$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

El producto es 6 y la suma cambiada de signo es 5

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = 2$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

El producto es -6 y la suma cambiada de signo es 1

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -2$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

El producto es -6 y la suma cambiada de signo es -1

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -3$

6. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$$

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = 5$

Factorización: $(x - 2)(x - 5) = 0$

b) $x(-1 + x) = 0$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = 1$

Factorización: $x(x - 1) = 0$

c) $2x^2 = 50$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -5$

Factorización: $2(x - 5)(x + 5) = 0$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

Soluciones: $x_1 = 5, x_2 = -2$

Factorización: $(x - 5)(x + 2) = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -5$

Factorización: $(x - 2)(x + 5) = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

Soluciones: $x_1 = -2, x_2 = -5$

Factorización: $(x + 2)(x + 5) = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = 2$

Factorización: $(x - 3)(x - 2) = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -2$

Factorización: $(x - 3)(x + 2) = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -3$

Factorización: $(x - 2)(x + 3) = 0$

7. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$ luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$

$$b = -8 \rightarrow B = -4 \rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{1} \rightarrow x = 4 \pm \sqrt{28} \rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{7}$$

Soluciones: $x_1 = 4 + 2\sqrt{7}, x_2 = 4 - 2\sqrt{7}$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$

$$b = -10 \rightarrow B = -5 \rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{1} \rightarrow x = 5 \pm 1$$

Soluciones: $x_1 = 6, x_2 = 4$

c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

$$b = 4 \rightarrow B = 2 \rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 7}}{1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-3}}{1}$$

No tiene soluciones reales

8. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)(x - 6) = 0$

Soluciones: $x = 2, x = 6$

Desarrollamos la expresión:

$$(x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 6, x_2 = 2$

b) $(x + 1)(x - 3) = 0$

Soluciones: $x = -1, x = 3$

Desarrollamos la expresión:

$$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 3, x_2 = -1$

c) $(x - 9)(x - 3) = 0$

Soluciones: $x = 9, x = 3$

Desarrollamos la expresión:

$$(x - 9)(x - 3) = x^2 - 12x + 27$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} \rightarrow x = \frac{12 \pm 6}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 9, x_2 = 3$

d) $(x - 1)(x + 4) = 0$

Soluciones: $x = 1, x = -4$

Desarrollamos la expresión:

$$(x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -4$

e) $(x + 7)(x - 2) = 0$

Soluciones: $x = -7, x = 2$

Desarrollamos la expresión:

$$(x + 7)(x - 2) = x^2 + 5x - 14$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+56}}{2} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2} \rightarrow x = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 2, x_2 = -7$

f) $(x - 4)(x + 6) = 0$

Soluciones: $x = 4, x = -6$

Desarrollamos la expresión:

$$(x - 4)(x + 6) = x^2 + 2x - 24$$

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 4, x_2 = -6$

9. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -4, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \rightarrow \Delta = 9 + 16 \rightarrow \Delta = 25$$

Número de soluciones reales: 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -4$

b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$

$$a = 7, \quad b = 12, \quad c = -4, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-4) \rightarrow \Delta = 144 + 112 \rightarrow \Delta = 256$$

Número de soluciones reales: 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 7} \rightarrow x = \frac{-12 \pm 16}{14}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{-28}{14} = -2$

c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

$$a = 3, \quad b = 7, \quad c = 10 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 \rightarrow \Delta = 49 - 120 \rightarrow \Delta = -71$$

Número de soluciones reales: 0 (soluciones no reales)

d) $x^2 - x + 5 = 0$

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 5 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \rightarrow \Delta = 1 - 20 \rightarrow \Delta = -19$$

Número de soluciones reales: 0 (soluciones no reales)

e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$

$$a = 6, \quad b = -2, \quad c = -3 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) \rightarrow \Delta = 4 + 72 \rightarrow \Delta = 76$$

Número de soluciones reales: 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{2 \cdot 6} \rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{12} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{6}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{19}}{6}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{19}}{6}$

f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

$$a = 5, \quad b = 8, \quad c = -6 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) \rightarrow \Delta = 64 + 120 \rightarrow \Delta = 184$$

Número de soluciones reales: 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{184}}{2 \cdot 5} \rightarrow x = \frac{-8 \pm 2\sqrt{46}}{10} \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{46}}{5}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{46}}{5}, x_2 = \frac{-4 - \sqrt{46}}{5}$

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. Ayuda: Utiliza el discriminante.

1. $x^2 + 2x + 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \rightarrow \Delta = 4 - 20 \rightarrow \Delta = -16$$

Número de soluciones reales: 0

2. $3x^2 + 4x + 7 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow \Delta = 16 - 84 \rightarrow \Delta = -68$$

Número de soluciones reales: 0

3. $2x^2 - 3x + 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 \rightarrow \Delta = 9 - 80 \rightarrow \Delta = -71$$

Número de soluciones reales: 0

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

1. $(x - 2)^2 = 0$

Desarrollada: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \rightarrow \Delta = 16 - 16 \rightarrow \Delta = 0$$

Número de soluciones reales: 1 (Solución doble)

Solución: $x = 2$

2. $(x + 3)^2 = 0$

Desarrollada: $x^2 + 6x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \rightarrow \Delta = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$

Número de soluciones reales: 1 (Respuesta doble)

Solución: $x = -3$

3. $(2x - 5)^2 = 0$

Desarrollada: $4x^2 - 20x + 25 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 \rightarrow \Delta = 400 - 400 \rightarrow \Delta = 0$

Número de soluciones reales: 1 (Respuesta doble)

Solución: $x = \frac{5}{2}$

12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \rightarrow \Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$

Número de soluciones reales: 2

Soluciones: $x = 2, x = 3$

2. $3x^2 - 7x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \rightarrow \Delta = 49 - 24 \rightarrow \Delta = 25$

Número de soluciones reales: 2

Soluciones: $x = 2, x = \frac{1}{3}$

3. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \rightarrow \Delta = 9 + 16 \rightarrow \Delta = 25$

Número de soluciones reales: 2

Soluciones: $x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}, x = \frac{-3-5}{4} = -2$

13. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Una ecuación de segundo grado con una única solución real (no doble) no es posible.

Por definición, si una ecuación de segundo grado tiene una sola solución real, esta será necesariamente una solución doble.

Una solución doble ocurre cuando el discriminante (Δ) es igual a cero ($\Delta = 0$). En estos casos, la ecuación tiene una única raíz, que se repite dos veces. Para las ecuaciones cuadráticas, siempre habrá dos raíces (reales o complejas), y cuando solo hay una solución real, esa solución es doble.

Sistemas lineales de ecuaciones

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$3x - y = 7 \rightarrow y = 3x - 7$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$2x - 5(3x - 7) = -4 \rightarrow 2x - 15x + 35 = -4 \rightarrow -13x + 35 = -4 \rightarrow$$

$$\rightarrow -13x = -4 - 35 \rightarrow -13x = -39 \rightarrow x = 3$$

Sustituimos $x = 3$ en $y = 3x - 7$:

$$y = 3(3) - 7 \rightarrow y = 9 - 7 \rightarrow y = 2$$

Soluciones: $x = 3, y = 2$

b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$3x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 3x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$2x + 5(4 - 3x) = 7 \rightarrow 2x + 20 - 15x = 7 \rightarrow -13x + 20 = 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow -13x = 7 - 20 \rightarrow -13x = -13 \rightarrow x = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en $y = 4 - 3x$:

$$y = 4 - 3(1) \rightarrow y = 4 - 3 \rightarrow y = 1$$

Soluciones: $x = 1, y = 1$

c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$2x + 3y = 1 \rightarrow 3y = 1 - 2x \rightarrow y = \frac{1-2x}{3}$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$6x + 5\left(\frac{1-2x}{3}\right) = 7 \rightarrow 6x + \frac{5-10x}{3} = 7$$

Multiplicamos todo por 3 para eliminar el denominador:

$$18x + 5 - 10x = 21 \rightarrow 8x + 5 = 21 \rightarrow 8x = 21 - 5 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$$

Sustituimos $x = 2$ en $y = \frac{1-2x}{3}$:

$$y = \frac{1-2(2)}{3} \rightarrow y = \frac{1-4}{3} \rightarrow y = \frac{-3}{3} \rightarrow y = -1$$

Soluciones: $x = 2, y = -1$

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{3y-13}{2} \quad y \quad x = \frac{7y-27}{3}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{3y-13}{2} = \frac{7y-27}{3}$$

Multiplicamos ambos lados por 6 para eliminar los denominadores:

$$3(3y - 13) = 2(7y - 27) \rightarrow 9y - 39 = 14y - 54 \rightarrow -39 + 54 = 14y - 9y \rightarrow$$

$$\rightarrow 15 = 5y \rightarrow y = 3$$

Sustituimos $y = 3$ en $x = \frac{3y-13}{2}$:

$$x = \frac{3(3)-13}{2} \rightarrow x = \frac{9-13}{2} \rightarrow x = \frac{-4}{2} \rightarrow x = -2$$

Soluciones: $x = -2, y = 3$

b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$

Despejamos y en ambas ecuaciones:

$$y = 4x, \quad y = \frac{5x+3}{2}$$

Iguamos ambas expresiones:

$$4x = \frac{5x+3}{2} \rightarrow 8x = 5x + 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en $y = 4x$:

$$y = 4(1) \rightarrow y = 4$$

Soluciones: $x = 1, y = 4$

c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

Despejamos y en ambas ecuaciones:

$$y = \frac{9x-4}{5} \quad y = \frac{8x-5}{3}$$

Iguamos ambas expresiones:

$$\frac{9x-4}{5} = \frac{8x-5}{3}$$

Multiplicamos ambos lados por 15 para eliminar los denominadores:

$$3(9x-4) = 5(8x-5) \rightarrow 27x-12 = 40x-25 \rightarrow -12+25 = 40x-27x \rightarrow 13 = 13x \rightarrow x = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en $y = \frac{9x-4}{5}$:

$$y = \frac{9(1)-4}{5} \rightarrow y = \frac{9-4}{5} \rightarrow y = \frac{5}{5} \rightarrow y = 1$$

Soluciones: $x = 1, y = 1$

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Multiplicamos la segunda ecuación por 5 para igualar los coeficientes de y :

$$5(2x+y) = 5 \cdot 5 \rightarrow 10x + 5y = 25$$

Ahora sumamos las dos ecuaciones:

$$3x - 5y + 10x + 5y = 1 + 25 \rightarrow 13x = 26 \rightarrow x = 2$$

Sustituimos $x = 2$ en la segunda ecuación:

$$2(2) + y = 5 \rightarrow 4 + y = 5 \rightarrow y = 1$$

Soluciones: $x = 2, y = 1$

b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 para igualar los coeficientes de y :

$$2(4x + 3y) = 2 \cdot 14 \rightarrow 8x + 6y = 28$$

Ahora sumamos las dos ecuaciones:

$$8x + 6y - x - 6y = 28 + 7 \rightarrow 7x = 35 \rightarrow x = 5$$

Sustituimos $x = 5$ en la primera ecuación:

$$4(5) + 3y = 14 \rightarrow 20 + 3y = 14 \rightarrow 3y = -6 \rightarrow y = -2$$

Soluciones: $x = 5, y = -2$

c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

Sumamos las dos ecuaciones para eliminar y :

$$9x - 5y - 7x + 5y = 4 - 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

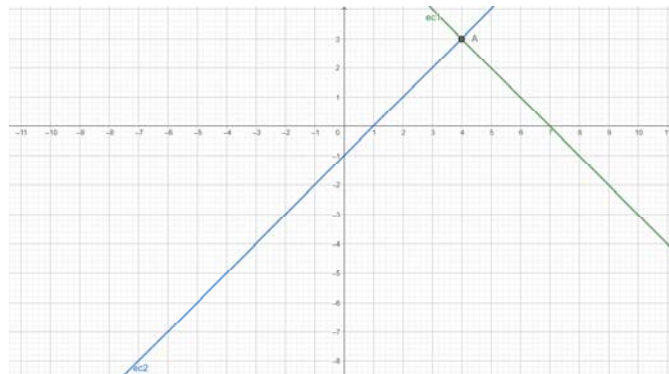
Sustituimos $x = 1$ en la primera ecuación:

$$9(1) - 5y = 4 \rightarrow 9 - 5y = 4 \rightarrow -5y = -5 \rightarrow y = 1$$

Soluciones: $x = 1, y = 1$

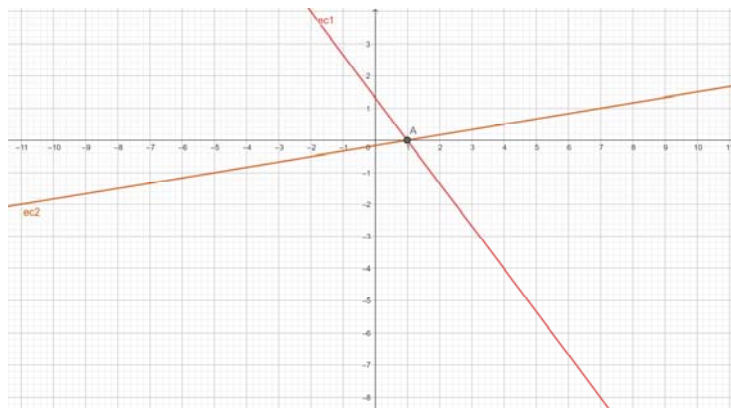
17. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$



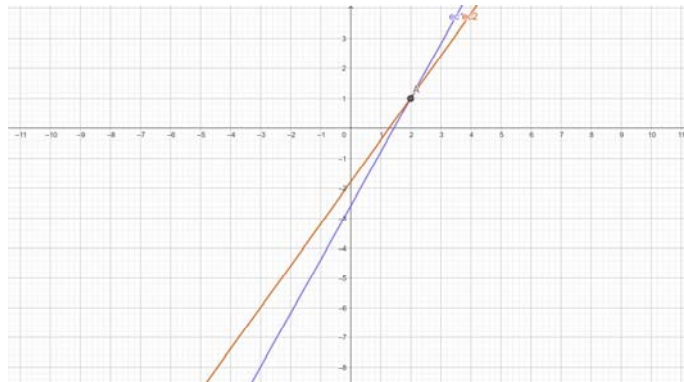
Solución: $x = 4, y = 3$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$



Solución: $x = 1, y = 0$

c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$



Solución: $x = 2, y = 1$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases}$

Primero, despejamos una variable en una de las ecuaciones. Vamos a despejar y en la segunda ecuación.

$$\frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7$$

Multiplicamos toda la ecuación por 6 para eliminar los denominadores:

$$3(x+3) + 2(4y-1) = 42 \rightarrow 3x + 9 + 8y - 2 = 42 \rightarrow 3x + 8y + 7 = 42 \rightarrow \\ \rightarrow 3x + 8y = 35 \rightarrow 8y = 35 - 3x \rightarrow y = \frac{35-3x}{8}$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$\frac{4x-1}{3} - \frac{2\left(\frac{35-3x}{8}\right)+2}{5} = -1 \rightarrow \text{Simplificamos: } \frac{4x-1}{3} - \frac{2(35-3x)+16}{40} = -1 \rightarrow \\ \rightarrow \frac{4x-1}{3} - \frac{70-6x+16}{40} = -1 \rightarrow \frac{4x-1}{3} - \frac{86-6x}{40} = -1 \rightarrow$$

Multiplicamos toda la ecuación por 120 para eliminar los denominadores:

$$\rightarrow 40(4x-1) - 3(86-6x) = -120 \rightarrow 160x - 40 - 258 + 18x = -120 \rightarrow \\ \rightarrow 178x - 298 = -120 \rightarrow 178x = 178 \rightarrow x = 1$$

Sustituimos $x = 1$ en $y = \frac{35-3x}{8}$:

$$y = \frac{35-3(1)}{8} \rightarrow y = \frac{35-3}{8} \rightarrow y = \frac{32}{8} \rightarrow y = 4$$

Soluciones: $x = 1, y = 4$

b) $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = -1 - 3x$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{-1-3x+3}{5} = -3$$

Operamos:

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{2-3x}{5} = -3$$

Multiplicamos toda la ecuación por 10 para eliminar los denominadores:

$$5(3x-1) - 2(2-3x) = -30 \rightarrow 15x - 5 - 4 + 6x = -30 \rightarrow \\ \rightarrow 21x - 9 = -30 \rightarrow 21x = -21 \rightarrow x = -1$$

Sustituimos $x = -1$ en $y = -1 - 3x$:

$$y = -1 - 3(-1) \rightarrow y = -1 + 3 \rightarrow y = 2$$

Soluciones: $x = -1, y = 2$

c)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$3x - 2y = 1 \rightarrow 2y = 3x - 1 \rightarrow y = \frac{3x-1}{2}$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{\frac{3x-1}{2}+2}{3} = 2$$

Simplificamos:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1+4}{6} = 2 \rightarrow \frac{x+1}{2} + \frac{3x+3}{6} = 2 \rightarrow \frac{x+1}{2} + \frac{3(x+1)}{6} = 2$$

Multiplicamos toda la ecuación por 6 para eliminar los denominadores:

$$3(x+1) + 2(x+1) = 12 \rightarrow 3x+3+2x+2=12 \rightarrow 5x+5=12 \rightarrow 5x=7 \rightarrow x=\frac{7}{5}$$

Sustituimos $x = \frac{7}{5}$ en $y = \frac{3x-1}{2}$:

$$y = \frac{3(\frac{7}{5})-1}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{21}{5}-1}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{21-5}{5}}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{16}{5}}{2} \rightarrow y = \frac{16}{10} \rightarrow y = \frac{8}{5}$$

Soluciones: $x = \frac{7}{5}, y = \frac{8}{5}$

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

a) $\begin{cases} ()x+3y=() \\ 2x-y=3 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**

$$\begin{cases} ax+3y=b \\ 2x-y=3 \end{cases} \quad \text{Compatible indeterminado}$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado, debe tener infinitas soluciones. Esto ocurre cuando una de las ecuaciones es múltiplo de la otra. Vamos a encontrar (a) y (b) tal que el sistema sea compatible indeterminado:

$$\frac{a}{2} = \frac{3}{-1} = \frac{b}{3} \rightarrow -a = 6, a = -6 \rightarrow 9 = -b, b = -9 \text{ (multiplicando en cruz)}$$

Entonces, el sistema queda:

$$\begin{cases} -6x+3y=-9 \\ 2x-y=3 \end{cases} \quad \text{que es compatible indeterminado}$$

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ ()x+y=6 \end{cases}$ **Incompatible**

$$\frac{-5}{c} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{6} \rightarrow -5 = c \rightarrow 6 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1 \quad (\text{multiplicando en cruz})$$

$$\begin{cases} -5x+y=2 \\ -5x+y=6 \end{cases} \quad \text{Incompatible}$$

No hay ningún valor para (x) e (y) que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente, por lo que el sistema es incompatible.

c) $\begin{cases} 3x-y=() \\ ()x+y=7 \end{cases}$ **Su solución sea $x = 2, y = 1$**

$$\begin{cases} 3x-y=d \\ ax+y=7 \end{cases} \quad \text{Su solución sea } x = 2, y = 1$$

Para que el sistema tenga una solución única $(x = 2, y = 1)$, deben existir valores de (x) e (y) que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente.

Sabemos que:

$$3x - y = d \quad y \quad ax + y = 7$$

Sustituyendo $(x = 2)$ e $(y = 1)$ en ambas ecuaciones:

$$3(2) - 1 = 5 \quad \text{entonces } d = 5$$

$$2(2) + 1 = 7 \quad \text{entonces } a = 1$$

Entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+()y=() \end{cases}$ **Incompatible**

$$\frac{2}{4} = \frac{-5}{a} \neq \frac{-1}{b} \rightarrow 2a = -5 \cdot 4 \rightarrow 2a = -20 \rightarrow a = -10$$

$$2b \neq -1 \cdot 4 \rightarrow b \neq -2$$

$$\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x-10y=(b) \end{cases} \quad \text{Incompatible}$$

$$\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x-10y=(b) \end{cases} \quad \text{para cualquier valor de } b \neq -2$$

e) $\begin{cases} 3x+()y=-1 \\ ()x+3y=5 \end{cases}$ **Su solución sea $x = -1, y = 1$**

$$\begin{cases} 3x+(a)y=-1 \\ (b)x+3y=4 \end{cases} \quad \text{Su solución sea } x = -1, y = 1$$

Sabemos que:

$$3(-1) + a(1) = -1$$

$$a = -1 + 3 = 2$$

La primera ecuación sería:

$$3x + 2y = -1$$

Sabemos que:

$$(b)(-1) + 3(1) = 4$$

Esto nos da:

$$-b + 3 = 4$$

$$b = -(4 - 3) = -1$$

La segunda ecuación sería:

$$-x + 3y = 4$$

Así que la solución es: $a = 2, b = -1$

Para hacer que el sistema cumpla que $x = -1, y = 1$

$$\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -x+3y=4 \end{cases}$$

f) $\begin{cases} ()x+6y=() \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**

Para que el sistema sea compatible indeterminado, debe haber infinitas soluciones. Esto ocurre cuando una de las ecuaciones es múltiplo de la otra.

Sabemos que:

$$\begin{cases} ax+6y=b \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{6}{3} = \frac{b}{-2} \rightarrow 3a = 6 \cdot 2 \rightarrow 3a = 12 \rightarrow a = 4 ; -2 \cdot 6 = 3b \rightarrow b = -4$$

Donde: $a = 4, b = -4$

Así que el sistema $\begin{cases} 4x+6y=-4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ es compatible indeterminado:

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

Los sistemas lineales que son incompatibles son aquellos que no tienen ninguna solución, ya que las rectas correspondientes son paralelas y no se intersecan.

$$\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x-10y=5 \end{cases} ; \begin{cases} 3x-4y=1 \\ 6x-8y=3 \end{cases} ; \begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$$

21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

Los sistemas lineales que son compatibles indeterminados son aquellos que tienen infinitas soluciones, ya que las ecuaciones son proporcionales entre sí.

$$\begin{cases} 2x+4y=8 \\ x+2y=4 \end{cases} ; \begin{cases} 3x-6y=9 \\ x-2y=3 \end{cases} ; \begin{cases} 4x+8y=12 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$$

22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

Los sistemas lineales que son compatibles determinados son aquellos que tienen una única solución.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=4 \end{cases} ; \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases} ; \begin{cases} 3x+4y=7 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$

1. Despejamos x de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2x + 6y &= 13 \Rightarrow x = \frac{6}{2}y - \frac{13}{2} \\ x - 3y &= 8 \Rightarrow x = 8 + 3y \end{aligned}$$

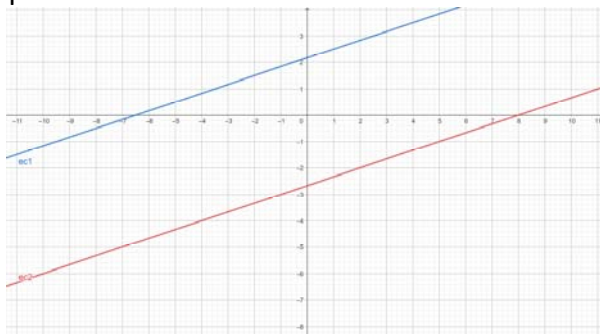
2. Igualamos las expresiones obtenidas:

$$3y - \frac{13}{2} = 8 + 3y$$

3. Resolviendo la ecuación para y :

$$3y - 3y = 8 + \frac{13}{2} \rightarrow 0 = 8 + \frac{13}{2} \rightarrow 0 = \frac{16}{2} + \frac{13}{2} \rightarrow 0 = \frac{29}{2}$$

No hay solución posible, ya que la ecuación resultante es inconsistente.



Comprobación gráfica: Las rectas son paralelas y no se intersecan.

Tipo de sistema: Incompatible

b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$

1. Despejamos x de ambas ecuaciones:

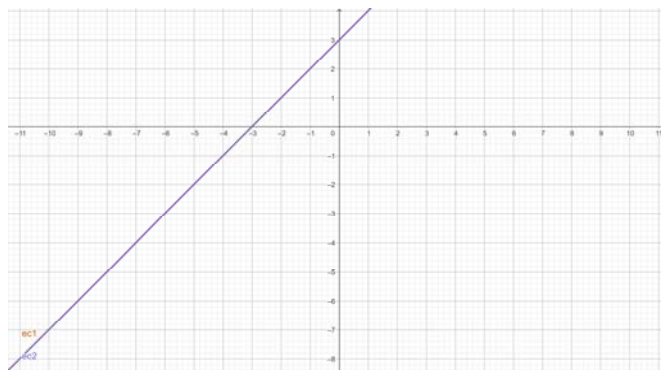
$$x - y = -3 \Rightarrow x = y - 3$$

$$4x - 4y = -12 \Rightarrow x = \frac{4y-12}{4} = y - 3$$

2. Igualamos las expresiones obtenidas:

$$y - 3 = y - 3(\text{identidad})$$

El sistema tiene infinitas soluciones.



Comprobación gráfica: Las rectas son coincidentes.

Tipo de sistema: Compatible indeterminado

c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

1. Despejamos x de ambas ecuaciones:

$$x - y = 4 \Rightarrow x = y + 4$$

$$-x + 3y = -5 \Rightarrow x = 3y + 5$$

2. Igualamos las expresiones obtenidas:

$$y + 4 = 3y + 5$$

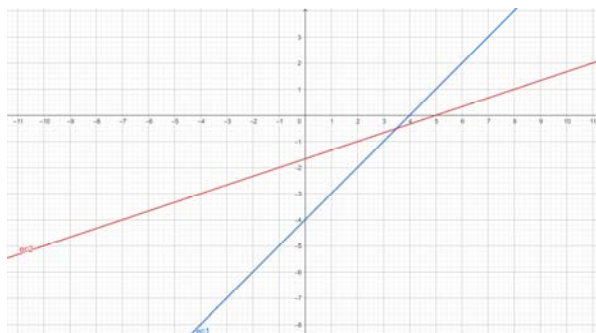
3. Resolviendo la ecuación para y :

$$y - 3y = 5 - 4 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

4. Sustituyendo y en una de las ecuaciones para obtener x :

$$x = y + 4 \rightarrow x = -\frac{1}{2} + 4 \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

Respuesta: $x = \frac{7}{2}, y = -\frac{1}{2}$



Comprobación gráfica: Las rectas se intersectan en un único punto.

Tipo de sistema: Compatible determinado

24. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para comprobar las soluciones de todos los ejercicios.

[SEGUIR PASOS DEL EJERCICIO 22 DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES]

Problemas

25. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

Definimos las variables:

- B : número de bicicletas
- T : número de triciclos

Las bicicletas tienen 2 ruedas cada una y los triciclos tienen 3 ruedas cada uno.

Tenemos las siguientes ecuaciones:

1. El número total de vehículos es 51: $B + T = 51$
2. El número total de ruedas es 133: $2B + 3T = 133$

Resolución del sistema de ecuaciones:

1. Despejamos una de las variables en la primera ecuación:

$$B + T = 51 \Rightarrow B = 51 - T$$

2. Sustituimos B en la segunda ecuación:

$$2(51 - T) + 3T = 133 \rightarrow 102 - 2T + 3T = 133$$

$$102 + T = 133 \rightarrow T = 133 - 102 \rightarrow T = 31$$

3. Sustituimos T en la primera ecuación para encontrar B :

$$B = 51 - 31 \rightarrow B = 20$$

Entonces, la tienda tiene 20 bicicletas y 31 triciclos.

26. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

Para resolver el problema, definimos la edad de la persona como x .

La declaración "al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado" se traduce en la siguiente ecuación:

$$15x + 100 = x^2$$

Reordenamos la ecuación para obtener una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 15x - 100 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -15$ y $c = -100$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} \rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{625}}{2} \rightarrow x = \frac{15 \pm 25}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{15+25}{2} = \frac{40}{2} = 20, \quad x_2 = \frac{15-25}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Dado que la edad no puede ser negativa, descartamos x_2 .

Por lo tanto, la edad de la persona es $x = 20$ años.

27. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

Queremos descomponer 8 en dos factores cuya suma sea 6.

Sea x uno de los factores, entonces el otro factor será $(6 - x)$.

La ecuación será:

$$x(6 - x) = 8$$

Desarrollamos la ecuación:

$$6x - x^2 = 8$$

Reordenamos la ecuación para obtener una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -6$ y $c = 8$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Entonces, los dos factores son 4 y 2.

Verificación: $4 \cdot 2 = 8$ y $4 + 2 = 6$

28. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

Para resolver este problema, definimos el número como x .

El enunciado "el triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85" se traduce en la siguiente ecuación:

$$3x^2 + 2x = 85$$

Reordenamos la ecuación para obtener una ecuación cuadrática:

$$3x^2 + 2x - 85 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = -85$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-85)}}{6} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1020}}{6} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{1024}}{6} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 32}{6}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2+32}{6} = \frac{30}{6} = 5, \quad x_2 = \frac{-2-32}{6} = \frac{-34}{6} = -\frac{17}{3}$$

Por lo tanto, los números que satisfacen la ecuación son $x = 5$ y $x = -\frac{17}{3}$.

29. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

Para resolver este problema, definimos los dos números impares consecutivos como x y $x + 2$.

El enunciado "La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394" se traduce en la siguiente ecuación:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 394$$

Desarrollamos la ecuación:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 394$$

Simplificamos la ecuación:

$$2x^2 + 4x + 4 = 394$$

Restamos 394 de ambos lados para obtener una ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 4x + 4 - 394 = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 390 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre 2:

$$x^2 + 2x - 195 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -195$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-195)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 780}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{784}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 28}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2+28}{2} = \frac{26}{2} = 13, \quad x_2 = \frac{-2-28}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

Por lo tanto, los números impares consecutivos son 13 y 15 , o -15 y -13 .

Verificación:

$$13^2 + 15^2 = 169 + 225 = 394$$

$$(-15)^2 + (-13)^2 = 225 + 169 = 394$$

30. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

Definimos las variables:

A : número de sacos que lleva el asno

M : número de sacos que lleva el mulo

Según el comentario del mulo, tenemos dos condiciones:

1. Si el mulo llevara uno de los sacos del asno, llevaría el doble de carga que el asno:

$$M + 1 = 2(A - 1)$$

2. Si el asno llevara uno de los sacos del mulo, los dos llevarían igual carga:

$$A + 1 = M - 1$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\text{Primera ecuación: } M + 1 = 2(A - 1) \rightarrow M + 1 = 2A - 2 \rightarrow M = 2A - 3$$

$$\text{Segunda ecuación: } A + 1 = M - 1 \rightarrow A + 1 = (2A - 3) - 1 \rightarrow A + 1 = 2A - 4$$

$$A - 2A = -4 - 1 \rightarrow -A = -5 \rightarrow A = 5$$

Sustituimos el valor de A en la primera ecuación para encontrar M :

$$M = 2(5) - 3 \rightarrow M = 10 - 3 \rightarrow M = 7$$

Por lo tanto, el asno lleva 5 sacos y el mulo lleva 7 sacos.

31. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Para resolver este problema, definimos el número como x .

El enunciado "¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?" se traduce en la siguiente ecuación:

$$3x = x^2 - 40$$

Reordenamos la ecuación para obtener una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -3$ y $c = -40$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} \rightarrow x = \frac{3 \pm 13}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8, \quad x_2 = \frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Por lo tanto, los números que satisfacen la ecuación son 8 y -5.

32. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365.

Para resolver este problema, definimos los tres números consecutivos como x , $x + 1$ y $x + 2$.

El enunciado "cuya suma de cuadrados es 365" se traduce en la siguiente ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 365$$

Desarrollamos la ecuación:

$$x^2 + (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) = 365$$

Simplificamos la ecuación:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 365 \rightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 365$$

Restamos 365 de ambos lados para obtener una ecuación cuadrática:

$$3x^2 + 6x + 5 - 365 = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x - 360 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre 3:

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -120$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 22}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2+22}{2} = \frac{20}{2} = 10 \quad , \quad x_2 = \frac{-2-22}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

Por lo tanto, los números consecutivos pueden ser 10, 11 y 12 o -12, -11 y -10.

Verificación:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

$$(-12)^2 + (-11)^2 + (-10)^2 = 144 + 121 + 100 = 365$$

33. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

Definimos la edad actual de Mario como x .

Dentro de 11 años, la edad de Mario será $x + 11$.

Hace 13 años, la edad de Mario era $x - 13$.

El enunciado "dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años" se traduce en la siguiente ecuación:

$$x + 11 = \frac{1}{2}(x - 13)^2$$

Multiplicamos ambos lados por 2 para eliminar la fracción:

$$2(x + 11) = (x - 13)^2$$

Desarrollamos la ecuación:

$$2x + 22 = x^2 - 26x + 169$$

Reordenamos la ecuación para obtener una ecuación cuadrática:

$$x^2 - 28x + 147 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -28$ y $c = 147$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 1 \cdot 147}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 588}}{2} \rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{196}}{2} \rightarrow x = \frac{28 \pm 14}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{28+14}{2} = \frac{42}{2} = 21 \quad , \quad x_2 = \frac{28-14}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Si $x = 7$ la edad "hace 13 años" es negativa, descartamos $x = 7$.

Por lo tanto, la edad actual de Mario es 21 años.

34. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

Para resolver este problema, definimos los dos números naturales como x y $x + 2$.

El enunciado "la suma de sus cuadrados es 580" se traduce en la siguiente ecuación:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 580$$

Desarrollamos la ecuación:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$$

Simplificamos la ecuación:

$$2x^2 + 4x + 4 = 580$$

Restamos 580 de ambos lados para obtener una ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 4x + 4 - 580 = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 576 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre 2:

$$x^2 + 2x - 288 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -288$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-288)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1152}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{1156}}{2} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 34}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-2 + 34}{2} = \frac{32}{2} = 16, \quad x_2 = \frac{-2 - 34}{2} = \frac{-36}{2} = -18$$

Dado que los números deben ser naturales, descartamos $x = -18$.

Por lo tanto, los números naturales que satisfacen la ecuación son **16 y 18**.

35. La suma de dos números es 5 y su producto es -84. ¿De qué números se trata?

Para resolver este problema, definimos los dos números como x e y .

El enunciado "la suma de dos números es 5 y su producto es -84" se traduce en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = -84 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = 5 - x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$x(5 - x) = -84 \rightarrow 5x - x^2 = -84 \rightarrow -x^2 + 5x + 84 = 0 \rightarrow x^2 - 5x - 84 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -5$ y $c = -84$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{2} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{2} \rightarrow x = \frac{5 \pm 19}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$x_1 = \frac{5 + 19}{2} = \frac{24}{2} = 12, \quad x_2 = \frac{5 - 19}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Por lo tanto, los números que satisfacen las ecuaciones son **12 y -7**.

36. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones les cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

Definimos las variables:

- x : cantidad de polvorones (en kg)
- y : cantidad de mazapanes (en kg)

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. La cantidad total de los productos debe ser 1 kg: $x + y = 1$
2. El precio total de los productos debe ser 6 euros: $5x + 7y = 6$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = 1 - x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$5x + 7(1 - x) = 6 \rightarrow 5x + 7 - 7x = 6 \rightarrow -2x + 7 = 6 \rightarrow -2x = 6 - 7 \rightarrow -2x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Sustituimos x en la primera ecuación para encontrar y :

$$\frac{1}{2} + y = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, para cada bandeja de 1 kg, se necesita $\frac{1}{2}$ kg de polvorones y $\frac{1}{2}$ kg de mazapanes.

Si María quiere formar 25 bandejas, entonces la cantidad de polvorones y mazapanes necesaria será:

$$25 \cdot \frac{1}{2} \text{ kg} = 12.5 \text{ kg}$$

Por lo tanto, María necesitará 12.5 kg de polvorones y 12.5 kg de mazapanes para formar 25 bandejas.

37. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

Definimos los catetos del triángulo rectángulo como a y b .

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. La suma de los catetos es 7 cm: $a + b = 7$

2. La hipotenusa mide 5 cm: $c = 5$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = 5^2 \rightarrow a^2 + b^2 = 25$$

Despejamos b en la primera ecuación:

$$b = 7 - a$$

Sustituimos b en la segunda ecuación:

$$a^2 + (7 - a)^2 = 25 \rightarrow a^2 + 49 - 14a + a^2 = 25 \rightarrow 2a^2 - 14a + 49 = 25$$

Restamos 25 de ambos lados para obtener una ecuación cuadrática:

$$2a^2 - 14a + 24 = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre 2:

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -7$ y $c = 12$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} \rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \rightarrow a = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow a = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$a_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad a_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Por lo tanto, los catetos del triángulo rectángulo miden 4 cm y 3 cm.

38. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

Para resolver este problema, definimos los dos números como x y y .

El enunciado "el producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 17" se traduce en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = \frac{4}{x}$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 17 \rightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} = 17$$

Multiplicamos toda la ecuación por x^2 para deshacernos del denominador:

$$x^4 + 16 = 17x^2 \rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Sea $z = x^2$, entonces la ecuación se convierte en una ecuación cuadrática en z :

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = -17$ y $c = 16$.

Sustituimos los valores en la fórmula:

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} \rightarrow z = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \rightarrow z = \frac{17 \pm 15}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$$z_1 = \frac{17+15}{2} = \frac{32}{2} = 16, \quad z_2 = \frac{17-15}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Regresamos a x :

Si $z = x^2$, entonces:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Por lo tanto, los pares de números que satisfacen las ecuaciones son $(4, 1)$ y $(-4, -1)$.

39. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

Para resolver este problema, definimos los dos números como x e y .

El enunciado "la suma de dos números es 20" se traduce en la siguiente ecuación:

$$x + y = 20$$

El enunciado "el doble del primero más el triple del segundo es 45" se traduce en la siguiente ecuación:

$$2x + 3y = 45$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 3y = 45 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = 20 - x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$2x + 3(20 - x) = 45 \rightarrow 2x + 60 - 3x = 45 \rightarrow -x + 60 = 45 \rightarrow \\ \rightarrow -x = 45 - 60 \rightarrow -x = -15 \rightarrow x = 15$$

Sustituimos x en la primera ecuación para calcular y :

$$15 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 15 \rightarrow y = 5$$

Por lo tanto, los números son 15 y 5.

40. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

Definimos las variables:

C : número de coches

M : número de motos

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. El número total de vehículos es 30: $C + M = 30$

2. El número total de ruedas es 100: $4C + 2M = 100$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C + M = 30 \\ 4C + 2M = 100 \end{cases}$$

Despejamos M en la primera ecuación:

$$M = 30 - C$$

Sustituimos M en la segunda ecuación:

$$4C + 2(30 - C) = 100 \rightarrow 4C + 60 - 2C = 100 \rightarrow 2C + 60 = 100 \rightarrow \\ \rightarrow 2C = 100 - 60 \rightarrow 2C = 40 \rightarrow C = 20$$

Sustituimos C en la primera ecuación para encontrar M :

$$20 + M = 30 \rightarrow M = 30 - 20 \rightarrow M = 10$$

Por lo tanto, en el garaje hay 20 coches y 10 motos.

41. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

Definimos las edades actuales de Pedro y Raquel como P y R , respectivamente.

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel: $P = 2R$

2. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65: $(P + 10) + (R + 10) = 65$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P = 2R \\ (P + 10) + (R + 10) = 65 \end{cases}$$

Simplificamos la segunda ecuación: $P + R + 20 = 65$

Sustituimos P :

$$2R + R + 20 = 65 \rightarrow 3R + 20 = 65 \rightarrow 3R = 65 - 20 \rightarrow 3R = 45 \rightarrow R = \frac{45}{3} \rightarrow R = 15$$

Sustituimos R en la primera ecuación para encontrar P :

$$P = 2 \cdot 15 \rightarrow P = 30$$

Por lo tanto, actualmente Pedro tiene 30 años y Raquel tiene 15 años.

42. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

Definimos las variables:

M : número de chicas

H : número de chicos

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. El número total de personas es 35: $M + H = 35$

2. El número total de regalos es 55: $2M + H = 55$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} M + H = 35 \\ 2M + H = 55 \end{cases}$$

Despejamos H en la primera ecuación:

$$H = 35 - M$$

Sustituimos H en la segunda ecuación:

$$2M + (35 - M) = 55 \rightarrow 2M + 35 - M = 55 \rightarrow M + 35 = 55 \rightarrow M = 55 - 35 \rightarrow M = 20$$

Sustituimos M en la primera ecuación para encontrar H :

$$20 + H = 35 \rightarrow H = 35 - 20 \rightarrow H = 15$$

Por lo tanto, en la clase hay 20 chicas y 15 chicos.

43. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

Definimos las edades actuales de mi abuelo y mi hermano como A y H , respectivamente.

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

1. La suma de sus edades es 56 años: $A + H = 56$

2. Mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano: $A = H + 50$

Resolución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + H = 56 \\ A = H + 50 \end{cases}$$

Sustituimos la segunda ecuación en la primera:

$$(H + 50) + H = 56 \rightarrow H + 50 + H = 56 \rightarrow 2H + 50 = 56 \rightarrow 2H = 56 - 50 \rightarrow 2H = 6 \rightarrow H = 3$$

Sustituimos H en la segunda ecuación para encontrar A :

$$A = 3 + 50 \rightarrow A = 53$$

Por lo tanto, mi abuelo tiene 53 años y mi hermano tiene 3 años.

44. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

Definimos las variables:

B : precio de un bocadillo

R : precio de un refresco

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} 2B + R = 5 \\ 3B + 2R = 8 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Despejamos R en la primera ecuación:

$$R = 5 - 2B$$

Sustituimos R en la segunda ecuación:

$$3B + 2(5 - 2B) = 8 \rightarrow 3B + 10 - 4B = 8 \rightarrow 3B - 4B + 10 = 8 \rightarrow -B + 10 = 8 \rightarrow -B = 8 - 10 \rightarrow -B = -2 \rightarrow B = 2$$

Sustituimos B en la primera ecuación para calcular R :

$$2(2) + R = 5 \rightarrow 4 + R = 5 \rightarrow R = 5 - 4 \rightarrow R = 1$$

Por lo tanto, el precio de un bocadillo es 2 € y el precio de un refresco es 1 €.

- 45. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?**

Definimos las variables:

P : número de pollos

V : número de vacas

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} P + V = 50 \\ 2P + 4V = 134 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Despejamos V en la primera ecuación:

$$V = 50 - P$$

Sustituimos V en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2P + 4(50 - P) &= 134 \rightarrow 2P + 200 - 4P = 134 \rightarrow 2P - 4P + 200 = 134 \rightarrow \\ \rightarrow -2P + 200 &= 134 \rightarrow -2P = 134 - 200 \rightarrow -2P = -66 \rightarrow P = \frac{-66}{-2} \rightarrow P = 33 \end{aligned}$$

Sustituimos P en la primera ecuación para calcular V :

$$33 + V = 50 \rightarrow V = 50 - 33 \rightarrow V = 17$$

Por lo tanto, en la granja hay 33 pollos y 17 vacas.

- 46. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?**

Definimos las dimensiones del rectángulo:

L : largo del rectángulo

A : ancho del rectángulo

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} 2L + 2A = 172 \\ L = A + 22 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Despejamos L en la segunda ecuación:

$$L = A + 22$$

Sustituimos L en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 2(A + 22) + 2A &= 172 \rightarrow 2A + 44 + 2A = 172 \rightarrow 4A + 44 = 172 \\ 4A &= 172 - 44 \rightarrow 4A = 128 \rightarrow A = \frac{128}{4} \rightarrow A = 32 \end{aligned}$$

Sustituimos A en la segunda ecuación para calcular L :

$$L = 32 + 22 \rightarrow L = 54$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo son: Largo 54 metros y Ancho 32 metros.

- 47. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?**

Definimos las variables:

M_1 : número de monedas de 1 €

M_2 : número de monedas de 2 €

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} M_1 + M_2 = 40 \\ M_1 + 2M_2 = 53 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Despejamos M_1 en la primera ecuación:

$$M_1 = 40 - M_2$$

Sustituimos M_1 en la segunda ecuación:

$$(40 - M_2) + 2M_2 = 53 \rightarrow 40 - M_2 + 2M_2 = 53 \rightarrow 40 + M_2 = 53 \rightarrow M_2 = 53 - 40 \rightarrow M_2 = 13$$

Sustituimos M_2 en la primera ecuación para encontrar M_1 :

$$M_1 + 13 = 40 \rightarrow M_1 = 40 - 13 \rightarrow M_1 = 27$$

Por lo tanto, en la bolsa hay 27 monedas de 1 € y 13 monedas de 2 €.

- 48. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?**

Definimos las variables:

A : número de arañas

V : número de avispas

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} A + V = 70 \\ 8A + 6V = 488 \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Despejamos V en la primera ecuación:

$$V = 70 - A$$

Sustituimos V en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 8A + 6(70 - A) &= 488 \rightarrow 8A + 420 - 6A = 488 \rightarrow 8A - 6A + 420 = 488 \\ \rightarrow 2A + 420 &= 488 \rightarrow 2A = 488 - 420 \rightarrow 2A = 68 \rightarrow A = \frac{68}{2} \rightarrow A = 34 \end{aligned}$$

Sustituimos A en la primera ecuación para calcular V :

$$34 + V = 70 \rightarrow V = 70 - 34 \rightarrow V = 36$$

Por lo tanto, en la pelea hay 34 arañas y 36 avispas.

- 49. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?**

Definimos las variables:

C : número de chicos

X : número de chicas

Según el enunciado del problema, tenemos dos condiciones:

$$\begin{cases} C + X = 32 \\ C = 3X \end{cases}$$

Resolución del sistema de ecuaciones:

Sustituimos la segunda ecuación en la primera:

$$3X + X = 32 \rightarrow 4X = 32 \rightarrow X = \frac{32}{4} \rightarrow X = 8$$

Sustituimos X en la segunda ecuación para calcular C :

$$C = 3 \cdot 8 \rightarrow C = 24$$

Por lo tanto, en la clase hay 24 chicos y 8 chicas.

- 50. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tienen?**

Definimos las edades actuales de Yolanda, Pablo y su madre como Y , P y M , respectivamente. Según el enunciado del problema, tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} Y = P + 6 \\ M = 50 \end{cases}$$

Dentro de 2 años, la edad de la madre será el doble de la suma de las edades de sus hijos:

$$M + 2 = 2[(Y + 2) + (P + 2)]$$

Sustituimos M y Y en la ecuación:

$$\begin{aligned} 50 + 2 &= 2[(P + 6 + 2) + (P + 2)] \rightarrow 52 = 2[(P + 8) + (P + 2)] \rightarrow 52 = 2(2P + 10) \\ &\rightarrow 52 = 4P + 20 \rightarrow 4P = 52 - 20 \rightarrow 4P = 32 \rightarrow P = \frac{32}{4} \rightarrow P = 8 \end{aligned}$$

Sustituimos P en la primera ecuación para encontrar Y :

$$Y = 8 + 6 \rightarrow Y = 14$$

Por lo tanto, Yolanda tiene 14 años, Pablo tiene 8 años, y su madre tiene 50 años.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

- a) $x = 2$ y $x = 1$
- b) $x = 1$ y $x = -3$
- c) $x = 1$ y $x = -2/3$
- d) $x = 2$ y $x = -6/5$

Desarrollando $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$:

$$3x^2 - 3 + 2x^2 - 4x = 9 \rightarrow 5x^2 - 4x - 3 - 9 = 0 \rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $5x^2 - 4x - 12 = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{10} \rightarrow x = \frac{4 \pm 16}{10} \rightarrow x = 2 \quad y \quad x = -\frac{6}{5}$$

d) $x = 2$ y $x = -6/5$

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

- a) $x = 11$ y $x = -13$
- b) $x = 13$ y $x = -12$
- c) $x = 10$ y $x = 14$
- d) $x = -12$ y $x = -11$

Desarrollando $x(x - 1) = 156$:

$$x^2 - x - 156 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - x - 156 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2} \rightarrow x = \frac{1 \pm 25}{2} \rightarrow x = 13 \quad y \quad x = -12$$

b) $x = 13$ y $x = -12$

3. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

- a) $x = 2$ y $x = 2/3$
- b) $x = 1/3$ y $x = 4$
- c) $x = 1$ y $x = 4/3$
- d) $x = 5/3$ y $x = 3$

Resolviendo la ecuación cuadrática $3x^2 - 14x + 15 = 0$:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{6} \rightarrow x = \frac{14 \pm 4}{6} \rightarrow x = 3 \quad y \quad x = \frac{5}{3}$$

d) $x = 5/3$ y $x = 3$

4. Las soluciones de la ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

- a) $x = 24$ y $x = 8$
- b) $x = 21$ y $x = 3$
- c) $x = 5$ y $x = 19$
- d) $x = 23$ y $x = 2$

Desarrollando $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$

$$x^2 - 28x + 196 + x^2 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow 2x^2 - 28x + 196 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 - 32x + 192 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 32x + 192 = 0$:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{2} \rightarrow x = \frac{32 \pm 16}{2} \rightarrow x = 24 \quad y \quad x = 8$$

a) $x = 24$ y $x = 8$

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

- a) Infinitas
- b) $x = 9$ y $x = 5$
- c) No tiene solución
- d) $x = 1$ y $x = 4$

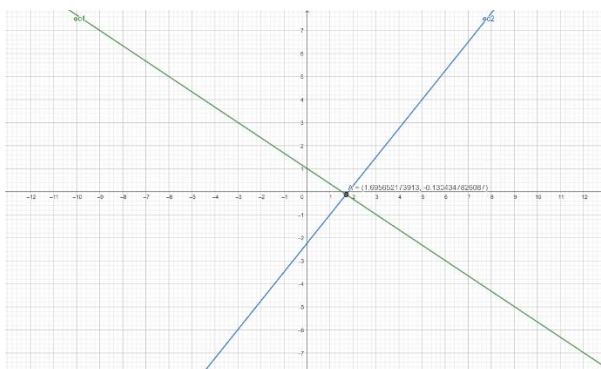
Desarrollando $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$

$$2x + 4 - 2x + x^2 = 0 \rightarrow x^2 + 4 = 0$$

c) No tiene solución

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 5x-4y=9 \end{cases}$ son:

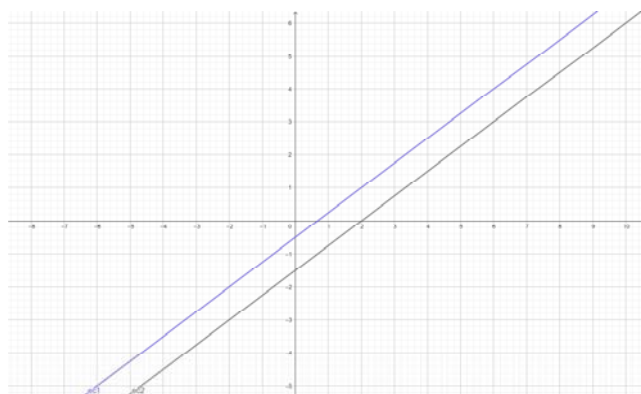
- a) Secantes
- b) Paralelas
- c) Coincidentes
- d) Se cruzan



Las rectas se cortan en A, por lo que son a) secantes.

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 6x-8y=12 \end{cases}$ es:

- a) $x = 2$ e $y = 1$
- b) $x = 1$ e $y = 1$
- c) $x = 3$ e $y = 2$
- d) No tiene solución



Dado que las rectas son paralelas. d) No tiene solución.

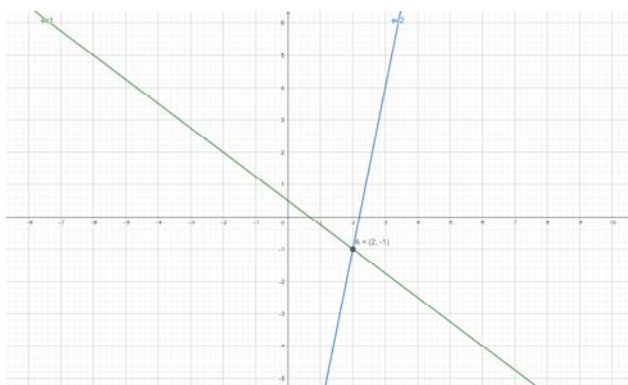
8. La Respuesta del sistema $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 5x-y=11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$

b) $x = 3$ e $y = 3$

c) $x = 2$ e $y = -1$

d) $x = 5$ e $y = 1$



Las rectas se cortan en el punto $A(2, -1)$.

c) $x = 2$ e $y = -1$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos

b) 15 pollos y 12 cerdos

c) 13 pollos y 14 cerdos

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P + C = 27 \\ 2P + 4C = 76 \end{cases}$$

Despejamos C en la primera ecuación:

$$C = 27 - P$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$2P + 4(27 - P) = 76 \rightarrow 2P + 108 - 4P = 76 \rightarrow -2P = -32 \rightarrow P = 16$$

$$C = 27 - 16 = 11$$

a) 16 pollos y 11 cerdos

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 16 años

b) 17 años

c) 20 años

d) 18 años

Del enunciado tenemos que:

$$15x + 100 = x^2 \rightarrow x^2 - 15x - 100 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 400}}{2} \rightarrow x = \frac{15 \pm 25}{2} \rightarrow x = 20 \quad y \quad x = -5$$

Descartamos la Respuesta negativa, por lo que la edad es c) 20 años.

3º ESO

Capítulo 6: Proporcionalidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 260m^2 , ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

La estimación estándar es que caben aproximadamente 4 personas de pie en un metro cuadrado. Para calcular cuántas personas había en el local de 260 m^2 , multiplicamos el número de metros cuadrados por la cantidad de personas que caben por metro cuadrado:

$$260\text{ m}^2 \cdot 4\text{ personas/m}^2 = 1040\text{ personas}$$

Por lo tanto, se estima que en la fiesta había alrededor de 1040 personas.

2. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?

La proporción es 1 kg de azúcar por cada 2 kg de fresas. Queremos hacer 5 kg de mermelada, por lo que debemos sumar el peso del azúcar y las fresas.

Llamemos x a los kilogramos de fresas. Entonces, los kilogramos de azúcar serán $\frac{x}{2}$.

$$\text{Sumando ambos, tenemos que } x + \frac{x}{2} = 5.$$

Resolviendo la ecuación:

$$x + \frac{x}{2} = 5 \rightarrow \frac{2x + x}{2} = 5 \rightarrow \frac{3x}{2} = 5 \rightarrow 3x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{3} = 3.33\text{kg de fresas}$$

Entonces, la cantidad de azúcar será $\frac{3.33}{2} = 1.67\text{kg de azúcar}$.

Por lo tanto, para hacer 5 kg de mermelada, necesitamos 3.33 kg de fresas y 1.67 kg de azúcar.

3. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1.2 m tiene una sombra de 2.1 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 4.2 m?

Para resolverlo, usamos la proporción:

$$\frac{1.2}{2.1} = \frac{x}{4.2}$$

Resolviendo la proporción:

$$1.2 \cdot 4.2 = 2.1 \cdot x \rightarrow 5.04 = 2.1 \cdot x$$

Despejando x :

$$x = \frac{5.04}{2.1} \rightarrow x = 2.4\text{ m}$$

Por lo tanto, un árbol cuya sombra mida 4.2 m tendrá una altura de 2.4 m.

4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad.

Litros	16	4.5		1		50
Euros	36		8.1		10	

Para calcular la razón de proporcionalidad (k), usamos la fórmula $k = \frac{\text{Euros}}{\text{Litros}}$: $k = \frac{36}{16} = 2.25$

Por lo tanto, la razón de proporcionalidad es 2.25.

Para completar la tabla:

- Litros = 4.5, Euros = $4.5 \cdot 2.25 = 10.125$
- Litros = 1, Euros = $1 \cdot 2.25 = 2.25$

- Litros = 50, Euros = $50 \cdot 2.25 = 112.5$
- Litros = $8.1/2.25 = 3.6$, Euros = 8.1
- Litros = $10/2.25 = 4.44$, Euros = 8.1

Litros	16	4.5	3.6	1	4.44	50
Euros	36	10.125	8.1	2.25	10	112.5

5. Hemos gastado 72 litros de gasolina para recorrer 960 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1 500 km?

Primero, calculamos la razón de proporcionalidad:

$$k = \frac{72 \text{ litros}}{960 \text{ km}} = 0.075 \text{ litros/km}$$

Luego, usamos esta razón para calcular los litros necesarios para 1 500 km:

$$\text{Litros necesarios} = 0.075 \text{ litros/km} \cdot 1500 \text{ km} = 112.5 \text{ litros}$$

Por lo tanto, **necesitaremos 112.5 litros** de gasolina para recorrer 1 500 km.

6. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1 250 km?

Primero, calculamos la razón de consumo de gasolina:

$$k = \frac{6 \text{ litros}}{100 \text{ km}} = 0.06 \text{ litros/km}$$

Luego, usamos esta razón para calcular los litros necesarios para 1 250 km:

$$\text{Litros necesarios} = 0.06 \text{ litros/km} \cdot 1250 \text{ km} = 75 \text{ litros}$$

Por lo tanto, **necesitaremos 75 litros** de gasolina para recorrer 1 250 km.

7. Un libro de 420 páginas pesa 200 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 300 páginas?

Primero, calculamos la razón de peso por página:

$$k = \frac{200 \text{ g}}{420 \text{ páginas}} = \frac{10}{21} \text{ g/página}$$

Luego, usamos esta razón para calcular el peso de un libro de 300 páginas:

$$\text{Peso} = \frac{10}{21} \text{ g/página} \cdot 300 \text{ páginas} = \frac{10 \cdot 300}{21} = \frac{3000}{21} \text{ g} \approx 142.86 \text{ g}$$

Por lo tanto, un libro de la misma colección con 300 páginas pesará aproximadamente **142.86 g**.

8. Seis personas realizan un viaje de ocho días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 5 días?

Primero, calculamos la constante de proporcionalidad:

$$C = k \cdot P \cdot D \text{ (cantidad} = k \cdot \text{personas} \cdot \text{días)}$$

Despejamos k:

$$k = \frac{C}{P \cdot D} = \frac{40800}{6 \cdot 8} = \frac{40800}{48} = 850$$

Luego, calculamos el costo para 15 personas durante 5 días:

$$C = k \cdot P \cdot D = 850 \cdot 15 \cdot 5$$

Calculamos C:

$$C = 850 \cdot 75 = 63\,750$$

Por lo tanto, 15 personas pagarán 63 750 € por el viaje de 5 días.

9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21% de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15%.

Primero, calculamos el IVA (21% de 430 €):

$$IVA = 0.21 \cdot 430 = 90.3 \text{ €}$$

El precio total antes del descuento es:

$$Precio\ total = 430 \text{ €} + 90.3 \text{ €} = 520.3 \text{ €}$$

Aplicamos el descuento del 15% sobre el precio total:

$$Descuento = 0.15 \cdot 520.3 = 78.045 \text{ €}$$

Restamos el descuento al precio total para obtener el precio final:

$$Precio\ Final = 520.3 \text{ €} - 78.045 \text{ €} = 442.255 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio final del lavavajillas es de 442.26 €.

10. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{100}{24} = \frac{x}{30}$

$$100 \cdot 30 = 24 \cdot x \rightarrow 3000 = 24x \rightarrow x = \frac{3000}{24} \rightarrow x = 125$$

b) $\frac{80}{x} = \frac{12}{46}$

$$80 \cdot 46 = 12 \cdot x \rightarrow 3680 = 12x \rightarrow x = \frac{3680}{12} \rightarrow x \approx 306.67$$

c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$

$$3.6 \cdot 60 = 12.8 \cdot x \rightarrow 216 = 12.8x \rightarrow x = \frac{216}{12.8} \rightarrow x \approx 16.88$$

11. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 127 € he pagado 111 €. Me han aplicado un% de descuento

$$Descuento = 127 \text{ €} - 111 \text{ €} = 16 \text{ €}$$

$$Descuento(\%) = \left(\frac{16}{127} \right) \cdot 100 \approx 12.6\%$$

Por lo tanto, me han aplicado un 12.6% de descuento.

b) Me han descontado el 12 % de una factura de € y he pagado 365€.

Sea x el importe inicial de la factura.

$$Importe\ pagado = x - 0.12x = 0.88x$$

Sabemos que:

$$0.88x = 365 \text{ €}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{365 \text{ €}}{0.88} \approx 414.77 \text{ €}$$

Por lo tanto, el importe inicial de la factura es aproximadamente 414.77 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 15 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

Sea x el precio original del mueble.

Sabemos que:

$$0.15x = 100 \text{ €}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{100 \text{ €}}{0.15} \approx 666.67 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio del mueble sin descuento era de **666.67 €**.

12. Dos pantalones nos costaron 32 €, ¿cuánto pagaremos por 5 pantalones?

Primero, calculamos el precio unitario de un pantalón:

$$\text{Preciounitario} = \frac{32 \text{ €}}{2} = 16 \text{ €}$$

Luego, calculamos el precio de 5 pantalones:

$$\text{Precio total} = 16 \text{ €} \cdot 5 = 80 \text{ €}$$

Por lo tanto, pagaremos **80 €** por 5 pantalones.

13. La distancia real entre dos pueblos es 18.5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

Primero, convertimos la distancia real a centímetros:

$$18.5 \text{ km} = 18.5 \cdot 1000 \cdot 100 = 1\,850\,000 \text{ cm}$$

Luego, calculamos la escala:

$$\text{Escala} = \frac{10 \text{ cm}}{1\,850\,000 \text{ cm}} = \frac{1}{185\,000}$$

Por lo tanto, el mapa está dibujado a escala **1:185 000**.

14. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?

La escala es 1:300, es decir, cada 1 cm en la maqueta representa 300 cm en la realidad.

Calculamos la altura real del edificio:

$$\text{Altura real} = 12 \text{ cm} \cdot 300 = 3600 \text{ cm}$$

Convertimos a metros:

$$\text{Altura real} = \frac{3600 \text{ cm}}{100} = 36 \text{ m}$$

Por lo tanto, el edificio tiene una altura de **36 metros**.

15. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

Para dibujar la escala gráfica correspondiente a la escala 1:60000, seguimos estos pasos:

- Sabemos que 1 cm en el mapa representa 60 000 cm en la realidad.
- Convertimos 60 000 cm a kilómetros:

$$60\,000 \text{ cm} = 600 \text{ m} = 0.6 \text{ km}$$

- Decidimos la longitud total de la escala gráfica. Por ejemplo, si queremos que la escala abarque 5 km de distancia real, calculamos la longitud en el mapa:

$$\text{Longitud en el mapa} = \frac{5 \text{ km}}{0.6 \text{ km/cm}} = 8.\overline{333} \text{ cm}$$

- Dividimos la escala en segmentos de 1 cm, que representan 1 km cada uno.
- Marcamos las divisiones con las distancias reales acumuladas:

$$0 \text{ km} \quad 1 \text{ km} \quad 2 \text{ km} \quad 3 \text{ km} \quad 4 \text{ km} \quad 5 \text{ km}$$

Así, la escala gráfica quedaría representada con una barra de 8.3 cm dividido en 5 segmentos de 1 cm cada uno, facilitando la medición de distancias en el mapa.



16. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 6 cm y 14 cm. Si está dibujado a escala 1:40, calcula sus medidas reales.

Para calcular las medidas reales, multiplicamos las dimensiones del plano por la escala.

Dimensión real de largo:

$$6 \text{ cm} \cdot 40 = 240 \text{ cm} = 2.4 \text{ m}$$

Dimensión real de ancho:

$$14 \text{ cm} \cdot 40 = 560 \text{ cm} = 5.6 \text{ m}$$

Por lo tanto, las medidas reales son 2.4 m de largo y 5.6 m de ancho.

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

17. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

MAGNITUD A	36	0.09		12	
MAGNITUD B	0.25		6		72

Para resolver la tabla de proporcionalidad inversa, utilizamos la relación:

$$A \cdot B = k$$

Calculamos la constante de proporcionalidad (k) usando los valores dados:

1. Usando A = 36 y B = 0.25:

$$k = 36 \cdot 0.25 = 9$$

Ahora, completamos la tabla usando k = 9:

2. Para A = 0.09:

$$B = \frac{k}{A} = \frac{9}{0.09} = 100$$

3. Para B = 6:

$$A = \frac{k}{B} = \frac{9}{6} = 1.5$$

4. Para A = 12:

$$B = \frac{k}{A} = \frac{9}{12} = 0.75$$

5. Para B = 72:

$$A = \frac{k}{B} = \frac{9}{72} = 0.125$$

MAGNITUD A	36	0.09	1.5	12	0.125
MAGNITUD B	0.25	100	6	0.75	72

18. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 6 paneles de 2.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 1.5 m de largo?

Primero, calculamos la longitud total de madera disponible:

$$\text{Longitud total} = 6 \cdot 2.25 \text{ m} = 13.5 \text{ m}$$

Ahora, determinamos cuántos paneles de 1.5 m podemos obtener:

$$\text{Número de paneles} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada panel}} = \frac{13.5 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = 9$$

Por lo tanto, conseguiremos **9 paneles** de 1.5 m de largo.

19. Para llenar un depósito se abren tres grifos que lanzan 2 litros por minuto cada uno y tardan 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 grifos similares que lanzan 5 litros por minuto cada uno?

Primero, calculamos el volumen total del depósito usando la primera situación.

El caudal total inicial es:

$$\text{Caudal}_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ litros/minuto}$$

El tiempo total es:

$$t_1 = 6 \text{ horas} = 360 \text{ minutos}$$

Entonces, el volumen del depósito es:

$$V = \text{Caudal}_1 \cdot t_1 = 6 \text{ litros/minuto} \cdot 360 \text{ minutos} = 2160 \text{ litros}$$

Ahora, calculamos el tiempo con la nueva situación:

El caudal total nuevo es:

$$\text{Caudal}_2 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ litros/minuto}$$

El tiempo necesario es:

$$t_2 = \frac{V}{\text{Caudal}_2} = \frac{2160 \text{ litros}}{20 \text{ litros/minuto}} = 108 \text{ minutos}$$

Convertimos el tiempo a horas:

$$t_2 = \frac{108}{60} = 1.8 \text{ horas} = 1 \text{ hora } 48 \text{ minutos}$$

Por lo tanto, los 4 grifos tardarán **1 hora y 48 minutos** en llenar el depósito.

20. Tres máquinas fabrican 1 200 piezas funcionando 5 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 6 000 piezas durante 9 horas diarias?

Primero, calculamos la producción por máquina por hora en la situación inicial:

$$\text{Producción por máquina por hora} = \frac{1200 \text{ piezas}}{3 \text{ máquinas} \cdot 5 \text{ horas}} = \frac{1200}{15} = 80 \text{ piezas/máquina/hora}$$

Ahora, aplicamos esta tasa a la nueva situación para encontrar el número de máquinas necesarias:

$$\text{Producción total} = \text{Producción por máquina por hora} \cdot \text{Máquinas} \cdot \text{Horas}$$

Despejamos el número de máquinas:

$$\text{Máquinas} = \frac{\text{Producción total}}{\text{Producción por máquina por hora} \cdot \text{Horas}}$$

Sustituimos los valores:

$$\text{Máquinas} = \frac{6000}{80 \cdot 9} = \frac{6000}{720} \approx 8.33$$

Como no se pueden tener fracciones de máquinas, redondeamos al siguiente número entero:

$$\text{Máquinas} = 9$$

Por lo tanto, se deben poner a funcionar **9 máquinas** para conseguir 6000 piezas trabajando 9 horas diarias.

21. En la construcción de un puente de 900 m se han utilizado 250 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 75 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

Primero, calculamos el número total de vigas después de añadir las 75 vigas adicionales:

$$\text{Número total de vigas} = 250 + 75 = 325$$

El número de intervalos entre vigas es:

$$\text{Número de intervalos} = \text{Número total de vigas} - 1 = 325 - 1 = 324$$

Como las vigas se colocan uniformemente, la distancia entre vigas es:

$$\text{Distancia entre vigas} = \frac{\text{Longitud total del puente}}{\text{Número de intervalos}}$$

Sustituimos los valores:

$$\text{Distancia entre vigas} = \frac{900 \text{ m}}{324}$$

Simplificamos la fracción:

$$\text{Distancia entre vigas} = \frac{25}{9} \text{ m}$$

Calculamos el valor decimal:

$$\text{Distancia entre vigas} \approx 2.7778 \text{ m}$$

Por lo tanto, las vigas se colocarán aproximadamente **cada 2.78 metros**.

22. En un huerto ecológico se utilizan 3 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 10 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

Primero, calculamos la cantidad de nitratos en el abono original:

$$\text{Cantidad de nitratos original} = 3000 \text{ kg} \cdot 10\% = 3000 \text{ kg} \cdot 0.10 = 300 \text{ kg}$$

Queremos que la cantidad de nitratos sea la misma con el nuevo abono, que tiene un 15% de nitratos:

$$\text{Cantidad de nitratos nuevo} = x \text{ kg} \cdot 15\% = x \text{ kg} \cdot 0.15$$

Igualamos ambas cantidades:

$$x \text{ kg} \cdot 0.15 = 300 \text{ kg}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{300 \text{ kg}}{0.15} = 2000 \text{ kg}$$

Por lo tanto, se necesitan **2000 kg** del nuevo abono para obtener la misma cantidad de nitratos.

23. Ese mismo huerto necesita 1 200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?

Primero, calculamos la cantidad total de mandarinas:

$$\text{Cantidad total} = 1200 \text{ cajas} \cdot 1 \text{ kg/caja} = 1200 \text{ kg}$$

Para cajas de 0.5 kg:

$$\text{Número de cajas} = \frac{\text{Cantidad total}}{\text{Peso por caja}} = \frac{1200 \text{ kg}}{0.5 \text{ kg/caja}} = 2400 \text{ cajas}$$

Para cajas de 2 kg:

$$\text{Número de cajas} = \frac{1200 \text{ kg}}{2 \text{ kg/caja}} = 600 \text{ cajas}$$

Por lo tanto, se necesitan **2400 cajas de 0.5 kg** y **600 cajas de 2 kg** para envasar todas las mandarinas.

3. REPARTOS PROPORCIONALES

24. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

Primero, calculamos el total de participaciones:

$$\text{Total de participaciones} = 10 + 6 + 12 + 7 + 5 = 40$$

Ahora, calculamos la cantidad que corresponde a cada persona:

1) Participante 1:

$$\text{Cantidad} = \frac{10}{40} \cdot 18\,000 \text{ €} = 0.25 \cdot 18\,000 \text{ €} = 4\,500 \text{ €}$$

2) Participante 2:

$$\text{Cantidad} = \frac{6}{40} \cdot 18\,000 \text{ €} = 0.15 \cdot 18\,000 \text{ €} = 2\,700 \text{ €}$$

3) Participante 3:

$$\text{Cantidad} = \frac{12}{40} \cdot 18\,000 \text{ €} = 0.30 \cdot 18\,000 \text{ €} = 5\,400 \text{ €}$$

4) Participante 4:

$$\text{Cantidad} = \frac{7}{40} \cdot 18\,000 \text{ €} = 0.175 \cdot 18\,000 \text{ €} = 3\,150 \text{ €}$$

5) Participante 5:

$$\text{Cantidad} = \frac{5}{40} \cdot 18\,000 \text{ €} = 0.125 \cdot 18\,000 \text{ €} = 2\,250 \text{ €}$$

Verificamos que la suma de todas las cantidades es igual al premio total:

$$4\,500 \text{ €} + 2\,700 \text{ €} + 5\,400 \text{ €} + 3\,150 \text{ €} + 2\,250 \text{ €} = 18\,000 \text{ €}$$

25. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 6, 5, 2, y 1 error, deben repartirse los 1 400 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

Como la puntuación es inversamente proporcional al número de errores, calculamos el inverso de los

errores para cada finalista:

- *Finalista 1 (6 errores):* $\frac{1}{6}$
- *Finalista 2 (5 errores):* $\frac{1}{5}$
- *Finalista 3 (2 errores):* $\frac{1}{2}$
- *Finalista 4 (1 error):* $\frac{1}{1} = 1$

Sumamos estos valores para obtener el total de inversos:

$$\text{Suma total} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{15}{30} + \frac{30}{30} = \frac{56}{30}$$

Ahora, calculamos la puntuación que le corresponde a cada finalista:

$$\text{Puntuación finalista 1} = \left(\frac{5}{56}\right) \cdot 1400 = 125 \text{ puntos}$$

$$\text{Puntuación finalista 2} = \left(\frac{6}{56}\right) \cdot 1400 = 150 \text{ puntos}$$

$$\text{Puntuación finalista 3} = \left(\frac{15}{56}\right) \cdot 1400 = 375 \text{ puntos}$$

$$\text{Puntuación finalista 4} = \left(\frac{30}{56}\right) \cdot 1400 = 750 \text{ puntos}$$

Verificamos que la suma de las puntuaciones es igual al total de puntos:

$$125 + 150 + 375 + 750 = 1400 \text{ puntos}$$

Por lo tanto, cada finalista recibirá:

- *Finalista 1 (6 errores):* 125 puntos
- *Finalista 2 (5 errores):* 150 puntos
- *Finalista 3 (2 errores):* 375 puntos
- *Finalista 4 (1 error):* 750 puntos

26. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 22 200 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Primero, debido a que queremos que los nietos menores reciban más, distribuiremos el dinero inversamente proporcional a sus edades.

Calculamos el inverso de las edades:

$$\text{Nieto 1 (12 años): } \frac{1}{12} \quad ; \quad \text{Nieto 2 (15 años): } \frac{1}{15} \quad ; \quad \text{Nieto 3 (18 años): } \frac{1}{18}$$

Sumamos los inversos:

$$\text{Suma} = \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}$$

Encontramos un denominador común:

Mínimo común múltiplo de 12, 15 y 18 es 180

Convertimos las fracciones:

$$\frac{1}{12} = \frac{15}{180}, \quad \frac{1}{15} = \frac{12}{180}, \quad \frac{1}{18} = \frac{10}{180}$$

Sumamos:

$$\text{Suma} = \frac{15 + 12 + 10}{180} = \frac{37}{180}$$

Ahora, calculamos la parte correspondiente a cada nieto:

- Nieto 1 (12 años):

$$\text{Cantidad} = \frac{15}{37} \cdot 22\,200 \text{ €} = \frac{333\,000}{37} \text{ €} = 9\,000 \text{ €}$$

- Nieto 2 (15 años):

$$\text{Cantidad} = \frac{12}{37} \cdot 22\,200 \text{ €} = \frac{266\,400}{37} \text{ €} = 7\,200 \text{ €}$$

- Nieto 3 (18 años):

$$\text{Cantidad} = \frac{10}{37} \cdot 22\,200 \text{ €} = \frac{222\,000}{37} \text{ €} = 6\,000 \text{ €}$$

Verificamos que la suma de las cantidades coincide con el total:

$$9\,000 \text{ €} + 7\,200 \text{ €} + 6\,000 \text{ €} = 22\,200 \text{ €}$$

Por lo tanto, cada nieto recibirá:

- Nieto 1 (12 años): 9 000 €

- Nieto 2 (15 años): 7 200 €

- Nieto 3 (18 años): 6 000 €

27. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

Primero, calculamos la inversión, total:

$$\text{Inversión total} = 20\,000 \text{ €} + 34\,000 \text{ €} + 51\,000 \text{ €} = 105\,000 \text{ €}$$

Ahora, determinamos la proporción de la inversión de cada socio:

Socio 1:

$$\text{Porcentaje} = \frac{20\,000}{105\,000} = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}$$

$$\text{Beneficio} = \frac{4}{21} \cdot 31\,500 \text{ €} = \frac{126\,000}{21} = 6\,000 \text{ €}$$

Socio 2:

$$\text{Porcentaje} = \frac{34\,000}{105\,000} = \frac{34}{105}$$

$$\text{Beneficio} = \frac{34}{105} \cdot 31\,500 \text{ €} = \frac{1\,071\,000}{105} = 10\,200 \text{ €}$$

Socio 3:

$$\text{Porcentaje} = \frac{51\,000}{105\,000} = \frac{51}{105} = \frac{17}{35}$$

$$\text{Beneficio} = \frac{17}{35} \cdot 31\,500 \text{ €} = \frac{535\,500}{35} = 15\,300 \text{ €}$$

Verificamos que la suma de los beneficios coincide con el total:

$$6\,000 \text{ €} + 10\,200 \text{ €} + 15\,300 \text{ €} = 31\,500 \text{ €}$$

Por lo tanto, cada socio recibirá:

- Socio 1: 6 000 €

- Socio 2: 10 200 €

- Socio 3: 15 300 €

28. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg y 5.20 kg a 6 €/kg.

Calculamos el coste total:

$$\begin{aligned} \text{Costo}_{\text{total}} &= (3.5 \text{ kg} \cdot 4.8 \text{ €/kg}) + (5.20 \text{ kg} \cdot 6 \text{ €/kg}) \\ \text{Costo}_{\text{total}} &= (16.8 \text{ €}) + (31.2 \text{ €}) \rightarrow \text{Costo}_{\text{total}} = 48 \text{ €} \end{aligned}$$

Calculamos la cantidad total de café:

$$\text{Peso}_{\text{total}} = 3.5 \text{ kg} + 5.20 \text{ kg} = 8.7 \text{ kg}$$

Ahora, calculamos el precio por kilogramo de la mezcla:

$$\text{Precio}_{\text{mezcla}} = \frac{\text{Costo}_{\text{total}}}{\text{Peso}_{\text{total}}} = \frac{48 \text{ €}}{8.7 \text{ kg}} \approx 5.5172 \text{ €/kg}$$

Por lo tanto, el precio del kilo de la mezcla es aproximadamente **5.52 €/kg**.

29. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2.40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1.80 €/l para obtener una mezcla a 2.13 €/l?

Sea x el volumen en litros de zumo de pomelo a 2.40 €/l.

El costo total de los zumos es:

$$\text{Costo}_{\text{pomelo}} = 2.40 \text{ €/l} \cdot x \text{ l} = 2.40 x \text{ €} \rightarrow \text{Costo}_{\text{naranja}} = 1.80 \text{ €/l} \times 4 \text{ l} = 7.20 \text{ €}$$

El costo total es:

$$\text{Costo}_{\text{total}} = 2.40 x \text{ €} + 7.20 \text{ €}$$

El volumen total es:

$$\text{Volumen}_{\text{total}} = x \text{ l} + 4 \text{ l}$$

El precio por litro de la mezcla es:

$$\text{Precio}_{\text{mezcla}} = \frac{\text{Costo}_{\text{total}}}{\text{Volumen}_{\text{total}}} = 2.13 \text{ €/l}$$

Planteamos la ecuación:

$$\frac{2.40 x \text{ €} + 7.20 \text{ €}}{x + 4} = 2.13 \text{ €/l}$$

Multiplicamos ambos lados por $(x + 4)$:

$$2.40 x + 7.20 = 2.13 \cdot (x + 4)$$

Simplificamos:

$$2.40 x + 7.20 = 2.13 x + 8.52$$

Restamos $2.13 x$ a ambos lados:

$$0.27 x + 7.20 = 8.52$$

Restamos 7.20 a ambos lados:

$$0.27 x = 1.32$$

Despejamos x :

$$x = \frac{1.32}{0.27}$$

Calculamos:

$$x = \frac{132}{27} = \frac{44}{9} \approx 4.89 \text{ l}$$

Por lo tanto, se deben mezclar aproximadamente **4.89 litros** de zumo de pomelo.

30. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 110 g y contiene 82 g de oro puro.

Calculamos la ley de la joya, que es el porcentaje de oro puro respecto al peso total.

$$\text{Ley} = \left(\frac{\text{Masa de oro puro}}{\text{Masa total de la joya}} \right) \cdot 100\%$$

Sustituimos los valores:

$$\text{Ley} = \left(\frac{82 \text{ g}}{110 \text{ g}} \right) \cdot 100\% = \left(\frac{82}{110} \right) \cdot 100\%$$

Calculamos la fracción:

$$\frac{82}{110} = \frac{41}{55} \approx 0.7455$$

Entonces, la ley es:

$$\text{Ley} \approx 0.7455 \cdot 100\% = 74.55\%$$

Por lo tanto, la joya tiene una ley de aproximadamente **74.55% de oro puro**.

31. ¿Cuántos quilates, aproximadamente tiene la joya anterior?

Sabemos que el oro puro es de 24 quilates, por lo que podemos calcular los quilates de la joya utilizando la siguiente relación:

$$\text{Quilates} = \left(\frac{\text{Ley de la joya}}{100\%} \right) \cdot 24$$

Sustituimos los valores:

$$\text{Quilates} = \left(\frac{74.55\%}{100\%} \right) \cdot 24$$

Calculamos:

$$\text{Quilates} = 0.7455 \cdot 24 = 17.892$$

Por lo tanto, la joya tiene aproximadamente **17.89 quilates**.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

Litros	6.25		0.75	1.4	
Euros		15	2.25		4.5

Primero, calculamos la razón de proporcionalidad (k):

Usamos los datos conocidos:

$$k = \frac{\text{Euros}}{\text{Litros}} = \frac{2.25}{0.75} = 3$$

Ahora, completamos la tabla usando $k = 3$:

- 1) Para Litros = 6.25:

$$\text{Euros} = k \cdot \text{Litros} = 3 \cdot 6.25 = 18.75$$

- 2) Para Euros = 15:

$$\text{Litros} = \frac{\text{Euros}}{k} = \frac{15}{3} = 5$$

- 3) Para Litros = 1.4:

$$\text{Euros} = k \cdot \text{Litros} = 3 \cdot 1.4 = 4.2$$

- 4) Para Euros = 4.5:

$$\text{Litros} = \frac{\text{Euros}}{k} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

Litros	6.25	5	0.75	1.4	1.5
Euros	18.75	15	2.25	4.2	4.5

2. Con 76 € hemos pagado 12.5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22.5 m?

Primero, calculamos el precio por metro de la tela:

$$\text{Preciopormetro} = \frac{76\text{€}}{12.5\text{m}} = 6.08\text{€/m}$$

Luego, calculamos el costo de 22.5 m:

$$\text{Costo} = 6.08\text{ €/m} \cdot 22.5\text{ m} = 136.8\text{ €}$$

Por lo tanto, los 22.5 metros de tela costarán **136.80 €**.

3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos los meses de junio y julio?

Primero, calculamos el número de días en junio y julio:

$$\text{Total de días} = 30\text{ días (junio)} + 31\text{ días (julio)} = 61\text{ días}$$

Calculamos el número de semanas:

$$\text{Número de semanas} = \frac{61\text{ días}}{7\text{ días/semana}} \approx 8.714\text{ semanas}$$

Ahora, calculamos el gasto total en transporte:

$$\text{Gasto total} = 82\text{ €/semana} \cdot 8.714\text{ semanas} \approx 714.55\text{ €}$$

Por lo tanto, gastaremos aproximadamente **714.55 €** en transporte durante los meses de junio y julio.

4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2.3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?

Calculamos la cantidad de tela utilizada por silla:

$$\text{Tela por silla} = \frac{2.3 \text{ m}}{5 \text{ sillas}} = 0.46 \text{ m/silla}$$

Ahora, calculamos el número de sillas que se pueden tapizar con 23 m de tela:

$$\text{Número de sillas} = \frac{23 \text{ m}}{0.46 \text{ m/silla}} = 50 \text{ sillas}$$

Por lo tanto, con la pieza completa de 23 m de tela, se pueden tapizar **50 sillas**.

- 5. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?**

Primero, calculamos la capacidad del camión en un viaje:

$$\text{Capacidad por viaje} = \frac{220 \cdot 24 \text{ kg}}{3} = \frac{5280 \text{ kg}}{3} = 1760 \text{ kg/viaje}$$

Ahora, calculamos el peso total a transportar:

$$\text{Peso total} = 550 \cdot 30 \text{ kg} = 16500 \text{ kg}$$

Finalmente, calculamos el número de viajes necesarios:

$$\text{Número de viajes} = \frac{16500 \text{ kg}}{1760 \text{ kg/viaje}} \approx 9.375 \text{ viajes}$$

Como no se pueden realizar viajes fraccionados, se necesitan **10 viajes**.

- 6. Una edición de 350 libros, de 210 páginas cada uno, alcanza un peso total de 70 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 630 libros de 140 páginas cada uno?**

Calculamos el número total de páginas de la primera edición:

$$T1 = 350 \cdot 210 = 73500 \text{ páginas}$$

Calculamos el peso por página:

$$\text{Peso por página} = \frac{70 \text{ kg}}{73500 \text{ páginas}} = 0.00095238 \text{ kg/página}$$

Calculamos el número total de páginas de la segunda edición:

$$T2 = 630 \cdot 140 = 88200 \text{ páginas}$$

Calculamos el peso total de la segunda edición:

$$\text{Peso total} = \text{Peso por página} \cdot T2 = 0.00095238 \text{ kg/página} \cdot 88200 \text{ páginas} = 84 \text{ kg}$$

Por lo tanto, la segunda edición pesará **84 kg**.

- 7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $\frac{A}{B} = 1.8$, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:**

Magnitud A	12.6			4.14	
Magnitud B		9	0.1		2.7

Dado que la razón de proporcionalidad directa es $\frac{A}{B} = 1.8$, entonces $A = 1.8 \cdot B$

1) Para A = 12.6:

$$B = \frac{A}{1.8} = \frac{12.6}{1.8} = 7$$

2) Para B = 9:

$$A = 1.8 \cdot 9 = 16.2$$

3) Para B = 0.1:

$$A = 1.8 \cdot 0.1 = 0.18$$

4) Para A = 4.14:

$$B = \frac{A}{1.8} = \frac{4.14}{1.8} = 2.3$$

5) Para $B = 2.7$:

$$A = 1.8 \cdot 2.7 = 4.86$$

Magnitud A	12.6	16.2	0.18	4.14	4.86
Magnitud B	7	9	0.1	2.3	2.7

8. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

Primero, calculamos el IVA (21% de 285 €):

$$IVA = 0.21 \cdot 285 \text{ €} = 59.85 \text{ €}$$

El precio total antes del descuento es:

$$Precio \text{ total} = 285 \text{ €} + 59.85 \text{ €} = 344.85 \text{ €}$$

Aplicamos el descuento del 15% sobre el precio total:

$$Descuento = 0.15 \cdot 344.85 \text{ €} = 51.7275 \text{ €}$$

Restamos el descuento al precio total para obtener el precio rebajado:

$$Precio \text{ rebajado} = 344.85 \text{ €} - 51.7275 \text{ €} = 293.1225 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio rebajado es de aproximadamente **293.12 €**.

$$\text{También: } 285 \cdot 1.21 \cdot 0.85 = 293.1225$$

9. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1 520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?

Calculamos el recargo del 12% sobre la deuda de 1520€:

$$Recargo = 0.12 \cdot 1520 \text{ €} = 182.40 \text{ €}$$

Sumamos el recargo al monto original para obtener el total a devolver:

$$Total = 1520 \text{ €} + 182.40 \text{ €} = 1702.40 \text{ €}$$

Por lo tanto, la persona debe devolver **1702.40 €** en total.

$$\text{Otra forma: } 1520 \cdot 1.12 = 1702.40$$

10. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1 820 € si finalmente se pagaron 1 274 €?

Primero, calculamos el importe del descuento:

$$Descuento = 1820 \text{ €} - 1274 \text{ €} = 546 \text{ €}$$

Calculamos el porcentaje de descuento:

$$Porcentaje \text{ de descuento} = \left(\frac{546 \text{ €}}{1820 \text{ €}} \right) \cdot 100\% = 30\%$$

Por lo tanto, se ha aplicado un **30%** de descuento en la factura.

11. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

Calculamos el precio original del televisor sin descuento.

Sea x el precio original.

Sabemos que al aplicar un 22% de descuento pagamos 483.60 €:

$$\text{Precio con descuento} = x - 0.22 \cdot x = 0.78 \cdot x$$

Entonces:

$$0.78 \cdot x = 483.60$$

Despejamos x:

$$x = \frac{483.60}{0.78}$$

Calculamos:

$$x = 620 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio original del televisor sin descuento era de 620 €.

12. Por liquidar una deuda de 3 500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3 080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

Calculamos el ahorro:

$$\text{Ahorro} = 3500 \text{ €} - 3080 \text{ €} = 420 \text{ €}$$

Calculamos el porcentaje de ahorro:

$$\text{Porcentaje de ahorro} = \left(\frac{420 \text{ €}}{3500 \text{ €}} \right) \cdot 100\%$$

Simplificamos:

$$\text{Porcentaje de ahorro} = \left(\frac{420}{3500} \right) \cdot 100\% = 0.12 \cdot 100\% = 12\%$$

Por lo tanto, la persona se ha ahorrado un 12% de su deuda.

13. El precio de un viaje se anuncia a 907.50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
Calculamos el precio sin IVA.

Sea x el precio sin IVA.

Sabemos que:

$$\text{Precio con IVA} = x + 0.21 \cdot x = 1.21 \cdot x$$

Entonces:

$$1.21 \cdot x = 907.50$$

Despejamos x :

$$x = \frac{907.50}{1.21} = 750 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio sin IVA es 750 €.

14. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47.12 €?

Calculamos el incremento en euros:

$$\text{Incremento} = 47.12 \text{ €} - 38 \text{ €} = 9.12 \text{ €}$$

Calculamos el porcentaje de incremento:

$$\text{Porcentaje de incremento} = \left(\frac{9.12 \text{ €}}{38 \text{ €}} \right) \cdot 100\% \approx 24\%$$

Por lo tanto, el artículo ha tenido un incremento porcentual del 24%.

15. Un mapa está dibujado a escala 1:700 000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

Convertimos la distancia real a centímetros:

$$21 \text{ km} = 21 \cdot 1000 \cdot 100 = 2\,100\,000 \text{ cm}$$

Calculamos la distancia en el mapa:

$$\text{Distancia en el mapa} = \frac{2\,100\,000 \text{ cm}}{700\,000} = 3 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la distancia en el mapa es de **3 cm**.

16. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

Primero, convertimos la distancia real a centímetros:

$$340 \text{ km} = 340 \cdot 1000 \cdot 100 = 34\,000\,000 \text{ cm}$$

Calculamos la escala:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia en el mapa}}{\text{Distancia real}} = \frac{10 \text{ cm}}{34\,000\,000 \text{ cm}} = \frac{1}{3\,400\,000}$$

Por lo tanto, la escala a la que está dibujado el mapa es **1:3 400 000**.

17. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



La imagen muestra una escala gráfica utilizada para medir distancias en un mapa. La escala está dividida en cuatro segmentos, cada uno representando 3 kilómetros, con colores alternos (blanco y verde). La longitud total de la escala representa 12 kilómetros.

Cada centímetro representa 3 km = 300000 cm, luego es 1:300000;

21 cm serán $21 \cdot 300\,000 = 6\,300\,000 \text{ cm}$ pasados a km: $6\,300\,000 / 100\,000 = 63 \text{ km}$.

Por lo tanto, la distancia en la realidad para 21 cm en el mapa es de **63 km**.

18. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

1) Para el tamaño en el dibujo de 24 cm largo y 5 cm de ancho con escala 1:25000:

- $\text{Tamaño real} = \text{Tamaño en el dibujo} \cdot \text{Escala}$
- $\text{Largo real} = 24 \text{ cm} \cdot 25000 = 600\,000 \text{ cm} = 6 \text{ km}$
- $\text{Ancho real} = 5 \text{ cm} \cdot 25000 = 125\,000 \text{ cm} = 1.25 \text{ km}$

2) Para el tamaño en el dibujo de 6 cm con el tamaño real de 15 km:

- $\text{Escala} = \frac{\text{Tamaño real}}{\text{Tamaño en el dibujo}}$
- $\text{Escala} = \frac{15 \text{ km}}{6 \text{ cm}} = \frac{15 \cdot 1000 \cdot 100 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{1\,500\,000}{6} = 1:250000$

3) Para el tamaño real de 450 m con escala 1:30000:

- $\text{Tamaño en el dibujo} = \frac{\text{Tamaño real}}{\text{Escala}}$
- $\text{Tamaño en el dibujo} = \frac{450 \text{ m}}{30000} = \frac{450 \cdot 100 \text{ cm}}{30000} = 1.5 \text{ cm}$

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho	6 km largo y 1.25 km de ancho	1:25000
6 cm	15 km	1:250000
1.5 cm	450 m	1:30000

19. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7.5		3.6	
Magnitud B		12	0.18		10

Dado que la razón de proporcionalidad inversa es $A \cdot B = k$.

Usamos los datos conocidos para calcular k :

Para $A = 7.5$ y $B = 0.18$:

$$k = A \cdot B = 7.5 \cdot 12 = 90$$

Ahora, completamos la tabla usando $k = 90$:

1) Para $A = 4$:

$$B = \frac{k}{A} = \frac{90}{4} = 22.5$$

2) Para $B = 12$:

$$A = \frac{k}{B} = \frac{90}{12} = 7.5$$

3) Para $A = 3.6$:

$$B = \frac{k}{A} = \frac{90}{3.6} = 25$$

4) Para $B = 10$:

$$A = \frac{k}{B} = \frac{90}{10} = 9$$

Magnitud A	4	7.5	7.5	3.6	9
Magnitud B	22.5	12	0.18	25	10

20. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

Primero, convertimos 5 horas y 15 minutos en horas:

$$5 \text{ horas y } 15 \text{ minutos} = 5 + \frac{15}{60} = 5.25 \text{ horas}$$

Calculamos la distancia recorrida a 80 km/h en 5.25 horas:

$$\text{Distancia} = 80 \text{ km/h} \cdot 5.25 \text{ horas} = 420 \text{ km}$$

Ahora, determinamos la velocidad necesaria para recorrer 420 km en 4 horas:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} = \frac{420 \text{ km}}{4 \text{ horas}} = 105 \text{ km/h}$$

Por lo tanto, el automóvil debe llevar una velocidad de 105 km/h para recorrer la distancia en 4 horas.

21. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5.4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	18		9		10.8
B		0.03		2.7	

Dado que la razón de proporcionalidad inversa entre A y B es ($A \cdot B = 5.4$), podemos usar esta información para completar la tabla.

1) Para $A = 18$:

$$B = \frac{5.4}{A} = \frac{5.4}{18} = 0.3$$

2) Para $B = 0.03$:

$$A = \frac{5.4}{B} = \frac{5.4}{0.03} = 180$$

3) Para $A = 9$:

$$B = \frac{5.4}{A} = \frac{5.4}{9} = 0.6$$

4) Para $A = 10.8$:

$$B = \frac{5.4}{A} = \frac{5.4}{10.8} = 0.5$$

5) Para $B = 2.7$:

$$A = \frac{5.4}{B} = \frac{5.4}{2.7} = 2$$

A	18	180	9	0.5	10.8
B	0.3	0.03	0.6	2.7	2

22. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si el granjero vende 60 vacas,

a) ¿Cuántas semanas le durará el forraje?

Si el granjero vende 60 vacas:

Forraje para 240 vacas durante 9 semanas significa que la cantidad total de forraje es:

$$240 \text{ vacas} \cdot 9 \text{ semanas} = 2160 \text{ vaca} \cdot \text{semanas}$$

Si vende 60 vacas, quedan 180 vacas. Entonces, las semanas que durará el forraje son:

$$\text{Semanas} = \frac{2160 \text{ vaca} \cdot \text{semanas}}{180 \text{ vacas}} = 12 \text{ semanas}$$

b) ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas?

Si en lugar de vender, compra 30 vacas:

Entonces tendrá 270 vacas. Las semanas que durará el forraje son:

$$\text{Semanas} = \frac{2160 \text{ vaca} \cdot \text{semanas}}{270 \text{ vacas}} = 8 \text{ semanas}$$

c) ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?

Si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas:

Si rebaja la ración una cuarta parte, cada vaca consumiría un 75% de la ración original. Entonces, la cantidad de forraje necesario por vaca se reduce a un 75%. Por lo tanto, las semanas que durará el forraje son:

$$\text{Semanas} = \frac{9 \text{ semanas}}{0.75} = 12 \text{ semanas}$$

23. Con doce paquetes de 3.5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

Para resolver esto, primero calculamos la cantidad total de comida que se necesita diariamente:

$$\text{Cantidad total de comida} = 12 \text{ paquetes} \cdot 3.5 \text{ kg/paquete} = 42 \text{ kg}$$

Ahora, determinamos cuántos paquetes de 2 kg se necesitan para alcanzar los 42 kg:

$$\text{Número de paquetes} = \frac{42\text{kg}}{2\text{kg/paquete}} = 21 \text{ paquetes}$$

Por lo tanto, necesitaríamos **21 paquetes** de 2 kg para dar de comer a las mismas 80 gallinas diariamente.

24. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

Para determinar si las magnitudes A y B son directa o inversamente proporcionales, podemos calcular la constante de proporcionalidad para cada par de valores y ver si es constante.

1. Directamente proporcional: $(\frac{A}{B} = k)$
2. Inversamente proporcional: $(A \cdot B = k)$

Calculamos $(A \cdot B)$ para cada par de valores:

1. $24 \cdot 3 = 72$
2. $8 \cdot 9 = 72$
3. $0.4 \cdot 180 = 72$
4. $6 \cdot B = 72 \rightarrow B = 12$
5. $A \cdot 20 = 72 \rightarrow A = \frac{72}{20} = 3.6$
6. $50 \cdot B = 72 \rightarrow B = 1.44$

Vemos que $A \cdot B = 72$ es constante, por lo que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales.

A	24	8	0.4	6	3.6	50
B	3	9	180	12	20	1.44

25. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

Primero, calculamos la nueva duración de la jornada laboral al rebajar media hora diaria:

$$\text{Nueva jornada laboral} = 8 \text{ horas} - 0.5 \text{ horas} = 7.5 \text{ horas}$$

Ahora, determinamos la cantidad de trabajo total necesario en términos de operario·horas:

$$\text{Trabajo total} = 15 \text{ operarios} \cdot 8 \text{ horas} = 120 \text{ operario} \cdot \text{horas}$$

Finalmente, calculamos el número de operarios necesarios para realizar el mismo trabajo con la nueva jornada laboral:

$$\text{Número de operarios} = \left(\frac{120 \text{ operario} \cdot \text{horas}}{7.5 \text{ horas/operario}} \right) = 16 \text{ operarios}$$

Por lo tanto, serán necesarios 16 operarios para realizar el mismo trabajo si se rebaja la jornada en media hora diaria.

26. En un almacén se guardan reservas de comida para 80 personas durante 15 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 4 raciones diarias?

Primero, determinamos la cantidad total de raciones disponibles en el almacén:

$$\begin{aligned} \text{Cantidad total de raciones} &= 80 \text{ personas} \cdot 15 \text{ días} \cdot 3 \text{ raciones/persona/día} \\ \text{Cantidad total de raciones} &= 3600 \text{ raciones} \end{aligned}$$

Ahora, calculamos cuántas raciones necesitan 75 personas con 4 raciones diarias cada una por día:

$$\begin{aligned} \text{Raciones necesarias por día} &= 75 \text{ personas} \cdot 4 \text{ raciones/persona/día} \\ \text{Raciones necesarias por día} &= 300 \text{ raciones/día} \end{aligned}$$

Finalmente, determinamos cuántos días durarán las reservas de comida:

$$\text{Días que durará la comida} = \left(\frac{\text{Cantidad total de raciones}}{\text{Raciones necesarias por día}} \right)$$

$$\text{Días que durará la comida} = \left(\frac{3600 \text{ raciones}}{300 \text{ raciones/día}} \right) = 12 \text{ días}$$

Por lo tanto, la misma comida duraría **12 días** para 75 personas con 4 raciones diarias.

27. Diez operarios instalan 3 600 m de valla en 6 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 040 m de valla?

Primero, calculamos la cantidad de trabajo que 10 operarios realizan en un día:

$$\text{Trabajo diario (10 operarios)} = \frac{3\,600 \text{ m}}{6 \text{ días}} = 600 \text{ m/día}$$

Ahora, determinamos la cantidad de trabajo que realiza un operario en un día:

$$\text{Trabajo diario (1 operario)} = \frac{600 \text{ m}}{10 \text{ operarios}} = 60 \text{ m/día}$$

Luego, calculamos la cantidad de trabajo que 12 operarios realizan en un día:

$$\text{Trabajo diario (12 operarios)} = 60 \text{ m/día} \cdot 12 \text{ operarios} = 720 \text{ m/día}$$

Finalmente, calculamos cuántos días se necesitarán para instalar 5 040 m de valla con 12 operarios:

$$\text{Número de días} = \frac{5\,040 \text{ m}}{720 \text{ m/día}} = 7 \text{ días}$$

Por lo tanto, 12 operarios tardarán **7 días** en instalar 5 040 m de valla.

28. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

Para resolver esto, primero necesitamos calcular la suma total de los puntos conseguidos por los tres finalistas:

$$\text{Puntos totales} = 120 + 78 + 42 = 240 \text{ puntos}$$

Ahora, determinamos cuánto dinero corresponde a cada punto:

$$\text{Valor por punto} = \frac{168\,000 \text{ €}}{240 \text{ puntos}} = 700 \text{ €/punto}$$

Finalmente, calculamos cuánto recibirá cada finalista:

1. Finalista con 120 puntos:

$$120 \text{ puntos} \cdot 700 \text{ €/punto} = 84\,000 \text{ €}$$

2. Finalista con 78 puntos:

$$78 \text{ puntos} \cdot 700 \text{ €/punto} = 54\,600 \text{ €}$$

3. Finalista con 42 puntos:

$$42 \text{ puntos} \cdot 700 \text{ €/punto} = 29\,400 \text{ €}$$

29. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

Para repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140 y 120, primero sumamos las proporciones:

$$\text{Suma de proporciones} = 160 + 140 + 120 = 420$$

Ahora, calculamos el valor de cada unidad proporcional dividiendo la cantidad total (336) por la suma de las proporciones (420):

$$\text{Valor por unidad proporcional} = \frac{336}{420} = 0.8$$

Finalmente, calculamos las partes proporcionales multiplicando cada proporción por el valor de la unidad proporcional:

1. Parte proporcional de 160:

$$160 \cdot 0.8 = 128$$

2. Parte proporcional de 140:

$$140 \cdot 0.8 = 112$$

3. Parte proporcional de 120:

$$120 \cdot 0.8 = 96$$

Por lo tanto, al repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140 y 120, obtenemos: 128, 112 y 96 respectivamente.

30. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero, 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Para resolver este problema, primero necesitamos determinar la cantidad total de jornadas trabajadas por los tres operarios: $\text{Jornadas totales} = 22 + 16 + 14 = 52 \text{ jornadas}$

Ahora, calculamos el valor de una jornada dividiendo el pago total (3 120 €) por el número total de jornadas (52): $\text{Valor por jornada} = \left(\frac{3\,120 \text{ €}}{52 \text{ jornadas}} \right) = 60 \text{ €/jornada}$

Finalmente, calculamos cuánto recibirá cada operario:

1. El primer operario, que trabajó 22 jornadas:

$$22 \text{ jornadas} \cdot 60 \text{ €/jornada} = 1\,320 \text{ €}$$

2. El segundo operario, que trabajó 16 jornadas:

$$16 \text{ jornadas} \cdot 60 \text{ €/jornada} = 960 \text{ €}$$

3. El tercer operario, que trabajó 14 jornadas:

$$14 \text{ jornadas} \cdot 60 \text{ €/jornada} = 840 \text{ €}$$

31. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

Para repartir 4 350 € en partes inversamente proporcionales a 18, 30 y 45, primero determinamos la suma de las proporciones inversas:

La suma de las proporciones inversas es:

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}$$

Buscamos un denominador común para sumar estas fracciones. El mínimo común múltiplo de 18, 30 y 45 es 90. Reescribimos las fracciones con denominador común:

$$\frac{5}{90} + \frac{3}{90} + \frac{2}{90} = \frac{10}{90} ; \frac{4350}{10} = 435$$

Ahora, calculamos las cantidades inversamente proporcionales:

1. Para 18:

$$5 \cdot 435 = 2\,175$$

2. Para 30:

$$3 \cdot 435 = 1\,305$$

3. Para 45:

$$2 \cdot 435 = 870$$

Por lo tanto, los valores son:

1. Para 18: 2175

2. Para 30: 1 305

3. Para 45: 870

32. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

Solución 1:

Primero, calculamos el costo total del viaje:

$$\text{Costo total} = 157.5 \text{ €} + 20 \text{ €} = 177.5 \text{ €}$$

Luego, calculamos el total de kilómetros recorridos por todos los pasajeros:

$$\text{Kilómetros totales} = 3 + 5 + 7 + 8 + 12 = 35 \text{ km}$$

A continuación, determinamos el costo por kilómetro:

$$\text{Costo por kilómetro} = \frac{177.5 \text{ €}}{35 \text{ km}} = 5.07 \text{ €/km}$$

Finalmente, calculamos cuánto debe abonar cada pasajero según los kilómetros recorridos:

1. Pasajero que recorrió 3 km:

$$3 \text{ km} \cdot 5.07 \text{ €/km} = 15.21 \text{ €}$$

2. Pasajero que recorrió 5 km:

$$5 \text{ km} \cdot 5.07 \text{ €/km} = 25.35 \text{ €}$$

3. Pasajero que recorrió 7 km:

$$7 \text{ km} \cdot 5.07 \text{ €/km} = 35.49 \text{ €}$$

4. Pasajero que recorrió 8 km:

$$8 \text{ km} \cdot 5.07 \text{ €/km} = 40.56 \text{ €}$$

5. Pasajero que recorrió 12 km:

$$12 \text{ km} \cdot 5.07 \text{ €/km} = 60.84 \text{ €}$$

Por lo tanto, cada pasajero debe abonar las siguientes cantidades:

15.21 €, 25.35 €, 35.49 €, 40.56 € y 60.84 €.

Solución 2:

Como el suplemento nocturno es lineal, cada uno paga 4 € de suplemento.

Los 157.5 € salen a 4.5 €/km.

De esta manera pagan respectivamente:

$$13.5 + 4 = 17.5 \text{ €}; \quad 22.5 + 4 = 26.5 \text{ €}; \quad 31.5 + 4 = 35.5 \text{ €}; \quad 36 + 4 = 40 \text{ €}; \quad 54 + 4 = 58 \text{ €}.$$

Solución 3:

Como el suplemento nocturno es lineal, cada uno paga 4 € de suplemento.

El microbús recorre un total de 12 km y los viajeros van bajando cuando llegan a su destino.

El precio por kilómetro sale a 13.125 €.

Los primeros 3 km los pagan entre cinco. $13.125 : 5 = 2.625 \text{ €/km}$.

- El primer viajero paga $4 + 3 \cdot 2.625 \approx 11.88 \text{ €}$.

Los siguientes 2 km los pagan entre cuatro. $13.125 : 4 = 3.28125 \text{ €/km}$.

- El segundo viajero paga $4 + 3 \cdot 2.625 + 2 \cdot 3.28125 \approx 18.44 \text{ €}$.

Los siguientes 2 km los pagan entre tres. $13.125 : 3 = 4.375 \text{ €/km}$.

- El tercer viajero paga $4 + 3 \cdot 2.625 + 2 \cdot 3.28125 + 2 \cdot 4.345 \approx 27.19 \text{ €}$.

El siguiente km lo pagan entre dos. $13.125 : 2 = 6.5625 \text{ €/km}$.

- El cuarto viajero paga $4 + 3 \cdot 2.625 + 2 \cdot 3.28125 + 2 \cdot 4.345 + 6.5625 = 33.75 \text{ €}$.

Los últimos cuatro km los hace el quinto viajero solo.

- Tiene que pagar $4 + 3 \cdot 2.625 + 2 \cdot 3.28125 + 2 \cdot 4.345 + 6.5625 + 4 \cdot 13.125 = 86.25 \text{ €}$

De esta última forma sobra un céntimo. Se le puede dar de propina al conductor o guardar para cambiar los redondeos de otro viaje.

33. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

Para resolver este problema, primero necesitamos calcular la suma total de los grados de contaminación:

$$\text{Suma total de grados de contaminación} = 12 \% + 9 \% + 15 \% = 36 \%$$

Ahora, determinamos cuánto dinero corresponde a cada punto porcentual de contaminación:

$$\text{Valor por punto porcentual de contaminación} = \frac{2\,350\,000 \text{ €}}{36 \%} = 65\,277.78 \text{ €/punto\%}$$

Finalmente, calculamos cuánto recibirá cada empresa:

1. Empresa con un 12 % de contaminación:

$$12 \% \cdot 65\,277.78 \text{ €/punto} \% = 783\,333.33 \text{ €}$$

2. Empresa con un 9 % de contaminación:

$$9 \% \cdot 65\,277.78 \text{ €/punto} \% = 587\,500.00 \text{ €}$$

3. Empresa con un 15 % de contaminación:

$$15 \% \cdot 65\,277.78 \text{ €/punto} \% = 979\,166.67 \text{ €}$$

Por lo tanto, las tres empresas recibirán:

1. Empresa con un 12 % de contaminación: 783 333.33 €

2. Empresa con un 9 % de contaminación: 587 500.00 €

3. Empresa con un 15 % de contaminación: 979 166.67 €

34. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1.5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de anacardos a 18 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

Primero, calculamos el precio total de cada tipo de fruto seco:

1. Almendras: $3 \text{ kg} \cdot 14 \text{ €/kg} = 42 \text{ €}$

2. Nueces: $1.5 \text{ kg} \cdot 6 \text{ €/kg} = 9 \text{ €}$

3. Anacardos: $1.75 \text{ kg} \cdot 18 \text{ €/kg} = 31.5 \text{ €}$

Luego, sumamos los precios para obtener el precio total de la mezcla:

$$\text{Precio total de la mezcla} = 42 \text{ €} + 9 \text{ €} + 31.5 \text{ €} = 82.5 \text{ €}$$

Calculamos el peso total de la mezcla:

$$\text{Peso total de la mezcla} = 3 \text{ kg} + 1.5 \text{ kg} + 1.75 \text{ kg} = 6.25 \text{ kg}$$

Ahora, determinamos el precio por kilogramo de la mezcla:

$$\text{Precio por kilogramo} = \frac{82.5 \text{ €}}{6.25 \text{ kg}} = 13.2 \text{ €/kg}$$

Finalmente, calculamos el precio del paquete de 250 g (0.25 kg) de la mezcla:

$$\text{Precio del paquete de 250 g: } 0.25 \text{ kg} \cdot 13.2 \text{ €/kg} = 3.3 \text{ €}$$

Por lo tanto, el precio final del paquete de 250 g de la mezcla de frutos secos es 3.3 €.

35. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

Primero, calculamos el costo total de cada tipo de zumo:

1. Zumo de piña: $8 \text{ l} \cdot 2.5 \text{ €/l} = 20 \text{ €}$

2. Zumo de naranja: $15 \text{ l} \cdot 1.6 \text{ €/l} = 24 \text{ €}$

3. Zumo de uva: $5 \text{ l} \cdot 1.2 \text{ €/l} = 6 \text{ €}$

Luego, sumamos los precios para obtener el costo total de la mezcla:

$$\text{Costo total de la mezcla} = 20 \text{ €} + 24 \text{ €} + 6 \text{ €} = 50 \text{ €}$$

Calculamos el volumen total de la mezcla:

$$\text{Volumen total de la mezcla} = 8 \text{ l} + 15 \text{ l} + 5 \text{ l} = 28 \text{ l}$$

Ahora, determinamos el precio por litro de la mezcla:

$$\text{Precio por litro} = \frac{50 \text{ €}}{28 \text{ l}} \approx 1.79 \text{ €/l}$$

Finalmente, calculamos el precio de una botella de litro y medio aplicando un aumento del 40 % sobre el precio de coste:

1. Precio de coste de una botella de litro y medio:

$$1.5 \text{ l} \cdot 1.79 \text{ €/l} = 2.685 \text{ €}$$

2. Aumento del 40 % sobre el precio de coste:

$$2.685 \text{ €} \cdot 1.40 = 3.759 \text{ €}$$

Por lo tanto, una botella de litro y medio debe venderse a **3.76 €** si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste.

36. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4.2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

Primero, calculamos el costo total de cada tipo de producto:

$$1. \text{ Producto X: } 5 \text{ kg} \cdot 18 \text{ €/kg} = 90 \text{ €}$$

$$2. \text{ Producto Y: } 19 \text{ kg} \cdot 4.2 \text{ €/kg} = 79.8 \text{ €}$$

$$3. \text{ Producto Z: } 12 \text{ kg} \cdot 8 \text{ €/kg} = 96 \text{ €}$$

Luego, sumamos los precios para obtener el costo total de la mezcla:

$$\text{Costo total de la mezcla} = 90 \text{ €} + 79.8 \text{ €} + 96 \text{ €} = 265.8 \text{ €}$$

Calculamos el peso total de la mezcla:

$$\text{Peso total de la mezcla} = 5 \text{ kg} + 19 \text{ kg} + 12 \text{ kg} = 36 \text{ kg}$$

Ahora, determinamos el precio por kilogramo de la mezcla:

$$\text{Precio por kilogramo} = \frac{265.8 \text{ €}}{36 \text{ kg}} \approx 7.38 \text{ €/kg}$$

Por lo tanto, el precio del kilogramo de la mezcla es **7.38 €**.

37. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280.5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

La "ley" de un lingote de oro se refiere a la pureza del oro en términos de porcentaje de oro puro en el lingote.

Para calcular la ley del lingote:

1. Dividimos el peso del oro puro entre el peso total del lingote:

$$\text{Ley} = \left(\frac{280.5 \text{ g}}{340 \text{ g}} \right) \cdot 100\%$$

2. Calculamos el porcentaje:

$$Ley = \left(\frac{280.5}{340} \right) \cdot 100\% \approx 82.5\%$$

Por lo tanto, la ley del lingote de oro es aproximadamente 82.5%.

38. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya que se ha formado con una aleación de 60 g de 0.950 de ley y 20 g de 0.750 de ley?

Para calcular la cantidad de oro puro en la joya, primero calculamos la cantidad de oro puro en cada aleación y luego sumamos estos valores.

1. Calculamos la cantidad de oro puro en la aleación de 60 g con ley 0.950:

$$\text{Oro puro} = 60 \text{ g} \cdot 0.950 = 57 \text{ g}$$

2. Calculamos la cantidad de oro puro en la aleación de 20 g con ley 0.750:

$$\text{Oro puro} = 20 \text{ g} \cdot 0.750 = 15 \text{ g}$$

Finalmente, sumamos las cantidades de oro puro:

$$\text{Oro puro total} = 57 \text{ g} + 15 \text{ g} = 72 \text{ g}$$

Por lo tanto, la joya contiene 72 gramos de oro puro.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0.75		4.5	100
B		15	6		

- a) 160; 0.3; 90; 2000
- b) 16, 3, 90, 200
- c) 160, 3, 9, 20

Para que A y B sean directamente proporcionales, utilizamos la relación $\frac{A}{B} = k$ donde k es una constante.

Primero, determinamos la constante k utilizando los valores conocidos:

$$\text{Para } A = 0.75 \text{ y } B = 15: \quad k = \frac{0.75}{15} = 0.05$$

Ahora utilizamos la constante k para calcular los valores faltantes de A o B :

1. Para $A = 8$:

$$B = \frac{A}{k} = \frac{8}{0.05} = 160$$

2. Para $B = 6$:

$$A = B \cdot k = 6 \cdot 0.05 = 0.3$$

3. Para $A = 4.5$:

$$B = \frac{A}{k} = \frac{4.5}{0.05} = 90$$

4. Para $A = 100$:

$$B = \frac{A}{k} = \frac{100}{0.05} = 2000$$

a) 160; 0.3; 90; 2000

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:

- a) 1 850 €
- b) 1 875 €
- c) 1 687.5 €

$$\frac{450 \text{ €}}{8 \text{ meses}} \cdot 30 \text{ meses} = 1\,687.5 \text{ €}$$

c) 1 687.5 €

3. Un artículo que costaba 1 600 € se ha rebajado a 1 400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

- a) 12.5 %
- b) 14 %
- c) 15.625 %
- d) 16.25 %

$$\frac{1\,600 \text{ €} - 1\,400 \text{ €}}{1\,600 \text{ €}} \cdot 100 \% = 12.5 \%$$

a) 12.5 %

4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

- a) 440 botellas
- b) 280 botellas
- c) 480 botellas
- d) 360 botellas

$$\frac{360 \text{ litros}}{0.75 \text{ litros/botella}} = 480 \text{ botellas}$$

c) 480 botellas

5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:

- a) 16 t y 5 t
- b) 12.8 t y 16 t
- c) 16 t y 12.8 t
- d) 16 t y 11 t

Relación entre toneladas y área en la primera parcela:

$$\frac{24 \text{ t}}{15 \text{ ha}} = 1.6 \text{ t/ha}$$

Segunda parcela:

$$10 \text{ ha} \cdot 1.6 \text{ t/ha} = 16 \text{ t}$$

Tercera parcela:

$$8 \text{ ha} \cdot 1.6 \text{ t/ha} = 12.8 \text{ t}$$

c) 16 t y 12.8 t

6. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 3.4 cm equivalen a 1.02 km es:
- a) 1:34000
 - b) 1:3000
 - c) 1:30000
 - d) 1:300

$$\text{Escala} = \frac{1.02 \text{ km}}{3.4 \text{ cm}} = \frac{102\,000 \text{ cm}}{3.4 \text{ cm}} = 1:30\,000$$

c) 1:30 000

7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
- a) 3 rollos
 - b) 5 rollos
 - c) 4 rollos
 - d) 2 rollos

Primero, determinamos la cantidad de libros que se pueden forrar con un rollo de papel de 5 m de largo:

$$\frac{32 \text{ libros}}{4 \text{ rollos}} = 8 \text{ libros/rollo}$$

Necesitamos calcular la relación entre las longitudes.

Un rollo de 2 m cubre:

$$\frac{2 \text{ m}}{5 \text{ m}} = \frac{2}{5}$$

Dado que 8 libros/rollo es para un rollo de 5 m, la cantidad de libros que un rollo de 2 m puede forrar es:

$$8 \text{ libros/rollo} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{5} \text{ libros/rollo} = 3.2 \text{ libros/rollo}$$

Por lo tanto, para forrar 16 libros con rollos de 2 m, necesitamos:

$$\frac{16 \text{ libros}}{3.2 \text{ libros/rollo}} = 5 \text{ rollos}$$

b) 5 rollos

8. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1.2 €/kg, 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

- a) 1.12 €
- b) 0.98 €
- c) 1.03 €
- d) 1.05 €

$$\text{Costo total} = 5 \text{ kg} \cdot 1.2 \text{ €/kg} + 2.8 \text{ kg} \cdot 0.85 \text{ €/kg} + 4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ €/kg}$$

$$\text{Costo total} = 6 \text{ €} + 2.38 \text{ €} + 4 \text{ €} = 12.38 \text{ €}$$

$$\text{Peso total} = 5 \text{ kg} + 2.8 \text{ kg} + 4 \text{ kg} = 11.8 \text{ kg}$$

$$\text{Precio por kg} = \frac{12.38 \text{ €}}{11.8 \text{ kg}} \approx 1.05 \text{ €/kg}$$

d) 1.05 €/kg

9. La ley de una aleación es 0.855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

- a) 259.92 g
- b) 255.4 g
- c) 248.9 g
- d) 306 g

$$\text{Cantidad de metal precioso} = 304 \text{ g} \cdot 0.855 = 259.92 \text{ g}$$

a) 259.92 g

3º ESO

Capítulo 7: Educación financiera Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.1. CÁLCULO DE INTERÉS SIMPLE

1. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.

Fórmula general para días: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$

Sustituimos: $I = \frac{10000 \cdot 3 \cdot 750}{36000} = 625 \text{ €}$

2. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

Fórmula general para calcular el capital: $C = \frac{I \cdot 100}{r \cdot t}$

Sustituimos: $C = \frac{777,6 \cdot 100}{1,8 \cdot 6} = 7\,200 \text{ €}$

El capital inicial necesario es 7 200 €.

3. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 100 000 euros al 2% durante un año.

Primero, calculamos el interés simple: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ $I = \frac{100\,000 \cdot 2 \cdot 1}{100} = 2\,000 \text{ €}$

Luego, calculamos el capital final sumando el interés al capital inicial:

$C_f = C_i + I$ $C_f = 100\,000 + 2\,000 = 102\,000 \text{ €}$

El capital final es de 102 000 €.

4. Calcula el interés simple de un capital de 20 000€ invertidos durante 6 meses al 5% anual.

Fórmula general para meses: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ $I = \frac{20\,000 \cdot 5 \cdot 6}{1200} = 500 \text{ €}$

El interés generado es de 500 €.

5. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 80 000 euros al 8% durante 5 meses.

Primero, calculamos el interés simple: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ $I = \frac{80000 \cdot 8 \cdot 5}{1200} = 2666,67 \text{ €}$

Luego, calculamos el capital final sumando el interés al capital inicial:

$C_f = C_i + I$ $C_f = 80000 + 2666,67 = 82666,67 \text{ €}$

El capital final es de 82 666,67 €.

1.2. CÁLCULO DE INTERÉS COMPUESTO

6. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

La fórmula utilizada es la del interés compuesto: $C_f = C_i \cdot (1 + r)^n$

Sustituimos los valores en la fórmula:

$C_f = 39\,500 \cdot (1 + 0,05)^{12}$ $C_f = 39\,500 \cdot (1,05)^{12}$

$$C_f \approx 39\,500 \cdot 1,795856 \quad C_f \approx 70\,959,32 \text{ €}$$

El capital final obtenido es aproximadamente 70 959,32 €.

7. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.

Problema:

El capital inicial de un depósito asciende a 39500 €. El tanto aplicado es el 5% a interés compuesto durante 12 años. Calcula el capital final.

Capital inicial:	39.500
Tanto por ciento o rédito:	5
Número de años:	12

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
39500,00	1	0,05	1,05	41475,00	1975,00
41475,00	2	0,05	1,1025	43548,75	4048,75
43548,75	3	0,05	1,157625	45726,19	6226,19
45726,19	4	0,05	1,2150625	48012,50	8512,50
48012,50	5	0,05	1,276281563	50413,12	10913,12
50413,12	6	0,05	1,407100423	52933,78	13433,78
52933,78	7	0,05	1,628894627	55580,47	16080,47
55580,47	8	0,05	1,979931599	58359,49	18859,49
58359,49	9	0,05	2,526950195	61277,46	21777,46
61277,46	10	0,05	3,555672688	64341,34	24841,34
64341,34	11	0,05	5,791816136	67558,40	28058,40
67558,40	12	0,05	11,46739979	70936,32	31436,32

8. Teniendo un capital inicial de 50 000€ y un capital final de 52 020 €, ¿cuántos años deben pasar para alcanzar dicho capital final al 2%?

Fórmula para calcular el tiempo:
$$n = \frac{\ln\left(\frac{C_f}{C_i}\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{52.020}{50.000}\right)}{\ln(1+0.02)} \quad n = \frac{\ln(1.0404)}{\ln(1.02)} \quad n \approx \frac{0.039567}{0.019803} \quad n \approx 2 \text{ años}$$

El tiempo necesario es aproximadamente 2 años.

9. Se depositan 2 500 en un banco que reconoce una tasa de interés del 15% anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 2 años?

Fórmula para capitalización diaria:
$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot t}$$

Donde:

- r es la tasa de interés anual expresada como decimal.
- k es el número de periodos de capitalización en un año (365 días).
- t es el tiempo en años.

Sustituimos:

$$C_f = 2\,500 \cdot \left(1 + \frac{0,15}{365}\right)^{365 \cdot 2} \quad C_f = 2\,500 \cdot (1 + 0,0004109589)^{730}$$

$$C_f = 2\,500 \cdot (1,0004109589)^{730} \quad C_f \approx 2\,500 \cdot 1,34935$$

$$C_f \approx 3\,373,38 \text{ €}$$

El capital final acumulado será aproximadamente 3 373,38 €.

1.3. EQUIVALENCIA FINANCIERA

10. Un cliente tiene con su banco cuatro deudas con los siguientes importes: 1 000€, 1 500€, 3 000€ y

3 200€, que vencen respectivamente en 2, 3, 5 y 6 años. El banco le propone sustituir la deuda por una sola a pagar a los 4 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 5% compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.

Para resolver este ejercicio, necesitamos calcular el valor futuro (o presente ajustado) de cada una de las cuatro deudas al momento propuesto por el banco, que es 4 años, usando el interés compuesto con una tasa del 5% anual. Esto implica llevar cada deuda a su valor equivalente en $t = 4$ años, ya sea acumulando intereses hacia adelante (si vence antes) o descontando hacia atrás (si vence después). La fórmula del interés compuesto es: $C_f = C_i \cdot (1 + r)^n$

Donde (C_f) es el capital final, (C_i) es el capital inicial, (r) es la tasa de interés (0,05), y (n) es el número de años de ajuste (puede ser positivo o negativo según el caso). Vamos a calcularlo para cada deuda.

Deuda 1: 1 000 €, vence en 2 años

Esta deuda vence en 2 años, pero el pago se hará en 4 años, así que debemos acumular el valor de la deuda desde el año 2 al año 4, es decir, 2 años hacia el futuro ($4 - 2 = 2$).

$$C_f = 1000 \cdot (1 + 0,05)^2 \quad C_f = 1000 \cdot 1,1025 = 1102,5$$

Por lo tanto, el valor de esta deuda en 4 años es 1102,5 €.

Deuda 2: 1 500 €, vence en 3 años

Esta deuda vence en 3 años, y el pago es en 4 años, por lo que ajustamos 1 año hacia el futuro ($4 - 3 = 1$).

$$C_f = 1500 \cdot (1 + 0,05)^1 \quad C_f = 1500 \cdot 1,05 = 1575$$

El valor de esta deuda en 4 años es 1575 €.

Deuda 3: 3 000 €, vence en 5 años

Esta deuda vence en 5 años, pero el pago es en 4 años, así que ajustamos 1 año hacia atrás ($4 - 5 = -1$), lo que implica un descuento.

$$C_f = 3000 \cdot (1 + 0,05)^{-1} \quad (1,05)^{-1} = \frac{1}{1,05} \approx 0,952380952$$

$$C_f = 3000 \cdot 0,952380952 \approx 2857,14$$

El valor de esta deuda en 4 años es aproximadamente 2857,14 €.

Deuda 4: 3 200 €, vence en 6 años

Esta deuda vence en 6 años, y el pago es en 4 años, por lo que ajustamos 2 años hacia atrás ($4 - 6 = -2$), aplicando descuento.

$$C_f = 3200 \cdot (1 + 0,05)^{-2} \quad (1,05)^{-2} = \frac{1}{1,05^2} = \frac{1}{1,1025} \approx 0,907029478$$

$$C_f = 3200 \cdot 0,907029478 \approx 2902,49$$

El valor de esta deuda en 4 años es aproximadamente 2902,49 €.

Total a pagar en 4 años

Sumamos los valores ajustados de todas las deudas:

$$1102,5 + 1575 + 2857,14 + 2902,49 = 8437,13$$

El importe total que el cliente deberá pagar en 4 años es 8437,13 €.

1.4. AMORTIZACIÓN MEDIANTE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES

11. Un banco concede un préstamo por 10 000€ para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3%. Calcula, usando Excel:

- Importe de la cuota de amortización constante. 2 000
- Capital pendiente de amortización al principio del segundo año 8 000
- Anualidad del tercer año 2 180
- Capital amortizado en los cuatro primeros años 8 000
- Cuota de interés del segundo año 240

Un banco concede un préstamo por 10 000€ para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3%. Calcula:					
Capital inicial:	10.000				
Tanto por ciento o rédito:	0,03				
Número de años:	5				
Cuota de amortización A	2000				
Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZAT	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	10.000
1	2300	300	2000	2000	8.000
2	2240	240	2000	4000	6.000
3	2180	180	2000	6000	4.000
4	2120	120	2000	8000	2.000
5	2060	60	2000	10000	0
	a	2000			
	b	8.000			
	c	2180			
	d	8000			
	e	240			

12. Un cliente necesita 155.400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5%. Proporciona al cliente su hoja de amortización.

- Capital inicial (C_0): 155 400 €
- Número de años (n): 20
- Tasa de interés anual (i): 4,5% = 0,045
- Cuota de amortización constante: $A = \frac{C_0}{n} = \frac{155400}{20} = 7770$
La cuota de amortización constante es 7770 € por año.

- Anualidad (a_k): Es la cantidad total para pagar cada año, que incluye la cuota de amortización más los intereses del período.
- Intereses (I_k): Se calculan como ($I_k = C_{k-1} \cdot 0,045$), disminuyendo cada año porque el capital pendiente se reduce.

- Cuota de amortización (A): Siempre 7770 €, ya que es constante.
- Capital amortizado (M_k): Es el acumulado de las cuotas de amortización hasta el año (k), calculado como ($M_k = 7770 \cdot k$).
- Capital pendiente (C_k): Es el capital restante tras cada pago, calculado como ($C_k = C_{k-1} - 7770$).

Un cliente necesita 155.400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5%. Proporciona al cliente su hoja de amortización.

Capital inicial:	155.400				
Tanto por ciento o rédito:	0,045				
Número de años:	20				
Cuota de amortización A	7770				
Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZAT	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	155.400
1	14763	6993	7770	7770	147.630
2	14413,35	6643,35	7770	15540	139.860
3	14063,7	6293,7	7770	23310	132.090
4	13714,05	5944,05	7770	31080	124.320
5	13364,4	5594,4	7770	38850	116.550
6	13014,75	5244,75	7770	46620	108.780
7	12665,1	4895,1	7770	54390	101.010
8	12315,45	4545,45	7770	62160	93.240
9	11965,8	4195,8	7770	69930	85.470
10	11616,15	3846,15	7770	77700	77.700
11	11266,5	3496,5	7770	85470	69.930
12	10916,85	3146,85	7770	93240	62.160
13	10567,2	2797,2	7770	101010	54.390
14	10217,55	2447,55	7770	108780	46.620
15	9867,9	2097,9	7770	116550	38.850
16	9518,25	1748,25	7770	124320	31.080
17	9168,6	1398,6	7770	132090	23.310
18	8818,95	1048,95	7770	139860	15.540
19	8469,3	699,3	7770	147630	7.770
20	8119,65	349,65	7770	155400	0

El préstamo queda completamente amortizado en el año 20, con un total pagado de 235350 €, de los cuales 155400 € son el capital inicial y 79950 € son intereses.

13. Una caja de ahorros concede un préstamo a una familia para comprar un coche deportivo. El capital inicial prestado asciende a 86.432 euros a un tipo de interés del 2,25% anual durante 10 años. Las cuotas de amortización son constantes. Selecciona la respuesta correcta en cada apartado:

a. Capital pendiente al final del año 10

- a) 43 216 b) 0 c) 86 432

b. La cuota de intereses del año 5

- a) 1 166,832 b) 10 587,92 c) 972,36

c. La anualidad año 6

- a) 9 032,144 b) 9 421,088 c) 9 615,56

d. La cuota de amortización del año 8

- a) 8 643 b) 8 643,2 c) 5 664

e. Capital pendiente al principio del año 3

- a) 86 432 b) 77 789 c) 69 146

Datos iniciales

- Capital inicial (C_0): 86.432 euros
- Tasa de interés anual (i): 2,25% = 0,0225
- Plazo (n): 10 años
- Cuota de amortización constante (A): En este método, el capital se amortiza en partes iguales cada año. $A = \frac{C_0}{n} = \frac{86\,432}{10} = 8\,643,2$ euros

Cada año se paga esta cuota de amortización más los intereses correspondientes al capital pendiente.

a) Capital pendiente al final del año 10

El capital pendiente al final del año (k) (C_k) es el capital inicial menos el total amortizado hasta ese momento: $C_k = C_0 - M_k$ donde ($M_k = k \cdot A$).

Para el año 10 ($k = 10$):

$$M_{10} = 10 \cdot 8\,643,2 = 86\,432 \text{ euros} \quad C_{10} = 86\,432 - 86\,432 = 0 \text{ euros}$$

Como el préstamo se paga completamente en 10 años, el capital pendiente es cero.

b) La cuota de intereses del año 5

La cuota de intereses del año (k) (I_k) se calcula sobre el capital pendiente al inicio de ese año:

$$I_k = C_{k-1} \cdot i$$

Primero, calculamos el capital pendiente al final del año 4 (C_4), que es el capital al inicio del año 5: $M_4 = 4 \cdot 8\,643,2 = 34\,572,8$ euros $C_4 = 86\,432 - 34\,572,8 = 51\,859,2$ euros

Luego, los intereses del año 5:

$$I_5 = 51\,859,2 \cdot 0,0225 = 1\,166,832 \text{ euros}$$

c) La anualidad año 6

La anualidad (a_k) es la suma de la cuota de amortización y los intereses del año: $a_k = A + I_k$

Primero, calculamos los intereses del año 6 (I_6):

Capital pendiente al final del año 5 (C_5):

$$M_5 = 5 \cdot 8\,643,2 = 43\,216 \text{ euros} \quad C_5 = 86\,432 - 43\,216 = 43\,216 \text{ euros}$$

$$\text{Intereses: } I_6 = 43\,216 \cdot 0,0225 = 972,36 \text{ euros}$$

$$\text{Entonces: } a_6 = 8\,643,2 + 972,36 = 9\,615,56 \text{ euros}$$

d) La cuota de amortización del año 8

La cuota de amortización es constante cada año: $A_8 = A = 8.643,2$ euros

e) Capital pendiente al principio del año 3

El capital al inicio del año 3 es el pendiente al final del año 2 (C_2):

$$M_2 = 2 \cdot 8\,643,2 = 17\,286,4 \text{ euros}$$

$$C_2 = 86\,432 - 17\,286,4 = 69\,145,6 \text{ euros} \approx 69\,146 \text{ euros}$$

a: b) 0; b: a) 1 166,832; c: c) 9 615,56; d: b) 8 643,2; e: c) 69 146

3.1. COMISIONES BANCARIAS

14. Señala qué bancos son los que no cobran comisiones o las cobran muy reducidas y determina también un par de ejemplos de bancos que cobren altas comisiones.

Los bancos digitales no suelen cobrar comisiones. Ejemplo: Evobanco, Triodos, ING.

Los grandes bancos (CaixaBank, Santander...) son los que más cobran.

15. Relaciona cada comisión con su definición:

Comisión de mantenimiento	Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad
Comisión de descubierto	Aplicada por disponer de una tarjeta
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta
Comisión por uso de oficinas	Aplicada por el banco por estar en números rojos
Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas.	Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias
Comisión por transferencias	Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta
Comisión de administración.	Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta

Comisión de mantenimiento	Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta
Comisión de administración	Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento
Comisión por transferencias	Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta
Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas	Aplicada por disponer de una tarjeta
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta
Comisión de descubierto	Aplicada por el banco por estar en números rojos
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad
Comisión por uso de oficinas	Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias

3.2.MEDIOS DE PAGO CON COMISIONES

16. La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:

- Si factura menos de 2 500€ al mes, cobrará 3.4% + 0.35€ por cada transacción.
- Si factura entre 2 500€ y 10 000€ al mes, cobrará 2.9% + 0.35€ por cada transacción.
- Si factura entre 2 500€ y 10 000€ al mes, cobrará 2.7% + 0.35€ por cada transacción.
- Más de 50 000€ al mes, cobrará 2.4% + 0.35€ por cada transacción.

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a PayPal de comisiones:

- a. Factura 500€ realizando 2 transacciones.
- b. Factura 3 000€ realizando 10 transacciones.
- c. Factura 8 500€ realizando 500 transacciones.
- d. Factura 76 000€ realizando 600 transacciones.

La fórmula general para calcular las comisiones de PayPal es:

$$\text{Comisión total} = (\text{Factura} \cdot \text{Porcentaje de comisión}) + (\text{Número de transacciones} \cdot 0.35)$$

Donde el porcentaje de comisión depende del rango de facturación.

a) Factura 500 € realizando 2 transacciones.

- El rango de facturación es menos de 2 500 €, la comisión es 3,4%.
- Cálculo del porcentaje: $\text{Porcentaje} = 500 \cdot 0.034 = 17€$
- Cálculo del coste por transacciones: $\text{Coste transacciones} = 2 \cdot 0.35 = 0.70€$
- Comisión total: $\text{Total} = 17 + 0.70 = 17.70€$

b) Factura 3 000 € realizando 10 transacciones.

- El rango de facturación es entre 2 500 € y 10 000 €, la comisión es 2,9%.
- Cálculo del porcentaje: $\text{Porcentaje} = 3000 \cdot 0.029 = 87€$
- Cálculo del coste por transacciones: $\text{Coste transacciones} = 10 \cdot 0.35 = 3.50€$
- Comisión total: $\text{Total} = 87 + 3.50 = 90.50€$

c) Factura 8 500 € realizando 500 transacciones.

- El rango de facturación es entre 2 500 € y 10 000 €, la comisión es 2,7%.
- Cálculo del porcentaje: $\text{Porcentaje} = 8500 \cdot 0.027 = 229.50€$
- Cálculo del coste por transacciones: $\text{Coste transacciones} = 500 \cdot 0.35 = 175€$
- Comisión total: $\text{Total} = 229.50 + 175 = 404.50€$

d) Factura 76 000 € realizando 600 transacciones.

- El rango de facturación es más de 50 000 €, la comisión es 2,4%.
- Cálculo del porcentaje: $\text{Porcentaje} = 76000 \cdot 0.024 = 1824€$
- Cálculo del coste por transacciones: $\text{Coste transacciones} = 600 \cdot 0.35 = 210€$
- Comisión total: $\text{Total} = 1824 + 210 = 2034€$

17. Una chica desea realizar varias transferencias desde su banca online. La primera de 30€ a su madre, no le urge que le llegue el dinero. La segunda a su casera de 365€, esta debe llegarle en el mismo día. La tercera para pagar la letra de su coche a su financiera de EE. UU de 250€ que debe

llegar a la financiera en menos de 24 horas. Su banco cobra comisiones por realizar transferencias urgentes de 2.5% a nivel nacional y 4% a nivel extranjero. Calcula:

a. El importe total de comisiones que va a pagar.

b. El importe total que va a pagar.

a) El importe total de comisiones que va a pagar.

La primera transferencia no es urgente (30 € a su madre), por lo que no genera comisión.

$$\text{Comisión} = 0\text{€}$$

La segunda transferencia es urgente (365 € a su casera). La comisión es del 2,5%:

$$\text{Comisión} = 365 \cdot 0.025 = 9.125\text{€}$$

La tercera transferencia es urgente y al extranjero (250 € a su financiera en EE.UU.). La comisión es del 4%:

$$\text{Comisión} = 250 \cdot 0.04 = 10\text{€}$$

Total de comisiones:

$$\text{Total comisiones} = 0 + 9.125 + 10 = 19.125\text{€}$$

b) El importe total que va a pagar.

Suma de los importes de las transferencias:

$$\text{Importe total transferencias} = 30 + 365 + 250 = 645\text{€}$$

Total pagado, incluyendo comisiones:

$$\text{Total pagado} = 645 + 19.125 = 664.125\text{€}$$

3.3. BANCA ÉTICA O ALTERNATIVA

18. ¿Crees que tiene futuro un negocio como éste en el sistema financiero actual?

Sí, la banca ética o alternativa tiene **futuro en el sistema financiero actual**, especialmente en un contexto donde la sostenibilidad y la responsabilidad social crecen día a día.

19. Busca en Internet algún ejemplo actual de entidades que desarrollan este tipo de banca y escríbelo. Coméntalo en clase con tus compañeros.

ING esta empresa ofrece servicios financieros completamente digitales, como cuentas corrientes, transferencias internacionales, intercambio de divisas y tarjetas prepago, todo a través de una aplicación móvil.

Otro ejemplo destacado es **TRIADOS**, un banco digital que ofrece servicios bancarios básicos, como cuentas corrientes, tarjetas de débito y opciones de ahorro, todo gestionado desde una app.

En América Latina, **Nubank** es un referente importante. Originaria de Brasil, esta neobanco ofrece cuentas digitales, tarjetas de crédito sin anualidad y otros productos financieros, destacándose por su enfoque en la inclusión financiera y la experiencia del usuario.

4.1. CAMBIO DE DIVISAS

20. Si el euro se deprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España? ¿podrán comprar más o menos en nuestro país? Si el tipo de cambio dólar/euro disminuye desde 1,35 hasta 1,05, ¿qué significa para los europeos?

Cuando el euro se deprecia frente al dólar, tiene implicaciones importantes tanto a nivel económico como para el flujo de turismo y comercio. Analicemos cada parte de la pregunta:

1. Importancia de la depreciación del euro frente al dólar:

La depreciación del euro significa que, por cada euro, se obtiene menos dólares. Esto afecta a:

- o Las importaciones: Europa necesita pagar más en euros para adquirir bienes y servicios estadounidenses, aumentando los costos de importación.
- o Las exportaciones: Los productos europeos se vuelven más baratos para los compradores internacionales, lo que puede estimular las exportaciones de la Eurozona y mejorar su balanza comercial.
- o La deuda en dólares: Si una empresa o un país de la Eurozona tiene deuda en dólares, el costo de pagar esa deuda aumenta.

2. Impacto en los turistas extranjeros en España:

- o Para los turistas que visitan España desde países con monedas fuertes (como el dólar), una depreciación del euro hace que su dinero tenga más poder adquisitivo. Esto significa que los turistas pueden gastar más en bienes, servicios y experiencias en el país, lo cual beneficia al sector turístico español.

3. Capacidad de compra de los turistas en España:

- o Podrán comprar **más**, ya que por la misma cantidad de dólares (u otras monedas fuertes) obtendrán una mayor cantidad de euros para gastar en España. Esto puede ser positivo para los negocios locales y la economía del turismo en general.

4. Cambio del tipo dólar/euro de 1,35 a 1,05:

- o Si el tipo de cambio disminuye de 1,35 \$/€ a 1,05 \$/€, significa que el euro ha perdido valor frente al dólar. Antes, 1 euro equivalía a 1,35 dólares; ahora, solo equivale a 1,05 dólares. Para los europeos, esto implica:
 - Mayor costo de productos importados de Estados Unidos.
 - Viajar a Estados Unidos se vuelve más caro.
 - Los europeos necesitan gastar más euros para obtener la misma cantidad de dólares.

En resumen, la depreciación del euro puede ser beneficiosa para las exportaciones y el turismo que recibe España, pero representa desafíos para las importaciones y los europeos que necesitan dólares.

21. Si el euro se aprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España? Si el tipo de cambio dólar/euro pasa de 1,35 hasta 1,50, ¿qué significa para los europeos?

1. ¿Es importante si el euro se aprecia frente al dólar?

Sí, tiene gran relevancia porque afecta diversos sectores económicos:

- **Importaciones más baratas:** Para los europeos, comprar productos o servicios en dólares será más económico, ya que con un mismo euro pueden adquirir más dólares. Esto puede beneficiar a empresas que importan bienes desde Estados Unidos.

- **Exportaciones menos competitivas:** Los productos europeos se vuelven más caros en el mercado estadounidense, lo cual podría reducir la demanda y afectar negativamente a las empresas exportadoras.

2. ¿Qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España?

Si el euro se aprecia, los turistas provenientes de países con monedas más débiles (como el dólar) tendrán un menor poder adquisitivo en España. Esto significa que:

- Podrán cambiar su dinero por menos euros.
- Su capacidad de gasto dentro del país se reduce, lo que puede afectar al sector turístico español.

3. Si el tipo de cambio dólar/euro pasa de 1,35 a 1,50, ¿qué significa para los europeos?

Este cambio implica que el euro ha ganado valor frente al dólar. Por cada euro, ahora se obtienen 1,50 dólares en lugar de 1,35 dólares. Las implicaciones para los europeos son:

- **Viajar a Estados Unidos será más económico**, ya que necesitarán menos euros para obtener la misma cantidad de dólares.
- **Aumento del poder adquisitivo en dólares**, facilitando la compra de bienes y servicios estadounidenses.
- **Reducción de la competitividad de los productos europeos en mercados dolarizados**, lo que podría impactar negativamente a ciertos sectores exportadores de la Eurozona.

22. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, soles, bolivianos, yenes y Dirhams.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

A libras

$$1\,200\text{€} \cdot \frac{0,86\text{£}}{1\text{€}} = \frac{1\,200 \cdot 0,86}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{£}}{1\text{€}} = 1\,032\text{£}$$

A soles

$$1\,200\text{€} \cdot \frac{3,6\text{S/}}{1\text{€}} = \frac{1\,200 \cdot 3,6}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{S/}}{1\text{€}} = 4\,320\text{S/}$$

A bolivianos

$$1\,200\text{€} \cdot \frac{9\text{Bs}}{1\text{€}} = \frac{1\,200 \cdot 9}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{Bs}}{1\text{€}} = 10\,800\text{Bs}$$

A yenes

$$1\,200\text{€} \cdot \frac{131\text{¥}}{1\text{€}} = \frac{1\,200 \cdot 131}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{¥}}{1\text{€}} = 157\,200\text{¥}$$

A dirhams

$$1\,200\text{€} \cdot \frac{11,1\text{MAD}}{1\text{€}} = \frac{1\,200 \cdot 11,1}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{MAD}}{1\text{€}} = 13\,320\text{MAD}$$

23. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 \$

b) 4051,5 درهم

c) 104 800 ¥ (yenes)

d) 5 103 Bs

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

a. 390 \$ a €

$$390\$ \cdot \frac{1\text{€}}{1,3\$} = \frac{390 \cdot 1}{1,3} \cdot \frac{\$ \cdot \text{€}}{\$} = 300\text{€}$$

b. 4051,5 درهم MAD

$$4051,5\text{MAD} \cdot \frac{1\text{€}}{1,1\text{MAD}} = \frac{4051,5 \cdot 1}{1,1} \cdot \frac{\text{MAD} \cdot \text{€}}{\text{MAD}} = 3683,18\text{€}$$

c. 104 800 ¥ (yenes)

$$104\,800\text{ ¥} \cdot \frac{1\text{€}}{131\text{ ¥}} = \frac{104\,800 \cdot 1}{131} \cdot \frac{\text{¥} \cdot \text{€}}{\text{¥}} = 800\text{€}$$

d. 5 103 Bs

$$5\,103\text{ Bs} \cdot \frac{1\text{€}}{9\text{ Bs}} = \frac{5103 \cdot 1}{9} \cdot \frac{\text{Ns} \cdot \text{€}}{\text{Bs}} = 567\text{€}$$

24. Con las equivalencias anteriores. Jessica se quiere comprar una *Tablet*. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 \$ y 60 \$ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la *Tablet*?

En España: 350€

En Estados Unidos:

Pasamos los dólares a euros para comparar: $400 + 60 = 460 \$ \text{ a } \text{€}$

$$460\$ \cdot \frac{1\text{€}}{1,3\$} = \frac{460 \cdot 1}{1,3} \cdot \frac{\$ \cdot \text{€}}{\$} = 353,84\text{€}$$

En China:

Pasamos los yuanes a euros para comparar: $2\,700 + 200 = 2\,900 ¥ \text{ a } \text{€}$

$$2\,900¥ \cdot \frac{1\text{€}}{8¥} = \frac{2\,900 \cdot 1}{8} \cdot \frac{\text{¥} \cdot \text{€}}{\text{¥}} = 362,5\text{€}$$

Es más barato comprar en China.

25. Con las equivalencias anteriores. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

Cambia 200 € a:

A libras:

$$200\text{€} \cdot \frac{0,86\text{ £}}{1\text{€}} = \frac{200 \cdot 0,86}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{£}}{1\text{€}} = 172\text{£}$$

A bolivianos

$$200\text{€} \cdot \frac{9\text{ Bs}}{1\text{€}} = \frac{200 \cdot 9}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{Bs}}{1\text{€}} = 1\,800\text{Bs}$$

A yenes

$$200\text{€} \cdot \frac{131\text{ ¥}}{1\text{€}} = \frac{200 \cdot 131}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{¥}}{1\text{€}} = 26\,200\text{¥}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.1. EL INTERÉS

1. Escribe en tu cuaderno dos formas a través de las cuales harías que tu compañero/a, que nunca a estudiado educación financiera, se conciencie de la importancia de la misma.

Acudiendo a un curso de educación financiera, contándole lo útil que ha sido para ti calcular los intereses que tienes que pagar cuando tienes una deuda, etc.

2. La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo), recomienda que la educación financiera se enseñe en los centros educativos. Investiga ¿cómo promueve el estudio de la educación financiera? ¿Qué creó en 2008 para promover su estudio?

La OCDE promueve el estudio de la educación financiera mediante diversas estrategias y herramientas que buscan preparar a las personas para tomar decisiones financieras responsables y conscientes. Según el contexto del documento adjunto, la OCDE destaca la importancia de la educación financiera en su informe Pisa 2015, subrayando que es esencial para que los jóvenes enfrenten retos financieros a lo largo de su vida.

En 2008, la OCDE creó la **Red Internacional de Educación Financiera (INFE)**, que reúne a representantes de más de 100 economías, incluidos los países del G20 y organizaciones internacionales relevantes. Esta red tiene como objetivo desarrollar estrategias nacionales de educación financiera, compartir buenas prácticas y fomentar la colaboración internacional en este ámbito. Además, la OCDE ha elaborado los **Principios de Alto Nivel sobre Estrategias Nacionales de Educación Financiera**, que sirven como guía para implementar programas efectivos en los sistemas educativos.

3. Investiga y realiza un informe a ordenador sobre el Día de la Educación Financiera ¿qué organismos promueven su celebración en España? ¿de qué formas ves que se celebra? ¿cuál es el objetivo de su celebración?

El **Día de la Educación Financiera** se celebra en España cada primer lunes de octubre desde el año 2015. Esta iniciativa tiene como objetivo principal concienciar a la población sobre la importancia de adquirir conocimientos financieros para tomar decisiones responsables y mejorar su bienestar económico.

Organismos que promueven su celebración

- Banco de España:** Es uno de los principales impulsores de esta iniciativa, trabajando en conjunto con otras instituciones para fomentar la educación financiera.
- Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV):** Colabora activamente en la organización de actividades y eventos relacionados con este día.
- Plan de Educación Financiera:** Este plan, desarrollado por el Banco de España y la CNMV, coordina las acciones para promover la educación financiera en todo el país.

Objetivo de su celebración

El objetivo del Día de la Educación Financiera es:

- Sensibilizar a la población sobre la importancia de gestionar adecuadamente sus finanzas personales.
- Promover el aprendizaje de conceptos básicos como el ahorro, la inversión, el endeudamiento responsable y la planificación financiera.

- Fomentar la inclusión financiera, especialmente en colectivos vulnerables o con menor acceso a recursos educativos.

Durante este día, se organizan actividades como talleres, charlas, concursos escolares y eventos públicos para acercar la educación financiera a personas de todas las edades.

1.2. CÁLCULO DE INTERÉS SIMPLE

4. Calcula el interés simple de un capital de 5 200€ invertido durante 89 días al 4,25% anual.

Usamos la fórmula para calcular el interés simple en días: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$

Donde:

- ($C = 5\,200\text{€}$) (capital inicial)
- ($r = 4,25\%$) (tasa de interés anual)
- ($t = 89\text{días}$) (tiempo de inversión)

Sustituyendo valores: $I = \frac{5200 \cdot 4,25 \cdot 89}{36000} = 54,63\text{€}$

5. Calcula el capital final obtenido a partir de los datos del ejercicio anterior.

Usamos la fórmula del capital final en interés simple: $C_f = C_i + I$

Donde:

- ($C_i = 5\,200\text{€}$) capital inicial
- ($I = 54,63\text{€}$) interés calculado anteriormente

Sustituyendo valores: $C_f = 5200 + 54,63 = 5\,254,63\text{€}$

El capital final es: $C_f = 5\,254,63\text{€}$

6. Calcula el interés simple que producen 1 000 € al 3,05 % durante un año.

Usamos la fórmula: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$

Donde:

- ($C = 1\,000\text{€}$) capital inicial
- ($r = 3,05\%$) tasa de interés anual
- ($t = 1\text{año}$) tiempo de inversión

Sustituyendo valores: $I = \frac{1000 \cdot 3,05 \cdot 1}{100} = 1\,000 \cdot 0,0305 = 30,50\text{€}$

El interés simple es: $I = 30,50\text{€}$

7. Calcula el capital hay que depositar al 0,75% durante 100 días para obtener un interés simple de 550 €?

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000}$ Despejamos (C) de la fórmula: $C = \frac{I \cdot 36\,000}{r \cdot t}$

Donde:

- ($I = 550\text{€}$) interés simple
- ($r = 0,75\%$) tasa de interés anual
- ($t = 100\text{días}$) tiempo de inversión

Sustituimos los valores: $C = \frac{550 \cdot 36\,000}{0,75 \cdot 100}$

Realizamos los cálculos paso a paso:

$$550 \cdot 36\,000 = 19\,800\,000 \quad ; \quad 0,75 \cdot 100 = 75 \quad ; \quad \frac{19\,800\,000}{75} = 264\,000$$

El capital que se debe depositar es: $C = 264\,000\text{€}$

8. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 40€ a partir de un capital de 2 000€ al 2% anual.

Para calcular el tiempo necesario para obtener un interés de 40 €, usamos la fórmula del interés simple:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Despejamos (t) (el tiempo): $t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r}$

Donde:

- ($I = 40\text{€}$) interés
- ($C = 2\,000\text{€}$) capital
- ($r = 2\%$) tasa de interés anual

Sustituyendo los valores: $t = \frac{40 \cdot 100}{2\,000 \cdot 2}$

Realizamos los cálculos paso a paso:

$$40 \cdot 100 = 4\,000 \quad ; \quad 2\,000 \cdot 2 = 4\,000 \quad ; \quad \frac{4\,000}{4\,000} = 1 \text{ año}$$

El tiempo necesario para obtener un interés de 40 € es: $t = 1 \text{ año}$

9. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 68,75€ a partir de un capital de 5 500€ al 5% diario.

Vamos a calcular el tiempo necesario utilizando la fórmula del interés simple: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$

Despejamos (t), que es el tiempo: $t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r}$

- ($I = 68,75\text{€}$) interés generado
- ($C = 5\,500\text{€}$) capital inicial
- ($r = 5\%$) tasa de interés diaria

Sustituimos los valores en la fórmula: $t = \frac{68,75 \cdot 100}{5\,500 \cdot 5}$

Realizamos los cálculos paso a paso:

$$68,75 \cdot 100 = 6\,875 \quad ; \quad 5\,500 \cdot 5 = 27\,500 \quad ; \quad \frac{6\,875}{27\,500} = 0,25 \text{ años}$$

El tiempo necesario para obtener un interés de 68,75 € es: $t = 0,25 \text{ años}$

$$0,25 \cdot 360 = 90, \text{ el tiempo es de 3 meses}$$

10. Calcula el capital final obtenido al depositar 9 000 euros al 7.7% durante 8 meses.

Para calcular el capital final obtenido con interés simple, utilizamos la fórmula: $C_f = C_i + I$

Donde:

- ($C_i = 9\,000 \text{ €}$) capital inicial
- ($r = 7,7\%$) tasa de interés anual
- ($t = 8 \text{ meses}$) tiempo de inversión (convertido a años: $t = \frac{8}{12} = 0,6667 \text{ años}$)
- (I) interés generado, que se calcula con la fórmula: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$

Paso 1: Calcular el interés

Sustituimos los valores: $I = \frac{9\,000 \cdot 7,7 \cdot 0,6667}{100} = 461,06\text{€}$

El interés generado es: $I = 461,06\text{€}$

Paso 2: Calcular el capital final

Sustituimos en la fórmula del capital final: $C_f = 9\,000 + 461,06 = 9\,461,06\text{€}$

Resultado

El capital final obtenido es: $C_f = 9\,461,06\text{€}$

1.2. CÁLCULO DE INTERÉS COMPUESTO

11. Si el capital inicial de un depósito asciende a 105 000 €. El tanto por ciento aplicado es el 5 % a interés compuesto durante 10 años. Calcula el capital final.

Cálculo del capital final

Usamos la fórmula: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

Donde:

C_f es el capital final que queremos calcular

C_i es el capital inicial, que en este caso asciende a 105 000 €

r es el tanto por ciento aplicado, que equivale al 5 % anual

t es el tiempo de inversión, que corresponde a 10 años

Sustituimos los valores: $C_f = 105\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10}$

Resolvemos paso a paso:

$1 + \frac{5}{100} = 1 + 0,05 = 1,05$; $1,05^{10} = 1,62889$; $105\,000 \cdot 1,62889 = 171\,033,45\text{€}$

Resultado

El capital final es: $C_f = 171\,033,45\text{€}$

12. Al 4% de interés compuesto durante 9 años, ¿cuál será el capital inicial que tendremos que depositar para obtener un capital final de 43 000 €?

Cálculo del capital inicial

Usamos la fórmula del interés compuesto: $C_i = \frac{C_f}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$

Donde:

C_i es el capital inicial que queremos calcular

C_f es el capital final, que en este caso es 43 000 €

r es la tasa de interés anual, que corresponde al 4 %

t es el tiempo de inversión, que equivale a 9 años

Sustituimos los valores: $C_i = \frac{43\,000}{\left(1 + \frac{4}{100}\right)^9}$

Resolvemos paso a paso:

$1 + \frac{4}{100} = 1 + 0,04 = 1,04$; $1,04^9 = 1,41158$; $\frac{43\,000}{1,41158} = 30\,457,23\text{€}$

Resultado

El capital inicial que se debe depositar es: $C_i = 30\,457,23\text{€}$

13. Al 2% de interés compuesto durante 7 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 25 300 €?

Cálculo del capital final

Usamos la fórmula: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

Donde:

C_f es el capital final que queremos calcular

C_i es el capital inicial, que en este caso es 25 300 €

r es la tasa de interés anual, que corresponde al 2 %

t es el tiempo de inversión, que equivale a 7 años

Sustituimos los valores: $C_f = 25\,300 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^7$

Resolvemos paso a paso:

$1 + \frac{2}{100} = 1 + 0,02 = 1,02$; $1,02^7 = 1,14969$; $25\,300 \cdot 1,14969 = 29\,027,14\text{€}$

Resultado

El capital final es: $C_f = 29\,027,14\text{€}$

14. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.

El capital inicial de un depósito asciende a 25300 €. El tanto aplicado es el 2% a interés compuesto durante 7 años. Calcula el capital final.

Capital inicial:	25.300				
Tanto por ciento o rédito:	2				
Número de años:	7				
Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
25300,00	1	0,02	1,02	25806,00	506,00
25806,00	2	0,02	1,0404	26322,12	1022,12
26322,12	3	0,02	1,061208	26848,56	1548,56
26848,56	4	0,02	1,08243216	27385,53	2085,53
27385,53	5	0,02	1,104080803	27933,24	2633,24
27933,24	6	0,02	1,148685668	28491,91	3191,91
28491,91	7	0,02	1,21899442	29061,75	3761,75

15. Si se pretende obtener un capital final de 60 500€, cuánto será el capital inicial que se debe depositar al 3% durante 3 años para conseguirlo?

Cálculo del capital inicial

Usamos la fórmula: $C_i = \frac{C_f}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$

Donde:

C_i es el capital inicial que queremos calcular

C_f es el capital final, que en este caso es 60 500 €

r es la tasa de interés anual, que corresponde al 3 %

t es el tiempo de inversión, que equivale a 3 años

Sustituimos los valores: $C_i = \frac{60500}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^3}$

Resolvemos paso a paso:

$1 + \frac{3}{100} = 1 + 0,03 = 1,03$; $1,03^3 = 1,09273$; $\frac{60\,500}{1,09273} = 55\,369,26\text{€}$

Resultado

El capital inicial que se debe depositar es: $C_i = 55\,369,26\text{€}$

16. ¿A qué tipo de interés se deben depositar 2 000€ durante 4 años para conseguir un capital final de 4 000€?

Cálculo del tipo de interés

Usamos la fórmula del interés compuesto: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$

Despejamos (r), el tipo de interés:

$$1 + \frac{r}{100} = \left(\frac{C_f}{C_i}\right)^{\frac{1}{t}} \quad ; \quad \frac{r}{100} = \left(\frac{C_f}{C_i}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \quad ; \quad r = \left(\frac{C_f}{C_i}\right)^{\frac{1}{t}} \cdot 100 - 100$$

Donde:

C_f es el capital final, que en este caso es 4 000 €

C_i es el capital inicial, que corresponde a 2 000 €

t es el tiempo, que equivale a 4 años

Sustituimos los valores: $1 + \frac{r}{100} = \left(\frac{4\,000}{2\,000}\right)^{\frac{1}{4}}$

Resolvemos paso a paso:

$$\frac{4\,000}{2\,000} = 2 \quad ; \quad 2^{\frac{1}{4}} = 1,18921 \quad ; \quad 1,18921 - 1 = 0,18921 \quad ; \quad 0,18921 \cdot 100 = 18,92$$

Resultado

El tipo de interés necesario es: $r = 18,92 \% \text{ anual}$.

17. Usando Excel, teniendo un capital inicial de 13 500€ y un 3.5% de rédito durante 17 años. Calcula:

- El interés total al final del año 8
- El capital inicial en el año 13
- El capital final obtenido al finalizar el año 17

El capital inicial de un depósito asciende a 13500 €. El tanto aplicado es el 3,5% a interés compuesto durante 17 años. Calcula el capital final.					
Capital inicial:	13.500				
Tanto por ciento o rédito:	3,5				
Número de años:	17				
Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
13500,00	1	0,035	1,035	13972,50	472,50
13972,50	2	0,035	1,071225	14461,54	961,54
14461,54	3	0,035	1,108717875	14967,69	1467,69
14967,69	4	0,035	1,147523001	15491,56	1991,56
15491,56	5	0,035	1,187686306	16033,77	2533,77
16033,77	6	0,035	1,227279263	16594,95	3094,95
16594,95	7	0,035	1,2672598761	17175,77	3675,77
17175,77	8	0,035	1,307694522	17776,92	4276,92
17776,92	9	0,035	1,3486901317	18399,11	4899,11
18399,11	10	0,035	1,3902598559	19043,08	5543,08
19043,08	11	0,035	1,4324266111	19709,59	6209,59
19709,59	12	0,035	1,475226856	20399,43	6899,43
20399,43	13	0,035	1,5186902924	21113,41	7613,41
21113,41	14	0,035	1,562832856	21852,38	8352,38
21852,38	15	0,035	1,607690223	22617,21	9117,21
22617,21	16	0,035	1,653295164	23408,81	9908,81
23408,81	17	0,035	1,699697298	24228,12	10728,12

- El interés total al final del año 8: 4 276,92
- El capital inicial en el año 13: 20 399,43
- El capital final obtenido al finalizar el año 17: 24 228,12

18. Se depositan 13 250 en un banco que reconoce una tasa de interés del 25% anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 3 años?

Cálculo del capital final

Para calcular el capital final con interés compuesto capitalizable diariamente, usamos la fórmula:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

Donde:

C_f es el capital final

C_i es el capital inicial, que es 13 250 €

r es la tasa de interés anual, que equivale al 25 %

n es el número de capitalizaciones por año, que en este caso son 365 días

t es el tiempo de inversión, que corresponde a 3 años

Sustituimos los valores: $C_f = 13\,250 \cdot \left(1 + \frac{25}{36\,500}\right)^{365 \cdot 3}$

Resolvemos paso a paso:

$$\frac{25}{36\,500} = 0,00068493 \quad ; \quad 1 + 0,00068493 = 1,00068493 \quad ; \quad 365 \cdot 3 = 1095$$

$$1,00068493^{1095} = 2,05157 \quad ; \quad 13\,250 \cdot 2,05157 = 27\,183,30\text{€}$$

Resultado

El capital final acumulado en 3 años es: $C_f = 27\,183,30\text{€}$

19. Se depositan 2 120 en un banco que reconoce una tasa de interés del 41% anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 5 años?

Cálculo del capital final

Para calcular el capital final con interés compuesto capitalizable mensualmente, usamos la

fórmula: $C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$

Donde:

C_f es el capital final que queremos calcular

C_i es el capital inicial, que es 2 120 €

r es la tasa de interés anual, que equivale al 41 %

n es el número de capitalizaciones por año, que en este caso son 12 meses

t es el tiempo de inversión, que corresponde a 5 años

Sustituimos los valores: $C_f = 2\,120 \cdot \left(1 + \frac{41}{1\,200}\right)^{12 \cdot 5}$

Resolvemos paso a paso:

$$\frac{41}{1\,200} = 0,03416667 \quad ; \quad 1 + 0,03416667 = 1,03416667 \quad ; \quad 12 \cdot 5 = 60$$

$$1,03416667^{60} = 9,01408 \quad ; \quad 2\,120 \cdot 9,01408 = 19\,149,85\text{€}$$

Resultado

El capital final acumulado en 5 años es: $C_f = 19\,149,85\text{€}$

2.2. EQUIVALENCIA FINANCIERA

20. Una empresa posee 2 deudas de 15 000€, y 35 000€, que vencen respectivamente en 5 y 10 años. Pretende sustituir la deuda por una sola a pagar a los 7 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 2% compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.

Cálculo del importe a pagar

Para resolver este ejercicio, usamos la fórmula del valor presente y su relación con el valor futuro en interés compuesto:

$$Valorfuturo = Valorpresente \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Paso 1: Calcular el valor presente de las dos deudas y trasladarlo al año 7.

Usaremos la fórmula inversa para el valor presente:

$$Valorpresente = Valorfuturo \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-t}$$

Deuda de 15 000 € (vencimiento en 5 años)

Trasladamos esta deuda desde su vencimiento (5 años) al año 7.

Tiempodetraslado: $(7 - 5 = 2 \text{ años})$.

Sustituimos los valores: $Valorpresente = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{-2}$

$$1 + \frac{2}{100} = 1,02 \quad ; \quad 1,02^{-2} = 0,960784 \quad ; \quad 15\,000 \cdot 0,960784 = 14\,411,76 \text{ €}$$

Deuda de 35 000 € (vencimiento en 10 años)

Trasladamos esta deuda desde su vencimiento (10 años) al año 7.

Tiempo de traslado: $(10 - 7 = 3 \text{ años})$.

Sustituimos los valores: $Valorpresente = 35\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{-3}$

$$1 + \frac{2}{100} = 1,02 \quad ; \quad 1,02^{-3} = 0,941192 \quad ; \quad 35\,000 \cdot 0,941192 = 32\,941,72 \text{ €}$$

Paso 2: Sumamos los valores presentes de ambas deudas para obtener el importe total.

$$14\,411,76 + 32\,941,72 = 47\,353,48 \text{ €}$$

Resultado

El importe a pagar en el año 7 es: 47 353,48 €

2.4. AMORTIZACIÓN MEDIANTE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES

21. Si un banco concede un préstamo por 36 000€ para ser amortizado en 6 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 2%. Calcula usando fórmulas:

- Importe de la cuota de amortización constante
- Capital pendiente de amortización al principio del tercer año
- Anualidad del cuarto año
- Capital amortizado en los dos primeros años
- Cuota de interés del tercer año

$C_0 = 36\,000$ de euros

$n = 6$ años

$A = \text{constante}$

$i = 0,02$

a. $A = \frac{C_0}{n} = \frac{36\,000}{6} = 6\,000$

b. $C_3 = ?$ $C_3 = C_0 - M_3$
 $M_3 = 3 \cdot A$; $M_3 = 3 \cdot 6\,000 = 18\,000$
 $C_3 = 36\,000 - 18\,000 = 18\,000$

c. $a_4 = ?$ $a_4 = A + I_4$
Siendo: $I_4 = C_3 \cdot i$
 $C_3 = C_0 - M_3$; $M_3 = 3A$
Sustituyendo:
 $a_4 = 6\,000 + (36\,000 - 18\,000) \cdot 0,02$
 $a_4 = 6\,360$

d. $M_5 = ?$ $M_5 = 5A$
 $M_5 = 5 \cdot 6\,000$; $M_5 = 30\,000$

e. $I_3 = ?$ $I_3 = C_2 \cdot i$
 $C_2 = C_1 - M_2$
 $M_2 = 2A$
Sustituyendo:
 $I_3 = (36\,000 - 12\,000) \cdot 0,02$; $I_3 = 480$

22. Realiza el ejercicio anterior usando Excel.

Si un banco concede un préstamo por 36 000€ para ser amortizado en 6 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 2%. Calcula

a. Importe de la cuota de amortización constante					
b. Capital pendiente de amortización al principio del tercer año					
c. Anualidad del cuarto año					
d. Capital amortizado en los dos primeros años					
e. Cuota de interés del tercer año					
Capital inicial:	36.000				
Tanto por ciento o rédito:	0,02				
Número de años:	6				
Cuota de amortización A	6000				
Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL
					PENDIENTE
0	-	-	-	-	36.000
1	6720	720	6000	6000	30.000
2	6600	600	6000	12000	24.000
3	6480	480	6000	18000	18.000
4	6360	360	6000	24000	12.000
5	6240	240	6000	30000	6.000
6	120	120	0	30000	6.000
	a	6000			
	b	18.000			
	c	6360			
	d	30000			
	e	480			

23. Una sucursal bancaria de la capital de tu país concede préstamos al 1,5% de interés anual, con cuotas de amortización constantes. Tu amiga solicita un préstamo para poder abrir un negocio. Necesita 52 300€. Lo puede devolver en 5 años. Realiza el cuadro de amortización del préstamo.

Capital inicial:	52.300				
Tanto por ciento o rédito:	0,015				
Número de años:	5				
Cuota de amortización A	10460				

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	$(1+r)^n$	Capital final: C_f	Interés total
n	a_k	I_k	A_k	M_k	C_k
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL
					PENDIENTE
0	-	-	-	-	52300
1	11244,5	784,5	10460	10460	41840
2	11087,6	627,6	10460	20920	31380
3	10930,7	470,7	10460	31380	20920
4	10773,8	313,8	10460	41840	10460
5	10616,9	156,9	10460	52300	0

- Importe del préstamo: 52 300 €
- Tasa de interés anual: 1,5 %
- Plazo de devolución: 5 años
- Método: Sistema de amortización constante.

En el sistema de amortización constante, el capital amortizado es el mismo cada año y se calcula como:

$$A = \text{Importe del préstamo} / \text{Plazo de devolución} = 52300 / 5 = 10460 \text{ €}$$

Cuadro de amortización

1. Interés anual: Se calcula sobre el capital pendiente al inicio de cada año (Capital inicial $\times$ tasa de interés).
2. Amortización: Es fija y equivale a 10 460 € por año.
3. Cuota total: Suma del interés anual y la amortización.
4. Capital pendiente: Se resta la amortización del capital inicial.

24. La sucursal del ejercicio anterior propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:

- a. Capital pendiente al final del año 3
a. 36 610 b. 0 c. 24 321
- b. La cuota de intereses del año 2
a. 706,05 b. 923.56 c. 346.83
- c. La anualidad año 7
a. 5 543,8 b. 3 423,03 c. 6 645,32
- d. La cuota de amortización del año 9
a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675
- e. Capital pendiente al principio del año 3
a. 36 610 b. 5 230 c. 41 840

Datos iniciales

- Importe del préstamo: 52 300 €
- Tipo de interés anual: 1,5 %
- Tiempo de devolución: 10 años
- Cuota de Amortización fija: $A = 52300 / 10 = 5230$ €.

Cuadro de amortización constante

Año	Capital inicial (€)	Interés (€)	Amortización (€)	Cuota total (€)	Capital pendiente (€)
1	52 300	784,50	5 230	6 014,50	47 070
2	47 070	706,05	5 230	5 936,05	41 840
3	41 840	627,60	5 230	5 857,60	36 610
4	36 610	549,15	5 230	5 779,15	31 380
5	31 380	470,70	5 230	5 700,70	26 150
6	26 150	392,25	5 230	5 622,25	20 920
7	20 920	313,80	5 230	5 543,80	15 690
8	15 690	235,35	5 230	5 465,35	10 460
9	10 460	156,90	5 230	5 386,90	5 230
10	5 230	78,45	5 230	5 308,45	0

- a. a) 36 610 ; b. a) 706,05 c. a) 5 543,8 d. b) 5 230 e. c) 41 840

3.2. COMISIONES BANCARIAS

25. Es completamente legal que los bancos cobren comisión por sacar dinero en ventanilla. A partir de esta frase, contesta:

- ¿Por qué crees que lo hacen?
- ¿Crees que atenta contra algún tipo de cliente en especial? ¿a quién?
- En caso de haber contestado si al apartado b, ¿sabes si se está haciendo algo para remediarlo?
 - Lo hacen para obtener más dinero, para evitar tener que hacer operaciones innecesarias y poder dedicarse a otras tareas, para poder reducir costes y no tener a un empleado dedicado a operaciones como esta, ya que operaciones de este tipo se pueden hacer hoy en día a través de cajeros.
 - Afecta negativamente sobre todo a aquellos clientes que no se sienten familiarizados con el uso de cajeros, normalmente las personas de avanzada edad que siempre han operado con libreta de ahorros. Los mayores no solo tienen falta de habilidades digitales, también tienen mucho miedo a cometer errores y que esto les lleve a ser engañados (fraude).
 - El Banco de España ha establecido que todos los consumidores tengan al menos un sistema gratuito para retirar dinero en metálico de su cuenta. En un primer momento, los bancos dejaban hasta una hora (generalmente 10:00 de la mañana) o un día a la semana para poder retirar dinero en cantidades pequeñas en la ventanilla.

26. Para proteger a los mayores ante el abuso por comisiones el Gobierno debe de realizar una serie de acciones. Explica con tus palabras qué significan cada una de estas acciones:

- **Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios.**
- **Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca.**
- **Desarrollar tecnologías inclusivas**
- **Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas**

- Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios.

Significa asegurar que todas las personas, especialmente los mayores, puedan realizar operaciones bancarias sin dificultades. Esto puede incluir mantener sucursales abiertas en zonas donde la digitalización es limitada, ofrecer atención personalizada y reducir barreras como comisiones excesivas por operar en ventanilla.

- Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca.

Implica fortalecer medidas para evitar fraudes y estafas dirigidas a este sector, como mejorar la atención telefónica y presencial, simplificar los procesos para evitar confusiones y garantizar sistemas de autenticación fáciles de usar pero seguros. También puede incluir campañas de concienciación sobre posibles riesgos.

- Desarrollar tecnologías inclusivas.

Consiste en diseñar herramientas digitales accesibles para personas mayores, con interfaces más intuitivas, opciones de asistencia personalizada y procesos simplificados para que puedan operar sin dificultad. Por ejemplo, aplicaciones móviles con botones grandes y sistemas de voz para facilitar transacciones.

- Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas.

Busca brindar formación accesible para que los mayores puedan usar la banca digital con confianza. Esto puede incluir cursos, guías o asistencia en sucursales para enseñarles a realizar transferencias, consultar su saldo o protegerse de estafas.

Estas medidas ayudarían a garantizar que los mayores puedan operar con seguridad y sin barreras económicas o digitales.

3.3. MEDIOS DE PAGO CON COMISIONES

27. Un hombre acude a la ventanilla de su banco a realizar varias operaciones: ingresar dinero a una de sus cuentas, realizar una transferencia urgente a su hijo que vive en Alemania de 1 375€, otra transferencia no urgente a un cliente suyo por importe de 543€. Aprovechando que está allí, el banco le dice que debe pagar la comisión por el mantenimiento de sus tarjetas 10€/anual y la de administración por tener abierta una cuenta con ellos 7€/anual. Calcula el total de comisiones que ese día paga dicho hombre sabiendo que el importe de realizar transferencias urgentes es de 3,5% y las no urgentes no suponen un gasto a los clientes.

El cálculo del total de comisiones que debe pagar el hombre se realiza sumando los diferentes

cargos.

Paso 1: Comisión por transferencia urgente

La comisión por transferencias urgentes es del **3,5 %** sobre el importe enviado:

$$I = 1\,375 \cdot \frac{3,5}{100} \quad ; \quad I = 1\,375 \cdot 0,035 = 48,13\text{€}$$

Paso 2: Comisión por mantenimiento de tarjetas

El banco cobra una comisión de **10 € anuales** por el mantenimiento de sus tarjetas.

Paso 3: Comisión por administración de cuenta

El banco cobra 7 € anuales por tener una cuenta abierta.

Paso 4: Suma total de comisiones

$$\text{Total} = 48,13 + 10 + 7 \quad ; \quad \text{Total} = 65,13\text{€}$$

Resultado final

El hombre paga un total de **65,13 €** en comisiones ese día.

28. Una entidad bancaria determina que las transferencias tendrán una comisión del 0,4% de cada importe. Por otro lado, la comisión mínima a cobrar debe ser de 5€. A partir de estos datos calcula el total a pagar por un cliente que realiza transferencias por valor de:

- a. 4 956€
- b. 3,5€
- c. 321€
- d. 1 879,10€

El cálculo del total a pagar en comisiones depende de si el porcentaje aplicado supera o no la comisión mínima de 5 €.

Paso 1: Cálculo de la comisión según el porcentaje

La comisión estándar es del 0,4 % sobre el importe enviado:

Para cada transferencia:

- a) 4 956 €

$$C = 4956 \cdot \frac{0,4}{100} = 19,82\text{€}$$

Como 19.82 € es mayor que la comisión mínima, se cobra **19,82 €**.

- b) 3,5 €

$$C = 3.5 \cdot \frac{0,4}{100} = 0,014\text{€}$$

Como 0.014 € es menor que 5 €, se cobra **5 €**.

- c) 321 €

$$C = 321 \cdot \frac{0,4}{100} = 1,28\text{€}$$

Como 1.28 € es menor que 5 €, se cobra **5 €**.

- d) 1 879,10 €

$$C = 1879,10 \cdot \frac{0,4}{100} = 7,52\text{€}$$

Como 7.52 € es mayor que la comisión mínima, se cobra **7,52 €**.

Paso 2: Suma total de comisiones

$$\text{Total} = 19,82 + 5 + 5 + 7,52 = 37,34\text{€}$$

Resultado final

El cliente paga un total de **37,34 €** en comisiones por las transferencias.

29. La plataforma de pago GooglePay cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:

- Si factura menos de 1 500€ al mes, cobrará 3,2% + 0,45€ por cada transacción.
- Si factura entre 1 500€ y 12 000€ al mes, cobrará 2,6% + 0,40€ por cada transacción.
- Si factura entre 12 001€ y 99 999€ al mes, cobrará 1,8% + 0,30€ por cada transacción.
- Más de 100 000€ al mes, cobrará 0,5% + 0,25€ por cada transacción.

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a GooglePay de comisiones:

- Factura 650€ realizando 7 transacciones.
- Factura 5 340€ realizando 24 transacciones.
- Factura 45 520€ realizando 145 transacciones.
- Factura 111 000€ realizando 430 transacciones.

Cálculo de la comisión según el rango de facturación

La comisión se compone de un porcentaje sobre la cantidad facturada más un coste fijo por transacción:

- a) Factura 650 € realizando 7 transacciones
Como la cantidad es menor de 1 500 €, se aplica la tarifa del 3,2 % más 0,45 € por transacción.

$$C = 650 \cdot \frac{3,2}{100} + 7 \cdot 0,45 \quad ; \quad C = 20,80 + 3,15 = 23,95€$$

- b) Factura 5 340 € realizando 24 transacciones
Como la cantidad está entre 1 500 € y 12 000 €, se aplica la tarifa del 2,6 % más 0,40 € por transacción.

$$C = 5\,340 \cdot \frac{2,6}{100} + 24 \cdot 0,40 \quad ; \quad C = 138,84 + 9,60 = 148,44€$$

- c) Factura 45 520 € realizando 145 transacciones
Como la cantidad está entre 12 001 € y 99 999 €, se aplica la tarifa del 1,8 % más 0,30 € por transacción.

$$C = 45\,520 \cdot \frac{1,8}{100} + 145 \cdot 0,30 \quad ; \quad C = 819,36 + 43,50 = 862,86€$$

- d) Factura 111 000 € realizando 430 transacciones
Como la cantidad supera 100 000 €, se aplica la tarifa del 0,5 % más 0,25 € por transacción.

$$C = 111\,000 \cdot \frac{0,5}{100} + 430 \cdot 0,25 \quad ; \quad C = 555 + 107,50 = 662,50€$$

CAMBIO DE DIVISAS

30. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia tres mil euros a libras, soles, bolivianos, yenes y dirhams.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírham (MAD)
1	0.6	1.1	2.5	7	106	8	15

A libras

$$3\,000€ \cdot \frac{0,6\,£}{1€} = \frac{3\,000 \cdot 0,6}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{1€} = 1\,800£$$

A soles

$$3\,000€ \cdot \frac{2,5\,S/}{1€} = \frac{3\,000 \cdot 2,5}{1} \cdot \frac{€ \cdot S/}{1€} = 7\,500S/$$

A bolivianos

$$3\,000\text{€} \cdot \frac{7\text{ Bs}}{1\text{€}} = \frac{3\,000 \cdot 7}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{Bs}}{1\text{€}} = 21\,000\text{Bs}$$

A yenes

$$3\,000\text{€} \cdot \frac{106\text{ ¥}}{1\text{€}} = \frac{3\,000 \cdot 106}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{¥}}{1\text{€}} = 318\,000\text{¥}$$

A dirhams

$$3\,000\text{€} \cdot \frac{15\text{ MAD}}{1\text{€}} = \frac{3\,000 \cdot 15}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{MAD}}{1\text{€}} = 45\,000\text{MAD}$$

31. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón si el tipo de cambio es 102¥? B) ¿Y al de EEUU si el tipo de cambio es 1,1\$? C) ¿Y al de Bolivia si el tipo de cambio es 7 Bs? Realiza los cálculos.

Cambia 400 € a:

A) yenes

$$400\text{€} \cdot \frac{131\text{ ¥}}{1\text{€}} = \frac{400 \cdot 131}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{¥}}{1\text{€}} = 52\,400\text{¥}$$

B) dólares:

$$400\text{€} \cdot \frac{1.1\text{ \$}}{1\text{€}} = \frac{400 \cdot 1.1}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{\$}}{1\text{€}} = 440\text{\$}$$

C) bolivianos

$$400\text{€} \cdot \frac{7\text{ Bs}}{1\text{€}} = \frac{400 \cdot 7}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{Bs}}{1\text{€}} = 2\,800\text{Bs}$$

32. Joaquín se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 \$ y 50 \$ por el transporte, en China 4 550 ¥ y 0 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil? El tipo de cambio en Estados Unidos es de 1,2 dólares y el de China es de 6 yuanes.

Para determinar dónde es más barato comprar el móvil, convertimos los precios a euros utilizando los tipos de cambio proporcionados.

Cálculo de costos en euros

- España:
El precio es directamente 500 €.
- Estados Unidos:
El costo total es $500\text{ \$} + 50\text{ \$} = 550\text{ \$}$.
Convertimos a euros: $550 \cdot \frac{1}{1.2} = 458,33\text{€}$
- China:
El costo total es 4 550 ¥.
Convertimos a euros: $4\,550 \cdot \frac{1}{6} = 758,33\text{€}$

Comparación de precios

- España: 500 €
- EE. UU.: 458,33 €
- China: 758,33 €

El precio más barato es en **Estados Unidos**, donde el móvil cuesta **458,33 €**, seguido de España con **500 €**. En China es significativamente más caro, con **758,33 €**.

33. En el cuadro siguiente se presentan los tipos de cambio bilaterales de un grupo de monedas respecto al dólar. A partir de esta primera columna, calcúlese el resto de relaciones entre las monedas utilizando los tipos de cambio cruzados.

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-			
Canadá	0.613	-		
Zona-euro	0.886		-	
Gran Bretaña	1.564			-

Si el tipo de cambio del dólar EEUU respecto al dólar canadiense es 0,613. El del dólar canadiense respecto al dólar de EE.UU se calculará invirtiéndolo: $\frac{1\$}{0,613\$/\$can.} = 1,631 \$can./\$$

Lo mismo se realiza respecto al euro: $\frac{1}{0,886 \$/\text{€}} = 1,1286 \text{ €}/\$$

Lo mismo se realiza respecto a la libra: $\frac{1}{1,564 \$/\text{£}} = 0,6393 \text{ £}/\$$

Para completar el resto de la tabla como tenemos el cambio de dos monedas respecto al dólar podemos obtener el cambio cruzado de esas dos monedas.

Utilizando el tipo de cambio $\$/\$can.$ y el tipo de cambio $\$/\text{€}$ se puede obtener el tipo cruzado $\$can./\text{€}$:

$$\frac{0,886\$/\text{€}}{\text{€ } 0,613 \$/\$can.} = \frac{0,886}{0,613} \cdot \frac{\$/\text{€}}{\$/\$can.} = 1,445$$

Por tanto, así se calcula el equivalente en dólares canadienses de un euro. También de forma inmediata, se puede conocer el cambio del euro respecto al dólar canadiense. Basta con invertir el tipo de cambio anterior: $\frac{1}{1,445 \$can./\text{€}} = 0,692\text{€}/\$can.$

En cuanto a la libra esterlina, utilizando el tipo de cambio $\$/\text{£}$ y $\$/\$can.$ se calcularía la relación entre la divisa canadiense y la libra: $\frac{1,564 \$/\text{£}}{0,613 \$/\$can.} = 2,5513 \$can./\text{£}$

Invirtiendo el cálculo anterior, se obtiene el tipo de cambio $\text{£}/\$can.$: $\frac{1}{2,5513 \$can./\text{£}} = 0,3919$

Que se colocaría en la columna de Gran Bretaña, segunda fila.

Por último, faltaría calcular las relaciones $\text{£}/\text{€}$ y viceversa. Utilizando los tipos de cambio $\$/\text{£}$ y $\$/\text{€}$:

$$\frac{1,564 \$/\text{£}}{0,886 \$/\text{€}} = 1,7652 \text{ €}/\text{£} \quad ; \quad \frac{1}{1,7652 \text{ €}/\text{£}} = 0,5665 \text{ £}/\text{€}$$

Por tanto, la tabla anterior quedaría:

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-	1,631	1,1286	0,6393
Canadá	0,713	-	0,692	0,3919
Zona-euro	0,892	1,445	-	0,5665
Gran Bretaña	1,665	2,5513	1,7652	-

AUTOEVALUACIÓN

1. “Un euro hoy es mejor que.....,mañana”,

- a) un dólar hoy b) un dólar mañana c) un coche hoy d) un euro mañana

El principio de la preferencia por la liquidez establece que es mejor tener dinero hoy que en el futuro, debido a la posibilidad de invertirlo y generar intereses.

Respuesta: **d) un euro mañana**

2. Uno de los principales motivos por los que se cobran intereses es:

- a) la liquidez b) el riesgo c) para tener más dinero d) porque es obligatorio

Los prestamistas cobran intereses para compensar el riesgo de que el prestatario no devuelva el dinero y por la pérdida de valor del dinero con el tiempo.

Respuesta: **b) el riesgo**

3. Si depositamos en un banco 3 000€ al 3% anual ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 20 meses?

- a) 1 200 b) 150 c) 3 150 d) 3 000

Calculamos el interés simple: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$; $I = \frac{3\,000 \cdot 3 \cdot 20}{100 \cdot 12} = 150 \text{ €}$

Sumamos capital e intereses: $3\,000 + 150 = 3\,150 \text{ €}$

Respuesta: **c) 3 150**

4. Un banco concede un préstamo por importe de 3 000€ al 3,5% de interés anual, con cuotas de amortización constantes a devolver en 4 años, ¿Cuál es la cuota de amortización?

- a) 3 000€ b) 650€ c) 1 500€ d) 750€

Fórmula de amortización: $A = \frac{C}{n}$

Aplicando los valores: $A = \frac{3000}{4} = 750$

Respuesta: **d) 750€**

5. Qué organismo solicita al Banco de España la revisión de las comisiones cobradas en ventanilla:

- a) La ONU b) La organización de consumidores c) La OCU d) La OCDE

Respuesta: **c) La OCU**

6. Cuanto le costará a un adulto realizar un envío de dinero a través de Bizum, si su banco cobra 3,5% por cada transferencia:

- a) Nada b) El 3,5% del importe c) El 0,035€ d) 35€

Respuesta: **a) Nada**

7. Tomando como referencia las comisiones de PayPal de la actividad propuesta 16, ¿Cuánto pagaría un cliente cobrando 6 754€ realizando 35 transacciones?

- a) 6 754 € b) 50€ c) 323,65€ d) 208,12€

(La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes

comisiones:

- Si factura menos de 2 500€ al mes, cobrará 3,4% + 0,35€ por cada transacción.
- Si factura entre 2 500€ y 10 000€ al mes, cobrará 2,9% + 0,35€ por cada transacción.
- Si factura entre 2 500€ y 10 000€ al mes, cobrará 2,7% + 0,35€ por cada transacción.
- Más de 50 000€ al mes, cobrará 2,4% + 0,35€ por cada transacción.)

Comisión sobre 6 754 € con tarifa de **2,9 % + 0,35 €/transacción**:

$$6\,754 \cdot \frac{2,9}{100} + 35 \cdot 0,35 = 195,87 + 12,25 = 208,12$$

Respuesta: **d) 208,12€**

8. Siguiendo el apartado anterior, ¿Cuánto pagaría si recibe 132 000€ realizando 200 transacciones?

- a) 3 238€ b) 123,23€ c) 423,50€ d) 23,56€

Aplicando la tasa del **2,4 % + 0,35 €/transacción**: $132\,000 \cdot \frac{2,4}{100} + 200 \cdot 0,35 = 3168 + 70 = 3238$

Respuesta: **a) 3 238€**

9. Marina ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 \$ en metálico, Los cambia a euros, El tipo de cambio vigente es 1,2 dólares, ¿Cuántos euros tendrá?

- a) 541,6€ b) 635,3€ c) 780€ d) 345€

Pasamos los dólares a euros: $650\$ \cdot \frac{1\text{€}}{1,2\$} = \frac{650 \cdot 1}{1,2} \cdot \frac{\$ \cdot \text{€}}{\$} = 541,6\text{€}$

Respuesta: **a) 541,6€**

10. Andrés ha vuelto de un viaje de Reino Unido con 50 £ en metálico, los cambia a euros, el tipo de cambio vigente es 0,87 libras, ¿Cuántos euros tendrá?

- a) 54€ b) 57,47€ c) 43,5€ d) 45,3€

Pasamos las libras a euros: $50\text{£} \cdot \frac{1\text{€}}{0,87\text{£}} = \frac{50 \cdot 1}{0,87} \cdot \frac{\text{£} \cdot \text{€}}{\text{£}} = 57,47\text{€}$

Respuesta: **b) 57,47€**

3º ESO

Capítulo 9: Movimientos en el plano y en el espacio

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

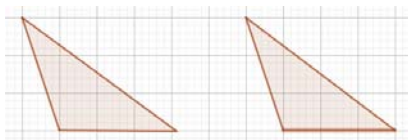
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?

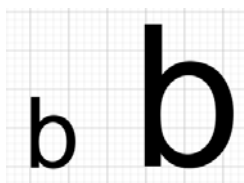


Todos los lados y todos los ángulos miden lo mismo

2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

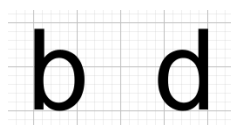
Solución abierta gráfica

3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?



Cualquier letra b el doble de grande, tendrá longitudes el doble que la original, y ángulos iguales, es decir, serán semejantes.

4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?



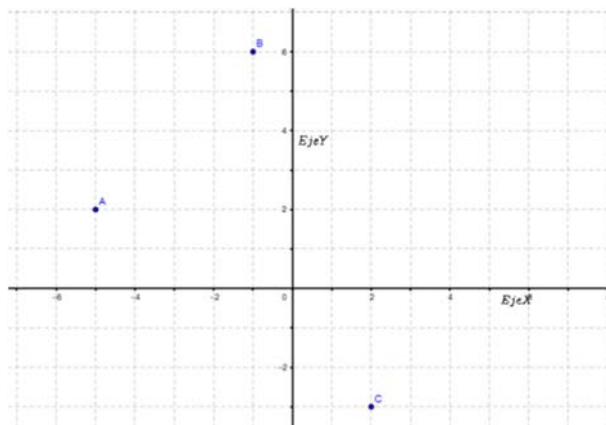
En este caso, no sería semejante, es simétrica. O semejante de razón de semejanza -1.

5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva... Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

Solución gráfica y abierta.

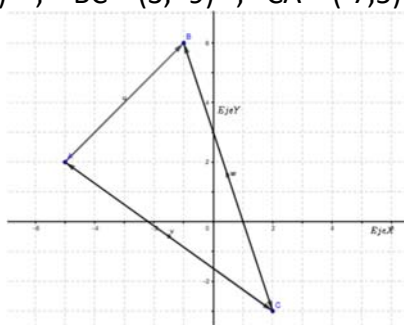
2. TRASLACIONES

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas A (-5, 2), B (-1, 6) y C (2, -3). Halla las coordenadas de los vectores fijos AB, AC, BC, CA y CB. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.



Las coordenadas de los vectores **AB**, **AC**, **BC**, **CA** y **CB**. son:

$$AB = (4, 4) \quad , \quad AC = (7, -5) \quad , \quad BC = (3, -9) \quad , \quad CA = (-7, 5) \quad , \quad CB = (-3, 9)$$



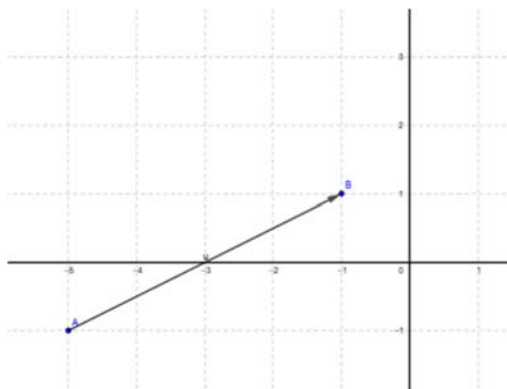
7. El vector fijo AB tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen A sabiendo que las coordenadas de su extremo B son (-1, 1). Representálo gráficamente.

Si $AB = (4, 2)$ y $B = (-1, 1)$, entonces, siendo $A = (x, y)$, $(-1-x, 1-y) = (4, 2)$, es decir:

$$-1 - x = 4; x = -5$$

$$1 - y = 2; y = -1$$

Entonces $A = (-5, -1)$



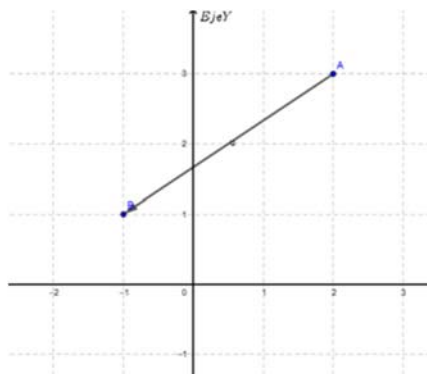
8. Las coordenadas de A son (2, 3) y las del vector fijo AB son (4, -2). Calcula las coordenadas del punto B. Representálo gráficamente.

Si $AB = (4, -2)$ y $A = (2, 3)$, entonces, siendo $B = (x, y)$, $AB = (x-2, y-3) = (4, -2)$, es decir:

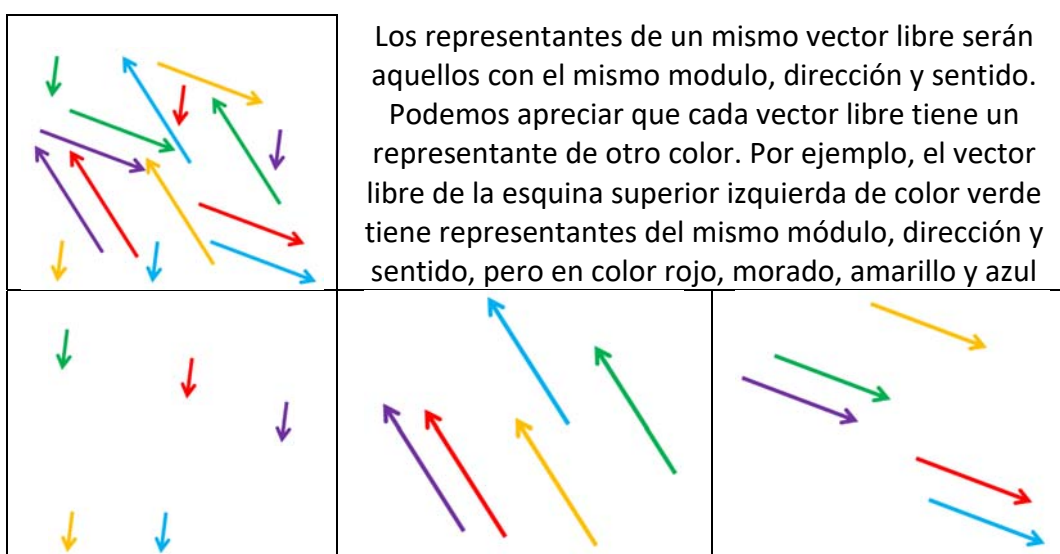
$$x - 2 = 4; x = 6$$

$$y - 3 = -2; y = 1$$

Entonces $B = (6, 1)$

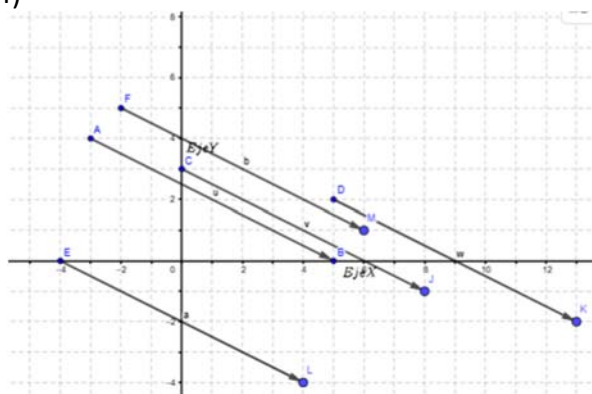


9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.

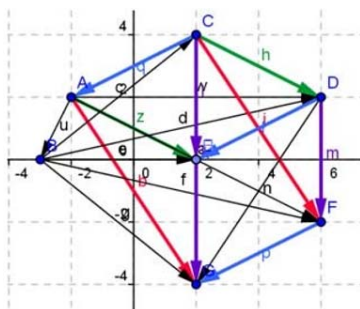


10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en A (-3, 4) y extremo B (5, 0), con orígenes en los puntos C (0, 3), D (5, 2), E (-4, 0) y F (-2, -5).

El vector fijo AB es (8,-4)



11. Dibuja en tu cuaderno los puntos A (-2, 2), B (-3, 0), C (2, 4), D (6, 2), E (2, 0), F (6, -2) y G (2, -4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.



Son equipolentes: $AG = CF$; $GA = FC$; $CD = AE$; $EA = DC$; $CE = DF = EG$; $EC = FD = GE$; $DE = FG = CA$; $ED = GF = AC$.

12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos DE y FG. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

$$DE = (2-6, 0-2) = (-4, -2)$$

$$FG = (2-6, -4-(-2)) = (-4, -2)$$

Son equipolentes, representantes de un mismo vector libre

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: A (4, 5), B (-5, 6) y C (2, -5).

a) Llama u al vector fijo AB e indica sus componentes.

b) Llama v al vector fijo BC e indica sus componentes.

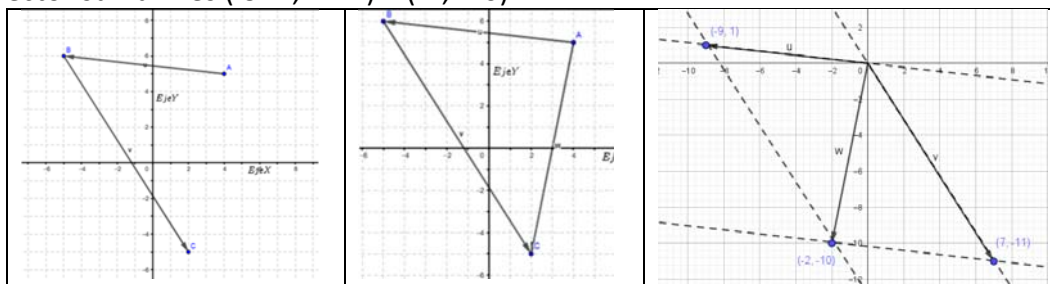
c) Calcula las componentes del vector $w = u + v$.

d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.

a) Las componentes del vector $u = AB$ son $(-5, 6) - (4, 5) = (-9, 1)$,

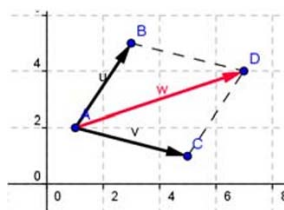
b) Y las del $v = BC$ son $(2, -5) - (-5, 6) = (7, -11)$

c) El vector suma w es $(-9+7, 1-11) = (-2, -10)$



14. Dibuja en tu cuaderno el punto A (1, 2), dibuja ahora el vector $u = (2, 3)$ con origen en A, y el vector $v = (4, -1)$ también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma $u + v$, y dibújalo con origen en A. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre u y v.

$$w = u + v = (2, 3) + (4, -1) = (6, 2)$$



15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$

b) $(5, -9) - [(6, 3) + (-4, -6)]$

c) $5 \cdot [(-1, 0) - (-2, 3)] + (-3) \cdot [(4, -2) - 6 \cdot (4, -5)]$

d) $9.3 \cdot (2, 6) + (3.7, 5.2)$

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8) = \left(1, -\frac{5}{2}\right) + (2, 4) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$

b) $(5, -9) - [(6, 3) + (-4, -6)] = (5, -9) - (2, -3) = (3, -6)$

c) $5 \cdot [(-1, 0) - (-2, 3)] + (-3) \cdot [(4, -2) - 6 \cdot (4, -5)] =$
 $= 5 \cdot [(1, -3)] + (-3) \cdot [(4, -2) - (24, -30)] = (5, -15) + (-3) \cdot (-20, 28) =$
 $= (5, -15) + (60, -84) = (65, -99)$

d) $9.3 \cdot (2, 6) + (3.7, 5.2) = (18.6, 55.8) + (3.7, 5.2) = (22.3, 61)$

16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores $u = (-5, 6)$, $v = (4, -7)$ y $w = (3, 4)$:

a) $2u - (v + w)$

b) $3w - 2u + v$

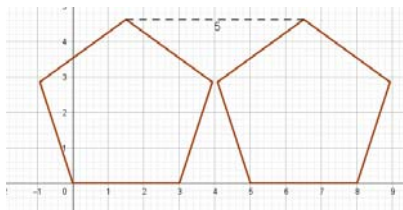
c) $2(u + v) - 3w$

a) $2u - (v + w) = 2 \cdot (-5, 6) - ((4, -7) + (3, 4)) = (-10, 12) - (7, -3) = (-17, 15)$

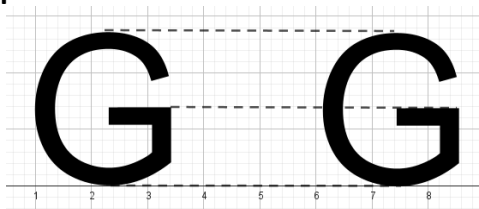
b) $3w - 2u + v = (9, 12) - (-10, 12) + (4, -7) = (23, -7)$

c) $2(u + v) - 3w = 2 \cdot ((-5, 6) + (4, -7)) - (9, 12) = (-2, -6) - (9, 12) = (-11, -18)$

17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.



18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?



Las medidas sí serán iguales entre una figura y otra. Las rectas que unen pares de puntos correspondientes serán paralelas. Han seguido un vector libre.

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

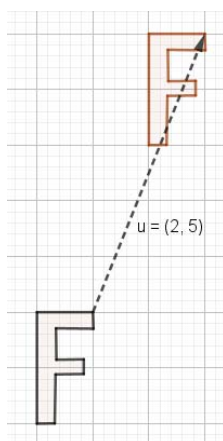
20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?



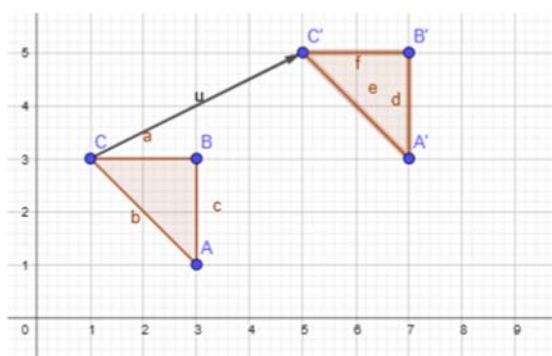
Un friso en Camboya

El vector de traslación sería un vector horizontal, desde el punto más a la izquierda de la figura a trasladar

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector $(2, 5)$.



22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices A (3, 1), B (3, 3) y C (1, 3). Aplícale la traslación de vector $(4, 2)$: 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados A', B' y C'?



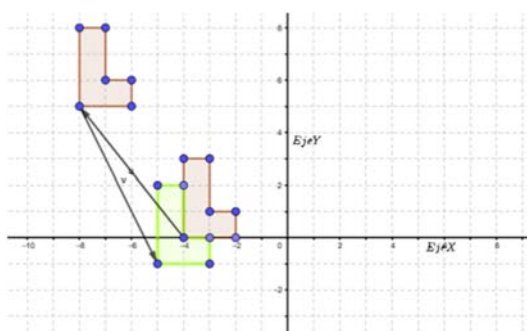
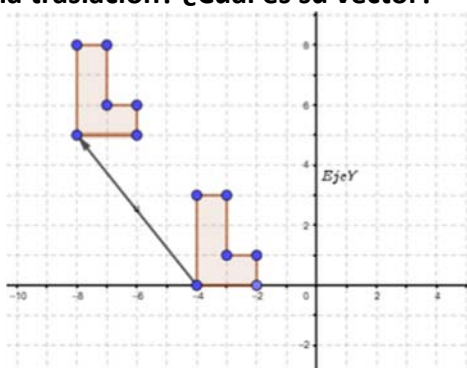
$$A' = (7,3), \quad B' = (7,5) \quad \text{y} \quad C' = (5,5)$$

23. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag... y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.



Solución manipulativa, abierta y gráfica:

24. Traslada una figura (por ejemplo, una letra L) mediante la traslación de vector $(-4, 5)$ y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector $(3, -6)$. ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

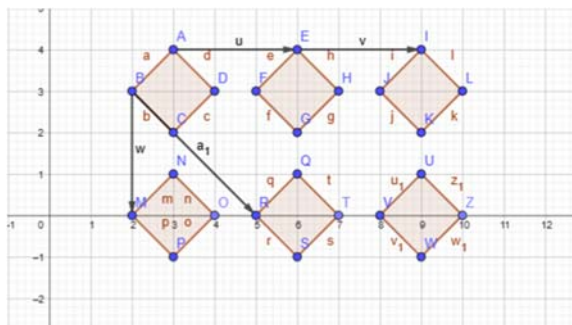


Se utiliza el movimiento de traslación $(-1, -1)$; $(-4, 5) + (3, -6) = (-1, -1)$

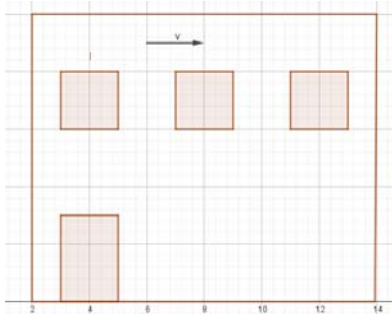
25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.



Una posible traslación horizontal es $(3, 0)$ y una traslación vertical es $(0, -3)$. Se obtiene también una traslación oblicua $(3, -3)$



26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.



27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.



Hay una ventana con forma de arco en la parte superior, y alargada en la parte inferior, que se traslada y forma otra ventana.

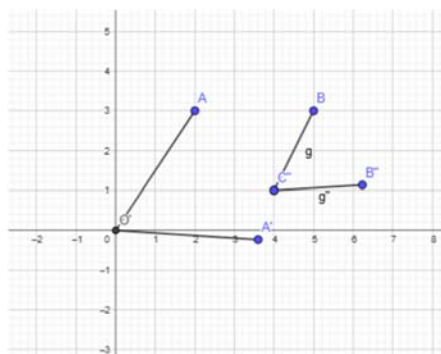
Existen numerosos arcos, que se trasladan y se transforman en muchos sucesivos justo debajo.

3. GIROS O ROTACIONES

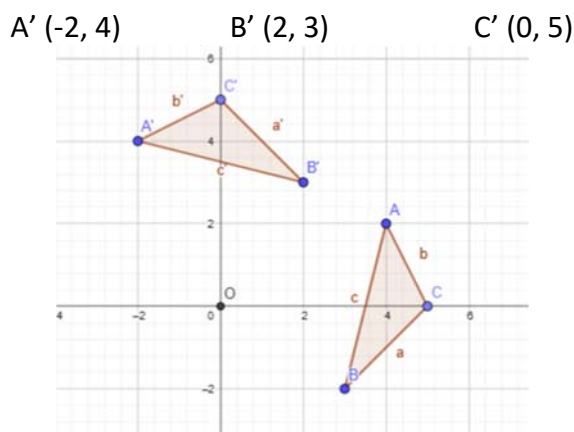
28. Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado.



29. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O , y otro BC que no pase por O . Dibuja los segmentos girados OA' y $B'C'$ del giro de centro O y ángulo 60° .

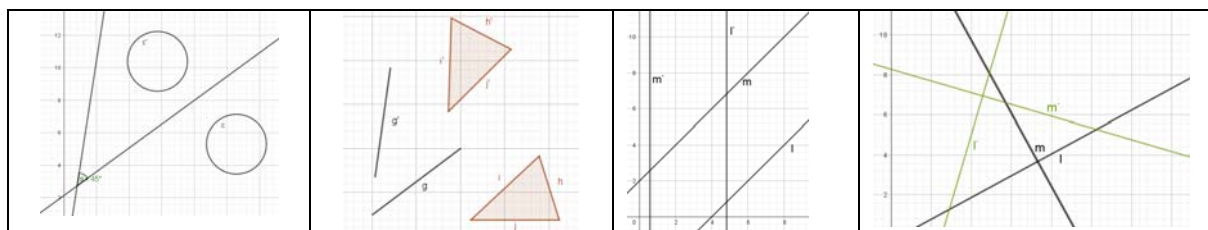


30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices $A(4, 2)$, $B(3, -2)$ y $C(5, 0)$. Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A' , B' y C' del triángulo girado?

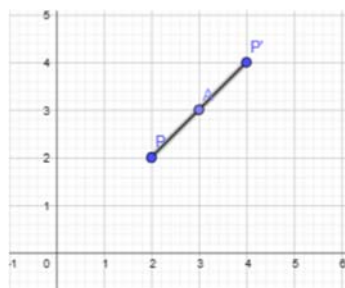


31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Mediante el giro la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.



32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P' . Encuentra su centro de simetría.



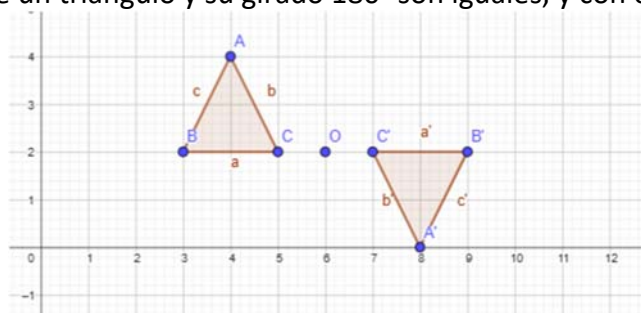
El centro de simetría es el punto A

33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180° ? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0° ? ¿Y con un giro de 360° ?

Un giro de 60° no deja ninguna recta invariante. Un giro de 180° deja invariantes a las rectas que pasan por el centro de giro. Los giros de 0° y de 360° son la identidad, dejan todos los puntos y rectas invariantes.

34. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?

Ya sabes, la simetría central en el plano es un giro de 180° luego es un movimiento directo. Los lados y los ángulos de un triángulo y su girado 180° son iguales, y con el mismo sentido.



La longitud de sus lados es la misma, pero sus ángulos se invierten de sentido. El ángulo ABC es 60° , al igual que el A'B'C'.

35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z.

Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

No tienen simetría central: B, P, T. Si la tienen: H, N, O, S, X y Z.

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

Una puerta, las patillas de unas gafas, un picaporte, un ventilador, una peonza, un taladro, una ruleta de casino, el tambor de una lavadora.

37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Cuando realizamos un giro (una rotación) en el espacio, las formas geométricas se transforman de diferentes maneras según su naturaleza.

Planos: El giro de un plano en el espacio no cambia su naturaleza; simplemente cambia su orientación. Es una figura infinita en el espacio, por lo que su estructura sigue siendo la misma independientemente de cómo se gire.

Esfera: Al ser una figura perfectamente simétrica, un giro no altera su forma ni tamaño. La esfera sigue siendo esférica sin importar cómo se rote.

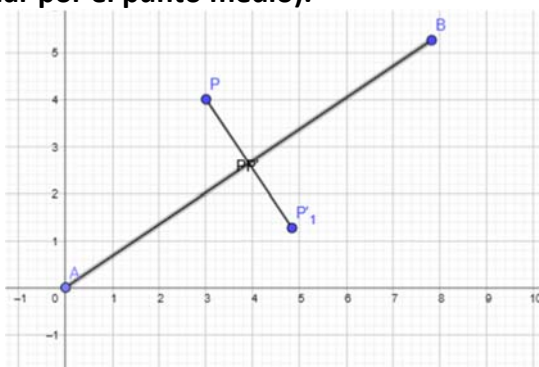
Cono: Aunque el cono puede cambiar su orientación dependiendo de cómo se gire, su forma de "cono" no cambia. Un giro alrededor de su eje principal no afecta su forma, pero otros ejes de rotación pueden cambiar su apariencia visual.

Planos paralelos: Los planos paralelos continúan siendo paralelos después de cualquier rotación. El giro simplemente cambia su orientación en el espacio sin alterar la relación de paralelismo entre ellos.

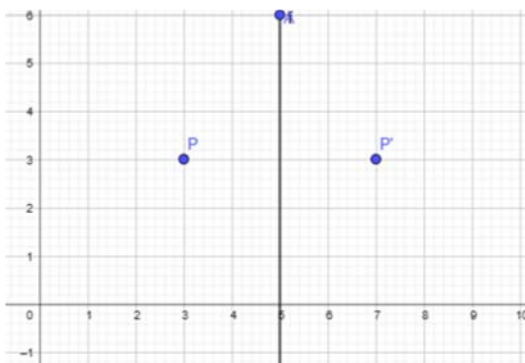
Planos ortogonales: Similar a los planos paralelos, los planos ortogonales continúan siendo ortogonales (en ángulo de 90 grados) después de cualquier rotación. Sin embargo, sus orientaciones en el espacio pueden cambiar dependiendo del eje sobre el que se realice el giro.

4. SIMETRÍAS

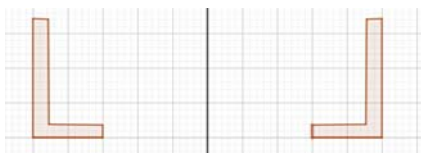
38. Dibuja en tu cuaderno un eje r de simetría oblicuo, y un punto P . Dibuja el punto P' simétrico respecto de r . Comprueba que la recta r es la mediatriz del segmento PP' . (Recuerda: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).



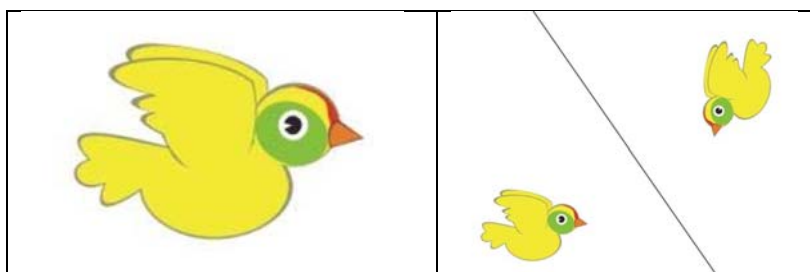
39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P' . Dibuja el eje de simetría r respecto al que son simétricos.



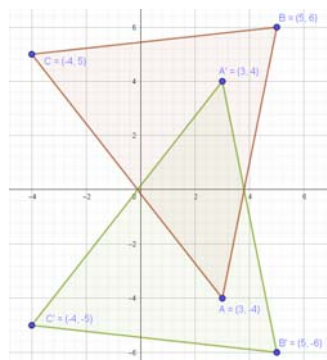
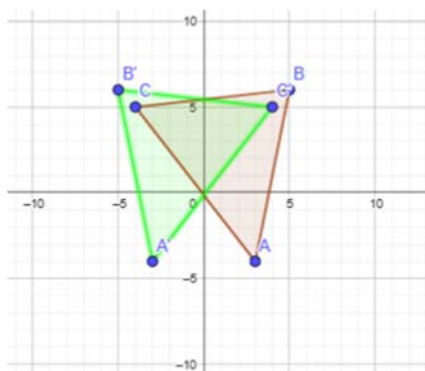
40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.



41. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.



42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo $A(3, -4)$, $B(5, 6)$, $C(-4, 5)$. Lo mismo respecto del eje de abscisas.



Eje de ordenadas: $A'(-3, -4)$, $B'(-5, 6)$, $C'(4, 5)$; Eje de abscisas: $A''(3, 4)$, $B''(5, -6)$, $C''(-4, -5)$.

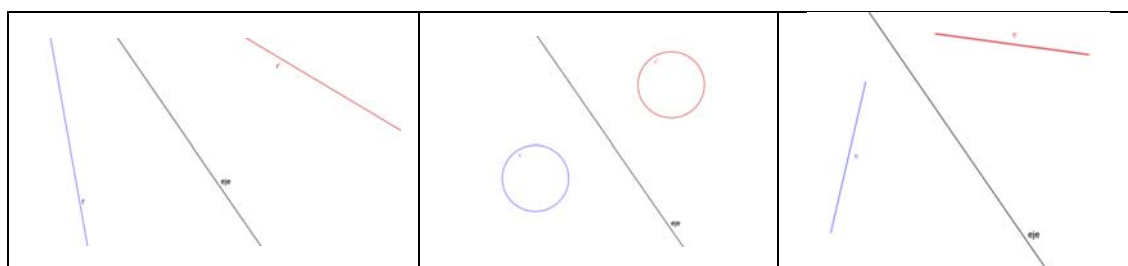
43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

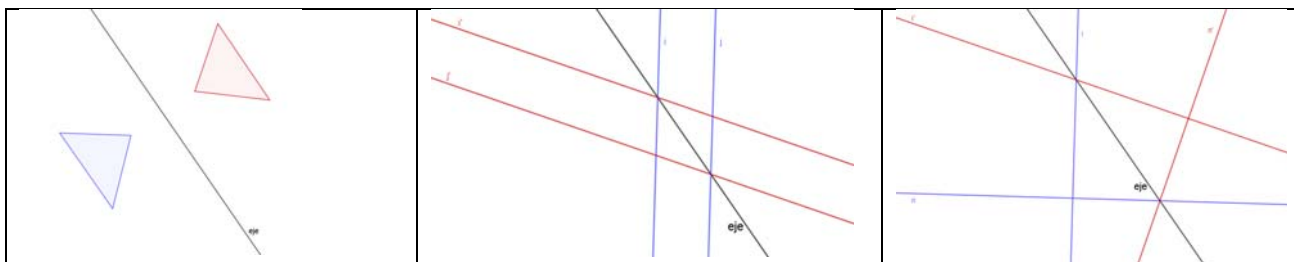
Simétricas con eje horizontal: B, D.

Simétricas con eje vertical: A, M, T, U, V, W, .

No simétricas: F, N, R, Z.

44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.





Una recta se transforma en otra recta.

Una circunferencia se transforma en otra circunferencia.

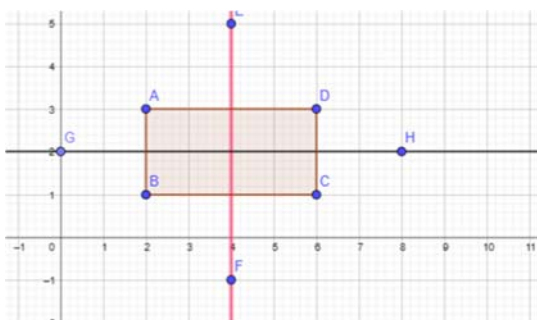
Un segmento se transforma en otro segmento.

Un triángulo se transforma en otro triángulo.

Dos rectas paralelas se transforman en dos rectas paralelas.

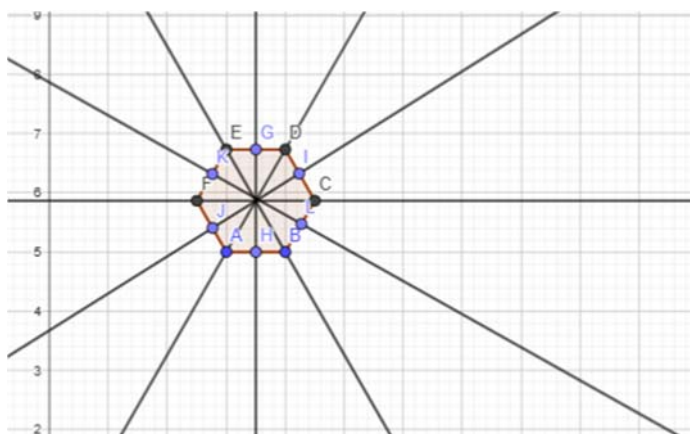
Dos rectas perpendiculares se transforman en dos rectas perpendiculares.

45. Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC



El rectángulo tiene dos ejes de simetría, las mediatrices de los segmentos AB y BC.

46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

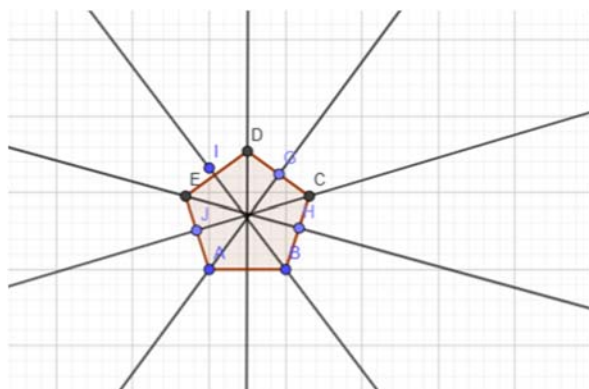


El hexágono tiene 6 ejes de simetría

3: Cada eje pasa por un vértice y por el vértice opuesto.

3: Cada eje pasa por el punto medio de uno de sus lados y por el punto medio del lado opuesto

47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.



Tiene 5. Cada eje pasa por un vértice y por el punto medio de uno de sus lados.

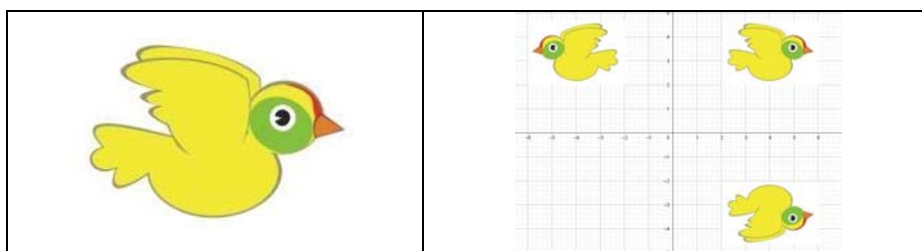
48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

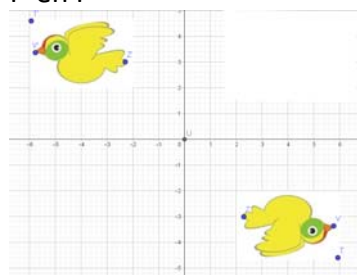
b) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

c) ¿Existe alguna simetría axial que transforme P' en P'' ? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P'' ?

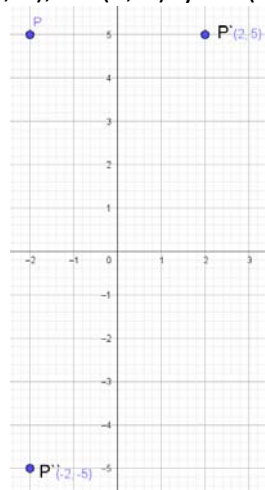
d) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas $(-2, 5)$, ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P' ? ¿Y el del pájaro P'' ?



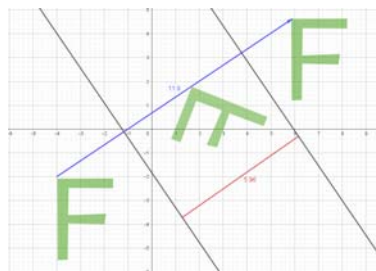
c) No hay simetría axial que transforme P' en P'' .
La simetría central con centro en el origen transforma P' en P'' .



$P(-2, 5)$, $P'(2, 5)$ y $P''(-2, -5)$

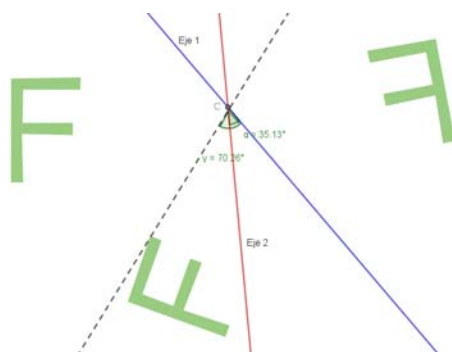


49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.



El vector de traslación es perpendicular a la dirección de las rectas, de sentido de la primera recta a la segunda y de módulo, el doble de la distancia entre las rectas.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.



El centro de giro es el punto de intersección de las rectas, y el ángulo de giro tiene de amplitud el doble del ángulo que forman las rectas y de sentido, de la primera recta a la segunda.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

Para obtener la figura inicial después de haberle aplicado una simetría, debemos aplicar una simetría adicional, específicamente la simetría respecto al mismo eje o simetría inversa. Esto es, aplicar la simetría dos veces. La simetría es involutiva: $s \circ s = \text{Identidad}$.

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180° (o una simetría central)?

Para que el resultado sea un giro de 180° , es necesario que los ejes de simetría estén dispuestos de manera que el ángulo entre ellos sea de 90° . Ortogonales.

53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Una botella de agua es simétrica, con eje vertical, un bolígrafo también lo es, con eje vertical, etc. Las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas... también suelen ser simétricas, con ejes verticales, excepto la ventana, que también tiene eje de simetría horizontal.

54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras: a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo? b) Una pirámide recta de base cuadrada. c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?

a) Tiene 5 planos de simetría, 2 pasan por 4 vértices y 2 aristas laterales; 2 pasan por los puntos medios de 4 aristas de la base; 1 pasa por los puntos medios de las aristas laterales. Tiene un eje de rotación de 90° , 180° y 270° que va de centro de la base cuadrada a centro de la otra base. Un prisma oblicuo, ninguno.

b) Pirámide de base cuadrada tiene 4 planos de simetría, 2 pasan por 2 vértices de la base y el vértice y los otros 2, por los puntos medios de las aristas de la base y el vértice. Tiene un eje de rotación de 90° , 180° y 270° que pasa por el vértice y el centro de cuadrado de la base.

c) Se pierden los planos de simetría que pasan por dos aristas.

55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras: a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero. b) Una pirámide recta de base un triángulo equilátero. ¿Y si es oblicua? c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

Prisma recto de base un triángulo equilátero: 3 planos de simetría verticales. 1 eje de rotación (perpendicular a la base).

Pirámide recta de base un triángulo equilátero: 3 planos de simetría verticales. 1 eje de rotación (a través del vértice y el centro de la base).

Prisma oblicuo de base un triángulo equilátero: No tiene planos de simetría. No tiene ejes de rotación.

Prisma recto de base un triángulo isósceles: 1 plano de simetría vertical. 1 eje de rotación (a través del vértice superior y el centro de la base).

Pirámide recta de base un triángulo isósceles: 1 plano de simetría vertical. 1 eje de rotación (a través del vértice y el centro de la base)

56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Plano: Se transforma en sí mismo, manteniendo la estructura.

Esfera: Se refleja en sí misma, manteniendo la forma y tamaño.

Cono: Se refleja, pero puede cambiar de orientación dependiendo del plano de simetría.

Dos planos paralelos: Se reflejan en otros dos planos paralelos, manteniendo la distancia relativa.

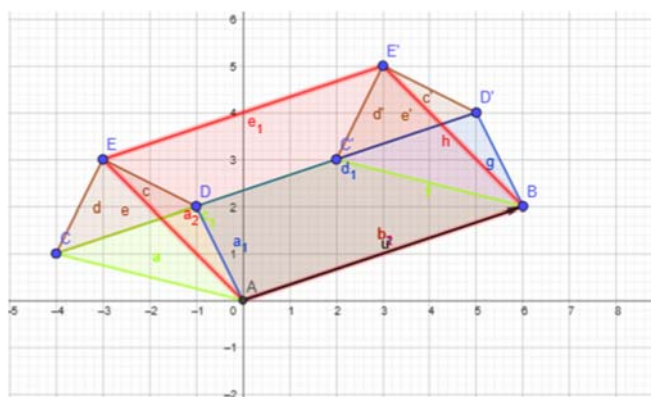
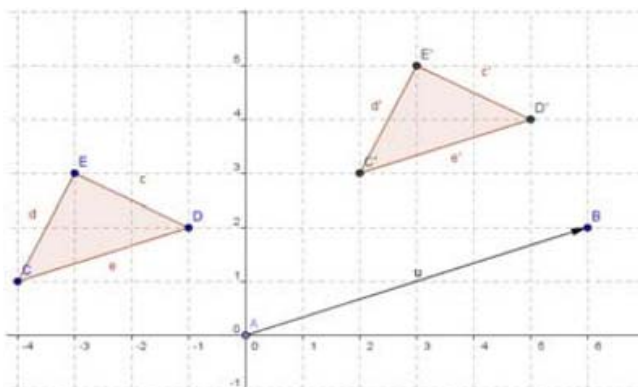
Dos planos ortogonales: Se reflejan en dos planos ortogonales, manteniendo la relación perpendicular.

GEOGEBRA

57. Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.

- En un archivo de Geogebra Visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta Nuevo Punto define el origen de coordenadas como A y el punto de coordenadas (6, 2) como B. y con la herramienta Vector entre dos puntos determina el vector $\vec{u}$ de origen A y extremo B que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con Nuevo Punto C (-4, 1), D (-1, 2) y E (-3, 3) y con Polígono dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
- Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.

- Utiliza la herramienta Trasladar objeto acorde a vector para trasladar el triángulo CDE según el vector u , se obtiene el triángulo $C'D'E'$. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos $ACC'B$, $ADD'B$ y $AEE'B$?



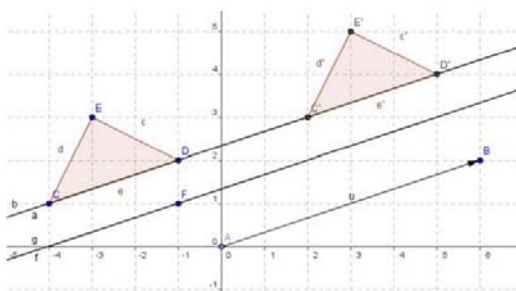
Todos ellos son romboides

58. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos C' , D' y E' se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos C , D , y E las coordenadas del vector u .

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo CDE y $C'D'E'$ coinciden

- Dibuja con Recta que pasa por 2 puntos, la recta a que pasa por los puntos C y D y comprueba, con la ecuación de la recta, que C' y D' están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta a según el vector u , aparece, denominada b , la misma recta. ¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u .
- Para comprobar la conjetura define un Nuevo Punto $F(-1, 1)$ y con Recta paralela dibuja una recta f que pase por F y paralela al vector u .
- Traslada la recta f según el vector u y verás que aparece la recta g que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto B , para que el vector u tenga distinta dirección y observa como la recta a ya no tiene la misma dirección que el vector u y su trasladada, la recta b , es distinta y paralela a ella, sin embargo, la recta f tiene la misma dirección que el vector u y su trasladada g coincide con ella.



- a) $C' (2,3) = C (-4,-2) + u (6,2)$
 $D' (5,4) = D (-1,2) + u (6,2)$
 $E' (3,5) = E (-3,3) + u (6,2)$
- b) Longitud de $CE = ED = CD = 2$. Como los lados son iguales, las áreas serán iguales

59. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

En una traslación general, no hay ningún punto que permanezca invariante, a menos que estemos hablando de una traslación nula.

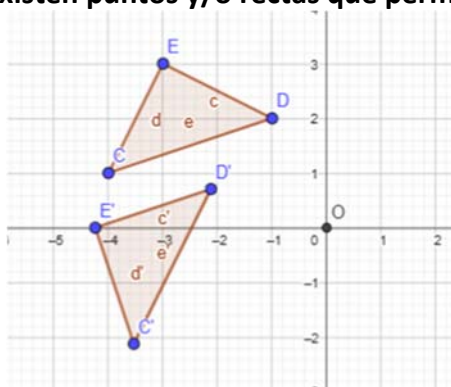
60. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Los puntos invariantes en una simetría axial son los puntos situados sobre el eje de simetría. Es decir, cualquier punto que esté sobre la recta de simetría no cambia de posición después de la reflexión.

Rectas invariantes, además del eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, son rectas invariantes las rectas ortogonales al eje de simetría.

61. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45° .

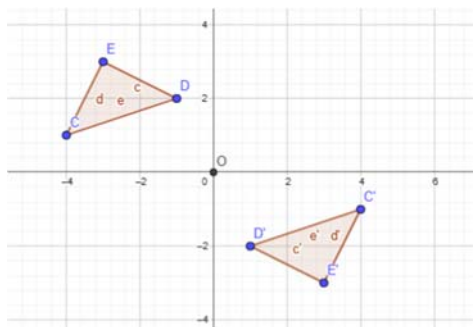
- a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.
- b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.



No existen puntos ni rectas invariantes (si el giro no es de 180°)

62. Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto O como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.

- a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.
- b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180° .
- c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.



En la simetría central, el centro es un punto invariante, y las rectas que pasan por ese centro son rectas invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

63. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.



Dos vectores de traslación ortogonales indicados en rojo. Ejes de simetría horizontales, verticales y oblicuos marcados, algunos de ellos, en verde. Los puntos de intersección de los ejes de simetría son centros de giro de 90° .

Realiza la misma observación con los otros dos azulejos de Estambul siguientes:

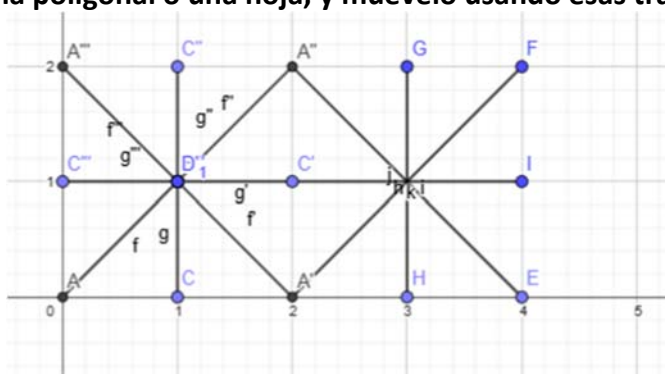


64. Análisis de mosaicos de la Alhambra: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué transformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60° ? ¿Y de 180° ? ¿Y de 30° ?



No hay simetrías. Hay giros de 60° y de 120° .

65. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60° , de 180° y de 30° . Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo, una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.



66. Observa cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90° y 180°) y sus ejes de simetría



67. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal? B) ¿En cuáles hay giros de 180° ? C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

L1. LLLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. Pqdbpqdbp

- A) En L4, L5.
- B) L2, L5.
- C) L3, L5, L7.
- D) Si, en L6 y L7.
- E) Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180° , y simetría con deslizamiento.

68. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90° y de 180° . Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo, una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

Solución abierta y manipulativa:

69. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías.

A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal?

B) ¿En cuáles hay giros de 180° ?

C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical?

D) ¿Hay simetrías con deslizamiento?

E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbbpbpb, L7. pqdbpqdbp

A) En L4, L5.

B) L2, L5.

C) L3, L5, L7.

D) Si, en L6 y L7.

E) Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180° , y simetría con deslizamiento.

70. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas... y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas:

1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces:

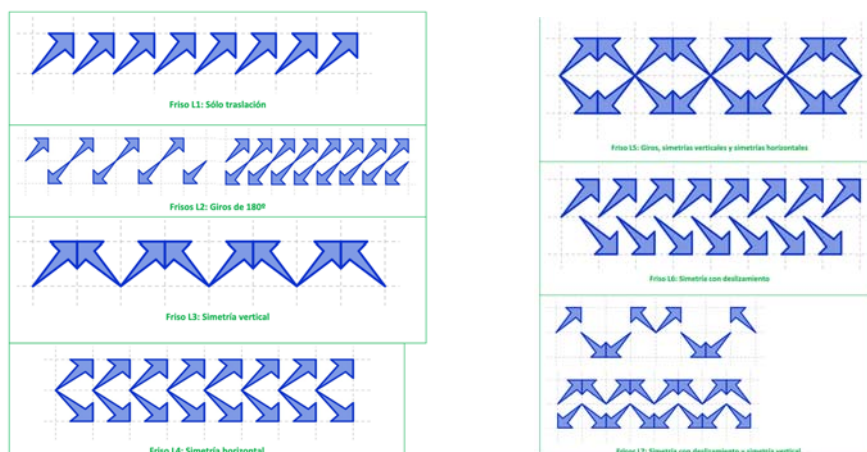
2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces:

3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces:

4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

Solución abierta y manipulativa:

71. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).



En el friso L1 podemos ver que las flechas solo se copian una al lado de la otra. Por lo tanto, hay traslación, pero no giros ni simetría.

En el friso L2 algunas flechas están giradas 180 grados (boca arriba y boca abajo). Por lo tanto, tiene traslación y giros de 180°, pero no simetría.

En el friso L3, si pones un espejo en medio de dos flechas, podemos ver que una es el reflejo de la otra. Por lo tanto, tiene traslación y simetría vertical, pero no giros.

En el friso L4, las flechas de arriba son el reflejo de las de abajo, como si hubiera un espejo en el centro. Tiene traslación y simetría horizontal, pero no giros.

En el friso L5 podemos ver que tiene simetría vertical, ya que si doblamos el dibujo por la línea que pasa por el centro de las flechas, un lado coincide con el otro. Además, tiene simetría horizontal porque si reflejamos el patrón en una línea horizontal, sigue viéndose igual. Podemos observar que tiene giros de 180° ya que si giramos una de las figuras 180°, se superpone con otra figura del friso. Y, por último, también tiene traslaciones, ya que, si deslizamos todo el friso hacia la derecha o la izquierda, sigue siendo el mismo.

El friso L6 solo presenta traslación con deslizamiento porque si movemos el patrón hacia la derecha y hacia abajo se alinea con el siguiente.

Por último, en el friso L7 encontramos simetría vertical, ya que, si doblamos por la línea vertical del centro de cada grupo de flechas, los lados coinciden. También presenta traslación con deslizamiento porque si movemos el patrón hacia la derecha, el siguiente es igual, pero reflejado.

72. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos.



Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

- Tiene simetría central.
- Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
- Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
- Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

a) Tiene simetría central.

2, 3, 4, 7, 9.

b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?

Todos tienen ejes de simetría axial, aunque en diferente cantidad:

Tapacubos 1 - 2 ejes

Tapacubos 2 - 2 ejes

Tapacubos 3 - 4 ejes

Tapacubos 4 - 5 ejes

Tapacubos 5 - 5 ejes

Tapacubos 6 - 5 ejes

Tapacubos 7 - 5 ejes

Tapacubos 8 - 5 ejes

Tapacubos 9 - 6 ejes

Tapacubos 10 - 2 ejes

Tapacubos 11 - 12 ejes

Tapacubos 12 - 12 ejes

c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?

Un tapacubos tiene centro de giro si podemos girarlo ciertos grados y sigue viéndose igual. El menor ángulo de giro lo obtenemos dividiendo 360° entre el número de veces que la figura se repite en una vuelta completa.

Todos tienen centro de giro y el menor ángulo de giro de cada uno es:

Tapacubos 1 - 180°

Tapacubos 2 - 180°

Tapacubos 3 - 90°

Tapacubos 4 - 72°

Tapacubos 5 - 72°

Tapacubos 6 - 72°

Tapacubos 7 - 72°

Tapacubos 8 - 72°

Tapacubos 9 - 60°

Tapacubos 10 - 180°

Tapacubos 11 - 30°

Tapacubos 12 - 30°

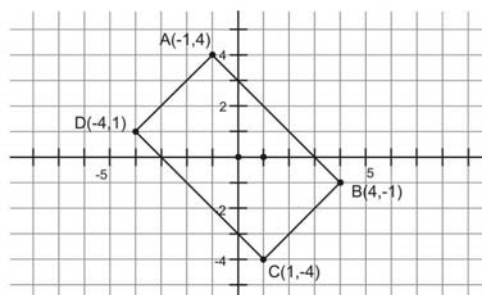
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

Solución abierta

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

TRASLACIÓN

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?



$$\mathbf{AB} = (4 - (-1), -1 - 4) = (4 + 1, -1 - 4) = (5, -5)$$

$$\mathbf{BC} = (1 - 4, -4 - (-1)) = (1 - 4, -4 + 1) = (-3, -3)$$

$$\mathbf{CD} = (-4 - 1, 1 - (-4)) = (-4 - 1, 1 + 4) = (-5, 5)$$

$$\mathbf{DA} = (-1 - (-4), 4 - 1) = (-1 + 4, 4 - 1) = (3, 3)$$

Ningún par de vectores tiene exactamente las mismas coordenadas, pero los lados opuestos tienen coordenadas iguales y opuestas en signo, como es característico en un paralelogramo.

2. Tenemos los puntos A (0, 5), B (3, 6), C (4, -2) y D (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores AB; AC; AD; BC; BD; CD; DC; BA.

$$\mathbf{AB} = (3 - 0, 6 - 5) = (3, 1)$$

$$\mathbf{AC} = (4 - 0, -2 - 5) = (4, -7)$$

$$\mathbf{AD} = (7 - 0, 3 - 5) = (7, -2)$$

$$\mathbf{BC} = (4 - 3, -2 - 6) = (1, -8)$$

$$\mathbf{BD} = (7 - 3, 3 - 6) = (4, -3)$$

$$\mathbf{CD} = (7 - 4, 3 - (-2)) = (3, 5)$$

$$\mathbf{DC} = (4 - 7, -2 - 3) = (-3, -5)$$

$$\mathbf{BA} = (0 - 3, 5 - 6) = (-3, -1)$$

3. Determina el vector de traslación que traslada el punto A (3, 7) al punto A' (1, 5).

$$\mathbf{AA'} = (1 - 3, 5 - 7) = (-2, -2)$$

4. Por la traslación de vector $\mathbf{u} = (2, 8)$ se traslada el punto A (9, 4) al punto A'. ¿Cuáles son las coordenadas de A'?

Si llamamos a A(a, b) y a A'(c, d), sabemos que $\mathbf{u} = (c - a, d - b)$, por lo tanto:

$(2, 8) = (c - 9, d - 4)$. De esta forma podemos obtener:

$$c - 9 = 2, \quad d - 4 = 8$$

$$\text{Así: } \mathbf{A'} = (9 + 2, 4 + 8) = (11, 12)$$

5. Por la traslación de vector $u = (-3, -1)$ se traslada el punto A al punto A' (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de A?

Al igual que en el ejercicio anterior, sabemos:

$$u = (-3, -1), \quad A' = (3, 3)$$

Por lo tanto:

$$3 = a - 3 \Rightarrow a = 3 + 3 = 6$$

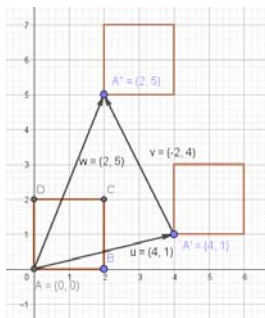
$$3 = b - 1 \Rightarrow b = 3 + 1 = 4 \quad \text{Luego, } A(6, 4)$$

6. Trasladamos la circunferencia de centro C (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector $u = (-5, -2)$. Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

Para encontrar el nuevo centro de la circunferencia trasladada, aplicamos la traslación sumando el vector de traslación $u = (-5, -2)$ a las coordenadas del centro original C(5, 2):

$$C' = (-5+5, -2+2) = (0, 0). \text{ El radio no varía, 3 unidades.}$$

7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas C, le aplicas una traslación según el vector $u = (4, 1)$ y llamas C' a su trasladado. Ahora aplicas a C' una traslación según el vector $v = (-2, 4)$. La isometría que transforma C en C'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?



El cuadrado tiene los vértices en los siguientes puntos:

$$A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$$

Primero vamos a aplicar la traslación $u = (4,1)$ sumando el vector a cada vértice:

$$A' = (0+4, 0+1) = (4, 1)$$

$$B' = (2+4, 0+1) = (6, 1)$$

$$C' = (2+4, 2+1) = (6, 3)$$

$$D' = (0+4, 2+1) = (4, 3)$$

Ya tenemos los vértices de C'

Ahora aplicamos una traslación $v = (-2,4)$ sumando el vector a cada vértice:

$$A'' = (4-2, 1+4) = (2, 5)$$

$$B'' = (6-2, 1+4) = (4, 5)$$

$$C'' = (6-2, 3+4) = (4, 7)$$

$$D'' = (4-2, 3+4) = (2, 7)$$

Por último, calculamos el vector total de la transformación:

$$u+v = (4,1) + (-2,4) = (4-2, 1+4) = (2, 5)$$

Esto significa que la transformación de CC a C''C'' es una traslación de vector (6,5), por lo que sí es una traslación.

Con esto sabemos que el origen de coordenadas se transforma en el vector total, ya que:

$$O' = (0+2, 0+5) = (2, 5)$$

8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector $u = (-2, 4)$, ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?

Aplicar una traslación de vector u significa que cada punto del cuadrado se traslada 2 unidades hacia la izquierda en el eje x y 4 unidades hacia arriba en el eje y .

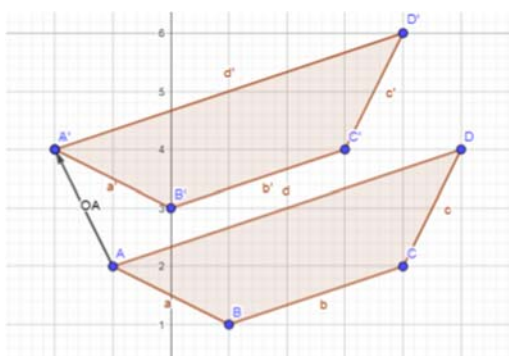
Además, teniendo los vértices A y B, y sabiendo que la distancia entre ellos es 2, podemos saber los otros dos vértices:

C (3, 5) , D (5, 3)

Por tanto, al aplicar la traslación, los vértices transformados serán:

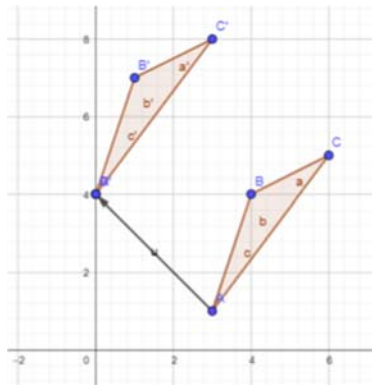
A' (1, 5) , B' (-1, 7) , C' (1, 9) , D' (3, 7)

9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector $OA = (-1, 2)$. Determina las coordenadas de los puntos transformados de A (-1, 2), B (1, 1), C (4, 2) y D (5, 4) por dicha traslación.



A' (-2, 4) , B' (0, 3) , C' (3, 4) , D' (4, 6)

10. Aplica la traslación de vector $u = (-3, 4)$ al triángulo ABC de vértices A (3, 1), B (4, 4), C (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.



A' (0, 4) , B' (1, 8) , C' (3, 9)

11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.

a) Trasládalo con la traslación de vector $u = (3, 0)$.

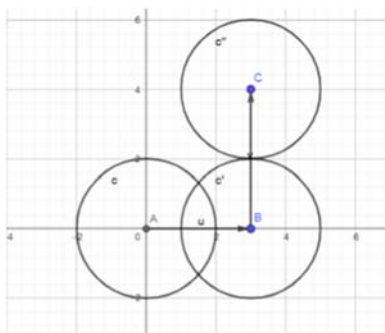
b) Trasládalo después mediante la traslación de vector $v = (0, 4)$.

c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.

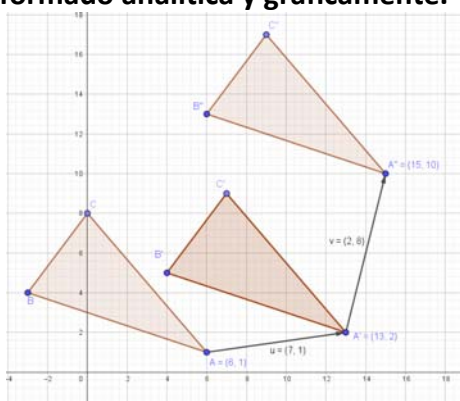
d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

Las coordenadas del centro de segundo círculo son (3, 4)

Las coordenadas del punto (0, 2) son (3, 2) tras la primera traslación y (3, 6) tras la segunda



12. Trasladamos el triángulo ABC de vértices A (6, 1), B (-3, 4) y C (0, 8), mediante la traslación de vector $u = (7, 1)$, y luego mediante la traslación de vector $v = (2, 8)$. Determina las coordenadas del triángulo transformado analíticamente y gráficamente.



$$A' = (6, 1) + (7, 1) = (13, 2)$$

$$B' = (-3, 4) + (7, 1) = (4, 5)$$

$$C' = (0, 8) + (7, 1) = (7, 9)$$

$$A'' = (13, 2) + (2, 8) = (15, 10)$$

$$B'' = (4, 5) + (2, 8) = (6, 13)$$

$$C'' = (7, 9) + (2, 8) = (9, 17)$$

13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector $u = (7, 3)$, ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

La composición de las traslaciones tiene el vector resultante (5, 9), entonces $u + v = (5, 9)$

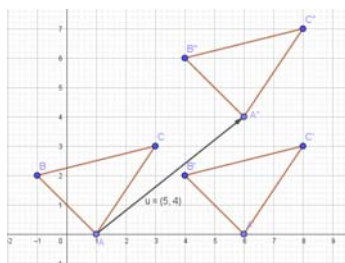
Sabiendo que $u = (7, 3)$, y sustituyéndolo en la ecuación, $v = (5, 9) - (7, 3) = (-2, 6)$

14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo ABC y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina A'B'C' al triángulo obtenido.

b) Traslada A'B'C' ahora 4 cm hacia arriba y denomina A''B''C'' al nuevo triángulo.

c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo ABC al A''B''C'' y mide su longitud.

¿Cuáles son sus coordenadas?



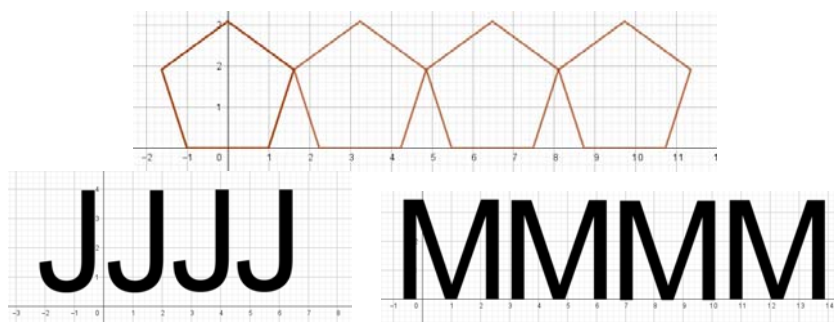
$$u = (5, 4).$$

$$\text{Longitud} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6.4 \text{ cm}$$

15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector $u = (-2, 5)$.

Para obtener la traslación inversa, simplemente cambiamos el signo de las componentes del vector original, por lo que el vector sería $u' = (2, -5)$

16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
 b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
 c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos... y dibuja su diseño en tu cuaderno.



- b) El friso con la letra M tiene simetrías verticales
 c) Solución gráfica y abierta

17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

La traslación es una isometría, conserva distancias y ángulos, por tanto, transforma un plano en un plano, una esfera en una esfera, un cono en un cono mantiene el paralelismo y la ortogonalidad.

- Plano: Se mantiene como plano, pero se desplaza sin alterar su forma ni orientación.
- Esfera: Se mantiene como esfera, con el mismo tamaño, solo que trasladada a otra ubicación.
- Cono: Se mantiene como cono, con el mismo tamaño y forma, solo desplazado en el espacio.
- Dos planos paralelos: Después de la traslación, los planos siguen siendo paralelos y mantienen la misma distancia entre sí.
- Dos planos ortogonales: Los planos siguen siendo ortogonales y mantienen la relación de perpendicularidad.

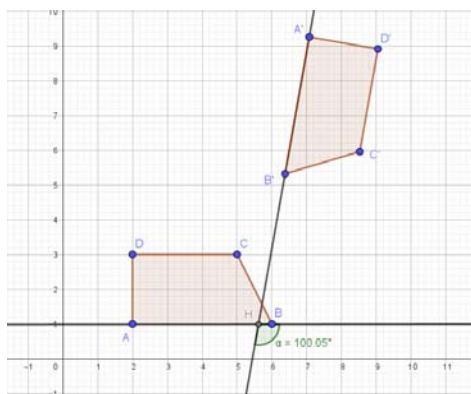
La traslación mantiene las propiedades geométricas esenciales (como la forma, tamaño y relaciones angulares) de los objetos, solo cambia su posición en el espacio.

GIROS

18. Dibuja en tu cuaderno el punto A (5, 4). Indica las coordenadas del punto A' que se obtiene al girar 180° y con centro el origen el punto A. Indica las coordenadas del punto A'' obtenido al girar A' 90° con el mismo centro de giro.

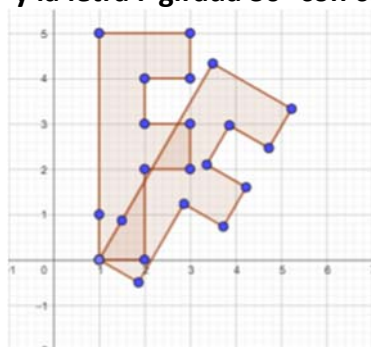
El punto A (5, 4) al girar 180° con centro en el origen se transforma en A' (-5, -4)
 Luego, al girar A' (-5, -4) 90° con centro en el origen, se obtiene el punto A'' (-4, 5)

19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.



Las dos figuras tienen todas las longitudes y los ángulos iguales.
El centro es H y hemos aplicado un giro de unos 80°

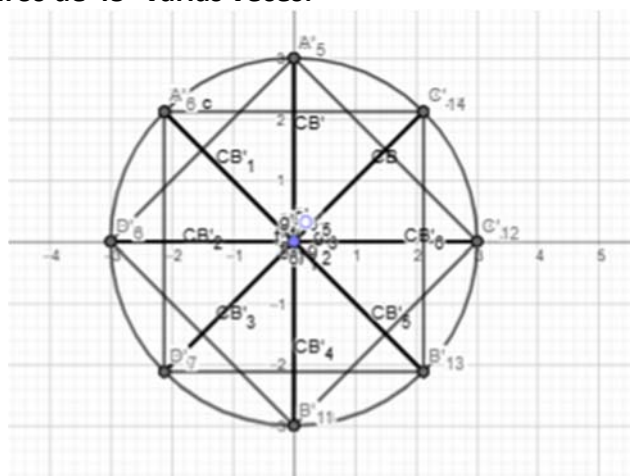
20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30° con centro de giro su punto más inferior.



21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45° en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45° , y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

En 8 giros de 45° llegas al triángulo inicial, luego los giros han sido de 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° , 360° .

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro O, dos diámetros perpendiculares AB y CD y una cuerda CB. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro O y ángulos 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° y 315° . Habrás hecho la composición de giros de 45° varias veces.

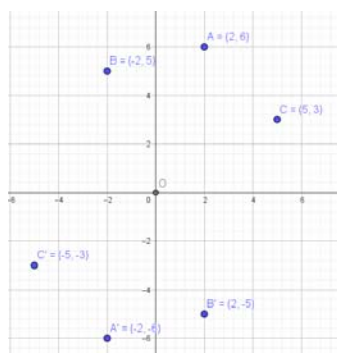


23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

Sí, la letra H tiene centro de simetría. Esto significa que, si dibujamos un punto en el centro de la letra H y luego trazamos una línea recta desde cualquier punto de la letra hasta el centro, esa línea tendrá un punto simétrico en el lado opuesto, a la misma distancia del centro, en la misma dirección, pero en el lado opuesto.

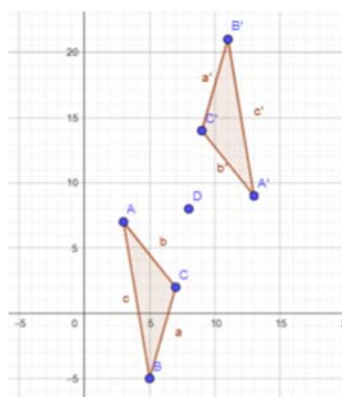
Otros objetos simétricos de forma central pueden ser una pelota, un espejo redondo, la luna llena, un cubo, una flor de seis pétalos.

24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos A (2, 6), B (-2, 5), C (5, 3) y sus simétricos respecto al origen A', B' y C'. ¿Qué coordenadas tienen A', B' y C'?



$A'(-2, -6)$, $B'(2, -5)$, $C'(-5, -3)$

25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (3, 7), B (5, -5) y C (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto D (8, 8) un ángulo de 180° . Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del nuevo triángulo?



Sí, es una simetría central. $A' = (13, 9)$, $B' = (11, 21)$ y $C' = (9, 14)$.

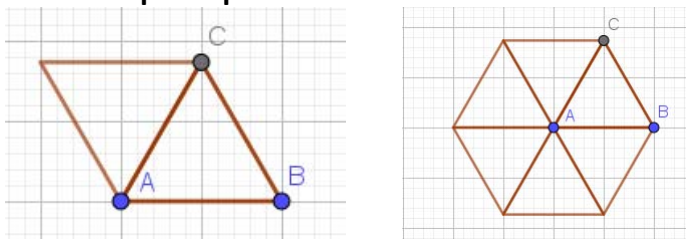
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto P y su simétrico P' respecto del origen. Si las coordenadas de P son (x, y), ¿cuáles son las de P'?

Las coordenadas de P' serán $(-x, -y)$

27. Dado el triángulo A(3, -4), B (5, 6), C (-4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

$A' = (-3, 4)$, $B' = (-5, -6)$, $C' = (4, -5)$.

28. Dibuja un triángulo equilátero ABC y con centro en el vértice A aplícale un giro de ángulo 60° . El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo transformado el mismo giro de centro A, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?

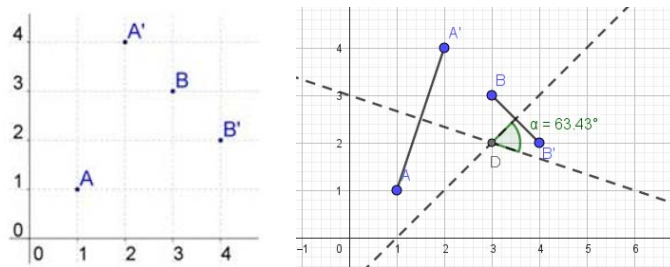


El triángulo original y el transformado forman un rombo.

Los giros realizados son de 60° en torno al vértice A.

Se deben aplicar 6 giros de 60° para que el triángulo regrese a su posición original y obtenemos un hexágono.

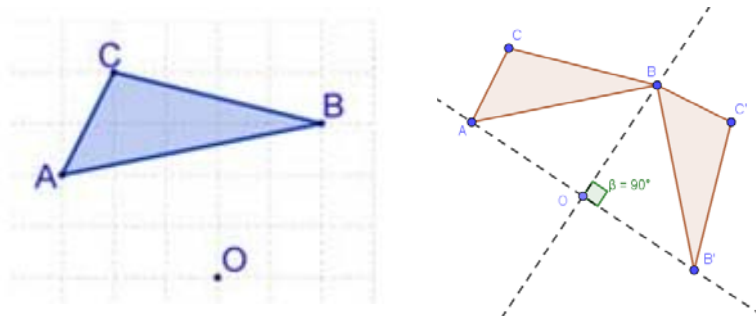
29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos A y B se han transformado mediante un giro en A' y B'.



Hay que dibujar la mediatriz del segmento AA' y la del segmento BB' y buscar el punto donde se cortan.

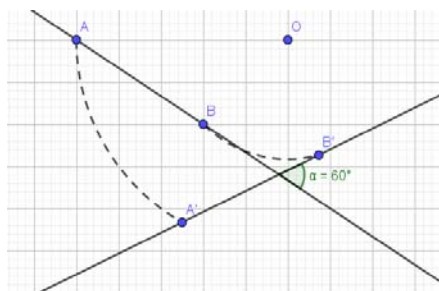
El centro es el punto D(3, 2) y el ángulo $63,43^\circ$

30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro O que transforma el punto A en el punto B.



Resulta otro triángulo igual

31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60° respecto a un punto O exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?



El ángulo formado por las dos rectas es de 60°

Basta girar el punto donde corta a la recta la ortogonal desde el punto O.

32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

Juega. Con la ayuda es fácil descubrir la estrategia ganadora.

33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45° ? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

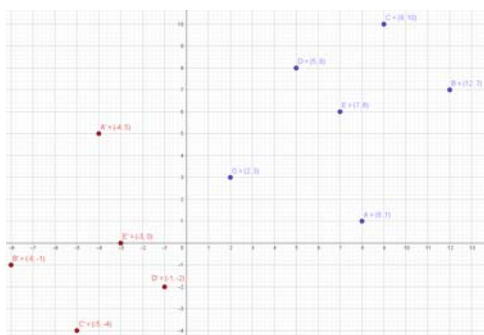


De 90° . No. Hay ejes de simetría ortogonales. Los centros de giro están en la intersección de dichos ejes.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos: a) Pentágono regular b) Hexágono regular d) Triángulo equilátero g) Rombo e) Rectángulo h) Paralelepípedo c) Decágono regular f) Cuadrado i) Octógono regular

POLÍGONO	CENTRO DE GIRO	MÍNIMO ÁNGULO DE GIRO
Pentágono regular	Centro del pentágono	72°
Hexágono regular	Centro del hexágono	60°
Decágono regular	Centro del decágono	36°
Triángulo equilátero	Centro del triángulo	120°
Rectángulo	Centro del rectángulo	180°
Cuadrado	Centro del cuadrado	90°
Rombo	Centro del rombo	180°
Paralelepípedo	Centro del paralelepípedo	90°
Octógono regular	Centro del octógono	45°

35. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto A (8, 1) es el punto A' (4, 5). Calcula los simétricos de los puntos B (12, 7), C (9, 10), D (5, 8) y E (7, 6).



$B'(-8, -1), C'(-5, -4), D'(-1, -2), E'(-3, 0)$

36. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?

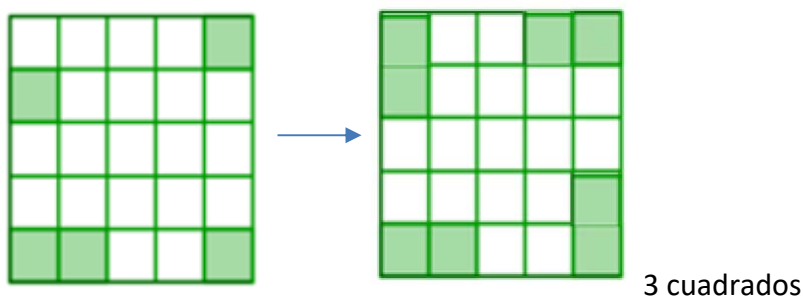


Tiene centro de giro de 18°

37. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

La simetría central es un movimiento directo, conserva distancias y ángulos.

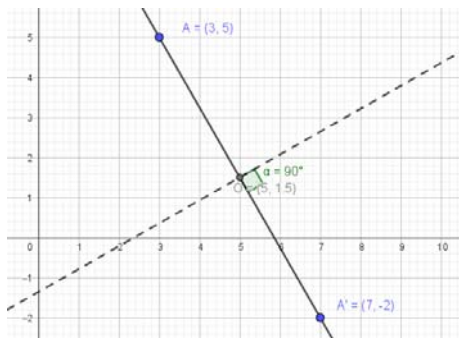
38. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?



39. Hemos girado el punto A (3, 5) y hemos obtenido el punto A' (7, -2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

El centro de giro O se encuentra en la mediatriz de la línea AA'.

El ángulo de rotación es el ángulo entre el vector OA y OA' que puedes medir con el transportador de ángulos. (180°)



40. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.



Tienen centro de simetría el de 12 puntas y el de 8 puntas. El de 5, no. El ángulo de giro es de: 72° , 30° , 45° , respectivamente.

41. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

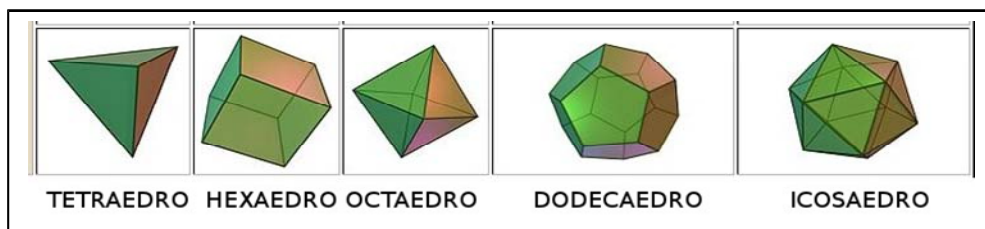
Por ejemplo, algo con forma de cilindro, cono o esfera.

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?



El eje de giro es la recta que pasa por el centro de la torre. Ángulo de giro 90°

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



Los poliedros regulares que tienen simetría central son:

Cubo (Hexaedro regular)

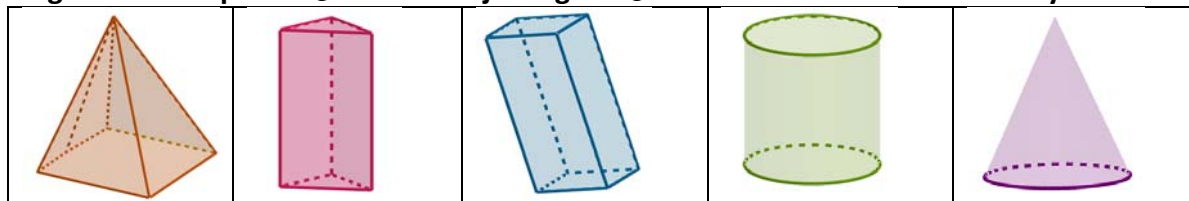
Octaedro

Dodecaedro

Icosaedro

El tetraedro no tiene simetría central.

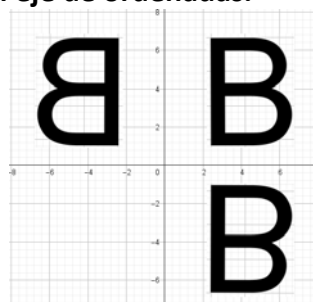
44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



CUERPO GEOMÉTRICO	GIRO	EJE DE GIRO	SIMETRÍA CENTRAL
Pirámide cuadrangular regular	Si	Eje perpendicular a la base cuadrada (pasando por el vértice y centro de la base)	No
Prisma triangular regular	Si	Eje perpendicular a las bases triangulares	No
Prisma romboidal oblicuo	No	No tiene un eje de giro simétrico	No
Cilindro	Si	Eje central que conecta las bases circulares	Si
Cono	Si	Eje que pasa por el vértice y el centro de la base circular	No

SIMETRÍAS

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.



46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto,

a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical.

b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical,

c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y

d) en las que no tienen ningún eje de simetría.

e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

a) Letras con simetría respecto a ejes horizontales y verticales: H, I, O, X.

b) Letras simétricas solo respecto de un eje de simetría vertical: A, M, T, U, V, W, X, Y.

c) Letras simétricas solo respecto de un eje de simetría horizontal: B, C, D, E, K.

d) Letras que no tienen ningún eje de simetría: F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z.

e) Las letras que tienen dos ejes de simetría (y, por lo tanto, centro de simetría): H, I, O, X.

47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

- a) ONO
- b) NON
- c) DODO
- d) OIO
- e) HEMO
- f) HOOH

SUCESIÓN	EJE DE SIMETRÍA	CENTRO DE SIMETRÍA
ONO	Ninguno	No
NON	Ninguno	No
DODO	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si
OIO	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si
HEMO	Ninguno	No
HOOH	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si

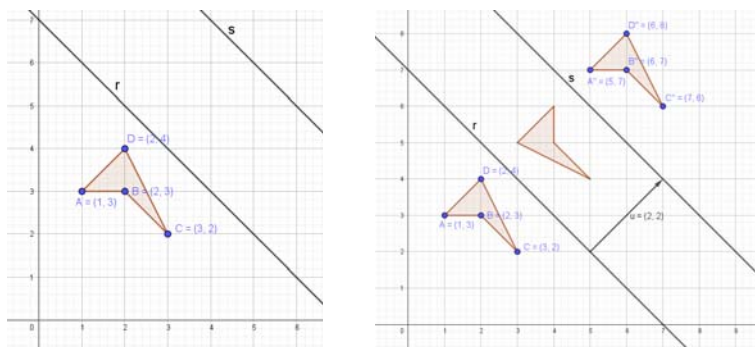
48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

- a) Cuadrado.
- b) Triángulo equilátero.
- c) Trapecio isósceles.
- d) Hexágono.
- e) Circunferencia.
- f) Rectángulo.
- g) Rombo.
- h) Pentágono.

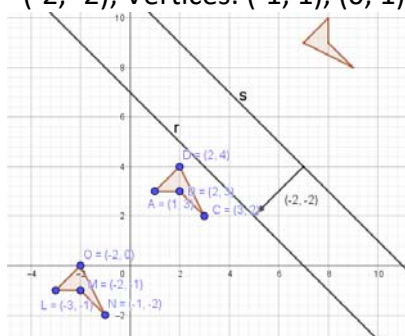
FIGURA	NUMERO DE EJES	DESCRIPCIÓN
Cuadrado	4	2 ejes verticales, 2 horizontales (en el centro de los lados y diagonales)
Triángulo equilátero	3	Desde cada vértice hacia el centro
Trapecio isósceles	1	A través del centro de la base mayor
Hexágono	6	3 ejes pasando por vértices y 3 ejes pasando por centro de los lados
Circunferencia	Infinitos	Cualquier eje que pase por el centro de la circunferencia
Rectángulo	2	1 eje vertical y 1 eje horizontal que pasan por el centro
Rombo	2	Ejes diagonales que conectan los vértices opuestos
Pentágono	5	5 ejes pasando desde los vértices hasta el centro del pentágono

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje r y la segunda respecto al eje s .

- a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías. Si llamamos C al cuadrilátero inicial, C' a su simétrico respecto al eje r y C'' al simétrico de C' respecto al eje s :
- b) ¿Qué isometría nos permite transformar directamente C en C'' ?
- c) ¿Qué elementos la definen?
- d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje s y después respecto al eje r ? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura C''' transformada?

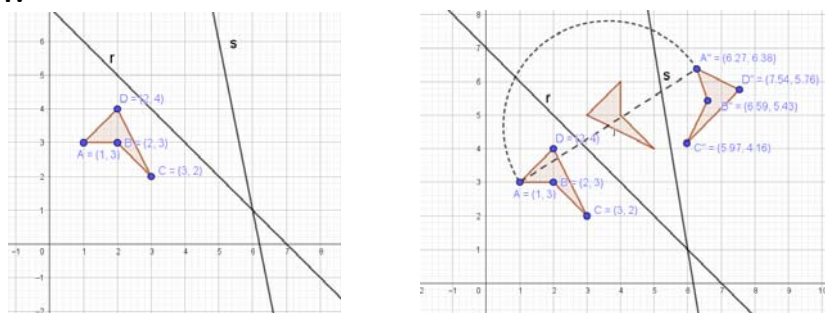


- a) (5, 7), (6, 7), (7, 6) y (6, 8);
 b) y c) Una traslación de vector $u = (2, 2)$;
 d) Es otra traslación de vector $-u = (-2, -2)$; Vértices: (-1, 1), (0, 1), (1, 0) y (0, 2).



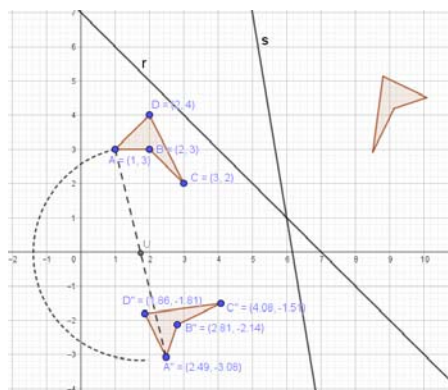
50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje r y la segunda respecto al eje s .

- a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.
 b) Si llamamos C al polígono inicial, C' al simétrico respecto al eje r y C'' al simétrico de C' respecto al eje s : ¿Qué isometría nos permite transformar directamente C en C'' ? ¿Qué elementos la definen?
 c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje s y después respecto al eje r ? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?
 d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje s y luego la de eje r .



- a) Las coordenadas de los vértices de C'' después de la composición de simetrías son:
 $A''(6.27, 6.38)$, $B''(6.59, 5.43)$, $C''(5.97, 4.16)$, $D''(7.54, 5.76)$
 b) La isometría que transforma directamente C en C'' es una rotación de 180° .
 c) Si aplicamos las simetrías en distinto orden (primero respecto a s , luego respecto a r), la isometría sigue siendo una rotación de 180° .
 d) Las coordenadas de los vértices de C''' (simétrico respecto a s y luego respecto a r) son:

$A''(2.49, -3.08)$, $B''(2.81, -2.14)$, $C''(4.08, -1.51)$, $D''(1.86, -1.81)$



51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G).

a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento.

b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra?

c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

a) Son iguales;

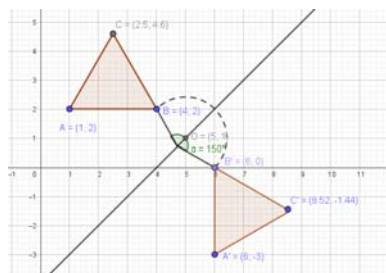
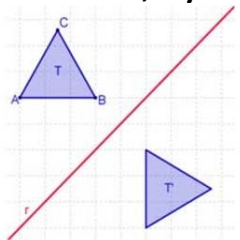
b) Puedes pasar de una a otra mediante isometrías directas, es decir, traslaciones y giros. Si las haces coincidir dando la vuelta, es mediante simetrías.

Las dimensiones no cambian.

52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje r.

a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a A', B' y C', que son los transformados de A, B y C respectivamente.

b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los transformados de los vértices A, B y C?



El centro del ángulo de giro es $(5, 1)$

El ángulo es de 150°

$A'(6, -3)$ $B'(6, 0)$ $C'(8.52, -1.44)$

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras...

Solución gráfica y abierta

PROBLEMAS

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.

a) Una traslación según el vector $(1, 3)$.

b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.

c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

a) La traslación no deja ningún punto invariante, y deja invariantes las rectas paralelas al vector de traslación.

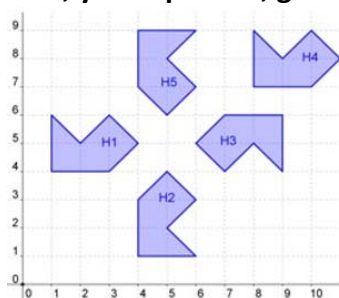
b) La simetría axial deja invariantes a los puntos del eje de simetría, en este caso, al eje de ordenadas. El eje es una recta invariante de puntos invariantes. Rectas invariantes son también las perpendiculares al eje de ordenadas, en este caso, las rectas horizontales.

c) La simetría central deja invariante al centro de simetría, en este caso, al origen de coordenadas. Deja invariantes a las rectas que pasan por el centro, en este caso a las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos.

A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que transforma H1 en cada uno de los otros hexágonos.

B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.



H1: $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ y $(3, 4)$;

H2: simetría; Vértices: $(4, 1)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$, $(5, 4)$ y $(4, 3)$;

H3: simetría central de centro $(9, 6)$;

Vértices $(9, 4)$, $(8, 5)$, $(7, 4)$, $(6, 6)$, $(7, 6)$;

H4: traslación de vector $(7, 3)$;

Vértices $(8, 7)$, $(8, 9)$, $(9, 8)$, $(10, 9)$, $(11, 8)$ y $(10, 7)$

H5: giro de 90° . Vértices $(4, 9)$, $(6, 9)$, $(5, 8)$, $(6, 7)$, $(4, 7)$ y $(4, 9)$;

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero,

a) ¿deja alguna recta invariante?

b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?

c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?

d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

a) Las traslaciones dejan invariante a las rectas paralelas al vector de traslación.

b) La simetría central, tanto en el plano como en el espacio, deja invariante a las rectas que pasan por el centro.

c) La simetría axial deja invariante a las rectas perpendiculares al eje de simetría. Los únicos puntos invariantes son los del eje.

d) La simetría especular deja invariantes a las rectas y a los planos ortogonales al plano de simetría. Solo deja invariantes a los puntos del plano de simetría.

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

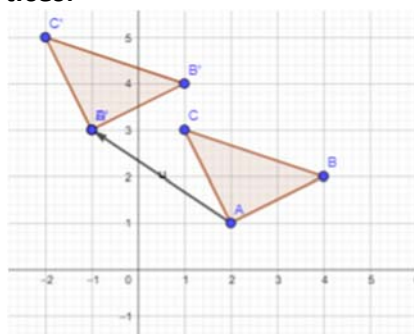
Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación	<i>Ninguno</i>	<i>Paralelas al vector de traslación</i>	<i>Ninguna</i>
Simetría central	<i>El centro</i>	<i>Rectas que pasan por el centro</i>	<i>Ninguna</i>
Giro	<i>El centro de giro</i>	<i>Rectas que pasan por el centro</i>	<i>Ninguna</i>
Simetría axial	<i>El eje de simetría</i>	<i>El eje y las perpendiculares al eje</i>	<i>El eje de simetría</i>
Simetría con deslizamiento	<i>Ninguna</i>	<i>Ninguna</i>	<i>Ninguna</i>

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación	<i>Ninguno</i>	<i>Paralelas al vector de traslación</i>	<i>Ninguno</i>
Simetría central	<i>El centro</i>	<i>Rectas que pasan por el centro</i>	<i>Los planos que pasan por el centro</i>
Giro	<i>Los puntos del eje de giro</i>	<i>Rectas ortogonales al eje</i>	<i>Los planos que contienen al eje de giro</i>
Simetría especular	<i>El plano de simetría</i>	<i>Las del plano de simetría y las ortogonales al plano</i>	<i>El plano de simetría y los planos ortogonales al plano de simetría</i>
Simetría con deslizamiento	<i>Ninguna</i>	<i>Ninguna</i>	<i>Ninguno</i>

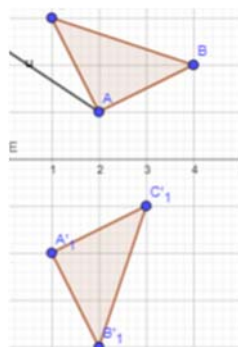
58. Dibuja el triángulo T de vértices A (2, 1), B (4, 2) y C (1, 3)

a) Aplica a T una traslación según el vector $u = (-3, 2)$, llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270° respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.



$A' (-1, 3), \quad B' (1, 4), \quad C' (-2, 5)$

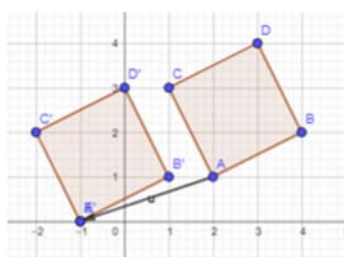


$A' (1, -2), \quad B' (-2, -4), \quad C' (-3, -1)$

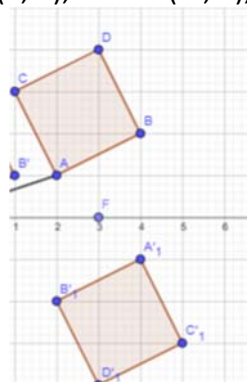
59. Dibuja el cuadrado K de vértices A (2, 1), B (4, 2), C (1, 3) y D (3, 4).

a) Aplica a K una traslación según el vector $u = (-3, -1)$, llama K' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado C'' que resulta de aplicar a C una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.



$A' (-1, 0), \quad B' (1, 1), \quad C' (-2, 2), \quad D' (0, 3)$



$A' (4, -1), \quad B' (2, -2), \quad C' (5, -3), \quad D' (3, -4)$

PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

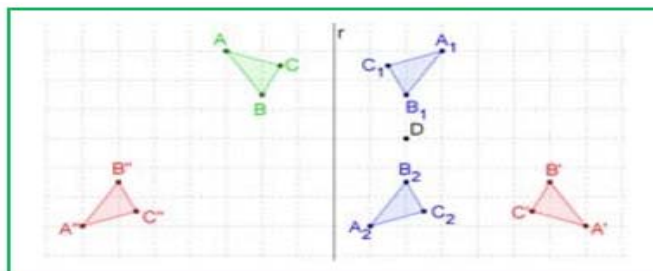
Si. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y desplégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

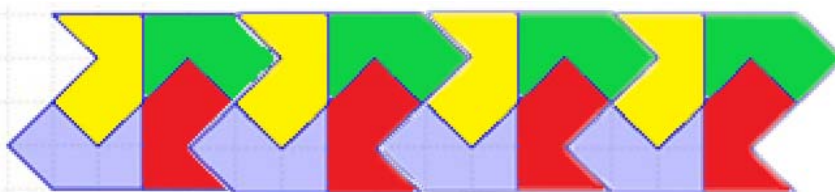
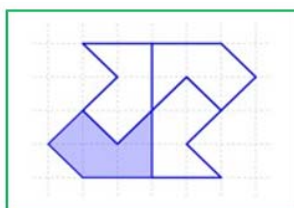
62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

- Determina la isometría que transforma el triángulo ABC en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$
- Indica la isometría que transforma el triángulo ABC en $A'B'C'$ y la que transforma éste en $A''B''C''$.
- ¿Qué conclusión obtienes?



- Simetría de eje r y giro de 180° de centro D ;
- Giro de centro D y 180° , y simetría de eje la recta r ;
- La composición de isometrías no es conmutativa, pues $A''B''C''$ es distinto de $A_2B_2C_2$.

63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.



Giros de 90° , 180° y 270° .

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical.

2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría.

3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría.

4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal.

5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría.

Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tienen dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

Eje vertical: A, M, T, U, V, W;

Dos ejes de simetría: H, I, O, X;

Centro de simetría: N, S, Z;

Eje de simetría horizontal: B, C, D, E;

Ningún tipo de simetría: F, G, J, K, L, P, Q, R, Y.

65. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.

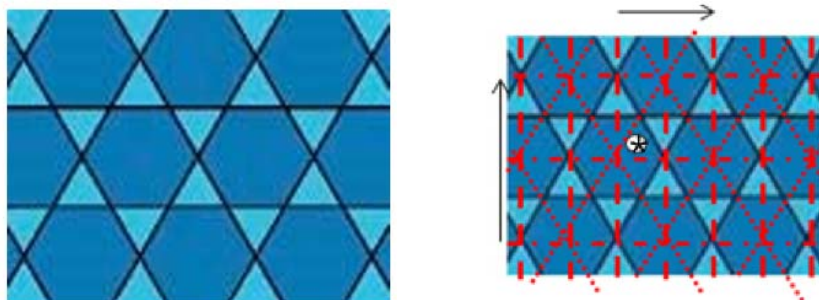
a) ¿Hay giros de 60° ? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

b) ¿Hay giros de 180° ? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.



Los ejes de simetría están señalados en rojo.

a) Hay giros de 60° en los centros de los hexágonos.

b) Hay giros de 180° con centro en los vértices de los triángulos.

c) Hay simetrías de ejes verticales, de ejes horizontales y de ejes oblicuos.

66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.



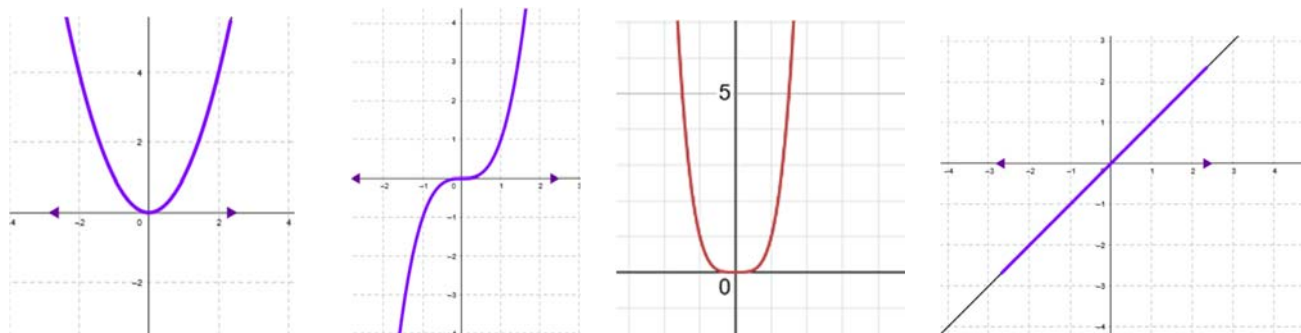
Hay ejes de simetría horizontales y verticales;
y centros de giro de 36° y de 45° .

67. Diseña un mosaico en una trama de cuadrados y analízalo. Indica que simetrías has utilizado, que giros y que traslaciones.

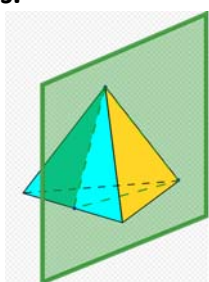
Solución abierta, manipulativa y gráfica.

68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica). a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

FUNCIÓN	EJE DE SIMETRÍA	CENTRO DE SIMETRÍA	PARIDAD
$y = x^2$	$x = 0$ (vertical)	Ninguno	Par
$y = x^3$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar
$y = x^4$	$x = 0$ (vertical)	Ninguno	Par
$y = x$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar



69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibújalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.



Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría:
Cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.
Cada plano divide el tetraedro en dos mitades simétricas.

70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.



Solución abierta, manipulativa y gráfica.

71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría.

A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría?

B) ¿Tienen más? ¿Cuántos?

C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos?

D) ¿Tiene simetría central?

E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D5)

Sí, las estrellas de mar generalmente tienen varios planos de simetría.

En una estrella de mar típica con 5 puntas, tiene 5 planos de simetría, cada uno pasando a través de una de las puntas de la estrella y dividiendo la figura en dos mitades simétricas.

Una estrella de mar tiene ejes de giro.

La estrella de mar tiene un eje de giro central alrededor de su centro.

El ángulo de giro es 72° (es decir, una rotación de 72° alrededor del centro de la estrella de mar deja la figura invariante).

Se puede girar en ángulos múltiplos de 72° (como 144° , 216° , 288° , etc.).

Las estrellas de mar tienen simetría central.

Este centro de simetría es el punto medio de la estrella, y cualquier punto tiene un punto simétrico en el lado opuesto de este centro.

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, el prisma recto de base rectangular tiene simetría central. Tiene un centro de simetría en el punto medio del prisma, donde todas las diagonales de las caras se intersectan. Cualquier punto de la figura tiene un simétrico opuesto respecto a este centro.

Sí, el prisma tiene 3 planos de simetría. Estos son:

2 planos verticales que pasan por el centro de las bases rectangulares, dividiendo cada base en dos mitades simétricas. Estos planos son perpendiculares entre sí.

1 plano horizontal que pasa por el centro de la altura del prisma y divide al prisma en dos mitades simétricas, cortando a través de las dos bases rectangulares.

Sí, el prisma tiene 2 ejes de giro. Estos son:

Ejes que pasan por el centro de las bases: Son dos ejes de giro perpendiculares a las bases rectangulares. El prisma puede girar 180° alrededor de cada uno de estos ejes sin que se altere su forma, ya que las bases rectangulares son simétricas.

Eje vertical: El prisma puede girar alrededor del eje vertical que pasa por el centro de las bases, pero este eje no genera más simetrías en ángulos menores a 180° .

73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, tiene simetría central. Existe un centro de simetría en el punto medio de la altura de la pirámide, y cualquier punto tiene su simétrico en el lado opuesto de este centro.

Sí, tiene 3 planos de simetría. Son planos verticales que pasan por el vértice superior de la pirámide y dividen la base triangular en dos mitades simétricas. Cada plano corta la pirámide a lo largo de una arista de la base y pasa por el vértice superior.

Sí, tiene 1 eje de giro. Este eje es vertical, pasa por el vértice superior de la pirámide y el centro de la base triangular. La pirámide puede girar 120° y 240° alrededor de este eje sin que se altere su forma, debido a la simetría de la base triangular regular.

74. Describe las isometrías que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos: a) Esfera b) Cilindro recto d) Cono e) Cilindro oblicuo c) Prisma regular de base cuadrada f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

a) Esfera

Isometrías: Rotaciones y reflexiones alrededor del centro. Elementos invariantes: Centro, radio, cualquier plano que pase por el centro.

b) Cilindro recto

Isometrías: Rotaciones alrededor del eje, reflexiones en planos verticales y horizontales. Elementos invariantes: Eje, bases circulares, altura.

c) Prisma regular de base cuadrada

Isometrías: Rotaciones de $90^\circ/180^\circ/270^\circ$, reflexiones en planos verticales y horizontales. Elementos invariantes: Eje central, base cuadrada, altura.

d) Cono

Isometrías: Rotaciones alrededor del eje, reflexiones en planos que pasen por el eje. Elementos invariantes: Eje, base circular.

e) Cilindro oblicuo

Isometrías: Algunas rotaciones y reflexiones específicas. Elementos invariantes: Eje, base elíptica.

f) Pirámide recta de base triangular

Isometrías: Rotaciones de $120^\circ/240^\circ$, reflexiones en planos verticales. Elementos invariantes: Eje vertical, base triangular, altura.

Cada figura tiene rotaciones y reflexiones que mantienen inalterados sus elementos principales, como el centro, el eje, las bases y la altura.

75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

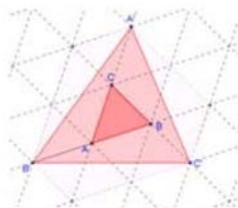
POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	No	Si	4, 120°	Si	
Cubo	Si	Si	3, 90° ; 4, 120° ; 6, 180°	Si	
Octaedro	Si	Si	3, 90° ; 4, 120° ; 6, 180°	Si	
Dodecaedro	Si	Si		Si	
Icosaedro	Si	Si		Si	

77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

- ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
- La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
- ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
- ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?
 - Sí, es posible, como en el caso de un rectángulo o un cuadrado.
 - No siempre. Depende de la figura, como en el caso de un triángulo donde no siempre es un centro de simetría.
 - Porque un espejo refleja horizontalmente, invirtiendo las posiciones de derecha e izquierda, pero no cambia la orientación vertical.
 - Sí, es cierto. Los círculos simétricos son cortes de una esfera que pasa por el plano de simetría.

78. A partir de un triángulo cualquiera ABC construimos el triángulo A'B'C', en el que A' es el simétrico de A con respecto al centro C, B' es el simétrico de B con respecto al centro A y C' es el simétrico de C con respecto al centro B. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo A'B'C' sabiendo que el valor del área del triángulo ABC es 1 u^2 .



El área del triángulo A'B'C' es $1/4 \text{ u}^2$

79. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristallitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

80. Simetrías plegando papel: a) Dobra una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica.

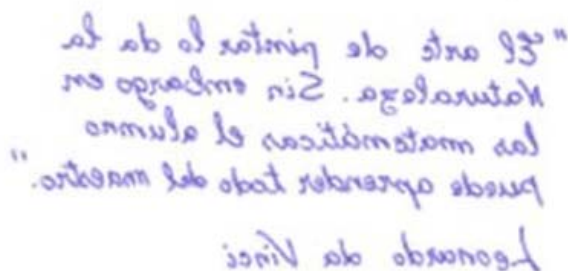
b) Dobra una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría.

c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido?

d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60° y de 30° . Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.

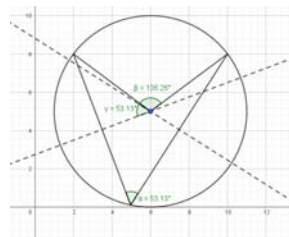
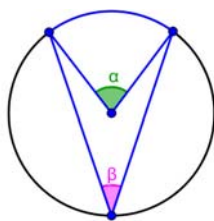
Solución abierta, manipulativa y gráfica:

81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto de Leonardo.



Solución manipulativa y gráfica:

82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. Ayuda: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.



Solución abierta, manipulativa y gráfica.

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240° , ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240° ? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120°

Aplicamos ahora la simetría de vértice A: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$. La composición transforma al triángulo en $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría.

b) Hacemos ahora el giro de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$.

c) Comprobar

d) Componemos el giro de 120° con el de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ y obtenemos la identidad.

e) Componemos dos giros de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ y obtenemos el giro de 120° .

f) La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).

84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90° ?
- ¿Hay giros de 45° ?
- ¿Hay traslaciones?



Hay simetrías tanto verticales, como horizontales como oblicuas. También podemos considerar giros de 90° , porque al ser figuras simétricas, se replicarían exactamente iguales, pero en otro lugar. Los giros de 45° nos daría el mismo resultado que aplicar una simetría oblicua

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico. Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

Cuando compones dos simetrías de ejes paralelos, lo que obtienes es una traslación. Esto sucede porque al aplicar una simetría respecto a un eje, la figura se refleja de forma simétrica a ambos lados de ese eje. Al hacer otra simetría respecto a un eje paralelo al primero, la figura también se reflejará sobre ese segundo eje, pero como ambos ejes son paralelos, la figura no cambia de orientación, sino que se desplaza de forma lineal, produciendo una traslación.

Cuando compones dos simetrías de ejes secantes, el movimiento resultante es un giro. Esto sucede porque, al reflejar una figura sobre el primer eje y luego reflejarla sobre un segundo eje que se cruza (o es secante) con el primero, la figura rota alrededor del punto de intersección de esos dos ejes.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué transformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90° , y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

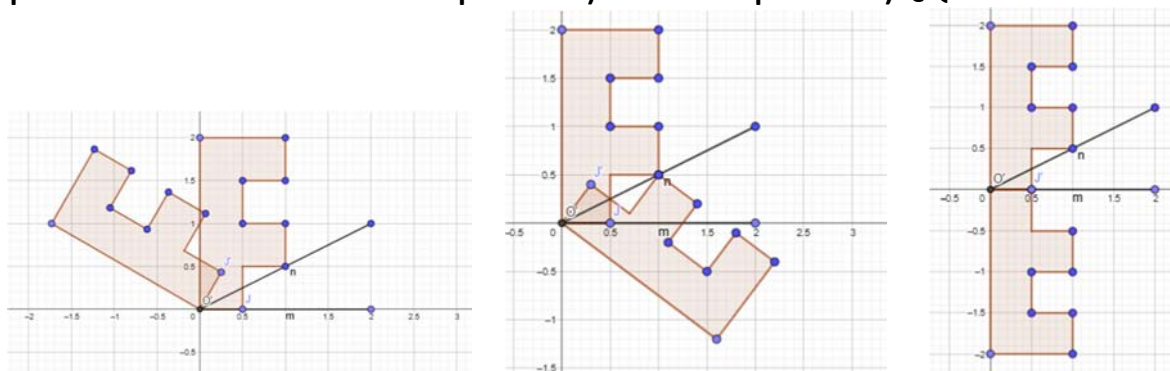


El hueso es simétrico con dos ejes de simetría ortogonales. Se pasa de un hueso blanco a uno de color adyacente con un giro de 90° y centro el vértice del cuadrado inicial.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas m y n que formen un ángulo de 30° y se corten en un punto O. Dibuja su transformado por:

a) Un giro de centro el punto O y ángulo 60° .

- b) La simetría de eje n
 c) La simetría de eje m
 d) La composición de la simetría de eje n con la de eje m
 e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?



La composición de la simetría de eje n con la de eje m es un giro de centro el punto de intersección y de 60° .

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector $u = (-3, 8)$ trasladamos el punto $P(5, -4)$ hasta el punto P' y las coordenadas de P' son:

- a) $(8, 4)$
- b) $(2, 4)$
- c) $(2, 12)$
- d) $(6, 3)$.

Para trasladar el punto $P(5, -4)$ por el vector $u = (-3, 8)$, simplemente sumamos las coordenadas del vector a las de P :

$$P'(x', y') = (x + u_x, y + u_y)$$

Si sustituimos los valores:

$$x' = 5 + (-3) = 2$$

$$y' = (-4) + 8 = 4$$

Por lo tanto, las coordenadas de P' son $(2, 4)$. La respuesta correcta es la b).

2. Al trasladar $A(-1, 8)$ hasta $A'(4, 6)$ se utiliza el vector u :

- a) $u = (3, 2)$
- b) $u = (3, -2)$
- c) $u = (5, -2)$
- d) $u = (5, 14)$.

Para encontrar el vector de traslación $u = (u_x, u_y)$, restamos las coordenadas del punto inicial $A(-1, 8)$ a las del punto final $A'(4, 6)$:

$$u_x = x' - x = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$$

$$u_y = y' - y = 6 - 8 = -2$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la c) $(5, -2)$

3. La transformación que lleva el punto $A(2, 0)$ en el punto $A'(0, 2)$ no puede ser:

- a) Un giro de centro el origen y ángulo 90° .
- b) Una traslación de vector $u = (2, 2)$.
- c) Un giro de centro el origen y ángulo 270° .
- d) Una simetría de eje $y = x$.

En una traslación, sumamos el vector a las coordenadas, por lo tanto:

$$(x', y') = (x + u_x, y + u_y) = (2 + 2, 0 + 2) = (4, 2).$$

La opción correcta es la b)

4. La transformación identidad también se llama:

- a) Simetría central
- b) Simetría axial
- c) Giro de 180°
- d) Traslación de vector nulo $(0, 0)$

Una traslación mueve todos los puntos en la dirección y magnitud de un vector. Si el vector es $(0, 0)$, los puntos no se mueven, por lo que es exactamente la transformación identidad.

La respuesta correcta es la d)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?

- a) rectángulo
- b) isósceles
- c) equilátero
- d) rectángulo isósceles.

Un triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría, cada uno dividiendo el triángulo en dos partes iguales. La respuesta correcta es la c)

6. La simetría central en el plano es un giro de:

- a) 360°
- b) 180°
- c) 90°
- d) 0°

Un giro de 180° alrededor de un punto O lleva cualquier punto P a un punto P' en la dirección opuesta, cumpliendo exactamente con la definición de simetría central. Es decir, la simetría central coloca cada punto en el lado opuesto de un punto O, a la misma distancia.

La respuesta correcta es la b)

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:

- a) una traslación
- b) un giro
- c) otra simetría
- d) la simetría central.

Cuando hacemos dos simetrías respecto a ejes que se cortan, el resultado es siempre un giro alrededor del punto donde se cruzan los ejes. La respuesta correcta es la b)

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto A (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:

- a) A' (-3, 7)
- b) A' (3, -7)
- c) A' (-3, -7)
- d) A' (7, 3)

Para encontrar el punto simétrico respecto al eje de ordenadas, tenemos que cambiar el signo de la coordenada x. Es decir, si el punto original es A(3, 7), su simétrico tendrá la misma coordenada ($y = 7$), pero la coordenada x cambiará de signo, de 3 a -3. Por lo tanto, el punto simétrico será A'(-3, 7).

La respuesta correcta es la a) A' (-3, 7).

9. Indica cuál de las siguientes letras no tiene simetría central:

- a) O
- b) H
- c) S
- d) D

Para saber qué letra no tiene simetría central, hay que comprobar si al girar la letra 180 grados sobre un punto central, se mantiene igual.

La O tiene simetría central, porque al girarla 180 grados, se ve igual.

La H también tiene simetría central, ya que al girarla se mantiene igual.

La S, si la giramos 180 grados, se mantiene igual.

La D no tiene simetría central, porque al girarla, no se ve igual.

Por lo tanto, la letra que no tiene simetría central es la d) D.

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:

a) Dos giros de distinto centro.

b) Dos simetrías de ejes secantes.

c) Un giro y una simetría.

d) Dos simetrías de ejes paralelos.

Cuando realizamos dos simetrías respecto a ejes paralelos, el efecto resultante es un giro. La dirección y el ángulo de giro dependen de la distancia entre los ejes.

La respuesta correcta es d) Dos simetrías de ejes paralelos