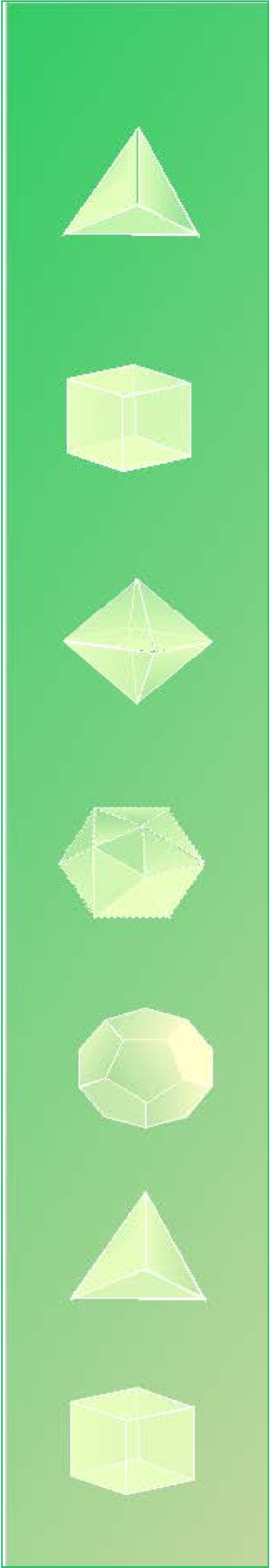


# Matemáticas

# 3º de ESO

# Capítulo 11: Funciones y gráficas




www.apuntesmareaverde.org.es


**BOCM: Logaritmos**: definición y propiedades. Aplicación a contextos sencillos como la **escala de pH** o la escala Ritcher, valorando el concepto de orden de magnitud. **Buscar la escala Ritcher**

Razones **trigonométricas** básicas: seno, coseno y tangente.



**Autor: José Gallegos Fernández**

**Ilustraciones: José Gallegos Fernández**

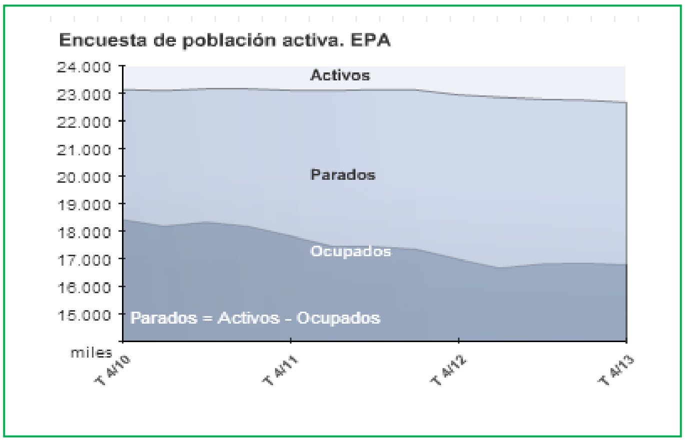
## Índice



## Resumen


El concepto de función es bastante abstracto, lo que hace complicada su definición y comprensión. Sin embargo, sus aplicaciones son múltiples y muy útiles, lo que las hace muy importantes.

Por ejemplo, las funciones sirven para poder explicar muchos fenómenos que ocurren en campos tan diversos como la Física, la Economía o la Sociología.




A pesar de las dificultades, algunas características que poseen las funciones se entienden fácilmente cuando se representan gráficamente, por resultar entonces muy intuitivas, y eso es suficiente para poder analizar y resolver muchas cuestiones. Por ejemplo, si observamos la gráfica anterior no es difícil interpretar si el paro ha subido o si ha bajado en el cuarto trimestre entre dos años consecutivos, o globalmente a lo largo del periodo completo estudiado, o calcular dicho incremento/disminución o estudiar en qué año hubo más personas ocupadas o menos personas activas...




Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

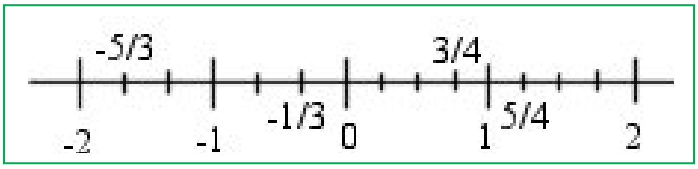
# 1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO

## 1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos

***Recuerda que:***

Cuando queremos representar gráficamente un número, normalmente los dibujamos sobre una recta, llamada *recta numérica*, en la cual establecemos un punto de referencia, que es el 0, a partir del cual trazamos los números positivos (hacia la derecha) y los negativos (hacia la izquierda).

Pues bien, si estamos trabajando con una única variable que toma valores numéricos y los queremos representar, lo haremos igualmente sobre dicha recta.



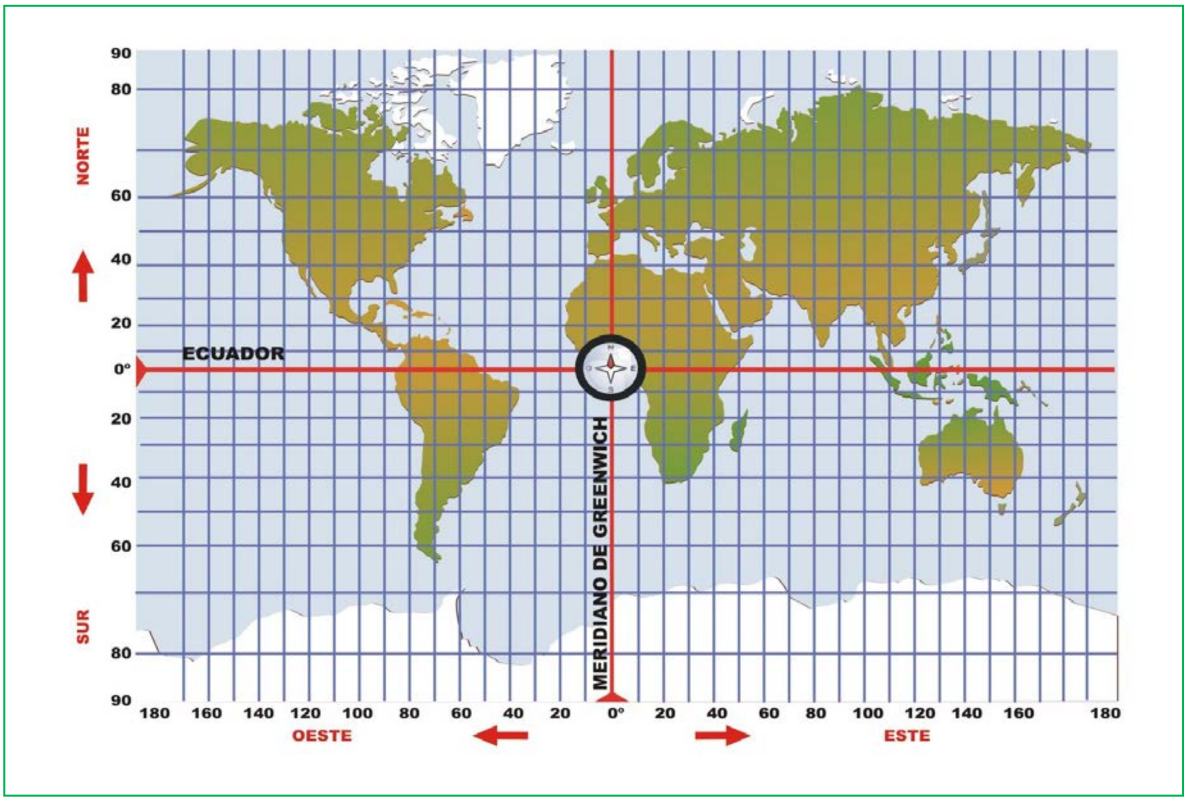

Es importante hacer notar que, como tenemos una única variable, necesitamos una única recta y, por tanto, estamos trabajando con una única dimensión (longitud).

***En el plano:***

Ahora bien, si trabajamos con objetos de dos dimensiones, en el plano, necesitamos dos valores para referirnos a ellos, ya que están determinados por su longitud y su anchura, que no tienen por qué ser iguales y que siguen direcciones diferentes.

***Ejemplo:***

- En un mapa, para poder situar un punto cualquiera (por ejemplo, una ciudad), tenemos una referencia a partir de la cual tomar las medidas: el paralelo del Ecuador y el meridiano de Greenwich. Ambos se cortan en un punto, que es el origen de este sistema de referencia:



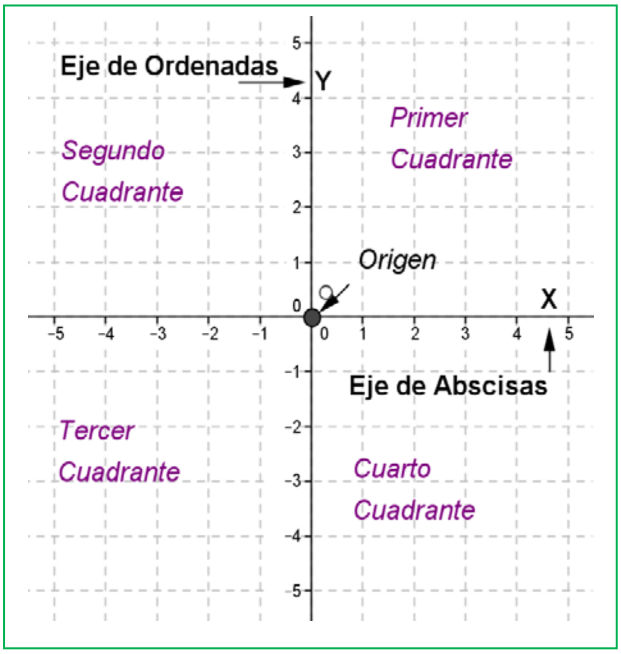


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

De igual forma, si tenemos dos variables *que están relacionadas de alguna manera,* que toman valores numéricos y los queremos dibujar, tendremos que utilizar dos rectas o ejes diferentes (cada uno para los datos correspondientes a una variable) y que sean secantes, es decir, se cortan en un punto (sin el cual no se podría establecer la relación entre ambas).

Si las rectas se cortan de forma perpendicular, es más sencillo establecer la conexión entre valores, y las medidas que se representan en cada eje (salvo escalas) se pueden corresponder de forma directa con la realidad, por lo que siempre se suelen dibujar de esta forma (formando un ángulo de 90° entre sí).

El sistema de representación de puntos en el plano más común está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado ***eje de abscisas***, donde se representan los valores de la variable independiente (que toma los valores libremente, y que suele llamarse *"x"*), y otro vertical llamado ***eje de ordenadas***, donde se representan los valores de la variable dependiente (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse *"y"*). Ambos reciben el nombre de ***ejes de coordenadas*** o ***ejes cartesianos*** (en honor del famoso filósofo y matemático francés *Renè Descartes*). El punto donde se cortan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas*** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.




Un conjunto formado por el origen *O*, los dos ejes de coordenadas y la unidad de medida es un **sistema de referencia cartesiano**.

## 1.2. Coordenadas cartesianas

Una vez establecido el sistema de referencia con respecto al cual poder situar los puntos, para llegar a uno en concreto partimos del origen, "O", recorremos una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto queda determinado por un par de números, la medida de los caminos realizados en ambas direcciones, a los que llamamos **coordenadas del punto**.

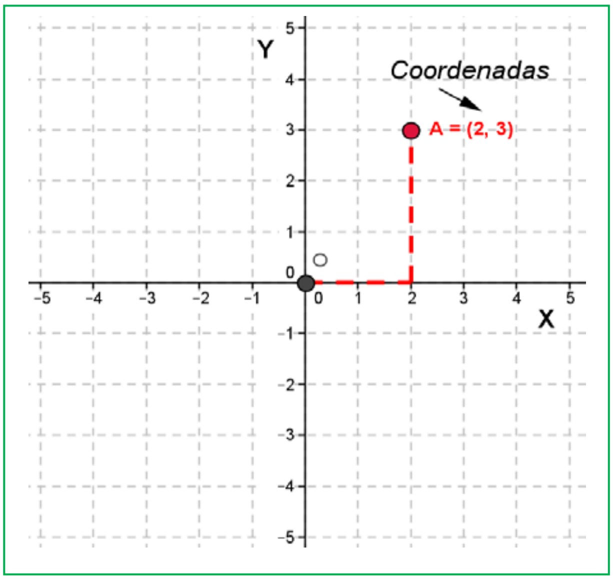
***Ejemplo:***

- En un mapa como el del ejemplo anterior, un punto queda determinado por su *latitud* (distancia al Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por dicho punto) y la *longitud* (distancia al Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por dicho punto), llamadas *coordenadas geográficas*. Por ejemplo, la situación de Madrid es (–3.41, 40.24):

  Longitud –3.41 o 3.41 O, es decir, hay que trasladarse 3.41 hacia el oeste (izquierda) del meridiano de Greenwich.
  Latitud +40.24 o 40.24 N, es decir, hay que trasladarse 40.24 hacia el norte (por encima) del Ecuador.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales ***(x, y)***, siendo ***"x"*** la primera coordenada o **abscisa** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical) e ***"y"*** la segunda coordenada u **ordenada** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal).
Cuando ese valor se toma hacia la izquierda o hacia abajo lo indicamos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha lo indicamos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.
De esta forma, cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas y viceversa, a toda pareja ordenada de números le corresponde un punto del plano.

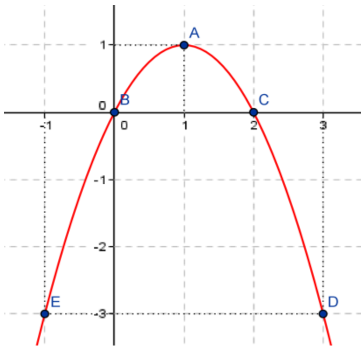



***Ejemplo:***

- En el gráfico anterior, el punto A tiene coordenadas (2, 3).

## Actividades resueltas

- *En la siguiente gráfica, indica las coordenadas de los puntos señalados:*




***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

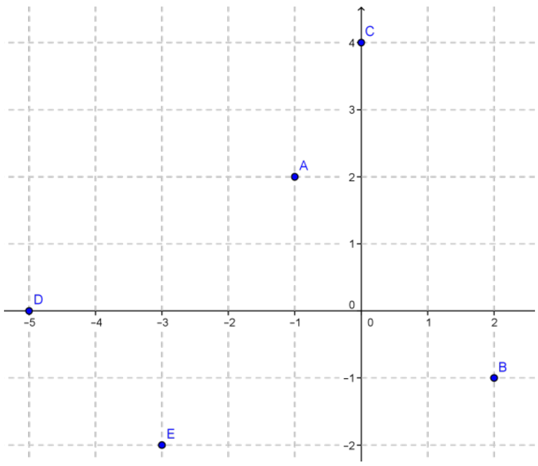
***C*(2, 0)**

***D*(3, –3)**

***E*(–1, –3)**

- *Represente gráficamente los puntos*:

$A(-1,2); B(2,-1); C(0,4);$
$D(-5,0); E(-3,-2)$

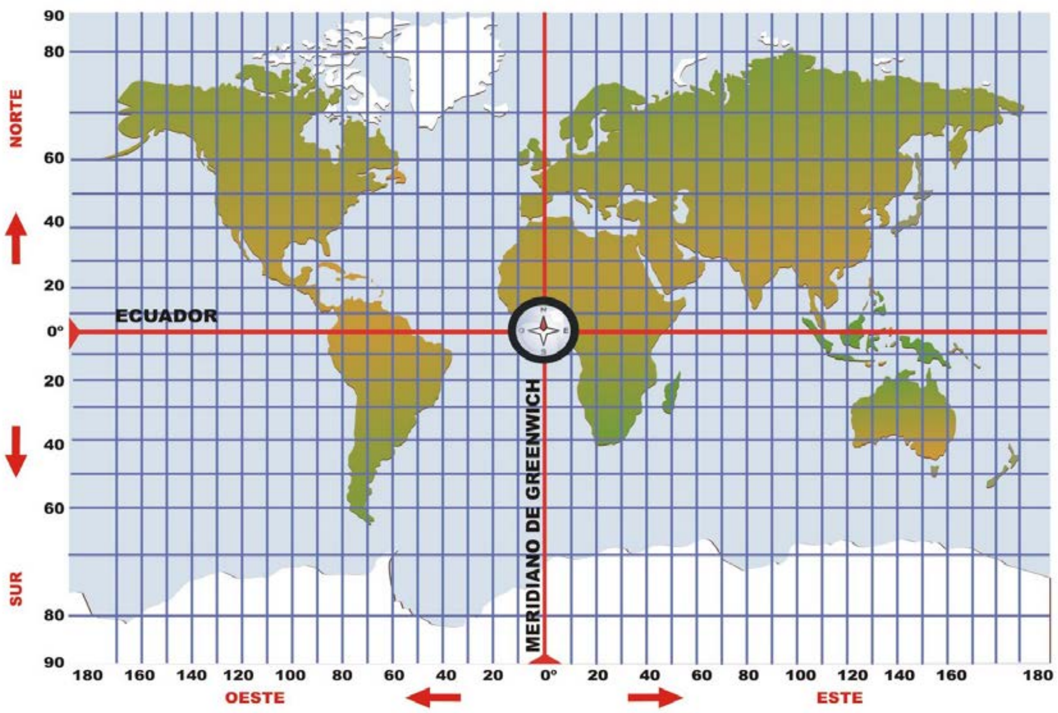




Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## Actividades propuestas

**1.** Fíjate en el mapa siguiente, localiza los países o ciudades que se piden e indica en tu cuaderno:



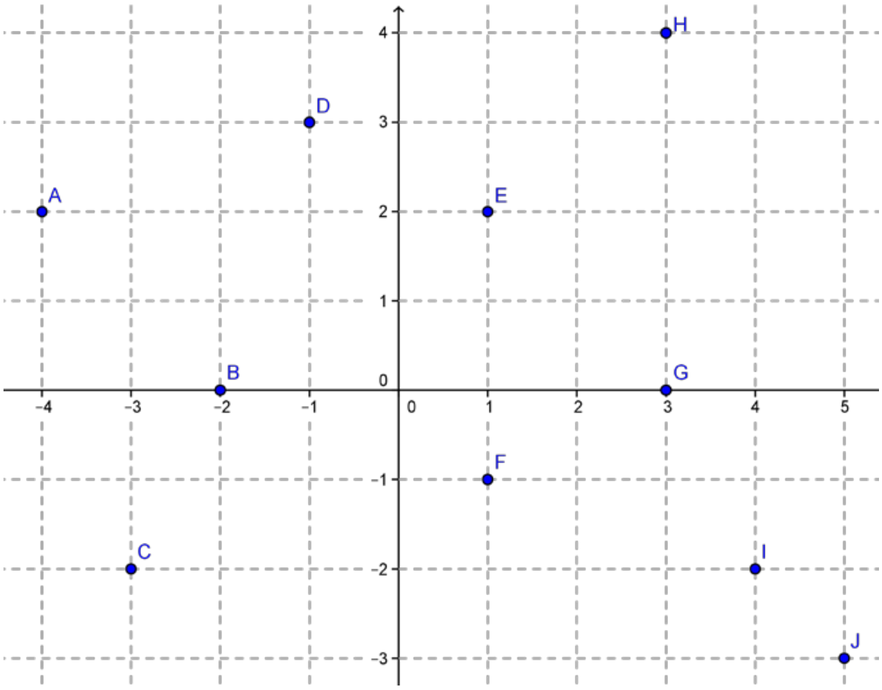

a) Los cuadrantes donde se encuentran los siguientes países:

- Méjico:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Argentina:
- Australia:
- Japón:
- Arabia Saudí:
- Alemania:
- EEUU:
- Marruecos:

b) Las coordenadas (aproximadas) de las siguientes ciudades:

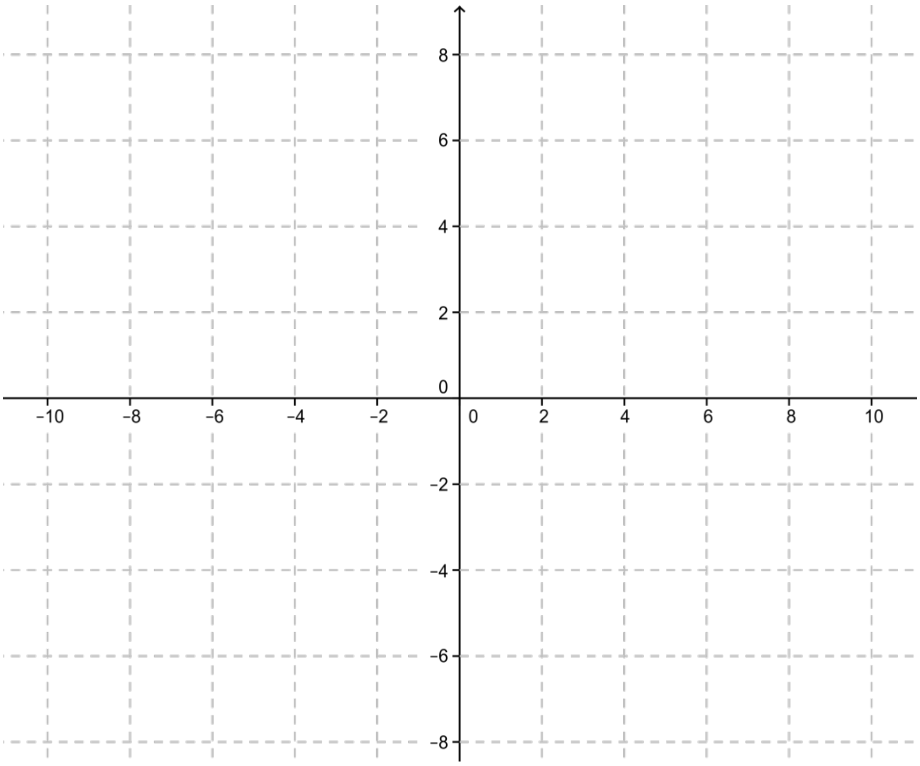
- Ciudad del Cabo:
- Nueva York:
- Río de Janeiro:
- Alicante:
- Pekín:
- Rabat:
- Sídney:
- Oviedo:
- Londres:
- Córdoba (Méjico):

**2.** Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:




**3.** Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A (0, −2) | *B* (−2, 0) | *C* (4, 0) | *D* (−6, 0) | *E* (0, 6) | *F* (1, 7) | *G* (7, 1) | *H* (−4, 8) | *I* (−1, −4) | *J* (−4, −1) |
| *K* (5, −3) | *L* (9, 6) | *M* (−2,1) | *N* (7, −4) | *Ñ* (−3, −3) | *O*(0, 0) | *P(−2, −1)* | *Q*(2, 1) | *R*(2, −1) | *S*(−2, 2) |



## 2. FUNCIONES

### 2.1. Concepto intuitivo de función

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un billete en un medio de transporte y la distancia o tiempo de duración del viaje, el precio de un kilo de fruta o carne y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos, el número de latidos del corazón en una unidad de tiempo…

Muchas de esas relaciones se rigen por una ley de proporcionalidad, directa o inversa, pero hay otras muchas en las que la correspondencia entre ambas magnitudes es más compleja.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).

Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica… ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

***Ejemplos:***

- *Un kilo de tomates cuesta* 0.59 €/kg. *La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es* $y = f(x) = 0.59\,x$.

  En ella, ***f*** es el nombre que le ponemos a la función y podríamos llamarla usando otras letras (las que se usan más frecuentemente son "*f*", "*g*" y "*h*"). Entre paréntesis va la variable "***x***" que representa el número de kilos que compramos, y es la variable independiente puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad que queremos o necesitamos. Por último, la variable "***y***" representa el precio que debemos pagar, y es la variable dependiente puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de "*x*".

  La expresión, *f*(x) que se lee "*f* de *x*", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque:

  1º) en ella se ve cuál es la variable independiente y, por tanto:

  2º) resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 2 kg. Se expresaría "*f* de *2*" y su valor es $f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$ *€*.

- *Una persona que va paseando siempre a la misma velocidad, quiere recorrer una calle recta de* 1 *km en un tiempo determinado. La relación entre el tiempo que tardará (en segundos) y la velocidad que lleva (en metros por segundo) viene dada por la fórmula* $v(t) = \frac{1000}{t}$.

  En ella, "***v***" es el nombre de la función velocidad, 1 000 son los metros que tiene que recorrer y "***t***" el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

- Todos los números decimales tienen su parte entera y su parte decimal. Pues bien, todo número real se puede relacionar de forma única con el *número entero inmediatamente inferior*, llamado su "*parte entera*" y representado $E(x)$. El hecho de que este número sea único hace que nos encontremos ante una función.
Por ejemplo, la parte entera de 8.3 es 8: $E(8.3) = 8$; la de -4.2 es -5: $E(-4.2) = -5$…
Pues bien, esta función, a pesar de su sencilla descripción mediante palabras que nos dicen qué debemos hacer, no se puede escribir mediante una fórmula algebraica.

## Actividades propuestas

**4.** De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad – altura de la persona a lo largo de su vida.
b. Altura – edad de la persona.
c. Precio de la gasolina – día del mes.
d. Día del mes – precio de la gasolina.
e. Un número y su quinta parte.
f. Un número y su cuadrado.
g. Un número y su raíz cuadrada.

**5.** Si hoy el cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

| **€** | 2 | 5 | 10 | 27 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| **$** | | | | | |

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?
Si realizas el cambio en una oficina, te cobran una pequeña comisión fija por realizar la operación de 1.5 €. ¿Cómo quedaría/n la fórmula/s en este caso?

**6.** El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 746 pies de altura, están separadas por una distancia de 4 200 pies aproximadamente. La calzada, que tiene una anchura de 90 pies y se encuentra a una altura de 220 pies sobre el nivel del agua, está sujeta a las torres mediante dos cables, de 3 pies de diámetro, que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente.

-Realiza un dibujo donde queden reflejados los datos más significativos del problema.
-Determina la relación que existe entre la altura a la que se encuentra un punto del cable y la distancia de su proyección vertical al centro del puente.
-Aplicar dicha fórmula para calcular la altura de un punto del cable cuya vertical está a 1000 pies del centro del puente.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## 2.2. Gráfica de una función

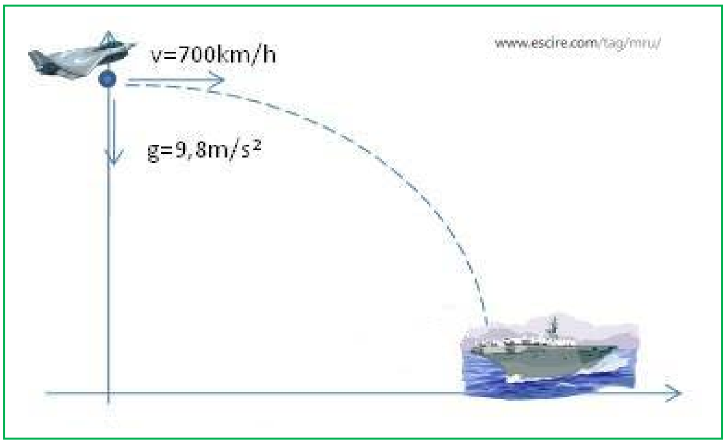
Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujarlos ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que podamos hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante puesto que nos hace mucho más concreto un concepto muy abstracto, al poder visualizarlo: “más vale una imagen que mil palabras”.

***Ejemplo:***

- *La trayectoria que debe seguir un avión para aterrizar en un portaviones se corresponde con la representación de la función que relaciona la distancia recorrida por el mismo dependiendo del tiempo que tarda en recorrerla:*

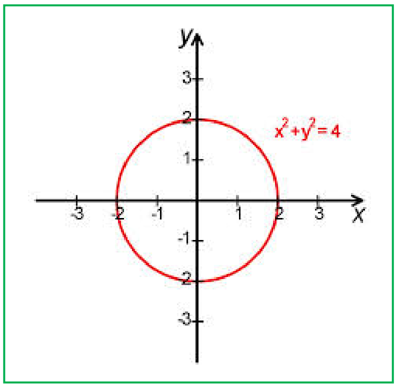



Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.

***Ejemplo:***

- El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor **0** de la variable independiente le corresponden los valores **2** y –**2** de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, por lo que **no** puede ser la representación de una función.

  La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2 + y^2 = 4$ o, también, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ .

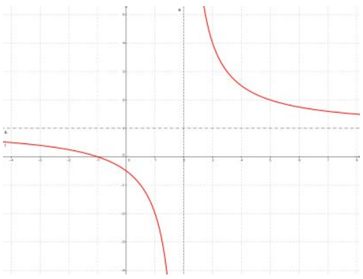


La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:

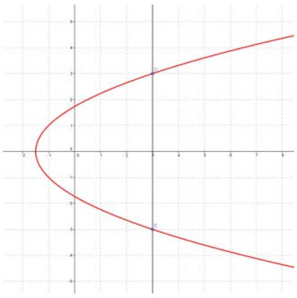
$$\{(x, y) \mid x \in \Re, y = f(x)\}$$

## Actividades resueltas

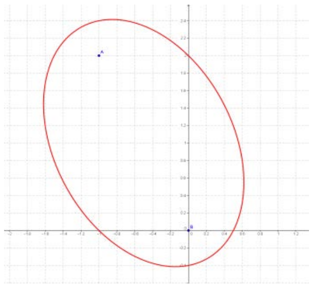
- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



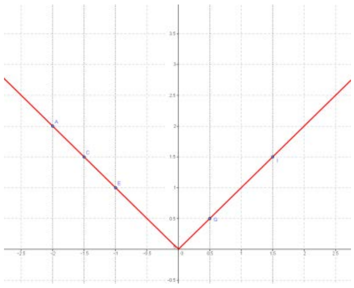
***SÍ***



***NO***



***NO***



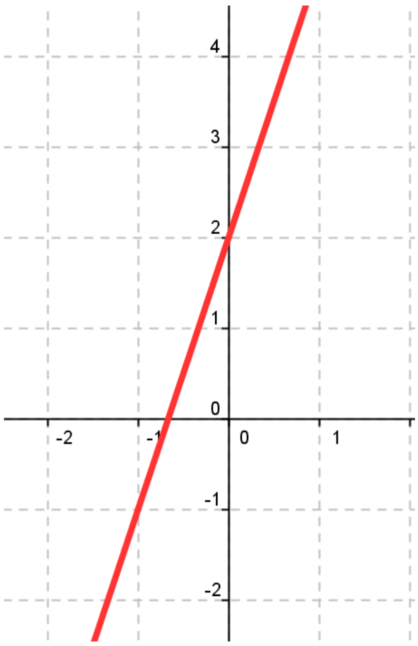
***SÍ***

¿Cuál es la clave o regla para saber, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no? ***Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. En otro caso, no.***

- *Dibuja en el plano cartesiano los valores de la siguiente tabla y conjetura acerca de qué tipo de figura corresponde a la gráfica de la función:*

| $x$ | –4 | –2 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –10 | –4 | 2 | 5 | 11 |

GRÁFICA




Observamos que los puntos, al representarlos, están alineados. Por tanto, el dibujo que corresponde a la gráfica de la función es una RECTA.

En este caso, no es demasiado difícil descubrir que la fórmula que relaciona ambas variables es:

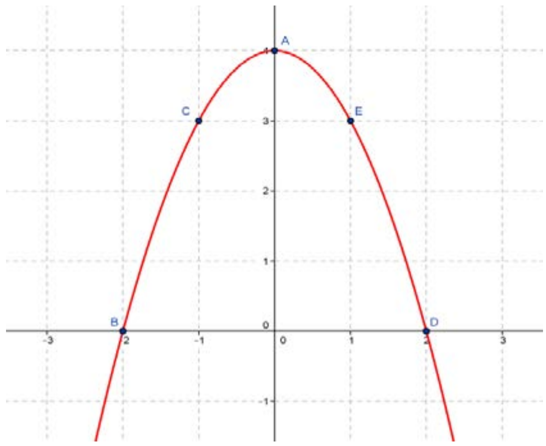
$$f(x) = 3x + 2$$

- *Completa la siguiente tabla a partir de la fórmula de la función* $f(x) = -x^2 + 4$ *, dibuja los puntos en los ejes cartesianos e intenta unirlos mediante una curva:*

| *x* | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | ***0*** | ***3*** | ***4*** | ***3*** | ***0*** |

La curva obtenida recibe el nombre de **PARÁBOLA** (que es una de las cuatro cónicas).

GRÁFICA




## Actividades propuestas

**7.** Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y la otra no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

**8.** Realiza en tu cuaderno una tabla con 10 valores de la función *e*(*t*) = 5*t* + 20, represéntalos gráficamente e indica la figura que determinan. Si dicha función representa el espacio (en kilómetros) que recorre una persona que lleva andados 20 km y camina a una velocidad de 5 km/h, en función del tiempo que tarda en recorrerlo (en horas), indica cuáles serían los valores que no tendría sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

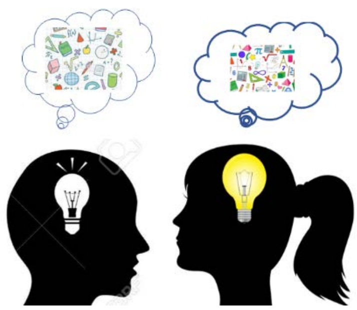
**9.** Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

| *x* | –13 | –7 | 10 | –13 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f*(*x*) | –15 | 0 | 14 | 3 | 0 |

**10.** En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. ¿Cuál es su área? Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

**11.** Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

**12.** Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 4 cm y de altura total del vaso 24 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?




Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## 2.3. Ejemplos de funciones: función afín y cuadrática

Durante todos los apartados anteriores hemos ido analizando distintos ejemplos de relaciones entre dos variables que eran función y otros que no. Lo hemos hecho desde el punto de vista gráfico, de tablas de valores y de fórmulas matemáticas.

En esta sección, simplemente vamos a analizar unos cuantos ejemplos de funciones que son bastante sencillas y que tienen bastantes aplicaciones prácticas.

Una **función afín** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno:

$$y = f(x) = mx + n.$$

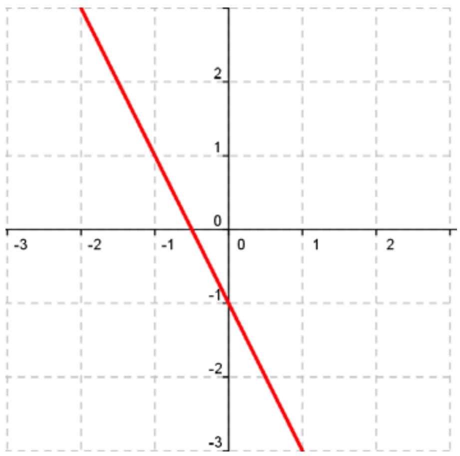
Su representación gráfica es siempre una **recta**, su **pendiente** es el coeficiente líder ($m$) e indica la inclinación de la misma (si es positivo la recta será **creciente** y si es negativo **decreciente**) y su **ordenada en el origen** ($n$) es el término independiente, que nos proporciona el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

***Ejemplo:***

- $y = \mathbf{-3}x \mathbf{- 1}$ (polinomio de primer grado)

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-1/2$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 1 | 0 | **−1** | **−3** |
| | (−2, 3) | (−1, 1) | (−1/2, 0) | (0, −1) | (1, −3) |

GRÁFICA



*Pendiente:* **−3** $\Rightarrow$ recta decreciente
*Ordenada en el origen:* **−1** $\Rightarrow$ **(0, −1)** punto de corte de la recta con el eje de ordenadas

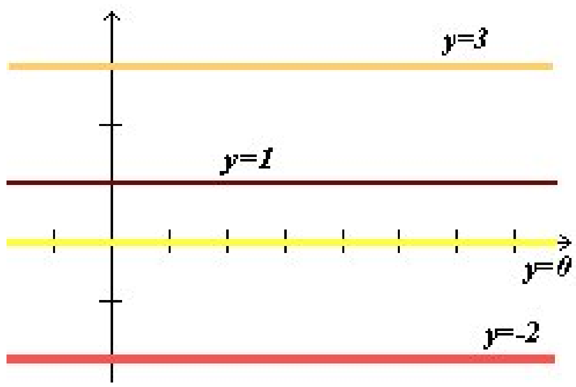
Como casos particulares de funciones afines tenemos:

**Función constante** (recta horizontal): es aquella que siempre toma el mismo valor para todos los valores de la variable independiente (la pendiente es nula):

$$y = n$$

***Ejemplo:***

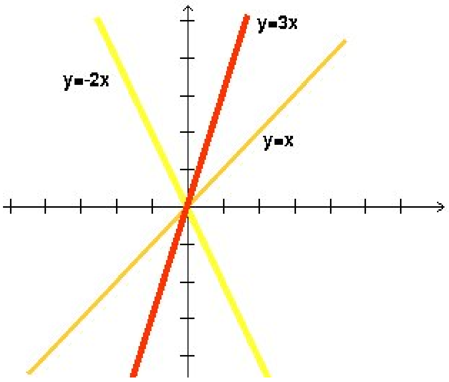
- Gráficas de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.




Por tanto, la recta no tiene inclinación, es decir, es paralela al eje de abscisas.

***Observa que***

La ecuación del eje de abscisas es $y = 0$.




**Función lineal** o **de proporcionalidad directa**: es aquella que tiene ordenada en el origen igual a **0** (pasa por el origen de coordenadas): $\boxed{y = mx}$

Cada valor de "***y***" conserva una misma proporción respecto al de "***x***":

$y = \mathbf{3}x$ (*y* es el triple de *x*)

$y = -\mathbf{2}x$ (*y* es el opuesto del doble de *x*)

$y = x$ (**función identidad**: *y* es igual a *x*)

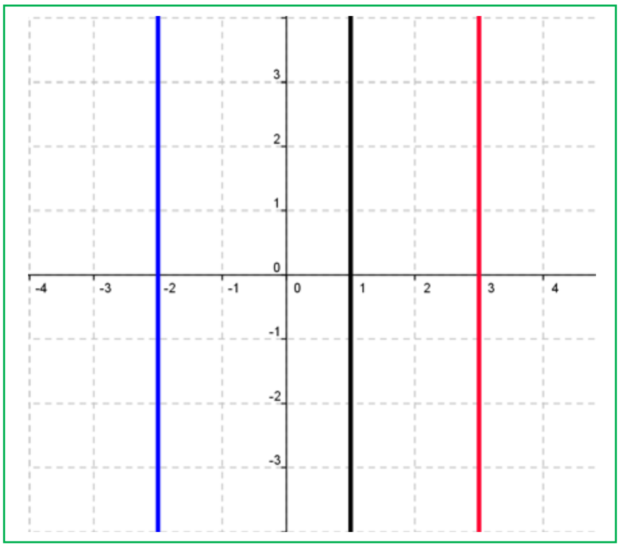
***Observa que:***

La gráfica de *x* = *a* es una recta vertical, pero no es una función porque para el valor de la variable independiente "*a*", la ordenada toma infinitos valores.

***Ejemplo:***

- Dibuja la gráfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.

La ecuación del eje de ordenadas es *x* = 0.




**Ecuación lineal con 2 incógnitas. José Luis Lorente**

https://youtu.be/1Vcvol_gLyo

## Actividades propuestas

**13.** Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas de que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 3, –2, y 1/2 respectivamente.

**14.** ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = *x*? ¿Y la recta *y* = –x?

**15.** Un metro de cierta tela cuesta 1.35 €, ¿cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 m? ¿Y 12.5 m? ¿Cuánto cuestan "*x*" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

**16.** Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es 3.

b) Pasa por los puntos *A*(1, 3) y *B*(0, 4).

c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

d) Pasa por los puntos *C*(–1, 3) y *D*(–2, 5).

e) Pasa por el punto (*a*, *b*) y tiene de pendiente *m*.

**17.** ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

**18.** Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

a) De pendiente 3 y ordenada en el origen 0.

b) Pasa por los puntos *A*(2, 3) y *B*(4, 1).

c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Una **función cuadrática** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado dos:

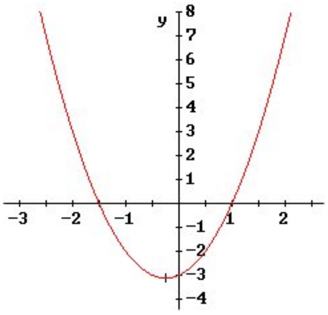
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La gráfica de este tipo de funciones se llama **parábola**

Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo (***a* > 0**), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo (**convexa**).

$\boldsymbol{y = 2x^2 + x - 3}$

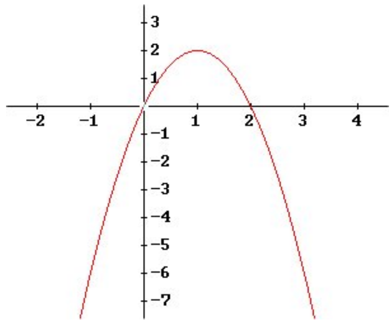
**2 > 0**




Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo (***a* < 0**), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo (**cóncava**).

$\boldsymbol{y = -2x^2 + 4x}$

**−2 < 0**




Los otros coeficientes del polinomio afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

No podemos decir que una función cuadrática es creciente o decreciente, ya que hay un trozo (**rama**) que crece y otro que decrece. El punto donde se produce ese cambio se llama **vértice** y es el mayor (*máximo*) o menor (*mínimo*) valor que toma la función. Podemos decir que este punto es el más significativo en una parábola, y por eso es importante saber calcularlo. Para ello, le damos a la variable independiente el valor $x = \frac{-b}{2a}$, y lo sustituimos en la función para calcular "***y***". Dicho valor es fácil de recordar puesto que es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2º grado quitándole la raíz cuadrada, y se obtiene precisamente por el carácter de máximo o mínimo que tiene el vértice.

***Ejemplo:***

$$y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grado}}$$

| *x* | 3 | 1 | 5 | 0 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | –4 | 0 | 0 | 5 | 5 |
| | **(3, –4)** | (1, 0) | (5, 0) | (0, 5) | (6, 5) |

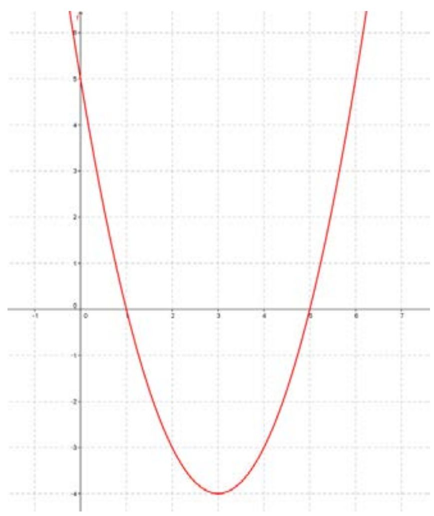
Coeficiente líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ parábola convexa

*Vértice:* $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3,–4)**

Ordenada en el origen: **5** $\Rightarrow$ **(0, 5)** *punto de corte con el eje de ordenadas.*

*Puntos de intersección con el eje de abscisas*: **(1, 0)** y **(5, 0)**

GRÁFICA




Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**Identificar la expresión de las funciones cuadráticas a partir de la gráfica (Parábolas). José Luis Lorente.**

video

https://youtu.be/27fN0qo__cI

## Actividades propuestas

**19.** Copia en tu cuaderno y completa:

$\boxed{y = 3x + 3}$ → *Función* ____________________ porque ____________________________________________

| X | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

*Solución*

→

→

→

→

→

*Gráfica*

→ *Operaciones:*

**20.** Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = \dfrac{-x}{2}$

$\boxed{y = \dfrac{-x}{2}}$ → *Función* ____________________ porque ____________________________________________

| X | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

*Solución*

→

→

→

→

→

*Gráfica*

→ *Operaciones:*



Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**21.** Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = -3x^2 + 6x - 4$

$\boxed{y = -3x^2 + 6x - 4}$ $\rightarrow$ *Función* ____________________ porque ____________________________________________

| x | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$

*Solución*

*Gráfica*

*Operaciones:*

**22.** Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $y = 2x^2 - 8$

$\boxed{y = 2x^2 - 8}$ $\rightarrow$ *Función* ____________________ porque ____________________________________________

| x | y |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$
$\rightarrow$

*Solución*

*Gráfica*

*Operaciones:*

**23.** Dibuja la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "$x$"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

**24.** Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos $q$ unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

**25.** Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 3)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 2)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos $p$ unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - p)^2$.

**26.** Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal a la derecha y 3 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

**27.** Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas:

$y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que ahora ya no te sirve la plantilla empleada. Ahora las parábolas se estrechan o se ensanchan.

**28.** Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

**29.** Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (4, 2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.
b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–3, –1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

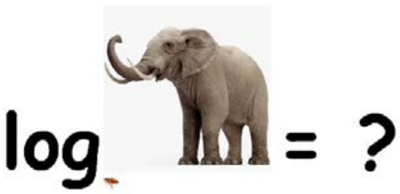
## 2.4. Logaritmos

### Definición

La palabra **logaritmo** viene del griego, une los sustantivos logos (relación) y aritmos (número), refiriendo la relación entre dos números que se comparan. Uno de ellos hace de base o referencia, y el otro es el número que se somete a comparación.

¿Cuántas veces es más grande un elefante que una pulga?

Si fuéramos pulgas y avistáramos un elefante, ¿cuántas veces mayor que nosotros pensaríamos que es? ¿De qué magnitud es su masa respecto de una base numérica fijada? ¿Es del orden del picogramo (un picógramo es $10^{-12}$ gramos), del orden del nanogramo (son $10^{-9}$ gramos), del orden del kilogramo, del orden del miriagramo?




Puedes entrar en la página The Scale of the Universe 2 (htwins.net) y analizar diferentes órdenes de magnitud. ¿Cuánto mide una molécula de agua? ($2.8 \times 10^{-10}$ m) ¿Cuánto mide el diámetro de la Luna? ($3.5 \times 10^{6}$ m) ¿Y un cromosoma? ($4 \times 10^{-6}$m)

El **logaritmo** de un número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva y distinta de uno, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

***Ejemplo:***

- Así, teniendo en cuenta que nosotros pensamos en base 10 y que el peso de una elefanta asiática hembra adulta es de 2 700 kilogramos, podríamos afirmar que el orden de su peso es aproximadamente 3.43, es decir que, $\log_{10} 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700$. Como quiera que, normalmente, trabajamos en base 10, por comodidad, nos permitimos el lujo de omitir este dato y escribimos:

$$\log 2\,700 = 3.43 \Leftrightarrow 10^{3.43} = 2\,700.$$

***Ejemplo:***

- Mientras que si trabajamos en cualquier otra base numérica lo especificamos. Siguiendo con el mismo ejemplo, ahora en base 2, el orden de la misma elefanta es

$$\log_2 2\,700 = 11.3 \Leftrightarrow 2^{11.3} = 2\,700.$$

Si estamos preparando una base de datos para grabar las masas de una manada de elefantes en estudio, en el lugar del peso, habremos de guardar 11.3 dígitos, redondeando al alza para no perder información, habremos de reservar 12 posiciones de memoria.

Los logaritmos más utilizados son los **logaritmos decimales** o logaritmos de base 10 y los **logaritmos neperianos** (llamados así en honor a **Neper**) o logaritmos en base *e* (*e* es un número irracional cuyas primeras cifras son: *e* = 2.71828182…). Ambos tienen una notación especial:


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

$\log_{10} m = \log m$ $\log_e m = \ln m$

Pasemos a calcular algunos logaritmos:

***Ejemplos:***

- Si queremos conocer el logaritmo en base dos de dieciséis, $log_2$ 16, tendremos que pensar en qué exponente convierte un dos en dieciséis. Dado que $2^4 = 16$, tenemos que $log_2 16 = log_2 2^4 = 4$. Formulado de otra forma, pensaremos en a qué número tengo que elevar la base, 2 en este caso, para obtener el valor en estudio, 16.
- ¿A qué número tengo que elevar tres, para obtener veintisiete?

$$log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27.$$

## Actividades resueltas

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16= 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1000} = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** de la definición se deduce que:

✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

***Demostración:***

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a 1 = 0$

***Ejemplos:***

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
El logaritmo de la base es 1.
Solo tienen logaritmos los números positivos.

✓ El logaritmo de la base es 1.

***Demostración:***

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a a = 1$

***Ejemplos:***

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $log_3 3^5 = 5$

✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un número irracional

Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un número negativo ni cero.

- *log*$_2$ (–4) No existe
- *log*$_2$ 0  No existe.
- *log* 100 = 2 $\Leftrightarrow$ 100 = $10^2$.
- *log* 0.1 = –1 $\Leftrightarrow$ 0.1 = $10^{-1}$.
- *log* $\sqrt{10}$ = 1/2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{10}$ = $10^{1/2}$.
- *log* 2 = 0.301030…

## Actividades resueltas

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

## Actividades propuestas

**30.** Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2^5 = 32$ | $\log_5 1 = 0$ | $2^0 = 1$ | $5^2 = 25$ |
| $5^1 = 5$ | $\log_2 2 = 1$ | $5^0 = 1$ | $\log_2 32 = 5$ |
| $2^1 = 2$ | $\log_2 1 = 0$ | $\log_5 5 = 1$ | $\log_5 25 = 2$ |
| $2^4 = 16$ | $\log_3 81 = 4$ | $\log_2 16 = 4$ | $3^4 = 81$ |

**31.** Calcula utilizando la definición de logaritmo:
a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

**32.** Calcula utilizando la definición de logaritmo:
a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

**33.** Calcula *x* utilizando la definición de logaritmo:
a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

**34.** Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

**35.** Utiliza la calculadora para obtener a) *log* 0.000142; b) *log* 142; c) *log* 9 + *log* 64.

## Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

***Demostración:***

***Llamamos A = $\log_a x$ y B = $\log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:***

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

***Multiplicamos:*** $x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow log_a x \cdot y = A + B = log_a x + log_a y$.

***Ejemplo:***

- $log_a(2 \cdot 7) = log_a 2 + log_a 7$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\boxed{log_a (x/y) = log_a x - log_a y}$$

***Demostración:***

***Llamamos*** $A = log_a x$ ***y*** $B = log_a y$***. Por definición de logaritmos sabemos que:***

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

***Dividimos:*** $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow log_a(x / y) = A - B = log_a x - log_a y$.

***Ejemplo:***

- $log_a (75/25) = log_a 75 - log_a 25$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\boxed{log_a x^y = y.log_a x}$$

***Demostración:***

***Por definición de logaritmos sabemos que:***

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = log_a x^y = y\ log_a x$$

***Ejemplo:***

- $log_a 2^5 = 5 \cdot log_a 2$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\boxed{log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

***Demostración:***

***Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.***

***Ejemplo:***

- $log_a \sqrt[3]{27} = \left( \frac{\log_a 27}{3} \right)$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base *a* de un número *x* es igual al cociente de dividir el logaritmo en base *b* de *x* por el logaritmo en base *b* de *a*:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$



Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Esta expresión se conoce con el nombre de ***"fórmula del cambio de base"***. Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

***Ejemplo:***

- $log_2 11 = \frac{log\ 11}{log\ 2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162$

## Actividades resueltas

- Desarrollar las expresiones que se indican:

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- Escribe con un único logaritmo:

$3log_2a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} .2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$$

- Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log2 = 0.301030:

a) 4 $\Rightarrow$ log4 = log $2^2$ = 2·log2 = 2·0.301030 = 0.602060

b) 1 024 $\Rightarrow$ log1024 = log $2^{10}$ = 10·log2 = 10 · 0.301030 = 3.01030

## Actividades propuestas

**36.** Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

**37.** Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

**38.** Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$$


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## Funciones logarítmicas

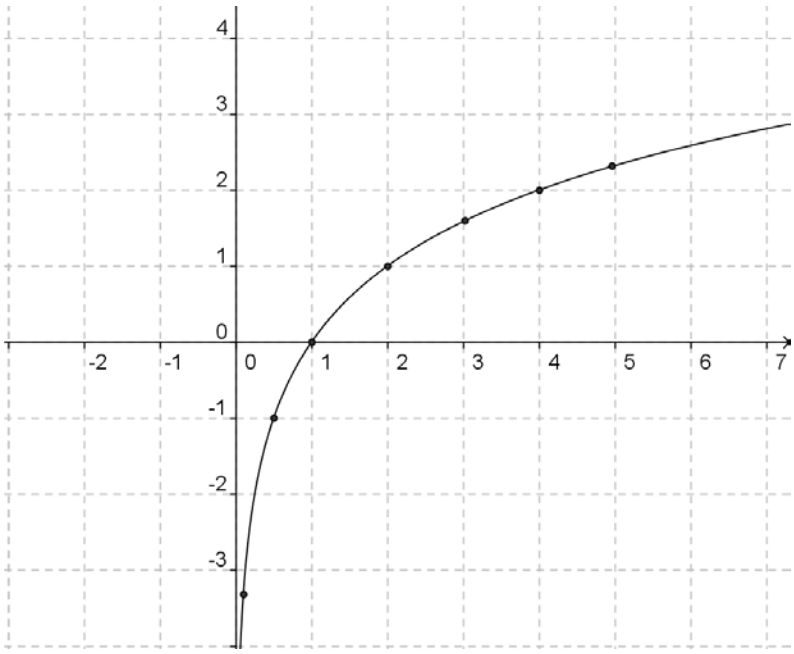
Las funciones logarítmicas son las del tipo $y = \log_b x$.

Hay una función distinta para cada valor de la base $b$.

***Ejemplos:***

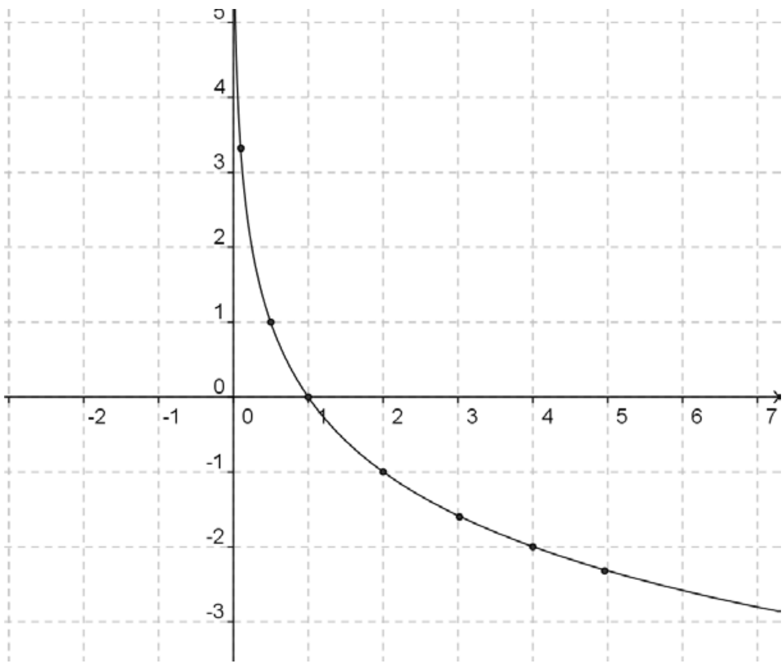
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

| $x$ | $\log_2 x$ |
|---|---|
| 0.1 | -3.3 |
| 0.5 | -1.0 |
| 0.7 | -0.5 |
| 1 | 0.0 |
| 2 | 1.0 |
| 3 | 1.6 |
| 4 | 2.0 |
| 5 | 2.3 |
| … | … |



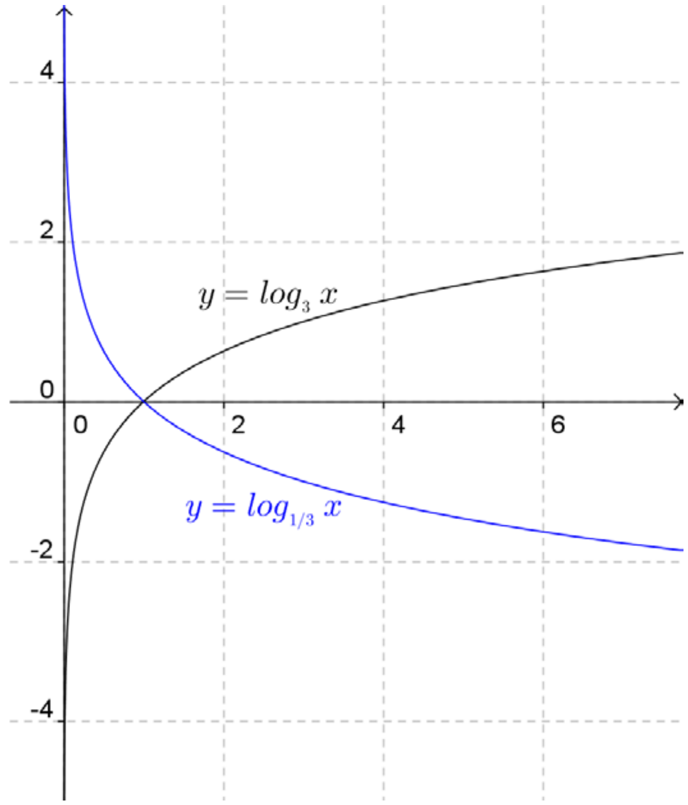
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

| $x$ | $\log_{1/2} x$ |
|---|---|
| 0.1 | 3.3 |
| 0.5 | 1.0 |
| 0.7 | 0.5 |
| 1 | 0.0 |
| 2 | -1.0 |
| 3 | -1.6 |
| 4 | -2.0 |
| 5 | -2.3… |
| … | |



Las características de estas gráficas nos permiten deducir las de las funciones logarítmicas en general, que son las siguientes:

- Su **dominio** es $(0, +\infty)$. Es decir, solo están definidas para "$x$" positivo.
- Son continuas.
- Su **recorrido** es toda la recta real.
- Pasan por los puntos (1, 0), ($b$, 1) y ($1/b$, –1).
- La gráfica de $y = \log_b x$ y la de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto del eje $OX$.




Por otra parte observamos unas características propias en las funciones en ambas ilustraciones, según sea la base del logaritmo mayor o menor que la unidad.

**Cuando la base es $b$ > 1:**

- Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $-\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte negativa del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "$y$" puede llegar a cualquier valor.

**Cuando la base es 0 < $b$ < 1:**

- Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $+\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte positiva del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "$y$" puede llegar a cualquier valor.

## Escala sismológica de Richter

La escala sismológica de Richter es una escala logarítmica que asigna un número para cuantificar la energía que libera un terremoto. Debe su nombre a Charles Francis Richter.

La escala de magnitudes Richter está basada en una escala logarítmica decimal (de base 10). Por cada incremento de una unidad en la escala Richter la amplitud de la onda del terremoto se incrementa 10 veces (se multiplica por 10). La magnitud aparente de las estrellas se mide con un bolómetro.

Los valores asignados aumentan de forma logarítmica, no de forma lineal. Por lo que un terremoto de intensidad 4 no libera el doble de energía que uno de intensidad 2, sino 100 veces más. Llega hasta los 12.

Los terremotos de menos de 4 apenas se perciben. Los de magnitud entre 4 y 5 se perciben pero en general no producen daños. Los de entre 5 y 6 causan daños menores, en, por ejemplo, los edificios antiguos. Los de entre 6 y 7 si causan daños a varios kilómetros alrededor. Los de entre 7 y 8 es un terremoto mayor y sí causa daños. Suele haber 18 al año. Los de entre 8 y 9 causa graves daños. Puede haber de 1 a 3 por año. Los de entre 9 y 10 son devastadores y puede haber 1 o 2 cada 20 años. De más de 10 aún no se ha registrado ninguno.

Utiliza una fórmula para calcular la magnitud, que utiliza logaritmos decimales, la amplitud de las ondas medida en milímetros, tomada del sismograma, y el tiempo en segundos desde las ondas primarias hasta las secundarias. Hay un desplazamiento para que las medidas no salgan negativas.

Llamamos E a la energía liberada y M a la magnitud del terremoto, entonces: $\log E = 11.8 + 1.5 \cdot M$, por lo que:

$$E = 10^{11.8 + 1.5 M}$$

La energía crece de forma exponencial.

## Escala de pH

El pH mide la acidez o alcalinidad de una solución.

Es el logaritmo negativo en base 10 de la concentración de iones hidrógeno: $pH = -\log_{10}[H^+]$

Sorensen diseñó la **escala** para medir la acidez o alcalinidad de una substancia: las soluciones que recibían valores de **pH** de **0** eran las más ácidas, las de **14** las más alcalinas

Un pH 7 es neutro. Las disoluciones ácidas tienen una alta cantidad de iones hidrógeno, por lo que su pH es menor que 7. Las disoluciones alcalinas tienen un ph mayor que 7. El agua tiene un pH neutro (7). Por debajo de 7 tenemos los ácidos: la naranja, el café, el tomate, el vinagre y el limón. Por encima de 7, las bases: la sangre, el bicarbonato, el amoníaco, el jabón y la lejía.

## 3.5. Funciones trigonométricas

### Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega $\alpha$ (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que $\alpha$ sea uno de sus ángulos. Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice *B*, el ángulo $\alpha$.

Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo $\alpha$: seno, coseno y tangente como:

$$seno\ de\ \alpha = sen\,\alpha = sen\,\hat{B} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$coseno\ de\ \alpha = cos\,\alpha = cos\,\hat{B} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tangente\ de\ \alpha = tan\,\alpha = tan\,\hat{B} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{c}$$

También se utilizan las expresiones tg $\alpha$ y tag $\alpha$ como símbolos de la tangente de $\alpha$.

Se definen las razones para ángulos entre 0 y 360º.

**Recuerda que:**

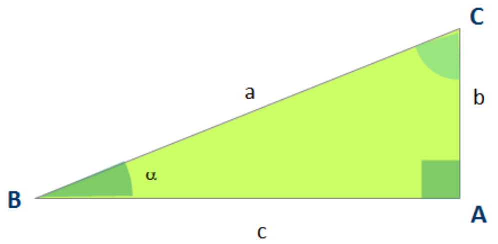
Un **radian** se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:

360° equivalen a 2π radianes

De donde se deduce que:

180° equivalen a π radianes

90° equivalen a π/2 radianes …




Se llama **circunferencia trigonométrica** o **goniométrica** a una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Es posible representar cualquier ángulo en la circunferencia trigonométrica.

La semirrecta variable que define un ángulo $\alpha$ en la circunferencia trigonométrica es clave para la definición de un ángulo cualquiera. Dicha semirrecta corta a la circunferencia en un punto $P_\alpha$ $(x_\alpha, y_\alpha)$ a partir del que se define:

$$sen\,\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha;\ cos\,\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha;\ tag\,\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$

Posteriormente se amplía el dominio a toda la recta real.

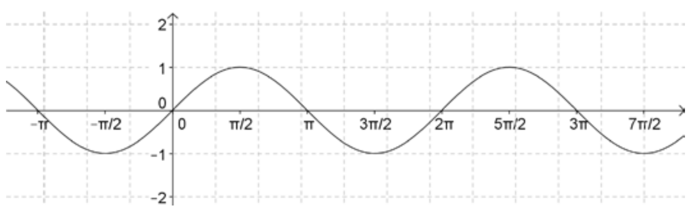
### Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

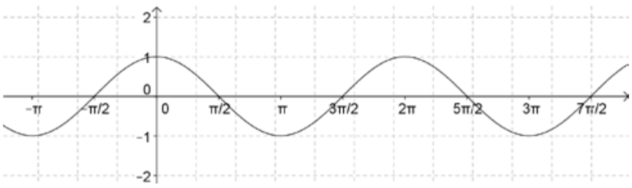
**Gráfica de la función *f(x)* = sen *x***





Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**Gráfica de la función *f(x)* = cos *x***




Ya sabes cuánto vale π, π = 3.14…. Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

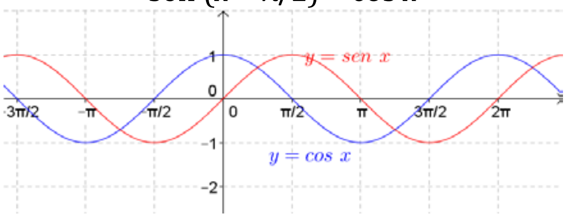
**Propiedades de estas funciones:**

- Ambas son periódicas y el valor de su período es 2π.

  *sen* ($x$ + 2π) = *sen x* *cos* ($x$ + 2π) = *cos x*
- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Su dominio son todos los números reales.
- Su recorrido es el intervalo [–1 , 1].
- La función seno tiene simetría impar (simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, *sen x* = – *sen* (–*x*)). La función coseno tiene simetría par (simétrica respecto del eje OY, es decir, *cos x* = *cos* (–*x*)).
- Ambas funciones tienen la misma gráfica, pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal.

  Es decir:

sen ($x$ + π/2) = cos $x$

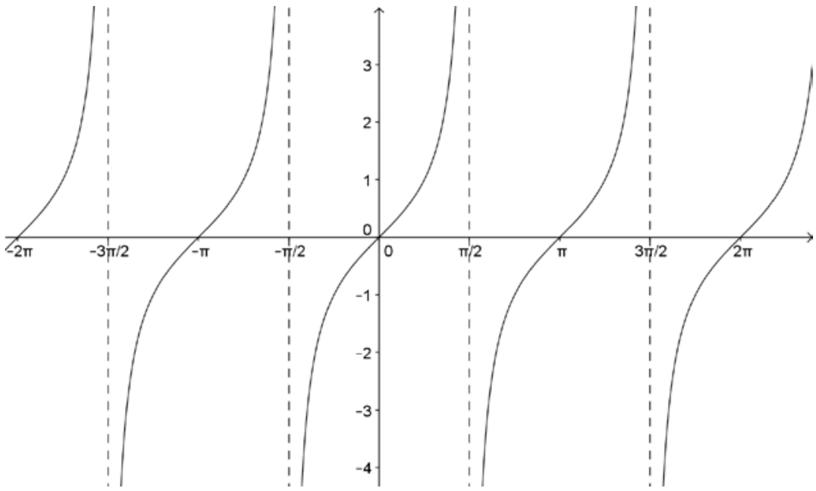



## La función tangente

Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.

Ya sabes que como razones trigonométricas: *tg x* = *sen x* / *cos x*.

La gráfica de la función *f(x)* = *tg x* es la siguiente:





Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

Recordamos en primer lugar que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Las propiedades de esta función son las siguientes:

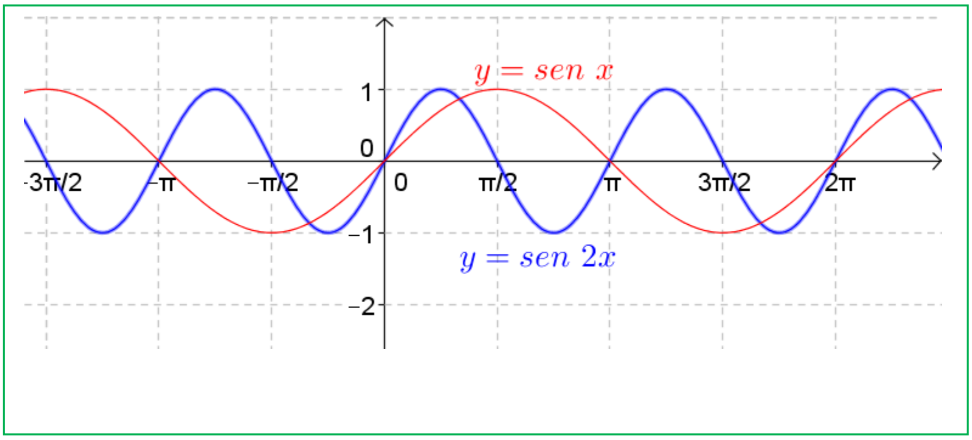
- Es una función periódica y el valor de su período es ahora menor, es π: tg $(x+\pi)$ = tg $x$.
- Su dominio son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), donde no existe. En esos valores presenta discontinuidades llamadas discontinuidades *inevitables*, porque no se podrían "taponar" mediante un punto.
- Tiene asíntotas verticales en esos mismos valores de la $x$. Las hemos representado en el gráfico mediante líneas discontinuas.
- Tiene simetría impar: es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg ($x$) = – tg (–$x$)

## Actividades resueltas

- Representa las gráficas de las funciones $y$ = sen$(2x)$ e $y$ = 2sen $x$ comparándolas después con la gráfica de $y$ = sen $x$.

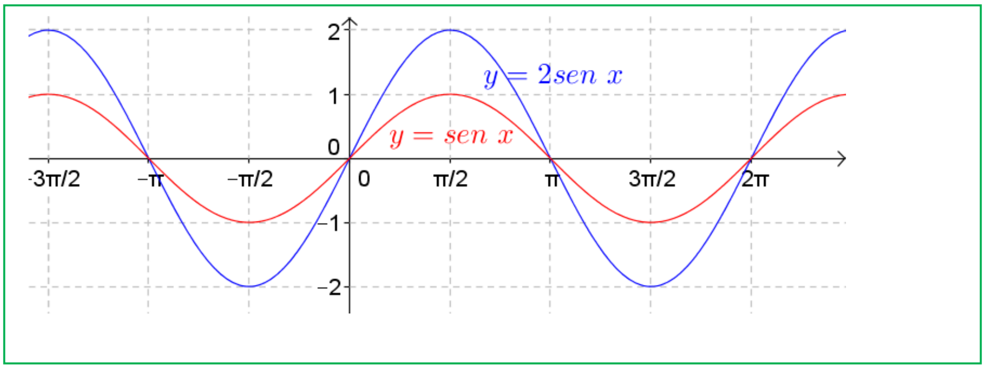
***Solución:***

Dando valores con la calculadora obtenemos las siguientes gráficas, representadas en azul junto a la de la función sen $x$, representada en rojo:




La gráfica de $y$ = sen$(2x)$ es igual a la de $y$ = sen $x$ contrayéndola horizontalmente. Cambia el periodo, que ahora es de π.

La gráfica de $y$ = 2sen $x$ es igual a la de $y$ = sen $x$ expandiéndola verticalmente. Tienen el mismo periodo, pero cambia la amplitud. Cuando $y$ = sen $x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 1, $y$ = 2sen $x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 2. Decimos que su amplitud vale 2.





Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

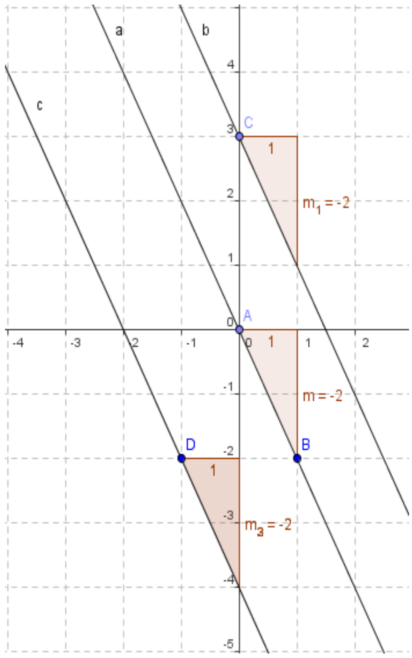
## 2.6. Gráficas de funciones con Geogebra.

En esta actividad se va a utilizar el programa ***Geogebra*** para representar funciones lineales y afines, las gráficas de estas funciones son rectas. Primero se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza. También se representan rectas que tienen misma ordenada en el origen para observar la relación que existe entre ellas y determinar una característica común.

También puedes utilizar GeoGebra para representar parábolas, funciones logaritmo, funciones trigonométricas…

## Actividades resueltas

*Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual pendiente.*




- Abre el programa Geogebra y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil definir puntos.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto en el origen de coordenadas. Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina *A*, como objeto libre y coordenadas (0, 0).
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (1, –2), el programa lo llama *B* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: B = (1, –2).
- Utiliza la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** para dibujar la recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Observa que el programa la denomina *a* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 0$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (0, 3), el programa lo llama *C* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: *C* = (0, 3).
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por *C*. Observa que el programa la denomina *b* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 3$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–1, –2), el programa lo llama *D* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: *D* = (–1, –2).
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por *D*. Observa que el programa la denomina *c* y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = –4$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x – 4$.
- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las rectas *a*, *b* y *c*. Observa que al calcular la pendiente de la recta *a* aparece en la gráfica y en la **Ventana Algebraica** como objeto


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

dependiente $m = –2$. Análogamente al calcular la pendiente de la recta *b*, se obtiene $m_1 = –2$ y al calcular la pendiente de la recta *c*, se tiene $m_2 = –2$.

**39.** ¿Cómo son las pendientes de las rectas paralelas? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y dibuja otras rectas paralelas a la recta *a* para comprobarla.

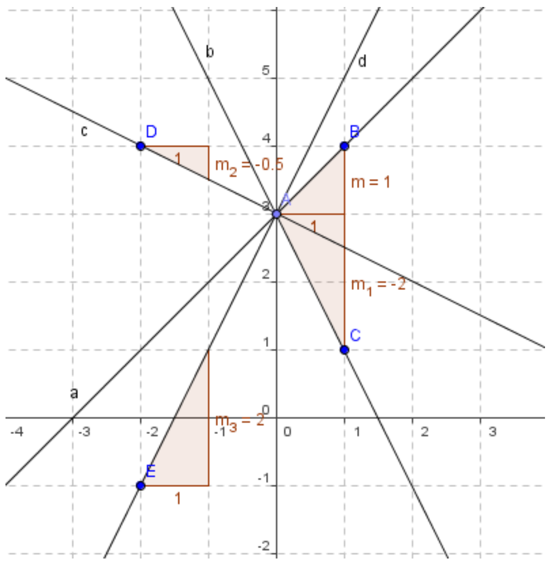
Observa que la ecuación de todas las rectas paralelas a la recta *a* son de la forma:

$y = –2x + n$, con *n* variable.

¿Alguna de las rectas que has dibujado es la gráfica de una función lineal?

## Rectas con la misma ordenada en el origen

*Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual ordenada en el origen.*




- Abre una **Nueva Ventana** que es una opción del menú **Archivo**.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto de coordenadas (0, 3). Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina *A*, como objeto libre y aparecen sus coordenadas *A* = (0, 3).
- Define un **Nuevo Punto** *B* de coordenadas (1, 4) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *B*, el programa la denomina *a* y en la **Ventana Algebraica** aparece su ecuación, *a*: -x + y = 3 equivalente a $y = x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** *C* de coordenadas (1, 1) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *C*, el programa la denomina *b* y en la ventana algebraica aparece su ecuación, *b*: 2x + y = 3 equivalente a $y = –2x + 3$
- Con un proceso similar dibuja la recta *c* que pasa por *A* y *D*, con *D* = (–2, 4) que tiene por ecuación *c*: $x + 2y = 6$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Dibuja también la recta *d* que pasa por *A* y *E*, con *E* = (–2, –1), la ecuación de la recta *d* que aparece es:

  *d*: $–4x + 2y = 6$, equivalente a $y = 2x + 3$.
- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las cuatro rectas que has dibujado.
  - Observa que las cuatro rectas que has dibujado pasan por el punto *A* = (0, 3), sus ecuaciones con la variable *y* despejada son:

    *a*: $y = x + 3$ *b*: $y = –2x + 3$ *c*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *d*: $y = 2x + 3$.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**40.** ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto *A* (0, 3)? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y compruébala dibujando otras rectas que pasen por el punto *A*.

Observa que la ecuación de todas las rectas que pasan por el punto *A*(0, 3) son de la forma:

$y = mx + 3$, siendo *m* la pendiente de la recta.

En la ecuación de la recta $y = mx + n$, el parámetro *n* se denomina ordenada en el origen.

**41.** ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen de las cuatro rectas que has dibujado?

**42.** Observa las ecuaciones de las cuatro rectas que has dibujado, dos de ellas tienen pendiente positiva *a* y *d* y las otras dos, *b* y *c* tienen pendiente negativa. Relaciona el signo de la pendiente de la recta con el crecimiento o decrecimiento de la función que representan.

## Actividades propuestas

**43.** Calcula dos puntos de las rectas de ecuaciones: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para dibujarlas con Geogebra. Indica dos propiedades comunes de ambas gráficas.

**44.** Representa, también, las rectas de ecuaciones: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

**45.** ¿Qué condición deben verificar las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares?


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

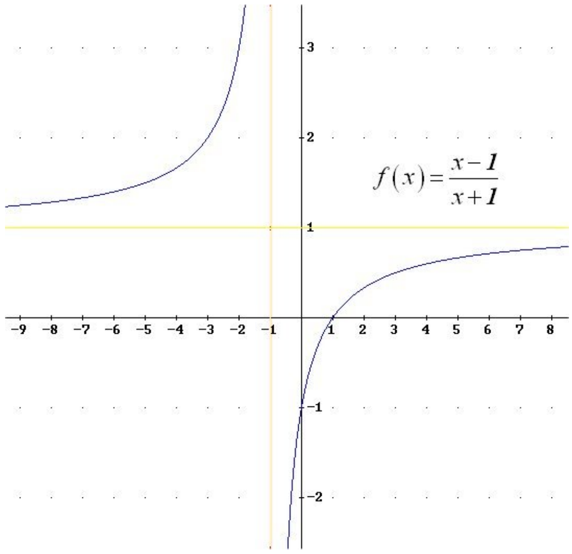
## 3. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

### 3.1. Continuidad

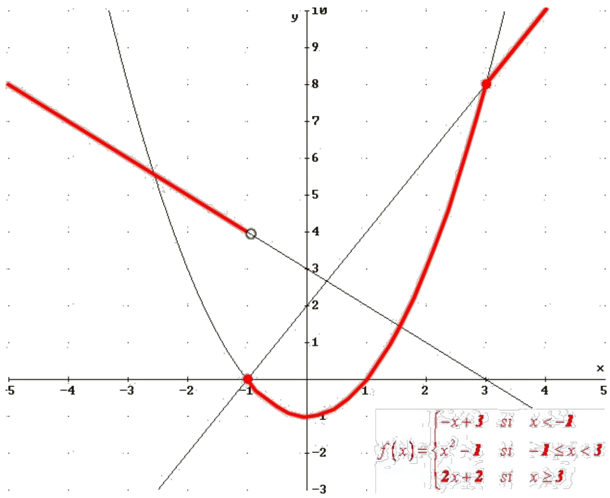
El concepto de continuidad de una función es muy intuitivo (en la mayoría de las funciones) ya que se corresponde con que la gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel. Cuando esto no ocurre, se producen "saltos" en determinados puntos que reciben el nombre de discontinuidades.

***Ejemplos:***

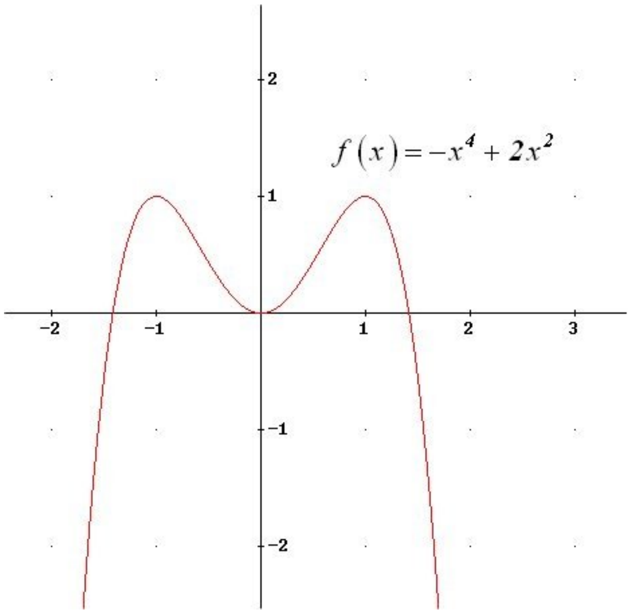
- *¿Qué funciones son continuas según su dibujo y cuáles no? Indica en estas últimas el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad:*



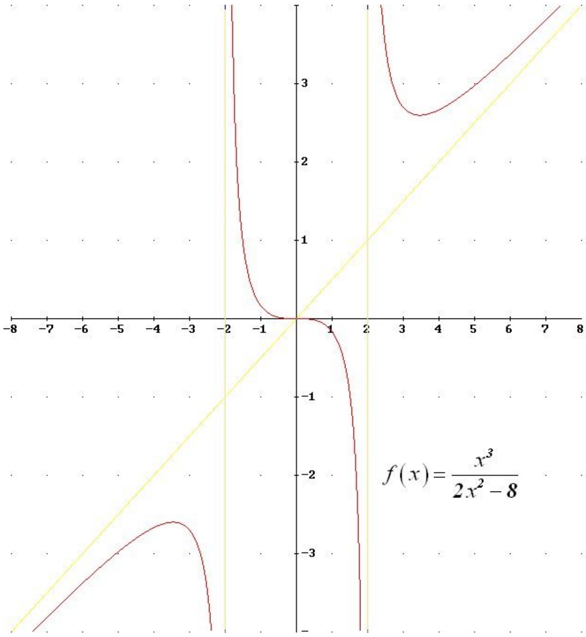

**NO (en *x* = –1 tiene un salto infinito)**




**NO (en *x* = –1 tiene un salto finito de 4 unidades)**




**SÍ (continua para cualquier valor de *x*)**




**NO (en *x* = –2 y *x* = 2 tiene saltos infinitos)**


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## 3.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente.

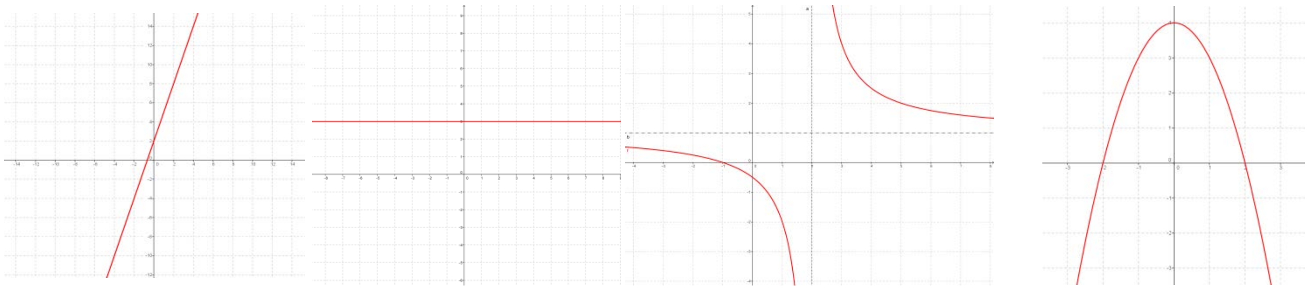
Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el de la dependiente.

Una función es **monótona** en un intervalo cuando es creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor.

Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

***Ejemplo:***



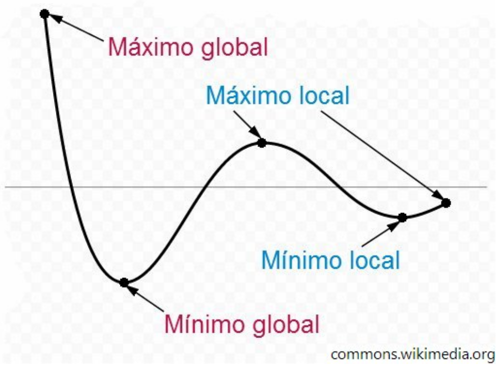
***CRECIENTE siempre*** ***CONSTANTE siempre*** ***DECRECIENTE hasta x* = 2** ***DECRECIENTE desde x* = 2** ***CRECIENTE hasta x* = 0** ***DECRECIENTE desde x* = 0**

## 3.3. Extremos: máximos y mínimos

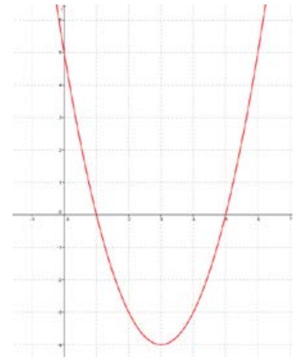
Una función presenta un **máximo relativo** (o máximo *local*) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, el valor es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** (o máximo *global*) en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** (o mínimo *local*) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, el valor es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** (o *global*) en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.



***Ejemplos***

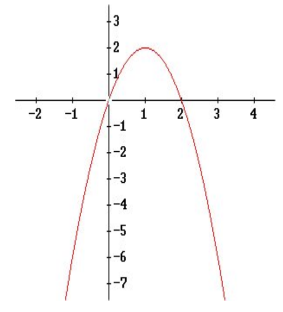


$y = x^2 - 6x + 5$

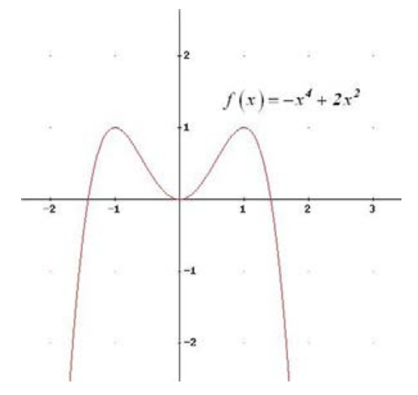
- La parábola $y = x^2 - 6x + 5$ tiene un mínimo absoluto en su vértice (3, –4). No tiene máximos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice es decreciente y después es creciente.

- La parábola $y = -2x^2 - 4x$ tiene un máximo absoluto en su vértice (1, 2). No tiene mínimos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice, para $x < 1$, la función es creciente, y después, para $x > 1$, la función es decreciente.

**Todas las parábolas tienen un máximo o un mínimo absoluto en su vértice**.



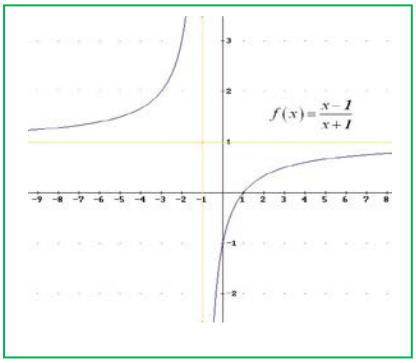
$y = -2x^2 - 4x$

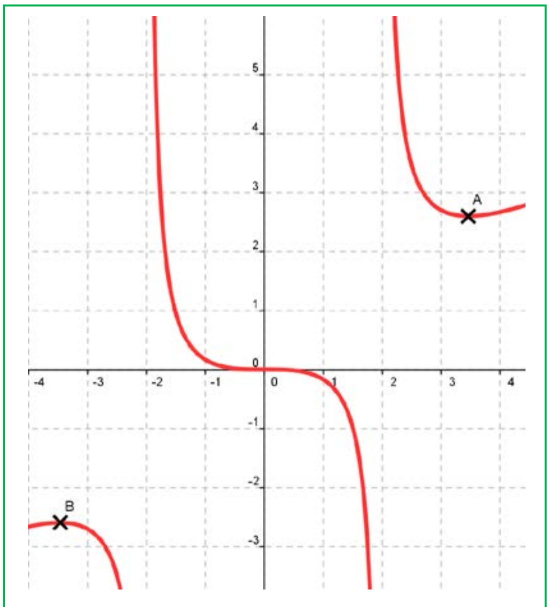



- La función $y = -x^4 + 2x^2$ tiene un mínimo absoluto en el origen (0, 0) y dos máximos en (1, 1) y en (–1, 1). Para $x < -1$ es una función creciente, para $-1 < x < 0$, es una función decreciente, para $0 < x < 1$ es creciente, y para $x > 1$ es decreciente.

Observa, en los **máximos** siempre la función pasa de ser **creciente** a ser **decreciente**, y en los **mínimos** de ser **decreciente** a ser **creciente**.

- La función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos). Es una función siempre creciente.




- La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - 8}$ no tiene máximo ni mínimo absoluto, pero tiene un mínimo relativo hacia $x = 3$, $A$(3.46, 2.6), y un máximo relativo hacia $x = -3$, $B$(–3.46, –2.6). Observa que el valor del mínimo relativo, 2.6, es mayor que la del máximo relativo, –2.6. Pero en valores próximos al mínimo si es el menor valor, por este motivo se denominan "*relativo*", "*local*". No son los valores mayores o menores que alcanza la función, pero si únicamente miramos en un entorno del punto si son valores máximos o mínimos.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## 3.4. Simetría

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

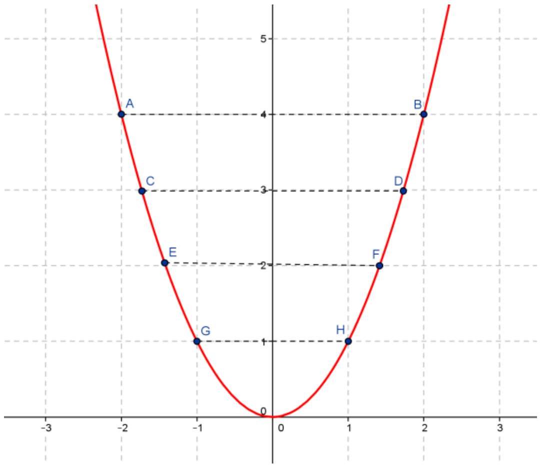
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

***Ejemplo:***

- La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

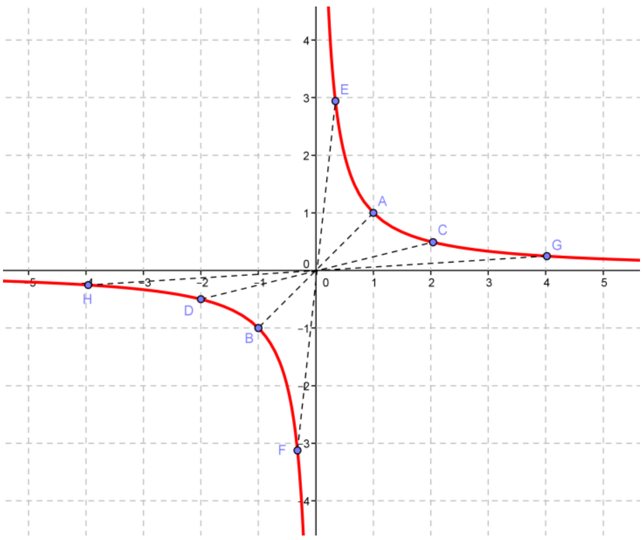



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

***Ejemplo:***




- La **función de proporcionalidad inversa** $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

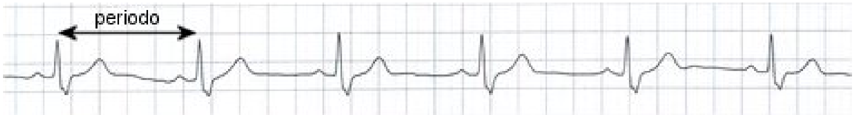

Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## 3.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

***Ejemplo:***

- Un ejemplo de función periódica es el siguiente, que corresponde a un electrocardiograma:




Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

## Actividades resueltas

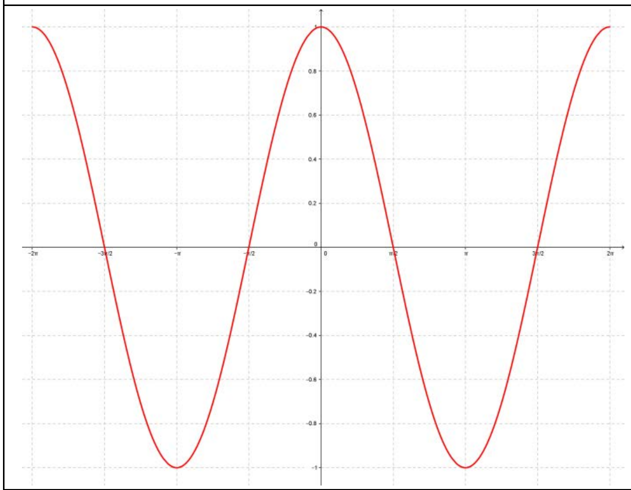
- *¿Qué significaría, en la gráfica anterior, que los intervalos de repetición no fueran iguales?*
  Si no tenemos un periodo fijo, querría decir que el corazón no está funcionando de forma rítmica y, por tanto, diríamos que se ha producido una "arritmia".

- *¿Cómo influiría en la gráfica anterior el que el periodo sea más o menos grande? ¿Qué significado tendría?*
  Si el periodo es más grande, es decir, los intervalos de repetición se encuentran más distanciados, tendríamos un ritmo de latido más lento (menos pulsaciones por minuto), lo que se conoce como "bradicardia".

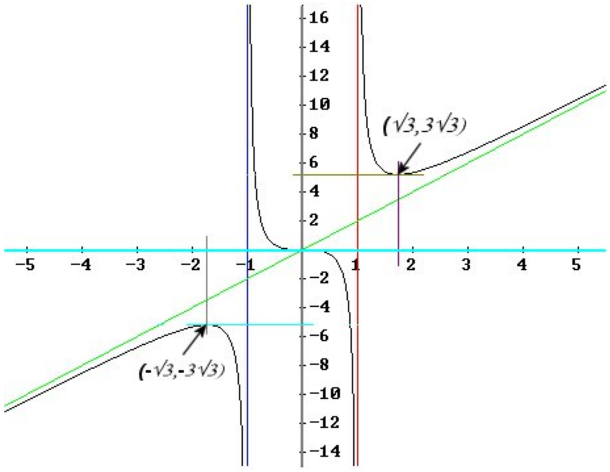
  Si el periodo es menor, pasaría justo todo lo contrario, esto es, el corazón estaría latiendo más rápido de lo normal (más pulsaciones por minuto) y tendríamos una "taquicardia".

## Actividades propuestas

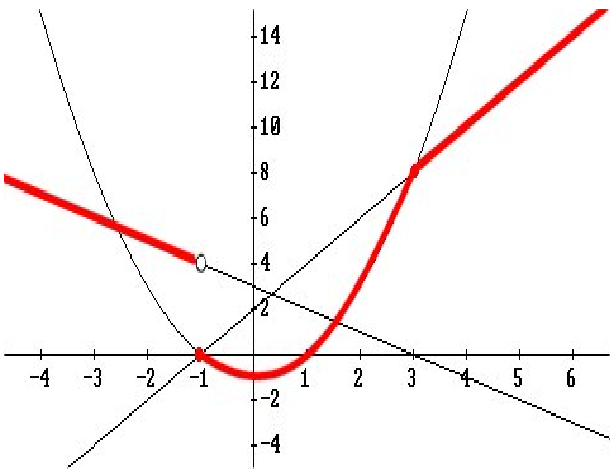
**46.** Copia las siguientes tablas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas mediante sus gráficas:

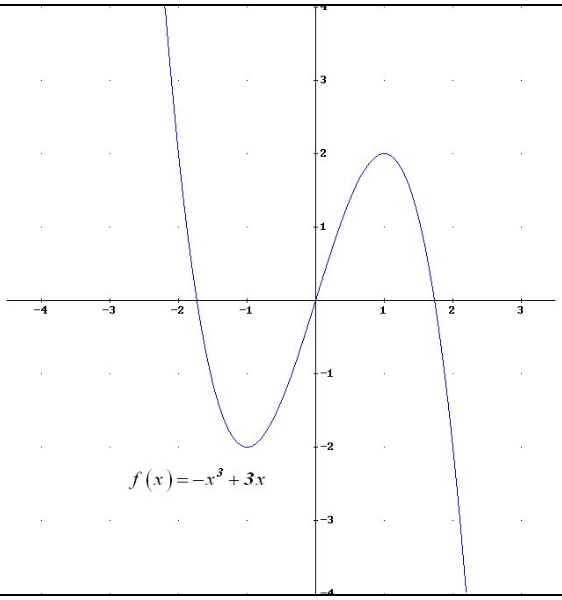
<table>
<tr><th>GRÁFICA 1</th><th colspan="2">CARACTERÍSTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="12"></td><td colspan="2">Valores variable independiente:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores variable dependiente:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simetría</td><td>Par:</td></tr>
<tr><td>Impar:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punto corte eje ordenadas:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Punto/s corte eje abscisas:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuidad:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Monotonía</td><td>Creciente:</td></tr>
<tr><td>Decreciente:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Extremos</td><td>Máximos:</td></tr>
<tr><td>Mínimos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periódica:</td></tr>
</table>


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

| GRÁFICA 2 | CARACTERÍSTICAS | |
|---|---|---|
|  | Valores variable independiente: | |
| | Valores variable dependiente: | |
| | Simetría | Par: |
| | | Impar: |
| | Punto corte eje ordenadas: | |
| | Punto/s corte eje abscisas: | |
| | Continuidad: | |
| | Monotonía | Creciente: |
| | | Decreciente: |
| | Extremos | Máximos: |
| | | Mínimos: |
| | Periódica: | |



| GRÁFICA 3 | CARACTERÍSTICAS | |
|---|---|---|
|  | Valores variable independiente: | |
| | Valores variable dependiente: | |
| | Simetría | Par: |
| | | Impar: |
| | Punto corte eje ordenadas: | |
| | Punto/s corte eje abscisas: | |
| | Continuidad: | |
| | Monotonía | Creciente: |
| | | Decreciente: |
| | Extremos | Máximos: |
| | | Mínimos: |
| | Periódica: | |

| GRÁFICA 4 | CARACTERÍSTICAS | |
|---|---|---|
|  | Valores variable independiente: | |
| | Valores variable dependiente: | |
| | Simetría | Par: |
| | | Impar: |
| | Punto corte eje ordenadas: | |
| | Punto/s corte eje abscisas: | |
| | Continuidad: | |
| | Monotonía | Creciente: |
| | | Decreciente: |
| | Extremos | Máximos: |
| | | Mínimos: |
| | Periódica: | |

## CURIOSIDADES. REVISTA

### Dirichlet


Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune *Dirichlet* (13/02/1805–5/5/1859) fue un matemático alemán al que se le atribuye la definición "formal" moderna de *función*.
*Dirichlet* nació en Düren, donde su padre era el jefe de la oficina de correos. Fue educado en Alemania y, después, en Francia, donde aprendió de algunos de los más renombrados matemáticos de su época, relacionándose con algunos como Fourier.
Fueron estudiantes suyos Leopold *Kronecker* y Rudolf *Lipschitz*. Tras su muerte, su amigo y colega matemático Richard Dedekind recopiló, editó y publicó sus lecciones y otros resultados en teoría de números.

Una versión simple de la ***función de Dirichlet*** se define como:

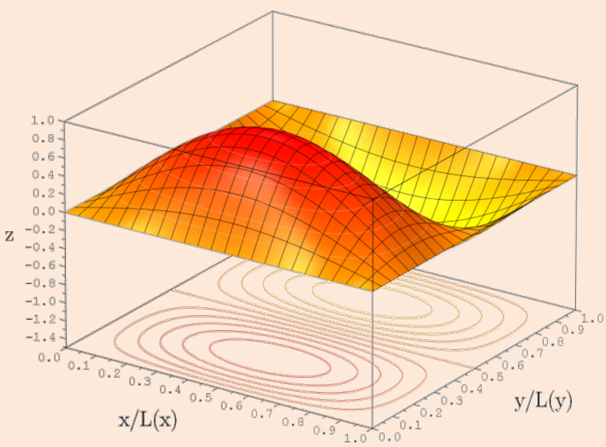
$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \quad (x \text{ es racional}) \\ 0 & \text{si } x \in I \quad (x \text{ es irracional}) \end{cases}$$

Esta función tiene la "curiosa" propiedad de que es discontinua para cualquier valor que le demos a la variable independiente.

### Nikki Grazziano: "Funciones y fotografía"

Nikki ha encontrado una forma de reunir sus dos intereses, matemáticas y fotografías de la naturaleza, en una serie de imágenes llamada **Found Functions** en las que superpone gráficas generadas mediante fórmulas matemáticas a fotografías tomadas por ella.
Pero lo original es que no busca imágenes que puedan adaptarse a ciertas fórmulas, sino que cuando tiene una fotografía que le gusta es cuando busca y ajusta la fórmula necesaria para generar que la representación gráfica se adapte.
Una curiosa forma de aprender matemáticas y ver que todo se puede representar con ellas.

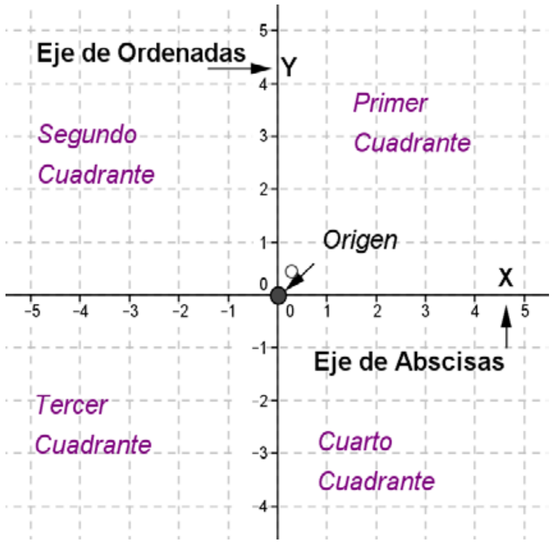
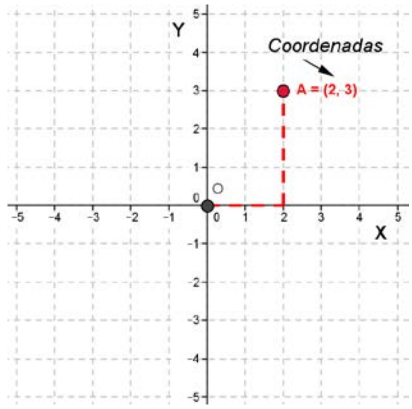
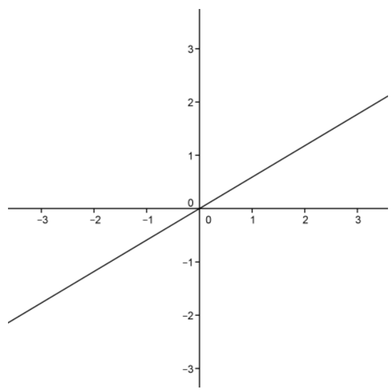
Si quieres consultar más y ver las fotografías (que tienen copyright), visita la página:
http://www.nikkigraziano.com/index.php/project/found-functions/



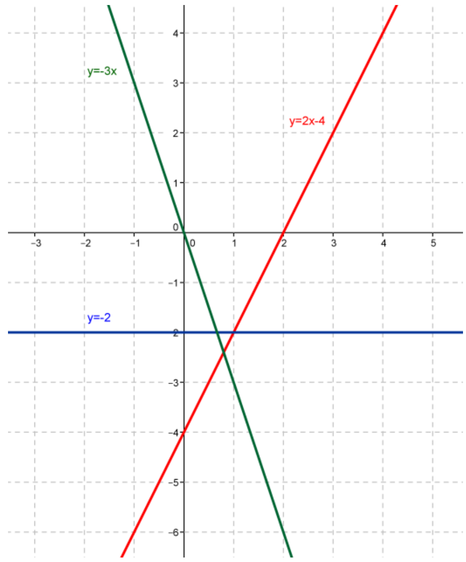
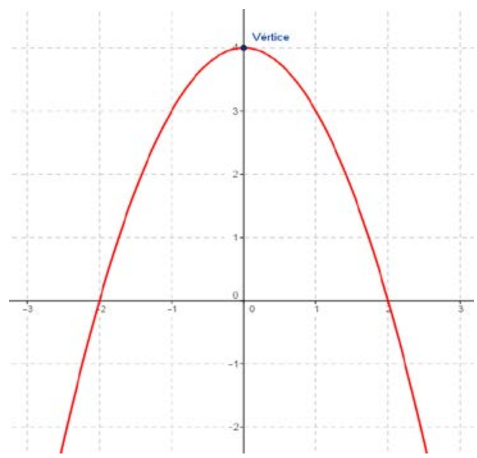
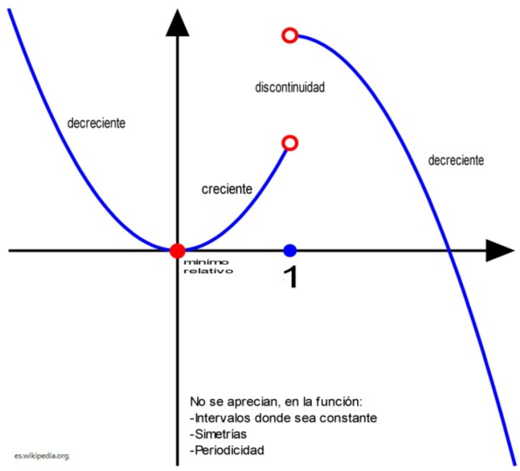

### FUNCIONES 3D

Cuando la relación funcional se establece entre tres variables, la gráfica se tiene que hacer en tres dimensiones, lo que la hace más compleja de representar pero más llamativa. Los ordenadores son de gran ayuda para hacerlas y verlas desde distintos puntos de vista. Sirven para realizar modelos muy reales de multitud de situaciones tridimensionales.

## RESUMEN

| | CONCEPTOS | *Ejemplos* |
|---|---|---|
| **Ejes cartesianos y coordenadas de un punto en el plano** |   |   |
| **Función** | Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**). | $y = f(x) = 0.59 \cdot x$<br>$f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$<br>$f(5) = 0.59 \cdot 5 = 2.95$ |
| **Gráfica de una función** | La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:<br>$\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$ | $y = f(x) = 0.59x$<br>$\{(2, 1.18), (5, 2.95) \ldots\}$<br><br>*Gráfica:* |


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

<table>
<tr><th colspan="2">CONCEPTOS</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr>
<td>Función afín, función lineal y función constante</td>
<td>Una función afín es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno: $y = f(x) = mx + n$.<br><br>La representación gráfica es una recta.<br>“$m$” recibe el nombre de pendiente y “$n$” ordenada en el origen.<br>Una función lineal o de proporcionalidad directa es una función afín con ordenada en el origen nula: $y = mx$ (pasa por el origen).<br>Una función constante es una función afín con pendiente nula: $y = n$ (siempre toma el mismo valor y su gráfica es una recta horizontal).</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Función cuadrática</td>
<td>Una función cuadrática es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado dos:<br>$y = f(x) = ax^2 + bx + c$.<br>La gráfica de este tipo de funciones se llama parábola.<br>El punto más significativo de la parábola es el vértice y se calcula dándole a la variable independiente el valor $x = {-b}/{2a}$.<br><br>Si el coeficiente líder es positivo, el vértice es un mínimo y, si es negativo, un máximo.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Continuidad<br>Monotonía<br>Extremos<br>Simetría<br>Periodicidad</td>
<td>Una función puede ser continua en un intervalo si su gráfica no sufre “rupturas” (llamadas discontinuidades), creciente (decreciente) si su valor aumenta (disminuye) cuando lo hace la variable independiente, constante cuando siempre toma el mismo valor, par si la imagen de la variable independiente coincide con el de su opuesto, impar cuando el valor de la función para el opuesto de la variable independiente también es el opuesto y periódica si las imágenes de los valores obtenidos al sumar una cantidad fija (periodo) a la variable independiente coinciden.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

### Sistemas de representación

**1.** Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda: *A*(5, 4); *B*(0, 2); *C*(–2, 0); *D*(3, –1.3); *E*(1.5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3). Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está.

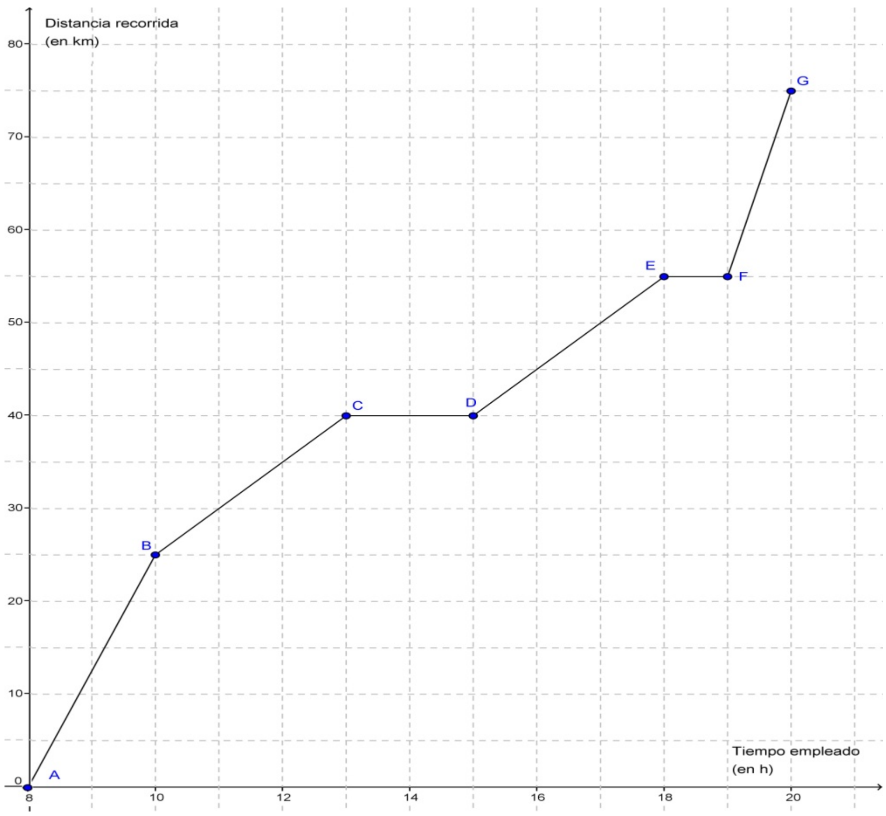
**2.** Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

**3.** Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
*A*(0, 4); *B*(0, 2.3); *C*(0, –2); *D*(0, –1). ¿Qué tienen en común todos ellos?

**4.** Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de ordenadas. ¿Qué tienen en común?

**5.** Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

**6.** La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:




a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

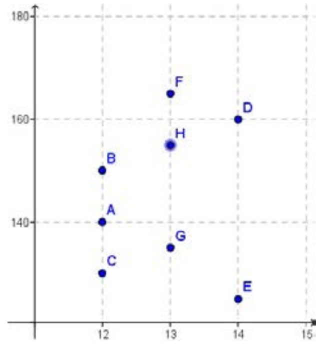
## Funciones y tipos de funciones

**7.** Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.

b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.

**8.** La altura y la edad de los componentes de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:




a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura?

b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad?

c) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué?

d) ¿Y la relación entre la edad y la altura? Realiza una gráfica similar a la anterior para representar esta situación.

**9.** La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

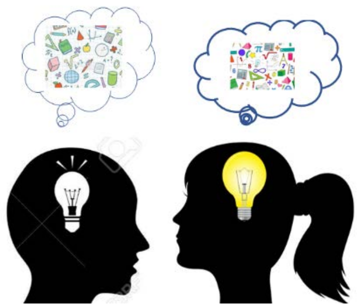
a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Dibuja la gráfica.

c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3.14).

d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

**10.** Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9° C. Determina:



a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30° C?

c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?

d) Si la temperatura en la superficie es de 12° C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

**11.** Dibuja la gráfica de la función parte entera: $y = E(x)$.

**12.** Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama *x* a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de *x*. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

**13.** Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

**14.** Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es *x*? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**15.** Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada en el origen 6.

**16.** Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ y $C(13, 15)$.

**17.** Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.

**ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN**

**18.** Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1.5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.

**19.** Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

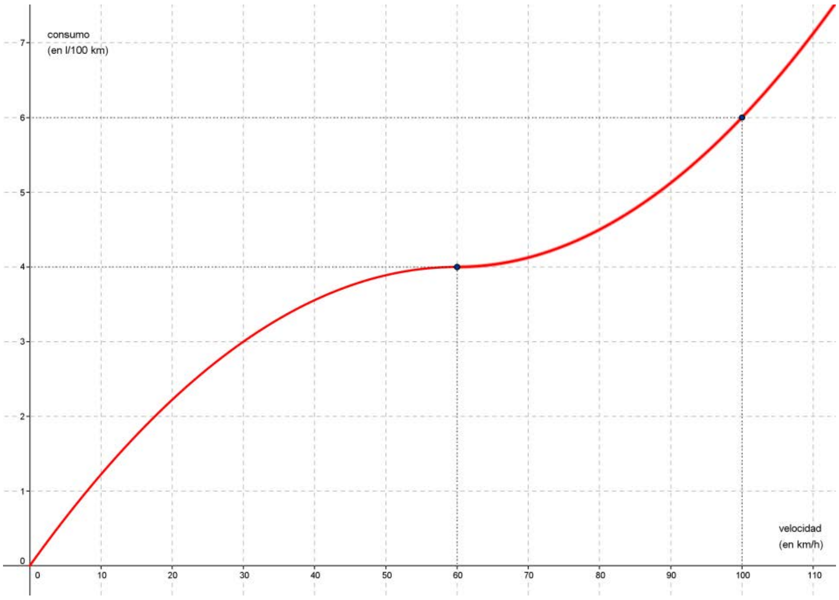
a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

**20.** Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

*Ayuda:* $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

**21.** El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.




a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la independiente?

c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?

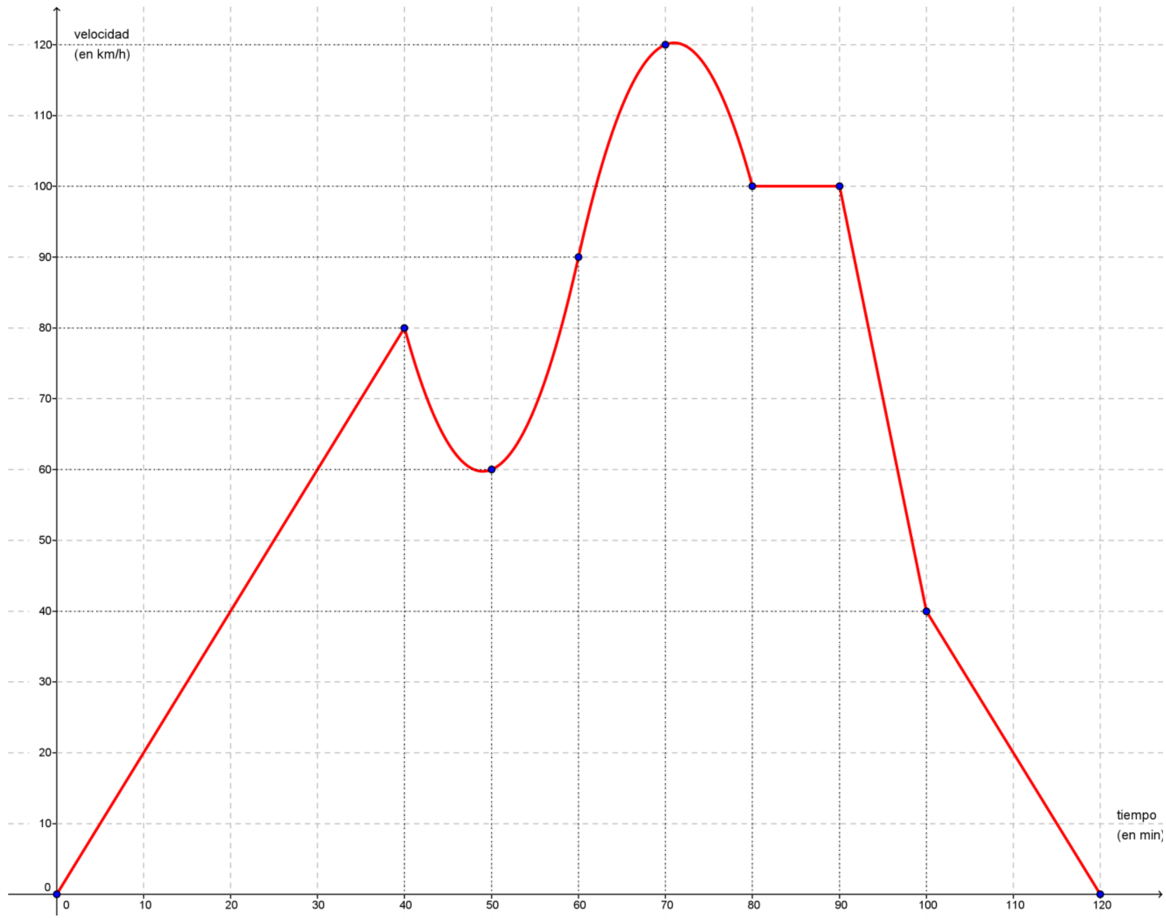
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

e) Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

## Características de las funciones

**22.** Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

**23.** Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.




a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

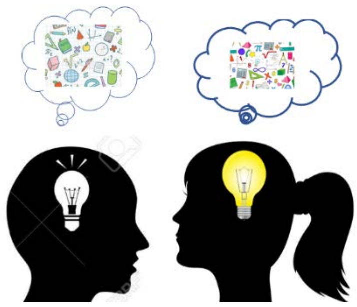
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**24.** Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1.20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:



a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

**25.** Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 x tiempo
b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
c) A partir del día 45: altura = 135.

**26.** Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma:

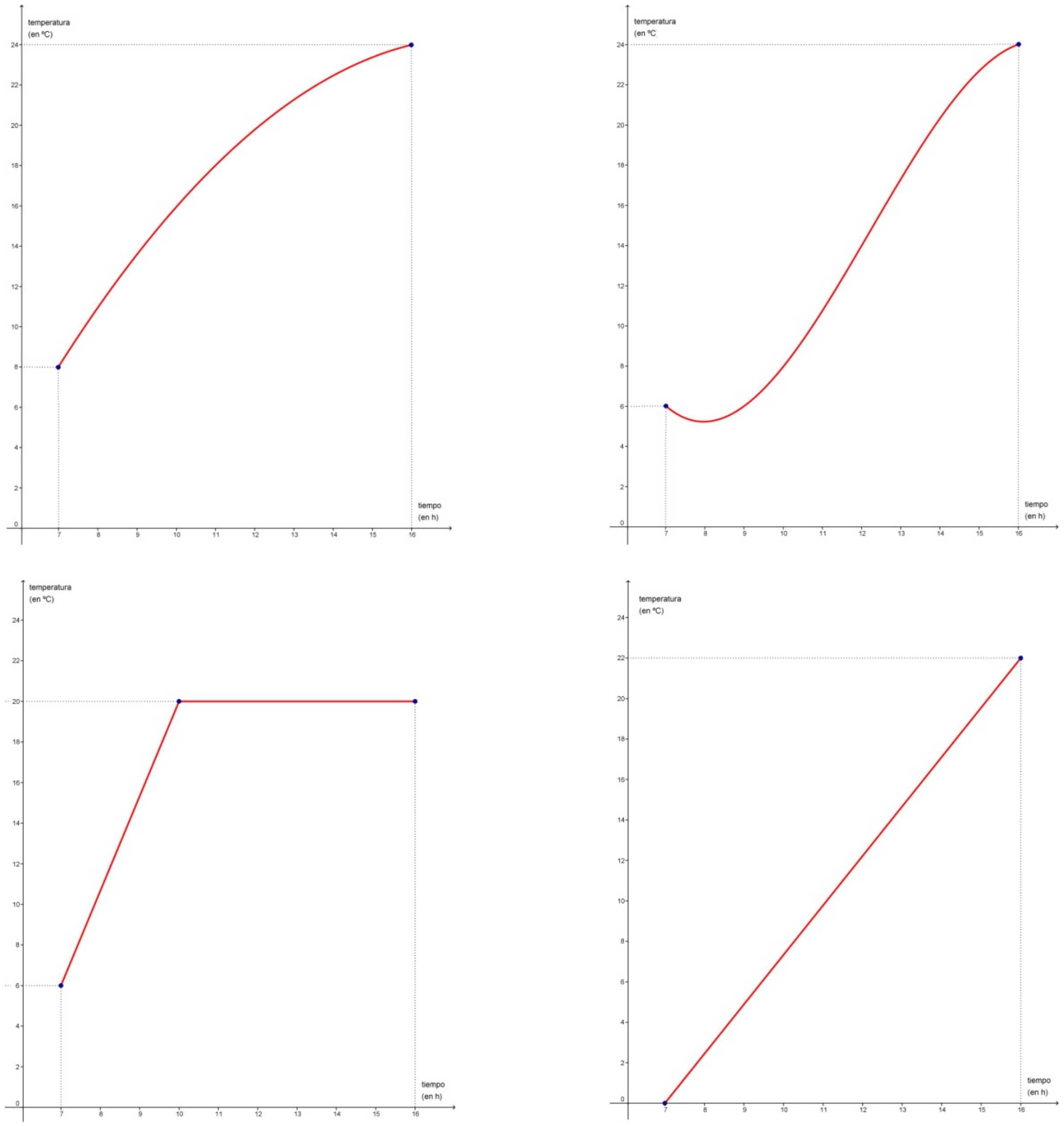
- Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto.
- Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$.
- Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$.
- Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

**27.** Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el tema: monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$.
b) Opuesto e inverso de un número: $f(x) = \frac{-1}{x}$.
c) *Mantisa* (a cada número le hace corresponder la diferencia entre dicho número y su parte entera): $M(x) = x - E(x)$.

**28.** Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):




a) Estudia la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

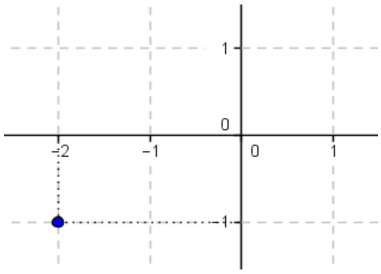
d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h y en Valladolid a partir del medio día la temperatura bajó, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

## AUTOEVALUACIÓN

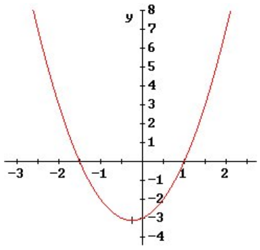
**1.** Las coordenadas del punto señalado son:

a) (–1, 2)
b) (–2, –1)
c) (1, 2)
d) (1, –2)

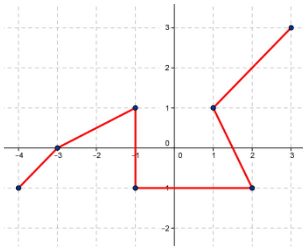



**2.** La única gráfica que no corresponde a una función es:

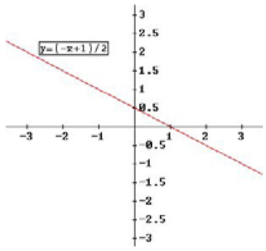
a)



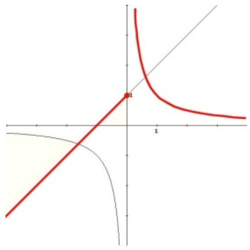
b)



c)




d)



**3.** La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

| *x* | *y* |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |

b)

| *x* | *y* |
|---|---|
| –1 | –3 |
| 0 | –3 |
| 1 | –3 |
| 2 | –3 |

c)

| *x* | *y* |
|---|---|
| –3 | 9 |
| –1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 2 | 4 |

d)

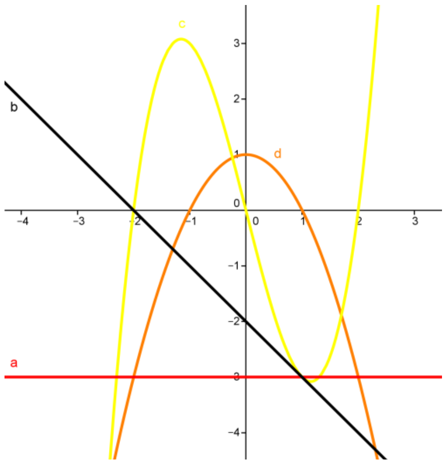
| *x* | *y* |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |
| 4 | 6 |
| 0 | 3 |

**4.** La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = -4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = -x - 1$

**5.** La única gráfica de una función afín no constante es:

a)
b)
c)
d)





Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

**6.** La única función cuadrática es:

a) $y = -2x$  b) $y = 3x + 1$  c) $y = -2x^2 + 3x$  d) $y = -x^3 - 1$

**7.** La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (3, 4) es:

a) $y = -2x^2$  b) $y = 3x^2 - x + 1$  c) $y = -2x^2 + 3x$  d) $y = -x^2 + 6x - 5$

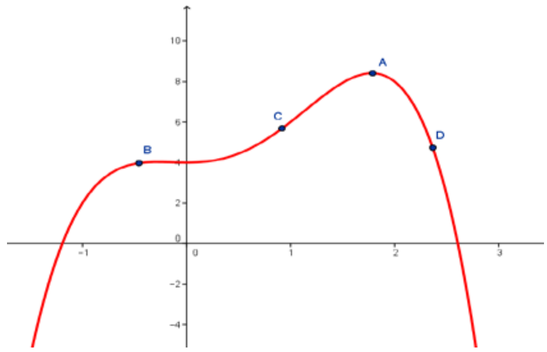
**8.** El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

a)

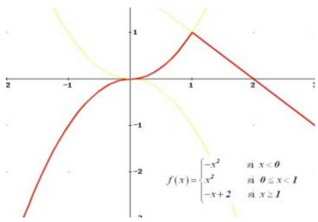
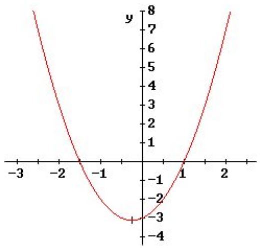
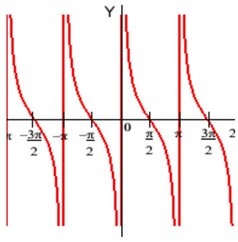
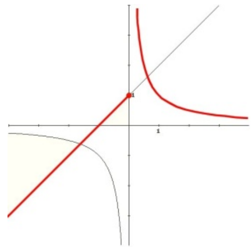
b)

c)

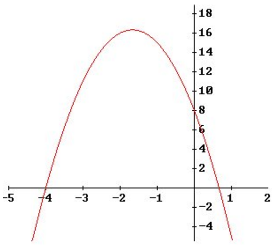
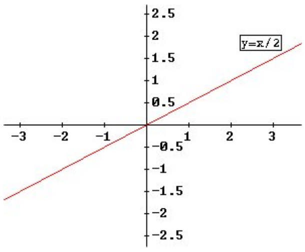
d)

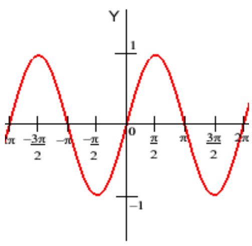
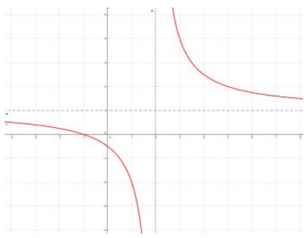



**9.** La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

**10.** La única gráfica que corresponde a una función que es creciente hasta $x = -2$, pero luego deja de serlo, es:

a)  b) 

c)  d) 


Autor: José Gallegos Fernández
Ilustraciones: José Gallegos Fernández