Matemáticas
3º de ESO
Ejercicios y Problemas

ÍNDICE:

Capítulo 1: Números racionales.	2
Capítulo 2: Potencias y raíces.	7
Capítulo 3: Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas.	12
Capítulo 4: Expresiones algebraicas. Polinomios.	18
Capítulo 5: Ecuaciones de 2º grado y sistemas lineales.	25
Capítulo 6: Proporcionalidad.	31
Capítulo 7: Educación financiera	36
Capítulo 8: Geometría en el plano.	42
Capítulo 9: Movimientos en el plano y en el espacio.	49
Capítulo 10: Geometría en el espacio. El globo terráqueo.	63
Capítulo 11: Funciones y gráficas.	72
Capítulo 12: Estadística. Azar y probabilidad.	80
Total: 87	

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y VVAA (anteriores)

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044030

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:53:18.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en http://www.dmrights.com

CAPÍTULO 1: NÚMEROS RACIONALES

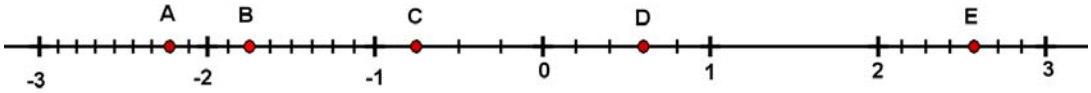
ACTIVIDADES PROPUESTAS

0. TE CONVIENE RECORDAR

1. Calcula:
   a) –20 + 15 b) –2 · (–20 + 15) c) –20 : (10 – 2(–20 + 15)) d) (–80 –20 : (10 – 2(–20 + 15))) · (3 – 2 · 3^2)
2. Calcula:
   a) –10 + 20 : (–5) b) (–10 + 20) : (–5) c) –100 : ((–20) : (–5)) d) (–100 : (–20)) : (–5) e) $\sqrt{36} \cdot 4$
3. Calcula:
   a) $3-(4\cdot 3-2\cdot 5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$
   c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot 3-3\cdot 4)^2-(2-4)^3$

1. NÚMEROS RACIONALES

4. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$
5. Pasa a forma mixta las fracciones $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$
6. Representa en la recta numérica las fracciones: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$
7. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$
8. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos *A*, *B* y *E*.



9. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.
10. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

2. APROXIMACIONES Y ERRORES

11. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95 549	100 000			
30 000	$3\cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

12. Prueba que 123.45 con EA = 0.005 y 0.12345 con EA = 0.000005 tienen el mismo ER.
13. Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:

a) Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.
b) No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes.
c) Poner precios como 1.99 €/Kg es un intento de engaño.
d) Comprar a 1.99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro.
e) Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático.
f) La precisión se mide por el número de cifras decimales.

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

3. FRACCIONES Y DECIMALES

14. Sin hacer la división indica si las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

15. Pasa a fracción y simplifica:

a) 1.4142 b) 0.125 c) 6.66

16. Pasa a fracción y simplifica:

a. 1.41424142… b. 0.125125… c. 6.666…

17. Pasa a fracción y simplifica:

1) 1.041424142… 2) 0.7125125… 3) 6.7666…

18. Determina la fracción generatriz de:

A. 0.333… + 0.666… B. 0.888… · 2,5 C. 0.65 : 0.656565…

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla paso a paso: (–5 + 4 · (–2) + 7) : (7 – (3 – 4) · (–1))
2. Ordena de menor a mayor: $\frac{8}{9};\frac{-8}{9};\frac{4}{5};\frac{38}{45};\frac{77}{90};\frac{-9}{8}$
3. Indica razonadamente qué fracción es mayor: $a)\ \frac{102}{101}\ y\ \frac{98}{99}\ \ b)\ \frac{98}{99}\ y\ \frac{97}{98}\ \ c)\ \frac{-102}{101}\ y\ \frac{-103}{102}$
4. Demuestra que 4.999… = 5. Generaliza: ¿Cuánto vale *n*.999…?
5. Usa la calculadora o una hoja de cálculo y reflexiona sobre la jerarquía de operaciones:
   a) 2.34567 / 361.8792 + 7.835261 * 4319.8872 – 63.52
   b) 2.34567 / (361.8792 + 7.835261) * (4319.8872 – 63.52)
   c) (2.34567 / 361.8792) + (7.835261 * 4319.8872) – 63.52
   d) (2.34567 / 361.8792) + 7.835261 * (4319.8872 – 63.52)
6. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9};\frac{152}{6};\frac{-17}{5};\frac{-23}{4}$
7. Representa de forma exacta en la recta numérica: $\frac{760}{240}; 3.125; -\frac{46}{14}$; -2.1666…
8. Simplifica: $a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\ \ b)\ \frac{10+6}{10-2}\ \ c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$
9. Halla la fracción que cae justo en medio de 3/2 y 9/4 en la recta numérica. *Pista:* La media aritmética $\frac{a+b}{2}$ Representa las 3 fracciones en la recta numérica.
10. La media armónica se define como H(*a*, *b*) = $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, el inverso de la media aritmética de los inversos.

a) Demuestra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$ b) Halla $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

11. Halla la fracción inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$
12. Opera y simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$
13. Resuelve paso a paso: $\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$
14. Calcula las dos terceras parte de la sexta parte del 80 % de 900.
15. Halla el número tal que sus cuatro tercios valen 520.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

16. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?
17. Calcula la fracción por la que hay que multiplicar 450 para obtener 720.
18. Si 100 pulgadas son 254 cm:

a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19.2 pulgadas y largo/alto = 4/3

b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9

19. Si en una clase el 77.777… % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos pero menos de 40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?
20. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡! Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido).
21. Aproxima los números 32567 y 1.395 con 2 cifras significativas y di en cuál se comete menor error relativo.
22. π no puede representarse mediante una fracción de enteros pero, ¿puedes hallar una fracción que lo aproxime con 5 cifras significativas?
23. Aproximamos π por: $3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}$

a) Simplifica hasta una fracción impropia irreducible.

b) Halla el error absoluto y el error relativo.

24. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?
25. Halla un número entero de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.
26. A la unidad le quito sus 2 quintas partes. ¿Por qué fracción hay que multiplicar el resultado para llegar otra vez a la unidad?
27. Halla la fracción resultante:

a) Quito 1 tercio de lo que tengo y luego añado 1 tercio de lo que queda.

b) Añado 1 tercio de lo que tengo y después quito 1 tercio del resultado.

28. Estás aburrido y decides jugar a lo siguiente: Avanzas un metro en línea recta, retrocedes la mitad, avanzas la mitad de lo que has retrocedido en el último paso, retrocedes la mitad de lo que has avanzado en el último paso, …

Si lo haces muchas, pero que muchas veces, ¿cuánto avanzas en total?

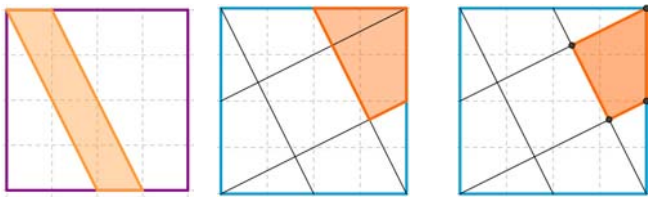
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$

29. Darío da pasos de 3/5 de metro, su perro Rayo da pasos de ¼ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?
30. La figura de al lado es un "*Tamgran*".

a) Halla la fracción que se corresponde con cada una de las 7 piezas.

b) Si el lado del cuadrado es de 20cm, halla el área de cada pieza.

31. Si el lado del cuadrado es de 4 cm halla la fracción y el área de la zona coloreada:



32. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes operar con números enteros, conoces la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis. Resuelve paso a paso:

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$$

2. Sabes obtener fracciones equivalentes. Ordena de mayor a menor:

$$\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fracciones de forma exacta en la recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0.125$$

4. Sabes operar con fracciones. Resuelve paso a paso y simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

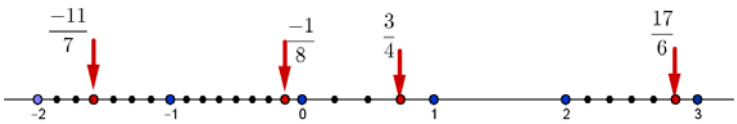
5. Sabes hallar la fracción de un número y la fracción de una fracción.
   a) Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.
   b) Una botella tiene llenas sus siete octavas partes, si contiene 840 cm^3, ¿cuánto le cabe llena?
6. Sabes redondear y calcular el error relativo cometido. Aproxima los números 9859 y 9,945 con 2 cifras significativas y calcula los errores relativos cometidos (en %), ¿cuál es menor?
7. Sabes distinguir cuándo una fracción tiene una expresión decimal exacta.
   a) Di cuáles de las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica: $\frac{6}{120}; \frac{5}{180}; \frac{42}{210}$
   b) ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?
   c) ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el periodo de 1/97?
8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción y simplifica:
   a) 2.225 b) 2.2252525... c) $\frac{0.125}{0.125125125...}$
9. Sabes resolver problemas mediante fracciones.
   Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.
   a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?
   b) Si su volumen actual es de 1 200 cm^3, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?
10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que le queda el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que le queda las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aun tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Soluciones:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$

3)



4) $\frac{7}{2}$. 5) a) 180; b) 960 cm^3.

6) 9 859 : 9 900 ➔ EA = 41 ➔ ER = 0.42 %.
9.945 : 9.9 ➔ EA = 0.045 ➔ ER = 0.45 %, es un poco menor el primero.

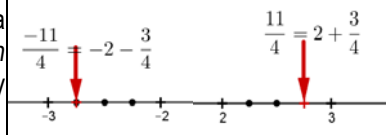
7) a) Primero se simplifican, son exactas 6/120 y 42/150. 5/180 tiene expresión decimal periódica.
b) 10 cifras decimales.
c) 96 cifras (de hecho las tiene).

8) a) $\frac{89}{40}$ b) $\frac{2203}{990}$ c) $\frac{999}{1000} = 0.999$ 9) a) 4 semanas. b) 506.25 cm^3.

10) Cobraba 1 200 €. Ahora cobra 1 000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Prioridad de las operaciones	1º Paréntesis interiores, 2º Potencias y raíces, 3º Productos y divisiones, 4º Sumas y restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo de la suma	(+) + (+) = (+) se suman, (–) + (–) = (–) se suman. (+) + (–) = ¿? tiene el signo del mayor en valor absoluto.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signo del producto y la división	Si tienen igual signo da positivo. (+)·(+) = (–)·(–) = (+) Si tienen signo contrario da negativo. (+)·(–) = (–)·(+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* es racional si puede escribirse como *r* = *a*/*b* con *a*, *b* enteros y $b \neq 0$.	2;—7/2 son racionales. También 2.6777... $\sqrt{2}$ y π no lo son.
Fracción irreducible	Se obtiene dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Numerador y denominador son primos entre sí.	360/840 = 3/7, la última es irreducible.
Fracciones equivalentes	Son equivalentes las fracciones que tienen igual expresión decimal. Dos fracciones equivalentes representan al mismo número racional. Sus productos cruzados valen lo mismo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ = 0.75 son equivalentes. 3 · 20 = 4 · 15
Ordenación de fracciones	Se pasan a común denominador o se halla su valor decimal o se usa la lógica y el truco *a*/*b* < *c*/*d* si *ad* < *bc* para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ *ya que* $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre otros motivos
Representación	Si es necesario se pasan a forma mixta. Para *n* + *a*/*b* dividimos la unidad que va de *n* a *n* + 1 en *b* partes iguales y tomamos *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividimos la unidad que va de –*n* a –*n* – 1 en *b* partes iguales y contamos *a* empezando en –*n*.	
Suma y resta de fracciones	Se pasan a común denominador y se suman (restan) los numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Producto y división	a/b · c/d = ac/bd a/b : c/d = a/b · d/c = ad/bc	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$
Fracción de un número	a/b de x = a/b ·x = (ax)/b	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Cifras significativas	Es el número de cifras "con valor" que se utilizan para aproximar un número	0.025 tiene 2; 3,020 tiene 4; 3 000 no sabemos las que tiene
Errores	Error absoluto: EA = $\lvert valorreal - valoraproximado \rvert$ Error relativo: ER = $\frac{EA}{\lvert Valorreal \rvert}$ se multiplica por 100 para obtener el % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$
Fracciones y decimales	La expresión decimal de una fracción siempre es exacta o periódica. Exacta si el denominador sólo tiene como factores primos el 2 o el 5. Periódica en caso contrario.	3/40 = 0.075 exacta 5/12 = 0.41666... periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: se divide el número sin la coma entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales. Expresión decimal periódica: Se multiplica *N* por potencias de *10* hasta conseguir 2 números con la misma parte decimal, se restan y se despeja *N*.	3.175 = 3 175/1 000 = 127/40 *N* = 2.0333... ➔ 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183➔ *N* = 183/90=61/30.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 2: POTENCIAS Y RAÍCES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

1. Determina el signo de las potencias: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$
2. Expresa en forma de una única potencia: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$
3. Expresa en forma de potencia: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$
4. Expresa en forma de potencia: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$
5. Expresa en forma de potencia: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$
6. Expresa en forma de potencia: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$
8. Expresa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$
9. Expresa como única potencia: a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$
10. Calcula: a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$
11. Calcula: a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$
12. Calcula: a) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$ b) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

13. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
14. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.
15. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200\,000\,000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5$
16. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(1.3 \cdot 10^5) \cdot (6{,}1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4.7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})$
17. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1.5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3.25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6.15 \cdot 10^{-7})$
18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1 285 600 000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.
19. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)
20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

4. RAÍCES

21. Calcula todas las soluciones: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10\,000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$
22. Expresa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$
23. Extrae los factores posibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$
24. Expresa en forma de producto o de cociente: a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$
25. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$
26. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$
27. Simplifica la expresión: a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

28. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.
29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

30. Calcula mentalmente en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

31. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

32. Utiliza la calculadora para calcular:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$ f) $(-18)^4 : (-3)^4$ g) $(6)^5 : (6)^2$ h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{}$

a) $5^6 \cdot (-1)^6$

b) $[(2)7 : (-3)7] \cdot (-4)3 \cdot (-4)4$

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo: $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$
4. Expresa en forma de única potencia: $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$
5. Expresa en forma de única potencia: $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$
6. Expresa en forma de única potencia:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$

d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $\dfrac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$

8. Expresa en forma de notación científica:

a) 140 000 000 b) 32 800 c) 71 000 000 000 000 000 d) 0.0000075

e) –18 000 000 f) 0.00000000042 g) –0.009 h) 0.00000000007

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

a) La distancia entre la Tierra y la Luna b) Unidad de masa atómica

c) Km que corresponden a un año luz d) Un gúgol d) La longitud de onda de los rayos cósmicos

10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$

c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$ d) $1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

11. La estrella Sirio está a unos 8,611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (*Recuerda*: Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a 9.46×10^{12} km (9 460 730 472 580.8 km con más aproximación))

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, la de un protón es de $1.672 \cdot 10^{-27}$ kg, y la de un neutrón 1.64×10^{-27} kg. Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y 6 + 2 = 8 neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).
13. Calcula y expresa en notación científica:
    a) $0.00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7.45 \cdot 10^{-5} - 6.32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^{6} - 2.8 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{5}$
    c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{2} + 1.4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2.7) \cdot 10^{-3} + 4{,}2 \cdot 10^{-6}$
14. Expresa el resultado de esta operación en notación científica: a) $\frac{2.4 \cdot 10^{-2} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{0.025 + 3 \cdot 10^{-4}}$ b) $\frac{(1.3 \cdot 10^{4}) \cdot (5 \cdot 10^{8})}{(4 \cdot 10^{5}) \cdot (2.3 \cdot 10^{6})}$
15. Se estima que existen 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Expresa en notación científica de forma aproximada el número de bacterias que existen en unos camiones que están descargando 50 toneladas métricas de arena en una playa.
16. Si $x = 240\,000$; $y = 0.00058$; $z = 7.2 \cdot 10^{6}$: Calcula y expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^{7}$ c) $3x - 5y$
17. *Arquímedes*, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Vamos a estimarlos ahora por otro procedimiento. Estimamos cuántos granos de arena necesitamos para tener un gramo de arena. Te parece que 50 granos de arena. Se estima que la masa de la Tierra es de: $M_T = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ g $= 598 \cdot 10^{25}$ g

    Calcula de forma aproximada el número de granos de arena que hay en toda la Tierra.
18. Vemos en Internet que la masa de Marte es de 639E21 kg, que la masa de Júpiter es de 1.898E27 kg, y que la masa de la Tierra es de 5,972E24 kg. a) Calcula cuántas veces cabría la Tierra en el planeta Júpiter. b) Calcula la relación entre la masa de la Tierra y la de Marte.

Raíces

19. Calcula: a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt[3]{-0.008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{049}$
20. Calcula: a) $\sqrt[4]{2.0736}$ b) $\sqrt[5]{-0.00001}$ c) $\sqrt{33\,640\,000}$ d) $\sqrt[3]{-2.7 \cdot 10^{-6}}$
21. Expresa en forma de raíz: a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$
22. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$
23. Extrae los factores posibles de estos radicales:
    a) $\sqrt{3^3 \cdot 10^5 \cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9 \cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11} \cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4 \cdot 5^6}$
24. Extrae los factores posibles de estos radicales:
    a) $\sqrt[3]{a^7 \cdot b^3 \cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5} \cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3 \cdot x^8 \cdot x}$
25. Simplifica: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^4}{x^8 \cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$
26. Expresa en forma de producto: a) $\sqrt{3 \cdot 50 \cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2 \cdot 2^4 \cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8 \cdot 3^4 \cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8 \cdot b^2 \cdot c^6}$
27. Expresa en forma de cociente: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$
28. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$
29. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right) \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$
30. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7 \cdot 3^{10}}$
31. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{(-4)^5 \cdot \sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3} : \sqrt{2^5}}$ c) $\frac{\left(\left(-7^3\right)\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ y $(12)^7 : (12)^5$
   a) 6 y 12^2 b) 1/6 y 12^5 c) –1/6 y 12^2
2. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ y $(-8)^7 : (5)^7$
   a) $(-30)^4$ y $(-3)^7$ b) 30^4 y $(-8/5)^7$ c) 30^4 y $(-3)^7$
3. El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $((-5)^{2/3})^6$
   b) $(-2)^{15}$; (–1) y $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (–1) y -5^4 c) $(-2)^{15}$; (–1) y $(-5)^4$
4. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$
   a) 1/512; 1/16 y $1/10^{10}$ b)$1/8^3$; - $1/2^4$ y $1/10^{10}$
5. El resultado de las operaciones siguientes es: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ y $(-2/5)^4$
   a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ y $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 y $2^4/5^4$
6. El resultado de las operaciones siguientes es: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
   a) 1 b) 2/3 c) –2/3 d) (2/3) · (–3/2)
7. Las expresiones $3.1 \cdot 10^8$ y 0.0000000095 corresponden a :
   a) 3 100 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ b) 310 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-10}$ c) 310 000 000 y $9.5 \cdot 10^{-9}$
8. El resultado de esta operación es: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$
   a) 124.5 b) 2 407.5 c) 107.5 d) 140.75
9. El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1\,331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$
   a) –11.,16, –1 b) 11, 16, 1 c) –11, –16, –1
10. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$

a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$

11. El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$

a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{5}$

12. Las operaciones siguientes $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{-18}}$ pueden expresarse:

a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[9]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[6]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ y $\sqrt[9]{18}$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

	POTENCIAS Y RAÍCES	*Ejemplos*
Producto y cociente de potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Con el mismo exponente: En el producto, se multiplican las bases y se eleva el resultado al mismo exponente. En el cociente se dividen las bases y se eleva el resultado al mismo exponente	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia de un producto y de un cociente	La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevados a dicha potencia $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ La potencia de un cociente es igual al cociente del dividendo y el divisor elevados a dicha potencia: $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6/(-2)^6$
Potencia de otra potencia	$((d)^m)^n = d^{mxn}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operaciones	$a \cdot 10^{\pm n}$ siendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números –n para pequeños números	$320\,000\,000 = 3.2 \cdot 10^8$ $0.0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicales: raíces de índice cualquiera	$\sqrt{49}=7; \sqrt[3]{-216}=-6; \sqrt[3]{64}=4; \sqrt[4]{81}=3; \sqrt[5]{-32}=-2$	
Potencias de exponente racional	Una potencia con exponente racional puede expresarse en forma de raíz cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando queda elevado al numerador del exponente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores de un radical	Si $m = n \cdot c + r$ entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operaciones con radicales	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 3: SUCESIONES. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) –1, –2, –3, –4,… b) 1, 4, 9, 16,… c) 1, 3, 5, 7,…

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.
3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9,8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 15 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 20 segundos? Representa gráficamente esta función.

Tiempo en segundos	1	2	3
Velocidad en m/s	15		

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

$a_n = 2n^2+1$

$b_n = \frac{4n-1}{3n}$ $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$ $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, …} , b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…} , c) {2, 4, 6, 8, 10,…} , d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \ldots\right\}$

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.
7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta n-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética: {1, 10, 100, 1 000, 100 000, ….}.
9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es –2.
10. Dada una progresión aritmética dos de cuyos términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$. A) Calcula su diferencia.. B) Calcula su término general.
11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.
12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?
13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.
14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.
15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:

a) De diferencia d = 2.5 y de primer término 2.
b) De diferencia d = –2 y de primer término 0.
c) De diferencia d = 1/3 y de segundo término 5.
d) De diferencia d = 4 y de quinto término 1.

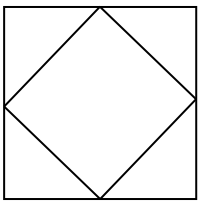
16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?
17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}
18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

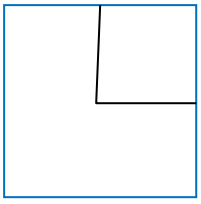
19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el último?
20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?
21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?
22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.
24. El cuarto término de una progresión geométrica es 1/9 y la razón 1/3. Halla el primer término.
25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4,\ldots\}$
26. Dada una progresión geométrica dos de cuyos términos son: $a_3 = -8$ y $a_6 = -2\,048$. A) Calcula su razón. B) Calcula su término general.
27. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de *clorella*. B) Indica el término general. C) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?
28. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo 384. Halla la razón y el producto de los 8 primeros términos.
29. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, …
30. Un agricultor en su granja tiene 59 049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?
31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = ½$
32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…
33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.



34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayo lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



35. Calcula la fracción generatriz del número $4.5\hat{6}\hat{1}$.
36. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6 000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones.
    a) Mantener ese capital durante 5 años al 3.5 % anual o
    b) Recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?
    c) Haz una hoja de cálculo que te permita resolver problemas de capitalización

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la diferencia es 5.
2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.
3. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término n-ésimo 88, halla n.
4. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que a3 = 24 y a10 = 66.
5. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20.
6. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.
7. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente, sean proporcionales a 5, 6 y 9.
8. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 y 2 000.
9. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos.
10. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1 064?
11. La suma de n números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1 715. ¿Cuántos términos hemos sumado?
12. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.
13. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1 287. Halla estos números.
14. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16 640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.
15. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12 320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.
16. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.
17. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.
18. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.
19. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.
20. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman –3 y los tres últimos 24.
21. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6. Calcula la diferencia y los términos mencionados.
22. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.
23. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100º, calcula los otros dos.
24. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15 470 m.
25. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.
26. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?
27. Un coronel manda 5 050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?
28. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?
29. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.
30. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?
31. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?
32. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.
33. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

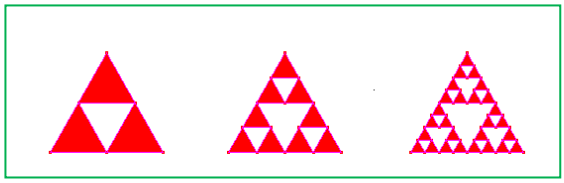
BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

34. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?
35. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.
36. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.
37. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.
38. El volumen de un ortoedro es de 3 375 cm^3. Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.
39. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...
40. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...
41. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.
42. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...
43. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.
44. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.
45. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.
46. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0.5 y los dos últimos 0.125.
47. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?
48. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7 651. Halla los términos primero y séptimo.
49. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328 509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.
50. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.
51. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.
52. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.
53. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que su perímetro es 420 m y su volumen 8 000 m^3.
54. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.
55. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.
56. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.
57. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.
58. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.
59. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.
60. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.
61. Halla la fracción generatriz del número decimal 0.737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.
62. Se tiene una cuba de vino que contiene 1 024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?
63. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

64. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

65. Triángulo de Sierspinky: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierspinky, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es (3/4)A. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: a_n $5 \cdot 3^{n-1}$?
   a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica
2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:
   a) 1 b) 2 c) 13 d) 169
3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,… es:
   a) 170 b) 34 c) 19 d) 340
4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
   a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
   c) Es una progresión geométrica de razón 3 d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.
5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:
   a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10}?
   a) 1 022 b) 2 046 c) 1 024 d) 2 048
7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:
   a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$
8. ¿Cuál es el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?
   a) 500 000 b) 250 000 c) 50 000 d) 25 000
9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?
   a) 381 b) 192 c) 765 d) 378
10. A Roberto le han tocado 6 000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
    a) 6 240 € b) 6 104 € c) 7 832.04 € d) 7 299.92 €

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Progresión aritmética	Es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama diferencia de la progresión y se suele denotar con la letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Término general	$a_n = a_k + (n - k)$ siendo a_k el término que ocupa el lugar *k*	$a_n = 2 + 3n$
Suma de los *n* primeros términos	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2)\cdot(2 + (2 + 3\cdot 8)) =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina razón de la progresión y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Término general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ siendo a_k el término de la sucesión que ocupa el lugar *k*	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Para $r \neq 1$, y un <u>número finito</u> de términos: $S_n = \frac{r\cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ - Para $r \neq 1$, y una <u>cantidad ilimitada</u> de términos: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765.$ $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Producto de los *n* primeros términos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

2. Escribe las expresiones algebraicas que nos proporcionan la longitud de una circunferencia y el área de un trapecio.
3. Reescribe, en lenguaje algebraico, los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:
   a) El triple de su diferencia b) La suma de sus cuadrados c) El cuadrado de su suma
   d) El inverso de su producto e) La suma de sus opuestos f) El producto de sus cuadrados
4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 30 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.
5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:
   a) $-3x^2+\frac{4}{x}-5$ para $x=-2$. b) $3b+\frac{a+b}{2-b^3}+a\cdot b^2-1$ para $a=\frac{1}{3}$ y $b=\frac{1}{2}$.
6. Indica, en cada caso, el valor numérico de la expresión $x-2y+3z$:
   a) $x=1, y=2, z=1$ b) $x=2, y=0, z=-1$ c) $x=0, y=1, z=0$
7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:
   a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ y $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

8. En cada uno de los siguientes monomios señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

$$-12x^3 \qquad a^4b^3c \qquad 4xy^2$$

9. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

$$5x^4+7x^2-x \qquad 6x^2+10-2x^3 \qquad 2xy^3-x^5+7x^2y^2$$

10. Consideremos el polinomio $p(x)=x^3-3x+2$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.
11. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
    - $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$
    - $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$
12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:
    a) $2x^3-2x^2-3x+9$ b) $-5x$ c) $-x^3+7x$
13. Considera los polinomios $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv -x^3+2x-3$, así como el polinomio suma $s\equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.
14. Obtén el valor del polinomio $p\equiv 4x^3-x^2+1$ en $x=2$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x=2$?
15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

$$(-2x)\cdot(3x^2-4) \qquad (2x^3+1)\cdot(-4x+5)$$
$$(4x^3-x^2-1)\cdot(2x+6) \qquad (-1)\cdot(8x^2+7x-9)$$

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

$(5x^2+2)-(-2x)$ $(-2x^3+4x)-(-2x-1)$ $(7x^2-2x)-(3x^3+4x^2-x+1)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

$3x^2-x+2$ $-6x^3+2x-3$ $-x^2+9x-2$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $x\cdot(-2x+4)$ b) $(2x-3)\cdot(3x+2)$ c) $(a-2)\cdot(4-3a)$ d) $(3a-b^2)\cdot(2b-a^2)$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$ b) $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$ c) $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-10x^3-15x^2+20x$ b) $30x^4+24x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & 3x^2 \end{array}$$

Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & 3x^2+4x \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & 3x^2+4x-2 \end{array}$$

22. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=2x^2-3$ como resto.

23. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1

b) $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$

c) $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$

d) $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3

e) x^5-4x-6 entre x^2+3

24. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=2x^2-3$ como resto.

25. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$

b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$

d) x^3-8x+2 entre $x-3$

26. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$ b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$ d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

27. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ en $x = 3$.

28. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$.

29. Realiza los cálculos:

a) $(1+x)^2$ b) $(-x+2)^2$ c) $(x-2)^2$ d) $(2a-3)^2$ e) $(x^2+1)^3$ f) $(2b-4)^3$

30. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

$(a+b+c)^2$ $(a-b+c)^2$

31. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3x - y)^2$ b) $(2a + x/2)^2$ c) $(4y - 2/y)^2$

d) $(5a + a^2)^2$ e) $(-a^2 + 2b^2)^2$ f) $[(2/3)y - 1/y]^2$

32. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 - 6a + 9$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 - 12y + 9$ e) $a^4 + 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2$

33. Efectúa estos productos:

a) $(3x + 2)\cdot(3x - 2)$ b) $(2x + 4y)\cdot(2x - 4y)$ c) $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$ d) $(3a - 5b)\cdot(3a + 5b)$ e) $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

34. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

35. Realiza las siguientes divisiones de polinomios a partir de la conversión del dividendo en la potencia de un binomio o en un producto de la forma suma por diferencia:

a) $x^2+12x+36$ entre $x + 6$ b) $4x^4 - 16x^2$ entre $2x^2 - 4x$ c) $9x^2 - 24x + 16$ entre $3x - 4$ d) $x^2 - 5$ entre $x + \sqrt{5}$

36. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{5}{x}$ c) $\frac{-x+1}{x+3} \cdot \frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2} : \frac{x}{x-3}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2 - x + 1}{x^3} + \frac{3x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{3x}{x-2}$

38. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$ b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$ c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$ d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

39. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$ b) $\frac{8x^3y - 2xy^2}{4xy} = 2x^2 - \frac{1}{2}y$ c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8} = \frac{2x^2+x}{x-4}$ d) $\frac{6a^2b^2 - 4a^2b^3 + 4ab}{2ab^2 - 8a^2b} = \frac{3ab - 2ab^2 + 2}{b - 4a}$

40. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2 - 7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2 - ab}{a^3b + ab}$

41. En cada una de las siguientes fracciones algebraicas escribe, cuando sea posible, el polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia de un binomio o de suma por diferencia para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 16}$ c) $\frac{6 - 4a}{4a^2 - 9}$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son:
   A) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona.
   B) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros.

   Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros.
2. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 5
   iii. Que al resultado anterior le sume 5
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que al resultado anterior le sume 10
   vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
   vii. Que divida entre 100 la última cantidad
   viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
   ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?
3. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:
   i. La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10 %.
   ii. Para 2016 ofrecen aumentar un 10 % los salarios de 2015.
   iii. En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10 % cada año impar y que aumente un 10 % cada año par.

   Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años.
4. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:
   a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.
   b) Para 2016, una reducción del 10 % sobre los salarios de 2015.
   c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10% cada año impar y que disminuya un 10 % cada año par.

   Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.
5. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$ b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$ c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$

d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$ e) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$

7. Una persona tiene ahorrados 3000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2.5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?
8. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.
9. Considera los polinomios $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$ y $r(x)=x^2-3x+2$. Haz las siguientes operaciones:

$p+q+r$ $p-q$ $p\cdot r$ $p\cdot r-q$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

10. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0'1x+0'2y-0'3z)\cdot(0'3x-0'2y+0'1z)$ c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

11. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^3+x^2-12x+7$ entre $x+3$; b) $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$ entre $2x^2-3x+1$;

c) $-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$ entre $-x^3-2x+3$

12. Calcula los cocientes:

a) $(4x^3):(x^2)$ b) $\left(4x^3y^3z^4\right):\left(3x^2yz^2\right)$ c) $\left(x^4-4x^2y+4y^2\right):\left(x^2-2y\right)$

13. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$ b) $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$ d) $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$ e) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$

14. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que 2a)l dividir $p(x)$ entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=-3x^2+1$.

15. Calcula las potencias:

a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

16. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) x^2-6x+9 b) x^4+8x^2+16 c) $x^2-\sqrt{12}xy+3y^2$ d) $y^4+2y^3+y^2+2y+1$

e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ f) x^2-25 g) x^2+5 h) $5x^2-1$

i) x^2-8y^2 j) x^4-1 k) x^2-y^2 l) $x^2-2y^2z^2$

17. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{xy^3-yx}{y^4-1}$

18. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{3}{x(3-x)}-\frac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4-5x^3+\frac{x^4-1}{x^3}\cdot\frac{x^5}{x^2+1}$ c) $\frac{x-2y}{a-b}+\frac{4x+5y}{3a-3b}$

19. Simplifica todo lo posible:

a) $\left(yx^4-\frac{y}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{b^3+3ab^2+3a^2b+a^3}{b-a}:\frac{b+a}{b-a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{4}{a-b}$

20. Simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a+y}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y}+\frac{1}{x}}:\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}$ b) $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}$

21. Calcula la letra del NIF para los siguientes números del DNI a) 36202471; b) 47423243; c) 12345678

22. Pregunta en casa, a tus padres y a tus hermanos, su número de DNI y comprueba que eres capaz de adivinar la letra de su NIF.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3\cdot\sqrt{5}\cdot x\cdot y^2$ b) $-3x^4-x^3+x+7$ c) $\dfrac{x+8}{4-2y^2}+6xa^2-\dfrac{3}{a}+9$

2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.

3. Del polinomio $5x^4-8x^2-x+9$ indica su grado y los monomios que lo integran.

4. La expresión $\dfrac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para : a) $x=7$, b) $x=2$, c) $x=7$ y $x=2$,d) $x=0$

5. Cualquier polinomio:
   a) puede ser evaluado en cualquier número. b) no puede ser evaluado en el número cero.
   b) no puede ser evaluado en ciertos números concretos.

6. El valor numérico de la expresión $\dfrac{x+7}{4-2y^2}+6xz^2-\dfrac{3}{z}$ en $x=1,\ y=2,\ z=-1$ es:

   a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado …….
   b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado …….
   c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….
   d) La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado …….

8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….
   b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….
   c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….

9. Al dividir el polinomio $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ el polinomio resto resultante:
   a) debe ser de grado 2.
   b) puede ser de grado 2.
   c) debe ser de grado 1.
   d) ninguna de las opciones precedentes.

10. Para que una fracción polinómica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sea *equivalente* a un polinomio:
   a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
   b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
   c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
   d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Expresión algebraica	Se construye con números y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son x, y, z
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica se obtiene un número, el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.	Si, hacemos $x = 3$, $y = -2$, $z = 1/2$ obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente de un monomio	El número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son -5 y 7
Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ es $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p\equiv x+3,\ q\equiv x^2-2$ $p+q\equiv x^2+x+1$ $p-q\equiv -x^2+x+5$ $p\cdot q\equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales: los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

BY NC SA

CAPÍTULO 5: ECUACIONES DE 2º GRADO Y SISTEMAS LINEALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

5. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$ c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

8. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

10. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

12. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm^2. Calcula sus dimensiones.

13. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

17. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

18. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

21. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

22. Diseña una hoja de cálculo que te permita resolver sistemas lineales.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

23. En un hotel hay 47 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 57 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?
24. En una granja hay 100 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 280 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?
25. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
26. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.
27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?
28. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.
29. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?
30. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
31. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$ h) $x \cdot (x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0$.

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

7. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

9. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.
11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.
12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.
13. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

Sistemas lineales de ecuaciones

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

17. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

24. Utiliza la hoja de cálculo Ecuaciones y Sistemas para comprobar las soluciones de todos los ejercicios.

Problemas

25. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
26. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?
27. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6
28. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?
29. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.
30. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?
31. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

32. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365
33. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?
34. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?
35. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?
36. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?
37. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.
38. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números
39. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?
40. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?
41. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?
42. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?
43. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?
44. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?
45. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?
46. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
47. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay bolsa?
48. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?
49. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?
50. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:
   a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$
2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:
   a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$
3. Las soluciones de la ecuación son:
   a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$
4. Las soluciones de la ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:
   a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$
5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:
   a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$
6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ son:
   a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan
7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:
   a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución
8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:
   a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$
9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?
   a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos
10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

a) 16 años b) 17 años c) 20 años d) 18 años

BY NC SA

RESUMEN

Ecuación de primer grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 1.	$-5x + 6 = 0$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5}{}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	Compatible determinado: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son secantes: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ Compatible indeterminado: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son coincidentes: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No tiene solución, las rectas son paralelas: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. Reducción: sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

BY NC SA

CAPÍTULO 6: PROPORCIONALIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 260 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
2. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?
3. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1.2 m tiene una sombra de 2.3 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 42 m?
4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad.

Litros	16	4.5		1		50
Euros	36		8.10		10	

5. Hemos gastado 72 l de gasolina para recorrer 960 km. ¿Cuántos l necesitaremos para una distancia de 1 500 km?
6. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1 250 km?
7. Un libro de 420 páginas pesa 200 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 300 páginas?
8. Seis personas realizan un viaje de ocho días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 5 días?
9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15 %.
10. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones: a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$
11. Dos pantalones nos costaron 32 €, ¿cuánto pagaremos por 5 pantalones?
12. Copia en tu cuaderno y completa:
    a) De una factura de 127 € he pagado 111 €. Me han aplicado un …… % de descuento
    b) Me han descontado el 12 % de una factura de …….. € y he pagado 365 €.
    c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 15 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
13. La distancia real entre dos pueblos es 18,5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
14. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 300 presenta una altura de 12 cm?
15. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.
16. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 6 cm y 14 cm. Si está dibujado a escala 1 : 40, calcula sus medidas reales.

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

Magnitud A	36	0.09		12	
Magnitud B	0.25		6		72

17. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:
18. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 6 paneles de 2.25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 1.5 m de largo?
19. Para llenar un depósito se abren tres grifos que lanzan 2 litros por minuto cada uno y tardan 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 grifos similares que lanzan 5 litros por minuto cada uno?
20. Tres máquinas fabrican 1 200 piezas funcionando 5 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 6 000 piezas durante 9 horas diarias?
21. En la construcción de un puente de 900 m se han utilizado 250 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 75 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
22. En un huerto ecológico se utilizan 3 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 10 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

23. Ese mismo huerto necesita 1 200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

24. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
25. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 6, 5, 2, y 1 error, deben repartirse los 1 400 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?
26. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 22 200 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores. ¿Cuánto recibirá cada uno?
27. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?
28. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg y 5.20 kg a 6 €/kg.
29. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2.40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1.80 €/l para obtener una mezcla a 213 €/l?
30. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 110 g y contiene 82 g de oro puro.
31. ¿Cuántos quilates, aproximadamente tiene la joya anterior?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	6.25		0.75	1.4	
euros		15	2.25		4.5

2. Con 76 € hemos pagado 12.5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22.5 m?
3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos los meses de junio y julio?
4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2,3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?
5. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?
6. Una edición de 350 libros de 210 páginas cada uno alcanza un peso total de 70 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 630 libros de 140 páginas cada uno?
7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $\frac{A}{B}$ = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	12,6			4,14	
Magnitud B		9	0.1		2,7

8. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
9. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1 520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?
10. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1 820 € si finalmente se pagaron 1 274 €?
11. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483.60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
12. Por liquidar una deuda de 3 500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3 080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
13. El precio de un viaje se anuncia a 907.50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
14. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47.12 €?
15. Un mapa está dibujado a escala 1:700000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

16. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
17. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

18. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

19. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7.5		3.6	
Magnitud B		12	0.18		10

20. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
21. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5,4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	18		9		10.8
B		0.03		2.7	

22. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si vende 60 vacas, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?
23. Con doce paquetes de 3.5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?
24. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

25. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?
26. En un almacén se guardan reservas de comida para 80 personas durante 15 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 4 raciones diarias?
27. Diez operarios instalan 3 600 m de valla en 6 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5040 m de valla?
28. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?
29. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.
30. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?
31. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
32. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157.5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
33. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
34. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1.75 kg de anacardos a 18 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.
35. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2.5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1.6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1.2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
36. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4.2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.
37. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280.5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?
38. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0.900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0.950 de ley y 20 g de 0.750 de ley?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0.75		4.5	100
B		15	6		

a) 160; 0.3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:
a) 1 850 € b) 1 875 € c) 1 687.5 €
3. Un artículo que costaba 1 600 € se ha rebajado a 1 400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
a) 12.5 % b) 14 % c) 15.625 % d) 16.25 %
4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas
5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:
a) 16 t y 5 t b) 12.8 t y 16 t c) 16 t y 12.8 t d) 16 t y 11 t
6. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 3.4 cm equivalen a 1,02 km es:
a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300
7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos
8. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0.85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:
a) 1.12€ b) 0.98 € c) 1.03€ d) 1.05€
9. La ley de una aleación es 0.855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:
a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d)306 g

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son **directamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La **razón de proporcionalidad directa** *k* es el valor que se obtiene mediante el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra.	Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rollos, pues $k = 300/24 = 12.5$, y $12.5 = 104/x$, por lo que $x = 104/12.5 = 8.32$.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son **inversamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k´* es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$	Dos personas pintan una vivienda en 4 días trabajando 9 h diarias. Para pintar la misma vivienda, 3 personas, trabajando 8 h diarias tardarán… 3 días
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2 400 es $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2\,088$
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.
Reparto proporcional directo	Recibe más cantidad quien más partes tiene.	Repartir directamente a 6, 10 y 14, 105 000 € 6 + 10 + 14 = 30 105 000 : 30 = 3 500 6 · 3 500 = 21 000 € 10 · 3 500 = 35 000 € 14 · 3 500 = 49 000 €
Reparto proporcional inverso	Recibe más cantidad quien menos partes tiene.	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 y 6; 1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} =$ 5 670 : 21 = 270 270 · 10 = 2 700; 270 · 6 = 1 620 270 · 5 = 1 350
Mezclas y aleaciones	Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios. La **ley** de una **aleación** es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.	Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0.795$

BY NC SA

CAPÍTULO 7: EDUCACIÓN FINANCIERA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3% durante 750 días.
2. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80% durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?
3. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 100 000 euros al 2 % durante un año.
4. Calcula el interés simple de un capital de 20 000€ invertidos durante 6 meses al 5 % anual.
5. Calcula el capital final obtenido si depositamos en un banco 80 000 euros al 8 % durante 5 meses.
6. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?
7. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.
8. Teniendo un capital inicial de 50 000 € y un capital final de 52 020 €, ¿cuántos años deben pasar para alcanzar dicho capital final al 2 %?
9. Se depositan 2 500 en un banco que reconoce una tasa de interés del 15 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 2 años?
10. Un cliente tiene con su banco cuatro deudas con los siguientes importes: 1 000 €, 1 500 €, 3 000 € y 3 200 €, que vencen respectivamente en 2, 3, 5 y 6 años. El banco le propone sustituir la deuda por una sola a pagar a los 4 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 5 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.
11. Un banco concede un préstamo por 10 000 € para ser amortizado en 5 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 3 %. Calcula, usando Excel:
    a. Importe de la cuota de amortización constante
    b. Capital pendiente de amortización al principio del segundo año
    c. Anualidad del tercer año
    d. Capital amortizado en los cuatro primeros años
    e. Cuota de interés del segundo año
12. Un cliente necesita 155 400 euros para comprar una casa. Acude al banco para que le faciliten su cuadro de amortización. El préstamo se concede para ser amortizado en 20 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 4,5 %. Proporciona al cliente su hoja de amortización.
13. Una caja de ahorros concede un préstamo a una familia para comprar un coche deportivo. El capital inicial prestado asciende a 86 432 euros a un tipo de interés del 2,25 % anual durante 10 años. Las cuotas de amortización son constantes. Selecciona la respuesta correcta en cada apartado:
    a. Capital pendiente al final del año 10
        a. 43 216 b. 0 c. 86.432
    b. La cuota de intereses del año 5
        a. 1 166,832 b. 10 587,92 c. 972,36
    c. La anualidad año 6
        a. 9 032,144 b. 9 421,088 c. 9 615,56
    d. La cuota de amortización del año 8
        a. 8 643 b. 8 643,2 c. 5 664
    e. Capital pendiente al principio del año 3
        a. 86 432 b. 77 789 c. 69 146
14. Señala qué bancos son los que no cobran comisiones o las cobran muy reducidas y determina también un par de ejemplos de bancos que cobren altas comisiones.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

15. Relaciona cada comisión con su definición:

Comisión de mantenimiento	Aplicada por retirar efectivo en cajeros de otra entidad
Comisión de descubierto	Aplicada por disponer de una tarjeta
Comisión por retiradas de efectivo en cajeros	Aplicada cada vez que se genera cada vez que un cliente realiza un movimiento
Comisiones por uso de tarjetas en el extranjero	Aplicada cada vez que el precio que se envía dinero a otra cuenta
Comisión por uso de oficinas	. Aplicada por el banco por estar en números rojos
Comisión de emisión o mantenimiento de las tarjetas.	Aplicada por operar en la ventanilla de las oficinas bancarias
Comisión por transferencias	Aplicada por operar fuera de España con una tarjeta
Comisión de administración.	Aplicada por el banco por mantener una cuenta abierta

16. La plataforma de pago PayPal cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:
    - *Si factura menos de 2 500 € al mes, cobrará 3,4% + 0,35 € por cada transacción.*
    - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,9 % + 0,35€ por cada transacción.*
    - *Si factura entre 2 500 € y 10 000 € al mes, cobrará 2,7 % + 0,35 € por cada transacción.*
    - *Más de 50 000€ al mes, cobrará 2,4 % + 0,35 € por cada transacción.*

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a PayPal de comisiones:

- *Factura 500 € realizando 2 transacciones.*
- *Factura 3 000 € realizando 10 transacciones.*
- *Factura 8 500 € realizando 500 transacciones.*
- *Factura 76 000 € realizando 600 transacciones.*

17. Una chica desea realizar varias transferencias desde su banca online. La primera de 30 € a su madre, no le urge que le llegue el dinero. La segunda a su casera de 365 €, esta debe llegarle en el mismo día. La tercera para pagar la letra de su coche a su financiera de EE. UU de 250 € que debe llegar a la financiera en menos de 24 horas. Su banco cobra comisiones por realizar transferencias urgentes de 2,5 % si son nacionales y 4 % si lo son al extranjero. Calcula:
    a. El importe total de comisiones que va a pagar.
    b. El importe total que va a pagar.

18. ¿Crees que tiene futuro un negocio como éste en el sistema financiero actual?
19. Busca en Internet algún ejemplo actual de entidades que desarrollan este tipo de banca y escríbelo. Coméntalo en clase con tus compañeros.
20. Si el euro se deprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España?, ¿podrán comprar más o menos en nuestro país? Si el tipo de cambio dólar/euro disminuye desde 1,35 hasta 1,05, ¿qué significa para los europeos?
21. Si el euro se aprecia frente al dólar, ¿esto es importante, por qué?, ¿qué ocurre con el dinero que dan los turistas extranjeros en España? Si el tipo de cambio dólar/euro pasa de 1,35 hasta 1,50, ¿qué significa para los europeos?
22. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, soles, bolivianos, yenes y Dirhams.
23. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:
    a) 390 $ b) 4051,5 درهم c) 104 800 ¥ (yenes) d) 5 103 Bs
24. Con las equivalencias anteriores. Jessica se quiere comprar una *Tablet*. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la *Tablet*?
25. Con las equivalencias anteriores. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Tayiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe en tu cuaderno dos formas a través de las cuales harías que tu compañero/a, que nunca ha estudiado educación financiera, se conciencie de la importancia de la misma.
2. La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo), recomienda que la educación financiera se enseñe en los centros educativos. Investiga ¿cómo promueve el estudio de la educación financiera? ¿Qué ha creó en 2008 para promover su estudio?
3. Investiga y realiza un informe a ordenador sobre el Día de la Educación Financiera. ¿Qué organismos promueven su celebración en España? ¿cuál es el objetivo de su celebración?
4. Calcula el interés simple de un capital de 5 200 € invertido durante 89 días al 4,25 % anual.
5. Calcula el capital final obtenido a partir de los datos del ejercicio anterior.
6. Calcula el interés simple que producen 1 000 € al 3,05 % durante un año.
7. Calcula el capital que hay que depositar al 0,75 % durante 100 días para obtener un interés simple de 550 €.
8. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 40 € a partir de un capital de 2 000 € al 2 % anual.
9. Calcula el tiempo que debe pasar para obtener unos intereses de 68,75 € a partir de un capital de 5 500 € al 5 % diario.
10. Calcula el capital final obtenido al depositar 9 000 euros al 7,7 % durante 8 meses.
11. Si el capital inicial de un depósito asciende a 105 000 €. El tanto por ciento aplicado es el 5 % a interés compuesto durante 10 años. Calcula el capital final.
12. Al 4 % de interés compuesto durante 9 años, ¿cuál será el capital inicial que tendremos que depositar para obtener un capital final de 43 000 €?
13. Al 2 % de interés compuesto durante 7 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 25 300 €?
14. Calcula el ejercicio anterior usando la hoja de cálculo facilitada.
15. Si se pretende obtener un capital final de 60 500 €, cuánto será el capital inicial que se debe depositar al 3 % durante 3 años para conseguirlo?
16. ¿A qué tipo de interés se deben depositar 2 000 € durante 4 años para conseguir un capital final de 4 000 €?
17. Usando Excel, teniendo un capital inicial de 13 500 € y un 3,5 % de rédito durante 17 años. Calcula:

a. El interés total al final del año 8.
b. El capital inicial en el año 13.
c. El capital final obtenido al finalizar el año 17.

18. Se depositan 13 250 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 25 % anual, capitalizable diariamente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 3 años?
19. Se depositan 2 120 € en un banco que reconoce una tasa de interés del 41 % anual, capitalizable mensualmente. ¿Cuál será el capital final acumulado en 5 años?
20. Una empresa posee 2 deudas de 15 000 € y 35 000 €, que vencen respectivamente en 5 y 10 años. Pretende sustituir la deuda por una sola a pagar a los 7 años. En esta operación financiera se concierta un tipo de interés del 2 % compuesto anual. Calcula el importe a pagar en ese momento.
21. Si un banco concede un préstamo por 36 000 € para ser amortizado en 6 años con cuotas de amortización constantes a un tipo de interés anual del 2 %. Calcula usando fórmulas:
22. Importe de la cuota de amortización constante
23. Capital pendiente de amortización al principio del tercer año
24. Anualidad del cuarto año
25. Capital amortizado en los dos primeros años
26. Cuota de interés del tercer año
27. Realiza el ejercicio anterior usando Excel.
28. Una sucursal bancaria de la capital de tu país concede préstamos al 1,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes. Tu amiga solicita un préstamo para poder abrir un negocio. Necesita 52 300 €. Lo puede devolver en 5 años. Realiza el cuadro de amortización del préstamo.
29. La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:

a. Capital pendiente al final del año 3
   a. 36 610 b. 0 c. 24 321
b. La cuota de intereses del año 2
   a. 706,05 b. 923,56 c. 346,83
c. La anualidad año 7
   a. 5 543,8 b. 3 423,03 c. 6 645,32

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

d. La cuota de amortización del año 9

a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675

e. Capital pendiente al principio del año 3

30. a. 2 653 b. 5 230 c. 4 675

Cuotas de amortización constantes

Problema:

La sucursal del ejercicio anterior, propone a tu amiga aumentar el tiempo de devolución del préstamo a 10 años, con las mismas condiciones establecidas anteriormente. A partir del nuevo cuadro de amortización que debes calcular, selecciona de cada apartado la opción correcta:

Capital inicial:	52.300
Tanto por ciento o rédito:	0,015
Número de años:	10
Cuota de amortización A	5230

Capital inicial: C_i	Años	r (tanto por uno)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interés total
n	a_n	I_n	A_n	M_n	C_n
PERIODOS	TÉRMINOS AMORTIZA	CUOTA DE INTERESES	CUOTA DE AMORTIZACIÓN	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
0	-	-	-	-	52300
1	6014,5	784,5	5230	5230	47070
2	5936,05	706,05	5230	10460	41840
3	5857,6	627,6	5230	15690	36610
4	5779,15	549,15	5230	20920	31380
5	5700,7	470,7	5230	26150	26150
6	5622,25	392,25	5230	31380	20920
7	5543,8	313,8	5230	36610	15690
8	5465,35	235,35	5230	41840	10460
9	5386,9	156,9	5230	47070	5230
10	5308,45	78,45	5230	52300	0

31. Es completamente legal que los bancos cobren comisión por sacar dinero en ventanilla. A partir de esta frase, contesta:

f. ¿Por qué crees que lo hacen?

g. ¿Crees que atenta contra algún tipo de cliente en especial?, ¿ a quién?

h. En caso de haber contestado si al apartado b, ¿sabes si se está haciendo algo para remediarlo?

32. Para proteger a los mayores ante el abuso por comisiones el Gobierno debe de realizar una serie de acciones. Explica con tus palabras qué significan cada una de estas acciones:

- Garantizar el acceso de los usuarios a los servicios bancarios.
- Mejorar la protección y seguridad de los mayores en el uso de la banca.
- Desarrollar tecnologías inclusivas
- Proporcionar a las personas mayores conocimientos prácticos para alcanzar habilidades digitales y financieras básicas

33. Un hombre acude a la ventanilla de su banco a realizar varias operaciones: ingresar dinero a una de sus cuentas, realizar una transferencia urgente a su hijo que vive en Alemania de 1 375 €, otra transferencia no urgente a un cliente suyo por importe de 543 €. Aprovechando que está allí, el banco le dice que debe pagar la comisión por el mantenimiento de sus tarjetas 10 €/anual y la de administración por tener abierta una cuenta con ellos 7 €/anual. Calcula el total de comisiones que ese día paga dicho hombre sabiendo que el importe de realizar transferencias urgentes es de 3,5 % y las no urgentes no suponen un gasto a los clientes.

34. Una entidad bancaria determina que las transferencias tendrán una comisión del 0,4 % de cada importe. Por otro lado, la comisión mínima a cobrar debe ser de 5 €. A partir de estos datos calcula el total a pagar por un cliente que realiza transferencias por valor de:

i. 4 956 €

j. 3,5 €

k. 321 €

l. 1 879,10 €

35. La plataforma de pago GooglePay cobra a una empresa por facturar a través de ella las siguientes comisiones:

- *Si factura menos de 1 500 € al mes, cobrará 3,2 % + 0,45 € por cada transacción.*
- *Si factura entre 1 500 € y 12 000 € al mes, cobrará 2,6 % + 0,40 € por cada transacción.*
- *Si factura entre 12 001 € y 99 999 € al mes, cobrará 1,8 % + 0,30 € por cada transacción.*
- *Más de 1 000 000€ al mes, cobrará 0,5 % + 0,25 € por cada transacción.*

Señala en cada caso cuánto tendrá que pagar la empresa a GooglePay de comisiones:

a. Factura 650 € realizando 7 transacciones.

b. Factura 5 340 € realizando 24 transacciones.

Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

c. Factura 45 520 € realizando 145 transacciones.

d. Factura 111 000 € realizando 430 transacciones.

36. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia 3 000 € a libras, soles, bolivianos, yenes y dirhams.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0,6	1,1	2,5	7	106	8	15

37. Sara ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón si el tipo de cambio es 102 ¥? B) ¿Y al de EE. UU. si el tipo de cambio es 1,1 $? C) ¿Y al de Bolivia si el tipo de cambio es 7 Bs? Realiza los cálculos.

38. Joaquín se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 4 550 ¥ y 0 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil? El tipo de cambio en Estados Unidos es de 1,2 dólares y el de China es de 6 yuanes.

39. En el cuadro siguiente se presentan los tipos de cambio bilaterales de un grupo de monedas respecto al dólar. A partir de esta primera columna, calcúlese el resto de las relaciones entre las monedas utilizando los tipos de cambio cruzados.

	Estados Unidos	Canadá	Zona-euro	Gran Bretaña
Estados Unidos	-			
Canadá	0,613	-		
Zona-euro	0,886		-	
Gran Bretaña	1,564			-

AUTOEVALUACIÓN

1. "Un euro hoy es mejor que…….mañana".

a) un dólar hoy b) un dólar mañana c) un coche hoy d) un euro mañana

2. Uno de los principales motivos por los que se cobran intereses es:

a) la liquidez b) el riesgo c) para tener más dinero d) porque es obligatorio

3. Si depositamos en un banco 3 000 € al 3 % anual, ¿cuánto dinero tendremos al cabo de 20 meses?

a) 1 200 b) 150 c) 3 150 d) 3 000

4. Un banco concede un préstamo por importe de 3 000 € al 3,5 % de interés anual, con cuotas de amortización constantes a devolver en 4 años. ¿Cuál es la cuota de amortización?

a) 3 000 € b) 650€ c) 1 500 € d) 750 €

5. Qué organismo solicita al Banco de España la revisión de las comisiones cobradas en ventanilla:

a) La ONU b) La organización de consumidores c) La OCU d) La OCDE

6. Cuanto le costará a un adulto realizar un envío de dinero a través de bizum, si su banco cobra 3,5 % por cada transferencia:

a) Nada b) El 3,5 % del importe c) El 0,035 € d) 35 €

7. Tomando como referencia las comisiones de PayPal de la actividad propuesta 16, ¿Cuánto pagaría un cliente cobrando 6 754 € realizando 35 transacciones?

a) 6 754 € b) 50 € c) 323,65 € d) 194,608 €

8. Siguiendo el apartado anterior, ¿Cuánto pagaría si recibe 132 000€ realizando 200 transacciones?

a) 3 238 € b) 123,23 € c) 423,50 € d) 23,56 €

9. Marina ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 1,2 dólares. ¿Cuántos euros tendrá?

a) 541,6 € b) 635,3 € c) 780 € d) 345 €

10. Andrés ha vuelto de un viaje de Reino Unido con 50 £ en metálico. Los cambia a euros. El tipo de cambio vigente es 0,87 libras. ¿Cuántos euros tendrá?

a) 54 € b) 57,47 € c) 43,5 € d) 45,3 €

RESUMEN

Interés	El interés es el beneficio	C = 3 600; r = 4.3 %; t = 8 años

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

<table>
<tr><td>simple y compuesto</td><td>que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo</td><td>$I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4\ €$</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Equivalencias financieras</td><td>Comprobar la equivalencia financiera entre dos capitales, cosiste en comparar dichos capitales situados en diferentes momentos del tiempo</td><td>$$\frac{C_0}{(1+i)^{nc_0}} + \frac{C_1}{(1+i)^{nc_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{nc_2}} \ldots\ldots - \frac{C}{(1+i)^{nc}}$$</td></tr>
<tr><td>Cuotas: Préstamos cuotas constantes</td><td>Normalmente la devolución del préstamo se realiza usando la capitalización compuesta y la devolución de este se realiza con periodos equidistantes (meses, trimestres, años, etc.). Lo normal es hacerlo anualmente por eso los reembolsos que se van haciendo reciben el nombre de anualidades.</td><td>
<table>
<tr><th>n
PERIODOS</th><th>a_k
TÉRMINOS AMORTIZATIVOS</th><th>I_k
CUOTA DE INTERESES</th><th>A_k
CUOTA DE AMORTIZACIÓN</th><th>M_k
CAPITAL AMORTIZADO</th><th>C_k
CAPITAL PENDIENTE</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>C_0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_1 = A + I_1$</td><td>$I_1 = C_0 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_1 = A$</td><td>$C_1 = C_0 - A$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$a_2 = A + I_2$</td><td>$I_2 = C_1 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_2 = 2A$</td><td>$C_2 = C_1 - A$
$C_2 = C_0 - 2A$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$a_3 = A + I_3$</td><td>$I_3 = C_2 \cdot i$</td><td>A</td><td>$M_3 = 3A$</td><td>$C_3 = C_2 - A$
$C_3 = C_0 - 3A$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td>$A = C_0$</td><td>$M_4 = C_0$</td><td>$C_4 = 0$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Comisiones</td><td>Una comisión bancaria es la cantidad de dinero que una entidad bancaria cobra a sus clientes por prestarles sus servicios</td><td>Un banco por una transferencia de 400 € cobrará 1,4 %. ¿A cuánto asciende la comisión?
400 · 0,014 = 5,6 € se cobrará de comisión</td></tr>
<tr><td>Banca ética</td><td colspan="2">La forman diversas entidades que ofrecen servicios financieros y bancarios de inversión y promoción de iniciativas de carácter social y medioambiental fomentando la responsabilidad social, la sostenibilidad y la transparencia.</td></tr>
<tr><td>Cambio de divisas</td><td>Las unidades monetarias diferentes a las que nosotros usamos son las divisas.</td><td>A lo largo de la unidad cogeremos la definición del BCE, es decir, que el tipo de cambio sea $/€.</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 8: GEOMETRÍA EN EL PLANO

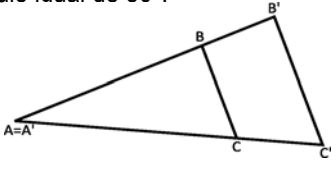
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?
2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?
3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?
4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.
5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.
6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.
7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.
8. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?
9. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?
10. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?
11. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?
12. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?
13. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?
14. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?
15. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.
16. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.
17. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]
18. Repite las actividades resueltas con *Geogebra*. Modifica a tu gusto colores y líneas.
19. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.
20. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.
21. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.
22. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?
23. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.

2. SEMEJANZA

24. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
    c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3.5 cm, c' = 4,5 cm
    d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12,5 cm, c' = 24,5 cm
25. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
    b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 8 cm, ¿a'?

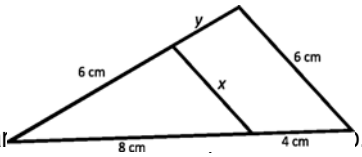


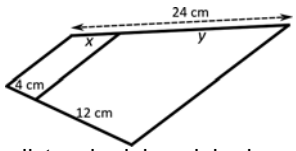
26. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

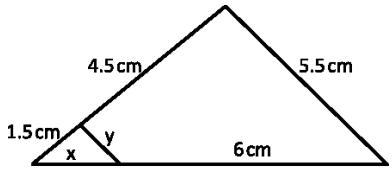
sus lados?

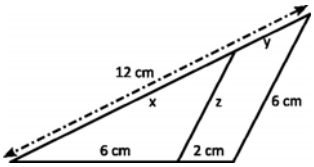
27. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.





28. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van [illegible]. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.
29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?
30. Calcula las longitudes que se indican:





3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

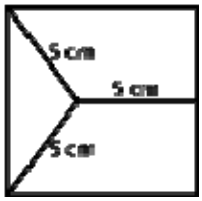
31. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.
32. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13.6 *km* y 21,4 *km*.

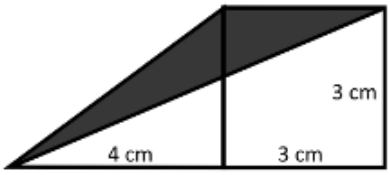
33. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14.7 *km* y 5.9 *km*

34. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:



35. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.
36. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.
37. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.
38. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.
39. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.
40. Una portería de fútbol mide 7.32 m de ancho por 2.44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:
    a) Un tiro directo a la base del poste.
    b) Un tiro directo a la escuadra.
41. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.
42. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
43. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.
44. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.
45. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 36º y 72º, ¿cuánto puede medir el ángulo que falta?
46. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 108º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?
47. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?
48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.
49. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.
50. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 100 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.
51. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.

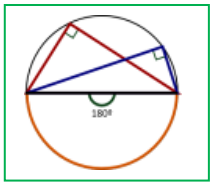


52. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es la apotema

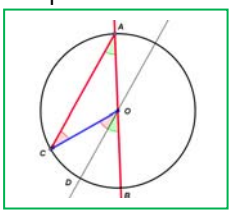
BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

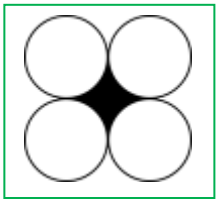
53. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm^2. Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]



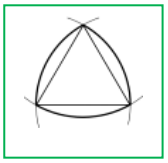
54. Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa. Observa la figura y razona la afirmación.
55. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.
56. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?
57. *Otra demostración. Intenta comprenderla.* Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

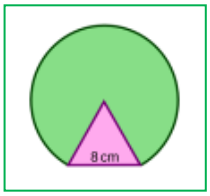


58. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.
59. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6 379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?
60. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?
61. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?
62. Determina el área del triángulo equilátero de 10 cm de radio.

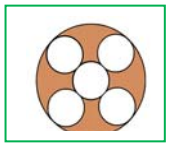


63. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.
64. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.
65. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.
66. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.
67. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.
68. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga la misma área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?
69. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo equilátero de 2 metros de lado.



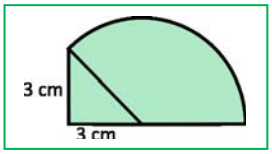


70. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

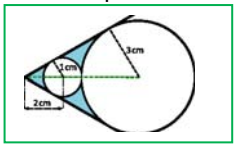


71. Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?

72. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?
73. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?

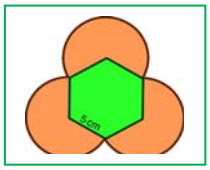


74. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.



BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

75. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?
76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.



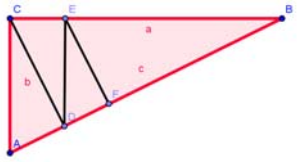
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lugares geométricos

26. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm y 4 cm. Traza en él, utilizando regla y compás, las mediatrices y bisectrices. Determina el circuncentro y el incentro. Traza las circunferencias inscritas y circunscritas.
27. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 5 cm y ángulos adyacentes al mismo de 30º y 50º. Traza en él, utilizando regla y compás, las medianas y las alturas. Determina su ortocentro y su baricentro.
28. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 50º comprendido entre dos lados de 5 y 8 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.
29. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo rectángulo?
30. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo isósceles?

Semejanza

31. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 70º y otro de 20º. Un ángulo de 90º y otro de 20º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.
    c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm
    d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm
32. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
    b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?
33. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 90 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
34. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?
35. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
36. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
37. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC, de lados a = 60, b = 45 y c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, y el escriba calcula la longitud del lado AD como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo ABC y del triángulo ACD. Determina la longitud de los segmentos CD, DE y EF.



38. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.
39. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
40. El mapa a escala 1:3000000 de un pueblo tiene un área de 2 500 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?
41. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
42. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Ángulos, longitudes y áreas

43. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado a, el lado a y el c.
44. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.
45. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.
46. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

47. Calcula la longitud de una circunferencia cuya círculo tiene una superficie de mide 50 cm^2.
48. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?
49. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?
50. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a *n*. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, ….
    a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.
51. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm^2 ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?
52. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?
53. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1.5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?
54. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.
55. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.
56. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?
57. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.
58. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.
59. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.
60. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.
61. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.
62. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.
63. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.
64. Un triángulo mide de altura π y de base $\pi + 1$. ¿Es rectángulo?
65. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?
66. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?
67. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.
68. Calcula la generatriz de un cono de radio de la base 5 m y de altura 7 m.
69. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pie está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia *x* y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?
70. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?

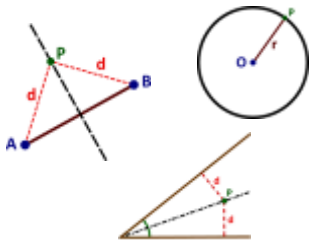
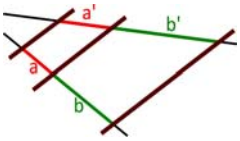
BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Todos los puntos que están a la misma distancia de dos puntos dados están en:
   a) una bisectriz b) una circunferencia c) una elipse d) una mediatriz
2. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el:
   a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro
3. El circuncentro es el centro de:
   a) gravedad del triángulo b) la circunferencia inscrita c) la circunferencia circunscrita
4. Dos triángulos son semejantes si:
   a) tienen dos ángulos iguales b) tienen dos lados proporcionales
   c) tienen un ángulo igual d) sus áreas son semejantes
5. Sabemos que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes. Calcula el valor de *a'* y *c'* para que lo sean, sabiendo que $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $b' = 3$ cm, $c = 8$ cm:
   a) $a' = 4$ cm y $c' = 6$ cm b) $a' = 5$ cm y $c' = 6$ cm
   c) $a' = 4$ cm y $c' = 4$ cm d) $a' = 5$ cm y $c' = 4$ cm
6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 cm y un cateto mide 3 cm, entonces el otro cateto mide aproximadamente:
   a) 6.3 cm b) 5 cm c) 5.8 cm d) 6.9 cm
7. La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:
   a) 1 440º b) 1 620º c) 1 800º d) 1 260º
8. El área de un rombo de lado 5 cm y una diagonal de 8 cm mide:
   a) 48 cm^2 b) 36.7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21.2 cm^2
9. El ángulo central del inscrito en la circunferencia que abarca un ángulo de 72º mide:
   a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º
10. La longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 3 cm son respectivamente:
    a) 6π cm y 9π cm^2 b) 9π cm y 6π cm^2 c) 3π cm y 3π cm^2 d) 18 cm y 27 cm^2

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Lugares geométricos	**Circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del centro. **Mediatriz de un segmento** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo. Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.	
Rectas y puntos notables de un triángulo	Mediatrices y circuncentro Bisectrices e incentro. Alturas y ortocentro. Medianas y baricentro	
Semejanza	Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes si: 1) Tienen 2 ángulos iguales. 2) Tienen los 3 lados proporcionales. 3) Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual	
Teorema de Tales	Establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ *cm*.	
Suma de los ángulos de un polígono	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180 \cdot n$.	

Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 9: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?
2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.
3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?
4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?
5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

2. TRASLACIONES

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos *AB*, *AC*, *BC*, *CA* y *CB*. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.
7. El vector fijo *AB* tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.
8. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo *AB* son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.
9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.
10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) y *F* (–2, –5).
11. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.
12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos *DE* y *FG*. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?
13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama u al vector fijo *AB* e indica sus componentes. b) Llama v al vector fijo *BC* e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector w = u + v. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.
14. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector u = (2, 3) con origen en *A*, y el vector v = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma u + v, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre u y v.
15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:
    a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$
    b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]
    c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)]
    d) 9.3·(2, 6) + (3.7, 5.2)
16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores u = (–5, 6), v = (4, –7) y w = (3, 4):
    a) $2u - (v + w)$ b) $3w - 2u + v$ c) $2(u + v) - 3w$
17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?
19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

BY NC SA

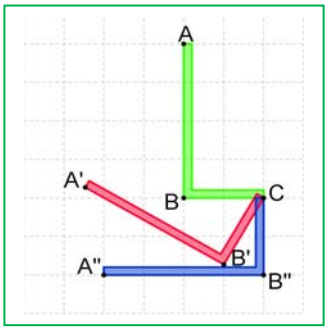
Un friso en Camboya

20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?
21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).
22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?
23. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.
24. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.
26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.
27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

3. GIROS O ROTACIONES

28. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.
29. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.
30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?
31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.
33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?
34. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?
35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.
36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.
37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

BY NC SA

4. SIMETRÍAS

38. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto P' simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'*. (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).
39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.
40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.
41. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.
42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.
43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.
45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.
46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.
47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.
48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.
    a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.
    c) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.
    d) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?
    e) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

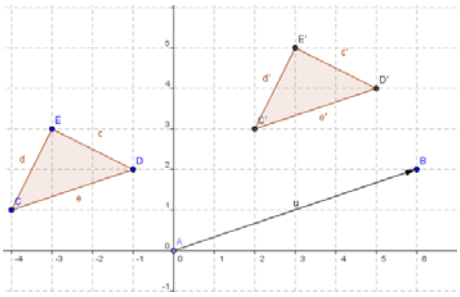
49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.
50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.
51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?
52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?
53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?
54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:
    a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?
    b) Una pirámide recta de base cuadrada.
    c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?

55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:
    a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.
    b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?
    c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?
56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.
57. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

58. *- Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.*

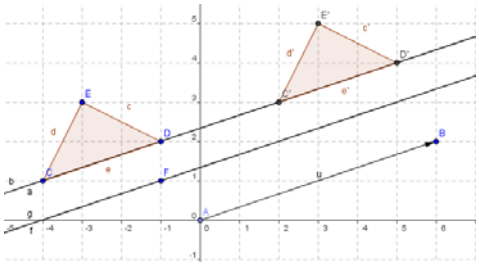
- En un archivo de *Geogebra* Visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta Nuevo Punto define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta Vector entre dos puntos determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con Nuevo Punto *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con Polígono dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta Trasladar objeto acorde a vector para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.



¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?

59. Comprueba en la ventana algebraica que:
   a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*
   b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden

- Dibuja con Recta que pasa por 2 puntos, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*
- Para comprobar la conjetura define un Nuevo Punto *F* (-1, 1) y con Recta paralela dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.



60. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.
61. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?
62. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45º.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.
   b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.
63. Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.
   b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.
   c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

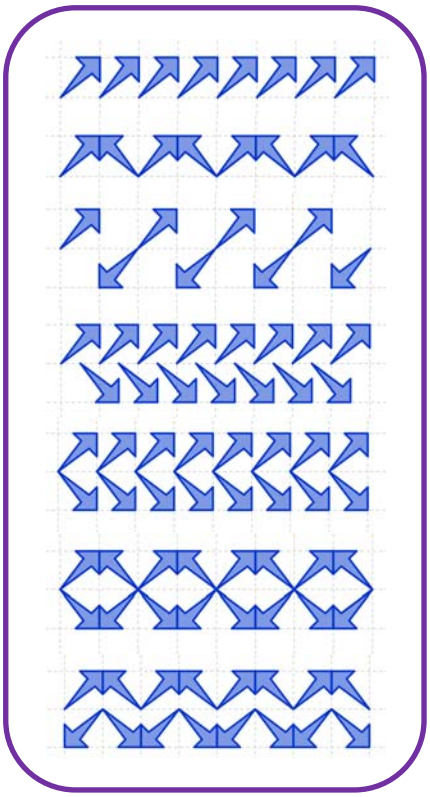
64. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

65. Análisis de mosaicos de la Alhambra: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 180º? ¿Y de 30º?

BY NC SA

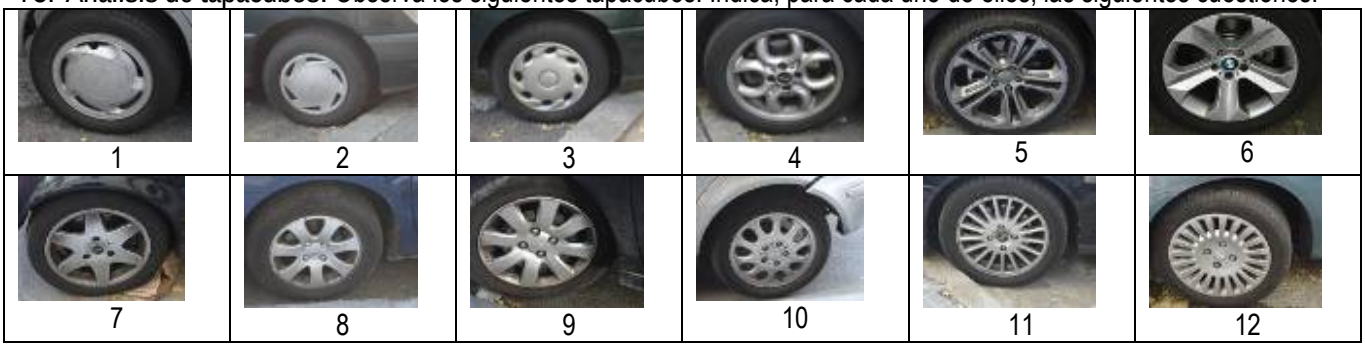
66. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.
67. Generación de un mosaico mediante giros y traslaciones: animación. Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

68. También puedes ver en la siguiente animación cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.
69. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.
70. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).



L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

71. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.
72. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).
73. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:



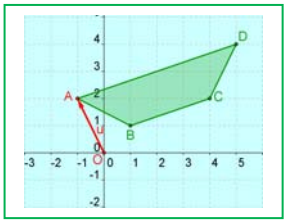
a) Tiene simetría central.
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?
2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores *AB*; *AC*; *AD*; *BC*; *BD*; *CD*; *DC*; *BA*.
3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A'* (1, 5).
4. Por la traslación de vector u = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A'*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A"*?
5. Por la traslación de vector u = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A'* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?
6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector u = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.
7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector *u* = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C'* una traslación según el vector *v* = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*", ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?
8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector *u* = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?



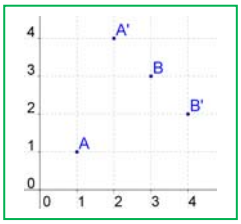
9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector *OA* = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.
10. Aplica la traslación de vector *u* = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.
11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
    a) Trasládalo con la traslación de vector u = (3, 0).
    b) Trasládalo después mediante la traslación de vector v = (0, 4).
    c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
    d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.
12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector u = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector v = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.
13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector u = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?
14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.
    b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.
    c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?
15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector *u* = (–2, 5).
16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
    b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
    c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.
17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Giros

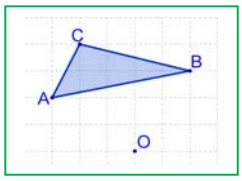
18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A"* obtenido al girar *A'* 90º con el mismo centro de giro.
19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.
20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.
21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.
23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.
24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?
25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P'*?
27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.
28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?



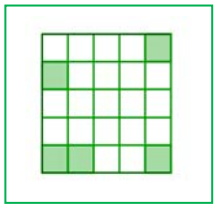
29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.



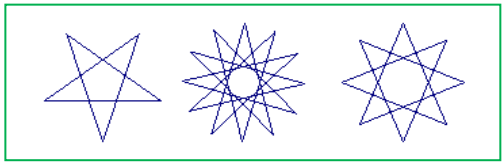
30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.
31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?
32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (*Ayuda*: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).
33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:
    a) Pentágono regular b) Hexágono regular c) Decágono regular
    d) Triángulo equilátero e) Rectángulo f) Cuadrado
    g) Rombo h) Paralelepípedo i) Octógono regular

35. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?



36. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
37. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?
38. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

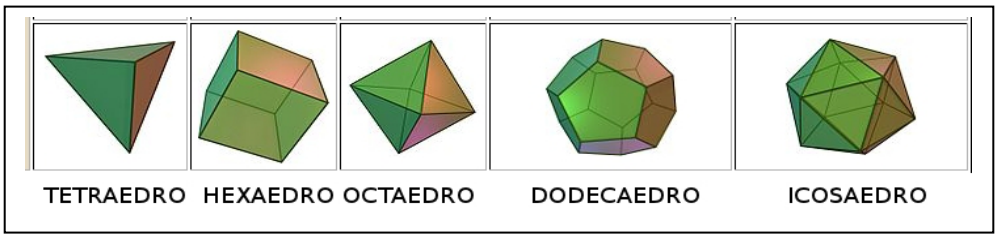


39. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.
40. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.
41. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?

Simetrías

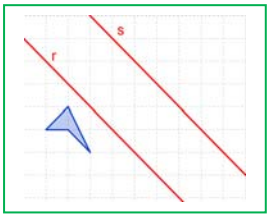
45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.
46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.
47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

    a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

    a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.
    e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



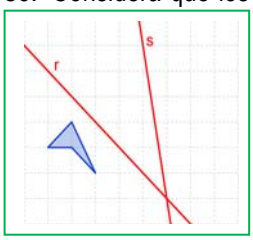
    a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

    Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:

    b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*.
    c) ¿Qué elementos la definen?
    d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



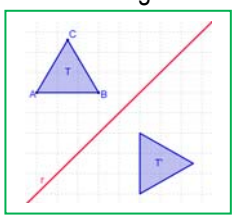
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

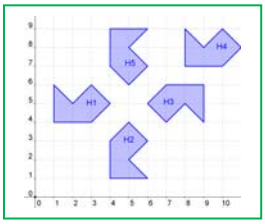


52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*?

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Problemas

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.



a) Una traslación según el vector (1, 3).

b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.

c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?
b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?
c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?
d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

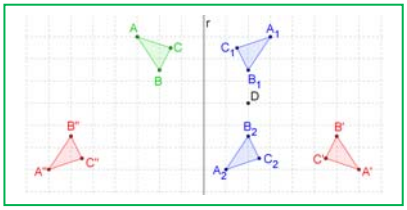
Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

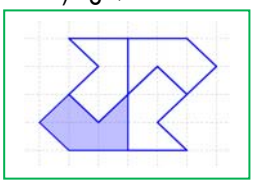
BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)
    a) Aplica a T una traslación según el vector u = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.
    b) Dibuja el triángulo T" que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.
59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) y *D* (3, 4).
    a) Aplica a *K* una traslación según el vector u = (–3, –1), llama *K'* a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.
    b) Dibuja el cuadrado *C"* que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.
61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.
62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:
    a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$
    b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.
    c) ¿Qué conclusión obtienes?





63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.
64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

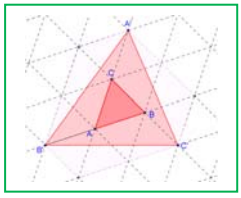
65. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.
    a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.
    b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.
    c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.
    d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.
    e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.
66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.
67. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico. Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.
68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).
    a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$
69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.
70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

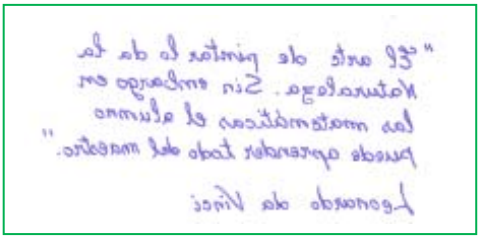
71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)
72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
74. Describe las isometrías que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:
    a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada
    d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero
75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).
76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
    a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
    b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
    c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
    d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?



78. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.
79. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.
80. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.
81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.



82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).
84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:
    a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60º.
    b) La simetría de eje *n*
    c) La simetría de eje *m*
    d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*
    e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector u = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)
2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector u:
   a) u = (3, 2) b) u = (3, –2) c) u = (5, –2) d) u = (5, 14)
3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) no puede ser:
   a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º b) Una traslación de vector u = (2, 2)
   c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º d) Una simetría de eje *y* = *x*.
4. La transformación identidad también se llama:
   a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)
5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
   a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles
6. La simetría central en el plano es un giro de:
   a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º
7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
   a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central
8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)
9. Indica cuál de las siguientes letras no tiene simetría central:
   a) O b) H c) S d) D
10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
    a) Dos giros de distinto centro b) Dos simetrías de ejes secantes
    c) Un giro y una simetría d) Dos simetrías de ejes paralelos.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Semejanza	Transformación geométrica que conserva los ángulos y las distancias son proporcionales.	Un fotocopia reducida
Traslación	Viene determinada por su vector de traslación. Son isometrías directas. La composición de dos traslaciones es una traslación.	El trasladado del punto P (1, 2) por la traslación de vector v = (4, 5) es P' (5, 7).
Giro o rotación en el plano Giro en el espacio	Viene determinado por el centro de giro y el ángulo de giro. Viene determinado por el eje de giro y el ángulo	El girado del punto P (1, 2) por el giro de centro el origen y ángulo 90º es P' (2, –1)
Simetría axial Simetría especular	Se conoce por su eje de simetría Se conoce por su plano de simetría	El simétrico del punto P (1, 2) por la simetría de eje el eje de ordenadas es P' (–1, 2)
Isometrías	Son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.	Traslaciones, giros y simetrías
Composición de isometrías	La composición de dos isometrías directas es una isometría directa. La composición de dos isometrías inversas es una isometría directa. La composición de una isometría directa con una inversa es una isometría inversa.	
Composición de isometrías en el plano	La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro. La composición de dos simetrías es un giro o una traslación.	
Elementos invariantes en el plano	La traslación no deja ningún punto invariante. El giro deja invariante un punto, el centro de giro. La simetría deja invariante una recta, el eje de simetría La identidad deja invariante todo el plano.	
Elementos invariantes en el espacio	La traslación no deja ningún punto invariante. La simetría central deja invariante un único punto, el centro de simetría. El giro deja invariante una recta, el eje de giro. La simetría deja invariante el plano de simetría La identidad deja invariante todo el espacio.	

BY NC SA

CAPÍTULO 10: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO. GLOBO TERRÁQUEO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO EN EL ESPACIO

1. Busca en la habitación en la que te encuentras, ejemplos de:
   a. Planos paralelos y perpendiculares.
   b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares y coplanarias, rectas perpendiculares y no coplanarias.
   c. Recta paralela a plano, recta y plano secantes, recta contenida en plano.
2. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 ángulos diedros consecutivos e iguales. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?
3. Desde un punto interior a una sala de planta hexagonal regular se traza una recta perpendicular a cada pared. ¿Cuánto medirá el ángulo que forman dos perpendiculares consecutivas?
4. Dos triedros tienen las tres caras iguales, ¿se puede asegurar que son iguales? Razona la respuesta.

2. POLIEDROS

5. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos

6. Es posible demostrar con un rompecabezas el teorema de Pitágoras en el espacio. Te proponemos que lo intentes. Podrás encontrar en la revista y entre los recursos para imprimir las piezas que te ayudarán. En la fotografía se muestra el puzzle resuelto.

7. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.
8. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.
9. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?
10. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.
11. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
12. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 10 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura.
13. Clasifica los siguientes poliedros

14. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.
15. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

3. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

16. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 m.
17. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m^2 y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.
18. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
19. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.
20. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

4. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

21. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?
22. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
23. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.
24. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.
25. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

5. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

26. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.
27. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.
28. El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
    a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
    b. Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
29. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

6. GLOBO TERRÁQUEO

30. Un avión recorre 20º en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170º Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?
31. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?
32. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.
33. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.

MAPA DE HUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA)

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo y perpendicularidad. Poliedros: elementos y tipos

1. Si estamos en una habitación sin columnas, atendiendo al suelo y a sus cuatro paredes, ¿cuántos ángulos diedros se forman?
2. Dobla por la mitad una hoja de papel, construye un ángulo diedro y traza su rectilíneo. ¿Podrías medir la amplitud de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?
3. Determina la amplitud de los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un octógono regular.
4. Dos caras de un triedro miden 60^o y 118^o, ¿Entre qué valores puede oscilar la otra?
5. ¿Se puede formar un ángulo poliedro con un ángulo de un triángulo equilátero, dos ángulos de un rectángulo y uno de un pentágono regular?
6. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
7. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
8. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?
9. Prolonga una pareja de aristas en una pirámide pentagonal, de modo que se obtengan rectas no coplanarias.
10. Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.
11. Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?
12. Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?
13. De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?
14. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?

15. Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?

Teorema de Pitágoras en el espacio

16. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
17. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?
18. Un vaso de 12 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 4 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?

19. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?
20. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.
21. Si un ascensor mide 1 m de ancho, 1.5 m de largo y 2.2 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?
22. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 metros de altura ?
23. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 cm.
24. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

Área lateral, total y volumen de cuerpos geométricos

25. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

26. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
27. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.
28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
29. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3.5 dm, 8.2 dm y 75 cm.
30. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5cm de radio de la base.
31. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.
32. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m^2 y su base es un hexágono de 5 m de lado.

33. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
35. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0.3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?
36. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1.20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?
37. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

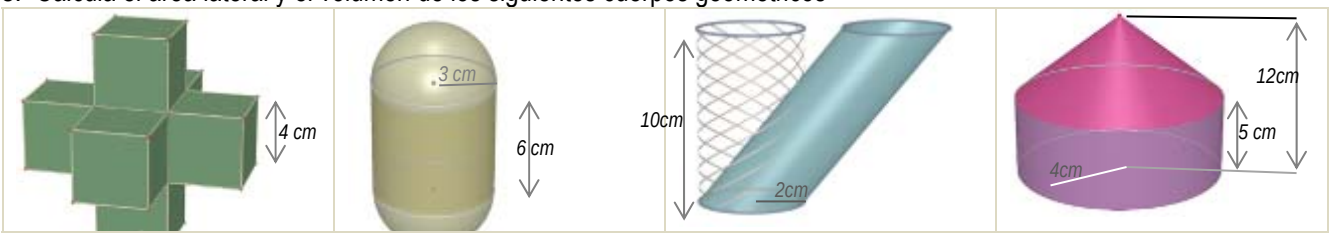
38. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm3 de volumen.
39. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1.20 m de alto y 248 dm^3 de volumen?
40. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

41. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.
42. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
43. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.

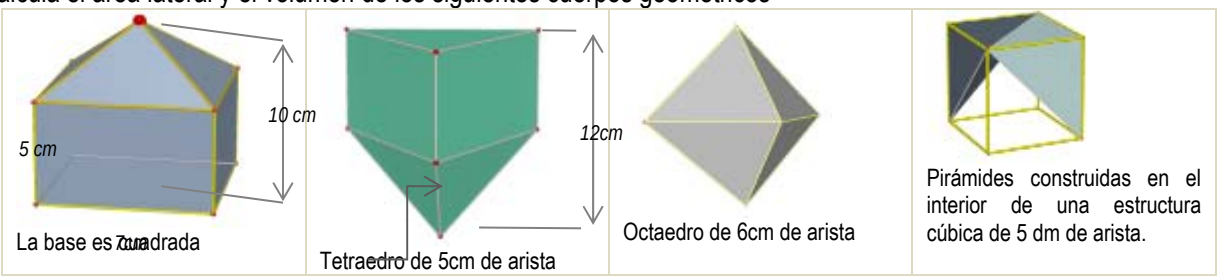
44. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
45. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14.5 m.
46. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
47. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3.14 como valor de π).
48. Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. (Tomar $\pi = 3.14$). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
49. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
50. Una circunferencia de longitud 2.24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar $\pi = 3.14$).
51. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3. A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.
52. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
53. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
54. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31.40 m?

BY NC SA

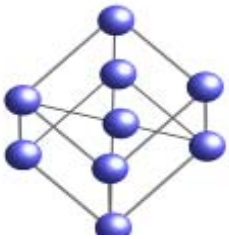
55. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



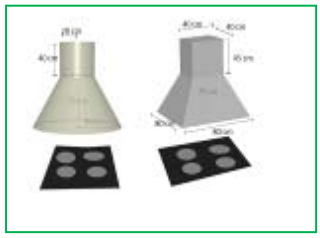
56. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



57. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2.5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.
58. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.
59. El *Atomium* es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



60. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2 €/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?
61. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
    a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
    b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?
62. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?



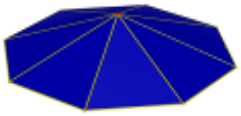
63. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0.3 metros el nivel del agua?
64. El precio de las tejas es de 14 30 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8 metros de lado de la base?
65. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

66. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?
67. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
68. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.
69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

70. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120º y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.
71. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?
72. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?



74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?
75. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360º alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.
76. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?

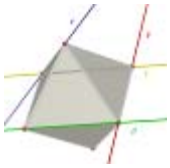
Husos horarios

77. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?
78. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45º y el avión despega del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?
79. La distancia entre Londres y Pekín es de 8 149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9 508 Km, sin embargo, en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0º	51º 30´latitud N
PEKIN	116º longitud E	40º latitud N
SAO PAULO	46º 30´de longitud W	23º 30´de latitud S

AUTOEVALUACIÓN

1. Cada una de las rectas r, s, t y p pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:



a) Las rectas r y s son coplanarias y secantes. **b)** Las rectas t y p no son coplanarias. **c)** Las rectas r y p se cruzan. **d)** r y s contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)

a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. **b)** . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI). **c)** Son poliedros regulares II) y IV). **d)** Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

a) 38 tejas **b)** 76 tejas **c)** 72 tejas **d)** 36 tejas

6. Una caja de dimensiones $30\times20\times15\ \ cm$, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

a) 2 250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1 125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

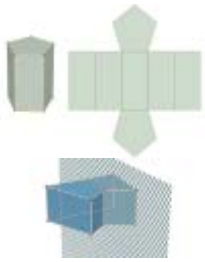
10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B , C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos. **b)** Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más. **c)** Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más. **d)** Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Poliedro. Elementos de un poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales. Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea. Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.	
Teorema de Euler:	En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.	C + V = A+2
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases. Pueden ser cóncavos o convexos; rectos u oblicuos, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales… Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares	
Teorema de Pitágoras en el espacio	La diagonal de un ortoedro es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus aristas	
Pirámides	Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base. Pueden ser cóncavas o convexas; rectas u oblicuas, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.	
Cuerpos de revolución	Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*. Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.	
Áreas lateral y total de un prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = \text{Área}_{Lateral} + 2\text{Área}_{Base}$	
Áreas lateral y total de una pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$	

	$A_{total} = \text{Área}_{Lateral} + \text{Área}_{Base}$	
Áreas lateral y total de un tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base\ 1} + Área_{Base\ 2}$	
Áreas lateral y total de un cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	
Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Áreas lateral y total de un tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r)G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área y volumen de una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2; Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Coordenadas geográficas	Latitud: Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto. Longitud: Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.	
Husos horarios	Cada huso horario es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15º de longitud.	

BY NC SA

CAPÍTULO 11: FUNCIONES Y GRÁFICAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

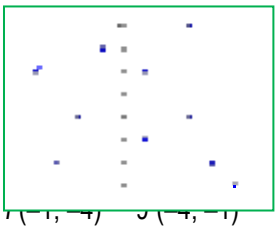
1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO

1. Fíjate en el mapa siguiente, localiza los países o ciudades que se piden e indica en tu cuaderno:
   a) Los cuadrantes donde se encuentran los siguientes países:

- Méjico:
- España:
- Arabia Saudí:
- Madagascar:
- Argentina:
- Alemania:
- India:
- Australia:
- EEUU:
- Chile:
- Japón:
- Marruecos:

   b) Las coordenadas (aproximadas) de las siguientes ciudades:

- Ciudad del Cabo
- Pekín:
- Londres:
- Nueva York:
- Rabat:
- Córdoba (Méjico):
- Río de Janeiro:
- Sídney:
- Oviedo:
- Alicante



2. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:
3. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano:

A (0, –2)	*B* (–2, 0)	*C* (4, 0)	*D* (–6, 0)	*E* (0, 6)	*F* (1, 7)	*G* (7, 1)	*H* (–4, 8)		
K (5, –3)	*L* (9, 6)	*M* (–2, 1)	*N* (7, –4)	*Ñ* (–3, –3)	*O* (0, 0)	*P*(–2, –1)	*Q*(2, 1)	*R*(2, –1)	*S*(–2, 2)

2. FUNCIONES

4. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:
   a. Edad – altura de la persona a lo largo de su vida
   b. Altura – edad de la persona
   c. Precio de la gasolina – día del mes
   d. Día del mes – precio de la gasolina
   e. Un número y su quinta parte
   f. Un número y su cuadrado
   g. Un número y su raíz cuadrada
5. Si hoy el cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	60
$					

   Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función? Si realizas el cambio en una oficina, te cobran una pequeña comisión fija por realizar la operación de 1.5 €. ¿Cómo quedaría/n la fórmula/s en este caso?
6. El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 746 pies de altura, están separadas por una distancia de 4 200 pies aproximadamente. La calzada, que tiene una anchura de 90 pies y se encuentra a una altura de 220 pies sobre el nivel del agua, está sujeta a las torres mediante dos cables, de 3 pies de diámetro, que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente.

   -Realiza un dibujo donde queden reflejados los datos más significativos del problema.
   -Determina la relación que existe entre la altura a la que se encuentra un punto del cable y la distancia de su proyección vertical al centro del puente.
   -Aplicar dicha fórmula para calcular la altura de un punto del cable cuya vertical está a 1 000 pies del centro del puente.
7. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y la otra no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.
8. Realiza en tu cuaderno una tabla con 10 valores de la función $e(t) = 5t + 20$, represéntalos gráficamente e indica la figura que determinan. Si dicha función representa el espacio (en kilómetros) que recorre una persona que lleva andados 20 km y camina a una velocidad de 5 km/h, en función del tiempo que tarda en recorrerlo (en horas), indica cuáles serían los valores que no tendría sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

9. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–13	–7	10	–13	24
$f(x)$	–15	0	14	3	0

10. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. ¿Cuál es su área? Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.
11. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.
12. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 4 cm y de altura total del vaso 24 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?
13. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas de que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 3, –2, y 1/2 respectivamente.
14. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta $y = x$? ¿Y la recta $y = –x$?
15. Un metro de cierta tela cuesta 1,35 €, ¿cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 m? ¿Y 12,5 m? ¿Cuánto cuestan "x" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.
16. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:
    a) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es 3.
    b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(0, 4)$.
    c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
    d) Pasa por los puntos $C(–1, 3)$ y $D(–2, 5)$.
    e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m.
17. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?
18. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:
    a) De pendiente 3 y ordenada en el origen 0.
    b) Pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.
    c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).
19. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = 3x + 3$
20. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = \frac{-x}{2}$
21. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = -3x^2 + 6x - 4$
22. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = 2x^2 - 8$
23. Dibuja la gráfica de la función $y = x^2$.
    a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
    b) Tomando valores de abscisa negativa.
    c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
    d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
    e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
    f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.
24. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 – 3$; $y = –x^2$; $y = –x^2 + 2$; $y = x^2 – 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 – 3$. La parábola $y = –x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

25. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 3)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 2)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - p)^2$.
26. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal a la derecha y 3 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?
27. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas:
    $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que ahora ya no te sirve la plantilla empleada. Ahora las parábolas se estrechan o se ensanchan.

28. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:
    a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
    b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
    c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
    d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??
29. Volvemos a usar la plantilla.
    a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (4, 2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.
    b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–3, –1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

LOGARITMOS

30. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

31. Calcula utilizando la definición de logaritmo:
    a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$
32. Calcula utilizando la definición de logaritmo:
    a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$
33. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:
    a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

34. Calcula utilizando la definición de logaritmo:
    a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$
    b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$
35. Utiliza la calculadora para obtener a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.
36. Desarrolla las expresiones que se indican:
    a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$
37. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212
    a) 81 b) 27 c) 59 049
38. Simplifica la siguiente expresión:
    $$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$$

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

GEOGEBRA

39. Dibuja en los mismos ejes coordenados las rectas que pasan por los siguientes puntos:
i) (0, 0) y (1, –2) ii) (1, 1) y (0, 3) iii) (–2, 0) y (0, –4)
a) ¿Cómo son las rectas?
b) Calcula la ecuación de las tres rectas del apartado anterior. ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas?
En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y dibuja otras rectas paralelas para comprobarla.

40. Dibuja en los mismos ejes coordenados las rectas que pasan por los puntos:
i) (0, 3) y (1, 1) ii) (1, 4) y (–1, 2) iii) (–2, 4) y (2, 2) iv) (–2, –1) y (-1, 1)
a) Calcula las ecuaciones de las cuatro rectas.
b) ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que has calculado?

41. ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen de las cuatro rectas que has dibujado en el ejercicio anterior?
En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y compruébala dibujando otras rectas que pasen por el mismo punto.

42. Observa las ecuaciones de las cuatro rectas que has dibujado, dos de ellas tienen pendiente positiva *a* y *d* y las otras dos, *b* y *c* tienen pendiente negativa. Relaciona el signo de la pendiente de la recta con el crecimiento o decrecimiento de la función que representan.

43. Calcula dos puntos de las rectas de ecuaciones: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para dibujarlas con Geogebra. Indica dos propiedades comunes de ambas gráficas.

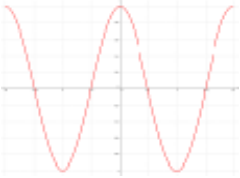
44. Representa, también, las rectas de ecuaciones: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

45. ¿Qué condición deben verificar las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares?

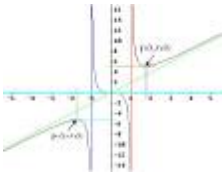
3. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

46. Señala todas las características que puedas de las funciones representadas mediante sus gráficas: dominio y rango, simetría, puntos de intersección con los ejes coordenados, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

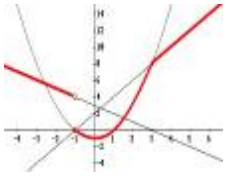
GRÁFICA 1



GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



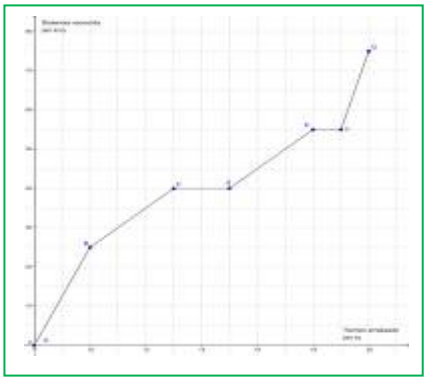
GRÁFICA 4

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

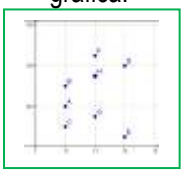
Sistemas de representación

1. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda: $A(5, 4)$; $B(0, 2)$; $C(-2, 0)$; $D(3, -1.3)$; $E(1.5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está.
2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.
3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
   40. A(0, 4); B(0, 2.3); C(0, –2); D(0, –1). ¿Qué tienen en común todos ellos?
4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de ordenadas. ¿Qué tienen en común?
5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.
6. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:
   a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
   b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
   c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
   d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
   e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
   f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
   g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?



Funciones y tipos de funciones

7. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
   a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
   b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
8. La altura y la edad de los componentes de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:



   a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura?
   b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad?
   c) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué?
   d) ¿Y la relación entre la edad y la altura? Realiza una gráfica similar a la anterior para representar esta situación.
9. La distancia, d, recorrida por un tren depende del número de vueltas, n, que da cada rueda de la locomotora.

a) Escribe la fórmula que permite obtener d conocido n, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
b) Dibuja la gráfica.
c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3.14).
d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

10. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:
    a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
    b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?
    c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
    d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?
11. Dibuja la gráfica de la función parte entera: $y = E(x)$.
12. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?
13. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.
14. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

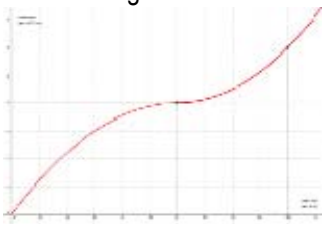
es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

15. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada en el origen 6.
16. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ y $C(13, 15)$.
17. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.
18. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "a" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.
19. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

    a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$
20. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

    a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

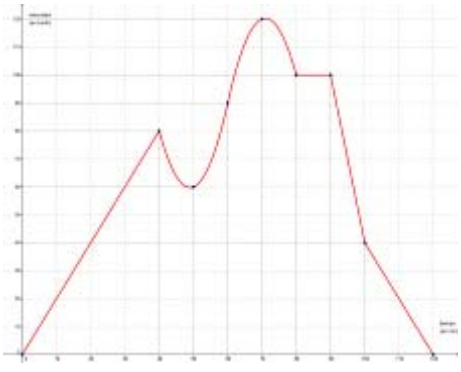
    Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$
21. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.



    a) ¿Cuál es la variable dependiente?
    b) ¿Y la independiente?
    c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
    d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?
    e) Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

Características de las funciones.

22. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado n años.
23. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.

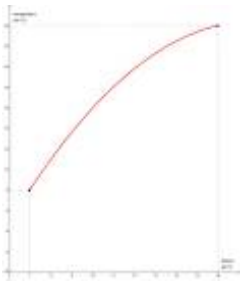
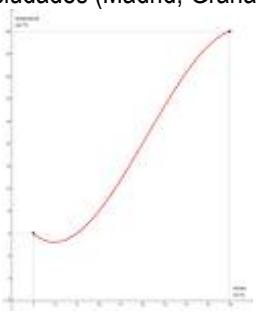
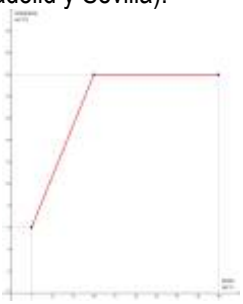
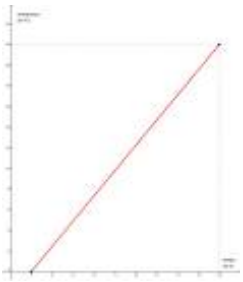


    a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
    b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
    c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
    d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
    e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
    f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?
24. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1.20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

    a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
    b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
    c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

25. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.
    Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):
    a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 x tiempo
    b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
    c) A partir del día 45: altura = 135.
26. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma:
    - Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto.
    - Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$.
    - Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$.
    - Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.
    a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
    b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
    c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
    d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
    e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
    f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
    g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.
27. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el tema: monotonía, extremos, simetría y periodicidad.
    a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$.
    b) Opuesto e inverso de un número: $f(x) = \frac{1}{x}$.
    c) *Mantisa* (a cada número le hace corresponder la diferencia entre dicho número y su parte entera): $M(x) = x - E(x)$.
28. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):

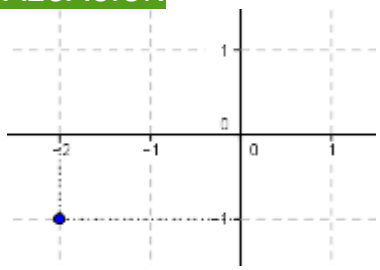





    a) Estudia la monotonía de todas las gráficas.
    b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?
    c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?
    d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h y en Valladolid a partir del medio día la temperatura bajó, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

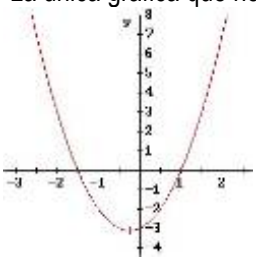
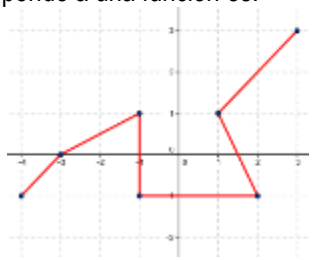
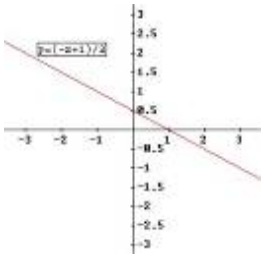
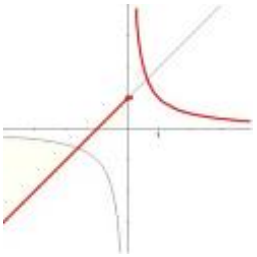
BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Las coordenadas del punto señalado son:
   a) (–1, 2)
   b) (–2, –1)
   c) (1, 2)
   d) (1, –2)



2. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

3. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

c)

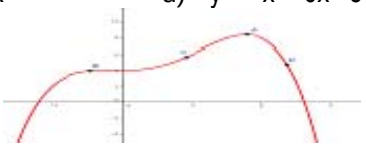
x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

d)

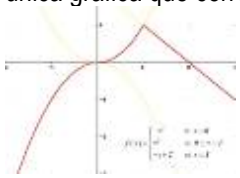
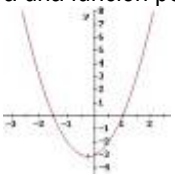
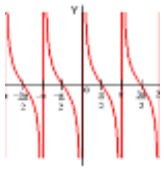
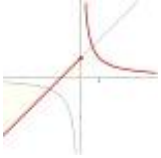
x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

4. La única función afín que, además, es lineal es:
   a) $y = -4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -x - 1$
5. La única gráfica de una función afín no constante es:
   a) b) c) d)

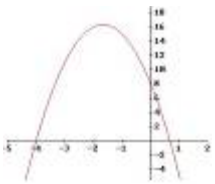
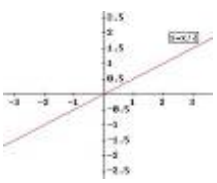
6. La única función cuadrática es:
   a) $y = -2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^3 - 1$
7. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (3, 4) es:
   a) $y = -2x^2$ b) $y = 3x^2 - x + 1$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -x^2 + 6x - 5$
8. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:
   a) b) c) d)



9. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

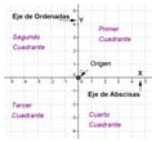
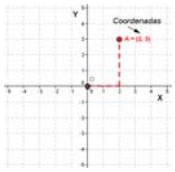
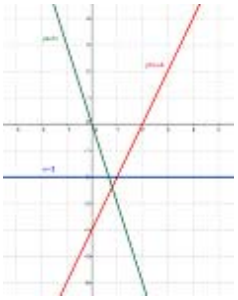
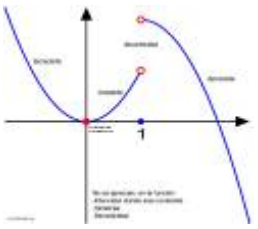
a)  b)  c)  d) 

10. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente hasta $x = -2$ es:

a)  b)  c) d)

BY NC SA

RESUMEN

Ejes cartesianos y coordenadas de un punto en el plano		
Función	Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).	$y = f(x) = 0.59 \cdot x$ $f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$ $f(5) = 0.59 \cdot 5 = 2.95$
Gráfica de una función	La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función: $\{(x, y) \mid x \in \Re, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0.59x$ *Gráfica:*
Función afín, función lineal y función constante	Una **función afín** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno: $y = f(x) = mx + n$. La representación gráfica es una recta. "m" recibe el nombre de **pendiente** y "n" **ordenada en el origen**. Una **función lineal o de proporcionalidad directa** es una función afín con ordenada en el origen nula: $y = mx$ (pasa por el origen). Una **función constante** es una función afín con pendiente nula: $y = n$ (siempre toma el mismo valor y su gráfica es una recta horizontal).	
Función cuadrática	Una función cuadrática es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado dos: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. La gráfica de este tipo de funciones se llama parábola. El punto más significativo de la parábola es el **vértice** y se calcula dándole a la variable independiente el valor $x = -b/2a$ Si el coeficiente líder es positivo, el vértice es un mínimo y, si es negativo, un máximo.	
Continuidad Monotonía Extremos Simetría Periodicidad	Una función puede ser continua en un intervalo si su gráfica no sufre "rupturas" (llamadas **discontinuidades**), **creciente** (**decreciente**) si su valor aumenta (disminuye) cuando lo hace la variable independiente, **constante** cuando siempre toma el mismo valor, **par** si la imagen de la variable independiente coincide con el de su opuesto, **impar** cuando el valor de la función para el opuesto de la variable independiente también es el opuesto y **periódica** si las imágenes de los valores obtenidos al sumar una cantidad fija (**periodo**) a la variable independiente coinciden.	

BY NC SA

CAPÍTULO 12: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LA TOMA DE DATOS

1. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.
   a) ¿Cuál es la población objeto del estudio?
   b) ¿Cuál es la muestra elegida?
   c) Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.
2. En un estudio estadístico se puede preguntar cosas tan variopintas como
   a) ¿Qué frutas comes a lo largo de una semana?
   b) ¿Cuántas piezas de fruta comes al día?
   c) ¿Cuántas monedas llevas en el bolsillo?
   d) ¿Cuál es tu altura?
   e) ¿Cuántas marcas de chocolate recuerdas?
   f) ¿Cuáles son las marcas de chocolate que recuerdas?
   g) ¿Cuántos hermanos tienes?
   h) ¿Cuál es tu color favorito para un coche?
   i) ¿Cuánto tiempo pasas al día viendo la televisión?
   j) ¿Cuántos seguidores tienes en twitter?

Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

3. Señalar en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
   a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
   b) La altura de un grupo de seis amigos.
4. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 3º ESO es de 7'9*". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las alumnas, ¿sería representativo su valor?
5. En una serie de televisión tienen dudas sobre qué hacer con la protagonista, si que tenga un accidente o si debe casarse. Van a hacer una consulta. ¿A toda la población o seleccionado una muestra representativa? Razona la respuesta.

2. REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

6. Reúne a 10 amigos. Recuenta cuántas monedas de cada valor (1céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, …) tenéis entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado el número de monedas de cada clase que hay. ¿Hay algún otro diagrama que te permita ver qué tipos de monedas son más abundantes en la muestra que has tomado?
7. En la clase de Educación Física el profesor ha medido el tiempo que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:

14.92	13.01	12.22	16.72	12.06	10.11	10.58	18.58	20.07	13.15	20.10	12.43	17.51	11.59	11.79
16.94	16.45	10.94	16.56	14.87	17.59	13.74	19.71	18.63	19.87	11.12	12.09	14.20	18.30	17.64

Agrupa estos resultados por clases, comenzando en 10 segundos y haciendo intervalos de longitud 1 segundo. Realiza una tabla de frecuencias y representa adecuadamente estos datos.

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

3. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

8. En una excursión de montaña participan 25 personas con las siguientes edades:

8	10	10	11	12
36	37	37	38	40
42	43	43	44	45
47	48	50	52	53
55	58	61	63	67

a) Hacer una tabla de frecuencias clasificando las edades en 6 intervalos que comienzan en 7,5 y terminan en 67,5. Hallar, a partir de ella, los parámetros $\overline{x}$, σ y CV.
b) Calcular $\overline{x}$, σ y CV introduciendo los 25 datos en la calculadora, es decir, sin agruparlos en intervalos.
c) Prescindiendo de los 5 niños, obtenemos un colectivo de 20 personas. Calcular de nuevo sus parámetros $\overline{x}$, σ y CV, y comparar con los obtenidos en el grupo inicial.
d) Hallar los parámetros de posición Q_1, Q_3 y Me, de la distribución original, y construir el diagrama de caja y bigotes correspondiente.

4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

9. Para cada uno de los ejemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.
10. En una bolsa tenemos 10 bolas rojas numeradas del 1 al 10. Se hacen los dos experimentos siguientes:
    EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.
    EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.

¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?
Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

11. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.
12. En algunos lugares de España se sigue jugando a la taba. La taba es un hueso de cordero que no es regular. Puede caer en cuatro posiciones distintas. Podemos pensar en ella como si fuese un dado "raro". Considera el experimento "lanzar la taba al aire y ver lo que marca su cara superior: hoyo, panza, rey y verdugo". Aproxima la probabilidad de cada uno de los casos de este experimento aleatorio.

13. Tu calculadora probablemente tendrá una función que sirve para generar números aleatorios. Normalmente da un número comprendido entre 0 y 1. Realiza el experimento aleatorio "genera un número aleatorio y apunta su segundo decimal". Haz 40 repeticiones de este experimento. Dibuja un histograma de frecuencias.
14. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.
¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?
¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?
¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística

41. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:
    3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.
42. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles.
43. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el intervalo intercuartílico.
44. Representa esos datos en un diagrama de cajas.
45. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa los datos en un histograma.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.

46. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada.
Calcula la media y la desviación típica-

47. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.
48. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

49. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.
50. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

51. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

52. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Otros	Total
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

53. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Polonia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Otros	Total

Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

54. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

55. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

56. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Separa los Estados Miembros en dos grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

57. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

58. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35 379 097	15 920 815	19 458 282	290 189	357 339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

59. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

4 074 363	8 001 754	1 562 567	1 245 948	1 015 994		15 920 815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?

Probabilidad

60. Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado dos veces. Calcula las probabilidades siguientes:
    a) Sacar algún 1.
    b) La suma de los dígitos es 8.
    c) No sacar ningún 2.
    d) Sacar algún 1 o bien no sacar ningún 2.
61. Se considera el experimento aleatorio sacar dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de:
    a) Sacar algún rey.
    b) Obtener al menos un basto.
    c) No obtener ningún basto.
    d) No obtener el rey de bastos.
    e) Sacar alguna figura: sota, caballo, rey o as.
    f) No sacar ninguna figura.
62. Se considera el experimento aleatorio de tirar una moneda tres veces. Calcula las probabilidades siguientes:
    a) Sacar cara en la primera tirada.
    b) Sacar cara en la segunda tirada.
    c) Sacar cara en la tercera tirada.
    d) Sacar alguna cara.
    e) No sacar ninguna cara.
    f) Sacar tres caras.
63. Con una baraja española se hace el experimento de sacar tres cartas, con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres reyes? Y si el experimento se hace sin reemplazo, ¿cuál es ahora la probabilidad de tener 3 reyes?
64. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo. Determina la probabilidad de que:
    a) Las dos sean negras.
    b) Haya al menos una negra.
    c) Ninguna sea negra.
65. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo. Determina la probabilidad de que:
    a) Las dos sean negras.
    b) Haya al menos una negra.
    c) Ninguna sea negra.
    d) Compara los resultados con los de la actividad anterior.
66. Al lanzar cuatro monedas al aire,
    a) ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro sean caras?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres caras?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 caras?
67. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0.7 y el segundo de 0.5. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y las distintas posibilidades: a) ¿Qué probabilidad hay de que uno de los tiradores dé en el plato? b) Calcula la probabilidad de que ninguno acierte. c) Calcula la probabilidad de que los dos acierten.
68. Se lanza una moneda hasta que aparezca cara dos veces seguidas. a) Calcula la probabilidad de que la experiencia termine en el segundo lanzamiento. b) Calcula la probabilidad de que termine en el tercer lanzamiento.
69. En el lanzamiento de naves espaciales se han instalado tres dispositivos de seguridad A, B y C. Si falla A se pone automáticamente en marcha el dispositivo B, y si falla este, se pone en marcha C. Se sabe que la probabilidad de que falle A es 0.1, la probabilidad de que B funcione es 0.98 y la probabilidad de que falle C es 0.05. Calcula la probabilidad de que todo funcione bien.
70. Se hace un estudio sobre los incendios forestales de una zona y se comprueba que el 40 % son intencionados, el 50 % se deben a negligencias y el 10 % a causas naturales. Se han producido tres incendios, a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado? b) Probabilidad de que los tres incendios se deban a causas naturales. c) Probabilidad de que ningún incendio sea por negligencias.
71. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que

BY NC SA
Textos Marea Verde
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

72. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0.12, la probabilidad de que salga una copa es 0.08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84.

Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

73. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:
    a) que los calcetines sean negros.
    b) que los dos calcetines sean del mismo color.
    c) que al menos uno de ellos sea rojo.
    d) que uno sea negro y el otro no.

74. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,
    a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.
    b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:

a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. En un histograma de frecuencias relativas el área de cada rectángulo es:

a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta
c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada

3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:

a) 7.6 b) 8.2 c) 8 d) 9

4. En las notas anteriores de Ana la mediana es:

a) 9 b) 8 c) 7.5 d) 8.5

5. En las notas anteriores de Ana la moda es:

a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10

6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento "tirar dos monedas y contar el número de caras" es:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:

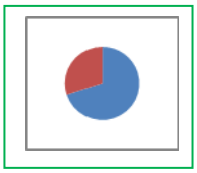
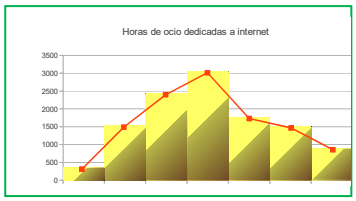
a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Población	Colectivo sobre el que se hace el estudio	Estudiantes de todo Madrid
Muestra	Subconjunto de la población que permita obtener características de la población complete.	Alumnos se 3º de ESO seleccionados
Individuo	Cada uno de los elementos de la población o muestra	Juan Pérez
Variables estadística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pie que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estadísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$	Con los datos: 8, 2, 5, 10 y 10 *Media* = 35/5 = 7
Moda	Es el valor más frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deja por debajo la mitad	4 < 6 < 8 < 10 = 10. *Me* = 8.
Rango o recorrido	Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	Es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.	$(\lvert 8-7\rvert + \lvert 2-7\rvert + \lvert 5-7\rvert + \lvert 10-7\rvert + \lvert 10-7\rvert)/5$ = (1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9.4
Desviación típica	Es la raíz cuadrada de la varianza= $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	$\sqrt{47/5}$ = 3.06
Probabilidad	Valor entre 0 y 1 que nos da una medida de lo factible que sea que se verifique un determinado suceso.	P(3) = 1/6 al tirar un dado
Espacio muestral	El conjunto de todos los casos posibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconjunto del espacio muestral	Sacar par: {2, 4, 6}
Ley de Laplace.	$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	*P*(par) = 3/6 = 1/2.

BY NC SA
Ilustraciones de los autores y Banco de Imágenes de INTEF